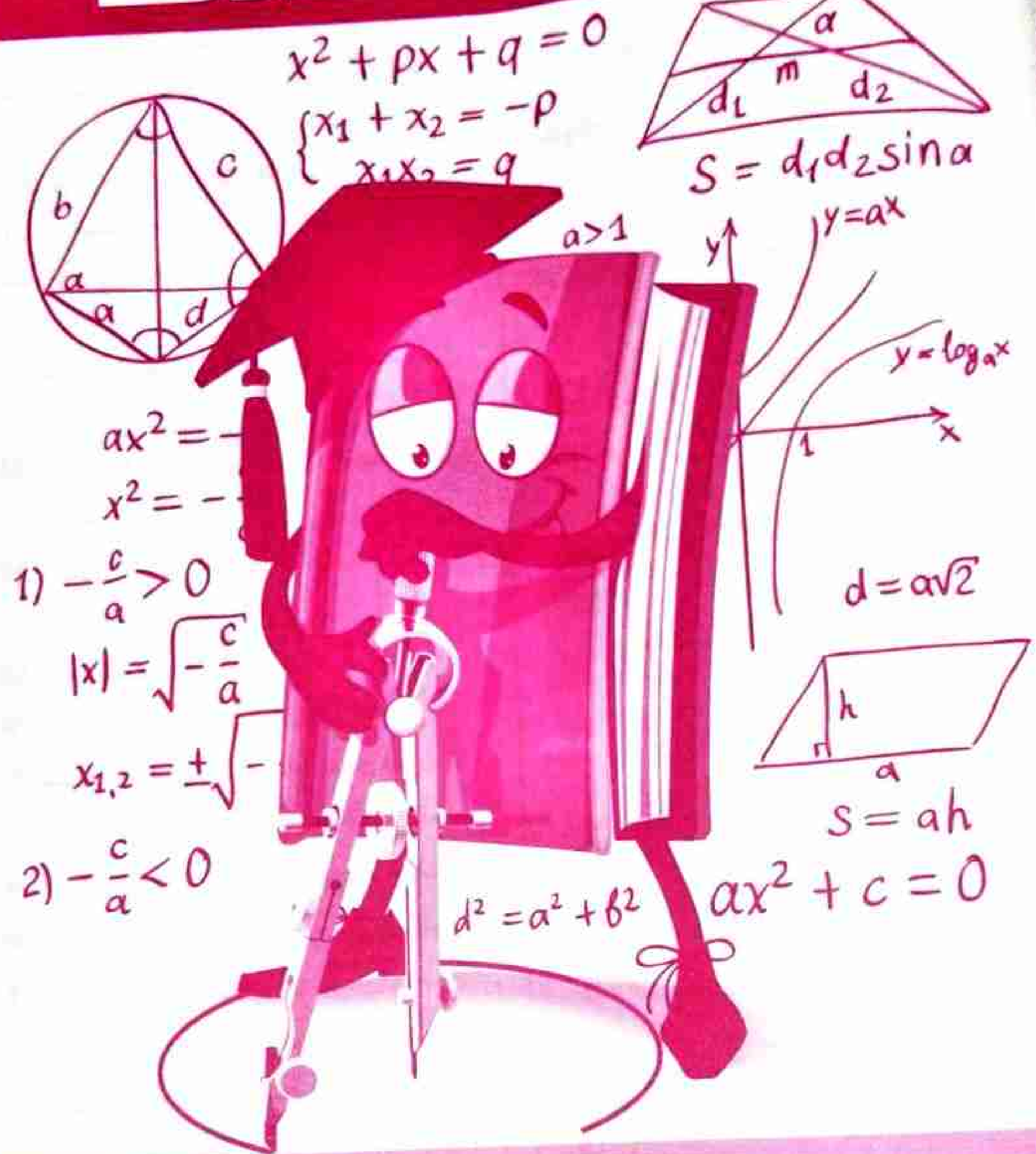
الإحصاء



احمد عصام

ENG.AHMED ESSAM

متعة الرياضة مع باشمهندس احمد عصام

الارتباط والانحدار

الارتباط :-

الارتباط هو طريقة احصائية يمكن من خلالها تحديد درجة ونوع العلاقة بين متغيرين

الارتباط الطردى :-

يكون فيها المتغيران يتزايدان معاً أو يتناقصان معاً

الارتباط العكسى :-

أحد المتغيرين يتزايد والاخر يتناقص

معامل الارتباط ر :-

هو مقياس كمى يقيس قوة الارتباط وله الخصائص الاتية

١ ر موجبة يكون التغير طردى ، ر سالبة يكون التغير عكسى

٢ ر ∈ [−١ ، ١] أى أن −١ ≤ ر ≤ ١

الارتفاع

٣ كيفية تحديد درجة الارتباط

* عندما ر = صفر يكون الارتباط منعدم
* عندما ر = ١ يكون الارتباط طردى تام
* عندما ر = −١ يكون الارتباط عكسى تام
* عندما ٠ < ر < ٠,٤ يكون طردى ضعيف
* عندما ٠,٤ ≤ ر ≤ ٠,٦ يكون طردى متوسط
* عندما ٠,٦ < ر < ١ يكون طردى قوى
* عندما −٠,٤ < ر < ٠ يكون عكسى ضعيف
* عندما −٠,٦ ≤ ر ≤ −٠,٤ يكون عكسى متوسط
* عندما −١ < ر < −٠,٦ يكون عكسى قوى

معامل ارتباط بيرسون أو (معامل الارتباط الخطى)

$$ر = \frac{ن \sum س ص - \sum س \sum ص}{\sqrt{ن \sum س^2 - (\sum س)^2}\ \sqrt{ن \sum ص^2 - (\sum ص)^2}}$$

ملحوظة

إذا كان : $\bar{س}$ ، $\bar{ص}$ هما المتوسطان لقيم س ، ص على الترتيب ، ن عدد القيم فإن

$$\bar{س} = \frac{\sum س}{ن} \quad ، \quad \bar{ص} = \frac{\sum ص}{ن}$$

مثال ١ أوجد معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س ، ص وحدد نوعه إذا كان :

$\sum س = ٢٨$ ، $\sum ص = ١٦٧$ ، $\sum س ص = ٨٤٩$

$\sum س^2 = ١٤١$ ، $\sum ص^2 = ٥١١٧$ ، ن = ٧

الحل

$$ر = \frac{ن \sum س ص - \sum س \sum ص}{\sqrt{ن \sum س^2 - (\sum س)^2}\ \sqrt{ن \sum ص^2 - (\sum ص)^2}}$$

$$ر = \frac{٧ \times ٨٤٩ - ٢٨ \times ١٦٧}{\sqrt{٧ \times ١٤١ - (٢٨)^2}\ \sqrt{٧ \times ٥١٧٩ - (١٦٧)^2}}$$

$$ر = \frac{١٢٦٧}{\sqrt{٢٠٣}\ \sqrt{٨٣٦٤}} = ٠,٩٧$$ (طردى قوى)

تدريب أوجد معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س ، ص وحدد نوعه إذا كان :

$\sum س = ٦٠$ ، $\sum ص = ٧٠$ ، $\sum س ص = ٣٧٤$

$\sum س^2 = ٤٠٦$ ، $\sum ص^2 = ٥٣٦$ ، ن = ١٠

الحل

مثال ٢ من بيانات الجدول الآتى :

س	١	٣	٤	٦	٧	٩
ص	٦	٤	٤	٣	٢	١

أوجد معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين

س ، ص وحدد نوعه ودرجته .

الحل

س	ص	س^2	ص^2	س ص
١	٦	١	٣٦	٦
٣	٤	٩	١٦	١٢
٤	٤	١٦	١٦	١٦
٦	٣	٣٦	٩	١٨
٧	٢	٤٩	٤	١٤
٩	١	٨١	[illegible]	٩
مجـ س = ٣٠	مجـ ص = ٢٠	مجـ س^2 = ١٩٢	مجـ ص^2 = ٨٢	مجـ س ص = ٧٥

$$ر = \frac{٦ \times ٧٥ - ٣٠ \times ٢٠}{\sqrt{٦ \times ١٩٢ - (٣٠)^2}\ \sqrt{٦ \times ٨٢ - (٢٠)^2}}$$

$ر = -٠,٩٨٥$ (عكسي قوى)

تدريب من بيانات الجدول الآتى :

س	٦	٩	١١	٧	٩	٨
ص	٦	٩	١٣	٨	١١	١٠

أوجد معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين

س ، ص وحدد نوعه ودرجته .

تدريب من بيانات الجدول الآتى :

س	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
ص	١٢	٧	١٢	٣	١٤	١٥	٢١

أوجد معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين

س ، ص وحدد نوعه ودرجته .

معامل ارتباط سبيرمان

(معامل ارتباط الرتب) $ر = ١ - \frac{٦ \text{ مجـ ف}^2}{ن(ن^2 - ١)}$

مثال ٢ من بيانات الجدول الآتى :

س	ممتاز	جيد	جيدجداً	مقبول	ضعيف	جيد
ص	جيد	ضعيف	مقبول	ممتاز	جيدجداً	مقبول

أوجد معامل ارتباط سبيرمان بين المتغيرين

س ، ص وحدد نوعه ودرجته . **الحل** نرتب

قيم س

ضعيف	مقبول	جيد	جيد	جيدجداً	ممتاز
١	٢	٣	٤	٥	٦

الرتبة المتوسطة لجيد $= \frac{٣ + ٤}{٢} = ٣,٥$

نرتب قيم ص

ضعيف	مقبول	مقبول	جيد	جيدجداً	ممتاز
١	٢	٣	٤	٥	٦

الرتبة المتوسطة للمقبول $= \frac{٢ + ٣}{٢} = ٢,٥$

س	ص	رتب س	رتب ص	ف	ف^2
ممتاز	جيد	٦	٤	٢	٤
جيد	ضعيف	٣,٥	١	٢,٥	٦,٢٥
جيد جداً	مقبول	٥	٢,٥	٢,٥	٦,٢٥
مقبول	ممتاز	٢	٦	٤−	١٦
ضعيف	جيدجداً	١	٥	٤−	١٦
جيد	مقبول	٣,٥	٢,٥	١	١
				صفر	مجـ ف ٩,٥=

$$ر = ١ - \frac{٦ \text{ مجـ ف}^2}{ن(ن^2 - ١)}$$

$ر = ١ - \frac{٦ \times ٤٩,٥}{٦(٦^2 - ١)} = -٠,٤١$ (عكسى متوسط)

مثال ٤ من بيانات الجدول الآتي :

س	٤	٧	٨	٥	٨	١٢
ص	٧	٦	٦	٤	٦	١٠

أوجد معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين المتغيرين س ، ص وحدد نوعه ودرجته .

الحل نرتب قيم س

٤	٥	٧	٨	٨	١٢
١	٢	٣	٤	٥	٦

الرتبة المتوسطة لـ ٨ $= \frac{٤ + ٥}{٢} = ٤,٥$

نرتب قيم ص

٤	٦	٦	٦	٧	١٠
١	٢	٣	٤	٥	٦

الرتبة المتوسطة لـ ٦ $= \frac{٢ + ٣ + ٤}{٣} = ٣$

س	ص	رتب س	رتب ص	ف	ف^2
٤	٧	١	٥	−٤	١٦
٧	٦	٣	٣	صفر	صفر
٨	٦	٤,٥	٣	١,٥	٢,٢٥
٥	٤	٢	١	١	١
٨	٦	٤,٥	٣	١,٥	٢,٢٥
١٢	١٠	٦	٦	صفر	صفر
				للتأكد صفر	مجـ ف^2 = ٢١,٥

$ر = ١ - \frac{٦ \sum ف^2}{ن(ن^2 - ١)}$

$= ١ - \frac{٦ \times ٢١,٥}{٦(٦^2 - ١)} = ٠,٣٨٥٧$ (طردي ضعيف)

معادلة خط الانحدار

ص = أ + ب س حيث

$ب = \frac{ن \sum س ص - \sum س \sum ص}{ن \sum س^2 - (\sum س)^2}$

$أ = \frac{\sum ص - ب \sum س}{ن}$

حيث ب معامل انحدار ص على س وتعبير عن ميل خط الانحدار على الاتجاه الموجب لمحور السينات

ملحوظة

١ تستخدم معادلة خط إنحدار ص على س للتنبؤ بقيمة ص إذا علمت قيمة س

٢ يحدد مقدار الخطأ من العلاقة

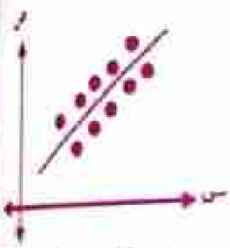
مقدار الخطأ = | القيمة الجدولية − القيمة التي تحقق معادلة الانحدار |

٣ إشارة معامل الانحدار (ب) تحدد لنا نوع الارتباط

* إذا كانت ب موجبة فإن الارتباط طردي
* إذا كانت ب سالبة فإن الارتباط عكسي

٤ كلما اقتربت النقاط من خط الانحدار كلما زادت درجة الارتباط بين المتغيرين كما بالشكلين

ارتباط طردي متوسط



ارتباط طردي قوي

مثال ٥ في دراسة العلاقة بين المتغيرين س ، ص حصلنا على المعلومات الآتية :

$\sum س = ٥٠$ ، $\sum ص = $ [illegible] ، $\sum س ص = ٣٦١$

$\sum س^2 = ٣١٠$ ، $\sum ص^2 = ٤٩٨$ ، ن = ١٠

أوجد : معادلة خط انحدار ص على س ثم أوجد قيمة ص عندما س = ٥

الحل المعادلة $\text{ص} = \text{أ} + \text{ب}\,\text{س}$ حيث

$$\text{ب} = \frac{\text{ن}\sum \text{س ص} - \sum \text{س} \sum \text{ص}}{\text{ن}\sum \text{س}^2 - (\sum \text{س})^2}$$

$$\therefore \text{ب} = \frac{١٠ \times ٣٦١ - ٥٠ \times ٦٠}{١٠ \times ٣١٠ - (٥٠)^2} = \frac{٦١}{٦٠}$$

$$\therefore \text{أ} = \frac{\sum \text{ص} - \text{ب} \sum \text{س}}{\text{ن}}$$

$$\therefore \text{أ} = \frac{٦٠ - \frac{٦١}{٦٠} \times ٥٠}{١٠} = \frac{١١}{١٢}$$

$\therefore$ معادلة خط انحدار ص على س هى

$$\text{ص} = \frac{١١}{١٢} + \frac{٦١}{٦٠}\,\text{س}$$ عندما س = ٥

$$\therefore \text{ص} = \frac{١١}{١٢} + \frac{٦١}{٦٠} \times ٥ = ٦$$

تدريب من بيانات الجدول الآتى :

س	٦	٥	٧	٨	١٠	٤	٣
ص	٤	٧	٥	٦	٨	٣	٢

أوجد :

١ معادلة خط الانحدار

٢ قدر قيمة ص عندما س = ٩

٣ مقدار الخطأ فى ص إذا كانت س = ٨

تدريب من بيانات الجدول الآتى :

س	٥	٨	١٠	١٤	١٦	٢٠
ص	٤	٦	٩	١١	١٢	١٥

أوجد :

١ معادلة خط الانحدار

٢ قدر قيمة ص عندما س = ١٢

تدريبات

١ إذا كان المتغيران يتزيدان معاً أو يتناقصان معاً فإن الارتباط بينهما يكون ....

(أ) طردياً (ب) عكسياً

(ج) غير خطياً (د) منعدم

الحل الاختيار (أ)

٢ معامل الارتباط مقياس رقمى ينتمى إلى

(أ) [٠ ، ١] (ب)]-١ ، ١[

(ج) [-١ ، ١] (د) [٠ ، ١] - {٠}

الحل الاختيار (ج)

٣ معامل الارتباط بين متغيرين (ر) يكون طردى تام عندما ر ∈ .... (امتحان ٢٠٢١)

(أ) {١} (ب) {-١} (ج) {صفر} (د) ∅

الحل الاختيار (أ)

٤ أقوى معامل ارتباط عكسى فيما يلى هو ....

(أ) -٠,٢ (ب) -٠,٥ (ج) -٠,٧ (د) -٠,٨

الحل الاختيار (د)

٥ أقوى معامل ارتباط فيما يلى هو ....

(أ) ٠,٧ (ب) ١,٢ (ج) -٠,٩ (د) -٠,٣

الحل الاختيار (ج)

٦ أقوى معامل ارتباط فيما يلى هو ....

(أ) -١,١ (ب) -٠,٩ (ج) ١,٢ (د) ١,٠٢

الحل الاختيار (ب)

٧ المعادلة الإحصائية لمعادلة خط الانحدار حيث ب معامل الانحدار هي ....

(أ) ص = أس + ب　　(ب) ص = أ + ب س

(ج) ص = أص + ب　　(د) ص = ب + أس

الحل الاختيار (ب)

٨ إذا كانت معادلة خط الانحدار هي :

ص = ٧ − ٠,٨ س فإن قيمة ص المتوقعة عندما س = ٥ هي ....

(أ) ٢　(ب) ٣　(ج) ٥　(د) ٧

الحل

ص = ٧ − ٠,٨ × ٥ = ٧ − ٤ = ٣

الاختيار (ب)

٩ إذا كانت معادلة خط الانحدار هي :

ص = ٠,٢ س + ٣ وكانت قيمة ص الجدولية عندما س = ٥ هي ٤,٦ فإن مقدار الخطأ في قيمة ص تساوي ....

