

الأدھم



التفاضل وحساب المثلثات

الصف الثانى الثانوى
الفصل الدراسى الثانى

اسم الطالب /

المدرسة /

الفصل /

اعداد أ / محمد أدھم
ت / ٠١٠٠٧٤٥١٩٥٧

ثانياً: دالة متوسط التغير

(١) دالة متوسط التغير

$$م(ه) = \frac{س(ه) - س(١٥)}{ه} = \frac{س(١٥+ه) - س(١٥)}{ه}$$

(٢) قيمة متوسط التغير

$$\frac{س(١٥) - س(٥)}{١٥ - ٥} = \frac{٥٥ - ٣٥}{١٠}$$

الدرس الاول "معدل التغير"

أولاً: دالة التغير ت(ه)

$$ت(ه) = س(١٥+ه) - س(١٥)$$

إذا كانت $س(١٥) = ٣٥$ و $س(١٥+٣) = ٤٦$
فأوجد



(٧) دالة التغير عند $س = ٣$ ثم اكتب قيمة ت(٣)
(٨) مقدار التغير في $س(١٥)$ عندما تتغير $س$

س ١ إلى ٤ و ٤

الحل

(٧) عند $س = ٣ \leftarrow ت(ه) = س(١٥+٣) - س(١٥)$

$$ت(٣) = س(١٥+٣) - س(١٥) = ٤٦ - ٣٥ = ١١$$

$$٤٦ - ٣٥ = ١١$$

$$٤٦ - ٣٥ = ١١ \leftarrow ت(٣) = ١١$$

٤ =

$$\therefore ت(ه) = س(١٥+ه) - س(١٥) = ٤٦ + ٣ه - ٣٥$$

$$= ١١ + ٣ه$$

$$ت(١٥) = ١١ + ٣(١٥) = ٥٦$$

(٨) مقدار التغير في $س(١٥)$ عندما تتغير $س$

$$س(١٥) = ٤٦ = ٣٥ + ١١$$

$$١١ = ٤٦ - ٣٥$$

$$١١ = ٤٦ - ٣٥$$

إذا كانت $س(١٥) = ٣٥$ و $س(١٥+٣) = ٤٦$
فأوجد



دالة متوسط التغير عند $س = ٣$ ثم اكتب $ت(٣)$

متوسط التغير عندما تتغير $س$ من ٥ إلى ١٥

الحل

$$س(١٥) = ٣٥ = ٣٥ + ٠$$

$$ت(٣) = س(١٥+٣) - س(١٥) = ٤٦ - ٣٥ = ١١$$

$$س(١٥) = ٣٥ = ٣٥ + ٠$$

$$٤٦ = ٣٥ + ١١$$

$$١١ = ٤٦ - ٣٥$$

$$١١ = ٤٦ - ٣٥$$

$$\therefore ت(ه) = \frac{س(١٥+ه) - س(١٥)}{ه} = \frac{٤٦ + ٣ه - ٣٥}{ه}$$

$$ت(ه) = ١١ + ٣ه$$

$$ت(٣) = ١١ + ٣(٣) = ٢٠$$

الحل

$$= ٢٠$$

$$= ٢٠$$

التغير

ثالثاً: معدل التغير

معدل التغير = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y(2) - y(1)}{2 - 1}$$

مثال ٣

إذا كانت $y = 2x^2 - 3x + 5$ فاحسب معدل التغير للدالة عند $x=2$

الحل

صنعيين دالة متوسط التغير وبعد عيده نأخذ $\Delta x = 1$

$$\frac{y(2) - y(1)}{2 - 1} = \frac{(2)^2 - 3(2) + 5 - (1)^2 - 3(1) + 5}{2 - 1}$$

$$= \frac{4 - 6 + 5 - 1 - 3 + 5}{1} = \frac{4 - 6 + 5 - 1 - 3 + 5}{1}$$

$$= 4 - 6 + 5 - 1 - 3 + 5 = 4$$

$$= 2 - 1 + 5 = 6$$

$$6 - 1 = 5 = (2) \times 2 - (1) = \frac{y(2) - y(1)}{2 - 1}$$

$$\frac{y(2) - y(1)}{2 - 1} = \frac{4 - 1}{2 - 1} = \frac{3}{1} = 3$$

∴ معدل التغير عند $x=2$ هو $\frac{3}{1} = 3$

1 =

تدريب

إذا كان $y = 2x^2 - 5x + 7$ فاحسب معدل التغير للدالة عند $x=3$

تدريب

أوجد مع كل ما يلي

١- أخطبوط

٢- عنكبوت

٣- عندليب
٤- بلا تفاضل بلا عرف

مثال ٤ إذا كانت $y = 2x^2 - 3x + 5$

فاحسب معدل التغير عند $x=2$

عند $x=1$ إلى $x=2$ ثم استنتج

معدل التغير في y عند $x=2$

الحل

$$y = 2x^2 - 3x + 5$$

$$y(2) - y(1) = (2)^2 - 3(2) + 5 - (1)^2 - 3(1) + 5$$

$$= \frac{(2)^2 - 3(2) + 5 - (1)^2 - 3(1) + 5}{2 - 1}$$

$$= \frac{4 - 6 + 5 - 1 - 3 + 5}{1} = 4$$

معدل التغير = $\frac{y(2) - y(1)}{2 - 1} = \frac{4 - 1}{2 - 1} = 3$

$$= \frac{4 - 1}{2 - 1} = 3$$

$$= \frac{4 - 1}{2 - 1} = 3$$

$$\frac{4 - 1}{2 - 1} = \frac{3}{1} = 3$$

عند $x=2$ هو $\frac{3}{1} = 3$

مثال ٥

إذا كانت $(س) = ١٥$ صبت ١٠٠ فأوجدعدد التغير عند $س = ١٥$ ثم اصب هذا العدد عند $س = ٢٥$

الحل

$$\text{عند } س = ١٥ \text{ يكون } م(ه) = \frac{س(س+١)(٢س+١)}{٥}$$

$$\frac{س(س+١)(٢س+١)}{٥} = م(ه)$$

وكونه عدد التغير = $م(ه)$

$$\text{تغير} = \frac{س(س+١)(٢س+١)}{٥}$$

$$\frac{1}{٢} = \frac{1}{١٥} \times \frac{1}{٢} =$$

$$\frac{1}{١٥ \times ٢} =$$

عند $س = ١٥$ وهو يقسم للباقي

$$\text{يكون العدد} = \frac{1}{٢٥ \times ٢} = \frac{1}{٥٠} = \frac{1}{١٠} = \text{او}$$

تدريب أوجد دالة متوسطة التغير

في $س$ صبت $(س) = ١٥$ ثم اصب عدد التغير عند $س = ٩$

الحل

نأخذ الفرق في المرافعة

مثال ٦

يصبى حجم من زينة للكبتر يا عند

أى لحظة $(ن)$ بالرقائق بالسرعةد $(ن) = ٢ن^٣ + ١٠٠$ مليجرام أوجدعدد النوال الخبز عند $ن = ٥$

الحل

$$د(ن) = ٢ن^٣ + ١٠٠$$

عدد النوال الخبز = دالة عدد التغير

$$\text{تغير} = \frac{د(ن) - د(ن+١)}{٥}$$

$$د(ن, ه) = ٢(ه+١, ن) + ١٠٠$$

$$د(ن) = ٢ن^٣ + ١٠٠$$

$$\therefore \text{عدد} = \frac{٢(ه+١, ن) + ١٠٠ - ٢ن^٣ - ١٠٠}{٥}$$

$$\text{تغير} = \frac{٢(ه+١, ن) - ٢ن^٣}{٥}$$

$$٢ \times \text{تغير} = \frac{٢(ه+١) - ٢ن^٣}{٥}$$

$$٦ = \frac{٢}{٥} \times ٣ \times ٢ =$$

عند $ن = ٥$ يكون العدد = $٥ \times ٦ = ٣٠$

تدريب نقاسه من لصابون كروية لكل لتر

حين نزل محافظه على شكلها الكروي اصب

متوسط التغير في صافة الملح عندما يتغير نصف

قطرها من ٥ د. إلى ٦ د. سم



صفيه وسديه على شكل مربع
تتمدد بانتظام مختلفه بكافه
اصب متوسط التغير في ساهه
طبيعا عندما يتغير طول ضلعها
من ٣ سم إلى ٤ سم ثم اصب
سلك التغير عندما يكون طول الضلع
٥ سم

الحل

بفرض انه طول الضلع س s والمساحة $A(s)$

$$A(s) = s^2$$

واله متوسط التغير = ΔA

$$\Delta A = A(s_2) - A(s_1)$$

$$\Delta A = s_2^2 - s_1^2$$

$$\Delta A = s_2^2 + s_1^2 - 2s_1s_2$$

$$\Delta A = \frac{(s_2 + s_1)(s_2 - s_1)}{s_1}$$

بوضع $s_1 = 3$ و $s_2 = 4$ $\Delta A = 4^2 - 3^2 = 7$

\therefore متوسط التغير = $3 \times 2 + 4 = 10$

← واله سلك التغير = $\frac{\Delta A}{\Delta s}$

$$\frac{7}{10} = 0.7$$

ولحساب معدل التغير عند $s = 0$

$$10 = 0 \times 2 = 0$$



المساحة = (طول الضلع) \times س

المحيط = ٤ (طول الضلع) \times س

المتطيل

المساحة = الطول \times العرض

المحيط = (الطول + العرض) \times ٢

الدائرة

المساحة = πr^2

المحيط = $2\pi r$



المساحة = $4\pi r^2$

الحجم = $\frac{4}{3}\pi r^3$



المساحة الجانبية = ٤ س \times س

المساحة الكلية = ٦ س \times س

الحجم = س \times س \times س

الزاوية التي يكوها

ظا (ل) = ١٢

ص (ن) = ظا = ١٢ = ١٤ = ١٥

الدرس الثاني: الاشتقاق

تدريب أوجد ميل المماس للمنحنى

د(س) = س^٣ - ٤ عند النقطة

م (٣-٤) ثم أوجد قياس الزاوية التي

يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند م

ميل التنزي = $\frac{د(س) + هـ - د(م)}{س - م}$

= ميل المماس للمنحنى عند

(س، د(س))