(أ) ٤　(ب) −٠,٦　(ج) ٠,٤　(د) ٠,٦

الحل ص = ٠,٢ × ٥ + ٣ = ٤

مقدار الخطأ = | القيمة الجدولية − القيمة التي تحقق معادلة الانحدار|

مقدار الخطأ = |٤,٦ − ٤| = ٠,٦ الاختيار (ب)

١٠ إذا كانت معادلة خط الانحدار هي :

ص = ٣ − س فإن نوع الارتباط بين المتغيرين س ، ص يكون ....

(أ) طردياً　(ب) لايوجد ارتباط

(ج) منعدماً　(د) عكسياً

الحل الاختيار (د)

لأن معامل س سالب

١١ يسمى المتغير المطلوب تقديره في معادلة خط الانحدار بالمتغير ....

(أ) المستقل　(ب) التابع　(ج) الطردي　(د) العكسي

الحل الاختيار (ب)

١٢ مجموع القيم التي وسطها الحسابي ٨ وعددها ٧ يساوي ....

(أ) ٤٠　(ب) ٥٦　(ج) ٦٠　(د) ٨٠

الحل الاختيار (ب)

مجموع القيم = الوسط الحسابي × عدد القيم

مجموع القيم = ٨ × ٧ = ٥٦

١٣ العلاقة بين طول ضلع المربع ومحيطه هو ارتباط ....

(أ) طردي قوي　(ب) عكسي قوي

(ج) طردي تام　(د) عكسي تام

الحل الاختيار (ج)

١٤ العلاقة بين طول ضلع المربع ومساحته تعطي......

(أ) علاقة خطية طردية　(ب) علاقة خطية عكسية

(ج) علاقة غير خطية　(د) لا توجد علاقة

الحل الاختيار (ج)

١٥ إذا كانت جميع النقاط في شكل الانتشار تقع على خط مستقيم ميله سالب فإن معامل الارتباط بين المتغيرين س ، ص يساوي ....

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) −٠,٥ (د) −١

الحل الاختيار (د)

١٦ إذا كانت جميع النقاط في شكل الانتشار تقع على خط مستقيم ميله موجب فإن معامل الارتباط بين المتغيرين س ، ص يساوي ....

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ١

الحل الاختيار (د)

١٧ إذا وقعت النقطتان (١١,٥ ، ١٠) ، (٦,٥ ، ٥) على خط انحدار ص على س فإن الارتباط بين س ، ص يكون ....

(أ) طردياً (ب) عكسياً (جـ) تاماً (د) منعدماً

الحل الاختيار (أ) هنوجد ميل الخط المستقيم م = $\frac{١٠ - ٥}{١١,٥ - ٦,٥}$ = ١

١٨ إذا وقعت النقطتان (٢ ، ٨) ، (٧ ، ٣) على خط انحدار ص على س وكان الارتباط تاماً فإن معامل الارتباط الخطي يساوي ....

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ١

الحل الاختيار (أ) هنوجد ميل الخط المستقيم م = $\frac{٨ - ٣}{٢ - ٧}$ = −١

١٩ إذا وقعت النقطتان (٥ ، ١٣) ، (١٤ ، ٤) على خط انحدار ص على س فإن جميع النقاط الآتية تقع على نفس الخط ماعدا النقطة ....

(أ) (١٥ ، ٥) (ب) (١٠ ، ٨)

(جـ) (٦ ، ١٢) (د) (٥ ، ١٣)

الحل الاختيار (أ) هنوجد ميل الخط المستقيم م = $\frac{١٣ - ٤}{٥ - ١٤}$ = −١

سبب الاختيار أن ميل النقطة (١٥ ، ٥) وأي من النقطتين المعطاة لايساوي −١ فمثلاً

٢٠ معامل ارتباط بيرسون يمكن حسابه عندما تكون الكميات ....

(أ) كمية فقط (ب) وصفية فقط

(جـ) كمية أو وصفية (د) غير ذلك

الحل الاختيار (أ)

٢١ إذا كانت ف هي الفروق بين رتب المتغيرين س ، ص وكان مجـ ف^{٢} = صفر فإن معامل الارتباط (ر) بين س ، ص يساوي ....

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) ٠,٥ (د) ١

الحل الاختيار (د)

٢٢ من بيانات الجدول الآتي :

س	٦	٥	٧	٨	١٠	٦	٧
ص	٤	٧	٥	٦	٨	٧	٨

فإذا كانت معادلة خط انحدار ص = ٤,٢ + ٠,٣ س فإن مقدار الخطأ عندما س = ١٠ يساوي ....

(أ) −٢,٨ (ب) −٠,٨ (ج) ٠,٨ (د) ٢,٨

الحل الاختيار (ج) عندما س = ١٠

ص = ٤,٢ + ٠,٣ × ١٠ = ٧,٢

مقدار الخطأ = | القيمة الجدولية − القيمة التى تحقق معادلة الانحدار|

مقدار الخطأ = |٨ − ٧,٢| = ٠,٨

٢٢ من بيانات الجدول الآتى :

س	٦	٥	٧	٨	١٠
ص	٤	٧	٥	٦	٨

فإذا كان مقدار الخطأ عندما س = ٨ هو ٠,٣ فإن مقدار القيمة التى تحقق معادلة الانحدار تساوى ......

(أ) ٦ (ب) ٦,٦ (ج) ٦,٣ (د) ١٠

الحل الاختيار (ج) عندما س = ١٠

مقدار الخطأ = | القيمة الجدولية − القيمة التى تحقق معادلة الانحدار|

نفرض أن القيمة التى تحقق معادلة الانحدار هي م

٠,٣ = |٦ − م| ∴ م = ٦,٣

الاحتمال الشرطى

تذكر أن :-

قوانين الاحتمالات

١ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

- احتمال وقوع الحدث أ أو ب أو كليهما
- احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل
- احتمال أياً من الحدثين

٢ ل(أ ∩ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∪ ب)

- احتمال وقوع الحدث أ و ب معاً

٣

ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب) = ل(أ ∩ بَ)

- احتمال وقوع أ وعدم وقوع ب
- احتمال وقوع الحدث أ فقط

٤

ل(ب − أ) = ل(ب) − ل(أ ∩ ب) = ل(ب ∩ أَ)

- احتمال وقوع ب وعدم وقوع أ
- احتمال وقوع الحدث ب فقط

٥ ل(أَ) = ١ − ل(أ) ← احتمال عدم وقوع الحدث أ

٦ ل(بَ) = ١ − ل(ب) ← احتمال عدم وقوع الحدث ب

٧ ل(أَ ∪ بَ) = ل(أ ∩ ب)َ = ١ − ل(أ ∩ ب)

- احتمال عدم وقوع الحدثين معاً .
- احتمال وقوع أحدهما على الأكثر .

٨ ل(أَ ∩ بَ) = ل(أ ∪ ب)َ = ١ − ل(أ ∪ ب)

- احتمال عدم وقوع أياً من الحدثين .
- احتمال عدم وقوع الحدث أ و عدم وقوع الحدث ب .

٩ $\text{ل}(\bar{\text{أ}} \cup \text{ب}) = \text{ل}\overline{(\text{أ} - \text{ب})} = ١ - \text{ل}(\text{أ} - \text{ب})$
$= \text{ل}(\bar{\text{أ}}) + \text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب})$

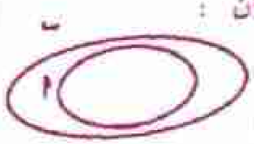
- احتمال وقوع ب أو عدم وقوع الحدث أ .
- احتمال عدم وقوع الحدث أ فقط ب .

١٠
$\text{ل}(\text{أ} - \text{ب}) \cup \text{ل}(\text{ب} - \text{أ}) = \text{ل}(\text{أ} \cup \text{ب}) - \text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب})$

- احتمال وقوع أحد الحدثين دون الآخر ب
- احتمال وقوع أحد الحدثين فقط .

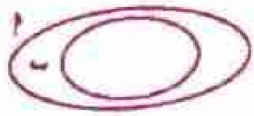
ملحوظة

١ إذا كان : $\text{أ} \subset \text{ب}$ فإن :



* $\text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب}) = \text{ل}(\text{أ})$
* $\text{ل}(\text{أ} \cup \text{ب}) = \text{ل}(\text{ب})$

٢ إذا كان : $\text{ب} \subset \text{أ}$ فإن :



* $\text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب}) = \text{ل}(\text{ب})$
* $\text{ل}(\text{أ} \cup \text{ب}) = \text{ل}(\text{أ})$

٣ إذا كان : أ ، ب حدثان متنافيان فإن :

* $\text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب}) =$ صفر * $\text{أ} \cap \text{ب} = \varnothing$

ملحوظة

$$\text{احتمال أى حدث} = \frac{\text{عدد عناصر الحدث}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة}}$$

$$\text{ل}(\text{أ}) = \frac{\text{ن}(\text{أ})}{\text{ن}(\text{ف})}$$

الاحتمال الشرطى

$$\text{ل}(\text{أ}|\text{ب}) = \frac{\text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب})}{\text{ل}(\text{ب})} \quad \text{حيث } \text{ل}(\text{ب}) > ٠$$

تعنى وقوع الحدث أ علماً بأن الحدث ب قد وقع بالفعل وتقرأ احتمال وقوع الحدث أ بشرط ب

فمثلاً :-

فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم

$\text{ف} = \{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦\}$

إذا كان أ حدث ظهور عدد أقل من ٤ فإن :

$\text{أ} = \{١ ، ٢ ، ٣\} \quad \therefore \text{ل}(\text{أ}) = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

وإذا كان ب حدث ظهور عدد زوجى فإن :

$\text{ب} = \{٢ ، ٤ ، ٦\} \quad \therefore \text{ل}(\text{ب}) = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

$\text{أ} \cap \text{ب} = \{٢\} \quad \therefore \text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب}) = \frac{١}{٦}$

$$\therefore \text{ل}(\text{أ}|\text{ب}) = \frac{\text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب})}{\text{ل}(\text{ب})} = \frac{\frac{١}{٦}}{\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٣}$$

ملحوظة

١ الاحتمال الشرطى له نفس خواص الاحتمال

* $٠ \leq \text{ل}(\text{أ}|\text{ب}) \leq ١$
* $\text{ل}(\bar{\text{أ}}|\text{ب}) = ١ - \text{ل}(\text{أ}|\text{ب})$

٢ $\text{ل}(\text{أ}|\text{ب}) \neq \text{ل}(\text{ب}|\text{أ})$

٣ احتمال وقوع الحدث أ بشرط وقوع الحدث ب

$= \text{ل}(\text{أ}|\text{ب})$ أى أن : فى الاحتمال الشرطى الحدث الذى يلى كلمة (ما احتمال) هو الحدث الذى نبدأ به والحدث الذى يلى إحدى الكلمات (علماً بأن) أو (بشرط أن) أو (إذا كان) أو (إذا علم أن) هو الشرط

٤ نعلم ان $\text{ل}(أ|ب) = \frac{\text{ل}(أ\cap ب)}{\text{ل}(ب)}$

$\therefore \text{ل}(أ\cap ب) = \text{ل}(ب) \times \text{ل}(أ|ب)$

* $\text{ل}(ب|أ) = \frac{\text{ل}(أ\cap ب)}{\text{ل}(أ)}$

$\therefore \text{ل}(أ\cap ب) = \text{ل}(أ) \times \text{ل}(ب|أ)$

الاحداث المستقلة

* **الحدثان المستقلان : يكون الحدثان مستقلين إذا كان وقوع احد الحدثين لايوثر ق احتمال وقوع الحدث الاخر**

أى أن : إذا كان أ ، ب حدثين مستقلين فإن :

$\text{ل}(أ|ب) = \text{ل}(أ)$

، $\text{ل}(أ\cap ب) = \text{ل}(أ) \times \text{ل}(ب)$

أى ان احتمال وقوع حدثين مستقلين معاً

= احتمال (وقوع الحدث الأول) × (احتمال وقوع الحدث الثانى)

تعريف يقال إن الحدثين أ ، ب مستقلان إذا وفقط

من أمثلة الأحداث المستقلة :

$\text{ل}(أ\cap ب) = \text{ل}(أ) \times \text{ل}(ب)$

* إلقاء قطعة نقود ثم إلقاء حجر نرد
* نجاح طالب فى مادة العلوم ونجاح طالب فى مادة اللغة الانجليزية
* سحبت كرة عشوائياً من كيس ثم أعيدت إلى الكيس ثم سحبت كرة ثانية

الأحداث المستقلة

يقال إن الحدثين أ ، ب غير مستقلان إذا كان

$\text{ل}(أ\cap ب) \neq \text{ل}(أ) \times \text{ل}(ب)$

ملحوظة فى حالة سحب (كرات أو بطاقات أو ......) مع الاحلال (الإرجاع) تكون الأحداث مستقلة

مثال ١ اذا كان :

$\text{ل}(أ) = \frac{٢}{٥}$ ، $\text{ل}(ب) = \frac{١}{٣}$ ، $\text{ل}(أ\cup ب) = \frac{٣}{٥}$

أوجد كلاً مما يأتى :

١ $\text{ل}(أ|ب)$ ٣ $\text{ل}(ب|أ)$

٢ $\text{ل}(أ\cap ب')$ ٤ $\text{ل}(أ|ب')$

الحل

$\because \text{ل}(أ\cap ب) = \text{ل}(أ) + \text{ل}(ب) - \text{ل}(أ\cup ب)$

$\therefore \text{ل}(أ\cap ب) = \frac{٢}{٥} + \frac{١}{٣} - \frac{٣}{٥} = \frac{٢}{١٥}$

١ $\text{ل}(أ|ب) = \frac{\text{ل}(أ\cap ب)}{\text{ل}(ب)} = \frac{\frac{٢}{١٥}}{\frac{١}{٣}} = \frac{٢}{٥}$

٢ $\text{ل}(ب|أ) = \frac{\text{ل}(أ\cap ب)}{\text{ل}(أ)} = \frac{\frac{٢}{١٥}}{\frac{٢}{٥}} = \frac{١}{٣}$

٣ $\text{ل}(أ\cap ب') = \text{ل}(أ-ب) = \text{ل}(أ) - \text{ل}(أ\cap ب)$

$\text{ل}(أ\cap ب') = \frac{٢}{٥} - \frac{٢}{١٥} = \frac{٤}{١٥}$

٤ $\text{ل}(أ|ب') = \frac{\text{ل}(أ\cap ب')}{\text{ل}(ب')} = \frac{\frac{٤}{١٥}}{١-\frac{١}{٣}} = \frac{٢}{٥}$

تدريب اذا كان :

$\text{ل}(أ) = ٠.٧$ ، $\text{ل}(ب) = ٠.٦$ ، $\text{ل}(أ\cap ب) = ٠.٤$

أوجد كلاً مما يأتى :

١ $\text{ل}(أ\cap ب)$ ٣ $\text{ل}(أ)$

٢ $\text{ل}(أ|ب)$ ٤ $\text{ل}(ب|أ)$

مثال ٢ إذا كان :

$\text{ل}(أ) = ٠.٤٤$ ، $\text{ل}(ب) = ٠.٦$ ، $\text{ل}(ب|أ) = ٠.٨$

أوجد كلاً مما يأتى :

١ $\text{ل}(أ\cap ب)$ ٣ $\text{ل}(أ\cup ب)$

٣ $ل(أ|ب)$ ٤ $ل(ب|أ)$

الحل

١

$\because ل(ب|أ) = ٠,٨ \Leftarrow \frac{ل(أ\cap ب)}{ل(أ)} = ٠,٨$

$\because ل(أ\cap ب) = ل(أ) \times ل(ب|أ)$

$ل(أ\cap ب) = ٠,٤٥ \times ٠,٨ = ٠,٣٦$

٢ $\because ل(أ\cup ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ\cap ب)$

$\therefore ل(أ\cup ب) = ٠,٤٥ + ٠,٦ - ٠,٣٦ = ٠,٦٩$

٣ $ل(أ|ب) = \frac{ل(أ\cap ب)}{ل(ب)} = \frac{٠,٣٦}{٠,٦} = ٠,٦$

$ل(\bar{أ}|ب) = ١ - ل(أ|ب) = ١ - ٠,٦ = ٠,٤$

٤ $ل(ب|أ) = \frac{ل(أ\cap ب)}{ل(أ)} = \frac{٠,٣٦}{٠,٤٥} = ٠,٨$

تدريب إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية بحيث كان :

$ل(أ) = ٠,٤$ ، $ل(ب) = ٠,٧$ ، $ل(أ|ب) = ٠,٣$

أوجد كلاً مما يأتي :

١ $ل(أ\cap ب)$ ٢ $ل(أ\cup ب)$

٣ $ل(ب|أ)$ ٤ $ل(أ|\bar{ب})$

مثال ٣ إذا كان :

$ل(ب|أ) = \frac{٢}{٣}$ ، $ل(ب|\bar{أ}) = \frac{٤}{٧}$ ، $ل(أ) = \frac{٣}{٥}$

أوجد كلاً مما يأتي :

١ $ل(أ\cap ب)$ ٢ $ل(ب)$

الحل

$\because ل(ب|أ) = \frac{٢}{٣} \Leftarrow \frac{ل(أ\cap ب)}{ل(أ)} = \frac{٢}{٣}$

$\because ل(أ\cap ب) = \frac{٢}{٣} \times ل(أ) = \frac{٢}{٣} \times \frac{٣}{٥} = \frac{٢}{٥}$

$\because ل(\bar{أ}) = ١ - ل(أ) = ١ - \frac{٣}{٥} = \frac{٢}{٥}$

$\because ل(ب|\bar{أ}) = \frac{٤}{٧} \Leftarrow \frac{ل(ب\cap \bar{أ})}{ل(\bar{أ})} = \frac{٤}{٧}$

$\therefore ل(ب\cap \bar{أ}) = \frac{٤}{٧} \times ل(\bar{أ}) = \frac{٤}{٧} \times \frac{٢}{٥} = \frac{٨}{٣٥}$

$\therefore ل(ب) - ل(أ\cap ب) = \frac{٨}{٣٥}$

$\Leftarrow ل(ب) = \frac{٨}{٣٥} + \frac{٢}{٥} = \frac{٢٢}{٣٥}$

مثال ٤ إذا كان احتمال نجاح طالب في امتحان هو ٠,٧ واحتمال سفره إذا نجح ٠,٦ فما احتمال نجاحه وسفره للخارج .

الحل نفرض أن الحدث أ (سفره للخارج)

ونفرض أن الحدث ب (نجاح الطالب)

$\therefore ل(ب) = ٠,٧$

احتمال سفره للخارج إذا نجح $\therefore ل(أ|ب) = ٠,٦$

$\therefore ل(أ|ب) = \frac{ل(أ\cap ب)}{ل(ب)} = ٠,٦$

$\therefore ل(أ\cap ب) = ٠,٧ \times ٠,٦ = ٠,٤٢$

مثال ٥ يدرس ١٠٠ طالب في أحد المعاهد التعليمية لتدريس اللغات فإذا كان عدد الدارسين للغة الانجليزية ٦٠ طالباً وعدد الدارسين للغة الفرنسية ٥٠ طالباً وعدد الدارسين للغتين معاً ٣٥ طالباً . اختير أحد الطلاب عشوائياً من هذا المعهد أوجد احتمال أن يكون الطالب دارساً

١ أحد اللغتين على الأقل

٢ اللغة الانجليزية إذا كان دارساً للغة الفرنسية

٣ اللغة الفرنسية إذا كان دارساً اللغة الانجليزية

الحل

احتمال أن يكون الطالب دارساً اللغة الانجليزية

$ل(أ) = \frac{٦٠}{١٠٠} = ٠,٦$

احتمال أن يكون الطالب دارساً اللغة الفرنسية

$ل(ب) = \frac{٥٠}{١٠٠} = ٠,٥$

احتمال أن يكون الطالب دارساً اللغتين معاً

$ل(أ \cap ب) = \frac{٣٥}{١٠٠} = ٠,٣٥$

١ احتمال أن يكون دارساً أحد اللغتين على الأقل

$ل(أ \cup ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ \cap ب)$

$ل(أ \cup ب) = ٠,٦ + ٠,٥ - ٠,٣٥ = ٠,٧٥$

٢ احتمال دارساً الانجليزية إذا كان دارساً الفرنسية

$\therefore ل(أ|ب) = \frac{ل(أ \cap ب)}{ل(ب)} = \frac{٠,٣٥}{٠,٥} = ٠,٧$

٣ احتمال دارساً الفرنسية إذا كان دارساً الانجليزية

$\therefore ل(ب|أ) = \frac{ل(أ \cap ب)}{ل(أ)} = \frac{٠,٣٥}{٠,٦} = ٠,٥٨$

مثال ٦ من بيانات الجدول التالى

الحالة	عدد الأشخاص	
	يلبس نظارة	لايلبس نظارة
رجل	٤٠٠	٣٠٠
امرأة	٢٠٠	١٠٠

أوجد

١ احتمال أن يكون الشخص المختار امرأة وتلبس نظارة

٢ احتمال أن يكون الشخص المختار امرأة بشرط أن تكون ممن يلبسون نظارة

٣ احتمال أن يكون الشخص المختار رجل بشرط أن يكون ممن لايلبسون نظارة

الحل

نفرض ان $ن(ف) = ١٠٠٠$ (عدد الأشخاص الكلى)

أ حدث أن يكون الشخص المختار امرأة

، ب حدث أن يكون الشخص المختار يلبس نظارة

$\therefore ل(ب) = \frac{٦٠٠}{١٠٠٠} = ٠,٦$

١ احتمال أن يكون الشخص المختار امرأة وتلبس نظارة $ل(أ \cap ب) = \frac{٢٠٠}{١٠٠٠} = ٠,٢$

٢ احتمال أن يكون الشخص المختار امرأة بشرط أن تكون ممن يلبسون نظارة

$= \frac{\text{عدد (امرأة) تلبس نظارة}}{\text{عدد الذين يلبسون نظارة}} = \frac{٢٠٠}{٦٠٠} = \frac{١}{٣}$

٣ احتمال أن يكون الشخص المختار رجل بشرط أن يكون ممن لايلبسون نظارة

$= \frac{\text{عدد (رجل) لايلبس نظارة}}{\text{عدد الذين لا يلبسون نظارة}} = \frac{٣٠٠}{٤٠٠} = \frac{٣}{٤}$

مثال ٧ صندوق يحتوى على ٦ كرات بيضاء و ٤ كرات حمراء ، إذا سحبت كرة عشوائياً (مع الاحلال) م احتمال أن تكون :

١ الكرتان بيضاوين فى المرتين

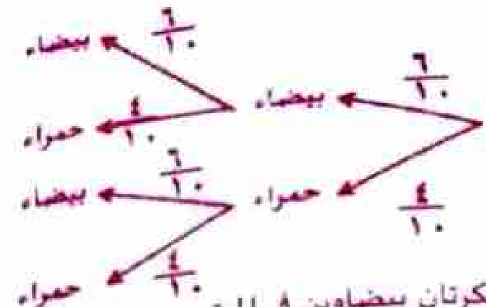
٢ الكرتان حمراوين فى المرتين

٣ الكرة الأولى حمراء والثانية بيضاء

٤ إحدهما حمراء والأخرى بيضاء

الحل

سحب الكرة مع الاحلال أى فضاء العينة لايتغير ويكون الحدثان مستقلان



١ الكرتان بيضاوين فى المرتين

$= \frac{٦}{١٠} \times \frac{٦}{١٠} = \frac{٣٦}{١٠٠} = ٠,٣٦$

٢ الكرتان حمراوين فى المرتين

$= \frac{٤}{١٠} \times \frac{٤}{١٠} = \frac{١٦}{١٠٠} = ٠,١٦$

٣ الكرة الأولى حمراء والثانية بيضاء

$= \frac{٤}{١٠} \times \frac{٦}{١٠} = \frac{٢٤}{١٠٠} = ٠,٢٤$

٤ إحدهما حمراء والأخرى بيضاء

= احتمال الأولى حمراء والثانية بيضاء + احتمال الأولى بيضاء والثانية حمراء

$= \frac{٤}{١٠} \times \frac{٦}{١٠} + \frac{٦}{١٠} \times \frac{٤}{١٠} = \frac{٤٨}{١٠٠} = ٠,٤٨$

مثال ٨ حقيبة بها ٦ كرات بيضاء و ٤ كرات حمراء سحبت كرتان الواحدة وراء الأخرى دون إحلال (دون إرجاع) أوجد احتمال أن تكون :

١ الكرة الثانية بيضاء بشرط أن تكون الكرة الأولى حمراء

٢ الكرة الثانية بيضاء بشرط أن تكون الكرة الأولى بيضاء

٣ الكرة الثانية حمراء بشرط أن تكون الكرة الأولى بيضاء

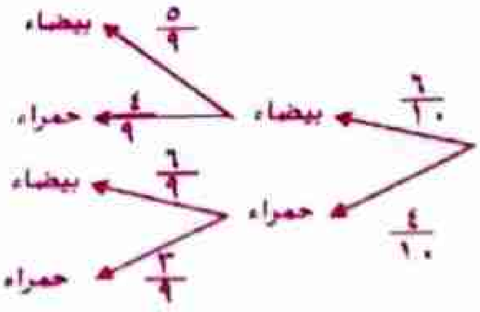
٤ الكرة الأولى حمراء والثانية بيضاء

٥ الكرتان بيضاوين

٦ إحدى الكرتين حمراء والأخرى بيضاء

الحل

سحب الكرة مع الاحلال أى فضاء العينة يتغير يقل بمقدار واحد ويكون احتمال السحبة الثانية هى احتمالات مشروطة بالسحبة الأولى



١ احتمال أن تكون الكرة الثانية بيضاء بشرط أن تكون الكرة الأولى حمراء $= \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$

٢ احتمال أن تكون الكرة الثانية بيضاء بشرط أن تكون الكرة الأولى بيضاء $= \frac{٥}{٩}$

٣ احتمال أن تكون الكرة الثانية حمراء بشرط أن تكون الكرة الأولى بيضاء $= \frac{٤}{٩}$

٤ احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والثانية بيضاء = احتمال الأولى حمراء × احتمال أن تكون الثانية بيضاء بشرط أن تكون الأولى حمراء

$= \frac{٤}{١٠} \times \frac{٦}{٩} = \frac{٢٤}{٩٠} = \frac{٤}{١٥}$

٥ احتمال أن تكون الكرتان بيضاوين = احتمال أن تكون الكرة الأولى بيضاء والثانية بيضاء = احتمال أن تكون الأولى بيضاء × احتمال أن تكون الثانية بيضاء بشرط أن تكون الأولى بيضاء

$= \frac{٦}{١٠} \times \frac{٥}{٩} = \frac{٣٠}{٩٠} = \frac{١}{٣}$

٦ احتمال أن تكون إحدى الكرتين حمراء والأخرى بيضاء = احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والثانية بيضاء + احتمال أن تكون الكرة الأولى بيضاء والثانية حمراء = احتمال الأولى حمراء × احتمال أن تكون الثانية بيضاء بشرط أن تكون الأولى حمراء + احتمال أن تكون الأولى بيضاء × احتمال أن تكون الثانية حمراء بشرط أن تكون الأولى بيضاء

$= \frac{٤}{١٠} \times \frac{٦}{٩} + \frac{٦}{١٠} \times \frac{٤}{٩} = \frac{٤٨}{٩٠} = \frac{٨}{١٥}$

تدريبات

١ إذا كان: ل(أ∩ب) = $\frac{٢}{٥}$ ، ل(أ) = $\frac{٤}{٥}$

فإن: ل(ب|أ) = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٨}{٢٥}$ (ج) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{٢}{٥}$

الحل الاختيار (أ)

ل(أ|ب) = $\frac{\text{ل(أ∩ب)}}{\text{ل(ب)}}$ = $\frac{٢}{٥} \div \frac{٤}{٥} = \frac{١}{٢}$

٢ إذا كان: ل(أ|ب) = $\frac{١}{٣}$ ، ل(ب) = $\frac{١٢}{٢٥}$

فإن: ل(أ∩ب) = ... (امتحان ٢٠١٨)

(أ) $\frac{٢٤}{٢٥}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (ج) $\frac{٢٥}{٣٦}$ (د) $\frac{١٦}{٢٥}$

الحل الاختيار (أ)

ل(أ|ب) = $\frac{\text{ل(أ∩ب)}}{\text{ل(ب)}}$

∴ ل(أ∩ب) = ل(أ|ب) × ل(ب) = $\frac{١}{٣} \times \frac{١٢}{٢٥} = \frac{٤}{٢٥}$

٣ إذا كان: أ ، ب حدثين مستقلين وكان:

ل(أ) = ٠,٢ ، ل(ب) = ٠,٦ فإن: ل(أ∪ب) = ...

(أ) ٠,١٢ (ب) ٠,٣٢ (ج) ٠,٦٨ (د) ٠,٨

الحل الاختيار (ج)

∵ أ ، ب حدثين مستقلين

∴ ل(أ∩ب) = ل(أ) × ل(ب) = ٠,٢ × ٠,٦ = ٠,١٢

∴ ل(أ∪ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ∩ب)

∴ ل(أ∪ب) = ٠,٢ + ٠,٦ − ٠,١٢ = ٠,٦٨

٤ إذا كان : أ ، ب حدثين مستقلين وكان :
ل(أ) = ٠,٢٥ ، ل(ب) = ٠,٤ فإن : ل(أ − ب) = ...

(أ) ٠,١ (ب) ٠,١٥ (ج) ٠,٣ (د) ٠,٦٥

الحل الاختيار (ب)

∵ أ ، ب حدثين مستقلين

∴ ل(أ∩ب) = ل(أ) × ل(ب) = ٠,٢٥ × ٠,٤ = ٠,١

∴ ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ∩ب)

∴ ل(أ − ب) = ٠,٢٥ − ٠,١ = ٠,١٥

---

٥ إذا كان : ل(أ') = ٠,٣ ، ل(ب) = ٠,٤ ،
ل(أ∩ب) = ٠,٢ فإن : ل(أ|ب') = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٥}{٦}$ (ج) ١ (د) $\frac{٣}{٤}$

الحل الاختيار (ب)

∵ ل(أ) = ١ − ل(أ') = ١ − ٠,٣ = ٠,٧

ل(أ|ب') = $\frac{ل(أ∩ب')}{ل(ب')}$ = $\frac{ل(أ) − ل(أ∩ب)}{١ − ل(ب)}$

ل(أ|ب') = $\frac{٠,٧ − ٠,٢}{١ − ٠,٤}$ = $\frac{٥}{٦}$

---

٦ إذا كان : ل(أ − ب) = ٠,٤ ، ل(أ∩ب) = ٠,١
فإن : ل(ب'|أ) = ...

(أ) ٠,٣ (ب) ٠,٥ (ج) ٠,٤ (د) ٠,٨

الحل الاختيار (د)

∵ ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ∩ب)

∴ ٠,٤ = ل(أ) − ٠,١

∴ ل(أ) = ٠,٤ + ٠,١ = ٠,٥

ل(ب'|أ) = ١ − ل(ب|أ) ، ل(ب|أ) = $\frac{ل(أ∩ب)}{ل(أ)}$

ل(ب|أ) = $\frac{٠,١}{٠,٥}$ = $\frac{١}{٥}$

ل(ب'|أ) = ١ − $\frac{١}{٥}$ = $\frac{٤}{٥}$ = ٠,٨

---

٧ إذا كان : أ ⊂ ب وكان : ل(أ') = $\frac{٧}{١٠}$
، ل(ب) = $\frac{١}{٢}$ فإن : ل(أ|ب) تساوي ......

(أ) $\frac{١}{٥}$ (ب) $\frac{٣}{٥}$ (ج) $\frac{٤}{٥}$ (د) $\frac{٣}{٢٠}$

الحل الاختيار (ب)

ل(أ) = ١ − $\frac{٧}{١٠}$ = $\frac{٣}{١٠}$

∵ أ ⊂ ب ∴ ل(أ∩ب) = ل(أ) = $\frac{٧}{١٠}$

ل(أ|ب) = $\frac{ل(أ∩ب)}{ل(ب)}$ = $\frac{٣}{١٠}$ ÷ $\frac{١}{٢}$ = $\frac{٣}{٥}$

---

٨ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية ف وكان أ ⊂ ب : فإن
ل(ب|أ) = ...

(أ) ل(أ) (ب) ل(ب)
(ج) ل(أ − ب) (د) ل(ف)

الحل الاختيار (د)

∵ أ ⊂ ب ∴ ل(أ∩ب) = ل(أ)

ل(ب|أ) = $\frac{ل(أ∩ب)}{ل(أ)}$ = $\frac{ل(أ)}{ل(أ)}$ = ١ = ل(ف)

---

٩ إذا كان : أ ، ب حدثين مستقلين وكان :
ل(ب) = ٠,٦ ، ل(أ∪ب) = ٠,٦٨
فإن : ل(أ) = ...

(أ) ٠,٢ (ب) ٠,٣ (ج) ٠,٤ (د) ٠,٥

الحل الاختيار (أ)

∵ أ ، ب حدثين مستقلين

∴ ل(أ∩ب) = ل(أ) × ل(ب) = ٠٫٦ ل(أ)

∴ ل(أ∪ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ∩ب)

∴ ٠٫٦٨ = ل(أ) + ٠٫٦ − ٠٫٦ ل(ب)

٠٫٦٨ − ٠٫٦ = ٠٫٤ ل(أ)   ٠٫٤ ل(أ) = ٠٫٠٨

ل(أ) = $\frac{٠٫٠٨}{٠٫٤}$ = ٠٫٢

١٠ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ف وكان : ل(أ) = ٠٫٦ ، ل(ب) = ٠٫٥ ، ل(أ∪ب) = ٠٫٨ فإن : أ ، ب يكونان حدثين ..

(أ) مستقلين   (ب) غير مستقلين
(ج) متنافيين   (د) متنافيين ومستقلين

الحل الاختيار (أ)

∴ ل(أ∩ب) = ل(أ) × ل(ب) = ٠٫٦ × ٠٫٥ = ٠٫٣

∴ ل(أ∩ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ∪ب)

∴ ل(أ∩ب) = ٠٫٦ + ٠٫٥ − ٠٫٨ = ٠٫٣

١١ إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ف وكان : ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}
وكان أ = {١ ، ٤ ، ٥ ، ٦}
، ب = {٢ ، ٣ ، ٥ ، ٦}
فإن : أ ، ب يكونان حدثين .....

(أ) مستقلين   (ب) غير مستقلين
(ج) متنافيين   (د) متنافيين ومستقلين

الحل الاختيار (ب)

∴ ل(أ∩ب) = $\frac{٢}{٦}$ = $\frac{١}{٣}$ ∴ (أ∩ب) = {٥ ، ٦}

∵ ل(أ) = $\frac{٤}{٦}$ ، ل(ب) = $\frac{٤}{٦}$

∴ ل(أ) × ل(ب) = $\frac{٤}{٦}$ × $\frac{٤}{٦}$ = $\frac{١٦}{٣٦}$ = $\frac{٤}{٩}$

١٢ في تجربة إلقاء قطعة نقود منتظمة مرتين متتاليتين ، احتمال ظهور كتابة في الرمية الثانية إذا ظهرت صورة في الرمية الأولى تساوي ....