ملوحة تدمية بين المماس = ظا لزاوية التي

يصنعها مع الاتجاه الموجب للسينات

تدريب باستخدام تعريف المشتق أوجد

مشتق د(س) = س^٢ + س - ٥ ثم أوجد

ميل المماس عند م (٣، ١٠) و ل زاوية

مثال ١ أوجد ميل المماس للمنحنى

د(س) = س^٣ - ٣ عند النقطة

م (٢، ٥) ثم أوجد قياس الزاوية

الموجبه التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور

السينات عند النقطة م لا تترن رفقته

الحل

د(٢) = ٢^٣ - ٣ = ٨ - ٣ = ٥

∴ النقطة (٢، ٥) تقع على المنحنى

ميل المماس = $\frac{د(س) + هـ - د(م)}{س - م}$

ميل المماس = $\frac{[٢ - ٣] - [٣ - ٣(٥ + ٢)]}{٢ - ٣}$

ميل المماس = $\frac{٢ + ١ - ٣ - (٥ + ٢) - ٣}{٢ - ٣}$

ميل المماس = $\frac{٢ - ٣(٥ + ٢)}{٢ - ٣}$

١٢ = ٤ × ٣ = ٢ × ٣ =

مثال ٢ اثبت أن د(س) = س^٣ - ٣

قابلة للاشتقاق عند س = ١

الحل

∴ الجواب = ع ∴ ا د للمكان

د(١) = ١ - ٣ = -٢

د(١) = $\frac{د(س) + هـ - د(م)}{س - م}$

ميل المماس = $\frac{[١ - ٣] - [٣ - ٣(٥ + ١)]}{١ - ١}$

ميل المماس = $\frac{١ - ٣ - (٥ + ١) - ٣}{١ - ١}$

∴ الجواب = ع ∴ ا د للمكان

رأيت قابلية الاستقارة

عند $n=2$

$$\left. \begin{array}{l} 2 < 5 < 6 < 9 \\ 2 \leq 6 < 9 < 2 \end{array} \right\} = (n) \text{ درس}$$

الحل

المجال = \mathbb{Z} ، الدالة معرفة عند $n=2$

$$1 = 9 - 8 = 9 - 2 \times 4 = (2) \text{ د}$$

$$\text{د}^{(2)} = \frac{\text{د}^{(2)} - (\text{د} + 2) \text{ د}}{2} \leftarrow \text{د}$$

$$= \frac{\text{د}^{(2)} - [2 - (\text{د} + 2)]}{2} \leftarrow \text{د}$$

$$= \frac{2 + \text{د} - 2 + \text{د} + 2 + 2}{2} \leftarrow \text{د}$$

$$= \frac{2 + (\text{د} + 2)}{2} \leftarrow \text{د}$$

$$\text{د}^{(2)} = \frac{\text{د}^{(2)} - (\text{د} + 2) \text{ د}}{2} \leftarrow \text{د}$$

$$= \frac{\text{د}^{(2)} - [2 - (\text{د} + 2)]}{2} \leftarrow \text{د}$$

$$= \frac{\text{د}^{(2)} - (\text{د} + 2) \text{ د}}{2} \leftarrow \text{د}$$

$$= \frac{\text{د}^{(2)} - 2}{2} \leftarrow \text{د}$$

$$\therefore \text{د}^{(2)} = (\text{د} + 2) \text{ د}$$

∴ الدالة قابلة للاستقارة

عند $n=2$

نظريه

إذا كانت $n = 2$ (درس)قابلة للاستقارة عند $n = P$ فإنها تكون متصلة عند P

ملاحظات هامة خالص

(١) عكس النظرية غير صحيح دائماً
يعني [كل دالة قابلة للاستقارة تكون
متصلة وليس كل دالة متصلة تكون

قابلة للاستقارة]

(٢) إذا كانت الدالة غير متصلة
عند نقطة فإنها تكون غير قابلة

للاستقارة عند هذه النقطة

(٣) عند حيث قابلية الاستقارة عند
نقطة في مجالها تبدأ حيث لا تقبلها

فإنه كانت متصلة حيث الاستقارة

وإنه كانت غير متصلة فإنها تكون

غير قابلة للاستقارة.

رأيت قابلية الاستقارة

مثال ٤

عند $n=1$

$$\left. \begin{array}{l} 1 < 2 < 3 < 4 \\ 1 \leq 1 < 2 < 3 \end{array} \right\} = (n) \text{ درس}$$

الحل

تدريب

إثبات قابلية الاستقامة عند $\pi = \pi$

$$\left. \begin{array}{l} \pi \geq \pi \text{ حاس } \\ \pi < \pi \text{ حاس } \end{array} \right\} = (\pi) \text{ حاس}$$

فتاوى

إذا كانت $\pi = \pi + \pi$

ويصل الحاس للنقطة عند $(1-1)$ لإثباته

عده $\pi = \pi$ فاحده قمتين π كين

الحل

يصل الحاس للنقطة عند $(1-1) = \pi = \pi$

$$\pi = \frac{\pi - (\pi + 1)}{\pi} \text{ حاس} = \pi$$

$$\frac{[\pi + \pi] - [\pi + (\pi + 1)\pi]}{\pi} \text{ حاس} = \pi$$

$$\frac{\pi - \pi - \pi + \pi + \pi + \pi + \pi}{\pi} \text{ حاس} = \pi$$

$$\frac{(\pi + \pi)}{\pi} \text{ حاس} = \pi$$

$$\pi = \pi = \pi + \pi \text{ حاس} = \pi$$

$$\pi = \frac{\pi}{\pi} = \pi \therefore \pi = \pi$$

النقطة $(1-1)$ ولانحنى اللول

$$\therefore (1) = 1$$

$$\therefore 1 = \pi + \pi$$

$$0 = \pi - 1 = \pi - 1 = 0$$

أولاً ثبت الاتصال عند $\pi = 1$

$$1 = 1 + 1 = 1 \text{ حاس} \text{ ①}$$

$$1 = 1 + 1 = (1 + 1) \text{ حاس} = 1 \text{ حاس} \text{ ②}$$

$$1 = 1 + 1 = (1 + 1) \text{ حاس} = 1 \text{ حاس} \text{ ③}$$

س ① ② ③ : لإثبات اتصاله عند $\pi = 1$

ثانياً ثبت قابلية الاستقامة عند $\pi = 1$

$$\frac{1 - (\pi + 1)}{\pi} \text{ حاس} = 1 \text{ حاس}$$

$$\frac{1 - [\pi + (\pi + 1)]}{\pi} \text{ حاس} = 1 \text{ حاس}$$

$$\frac{\pi - \pi + \pi + \pi + \pi}{\pi} \text{ حاس} = 1 \text{ حاس}$$

$$1 = \frac{(\pi + 1)}{\pi} \text{ حاس} = 1 \text{ حاس}$$

$$\frac{1 - (\pi + 1)}{\pi} \text{ حاس} = 1 \text{ حاس}$$

$$1 - [\pi + (\pi + 1)] \text{ حاس} = 1 \text{ حاس}$$

$$1 = \frac{\pi - \pi + \pi + \pi}{\pi} \text{ حاس} = 1 \text{ حاس}$$

$\therefore 1 = 1 = 1$: لإثبات قابلية الاستقامة عند $\pi = 1$

فويله فويله بس كمل

الدرس الثالث

قواعد الاشتقاق

١- مشتق الدالة الثابتة = صفر

$$D(c) = 0$$

$$D(x^n) = nx^{n-1}$$

٢- مشتق $D(x^n) = nx^{n-1}$

نقل الأس وننقصه بمقدار واحد

$$D(x^5) \leftarrow 5x^4$$

$$D(x^3) \leftarrow 3x^2$$

$$D(x^{-4}) \leftarrow -4x^{-5}$$

$$D(x^{\frac{1}{2}}) \leftarrow \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$D(x^{\frac{1}{3}}) \leftarrow \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$\frac{1}{x} = x^{-1} \rightarrow D(x^{-1}) = -1x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$D(x^{\frac{1}{4}}) \leftarrow \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$$

$$D(x^{\frac{1}{5}}) \leftarrow \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}$$

$$D(x^{\frac{1}{6}}) \leftarrow \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}$$

أوجد مشتق كل مما يلي

١) $D(x^3 - 5x^2 + 7)$

٢) $D(x^2 - 10x)$

ب) $D(x^3 - 2x^2 + 3x + 1) = (3x^2 - 4x + 3)$

ج) $D(x^5 + 3x^2 - 2) = (5x^4 + 6x)$

$$D(x^5 + 3x^2 - 2) = 5x^4 + 6x$$

$$D(x^5 + 3x^2 - 2) = 5x^4 + 6x$$

$$D(x^5 + 3x^2 - 2) = 5x^4 + 6x$$

مشتق حاصل ضرب والتبعية

$$= \text{الأولى} \times \text{مشتق الثانية} + \text{التبعية} \times \text{مشتق الأولى}$$

أوجد $D(x^2)$ إذا كان

$$D(x^2) = (2x) \times (1) = 2x$$

ثم اوجد $D(x^2)$ عندما $x=1$

الكل

الأولى مشتق الأولى

$$(2x) \times (1) = 2x$$

التبعية مشتق الثانية

$$(1) \times (2x) = 2x$$

$$D(x^2) = (2x) \times (1) + (1) \times (2x) = 4x$$

عندما $x=1$

$$(2 \times 1) \times (1) + (1) \times (2 \times 1) = 4$$

$$= 4$$

متتقة (الفوس)

$$= \text{متتقة الفوس} \times \text{متتقة ما بدائل الفوس}$$

متتقة رالة الراه
تامة السله

$$\text{ازاكان ص} = \text{د} (\text{ع})$$

$$\text{ك} \text{ع} = \text{ر} (\text{س})$$

$$\text{فأوبه ص} = \frac{\text{ص}}{\text{د}} \times \frac{\text{ص}}{\text{ع}} = \frac{\text{ص}}{\text{دع}}$$

$$\text{ازاكان ص} = (\text{س}^3 + \text{ع})^9$$

$$\text{فأوبه ص} = \frac{\text{ص}}{\text{دس}}$$

اقل

مضام
٢

$$\frac{\text{ص}}{\text{دس}} = 9 (\text{س}^3 + \text{ع})^8 \times \text{س}^3$$

$$= 27 \text{س}^9 (\text{س}^3 + \text{ع})^8$$

$$\text{ازاكانت ص} = \text{ع}^2$$

$$\text{ك} \text{ع} = \text{س}^3 - \text{س}^3 + \text{ع}^2 + \text{ع}$$

$$\text{فأوبه ص} = \frac{\text{ص}}{\text{دس}}$$

اقل

مضام
١

$$\text{ازاكان ص} = (1 + \text{س}^7)^0$$

$$\text{فأوبه ص} = \frac{\text{ص}}{\text{دس}}$$

اقل

تدريبات

$$\text{ازاكان ص} = \left[\frac{\text{ع} - \text{س}^7}{1 + \text{س}} \right]^0$$

$$\text{فأوبه ص} = \frac{\text{ص}}{\text{دس}}$$

اقل

مضام
٣

$$\frac{\text{ص}}{\text{دس}} = \frac{\text{ع} (\text{س}^7 - \text{س}^7) - (\text{س}^7) (1 + \text{س})}{\text{س}^7 (1 + \text{س})} \times \left[\frac{\text{ع} - \text{س}^7}{1 + \text{س}} \right]^0 \times 0 = \frac{\text{ص}}{\text{دس}}$$

$$= \frac{\left[\frac{\text{ع} + \text{س}^7 + \text{س}^7}{\text{س}^7 (1 + \text{س})} \right]^0 \times \left[\frac{\text{ع} - \text{س}^7}{1 + \text{س}} \right]^0 \times 0 =$$

$$= \frac{0 (\text{ع} - \text{س}^7) (\text{ع} + \text{س}^7 + \text{س}^7)}{\text{س}^7 (1 + \text{س})}$$

$$\frac{\text{ص}}{\text{دع}} = \text{ع}^2$$

$$\frac{\text{ص}}{\text{دس}} = \text{س}^3 - \text{س}^3 + \text{ع}$$

$$\frac{\text{ص}}{\text{دس}} = \frac{\text{ص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{ص}}{\text{دع}} = \left(\text{س}^3 - \text{س}^3 + \text{ع} \right)^2$$

$$\text{بالتصوير ص} = \text{ع} (\text{س}^3 - \text{س}^3 + \text{ع})$$

$$\therefore \frac{\text{ص}}{\text{دس}} = \text{ع} (\text{س}^3 - \text{س}^3 + \text{ع})^2 (\text{س}^3 - \text{س}^3 + \text{ع})$$

$$\text{ازاكان ص} = \text{ع} + \text{ع}^2$$

$$\text{ك} \text{ع} = \text{س}^2$$

$$\text{فأوبه ص} = \frac{\text{ص}}{\text{دس}} \Big|_{\text{س}^2=1}$$

تدريبات

أوجد قيم من التي تجعل

مثال ٤

و (س) = ٧ إذا كان

و (س) = ٣ - ٥ + ٢

الحل

و (س) = ٣ - ٥ = ٧

٣ - ٥ = ٧

٣ + ٧ = ٣ - ١٢

٤ = ٣ - ٢ ± = ٢ ± = ٤

أوجد قيم من التي تجعل

تدريب

و (س) = ٧ حيث و (س) = (٥ - س)

الحل

ص = ١ - ٥ + ٣ - ١٢ + ٨ + ١

الحل

١٥ - ٣ - ٢٤ + ٨ = ١

١٢ - ٥ + ٣ - ٨ + ١ = ٢

إذا كان ص دالة قابلة للاشتقاق فإنه

نتيجة

د (ص) = (٢) = ١/٢ × ١/٢ × ١/٢

أوجد قيم من كل مما يلي

مثال ٦

(١) ص = ٣ - ٤ + ٢

٣ = (١/٢) × ٤ - ٣ - ٤

٤ - ٣ - ٤ = ٣

٤ - ٣ - ٤ = ٣

(٢) ص = ٤ - ٥

مكونه مشتقه الجزر التربيعي لـ

١ / (الجزر) × مشتقه ما تحت الجزر =

أوجد قيم من كل مما يلي

مثال ٥

(١) ص = ٣ + ٢ + ٣

الحل

٢ = ٣ + ٢ + ٣

١ = ٣ + ٢ + ٣

إذا كان ص = ٢ + ٣ + ٥

تدريب

٢ + ٣ = ١/٢ + ٣

فاثبت أن

٣ - ١/٢ = ٣ - ١/٢ = ٣

الدرس الخامس
مشتقان الدوال المثلثية

المشتق	الدالة
جنا س	صا س
- صا س	جنا س
قا س	ظا س

مثان ١
أوجد $\frac{ص}{س}$ فى كل مما يلى

(٨) $ص = ٢ ظا ٣ س$

الحل

$\frac{ص}{س} = ٢ \times قا (٣ س) \times ٣$
 $= ٦ قا ٣ س$

مشتق الدالة \times مشتق الزاوية

(ب) $ص = ٢ جتا (٤ - ٣ س)$

الحل

$\frac{ص}{س} = ٢ جتا (٤ - ٣ س) \times (-٣)$
 $= -٦ جتا (٤ - ٣ س)$

(ج) $ص = ٢ جاس جتا س$

مشتق حاصل ضرب دالتين
 $\frac{ص}{س} = ٢ جاس (-جا س) + (٢ جاس) \times جتا س$
 $= -٢ جاس جا س + ٢ جاس جتا س$
 $= ٢ جتا س جتا س - ٢ جاس جا س$

(٥) $ص = ٢ س ظا س$

$\frac{ص}{س} = ٢ س \times قا س + ٢ ظا س$
 $= ٢ س قا س + ٢ ظا س$

(هـ) $ص = ٣ ظا ٣ س$

الحل

$\frac{ص}{س} = ٣ ظا (٣ س) \times قا (٣ س) \times ٣$
 $= ٦ ظا ٣ س قا ٣ س$

(و) $ص = ظا ٤ س$

الحل

$\frac{ص}{س} = قا ٤ س \times ١٢ س$
 $= ١٢ قا ٤ س$

مثان ٢
إذا كان $ص = ٢ س صا س جتا س$

فأثبت أنه $\frac{ص}{س} = جاس س + صا س ظا س$

الحل

$ص = ٢ س صا س جتا س$
 $\frac{ص}{س} = ٢ صا س جتا س$
 $= ٢ (جا س + صا س ظا س)$
 $= ٢ جا س + ٢ صا س ظا س$
وهو المطلوب

اوجد ميل المماس لمنحنى

مثال ٣

(ج) من = من^٣ فمماس من

من = مماس + مماس^٢ = $\frac{\pi}{6}$

الحل

الحل

$\frac{من}{من^٢} = من$

$\frac{من}{من} = مماس + مماس^٢$
 $\frac{\pi}{6} = من$

$\frac{من^٣(من^٢) - (من^٢)٣}{(من^٢)^٢} = \frac{من}{من}$

ميل المماس = مماس^٢ + مماس^٢ × ٢
 $٢ = (١) × ٢ + ٠ =$

$\frac{من^٣ × مماس - مماس^٣}{(من^٢)^٢} =$

مثال ٤ اوجد ميل المماس

(د) من = مماس

$\frac{من^٣}{من^٢} - \frac{من^٣}{من^٢} =$

الحل

$من^٣ - مماس^٣ = مماس^٣ - مماس^٣$

$\frac{[من - مماس] - [من - مماس]}{(من - مماس)^٢} = \frac{١}{من - مماس} = من$

مثال ٥ اذا كانت من = $\sqrt{٣ - ٧}$

$\frac{من}{من} = \frac{من}{من} =$

$\frac{من}{من} = مماس$
 فاشتبه انه $\frac{من}{من} = ٣ + \frac{من}{من}$
 $\frac{\pi}{6} = من$

$من × مماس =$

الحل

(هـ) من = مماس

الحل

$\frac{من^٣}{من^٢} = \frac{من^٣}{من^٢} = \frac{من}{من}$

$\frac{١}{(من - مماس)} = \frac{١}{من - مماس} = من$

$\frac{من^٣}{من^٢} × \frac{من^٣}{من^٢} = \frac{من}{من}$

$\frac{من^٣}{من^٢} × (من - مماس) =$
 $من^٣ × مماس - مماس^٣ =$

$\frac{من^٣ - مماس^٣}{من^٢} = \frac{من}{من}$

او $من^٣ × مماس - مماس^٣ =$

$\frac{من^٣}{من^٢} = \frac{من^٣ - مماس^٣}{من^٢} = \frac{من}{من}$

إزا كان

محل ٨

$$ص = (جاس + جئاس)$$

$$فأثبتناه $\frac{ص}{جس} = ٢$ جئاس$$

الحل

$$ص = (جاس + جئاس)$$

$$٢ = \frac{ص}{جس} = (جاس + جئاس) (جئاس - جاس)$$

$$٢ = (جئاس + جاس) (جئاس - جاس)$$

$$٢ = (جئاس - جاس)$$

$$٢ = جئاس - جاس$$

إزا كان ص = جاس - جئاس

محل ٦

$$اثبتناه $\frac{ص}{جس} = ٢$ جئاس$$

الحل

$$ص = جاس - جئاس$$

$$\frac{ص}{جس} = [٢ جاس - جئاس] - [٢ جئاس - جاس]$$

$$= ٢ جاس - جئاس + جئاس - ٢ جاس$$

$$= ٢ جاس - جئاس$$

$$٢ جاس - جئاس = وهو المطلوب$$

إزا كان ص = جاس

محل ٧

$$+ ١ جئاس$$

$$فأثبتناه أن $\frac{ص}{جس} = ١$$$

الحل

$$\frac{جئاس (١ + جئاس) - (جاس - جئاس) جاس}{(١ + جئاس) جس} = \frac{ص}{جس}$$

$$= \frac{جئاس + جئاس جئاس + جئاس جاس - جاس جاس}{(١ + جئاس) جس}$$

$$= \frac{جئاس + ١ جئاس}{(١ + جئاس) جس}$$

$$= \frac{١}{(١ + جئاس) جس}$$

$$١ = \frac{ص}{جس} (١ + جئاس)$$

$$وهو المطلوب$$

$$٩) \quad \text{م} = \text{م} + \text{ج}$$

٧- لإيجاد نقطه التقاطع مع محور السينات
نضع $\text{م} = ٠$ ، ونجيب فيه س
(٠، ٦)

٨- لإيجاد نقطه التقاطع مع محور الصادات
نضع $\text{س} = ٠$ ، ونجيب فيه م
(٠، ٦)