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (ج) $\frac{٣}{٤}$ (د) ١

الحل الاختيار (أ)

∴ (أ∩ب) = {٥ ، ٦}

∴ ف = {(ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك)}

∴ ل(م) = $\frac{١}{٤}$

١٣ في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة ، احتمال ظهور عدد زوجي أولي إذا ظهر عدد أكبر من ١ هو .... (امتحان ٢٠١٩)

(أ) $\frac{١}{٥}$ (ب) $\frac{٢}{٥}$ (ج) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{٤}{٥}$

الحل الاختيار (أ)

ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}   ∴ ن(ف) = ٦

نفرض ظهور عدد زوجي أولي هو أ = {٢}

∴ ل(أ) = $\frac{١}{٦}$

نفرض ظهور عدد أكبر من ١ هو

ب = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

∴ ل(ب) = $\frac{٥}{٦}$ (أ∩ب) = {٢}

ل(أ∩ب) = $\frac{١}{٦}$

ل(أ|ب) = $\frac{ل(أ∩ب)}{ل(ب)}$ = $\frac{١}{٦}$ ÷ $\frac{٥}{٦}$ = $\frac{١}{٥}$

١٤ في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة ، احتمال ظهور العدد ٣ علماً بأن العدد الظاهر فردي هو ....

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (ج) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

الحل الاختيار (أ)

ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} ∴ ن(ف) = ٦

نفرض ظهور العدد ٣ هو أ = {٣}

∴ ل(أ) = $\frac{١}{٦}$

نفرض ظهور عدد فردى هو ب = {١ ، ٣ ، ٥}

∴ ل(ب) = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$ (أ ∩ ب) = {٣}

ل(أ ∩ ب) = $\frac{١}{٦}$

ل(أ|ب) = $\frac{ل(أ \cap ب)}{ل(ب)}$ = $\frac{١}{٦}$ ÷ $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٣}$

١٥ صندوق به ١٥ مصباحاً من بينها ٥ معيبة إذا سحب مصباحان عشوائياً الواحد تلو الآخر دون إحلال فإن احتمال أن يكون المصباحان معيبين هو ....

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٥}$ (ج) $\frac{٢}{٧}$ (د) $\frac{٢}{٢١}$

الحل الاختيار (د)

احتمال أن تكون الكرة الأولى معيبة = $\frac{٥}{١٥}$ = $\frac{١}{٣}$

احتمال أن تكون الكرة فى السحبة الثانية معيبة

= $\frac{٤}{١٤}$

احتمال أن يكون المصباحان معيبين

= احتمال الأول معيب والثانى معيب

= احتمال الأول معيب × احتمال الثانى معيب

= $\frac{١}{٣}$ × $\frac{٤}{١٤}$ = $\frac{٢}{٢١}$

١٦ إذا كان : ل(أ) = ٠,٤٥ ، ل(ب) = ٠,٦ ، ل(ب|أ) = ٠,٨ فإن : ل(أ ∪ ب) = ...

(أ) ٠,٦٩ (ب) ٠,٦ (امتحان ٢٠١٩)

(ج) ٠,٣٦ (د) ٠,٢

الحل الاختيار (أ)

∵ ل(ب|أ) = $\frac{ل(أ \cap ب)}{ل(أ)}$

∴ ل(أ ∩ ب) = ل(ب|أ) × ل(أ)

ل(أ ∩ ب) = ٠,٨ × ٠,٤٥ = ٠,٣٦

∴ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

∴ ل(أ ∪ ب) = ٠,٤٥ + ٠,٦ − ٠,٣٦ = ٠,٦٩

١٧ إذا كان : أ ، ب حدثين مستقلين وكان :

ل(أ) = ٠,٢ ، ل(ب) = ٠,٦ فإن : ل(أ − ب) = ..

(أ) ٠,٧٨ (ب) ٠,١٢ (امتحان ٢٠١٩)

(ج) ٠,٤٢ (د) ٠,٠٨

الحل الاختيار (د)

∵ أ ، ب حدثين مستقلين

∴ ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب) = ٠,٢ × ٠,٦ = ٠,١٢

∴ ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب)

ل(أ − ب) = ٠,٢ − ٠,١٢ = ٠,٠٨

١٨ إذا كان : ل(أ) = ٠,٤٥ ، ل(ب) = ٠,٦

، ل(ب|أ) = ٠,٨ فإن : ل(ب̄|أ) = ...

(أ) ٠,٦٩ (ب) ٠,٦ (امتحان ٢٠١٩)

(ج) ٠,٣٦ (د) ٠,٢

الحل الاختيار (د)

ل(ب̄|أ) = ١ − ل(ب|أ) ، ل(ب|أ) = $\frac{ل(أ \cap ب)}{ل(أ)}$

ل(ب|أ) = $\frac{٠,٣٦}{٠,٤٥}$ = ٠,٨

ل(ب̄|أ) = ١ − ٠,٨ = ٠,٢

٢٠ إذا كان : أ ، ب حدثين مستقلين وكان :

ل(أ) = ٠,٣ ، ل(ب) = ٠,٦ فإن : ل(أ̄|ب) = ..

(امتحان ٢٠١٩)

① ٠,٧ ⓑ ٠,٢

ⓒ ٠,٤ ⓓ ٠,٣

الحل الاختيار ①

∵ أ ، ب حدثين مستقلين

∴ ل(أ∩ب) = ل(أ) × ل(ب) = ٠,٣ × ٠,٦ = ٠,١٨

ل(أ̄|ب) = ١ − ل(أ|ب) ، ل(أ|ب) = ل(أ∩ب) / ل(ب)

ل(أ|ب) = ٠,١٨ / ٠,٦ = ٠,٣

ل(أ̄|ب) = ١ − ٠,٣ = ٠,٧

٢١ إذا كان: أ ، ب حدثين مستقلين من ف وكان: ل(ب) = ٠,٦ ، ل(أ∩ب) = ٠,١٢ فإن: ل(أ) =

(امتحان ٢٠١٨)

① ٠,٥ ⓑ ٠,٤

ⓒ ٠,٣ ⓓ ٠,٢

الحل الاختيار ⓓ

∵ أ ، ب حدثين مستقلين

∴ ل(أ∩ب) = ل(أ) × ل(ب)

∴ ل(أ) = ل(أ∩ب) / ل(ب) = ٠,١٢ / ٠,٦ = ٠,٢

٢٢ إذا كان: ل(أ) = ٠,٧ ، ل(ب) = ٠,٤ ، ل(أ∩ب) = ٠,٢ فإن: ل(أ|ب̄) = ...

(امتحان ٢٠١٨)

① ١/٢ ⓑ ٥/٦

ⓒ ١ ⓓ ٣/٤

الحل الاختيار ⓑ

∵ ل(أ) = ٠,٧

ل(أ|ب̄) = ل(أ∩ب̄) / ل(ب̄) = (ل(أ) − ل(أ∩ب)) / (١ − ل(ب))

ل(أ|ب̄) = (٠,٧ − ٠,٢) / (١ − ٠,٤) = ٥/٦

٢٣ إذا كان: أ ، ب حدثين من فضاء عينة التجربة عشوائية ، وكان

ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨}

وكان أ = {١، ٢، ٤، ٨}

، ب = {٢، ٥، ٦، ٧}

فإن: أ ، ب يكونان حدثين ______

① متنافيان ⓑ بسيطان (امتحان ٢٠١٧)

ⓒ مستقلان ⓓ غير مستقلين

الحل الاختيار ⓓ

∵ (أ∩ب) = {٢} ∴ ل(أ∩ب) = ١/٨

∵ ل(أ) = ٤/٨ ، ل(ب) = ٤/٨

∴ ل(أ) × ل(ب) = ٤/٨ × ٤/٨ = ١٦/٦٤ = ١/٤

٢٤ إذا كان: أ ، ب حدثين مستقلين من ف وكان: ل(أ|ب) = ٠,٦ ، ل(ب) = ٠,٣ فإن: ل(أ) = ...

(امتحان ٢٠١٧)

① ٠,٩ ⓑ ٠,٣

ⓒ ٠,١٨ ⓓ ٠,٦

الحل الاختيار ⓓ

ل(أ|ب) = ل(أ∩ب) / ل(ب)

∴ ل(أ∩ب) = ل(أ|ب) × ل(ب) = ٠,٦ × ٠,٣ = ٠,١٨

∵ أ ، ب حدثين مستقلين

∴ ل(أ∩ب) = ل(أ) × ل(ب)

ل(أ) = ل(أ∩ب) / ل(ب) = ٠,١٨ / ٠,٣ = ٠,٦

١٥ إذا كان : ف = {أ ، ب ، جـ} حيث أ ، ب ، جـ أحداث متنافية وكان ل(أ ∪ ب) = ٠,٦ فإن : ل(جـ) = ... (امتحان ٢٠١٧)

(أ) ٠,٢ (ب) ٠,٣ (جـ) ٠,٤ (د) ٠,٦

الحل الاختيار (د)

∵ أ ، ب ، جـ أحداث متنافية

∴ ل(أ ∩ ب) = صفر

، ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) = ٠,٦

∴ ل(جـ) = ١ − [ل(أ) + ل(ب)] = ١ − ٠,٦ = ٠,٤

المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

✱ المتغير العشوائى المتقطع

المتغير العشوائى المتقطع (أو المنفصل)

هو المتغير الذى مداه مجموعة منتهية من الأعداد الحقيقية

التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى المتقطع :

توضع فى الصورة

$س_ر$	$س_١$	$س_٢$	...	$س_ن$
$د(س_ر)$	$د(س_١)$	$د(س_٢)$	...	$د(س_ن)$

وهذه الدالة تحقق الشرطين الآتيين :

✱ $د(س_ر) > ٠$ لكل

ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ... ، ن

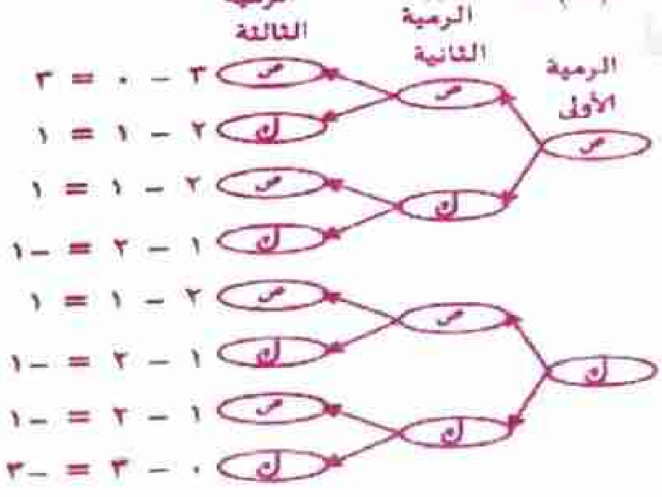
✱ $د(س_١) + د(س_٢) + د(س_٣) + \dots + د(س_ن) = ١$

أى دالة تحقق الشرطين السابقين تكون دالة توزيع احتمال متقطع

مثال ١ فى تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية أوجدى مدى المتغير العشوائى س الذى يعبر عن (عدد الصور − عدد الكتابات) ثم أكتب التوزيع الاحتمالى للمتغير س

الحل

ن(ف) = ٢^٣ = ٨



من الشكل البيانى مدى س = {٣ ، ١ ، -١ ، -٣}

ولإيجاد التوزيع الاحتمالى نوجد كل من

د(٣) = ل(س = ٣) = ١/٨ ، د(١) = ل(س = ١) = ٣/٨

د(-١) = ل(س = -١) = ٣/٨ ، د(-٣) = ل(س = -٣) = ١/٨

ويكون التوزيع الاحتمالى للمتغير س

سر	٣	١	-١	-٣
د(سر)	١/٨	٣/٨	٣/٨	١/٨

* المتوسط - التباين - الانحراف المعيارى

١ المتوسط (الوسط الحسابى)

μ = Σ سر . د(سر)

٢ التباين

(σ^2) = Σ سر² . د(سر) - μ^2

٣ الانحراف المعيارى σ = √التباين

أى أن الانحراف المعيارى $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

٤ معامل الاختلاف = $\frac{\sigma}{\mu}$ × ١٠٠٪

مثال ١ إذا كان س متغيراً عشوائيا منقطعاً توزيعه الاحتمالى مبيناً بالجدول الآتى :

سر	١	٢	٤	٦
د(سر)	٠,٢	٠,٣	أ	٠,١

١ أوجد قيمة أ

٢ أوجد المتوسط والانحراف المعيارى

الحل

١ مجموع قيم الاحتمالات (الصف الثانى) = ١

∴ أ = ١ - [٠,٢ + ٠,٣ + ٠,١] = ٠,٤

نكون الجدول

سر	د(سر)	سر . د(سر)	سر² . د(سر)
١	٠,٢	٠,٢	٠,٢
٢	٠,٣	٠,٦	١,٢
٤	٠,٤	١,٦	٦,٤
٦	٠,١	٠,٦	٣,٦
		μ = ٣	Σ = ١١,٤

المتوسط μ = ٣

التباين = ١١,٤ - ٣² = ٢,٤

الانحراف المعيارى = √٢,٤

تدريب إذا كان س متغيراً عشوائياً منقطعاً توزيعه الاحتمالى كالتالى

سر	-٣	صفر	٣	٦
د(سر)	١/٣	١/٦	١/٣	١/٦

أوجد الانحراف المعيارى والتباين

مثال ٢ إذا كان مدى المتغير العشوائى س هو ل(س = ١) = ٤/٢٥ ، ل(س = ٢) = ٧/٢٥ ، ل(س = ٤) = ١/٥ أوجد كلاً مما يأتى :

١ ل(س = ٣)

٢ التوقع والتباين للمتغير س

الحل

س	١	٢	٣	٤
د(سر)	٤/٢٥	٧/٢٥	أ	١/٥

مجموع قيم الاحتمالات (الصف الثانى) = ١

$\therefore$ أ $= 1 - \left[\frac{4}{25} + \frac{7}{25} + \frac{1}{5}\right] = \frac{9}{25}$

نكون الجدول

$س_ر$	$د(س_ر)$	$س_ر \cdot د(س_ر)$	$س_ر^2 \cdot د(س_ر)$
1	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{25}$
2	$\frac{7}{25}$	$\frac{14}{25}$	$\frac{28}{25}$
3	$\frac{9}{25}$	$\frac{27}{25}$	$\frac{81}{25}$
4	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{16}{5}$
		$\mu = \frac{13}{5}$	$\Sigma = \frac{193}{25}$

✍ المتوسط $\mu = \frac{13}{5}$

✍ التباين $= \frac{193}{25} - \left(\frac{13}{5}\right)^2 = \frac{24}{25}$

✍ الانحراف المعيارى $= \sqrt{\frac{24}{25}} = 2\sqrt{6}$

مثال ٤ إذا كان التوزيع الاحتمالى لمتغير عشوائى متقطع س يحدد بالدالة د حيث

$د(س) = \frac{أس}{9}$ ، س $= 1 ، 2 ، 3$ أوجد :

[1] قيمة أ

[2] احسب التوقع والتباين للمتغير س

الحل

$س_ر$	1	2	3
$د(س_ر)$	$\frac{أ}{9}$	$\frac{2أ}{9}$	$\frac{3أ}{9}$

الحل

مجموع قيم الاحتمالات (الصف الثانى) = ١

$\therefore \frac{أ}{9} + \frac{2أ}{9} + \frac{3أ}{9} = 1$

$\therefore \frac{6أ}{9} = 1 \quad \therefore 6أ = 9 \quad \therefore أ = \frac{9}{6}$

وبالتعويض عن قيمة أ $= \frac{9}{6}$ فى الجدول نحصل على

$س_ر$	1	2	3
$د(س_ر)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

نكون الجدول

$س_ر$	$د(س_ر)$	$س_ر \cdot د(س_ر)$	$س_ر^2 \cdot د(س_ر)$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{2}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{8}{6}$
3	$\frac{3}{6}$	$\frac{9}{6}$	$\frac{27}{6}$
		$\mu = \frac{7}{3}$	$\Sigma = 6$

✍ المتوسط $\mu = \frac{7}{3}$

✍ التباين $= 6 - \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$

✍ الانحراف المعيارى $= \sqrt{\frac{5}{9}} = 0.75$

مثال ٥ إذا كان التوزيع الاحتمالى لمتغير عشوائى متقطع س يحدد بالدالة د حيث

$د(س) = \frac{س^2 + 1}{أ}$ ، س $= 0 ، 1 ، 2 ، 3$

أوجد : [1] قيمة أ

[2] احسب معامل الاختلاف للمتغير س

الحل

$س_ر$	٠	١	٢	٣
$د(س_ر)$	$\frac{١}{أ}$	$\frac{٢}{أ}$	$\frac{٥}{أ}$	$\frac{١٠}{أ}$

مجموع قيم الاحتمالات (الصف الثانى) = ١

$\therefore \frac{١}{أ} + \frac{٢}{أ} + \frac{٥}{أ} + \frac{١٠}{أ} = ١ \quad \therefore \frac{١٨}{أ} = ١$

$\therefore أ = ١٨$

وبالتعويض عن قيمة أ = ١٨ فى الجدول نحصل على

$س_ر$	صفر	١	٢	٣
$د(س_ر)$	$\frac{١}{١٨}$	$\frac{٢}{١٨}$	$\frac{٥}{١٨}$	$\frac{١٠}{١٨}$

نكون الجدول

$س_ر$	$د(س_ر)$	$س_ر \cdot د(س_ر)$	$س_ر^٢ \cdot د(س_ر)$
صفر	$\frac{١}{١٨}$	صفر	صفر
١	$\frac{٢}{١٨}$	$\frac{٢}{١٨}$	$\frac{٢}{١٨}$
٢	$\frac{٥}{١٨}$	$\frac{١٠}{١٨}$	$\frac{٤٠}{١٨}$
٣	$\frac{١٠}{١٨}$	$\frac{٣٠}{١٨}$	$\frac{٩٠}{١٨}$
		$\mu = \frac{٤٢}{١٨}$	$\sum = \frac{١١٢}{١٨}$

المتوسط $\mu = \frac{٤٢}{١٨}$

التباين $= \frac{١١٢}{١٨} - \left(\frac{٤٢}{١٨}\right)^٢ = \frac{٧}{٩}$

الانحراف المعيارى $= \frac{\sqrt{٧}}{٣}$

معامل الاختلاف

$= \frac{\sigma}{\mu} \times ١٠٠\% \approx ٣٧,٨\%$

مثال ١ إذا كان المتوسط لمتغير عشوائى ما يساوى ١٥٠ وكان معامل الاختلاف له يساوى ٢,٥٪ فأوجد تباين المتغير العشوائى .