معادلة التماس بمعلوم ميل (م)
٦ نقطه التماس (س، ١٥)

$$\text{م} - ٢٤ = \text{م} (١٥ - \text{س})$$

معادلة العمودى

$$\text{م} - ١٥ = \frac{١}{\text{م}} (١٥ - \text{س})$$

الدرس السادس
تطبيقات على المشتقة

ثوية ملاطضان عند

١- إذا كان $\text{م} // \text{ل}$ فإنه $\text{م} = \text{ل}$

٢- $\text{م} \perp \text{ل}$ فإنه $\text{م} \times \text{ل} = -١$

٣- مماسه نجيب ميل العمودى بنقلب
الميل ونغير الإشارة

٤- ميل الموازى لمحور السينات = صفر
أو البسط = صفر

٥- ميل الموازى لمحور الصادات غير صفر
بعض المقام = صفر

٦- لإيجاد الميل

المشتقة الأولى

١) مثال → الزاوية التي يفتخها مع س^+

٢) لو قعطته (س، ١٥) (س، ٦)

$$\text{الميل} = \frac{\text{خزفه الصادات}}{\text{خزفه السينات}}$$

٣) لو صار له $\text{م} = \text{س} + \text{س} + \text{س} = ٠$

$$\text{الميل} = \frac{\text{معامل س}}{\text{معامل س}}$$

٤) مع مستقيم معلوم

الموازى = نفس الميل
العمودى بنقلب الكسر ونغير الإشارة

الحل

$$\frac{ص}{دس} = ٢ - ص = ٤$$

ميل الموازي لمحور السينات = ميل

$$\therefore ٢ - ص = ٤ = ٠$$

$$٢ = ص \quad ٤ = ص$$

بالتعويض في معادلة المنحنى [الإهليلج]

$$ص = ٢ = ٤ - (٢)٤ + ٣ = ١ -$$

$$\therefore \text{النقطة ص } (١ - ٢)$$

أوجد ميل المماس لمنحنى
 $ص = ١ - ٣ص + ٤$
 عند النقطة $(١ - ٢)$

مثال ١

الحل

$$\frac{ص}{دس} = ٢ - ص = ٣$$

$$\text{ميل المماس} = \frac{ص}{دس} = ٣ - ٢ = ١ = ١ -$$

أوجد النقطة الواقعة على
 المنحنى $ص = ٣ - ٣ص + ١$
 والتي عندها يكون المماس عمودي
 على المستقيم $ص = ٣ + ٦ = ٠$

مثال ٤

الحل

$$\frac{ص}{دس} = ٣ - ٣ص = ٦ - ٠$$

$$\therefore \text{ميل المماس} = ٣ - ٣ص = ٦ - ٠$$

$$\leftarrow \text{ميل المستقيم المعطى} = \frac{١ -}{٣} = \frac{١ -}{٣}$$

و: المماس عمودي عليه

$$\therefore \text{ميل المماس} = ٣ -$$

$$\therefore ٣ - ٣ص = ٦ - ٠$$

$$٠ = ٣ - ٣ص$$

$$٠ = ١ - ٣ص \quad \therefore ١ = (٣ص) (١ - ٣ص)$$

$$ص = ١ \pm$$

$$\text{عند } ص = ١ \quad \therefore ٤ = ٤ \quad \therefore \text{النقطة } (١ - ٤)$$

$$\text{عند } ص = ١ \quad \therefore ٦ = ٦ \quad \therefore \text{النقطة } (١ - ٦)$$

أى نقطة

أوجد النقطة الواقعة على المنحنى
 $ص = ٣ - ٣ص + ١$ والتي
 يكون عندها المماس موازياً لمحور السينات

مثال ٣

أوجد معادلتى المماس والعمود عليه للمنتهى

مثال ٥

$$ص = ٥ - ٣س + ٢س^٢ + ٤س^٣$$

عند النقطة (-٢, ١) الواقعة عليه

الحل

$$\frac{ص}{س} = ١٥ - ٦ + ٤س$$

$$٩ = (١٥ - ٦) + (٤ - ١)س$$

$$٩ = ٩ + ٣س$$

$$\frac{١}{٩} = \frac{ص}{س}$$

$$ص = ٩(١ + س)$$

$$٩ + ٩س = ٥ - ٣س + ٢س^٢ + ٤س^٣$$

$$٠ = ١١ - ٣س - ٢س^٢ - ٤س^٣$$

$$\frac{ص}{س} = \frac{١}{٩} = \frac{٥ - ٣س + ٢س^٢ + ٤س^٣}{س}$$

$$٠ = ١ + ٣س + ٢س^٢ + ٤س^٣$$

$$٠ = ١٧ - ٣س + ٢س^٢ + ٤س^٣$$

أوجد معادلتى المماس والعمود عليه للمنتهى

مثال ٦

$$\text{عند } \left(\frac{\pi}{٤}, \frac{\pi}{٤}\right)$$

الحل

أوجدتية P كمن

مثال ٧

إذا كان ميل المماس عند (٢, ١) للنتيغ ص = ٥ - ٣س + ٢س^٢ + ٤س^٣ هو

الحل

بالنقطة (٢, ١) عند (٢, ١)

$$١ = ٥ - ٦ + ٨ + ٣٢ \Rightarrow ٢ = ٣٧$$

$$٣ = ٥ - ٦ + ٨ + ٣٢$$

$$٥ = \frac{٣ - ٣٧}{٣}$$

$$٣ = ٥ - ٦ + ٨ + ٣٢ \Rightarrow ٣ = ٣٧$$

$$١ - ٣ = ٣ - ٢ = ١ \Rightarrow ١ = ٣ - ٢ = ١$$

$$\boxed{١ = ٣} \quad \boxed{٣ = ٢}$$

أوجد مساحة المثلث المكون من محور السينات والمماس والعمود عليه للمنتهى عند النقطة (٥, ٤)

مثال ٨

الحل

$$\frac{ص}{س} = \frac{٤}{٥} = \frac{٥ - ٣س + ٢س^٢ + ٤س^٣}{س}$$

$$\frac{٤}{٥} = \frac{٥ - ٣س + ٢س^٢ + ٤س^٣}{س}$$

$$٤س = ٥ - ٣س + ٢س^٢ + ٤س^٣$$

$$٠ = ٥ - ٧س + ٢س^٢ + ٤س^٣$$

$$\frac{٤}{٥} = \frac{٥ - ٧س + ٢س^٢ + ٤س^٣}{س}$$

$$٥ + ٧س - ٢س^٢ - ٤س^٣ = ٥$$

$$٠ = ١٣ - ٧س + ٢س^٢ + ٤س^٣$$

نقطة تقاطع المنتهى مع محور السينات (٥, ٣)

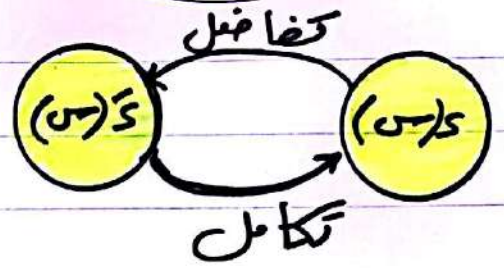
العمودى // // // (٥, ٣)

$$١٠ = ٣ - ١٣ = ١٠$$

$$٥ = ٥ - ٣ = ٢$$

$$\Delta = \frac{١}{٢} \times ١٠ \times ٢ = ١٠$$

الدرس السابع
التكامل



خاصة صانه

$$\int s^n ds = \frac{s^{n+1}}{n+1} + C$$

ننزود الاس (١) ونقسم على الاس الجديد

مثال ٢

أوجد $\int s^{\frac{3}{2}} ds$

$$= \frac{2}{5} s^{\frac{5}{2}} + C$$

(ب) $\int \sqrt{s} ds$

$$= \frac{2}{3} s^{\frac{3}{2}} + C$$

(د) $\int (2 + \sqrt{s} + \frac{1}{\sqrt{s}}) ds$

اكمل

$$= \int (2 + s^{\frac{1}{2}} + s^{-\frac{1}{2}}) ds$$

$$= 2s + \frac{2}{3} s^{\frac{3}{2}} + 2s^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= 2s + \frac{2}{3} \sqrt{s^3} + 2\sqrt{s} + C$$

(س) $\int (\frac{1}{s^2} + \sqrt{s} + 3) ds$

اكمل

$$= \int (s^{-2} + s^{\frac{1}{2}} + 3) ds$$

اكمل انفسه

مثال ١

أوجد $\int s^9 ds$

$$= \frac{1}{10} s^{10} + C$$

(ب) $\int s^9 ds = \frac{1}{10} s^{10} + C$

(ج) $\int s^{10} ds = \frac{1}{11} s^{11} + C$

(د) $\int s ds = \frac{1}{2} s^2 + C$

(هـ) $\int s^2 ds = \frac{1}{3} s^3 + C$

قاعدة واقفه

$$(1) \int (b + x)^n dx = \frac{(b + x)^{n+1}}{n+1} + C$$

$$C + \frac{(b + x)^{n+1}}{n+1} =$$

نقسم على معامل x ونزود الاس (١) ونقسم على الاس الجديد

$$(2) \int (d + x)^n dx = \frac{(d + x)^{n+1}}{n+1} + C$$

$$C + \frac{(d + x)^{n+1}}{(n+1)} =$$

اذا كان x داخل القوس مرفوع لاس
ومفروب في شقة فابدأ بالقوس
نزود على أس القوس (١) ونقسم
على الاس الجديد

أوجد حلًا

$$(P) \int (3 + x)^9 dx$$

الحل

$$C + \frac{(3 + x)^{10}}{10} \times \frac{1}{10} =$$

$$C + \frac{(3 + x)^{10}}{100} =$$

مثال ٤

$$(b) \int (x^2 + 3x - 2)^9 (2x + 3) dx$$

الحل

$$2x + 3 = (x^2 + 3x - 2) \cdot \frac{d}{dx} (x^2 + 3x - 2)$$

$$\therefore \int (x^2 + 3x - 2)^9 (2x + 3) dx =$$

$$= \frac{(x^2 + 3x - 2)^{10}}{10} + C$$

$$(d) \int (1 + x)(3 + x)^7 dx$$

الحل

$$\int (1 + x)(3 + x)^7 dx =$$

$$= \int (3 + x)^7 dx - \int (3 + x)^8 dx$$

$$= \frac{(3 + x)^8}{8} - \frac{(3 + x)^9}{9} + C$$

$$= \frac{(3 + x)^8}{8} - \frac{(3 + x)^9}{9} + C$$

$$= \frac{(3 + x)^8}{8} - \frac{(3 + x)^9}{9} + C$$

مثال ٣

$$(s) \int (x^3 - 3x^2 + 4x - 1)^0 (4x^2 + 3x - 2) dx$$

الحل

$$4x^2 + 3x - 2 = (x^3 - 3x^2 + 4x - 1) \cdot \frac{d}{dx} (x^3 - 3x^2 + 4x - 1)$$

$$\therefore \int (x^3 - 3x^2 + 4x - 1)^0 (4x^2 + 3x - 2) dx =$$

$$= \frac{(x^3 - 3x^2 + 4x - 1)^1}{1} \times \frac{1}{1} =$$

$$= \frac{(x^3 - 3x^2 + 4x - 1)}{1} + C$$

نتائج مهمه

كامل بعض الروال المختلفه

١- $\frac{1}{p} = \frac{1}{(b+ps)} \cdot \frac{b+ps}{p}$

٢- $\frac{1}{p} = \frac{1}{(b+ps)} \cdot \frac{b+ps}{p}$

٣- $\frac{1}{p} = \frac{1}{(b+ps)} \cdot \frac{b+ps}{p}$

١- $\frac{1}{p} = \frac{1}{(b+ps)} \cdot \frac{b+ps}{p}$

٢- $\frac{1}{p} = \frac{1}{(b+ps)} \cdot \frac{b+ps}{p}$

٣- $\frac{1}{p} = \frac{1}{(b+ps)} \cdot \frac{b+ps}{p}$

ملاحظات مهمه



أوجد

(P) $\frac{1}{(s-ps)}$

الحل

$\frac{1}{(s-ps)}$

$\frac{1}{s} - \frac{1}{s-p} = \frac{1}{(s-ps)}$

$\frac{1}{s} = \frac{1}{(s-ps)} + \frac{1}{s-p}$

- ١- $\frac{1}{p} = \frac{1}{(b+ps)} \cdot \frac{b+ps}{p}$
- ٢- $\frac{1}{p} = \frac{1}{(b+ps)} \cdot \frac{b+ps}{p}$
- ٣- $\frac{1}{p} = \frac{1}{(b+ps)} \cdot \frac{b+ps}{p}$
- ٤- $\frac{1}{p} = \frac{1}{(b+ps)} \cdot \frac{b+ps}{p}$
- ٥- $\frac{1}{p} = \frac{1}{(b+ps)} \cdot \frac{b+ps}{p}$
- ٦- $\frac{1}{p} = \frac{1}{(b+ps)} \cdot \frac{b+ps}{p}$
- ٧- $\frac{1}{p} = \frac{1}{(b+ps)} \cdot \frac{b+ps}{p}$

(P) $\frac{1}{(1 + \frac{1}{ps})}$

الحل

$\frac{1}{(1 + \frac{1}{ps})}$

$\frac{ps}{ps+1}$

$\frac{1}{p} = \frac{1}{(b+ps)} \cdot \frac{b+ps}{p}$

$\frac{1}{p} = \frac{1}{(b+ps)} \cdot \frac{b+ps}{p}$

أوجد خلاياي

مثال ٦

$$(د) \int (جاس + جئاس) دس$$

الحل

صنفك الترتيب

$$= \int (جاس + جئاس + جئاس + جئاس) دس$$

$$= \int (جاس + جئاس) دس$$

$$= جس - \frac{1}{2} جئاس + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$(هـ) \int (جئاس + جئاس) دس$$

الحل

صنفك الترتيب

$$= \int (جئاس + جئاس + جئاس + جئاس) دس$$

$$= \int (جئاس + جئاس + جئاس + جئاس) دس$$

$$= \int (جئاس + جئاس + جئاس + جئاس) دس$$

$$= جئاس + جئاس + جئاس + جئاس + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$(و) \int (جئاس - جئاس) دس$$

الحل

$$= \int (جئاس - جئاس) دس$$

$$= \int (جئاس - جئاس) دس$$

$$= جئاس - جئاس + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

انتهى التفاضل في سبيل

داوية

$$(ب) \int جئا (٥ - جس) دس$$

الحل

$$= \frac{1}{3} جئا (٥ - جس) دس + \frac{1}{3}$$

$$(ب) \int جئا (٢ - \frac{جس}{3}) دس$$

$$= \frac{1}{3} جئا (٢ - \frac{جس}{3}) دس + \frac{1}{3}$$

$$= ٣ جئا (٢ - \frac{جس}{3}) دس + \frac{1}{3}$$

$$(ج) \int (٣ + ٤ جئاس) دس$$

الحل

$$= \int (٣ + ٤ جئاس) دس$$

$$= \int (٣ + ٤ جئاس) دس$$

$$= \int (٣ + ٤ جئاس) دس$$

$$= ٤ جئاس - جس + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$(د) \int (جئا - \frac{جس}{6}) دس$$

الحل

$$= \frac{1}{6} جئا (٥ - جس) دس - (١ - ١) - \frac{جس}{6}$$

$$= ٢ جئا (٥ - \frac{جس}{6}) دس - \frac{جس}{6}$$

ثانياً حساب المثلثات

الدرس الاول :

زوايا الارتفاع والانخفاض

الدرس الثاني :

الدوال المثلثية لمجموع وفرق قياسى زاويتين

الدرس الثالث :

الدوال المثلثية لضعف قياس الزاوية

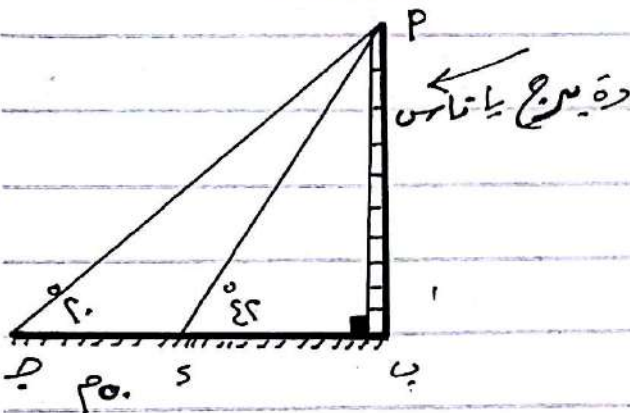
الدرس الرابع :

صيغة هيرون

مثال ١

رصد رجل زاوية ارتفاع قمة برج فوجدانه فياجها 40° ثم سار على طريقه أنقى متجهاً نحو قاعدة البرج مسانه 50 متراً فوجدانه زاوية ارتفاع البرج 42° أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر

الحل



\overline{PB} يمثل ارتفاع البرج

في ΔPAB $\angle PAB = 40^\circ$ ومن زاوية خارجة زاوية $\hat{P}SA$

$\therefore \angle PAB = 40^\circ - 42^\circ = 2^\circ$

$$\frac{PB}{50} = \frac{SP}{2}$$

$$PB = \frac{50 \times SP}{2} = 25SP$$

في ΔPSB

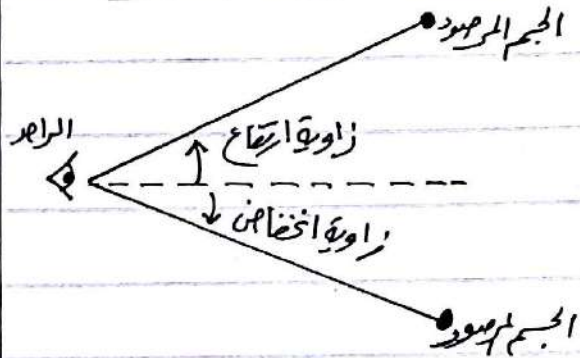
$$\frac{PB}{SP} = 42$$

$$25SP = 42SP = PB$$

$$PB = 31 \text{ م}$$

الدرس الأول زوايا الارتفاع والانخفاض

من الزاوية المصوِّرة بين امتدادى السطح الأفقى للراصد والسطح العمودي من الراصد ما يسمى بالجسم المرصود



كيفية حل سؤال الارتفاع أو الانخفاض

- ١ رسم المسألة رسم دقيقاً
- ٢ باستخدام هندسة الشكل في إيجاد الزوايا المجهولة
- ٣ صقلاتي عندك مثلثيه غالباً مهم واحد قائم صلياً بالمثلث اللين فيه ضلع معلوم
- ٤ الضلع المعلوم / جا المقابله = الضلع المجهول / جا المقابله
- ٤ صقل المثلث اللين باستخدام قائمه الجيب

تدريب

يتحرك رجل في مركب مبتعداً

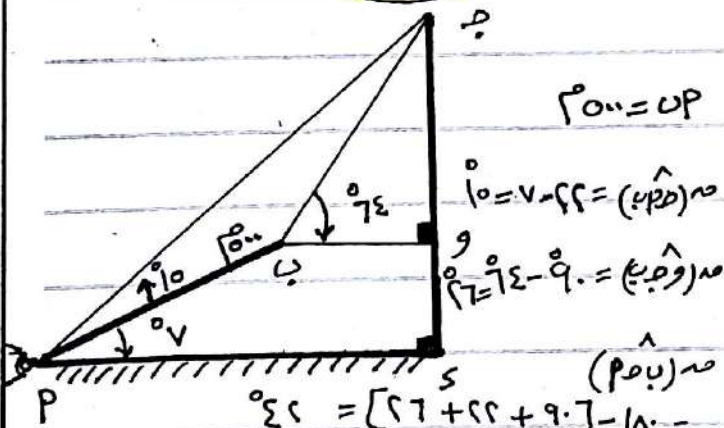
عنه صنخرة بإرتفاعها ٦٠٠ م فوجد
أنه قياس زاوية ارتفاع قمة الصنخرة
في لحظة معينة ٦٠° ثم أصبح قياسها بعد
٤ دقائق ٤٥° احس سرعة
القارب لأقرب ٣ أضعاف

$$\text{علماً بأنه السرعة} = \frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}}$$

مثان ٣

قام رجل بقياس زاوية ارتفاع
قمة تل من نقطة على سطح الأرض فوجدها
٢٢° ولاحقاً نحو التل مسافة ٢٥٠ م
على طريقه يحيل على الانقسي بزاوية قياسها ٧°
وجد أنه قياس زاوية ارتفاع قمة التل
٦٤° اوجد ارتفاع التل لأقرب متر

الحل



$$250 = UP$$

$$\alpha = 70 = 22 = (\hat{P})$$

$$\alpha = 70 = 22 = (\hat{P})$$

$$\alpha = 70 = 22 = (\hat{P})$$

$$64 = [22 + 22 + 90] - 180 =$$

$$123 = [22 + 10] - 180 = (\hat{P})$$

$$\frac{500}{424} = \frac{HP}{123}$$

$$HP = \frac{123 \times 500}{424} = 146,79$$

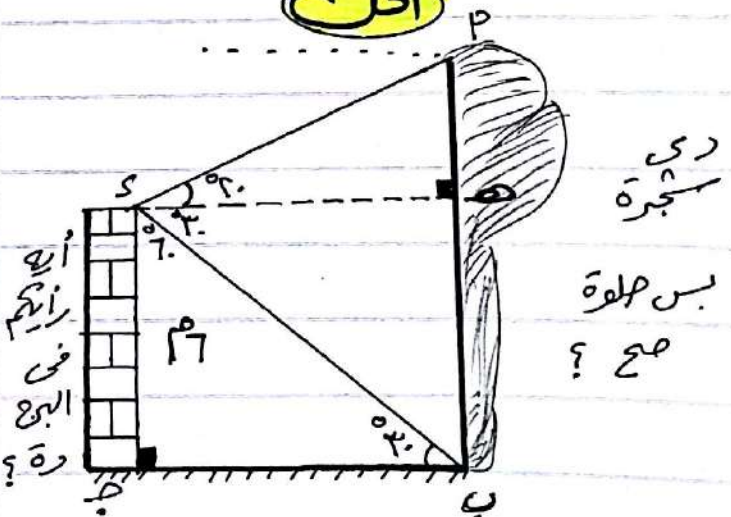
$$\frac{146,79}{9,6} = \frac{DS}{22}$$

$$DS = \frac{146,79 \times 22}{9,6} \approx 335$$

مثان ٢

من قمة منزل ارتفاعه ٦ م
بإزاكان قياس زاوية ارتفاع قمة
شجرة = ٢٠° وقياس زاوية انخفاها
قاعدة الشجرة ٣٠°، اوجد المسافة
بينه قاعدتي المنزل والشجرة علماً بأنه
قاعدتي المنزل والشجرة في مستوى واحد