الحل $\because$ معامل الاختلاف $= \frac{\sigma}{\mu} \times ١٠٠\%$

$\therefore ٢,٥\% = \frac{\sigma}{١٥٠} \times ١٠٠\%$

$\therefore \sigma = \frac{٢,٥\% \times ١٥٠}{١٠٠\%} = ٣,٧٥$

$\therefore \sigma^٢ = (٣,٧٥)^٢ = ١٤,١$ (التباين)

تدريب (١) إذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً متوسطه $\mu = ٢$ وتوزيعه الاحتمالى كالتالى

$س_ر$	١	صفر	٢	أ
$د(س_ر)$	$\frac{١}{١٢}$	ب	$\frac{١}{٣}$	$\frac{٤}{١٢}$

١ احسب قيمتى أ ، ب

٢ احسب الانحراف المعيارى

تدريب (٢) إذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً متوسطه $\mu = ٣$ وتوزيعه الاحتمالى كالتالى

$س_ر$	١	٢	ك	٤
$د(س_ر)$	م	٢م	$\frac{١}{٣}$	٤م

١ احسب قيمتى م ، ك

٢ احسب الانحراف المعيارى

تدريب (٢) إذا كان التوزيع الاحتمالى لمتغير

عشوائى متقطع س يحدد بالدالة د حيث

$د(س) = \frac{س + ٤}{١٦}$ ، $س = -٢ ، ٠ ، ١ ، ٢$

أوجد : ١ قيمة م

٢ التوقع ومعامل الاختلاف للمتغير س

* المتغير العشوائى المتصل

* المتغير العشوائى المتصل

هو المتغير الذى مداه فترة مفتوحة أو مغلقة

* دالة الكثافة الاحتمالية :

إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً فإن الدالة د التى مداها غير سالب تسمى دالة كثافة احتمالية إذا كانت تحقق الشرطين الآتيان معاً

* منحنى الدلة د يقع فوق محور السينات لجميع قيم س التى تنتمى إلى مجال الدالة

* مساحة المنطقة أسفل منحنى الدالة د وفوق محور السينات تساوى الواحد الصحيح

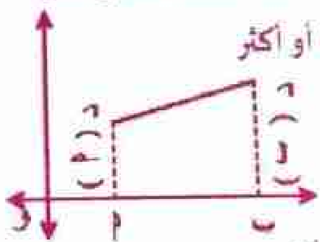
ملحوظة

١ من أمثلة المتغيرات العشوائية

* طول أحد المرشحين لاختبارات الكليات الحربية

* الوقت الذى يستغرقه المعلم فى شرح أحد الدروس

٢ دال الكثافة تكون عبارة عن دالة ثابتة أو خطية وهى تمثل بقطعة مستقيمة أو أكثر



ففى الشكل المقابل :

إذا كانت د(س)

تمثل دالة كثافة احتمالية فإن

$ل(أ \leqslant س \leqslant ب) = \frac{١}{٢}[د(أ) + د(ب)](ب - أ)$

٣

$ل(أ \leqslant س \leqslant ب) = ل(أ \leqslant س < ب)$

$= ل(أ < س \leqslant ب) = ل(أ < س < ب)$

مثال ١ إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً

ودالة كثافة الاحتمال له هى

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٦}(٢س - ١) & ، ١ \leqslant س \leqslant ٣ \\ صفر & فيما عدا ذلك \end{cases}$$

١ أثبت أن $ل(١ < س < ٣) = ١$

٢ أوجد : $ل(٢ < س < ٣)$ ، $ل(س \leqslant ٢)$

الحل

$\because د(١) = \frac{١}{٦}(٢ \times ١ - ١) = \frac{١}{٦}$

$\because د(٣) = \frac{١}{٦}(٢ \times ٣ - ١) = \frac{٥}{٦}$

$\because د(٢) = \frac{١}{٦}(٢ \times ٢ - ١) = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

١ $ل(١ < س < ٣)$

$= \frac{١}{٢}[د(١) + د(٣)](٣ - ١)$

$= \frac{١}{٢}\left[\frac{١}{٦} + \frac{٥}{٦}\right] \times ٢ = ١$

٢ $ل(٢ < س < ٣)$

$= \frac{١}{٢}[د(٢) + د(٣)](٣ - ٢)$

$= \frac{١}{٢}\left[\frac{١}{٢} + \frac{٥}{٦}\right] \times ١ = \frac{٢}{٣}$

٣ $ل(س < ٢) = ل(١ < س < ٢)$

$= \frac{١}{٢}[د(١) + د(٢)](٢ - ١)$

$= \frac{١}{٢}\left[\frac{١}{٦} + \frac{١}{٢}\right] \times ١ = \frac{١}{٣}$

مثال ٢ إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً

ودالة كثافة الاحتمال له هى

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{٢(\text{س}+١)}{٢٧} & ، ٢ \leqslant \text{س} \leqslant ٥ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

١ أثبت أن د(س) دالة كثافة للمتغير العشوائى

٢ أوجد: ل(س > ٣)

الحل

$$\because \text{د}(٢) = \frac{٢(٢+١)}{٢٧} = \frac{٦}{٢٧} = \frac{٢}{٩}$$

$$\because \text{د}(٥) = \frac{٢(٥+١)}{٢٧} = \frac{١٢}{٢٧} = \frac{٤}{٩}$$

$$، \text{د}(٣) = \frac{٢(٣+١)}{٢٧} = \frac{٨}{٢٧}$$

١ ل(٢ < س < ٥)

$$= \frac{١}{٢}\left[\text{د}(٢) + \text{د}(٥)\right](٥-٢)$$

$$= \frac{١}{٢}\left[\frac{٢}{٩} + \frac{٤}{٩}\right] \times ٣ = ١$$

∴ د(س) دالة كثافة احتمالية

٢ ل(س > ٣) = ل(٣ < س < ٥)

$$= \frac{١}{٢}\left[\text{د}(٣) + \text{د}(٥)\right](٥-٣)$$

$$= \frac{١}{٢}\left[\frac{٨}{٢٧} + \frac{٤}{٩}\right] \times ٢ = \frac{٢٠}{٢٧}$$

تدريب إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً

ودالة كثافة الاحتمال له هى

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{\text{س}+١}{١٢} & ، ٠ \leqslant \text{س} \leqslant ٤ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

١ أوجد ل(س > ٢)

٢ أوجد: ل(٢ < س < ٥)

مثال ٣ إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً

ودالة كثافة الاحتمال له هى

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{٢\text{س}+\text{ك}}{٢٤} & ، ١ < \text{س} < ٤ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

١ أوجد قيمة ك

٢ أوجد: ل(س > ٣)

الحل

$$\because \text{د}(١) = \frac{٢\times١+\text{ك}}{٢٤} = \frac{٢+\text{ك}}{٢٤}$$

$$\because \text{د}(٤) = \frac{٢\times١+\text{ك}}{٢٤} = \frac{٨+\text{ك}}{٢٤}$$

، ل(١ < س < ٤) = ١

$$\therefore \frac{١}{٢}\left[\text{د}(١) + \text{د}(٤)\right](٤-١) = ١$$

$$\therefore \frac{١}{٢}\left[\frac{٢+\text{ك}}{٢٤} + \frac{٨+\text{ك}}{٢٤}\right](٤-١) = ١$$

$$\therefore \frac{١}{٢}\left|\frac{١٠+٢\text{ك}}{٢٤}\right| \times ٣ = ١ \qquad \therefore \frac{٣٠+٦\text{ك}}{٤٨} = ١$$

$$\therefore ٣٠+٦\text{ك} = ٤٨ \qquad \therefore ٦\text{ك} = ٤٨-٣٠$$

$$\therefore ٦\text{ك} = ١٨ \qquad \therefore \text{ك} = ٣$$

$$\therefore \text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{٢\text{س}+٣}{٢٤} & ، ١ < \text{س} < ٤ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

$$\because \text{د}(٣) = \frac{٢\times٣+٣}{٢٤} = \frac{٩}{٢٤}$$

$$\because \text{د}(٤) = \frac{٢\times٤+٣}{٢٤} = \frac{١١}{٢٤}$$

٢ ل(س > ٣) = ل(٣ < س < ٤)

$$= \frac{١}{٢}\left[\text{د}(٣) + \text{د}(٤)\right](٤-٣)$$

$$= \frac{١}{٢}\left[\frac{٩}{٢٤} + \frac{١١}{٢٤}\right] \times ١ = \frac{٥}{١٢}$$

مثال ٤ إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً ودالة كثافة الاحتمال له هي

$$د(س) = \begin{cases} \frac{س - ١}{ك} & ، ١ < س < ٥ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

١ أوجد قيمة ك

٢ أوجد : ل$(٢ < س < ٣)$

الحل

$\because د(١) = \frac{١ - ١}{ك} = \text{صفر}$

$\because د(٥) = \frac{٥ - ١}{ك} = \frac{٤}{ك}$

ل$(١ < س < ٥) = ١$

$\therefore \frac{١}{٢}\left[د(١) + د(٥)\right](٥ - ١) = ١$

$\therefore \frac{١}{٢}\left[\text{صفر} + \frac{٤}{ك}\right](٥ - ١) = ١$

$\therefore \frac{١}{٢} \times \frac{٤}{ك} \times ٤ = ١ \qquad \therefore \frac{٨}{ك} = ١$

$\therefore ك = ٨$

$$\therefore د(س) = \begin{cases} \frac{س - ١}{٨} & ، ١ < س < ٥ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

$\because د(٢) = \frac{٢ - ١}{٨} = \frac{١}{٨}$

$\because د(٣) = \frac{٣ - ١}{٨} = \frac{٢}{٨}$

٢ ل$(٢ < س < ٣)$

$= \frac{١}{٢}\left[د(٢) + د(٣)\right](٣ - ٢)$

$= \frac{١}{٢}\left[\frac{١}{٨} + \frac{٢}{٨}\right] \times ١ = \frac{٣}{١٦}$

تدريبات

١ جميع الحالات الآتية تعبر عن المتغير العشوائي المتقطع ماعدا ....

(أ) عدد الأسهم المخصصة لأحد الأفراد في شركة .

(ب) عدد المكالمات الأسبوعية لأحد الأفراد في الهاتف

(ج) عدد الحوادث على أحد الطرق خلال شهر

(د) طول أحد المرشحين لفريق كرة السلة

الحل الاختيار (د)

٢ إذا كان مدى المتغير العشوائي لتجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين هو {٠ ، ١} فإن هذه التجربة تدل على ....

(أ) عدد الصور . (ب) عدد الكتابات

(ج) عدد الصور − عدد الكتابات

(د) عدد الصور × عدد الكتابات

الحل الاختيار (د)

٣ في تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية وكان س هو المتغير العشوائي الذي يعبر عن (عدد الصور − عدد الكتابات) فإن مدى : س هو ....

(أ) {١ ، ٣} (ب) {١ ، ٢ ، ٣}

(ج) {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣} (د) {−٣ ، −١ ، ١ ، ٣}

الحل الاختيار (د)

٤ الجدول المقابل يمثل التوزيع الاحتمالي للمتغير س

س~ر~	٠	١	٢	٣
د(س~ر~)	أ	٢أ^{٢}	٣أ^{٢}	٣أ

فإن : أ = ...

(أ) $\frac{١}{٥}$ (ب) $\frac{-٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{٢}{٥}$

الحل الاختيار (أ)

∵ المتغير العشوائي متقطع

∴ مجموع د(س~ر~) = ١

أ + ٢أ^{٢} + ٣أ^{٢} + ٣أ = ١ ∴ ٥أ^{٢} + ٤أ − ١ = ٠

∴ (٥أ − ١)(أ + ١) = ٠ ∴ أ = $\frac{١}{٥}$

٥ إذا كان : س متغيراً عشوائياً مداه

{٠ ، ١ ، ٢} فإن جميع الدوال الآتية لاتمثل دالة

التوزيع الاحتمالي له ماعدا ....

(أ) د(س) = $\frac{س^{٢} + ١}{٨}$ (ب) د(س) = $\frac{٢س − ١}{٣}$

(جـ) د(س) = $\frac{١}{س + ٢}$ (د) د(س) = $\frac{٣س − ١}{٦}$

الحل الاختيار (أ)

بالتعويض عن قيم س في الدوال وجمع النواتج

نجد أن الاختيار الأول يحقق أن مجموع

د(س~ر~) = ١

٦ إذا كان : س متغيراً عشوائياً مداه

{١، ٢، −١، ٠} وكان

ل(س = −١) = ٠,٢ ، ل(س = ٠) = ٠,٤

ل(س = ١) = ٠,١ فإن : ل(س > ١) تساوي ...

(أ) ٠,٣ (ب) ٠,٤ (جـ) ٠,٥ (د) ٠,٦

الحل الاختيار (أ)

ل(س > ١) = ل(س = ٢)

∵ مجموع د(س~ر~) = ١

٠,٢ + ٠,٤ + ٠,١ + ل(س = ٢) = ١

٠,٧ + ل(س = ٢) = ١

∴ ل(س = ٢) = ١ − ٠,٧ = ٠,٣

٧ إذا كان : س متغيراً عشوائياً مداه

{١، ٢، ٣ ، ٥} وكان :

ل(س = ١) = ٢ ل(س = ٢) = $\frac{١}{٤}$

، ل(س = ٣) = $\frac{٧}{١٦}$ فإن : ل(س = ٥) = ...

(أ) $\frac{٣}{٨}$ (ب) $\frac{٣}{١٦}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) ...

الحل الاختيار (ب)

∵ ل(س = ١) = ٢ ل(س = ٢) = $\frac{١}{٤}$

∴ ل(س = ١) = $\frac{١}{٤}$ ∴ ٢ل(س = ٢) ...

∴ ل(س = ٢) = $\frac{١}{٨}$

∵ مجموع د(س~ر~) = ١

$\frac{١}{٤}$ + $\frac{١}{٨}$ + $\frac{٧}{١٦}$ + ل(س = ٥) = ١

$\frac{١٣}{١٦}$ + ل(س = ٥) = ١

∴ ل(س = ٥) = ١ − $\frac{١٣}{١٦}$ = $\frac{٣}{١٦}$

٨ إذا كان : س متغيراً عشوائياً متقطعاً مداه

{٠، ١، ٢} ودالة توزيعه الاحتمالي تتحدد بالعلاقة

د(س) = $\frac{أس}{٦}$ فإن قيمة أ تساوي ......

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) ...

الحل الاختيار (د)

$\because$ ل(س = صفر) = $\frac{\text{صفر}}{٦}$ = صفر

$\therefore$ ل(س = ١) = $\frac{أ}{٦}$ ، ل(س = ٢) = $\frac{٢أ}{٦}$

$\because$ مجموع د(س$_ر$) = ١

صفر + $\frac{أ}{٦}$ + $\frac{٢أ}{٦}$ = ١ $\therefore$ $\frac{٣أ}{٦}$ = ١

$\therefore$ ٣أ = ٦ $\therefore$ أ = ٢

٩ إذا كان : س متغيراً عشوائياً متقطعاً توزيعه الاحتمالى يتحدد بالدالة د(س) = $\frac{أس^٢}{٢}$ حيث س = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ فإن : ل(س $\leqslant$ ٢) = ...

(أ) $\frac{١}{٧}$ (ب) $\frac{١}{١٤}$ (ج) $\frac{٥}{١٤}$ (د) $\frac{٩}{١٤}$

الحل الاختيار (ج)

$\because$ ل(س = صفر) = $\frac{\text{صفر}}{٢}$ = صفر

$\therefore$ ل(س = ١) = $\frac{أ}{٢}$ ، ل(س = ٢) = $\frac{٤أ}{٢}$

، ل(س = ٣) = $\frac{٩أ}{٢}$

$\because$ مجموع د(س$_ر$) = ١

صفر + $\frac{أ}{٢}$ + $\frac{٤أ}{٢}$ + $\frac{٩أ}{٢}$ = ١ $\therefore$ $\frac{١٤أ}{٢}$ = ١

$\therefore$ ٧أ = ١ $\therefore$ أ = $\frac{١}{٧}$

$\therefore$ ل(س = صفر) = $\frac{\text{صفر}}{٢}$ = صفر

$\therefore$ ل(س = ١) = $\frac{١}{١٤}$

، ل(س = ٢) = ٢ × $\frac{١}{٧}$ = $\frac{٢}{٧}$

$\therefore$ ل(س $\leq$ ٢) = ل(س = ٠) + ل(س = ١) + ل(س = ٢)

$\therefore$ ل(س $\leq$ ٢) = صفر + $\frac{١}{١٤}$ + $\frac{٢}{٧}$ = $\frac{٥}{١٤}$

١٠ تعرف القيمة التى تتمركز عندها معظم قيم المتغير العشوائى بـ ....