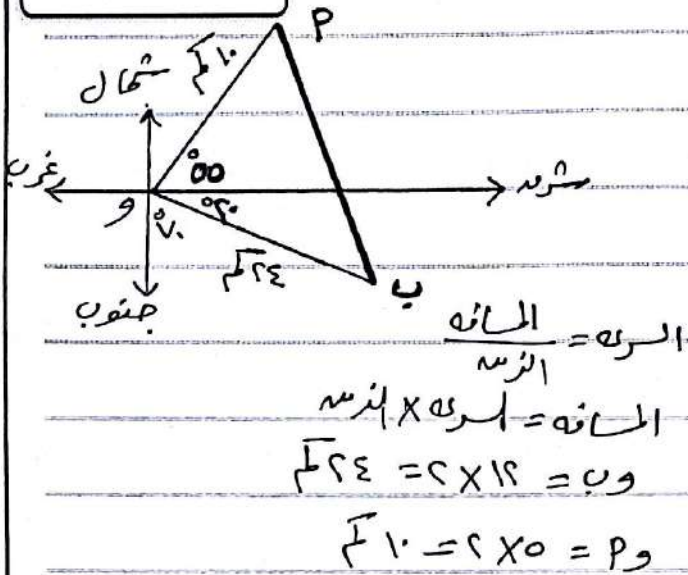
الحل



رى
شجرة
بس
حلو
صح
؟

$$\text{في } \Delta BPS \quad \frac{BP}{6} = \frac{6}{2,6}$$

$BP = \frac{6 \times 6}{2,6} = 13,85 \approx 14$
وهو المسافة بين قاعدتي المنزل والشجرة



السرعة = المسافة / الزمن
المسافة = السرعة \times الزمن
و $24 = 2 \times 12$
و $10 = 2 \times 5$

السرعة = المسافة / الزمن
المسافة = السرعة \times الزمن
و $24 = 2 \times 12$
و $10 = 2 \times 5$

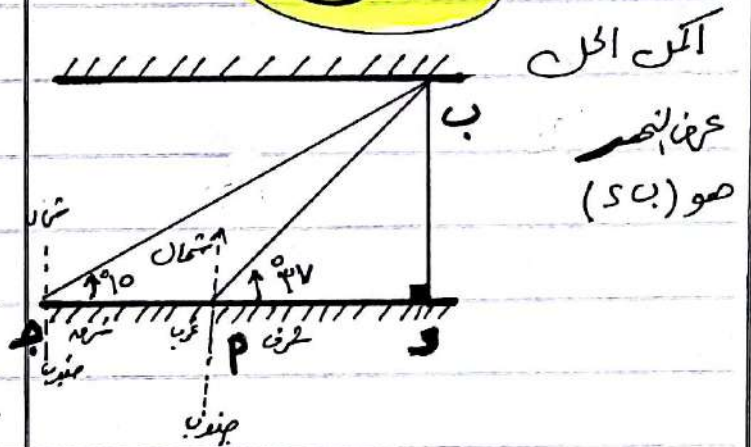
السرعة = المسافة / الزمن
المسافة = السرعة \times الزمن
و $24 = 2 \times 12$
و $10 = 2 \times 5$

السرعة = المسافة / الزمن
المسافة = السرعة \times الزمن
و $24 = 2 \times 12$
و $10 = 2 \times 5$

مثال ٤

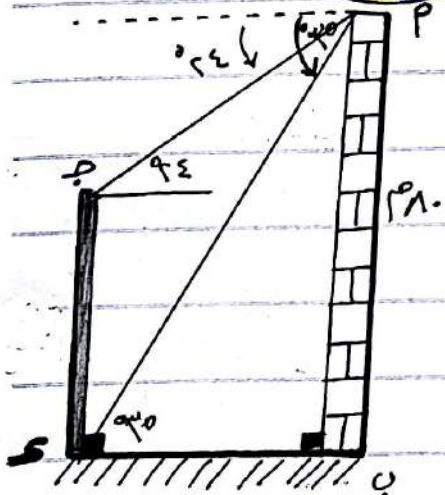
من نقطة P على شاطئ نهر
يريد رجل بجرة عند B على
الضفة الأخرى للنهر فوجد أن B في اتجاه
 37° شمال الشرق، ولما سار الرجل
بمحاذاة الشاطئ في اتجاه الغرب مسافة
200 م حتى وصل إلى نقطة ج ووجد أن
B في اتجاه 15° شمال الشرق أوجد
عرض النهر لأقرب متر

الحل



مثال 6
من قمة برج ارتفاعه 80 م
قيست زاويتا الانخفاض لعمدة وقاعدة
شجرة فوجدتا 24° و 30° على الترتيب
أوجد ارتفاع الشجرة لأقرب متر علماً بأنه
قاعدت الشجرة والبرج في مستوى أفقي واحد

الحل

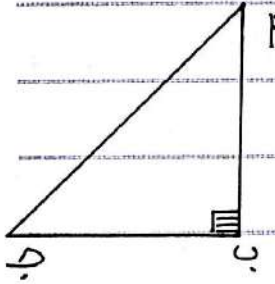


مثال 5

تحركت سفينة من نقطة
معينة في اتجاه 70° شرق الجنوب
بسرعة مقدارها 12 كم/س وفي نفس
الوقت تحركت سفينة أخرى في اتجاه
 50° شمال الشرق بسرعة مقدارها
5 كم/س، أوجد المسافة بينهما بعد
ساعتين لأقرب رقم عشري

الحل

في المثلث القائم



$$\text{جا } \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\text{جتا } \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$\text{ظا } \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

الدرس الثاني
الدوال المثلثية لمجوع وفرده زاويتين

تذكروا أن

ملاحظات هامة

١- الدوال المثلثية للزوايا الخاصة

	30°	45°	60°
جا	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
جتا	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
ظا	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

فيثاغورث

لو عاينز الوتر ربع و اجمع
لو عندك الوتر و عاينز ضلع ربع و اطبع

المتطابقات المثلثية

$$1 - \text{جا } \theta + \text{جتا } \theta = 1$$

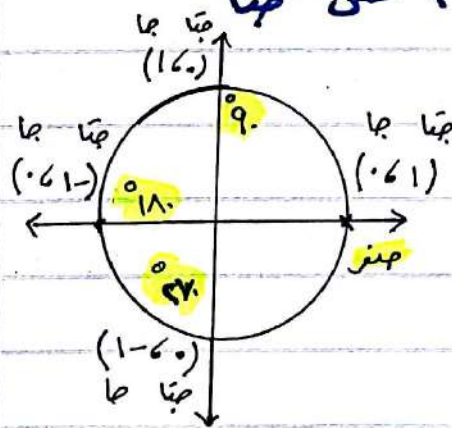
$$2 - 1 + \text{ظا } \theta = \text{قا } \theta$$

$$3 - 1 + \text{ظتا } \theta = \text{قتا } \theta$$

في دائرة الوحدة جا ← الاهدش اليساري

جتا ← الاهدش السين

$$\text{ظا} \leftarrow \frac{\text{سين}}{\text{كوسا}}$$

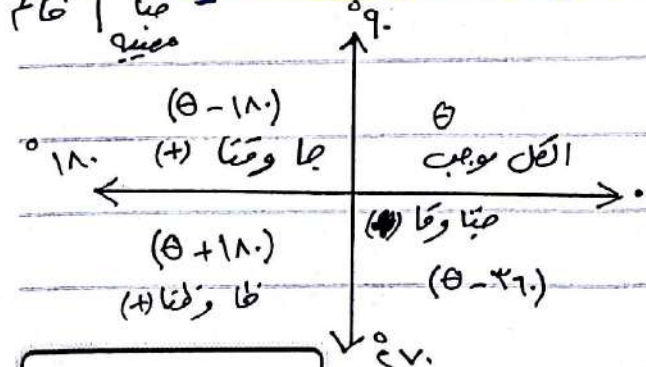


وان كان P ب ج مثلث فياه

$$\text{جا } \theta = (P + \theta)$$

$$\text{جتا } \theta = (P + \theta) - \text{جتا } \theta$$

الشارات الدوال المثلثية

تعرفي تكلم
سه الدائرة
اللي فوقه
وتحفظها

	0°	90°	180°	صفر
جا				
جتا				
ظا				

دى الزوايا اللى صتقابلين

$$\textcircled{1} \quad 60^\circ + 70^\circ = 130^\circ$$

$$\textcircled{2} \quad 60^\circ - 70^\circ = -10^\circ \quad \text{أو} \quad (70^\circ - 60^\circ)$$

$$\textcircled{3} \quad 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$$

إزنا املكان نبيه تعلقه
بتشوف الاشارة وتحدد البرج
اللى صر فيه وتحرر حكم مثلث
قائم بى ادى وتطلع منه بنسب
وبعديه تحط الاشارات على حسب
البرج اللى تقع فى الزاوية.

مقال
١ بدون استخدام الآلة اوجد:
(P) جا 130° (B) جا 10°

الحل

$$(P) \text{ جا } (130^\circ) = \text{جا } (60^\circ + 70^\circ)$$

$$= \text{جا } 60^\circ \text{ جا } 70^\circ + \text{جا } 60^\circ \text{ جا } 70^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

$$(B) \text{ جا } (10^\circ) = \text{صا اينة}$$

أولاً: جا $(P \pm B)$

$$\text{جا } (P+B) = \text{جا } P \text{ جا } B + \text{جا } P \text{ جا } B$$

$$\text{جا } (P-B) = \text{جا } P \text{ جا } B - \text{جا } P \text{ جا } B$$

الاشارة لا تتغير فى جا $(P \pm B)$

ثانياً: جتا $(P \pm B)$

$$\text{جتا } (P+B) = \text{جتا } P \text{ جتا } B - \text{جا } P \text{ جا } B$$

$$\text{جتا } (P-B) = \text{جتا } P \text{ جتا } B + \text{جا } P \text{ جا } B$$

لا حظ غيرنا الاشارة

ثالثاً: ظا $(P \pm B)$

$$\text{ظا } (P+B) = \frac{\text{ظا } P + \text{ظا } B}{1 - \text{ظا } P \text{ ظا } B}$$

$$\text{ظا } (P-B) = \frac{\text{ظا } P - \text{ظا } B}{1 + \text{ظا } P \text{ ظا } B}$$

الاشارة البسط مثل وشارة المقام عكس

لا حظ $(\theta \pm 180^\circ)$ تحدد الاشارة

نقط $(\theta \pm 360^\circ)$

$(\theta \pm 90^\circ)$ تحدد الاشارة

وتنصير سائى $(\theta \pm 270^\circ)$

مثال ٧
 م، ب، ج قيسان زوايا

مثلث اثبت ان $\hat{m} = 60^\circ$

واذا كان $\hat{b} = \frac{2}{3}$ ، $\hat{c} = 60^\circ$ ، $\hat{m} = 70^\circ$

الحل

$\hat{m} = 180 - (\hat{b} + \hat{c}) = 180 - (60 + 70) = 50^\circ$

$\hat{m} = 180 - (\hat{b} + \hat{c}) = 180 - (60 + 70) = 50^\circ$

الكل

١] $\hat{c} = \hat{b} + \hat{m} = 60 + 70 = 130^\circ$

$\frac{70}{130} = \frac{7}{13} \times \frac{10}{10} + \frac{10}{13} \times \frac{7}{10} =$

٢] $\hat{c} = \hat{b} - \hat{m} = 60 - 70 = -10^\circ$

$\hat{c} = \hat{b} - \hat{m} = 60 - 70 = -10^\circ$

$\frac{70}{130} = \frac{7}{13} \times \frac{10}{10} + \frac{10}{13} \times \frac{7}{10} =$

$\frac{70}{130} = \hat{c} = \hat{b} - \hat{m} = 60 - 70 = -10^\circ$

الكل

٣] $\hat{c} = \hat{b} - \hat{m} = 60 - 70 = -10^\circ$

مثال ١
 اوجد مجموعة حل كل من المعادلات

١] $\sin x = \frac{1}{2}$ ، $0 < x < 360^\circ$

٢] $\cos x = \frac{1}{2}$ ، $0 < x < 360^\circ$

٣] $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ ، $0 < x < 360^\circ$

الحل

١] $\sin x = \frac{1}{2}$ ، $0 < x < 360^\circ$

$\sin x = \frac{1}{2}$ ، $0 < x < 360^\circ$

$\sin x = \frac{1}{2}$ ، $0 < x < 360^\circ$

$\sin x = \frac{1}{2}$ ، $0 < x < 360^\circ$

$\sin x = \frac{1}{2}$ ، $0 < x < 360^\circ$

٢] $\cos x = \frac{1}{2}$ ، $0 < x < 360^\circ$

$\cos x = \frac{1}{2}$ ، $0 < x < 360^\circ$

الأول والرابع

$\cos x = \frac{1}{2}$ ، $0 < x < 360^\circ$

$\cos x = \frac{1}{2}$ ، $0 < x < 360^\circ$

$\cos x = \frac{1}{2}$ ، $0 < x < 360^\circ$

مثال ٦
 م، ب، ج مثلث فيه $\hat{c} = 90^\circ$

جانب $\frac{5}{13}$ اوجد \hat{b}

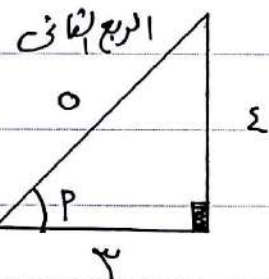
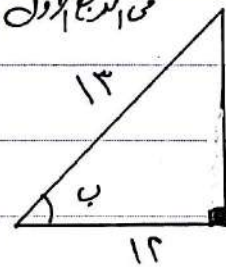
الحل

جانب م (-) يعني زاوية منفرجه

تقع في الربع الثاني هكذا $\hat{c} = 90^\circ$

سواء ج (+)

في الربع الاول



$\sin b = \frac{5}{13}$

$\cos b = \frac{12}{13}$

$\tan b = \frac{5}{12}$

$\sin p = \frac{5}{13}$

$\cos p = \frac{12}{13}$

$\tan p = \frac{5}{12}$

جانب $\hat{c} = 90^\circ$ ، $\hat{c} = \hat{b} + \hat{m} = 90 + 70 = 160^\circ$

$\hat{c} = \hat{b} + \hat{m} = 90 + 70 = 160^\circ$

$\hat{c} = \hat{b} + \hat{m} = 90 + 70 = 160^\circ$

$\hat{c} = \hat{b} + \hat{m} = 90 + 70 = 160^\circ$

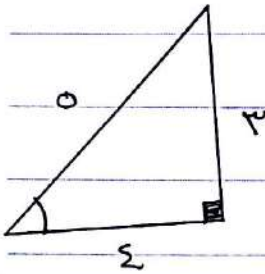
الدرس الثالث
الدوال المثلثية لضعف الزاوية

إذا كان

مثال ١
جنا $\frac{4}{5} = \frac{3}{5}$ حيث $90^\circ > P > 0^\circ$
فاوجدتية
ط ٢ ، جتا ٢ ، ظ ٢

الحل

في ربع الأول $90^\circ > P > 0^\circ$: P



المقابل = $\sqrt{5^2 - 4^2} = 3$

$\frac{3}{5} = \text{ط } ٢$

$\frac{4}{5} = \text{جتا } ٢$

$\frac{4}{3} = \text{ظ } ٢$

$\text{ط } ٢$

$\text{جتا } ٢$

$\text{ظ } ٢$

١ $\text{ط } ٢ = \frac{3}{5}$ جتا P

٢ $\text{جتا } ٢ = \text{جتا } P - \text{ط } P$

$= 1 - \text{جتا } P$

$= 1 - \text{جتا } P$

٣ $\frac{\text{ظ } ٢}{1 - \text{جتا } P} = \text{ظ } P$

معرفة زاوية العن الايمه ضعفت
زاوية الطرف الايسر

مثال ٢ بدون استخدام الآلة اوجد

١ $\text{جتا } ٧٥^\circ - ١$

٢ $\text{جتا } ٦٧,٥^\circ - \text{ط } ٦٧,٥^\circ$

٣ $\text{ط } ٣٠^\circ - \text{جتا } ٣٠^\circ$

٤ $\frac{\text{ظ } ٣٠^\circ}{1 - \text{جتا } ٣٠^\circ}$

٥ $\frac{1 - \text{جتا } ٣٠^\circ}{\text{ظ } ٣٠^\circ}$

٦ $\frac{\text{جتا } ١٦٥^\circ - ١}{\text{ط } ٧٥^\circ}$

١ $\text{ط } P = \frac{3}{5}$ جتا $\frac{P}{5}$

٢ $\text{جتا } P = \text{جتا } \frac{P}{5} - \text{ط } \frac{P}{5}$

$= 1 - \text{جتا } \frac{P}{5}$

$= 1 - \text{جتا } \frac{P}{5}$

٣ $\frac{\text{ظ } \frac{P}{5}}{1 - \text{جتا } \frac{P}{5}} = \text{ظ } P$

الحل

الدوال المتكسبة لنصف الزاوية

$$\textcircled{1} \quad \cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$

$$\textcircled{2} \quad \sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$

$$\textcircled{3} \quad \tan \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}$$

ويتم تحديد الاشارة طبقاً للربع
الذي تقع فيه الزاوية $\frac{\theta}{2}$

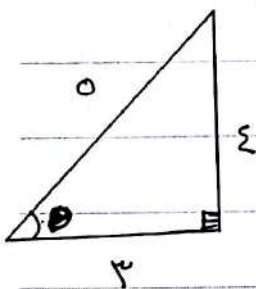
مثال ٣ بدون استخدام الآلة الحاسبة

(أ) $\sin \frac{\theta}{2}$ إذا كان $\theta = \frac{\pi}{6}$

$180^\circ > \theta > 90^\circ$

(ب) $\sin \frac{\theta}{2}$ إذا كان $\theta = 150^\circ$

الحل



θ في الربع الثالث

جا θ جتا (-)

$\frac{4}{5} = \sin \theta$

$\frac{3}{5} = \cos \theta$

$\frac{4}{3} = \tan \theta$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{5}}{2}}$$

٢ جتا $1 - 75^\circ$ من قوسية ضعف الزاوية

$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta = \cos 2\theta = 75^\circ$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1 - 2\sin^2 \theta}{2} \Rightarrow 1 - 2\sin^2 \theta = \sqrt{2}$

٣ جتا $67.5^\circ - 67.5^\circ$

$\cos 135^\circ = \cos(2 \times 67.5^\circ) = 2\cos^2 67.5^\circ - 1$

٤ جتا $22.5^\circ - 22.5^\circ$

$\cos 45^\circ = \cos(2 \times 22.5^\circ) = 2\cos^2 22.5^\circ - 1$

٥ جتا $22.5^\circ - 22.5^\circ$ (حل انت)

٦ جتا $170^\circ - 170^\circ$

$\cos 340^\circ = \cos(2 \times 170^\circ) = 2\cos^2 170^\circ - 1$

$\frac{1}{2} = \frac{1 - 2\cos^2 170^\circ}{2} \Rightarrow 1 - 2\cos^2 170^\circ = 1$

$\cos 170^\circ = \frac{1}{2}$

$\sin 170^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

أنا سيب الحثه دي تافيه

موش شخيط فيها

من ج د فيه

مثال ٤

$\hat{p} = \hat{q} = \hat{r}$ ، $\hat{u} = \hat{v} = \hat{w}$ ، $\hat{a} = \hat{b} = \hat{c}$
 ثابت بدون الآلة
 $\hat{u} = (\hat{r}) = \hat{v} = (\hat{p})$