(أ) التوقع (ب) التباين

(ج) الانحراف المعيارى (د) معامل الاختلاف

الحل الاختيار (أ)

١١ إذا كان التوقع فى التوزيع الاحتمالى التالى يساوى ٢

س$_ر$	١	٢	ك
د(س$_ر$)	٠,١	٠,٨	٠,١

فإن : ك = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) ٦

الحل الاختيار (أ)

$\because$ التوقع μ = ٢

$\therefore$ $\mu = \sum_{ر=١}^{ن}$ س$_ر$ · د(س$_ر$)

$\therefore$ ١ × ٠,١ + ٢ × ٠,٨ + ٠,١ك = ٢

$\therefore$ ١,٧ + ٠,١ك = ٢ $\therefore$ ٠,١ك = ٢ − ١,٧

$\therefore$ ٠,١ك = ٠,٣ $\therefore$ ك = ٣

١٢ إذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً توقعه μ = ٣,٥ وتوزيعه الاحتمالى كالآتى :

س$_ر$	٠	١	٢	ب	٦
د(س$_ر$)	٠,١	٠,١	٠,٣	أ	٠,٣

فإن : أ + ب = ...

(أ) ٠,٢ (ب) ٥,٢ (ج) ٥ (د) ٤,٨

الحل الاختيار (ب)

∵ المتغير العشوائى متقطع

∴ مجموع د(س$_ر$) = ١

٠,١ + ٠,١ + ٠,٣ + أ + ٠,٣ = ١

∴ ٠,٨ + أ = ١ ∴ أ = ١ − ٠,٨ = ٠,٢

∵ التوقع μ = ٣,٥

∴ μ = $\sum\limits_{ر=١}^{ن}$ س$_ر$ · د(س$_ر$)

∴ ٠ × ٠,١ + ١ × ٠,١ + ٢ × ٠,٣ + ٠,٢ ب + ٦ × ٠,٣ = ٢

∴ ٢,٥ + ٠,٢ ب = ٣,٥

∴ ٠,٢ ب = ٣,٥ − ٢,٥ ∴ ٠,٢ ب = ١

∴ ب = ٥ ∴ أ + ب = ٥ + ٠,٢ = ٥,٢

١٣ إذا كان التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى س

هو {(٠، ٠,٢٥)، (١، ٠,٥)، (٢، ٠,٢٥)} فإن

التوقع = ...

① ٠,٥ ② ١ ③ ١,٢٥ ④ ١,٥

الحل الاختيار (ب)

التوقع μ = $\sum\limits_{ر=١}^{ن}$ س$_ر$ · د(س$_ر$)

٠ × ٠,٢٥ + ١ × ٠,٥ + ٢ × ٠,٢٥ = ١

١٤ إذا كان: س متغيراً عشوائياً متقطعاً وكان

التوقع يساوى ٠,٦، $\sum$ س$_ر^٢$ × د(س$_ر$) = ٤,٣٦

فإن الانحراف المعيارى له يساوى ....

① ١,٩٤ ② ٢ ③ ٣,٧٦ ④ ٤

الحل الاختيار (ب)

التوقع μ = ٠,٦

∵ $\sum$ س$_ر^٢$ × د(س$_ر$) = ٤,٣٦

التباين ($\sigma^٢$) = $\sum\limits_{ر=١}^{ن}$ س$_ر^٢$ د(س$_ر$) − $\mu^٢$

($\sigma^٢$) = ٤,٣٦ − (٠,٦)^٢ = ٤

∴ الانحراف المعيارى σ = $\sqrt{\text{التباين}}$

σ = $\sqrt{٤}$ = ٢

١٥ إذا كان: س متغيراً عشوائياً متقطعاً وكان

التوقع يساوى ٠,٤، $\sum$ س$_ر^٢$ × د(س$_ر$) = ٦,١٦

فإن التباين له يساوى ....

① ٢,٤ ② ٥,٧٦ ③ ٦ ④ ٦,٠١

الحل الاختيار (ب)

التوقع μ = ٠,٤

∵ $\sum$ س$_ر^٢$ × د(س$_ر$) = ٤,٣٦

التباين ($\sigma^٢$) = $\sum\limits_{ر=١}^{ن}$ س$_ر^٢$ د(س$_ر$) − $\mu^٢$

($\sigma^٢$) = ٦,١٦ − (٠,٤)^٢ = ٦

١٦ إذا كان: س متغيراً عشوائياً متقطعاً وكا

، $\sum$ س$_ر$ × د(س$_ر$) = ٤

، $\sum$ س$_ر^٢$ × د(س$_ر$) = ٢٥ فإن معامل الاختلا

يساوى ....

① ١٦٪ ② ٧٥٪ ③ ٦٤٪ ④ ٦,٠

الحل الاختيار (ب)

∵ $\sum$ س$_ر$ × د(س$_ر$) = ٤

التوقع μ = ٤

∵ $\sum$ س$_ر^٢$ × د(س$_ر$) = ٢٥

التباين ($\sigma^٢$) = $\sum\limits_{ر=١}^{ن}$ س$_ر^٢$ د(س$_ر$) − $\mu^٢$

($\sigma^٢$) = ٢٥ − (٤)^٢ = ٩

∴ الانحراف المعيارى σ = $\sqrt{\text{التباين}}$

σ = $\sqrt{٩}$ = ٣

معامل الاختلاف = $\frac{\sigma}{\mu}$ × ١٠٠٪

$= \left(\frac{٣}{٤} \times ١٠٠\right)\% = ٧٥\%$

١٧ إذا كان معامل الاختلاف هو ١٢,٥٪ بانحراف معيارى يساوى ٨ فإن المتوسط (التوقع) يساوى .....

ⓐ ٦٤ ⓑ ١٠٠ ⓒ ١٢٥ ⓓ ١٥٦,٢٥

الحل الاختيار ⓐ

$\because \sigma = ٨$

معامل الاختلاف $= \frac{\sigma}{\mu} \times ١٠٠\%$

$\therefore ١٢,٥\% = \left(\frac{٨}{\mu} \times ١٠٠\right)\%$

$\therefore ١٢,٥ = \frac{٨٠٠}{\mu}$ $\therefore \mu = \frac{٨٠٠}{١٢,٥} = ٦٤$

١٨ إذا كان المتوسط لمتغير عشوائى ما يساوى ١٥٠، وكان معامل الاختلاف له يساوى ٢,٥٪ فإن تباين المتغير العشوائى يساوى ....

ⓐ ٣,٧٥ ⓑ ١٤,١ ⓒ ٣٧٥ ⓓ ١٩,٤

الحل الاختيار ⓑ

$\because \mu = ١٥٠$

معامل الاختلاف $= \frac{\sigma}{\mu} \times ١٠٠\%$

$\therefore ٢,٥\% = \left(\frac{\sigma}{١٥٠} \times ١٠٠\right)\%$

$\therefore ٢,٥ = \frac{\sigma ٢}{٣}$ $\therefore ٢\sigma = ٣ \times ٢,٥ = ٧,٥$

$\therefore \sigma = \frac{٧,٥}{٢} = ٣,٧٥$ (الانحراف المعيارى)

التباين $= \sigma^٢ = (٣,٧٥)^٢ = ١٤,١$

١٩ إذا كان التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى س

هو $د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٢} & ، ٢ < س < ٤ \\ صفر & فيما عدا ذلك \end{cases}$

فإن : ل(س > ٣) = ...

ⓐ $\frac{١}{٤}$ ⓑ $\frac{١}{٢}$ ⓒ $\frac{٣}{٤}$ ⓓ ١

الحل الاختيار ⓑ

ل(س > ٣) = ل(٣ < س < ٤)

$= \frac{١}{٢}\left[د(٣) + د(٤)\right](٤ - ٣)$

$= \frac{١}{٢}\left[\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}\right] \times ١ = \frac{١}{٢}$

٢٠ إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً ودالة كثافة الاحتمال له هى

$د(س) = \begin{cases} ك & ، -٤ < س < ٤ \\ صفر & فيما عدا ذلك \end{cases}$

فإن : ك = ...

ⓐ $\frac{١}{٨}$ ⓑ $\frac{١}{٤}$ ⓒ صفر ⓓ ٤

الحل الاختيار ⓐ

$\because$ د(-٤) = ك ، د(٤) = ك

، ل(-٤ < س < ٤) = ١

$\therefore \frac{١}{٢}\left[د(-٤) + د(٤)\right](٤ - (-٤)) = ١$

$\therefore \frac{١}{٢}\left[ك + ك\right] \times ٨ = ١$ $\therefore$ ٨ ك = ١

$\therefore ك = \frac{١}{٨}$

٢١ إذا كان التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى س

هو $د(س) = \begin{cases} ك س & ، ٢ < س < ٤ \\ صفر & فيما عدا ذلك \end{cases}$

فإن : ك = ...

① $\frac{١}{٦}$ ⓑ $\frac{١}{٣}$ ⓒ $\frac{١}{٢}$ ⓓ $\frac{٣}{٤}$

الحل الاختيار ①

∵ د(٢) = ٢ك ، د(٤) = ٤ك ، ل(٢ < س < ٤) = ١

∴ $\frac{١}{٢}$ [د(٢) + د(٤)](٤ − ٢) = ١

∴ $\frac{١}{٢}$ [٢ك + ٤ك] × ٢ = ١

∴ ٦ك = ١ ∴ ك = $\frac{١}{٦}$

٢٢ إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س

هو د(س) = { $\frac{١}{٦}$ ، −٣ < س < ٣ ؛ صفر فيما عدا ذلك }

فإن: ل(س = ٣) = ...

① صفر ⓑ $\frac{١}{٦}$ ⓒ $\frac{١}{٣}$ ⓓ $\frac{١}{٢}$

الحل الاختيار ①

التوزيع الطبيعى

المتغير العشوائى الطبيعى

هو متغير عشوائى متصل مداه الفترة]−∞ ، ∞[

ويأخذ شكل الجرس

بعض خواص المنحنى الطبيعى

* المنحنى متصل ويقع بأكمله فوق محور السينات ومساحة المنطقة الواقعة أسفل المنحنى وفوق محور السينات تساوى الواحد الصحيح
* المنحنى متماثل بالنسبة للمستقيم س = μ أى أن المستقيم س = μ يقسم المساحة أسفل المنحنى وفوق محور السينات إلى قسمين متساويين فى المساحة ومساحة كل منهما = $\frac{١}{٢}$

التوزيع الطبيعى المعيارى

هو توزيع طبيعى متوسطه (μ) = صفر ، وانحرافه المعيارى (σ) = ١

بعض خواص المنحنى الطبيعى

* المساحة فوق محور السينات وتحت المنحنى = الواحد الصحيح
* المنحنى متماثل بالنسبة للمستقيم س = صفر أى أن المستقيم س = صفر يقسم المساحة أسفل المنحنى وفوق محور السينات إلى قسمين متساويين فى المساحة ومساحة كل منهما = $\frac{١}{٢}$
* مساحة المنطقة الواقعة أسفل المنحنى وفوق محور السينات فى الفترة [٠ ، ى] تمثل عددياً احتمال وقوع المتغير العشوائى ص فى الفترة [٠ ، ى]

أى أن ل (٠ ≤ ص ≤ ى) = المساحة تحت المنحنى الطبيعى المعيارى وفوق محور السينات فى الفترة [٠ ، ى] ويكشف عنها مباشرة فى الجدول

مثال ١ باستخدام جدول المساحات تحت المنحنى الطبيعى المعيارى أوجد :

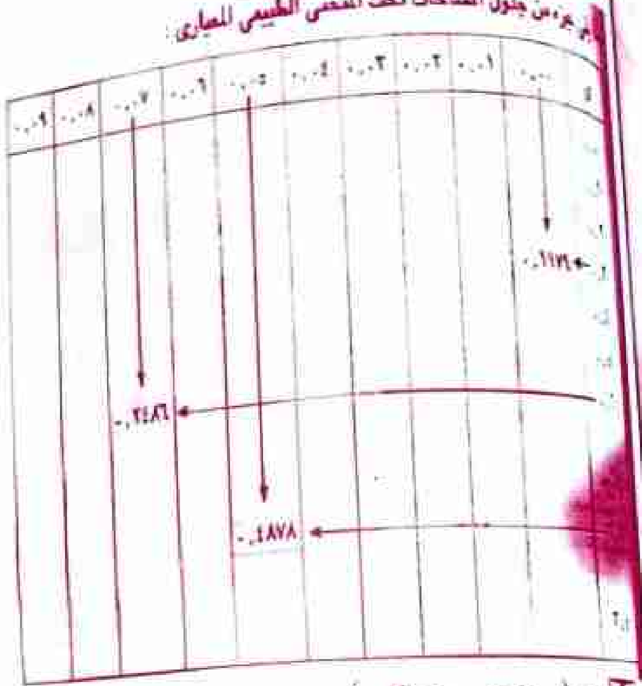
١ ل (٠ ≤ ص ≤ ٠,٣)

٢ ل (٠ ≤ ص ≤ ٠,٦٧)

٣ ل (٠ ≤ ص ≤ ٢,٢٥)

الحل

جزء من جدول المساحات تحت المنحنى الطبيعى المعيارى :



١ ل (٠ ≤ ص ≤ ٠,٣)

نبحث فى الجدول بالصف أمام ٠,٣ وتحت العمود (٠,٠٠) فنجد العدد ٠,١١٧٩

∴ ل (٠ ≤ ص ≤ ٠,٣) = ٠,١١٧٩

٢ ل (٠ ≤ ص ≤ ٠,٦٧)

نبحث فى الجدول بالصف أمام ٠,٦ وتحت العمود (٠,٠٧) فنجد العدد ٠,٢٤٨٦

∴ ل (٠ ≤ ص ≤ ٠,٦٧) = ٠,٢٤٨٦

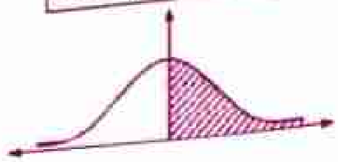
٣ ل (٠ ≤ ص ≤ ٢,٢٥)

نبحث فى الجدول بالصف أمام ٢,٢ وتحت العمود (٠,٠٥) فنجد العدد ٠,٤٨٧٨

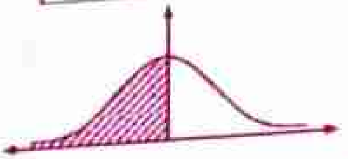
∴ ل (٠ ≤ ص ≤ ٢,٢٥) = ٠,٤٨٧٨

ملخص حساب المساحات تحت المنحنى

١ ل (ص ≥ ٠) = ٠,٥



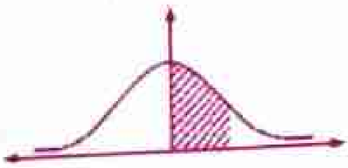
٢ ل (ص ≤ ٠) = ٠,٥

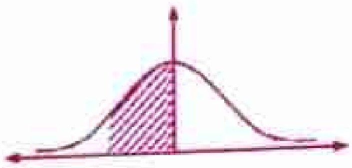


٣ فى الشكلين الآتيين إذا كان

ل (٠ ≤ ص ≤ ى) = ل (−ى ≤ ص ≤ ٠)

وبالتالى نبحث فى الجدول مباشرة



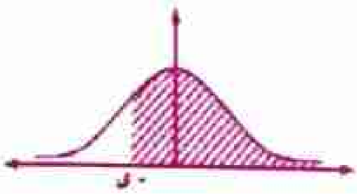


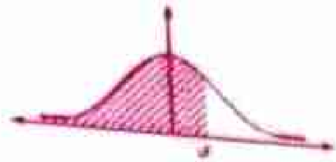
٤ إذا كان

ل (ص ≥ −ى) = ل (ص ≤ ى)

= ٠,٥ + ل (٠ ≤ ص ≤ ى)

الجزآن المظللان لهما نفس المساحة كما بالشكلين الآتيين

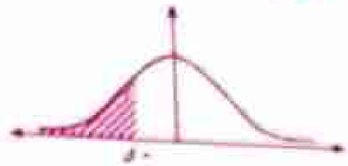


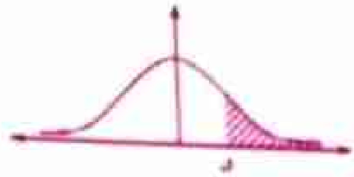


٥ إذا كان ل (س ≤ −ى) = ل (س ≥ ى)

= ٠,٥ − ل (٠ ≤ س ≤ ى)

الجزآن المظللان لهما نفس المساحة كما بالشكلين الأتيين



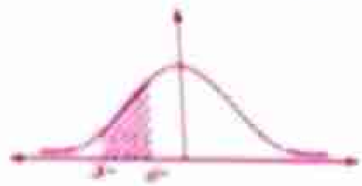


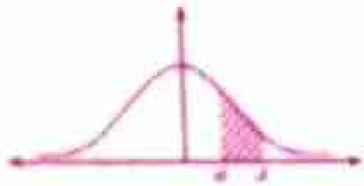
٦ إذا كان

ل (−ى ≤ س ≤ −ك) = ل (ك ≤ س ≤ ى)

= ل (٠ ≤ س ≤ ى) − ل (٠ ≤ س ≤ ك)

الجزآن المظللان لهما نفس المساحة كما بالشكلين الأتيين



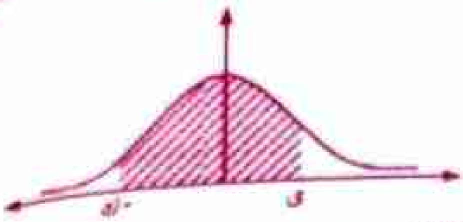


٧ إذا كان

ل (−ك ≤ س ≤ ى)