الحل

$$\frac{1}{\hat{a}} = \frac{\hat{r} - \hat{u} + \hat{q}}{\hat{u} \times \hat{v} \times \hat{w}} = \frac{\hat{p} - \hat{u} + \hat{r}}{\hat{u} \times \hat{u} \times \hat{u}} = \frac{2\hat{p} - \hat{u}}{\hat{u}^3}$$

$$\frac{\hat{u}}{\hat{a}} = \frac{\hat{r} - \hat{u} + \hat{q}}{\hat{u} \times \hat{v} \times \hat{w}} = \frac{\hat{p} - \hat{u} + \hat{r}}{\hat{u} \times \hat{u} \times \hat{u}} = \frac{2\hat{p} - \hat{u}}{\hat{u}^3}$$

$$\frac{1}{\hat{a}} = 1 - \left(\frac{\hat{u}}{\hat{a}}\right)^2 = 1 - \hat{p} = 2 = \hat{p} \hat{a} \Rightarrow \hat{p} = \frac{2}{\hat{a}}$$

$$\hat{u} = (\hat{r}) = \hat{v} = (\hat{p}) \Rightarrow \hat{u} = \hat{p} = \frac{2}{\hat{a}}$$

$$\frac{1}{\hat{v}} \pm = \frac{1}{\hat{u}} \pm = \frac{\hat{u}}{\hat{v}}$$

$$18 > \hat{u} > 27 \text{ بالقسمة } \Rightarrow$$

$$9 > \frac{\hat{u}}{\hat{v}} > 120 \text{ في الربع الثاني}$$

نكتبه جتا

$$\frac{1}{\hat{v}} - = \frac{\hat{u}}{\hat{v}}$$

$$(ب) \text{ جتا } 30^\circ = \frac{2}{3} \text{ جتا } 45^\circ$$

ونأخذ القيمة الموجبة لزاوية الزاوية

في الربع الأول

$$\sqrt{\frac{2}{3} + 1} = \frac{2}{3} \Rightarrow \sqrt{\frac{2+3}{3}} = \frac{2}{3}$$

$$\sqrt{\frac{1}{\hat{v}} + 1} = \frac{\hat{u}}{\hat{v}} = \frac{\hat{u} + \hat{v}}{\hat{v}}$$

$$(د) \text{ ظا } 10^\circ = \frac{3}{4} \text{ ظا } 30^\circ \text{ نأخذ القيمة}$$

الموجبة لزاوية الزاوية في الربع الأول

$$\sqrt{\frac{3}{4} - 1} = \frac{3}{4} \Rightarrow \sqrt{\frac{3-4}{4}} = \frac{3}{4}$$

$$3\hat{v} - 2 = \frac{(4\hat{v} - 2) \times 3\hat{v} - 2}{(4\hat{v} - 2) \times 4\hat{v} + 2}$$

$$\text{تدريب} \text{ أثبت أن جتا } 45^\circ = \frac{1 - \text{ظا } 45^\circ}{1 + \text{ظا } 45^\circ}$$

$$\text{وسد ذلك أو بدليته} \frac{1 - \text{ظا } 45^\circ}{1 + \text{ظا } 45^\circ}$$

$$\text{مثال ٥} \text{ أثبت أن } \frac{1 - \text{جتا } \theta + \text{جتا } 2\theta}{1 + \text{جتا } \theta + \text{جتا } 2\theta} = \text{ظا } \frac{\theta}{2}$$

الحل

$$\frac{1 - \text{جتا } \theta + \text{جتا } 2\theta}{1 + \text{جتا } \theta + \text{جتا } 2\theta} = \frac{\text{الطرف الأيسر}}{\text{الطرف الأيمن}}$$

$$= \frac{1 - \cos \theta + \cos 2\theta}{1 + \cos \theta + \cos 2\theta}$$

$$= \frac{1 - \cos \theta + [1 - 2\cos^2 \theta]}{1 + \cos \theta + [1 - 2\cos^2 \theta]}$$

$$= \frac{2 - 2\cos^2 \theta}{2 + \cos \theta - 2\cos^2 \theta}$$

$$= \frac{2(1 - \cos^2 \theta)}{2 + \cos \theta - 2\cos^2 \theta}$$

$$= \frac{2 \sin^2 \theta}{2 + \cos \theta - 2\cos^2 \theta}$$

$$= \frac{2 \sin^2 \theta}{2 + \cos \theta - 2\cos^2 \theta}$$

$$= \frac{2 \sin^2 \theta}{2 + \cos \theta - 2\cos^2 \theta} = \frac{2 \sin^2 \theta}{2 + \cos \theta - 2(1 - \sin^2 \theta)} = \frac{2 \sin^2 \theta}{2 + \cos \theta - 2 + 2\sin^2 \theta} = \frac{2 \sin^2 \theta}{2\sin^2 \theta + \cos \theta} = \frac{2 \sin^2 \theta}{2\sin^2 \theta + \cos \theta}$$

الحل العام للمعادلات الثلاثية



$$P = \theta \quad \text{I}$$

$$N\pi c + \beta = \theta$$

$$N\pi c + (\beta - \pi) = \theta \quad \text{II}$$

$$P = \theta \quad \text{II}$$

$$N\pi c + \beta \pm = \theta$$

$$P = \theta \quad \text{III}$$

$$N\pi + \beta = \theta$$

① جتا س + جتا س = ١

جتا س = [١ - جتا س] + جتا س

٢ جتا س + جتا س = ١

٢ جتا س = ١ -

جتا س = ١ -

٢ جتا س = (١ - جتا س) (١ + جتا س)

١ - جتا س = ١

٢ جتا س = ١

جتا س = ١/٢

١٨٠ = س

٦٠ = س | أو ١٢٠ = س

٣٠ = س

∴ قيم س ص { ٦٠, ١٨٠, ٣٠ }

③ جتا س + جتا س = ١

٢ جتا س = ١ - جتا س

١ = جتا س / (١ - جتا س)

جتا س = ١ (موجب)

أيضا قيم س موجب يحقق المعادلة هو ٢ = س = ٠

الحل العام ٢ = س = ٢π + π/٢

٢π + π/٢ = س

٢ = س ∴ π = س

π/١ = π + π/٢ = س ١ = س

π/١ = π + π/٢ = س ٢ = س

π/١ = س ٣ = س

∴ قيم س ص { π/١, π/١, π/١, π/١ }

أو بد قيم س التي تحقق
كلًا من المعادلات الأتيه صحت
س ∈ [٠, π]



① جتا س - جتا س = ١

٢ جتا س - جتا س = ١

جتا س = (١ - جتا س)

٢ جتا س = ١ - جتا س

جتا س = ١/٣

٩٠ = س

٣٠ = س | أو ١٨٠ = س

٢٧٠ = س

∴ قيم س ص { ٩٠, ٢٧٠, ٣٠, ١٥٠ }

مثال ١
 m ب ج مثلث فيه $p = 9$
 $n = 40$ $f = 41$
 أوجد مساحته

الحل

$$e = 9 + 40 + 41 = 90$$

$$e = \frac{90}{2} = 45$$

$$m = \Delta = \frac{e}{2} (p-2)(n-2)(f-2) = 45 \times (9-2)(40-2)(41-2)$$

$$= \frac{45 \times 7 \times 38 \times 39}{2}$$

$$= \frac{45 \times 7 \times 38 \times 39}{2} = 24705$$

مثال ٢
 m ب ج Δ فيه $p = 5$
 $n = 12$ $f = 13$
 أوجد مساحته

حل أنت

الحل

مثال ٣
 $n = 5$ $f = 6$ $m = 7$
 $e = 13$
 أوجد مساحته

الحل

$$e = 5 + 6 + 7 = 18 > 11$$

∴ الأطوال لا تصح أنه تكون أضلاع مثلث
 يعني مستحيل إيجادها

الدرس الرابع صيغة هيرون

مذكوران

(١) مسافة المثلث = $\frac{1}{2}$ طول القاعدة \times الارتفاع

(٢) مسافة المثلث = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب أى ضلعيه

\times جها المحصورة

مسافة المثلث بصيغة هيرون

$$= \frac{e}{2} \sqrt{(p-2)(n-2)(f-2)}$$

حيث $e =$ نصف المحيط

$$يعني p + n + f = e$$

نوه = $\frac{\text{مسافة المثلث}}{\text{نصف محيط المثلث}}$

متباينة المثلث

مجموع أى ضلعيه في المثلث أكبره

طول الضلع الثالث

أى ضلع $>$ نصف المحيط (٢)

مثال ٤

أوجد نصف قطر الدائرة التي تمس أضلاع ΔPQR الذي فيه $QR = 9$ ، $RP = 7$ ، $PQ = 5$

الحل

$$r = \frac{2S}{P+Q+R} = \frac{2 \times 14}{9+7+5} = \frac{28}{21} = \frac{4}{3}$$

$$S = \Delta = \frac{1}{2} (P-Q)(Q-R)(R-P) = \frac{1}{2} (7-9)(9-5)(5-7) = 14$$

$$r = \frac{2S}{P+Q+R} = \frac{2 \times 14}{9+7+5} = \frac{28}{21} = \frac{4}{3}$$

$$r = \frac{2S}{P+Q+R} = \frac{2 \times 14}{9+7+5} = \frac{28}{21} = \frac{4}{3}$$

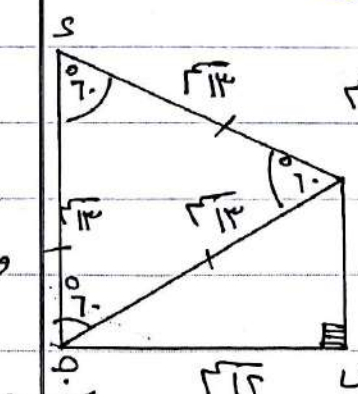
$$r = \frac{2S}{P+Q+R} = \frac{2 \times 14}{9+7+5} = \frac{28}{21} = \frac{4}{3}$$

$$r = \frac{4}{3}$$

مثال ٥

أوجد مساحة الشكل الرباعي $PQRS$ الذي فيه $SR = 9$ ، $PS = 5$ ، $QR = 12$ ، $RS = 13$

الحل



منه ميثاقون

$$PR = \sqrt{9^2 + 5^2} = 10$$

مساحة الشكل الرباعي

$$S = S_{\Delta PSR} + S_{\Delta PQR} = \frac{1}{2} \times 9 \times 5 + \frac{1}{2} \times 12 \times 10 = 22.5 + 60 = 82.5$$

$$S = \frac{1}{2} \times 9 \times 5 + \frac{1}{2} \times 12 \times 10 = 22.5 + 60 = 82.5$$

مثال ٦

أوجد مساحة ΔPQR الذي فيه $QR = 5$ ، $RP = 3$ ، $PQ = 4$

الحل

بالجمع

$$9 + 5 + 3 = 5 + 3 + 4 = 17$$

$$17 = [5 + 3 + 4] - 3$$

$$17 = 12 - 3$$

$$17 = 14$$

$$S = \Delta = \frac{1}{2} (P-Q)(Q-R)(R-P) = \frac{1}{2} (4-5)(5-3)(3-4) = 1.5$$

$$S = \frac{1}{2} \times 5 \times 3 \times 4 = 30$$

$$S = \frac{30}{20} = 1.5$$

انتصه المبرج مع أظيب وأرعه كمنياتي القلبين

خاله دعواتي لكم

خلال الأجزاء كم أنني هزين لأنتي لا أراكم بعد هذا العام نكلم مني كل النية والتقدير والمحبة واللى عليه فلو من درس يرفها ولما أجب آسف عندكم مقدر من فلو من

أحمد أدهم