= ل (٠ ≤ س ≤ ك) + ل (٠ ≤ س ≤ ى)

كما بالشكل

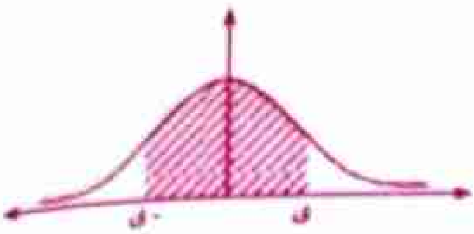


٨ إذا كان

ل (|س| ≤ ى)

= ل (−ى ≤ س ≤ ى) = ٢ ل (٠ ≤ س ≤ ى)

كما بالشكل



مثال ٢ باستخدام جدول المساحات تحت المنحنى الطبيعي أوجد

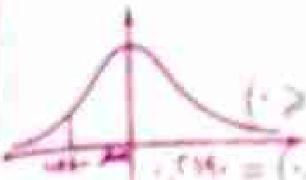
١ ل (−٠,٥٨ ≤ س ≤ ٠)

٢ ل (−٣,١٦ ≤ س ≤ ٠)

٣ ل (س ≤ ١,٤٥)

٤ ل (س > ٢,٣٦)

الحل

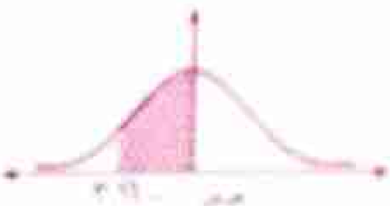


١ ل (−٠,٥٨ ≤ س ≤ ٠)

= ل (٠ ≤ س ≤ ٠,٥٨) = ٠,٢١٩٠

٢ ل (−٣,١٦ ≤ س ≤ ٠)

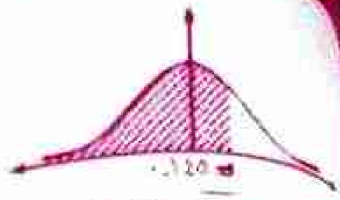
= ل (٠ ≤ س ≤ ٣,١٦) = ٠,٤٩٩٢



٣ ل (س ≤ ١,٤٥)

= ٠,٥ + ل (٠ ≤ س ≤ ١,٤٥)

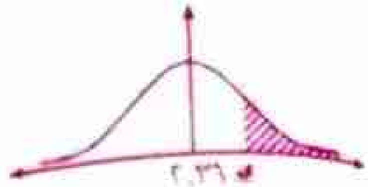
= ٠,٥ + ٠,٤٢٦٥ = ٠,٩٢٦٥



٤ ل(ص ≥ ٢,٣٦)

= ٠,٥ − ل(٠ ≤ ص ≤ ٢,٣٦)

= ٠,٥ − ٠,٤٩٠٩ = ٠,٠٠٩١



حساب الاحتمالات لمتغير طبيعى غير معيارى

إذا كان س متغيراً طبيعياً غير معيارياً متوسطه μ وانحرافه المعيارى σ فإننا نحول هذا المتغير الغير معيارى إلى متغير طبيعى معيارى ص بالقاعدة

ص = $\frac{س - \mu}{\sigma}$ ويكون

ل(أ ≤ س ≤ ب) = ل$\left(\frac{أ - \mu}{\sigma} \leq ص \leq \frac{ب - \mu}{\sigma}\right)$

مثال ٣ إذا كان س متغيراً عشوائياً طبيعياً متوسطه μ = ١٧ وانحرافه المعيارى σ = ٢ أوجد

١ ل(١٧ ≤ س ≤ ٢١,٤)

٢ ل(١٥,٦ ≤ س ≤ ٢٠)

٣ ل(١٣ ≤ س ≤ ١٤,٢)

الحل

١ ل(١٧ ≤ س ≤ ٢١,٤)

= ل$\left(\frac{١٧ - ١٧}{٢} \leq ص \leq \frac{٢١,٤ - ١٧}{٢}\right)$

= ل(صفر ≤ ص ≤ ٢,٢) = ٠,٤٨٦١

٢ ل(١٥,٦ ≤ س ≤ ٢٠)

= ل$\left(\frac{١٥,٦ - ١٧}{٢} \leq ص \leq \frac{٢٠ - ١٧}{٢}\right)$

= ل(−٠,٧ ≤ ص ≤ ١,٥)

= ل(٠ ≤ ص ≤ ٠,٧) + ل(٠ ≤ ص ≤ ١,٥)

= ٠,٢٥٨٠ + ٠,٤٣٣٢ = ٠,٦٩١٢

٣ ل(١٣ ≤ س ≤ ١٤,٢)

= ل$\left(\frac{١٣ - ١٧}{٢} \leq ص \leq \frac{١٤,٢ - ١٧}{٢}\right)$

= ل(−٢ ≤ ص ≤ −١,٤)

= ل(٠ ≤ ص ≤ ٢) − ل(٠ ≤ ص ≤ ١,٤)

= ٠,٤٧٧٢ − ٠,٤١٩٢ = ٠,٠٥٨٠

مثال ٤
إذا كان س~ متغيراً عشوائياً طبيعياً متوسطه μ = ١٠٠ وانحرافه المعيارى σ = ٤ أوجد قيمة ك إذا كان :

١ ل(س~ ≤ ك) = ٠,٠٣١٤

٢ ل(س~ ≤ ك) = ٠,٥٦٣٦

الحل

١ ∵ ل(س~ ≤ ك) = ٠,٠٣١٤

∴ ل(ص ≤ (ك − ١٠٠)/٤) = ٠,٠٣١٤

∴ ٠,٥ − ل(٠ ≤ ص ≤ (ك − ١٠٠)/٤) = ٠,٠٣١٤

∴ ل(٠ ≤ ص ≤ (ك − ١٠٠)/٤) = ٠,٥ − ٠,٠٣١٤ = ٠,٤٦٨٦

∴ (ك − ١٠٠)/٤ = ١,٨٦

∴ ك = ٤ × ١,٨٦ + ١٠٠ = ١٠٧,٤٤

٢ ∵ ل(س~ ≤ ك) = ٠,٥٦٣٦

∴ ل(ص ≤ (ك − ١٠٠)/٤) = ٠,٥٦٣٦

∴ ٠,٥ + ل(٠ ≤ ص ≤ (١٠٠ − ك)/٤) = ٠,٥٦٣٦

∴ ل(٠ ≤ ص ≤ (١٠٠ − ك)/٤) = ٠,٥٦٣٦ − ٠,٥ = ٠,٠٦٣٦

∴ (١٠٠ − ك)/٤ = ٠,١٦

∴ ك = ١٠٠ − ٤ × ٠,١٦ = ٩٩,٣٦

مثال ٥
إذا كان س~ متغيراً عشوائياً طبيعياً متوسطه μ وانحرافه المعيارى σ = ١٠ أوجد قيمة μ التى تجعل :

١ ل(س~ ≥ ٦٥) = ٠,١٥٨٧

٢ ل(س~ ≤ ٦٥) = ٠,٧٤٢٢

الحل

١ ∵ ل(س~ ≥ ٦٥) = ٠,١٥٨٧

∴ ل(ص ≥ (٦٥ − μ)/١٠) = ٠,١٥٨٧

∴ ٠,٥ − ل(٠ ≤ ص ≤ (μ − ٦٥)/١٠) = ٠,١٥٨٧

∴ ل(٠ ≤ ص ≤ (μ − ٦٥)/١٠) = ٠,٥ − ٠,١٥٨٧ = ٠,٣٤١٣

∴ (μ − ٦٥)/١٠ = ١ ∴ μ = ١٠ + ٦٥ = ٧٥

٢ ∵ ل(س~ ≤ ٦٥) = ٠,٧٤٢٢

∴ ل(ص ≤ (٦٥ − μ)/١٠) = ٠,٧٤٢٢

∴ ٠,٥ + ل(٠ ≤ ص ≤ (٦٥ − μ)/١٠) = ٠,٧٤٢٢

∴ ل(٠ ≤ ص ≤ (٦٥ − μ)/١٠) = ٠,٧٤٢٢ − ٠,٥ = ٠,٢٤٢٢

∴ (٦٥ − μ)/١٠ = ٠,٦٥ ∴ ٦٥ − μ = ٦,٥

∴ μ = ٦٥ − ٦,٥ = ٥٨,٥

مثال ٦
إذا كان س~ متغيراً عشوائياً طبيعياً متوسطه μ = ٥٠ وانحرافه المعيارى σ أوجد قيمة σ بحيث يكون

ل(س~ > ٢٨) = ٠,٩٨٦١

الحل

∵ ل(س~ > ٢٨) = ٠,٩٨٦١

∴ ل(ص > (٢٨ − ٥٠)/σ) = ٠,٩٨٦١

∴ ٠,٥ + ل(٠ ≤ ص ≤ −٢٢/σ) = ٠,٩٨٦١

∴ ل(٠ ≤ ص ≤ ٢٢/σ) = ٠,٩٨٦١ − ٠,٥ = ٠,٤٨٦١

∴ ٢٢/σ = ٢,٢ ∴ σ = ٢٢/٢,٢ = ١٠

مثال ٧ إذا كان س متغيراً عشوائياً طبيعياً متوسطه μ وانحرافه المعياري σ فأوجد قيمة كل من:

١ ل(س ≥ μ − ١,٥σ)

٢ ل(μ − ٣σ ≤ س ≤ μ + ٣σ)

٣ ل(μ − σ ≤ س ≤ μ + ٣σ)

الحل

١ ∵ ل(س ≥ μ − ١,٥σ)

∴ ل(ص ≥ $\frac{\mu - ١,٥\sigma - \mu}{\sigma}$)

ل(ص ≥ −١,٥) = ٠,٥ + ل(٠ ≤ ص ≤ ١,٥)

= ٠,٥ + ٠,٤٣٣٢ = ٠,٩٣٣٢

٢ ∵ ل(μ − ٣σ ≤ س ≤ μ + ٣σ)

∴ ل($\frac{\mu - ٣\sigma - \mu}{\sigma}$ ≤ ص ≤ $\frac{\mu + ٣\sigma - \mu}{\sigma}$)

∴ ل(−٣ ≤ ص ≤ ٣)

= ٢ ل(٠ ≤ ص ≤ ٣) = ٢ × ٠,٤٩٨٧ = ٠,٩٩٧٤

٣ ∵ ل(μ − σ ≤ س ≤ μ + ٣σ)

∴ ل($\frac{\mu - \sigma - \mu}{\sigma}$ ≤ ص ≤ $\frac{\mu + ٣\sigma - \mu}{\sigma}$)

∴ ل(−١ ≤ ص ≤ ٣)

= ل(٠ ≤ ص ≤ ١) + ل(٠ ≤ ص ≤ ٣)

= ٠,٣٤١٣ + ٠,٤٩٨٧ = ٠,٨٤

مثال ٨ إذا كان توزيع أجور عمال أحد المصانع هو توزيع طبيعي بمتوسط ٧٥ جنيهاً وتباين ١٠٠ فأوجد:

١ النسبة المئوية لعدد العمال الذين تزيد أجورهم عن ٩٠ جنيهاً.

٢ النسبة المئوية لعدد العمال الذين تقل أجورهم عن ٥٥ جنيهاً.

٣ النسبة المئوية لعدد العمال الذين تتراوح أجورهم بين ٦٠ ، ٨٠ جنيهاً

الحل الأجور تمثل متغير طبيعي س متوسطه μ = ٧٥ وانحرافه المعياري σ = $\sqrt{١٠٠}$ = ١٠

١ ل(س > ٩٠) = ل(ص > $\frac{٩٠ - ٧٥}{١٠}$)

= ل(ص > ١,٥) = ٠,٥ − ل(٠ < ص < ١,٥)

= ٠,٥ − ٠,٤٣٣٢ = ٠,٠٦٦٨

النسبة المئوية لعدد العمال الذين تزيد أجورهم عن ٩٠ جنيهاً = ٠,٠٦٦٨ × ١٠٠٪ = ٦,٦٨٪

٢ ل(س < ٥٥) = ل(ص < $\frac{٥٥ - ٧٥}{١٠}$)

= ل(ص < −٢) = ٠,٥ − ل(٠ < ص < ٢)

= ٠,٥ − ٠,٤٧٧٢ = ٠,٠٢٢٨

النسبة المئوية لعدد العمال الذين تقل أجورهم عن ٥٥ جنيهاً = ٠,٠٢٢٨ × ١٠٠٪ = ٢,٢٨٪

٣ ل(٦٠ ≤ س ≤ ٨٠)

= ل($\frac{٦٠ - ٧٥}{١٠}$ ≤ ص ≤ $\frac{٨٠ - ٧٥}{١٠}$)

= ل(−١,٥ ≤ ص ≤ ٠,٥)

= ل(٠ ≤ ص ≤ ٠,٥) + ل(٠ ≤ ص ≤ ١,٥)

= ٠,١٩١٥ + ٠,٤٣٣٢ = ٠,٦٢٤٧

∴ النسبة المئوية لعدد العمال الذين تتراوح أجورهم بين ٦٠ ، ٨٠ جنيهاً

= ٠,٦٢٤٧ × ١٠٠٪ = ٦٢,٤٧٪

مثال ٩ إذا كانت أطوال مجموعة مكونة من ١٠٠٠ شخص بلغ توزيعاً طبيعياً بمتوسط ١٧٢ سم وانحراف معياري ٥ سم فأوجد:

١ احتمال أن يكون طول الشخص واقعاً بين ١٧٠ سم ، ١٧٥ سم

[٢] عدد الأشخاص الذين يقل طول كل منهم عن ١٦٨ سم .

[٣] عدد الأشخاص الذين يزيد كل منهم عن ١٨٥ سم .

الحل

[١] احتمال أن يكون طول الشخص واقعاً بين ١٧٠ سم ، ١٧٥سم

= ل(١٧٠ < س < ١٧٥)

= ل((١٧٠ − ١٧٢)/٥ < ص < (١٧٥ − ١٧٢)/٥)

= ل(−٠,٤ < ص < ٠,٦)

= ل(٠ < ص < ٠,٦) + ل(٠ < ص < ٠,٤)

= ٠,٢٢٥٩ + ٠,١٥٥٤ = ٠,٣٨١٣

[٢] احتمال أن يقل طول الشخص عن ١٦٨سم هو

= ل(س < ١٦٨)

= ل(ص < (١٦٨ − ١٧٢)/٥) = ل(ص < −٠,٨)

= ٠,٥ − ل(٠ < ص < ٠,٨)

= ٠,٥ − ٠,٢٨٨١ = ٠,٢١١٩

عدد الأشخاص الذين يقل طولهم عن ١٦٨ سم

= ٠,٢١١٩ × ١٠٠٠ = ٢١٢ شخص

[٣] احتمال أن يزيد طول الشخص عن ١٨٥سم هو

= ل(س > ١٨٥)

= ل(ص > (١٨٥ − ١٧٢)/٥) = ل(ص ≥ ٢,٦)

= ٠,٥ − ل(٠ < ص < ٢,٦)

= ٠,٥ − ٠,٤٩٥٣ = ٠,٠٠٤٧

عدد الأشخاص الذين يزيد طولهم عن ١٨٥سم

= ٠,٠٠٤٧ × ١٠٠٠ ≈ ٥ أشخاص

تدريبات

[١] إذا كانت درجة أحد الطلاب في أحد الامتحانات الموزعة توزيعاً طبيعياً بمتوسط قدره ٧٥ والانحراف معيارى = ٥ تساوى ٨٠ فإن الدرجة المعيارية لدرجة هذا الطالب في هذا الامتحان تساوى ....

(أ) −١ (ب) ١ (ج) ١,٠٠٧ (د) −١,٠٠٧

الحل الاختيار (ب)

∵ μ = ٧٥ ، σ = ٥

الدرجة المعيارية = (الدرجة الحقيقية − المتوسط (μ)) / (الانحراف المعيارى (σ))

الدرجة المعيارية = (٨٠ − ٧٥)/٥ = ١

[٢] إذا كانت أطوال مجموعة مكونة من ١٠٠٠٠ شخص تتبع توزيعاً طبيعياً متوسطه ١٧٦ ½ وانحرافه المعيارى = ٥ فإن عدد الأشخاص الذين يزيد طول كل منهم عن ١٨٥ سم يساوى ______

(أ) ٤٤٦ (ب) ٤٤٣ (ج) ٤٧٩ (د) ٣٣٦

الحل الاختيار (أ)

[٣] احتمال أن يزيد طول الشخص عن ١٨٥سم هو

= ل(س > ١٨٥)

= ل(ص > (١٧٦,٥ − ١٨٥)/٥)

= ل(ص ≥ ١,٧)

= ٠,٥ − ل(٠ < ص < ١,٧)

= ٠,٥ − ٠,٤٥٥٤ = ٠,٠٤٤٦

عدد الأشخاص الذين يزيد طولهم عن ١٨٥ سم

= ٠,٠٤٤٦ × ١٠٠٠٠ = ٤٤٦ أشخاص

٣ إذا كان الدخل الشهري لمجموعة مكونة من ٥٠٠ عامل يتبع توزيعاً طبيعياً متوسطة ١٨٠ جنيهاً وانحرافه المعياري ١٥ جنيهاً فإن عدد العمال الذين تقل درجاتهم عن ١٩٨ جنيهاً يساوي ....

(أ) ٣٢٤ (ب) ٤١٠ (ج) ٤٤٢ (د) ٤٨٦

الحل الاختيار (ج)

١ احتمال أن تقل درجات العمال عن ١٩٨ سم هو

= ل(س < ١٩٨)

= ل$\left(\text{ص} < \frac{\text{١٩٨} - \text{١٨٠}}{\text{١٥}}\right)$ = ل(ص < ١,٢)

= ٠,٥ + ل(٠ < ص < ١,٢)

= ٠,٥ + ٠,٣٨٤٩ = ٠,٨٨٤٩

عدد العمال الذين تقل درجاتهم عن ١٩٨ سم

= ٠,٨٨٤٩ × ٥٠٠ ≈ ٤٤٢

٤ إذا كان عدد الطلبة المتقدمين لامتحان الرياضيات ١٠٠ طالب وكانت درجات الطلب موزعة توزيعاً طبيعياً بمتوسط قدره = ٧٠ وانحراف معياري = ٥ فإن عدد الطلبة الذين تزيد درجاتهم عن ٧٨ يساوي ....

(أ) ٥ (ب) ٦ (ج) ١٥ (د) ٥٥

الحل الاختيار (أ)

احتمال أن تزيد درجات الطالب عن ٧٨ هو

= ل(س > ٧٨)

= ل$\left(\text{ص} > \frac{\text{٧٨} - \text{٧٠}}{\text{٥}}\right)$ = ل(ص > ١,٦)

= ٠,٥ − ل(٠ < ص < ١,٦)

= ٠,٥ − ٠,٤٤٥٢ = ٠,٠٥٤٨

عدد الطلبة الذين تزيد درجاتهم عن ٧٨ سم

= ٠,٠٥٤٨ × ١٠٠ ≈ ٥

٥ إذا كانت أوزان مجموعة من حيوانات التجارب تتبع توزيعاً طبيعياً بمتوسط μ جرام وانحراف معياري ١٠ جرامات وكان ل(س ≥ ١٨٠) = ٠,١٥٨٧ . يساوي ....

(أ) ١٦٠ (ب) ١٧٠ (ج) ١٨٠ (د) ١٩٠

الحل الاختيار (ب)

∵ ل(س ≥ ١٨٠) = ٠,١٥٨٧

∴ ل$\left(\text{ص} > \frac{\text{١٨٠} - \mu}{\text{١٠}}\right)$ = ٠,١٥٨٧

∴ ٠,٥ − ل$\left(\text{٠} < \text{ص} < \frac{\text{١٨٠} - \mu}{\text{١٠}}\right)$ = ٠,١٥٨٧

∴ ل$\left(\text{٠} < \text{ص} < \frac{\text{١٨٠} - \mu}{\text{١٠}}\right)$ = ٠,٥ − ٠,١٥٨٧ = ٠,٣٤١٣

∴ $\frac{\text{١٨٠} - \mu}{\text{١٠}}$ = ١ ∴ ١٨٠ − μ = ١٠

∴ μ = ١٧٠

٦ إذا كان س متغيراً طبيعياً وسطه μ = ٦ والانحراف المعياري له σ = ٣ فإن المتغير الذي يخضع لتوزيع طبيعي معياري هو ....

(أ) $\frac{\text{٦} - \text{س}}{\text{٣}}$ (ب) $\frac{\text{س} - \text{٣}}{\text{٦}}$

(ج) $\frac{\text{س} - \text{٦}}{\text{٣}}$ (د) $\frac{\text{٣} - \text{س}}{\text{٦}}$

الحل الاختيار (ج)

٧ إذا كانت أطوال مجموعة من الطلاب تتبع توزيعاً طبيعياً بمتوسط μ وانحرافه المعيارى ٨ سم وكان الطول المعيارى لطالب طوله ١٨٠ سم هو ١,٢٥ فإن : μ = ... سم

(أ) ١٦٠ (ب) ١٦٥ (ج) ١٧٠ (د) ١٧٥

الحل الاختيار (ج)

$$\text{الطول المعياري} = \frac{\text{الطول الحقيقى} - \text{المتوسط}(\mu)}{\text{الانحراف المعيارى}(\sigma)}$$

$$\therefore ١,٢٥ = \frac{١٨٠ - \mu}{٨}$$

$$\therefore ١٨٠ - \mu = ١,٢٥ \times ٨ \quad \therefore ١٨٠ - \mu = ١٠$$

$$\therefore \mu = ١٧٠$$

٨ إذا كان س متغيراً طبيعياً وسطه $\mu = ٤$ وتباينه = ٢٥ فإن ل(س ⩾ ١٤) = ...

(أ) ٠,٣٤١٣ (ب) ٠,٠٢٢٨ (ج) ٠,٤٧٧٢ (د) ٠,٩٧٧٢

الحل الاختيار (ب)

$$\because \sigma^2 = ٢٥ \quad \therefore \sigma = ٥$$

$$\therefore \text{ل}(\text{س} > ١٤) = \text{ل}\left(\text{ص} > \frac{١٤ - ٤}{٥}\right)$$

$$= \text{ل}(\text{ص} > ٢) = ٠,٥ - \text{ل}(٠ < \text{ص} < ٢)$$

$$= ٠,٥ - ٠,٤٧٧٢ = ٠,٠٢٢٨$$

٩ إذا كان س متغيراً طبيعياً وسطه μ وانحرافه المعيارى σ فإن ل(س ⩾ $\mu - ١,٥\,\sigma$) = ...

(أ) ٠,٠٦٦٨ (ب) ٠,٤٣٣٢ (ج) ٠,٨٦٦٤ (د) ٠,٩٣٣٢

الحل الاختيار (د)

$$\because \text{ل}(\text{س} \geqslant \mu - ١,٥\sigma)$$

$$= \text{ل}\left(\text{ص} \geqslant \frac{\mu - ١,٥\sigma - \mu}{\sigma}\right)$$

$$\therefore \text{ل}(\text{ص} \geqslant -١,٥) = ٠,٥ + \text{ل}(٠ \leqslant \text{ص} \leqslant ١,٥)$$

$$= ٠,٥ + ٠,٤٣٣٢ = ٠,٩٣٣٢$$

١٠ إذا كان س متغيراً طبيعياً وسطه μ وانحرافه المعيارى = ٦,٤ فإن ل(س ⩾ ٤٢) = ٠,٨٩٤٤ فإن μ = ...

(أ) ٣٠ (ب) ٤٠ (ج) ٥٠ (د) ٦٠

الحل الاختيار (ج)

$$\because \text{ل}(\text{س} \geqslant ٤٢) = ٠,٨٩٤٤$$

$$\therefore \text{ل}\left(\text{ص} > \frac{٤٢ - \mu}{٦,٤}\right) = ٠,٨٩٤٤$$

$$\therefore ٠,٥ + \text{ل}\left(٠ < \text{ص} < \frac{\mu - ٤٢}{٦,٤}\right) = ٠,٨٩٤٤$$

$$\therefore \text{ل}\left(٠ < \text{ص} < \frac{\mu - ٤٢}{٦,٤}\right) = ٠,٨٩٤٤ - ٠,٥ = ٠,٣٩٤٤$$

$$\therefore \frac{\mu - ٤٢}{٦,٤} = ١,٢٥$$

$$\therefore \mu - ٤٢ = ١,٢٥ \times ٦,٤ = ٨$$

$$\therefore \mu = ٤٢ + ٨ = ٥٠$$

١١ إذا كان س متغيراً طبيعياً متوسطه ٦٠ وانحرافه المعيارى σ وكان ل(س < ٥٥) = ٠,٣٠٨٥ فإن σ = ...

(أ) ٥ (ب) ١٠ (ج) ١٥ (د) ٢٠

الحل الاختيار (ب)

$$\because \text{ل}(\text{س} < ٥٥) = ٠,٣٠٨٥$$

$$\therefore \text{ل}\left(\text{ص} < \frac{٥٥ - ٦٠}{\sigma}\right) = ٠,٣٠٨٥$$

∴ ل(ص < $\frac{-٥}{\sigma}$) = ٠,٣٠٨٥

∴ ٠,٥ − ل(٠ < ص < $\frac{٥}{\sigma}$) = ٠,٣٠٨٥

∴ ل(٠ < ص < $\frac{٥}{\sigma}$) = ٠,٥ − ٠,٣٠٨٥ = ٠,١٩١٥

∴ $\frac{٥}{\sigma}$ = ٠,٥ ∴ σ = $\frac{٥}{٠,٥}$ = ١٠

١٢ إذا كانت ص متغيراً طبيعياً معيارياً وكان

ل(−ك ≤ ص ≤ ك) = ٠,٨٦٦٤ فإن ك = ...

(أ) ١,٢ (ب) ١,٤ (ج) ١,٥ (د) ١,٥

الحل الاختيار (ج)

∵ ل(−ك ≤ ص ≤ ك) = ٠,٨٦٦٤

∴ ٢ ل(٠ ≤ ص ≤ ك) = ٠,٨٦٦٤

∴ ل(٠ ≤ ص ≤ ك) = $\frac{٠,٨٦٦٤}{٢}$ = ٠,٤٣٣٢

∵ ل(٠ ≤ ص ≤ ١,٥) = ٠,٤٣٣٢

∴ ك = ١,٥

١٣ إذا كانت ص متغيراً طبيعياً معيارياً وكان

ل(ص ≥ ك) = ٠,١٦٦ فإن ك = ...

(أ) ١,٣٧ (ب) ٠,٩٧ (ج) ٢,١٣ (د) ١,٢

الحل الاختيار (ب)

∵ ل(ص ≥ ك) = ٠,١٦٦

∴ ٠,٥ − ل(٠ ≤ ص ≤ ك) = ٠,١٦٦

∴ ل(٠ ≤ ص ≤ ك) = ٠,٥ − ٠,١٦٦ = ٠,٣٣٤٠

∵ ل(٠ ≤ ص ≤ ٠,٩٧) = ٠,٣٣٤٠

∴ ك = ٠,٩٧

١٤ إذا كانت ص متغيراً طبيعياً معيارياً وكان

ل(−أ ≤ ص ≤ أ) = ٠,٨٧٤ فإن أ = ...

(أ) ٠,٤٣٧ (ب) ١,٥٣ (ج) ١,٥ (د) ٠,٥٣

الحل الاختيار (ب)

∵ ل(−أ ≤ ص ≤ أ) = ٠,٨٧٤

∴ ٢ ل(٠ ≤ ص ≤ أ) = ٠,٨٧٤

∴ ل(٠ ≤ ص ≤ أ) = $\frac{٠,٨٧٤}{٢}$ = ٠,٤٣٧٠

∵ ل(٠ ≤ ص ≤ ١,٥٣) = ٠,٤٣٧٠

∴ أ = ١,٥٣

١٥ إذا كان س متغيراً طبيعياً وسطه μ وانحرافه المعيارى σ فإن ل(س ≥ μ + ١,٥σ) = ...

(أ) ٠,٠٦٦٨ (ب) ٠,٤٣٣٢

(ج) ٠,٥٦٦٤ (د) ٠,٩٣٣٢

الحل الاختيار (أ)

∵ ل(س ≥ μ + ١,٥σ)

∴ ل(ص ≥ $\frac{\mu + ١,٥\sigma - \mu}{\sigma}$)

∴ ل(ص ≥ ١,٥)

= ٠,٥ − ل(٠ ≤ ص ≤ ١,٥)

= ٠,٥ − ٠,٤٣٣٢ = ٠,٠٦٦٨

١٦ إذا كان س متغيراً طبيعياً وسطه μ وانحرافه المعيارى σ فإن ل(س ≤ μ + ١,٥σ) = ...

(أ) ٠,٠٦٦٨ (ب) ٠,٤٣٣٢

(ج) ٠,٥٦٦٨ (د) ٠,٩٣٣٢

الحل الاختيار (د)

∵ ل(س ≤ μ + ١,٥σ)

∴ ل(ص ≤ $\frac{\mu + ١,٥\sigma - \mu}{\sigma}$)

∴ ل(ص ≤ ١,٥)

= ٠,٥ + ل(٠ ≤ ص ≤ ١,٥)

= ٠,٥ + ٠,٤٣٣٢ = ٠,٩٣٣٢

١٧ إذا كانت ص متغيراً طبيعياً معيارياً وكان ل(−أ ≤ ص ≤ أ) = ٠,٧٩٦ فإن أ = ...

(أ) ٠,٣٩٨ (ب) ١,٢ (ج) ١,٢٧ (د) ٠,٢٧

الحل الاختيار (ج)

∵ ل(−أ ≤ ص ≤ أ) = ٠,٧٩٦

∴ ٢ ل(٠ ≤ ص ≤ أ) = ٠,٧٩٦

∴ ل(٠ ≤ ص ≤ أ) = $\frac{٠,٧٩٦}{٢}$ = ٠,٣٩٨٠

∵ ل(٠ ≤ ص ≤ ١,٢٧) = ٠,٣٩٨٠

∴ أ = ١,٢٧

١٨ إذا كان س متغيراً طبيعياً وسطه μ وانحرافه المعياري σ فإن ل(س ≤ μ − ١,١σ) = ...

(أ) ٠,١٣٥٧ (ب) ٠,٨٦٤٣

(ج) ٠,٣٦٤٣ (د) ٠,٦٣٥٧

الحل الاختيار (أ)

∵ ل(س ≤ μ − ١,١σ)

∴ ل(ص ≤ $\frac{\mu - ١,١\sigma - \mu}{\sigma}$)

∴ ل(ص ≤ −١,١)

= ٠,٥ − ل(٠ ≤ ص ≤ ١,١)

= ٠,٥ − ٠,٣٦٤٣ = ٠,١٣٥٧

١٩ إذا كانت ص متغيراً طبيعياً معيارياً وكان ل(−١ ≤ ص ≤ ك) = ٠,٥٣٢٨ فإن ك = ...

(أ) ١,٥ (ب) ٠,٥ (ج) ٠,٠٨ (د) −٠,٥

الحل الاختيار (ب)

∵ ل(−١ ≤ ص ≤ ك) = ٠,٥٣٢٨

∵ ل(٠ ≤ ص ≤ ١) + ل(٠ ≤ ص ≤ ك) = ٠,٥٣٢٨

∴ ٠,٣٤١٣ + ل(٠ ≤ ص ≤ ك) = ٠,٥٣٢٨

∴ ل(٠ ≤ ص ≤ ك) = ٠,٥٣٢٨ − ٠,٣٤١٣ = ٠,١٩١٥

∵ ل(٠ ≤ ص ≤ ٠,٥) = ٠,١٩١٥

∴ ك = ٠,٥

جدول المساحات أسفل المنحنى الطبيعي المعياري

ز	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
٠,٠	٠,٠٠٠٠	٠,٠٠٤٠	٠,٠٠٨٠	٠,٠١٢٠	٠,٠١٦٠	٠,٠١٩٩	٠,٠٢٣٩	٠,٠٢٧٩	٠,٠٣١٩	٠,٠٣٥٩
٠,١	٠,٠٣٩٨	٠,٠٤٣٨	٠,٠٤٧٨	٠,٠٥١٧	٠,٠٥٥٧	٠,٠٥٩٦	٠,٠٦٣٦	٠,٠٦٧٥	٠,٠٧١٤	٠,٠٧٥٣
٠,٢	٠,٠٧٩٣	٠,٠٨٣٢	٠,٠٨٧١	٠,٠٩١٠	٠,٠٩٤٨	٠,٠٩٨٧	٠,١٠٢٦	٠,١٠٦٤	٠,١١٠٣	٠,١١٤١
٠,٣	٠,١١٧٩	٠,١٢١٧	٠,١٢٥٥	٠,١٢٩٣	٠,١٣٣١	٠,١٣٦٨	٠,١٤٠٦	٠,١٤٤٣	٠,١٤٨٠	٠,١٥١٧
٠,٤	٠,١٥٥٤	٠,١٥٩١	٠,١٦٢٨	٠,١٦٦٤	٠,١٧٠٠	٠,١٧٣٦	٠,١٧٧٢	٠,١٨٠٨	٠,١٨٤٤	٠,١٨٧٩
٠,٥	٠,١٩١٥	٠,١٩٥٠	٠,١٩٨٥	٠,٢٠١٩	٠,٢٠٥٤	٠,٢٠٨٨	٠,٢١٢٣	٠,٢١٥٧	٠,٢١٩٠	٠,٢٢٢٤
٠,٦	٠,٢٢٥٩	٠,٢٢٩١	٠,٢٣٢٤	٠,٢٣٥٧	٠,٢٣٨٩	٠,٢٤٢٢	٠,٢٤٥٤	٠,٢٤٨٦	٠,٢٥١٧	٠,٢٥٤٩
٠,٧	٠,٢٥٨٠	٠,٢٦١١	٠,٢٦٤٢	٠,٢٦٧٣	٠,٢٧٠٤	٠,٢٧٣٤	٠,٢٧٦٤	٠,٢٧٩٤	٠,٢٨٢٣	٠,٢٨٥٢
٠,٨	٠,٢٨٨١	٠,٢٩١٠	٠,٢٩٣٩	٠,٢٩٦٧	٠,٢٩٩٥	٠,٣٠٢٣	٠,٣٠٥١	٠,٣٠٧٨	٠,٣١٠٦	٠,٣١٣٣
٠,٩	٠,٣١٥٩	٠,٣١٨٦	٠,٣٢١٢	٠,٣٢٣٨	٠,٣٢٦٤	٠,٣٢٨٩	٠,٣٣١٥	٠,٣٣٤٠	٠,٣٣٦٥	٠,٣٣٨٩
١,٠	٠,٣٤١٣	٠,٣٤٣٨	٠,٣٤٦١	٠,٣٤٨٥	٠,٣٥٠٨	٠,٣٥٣١	٠,٣٥٥٤	٠,٣٥٧٧	٠,٣٥٩٩	٠,٣٦٢١
١,١	٠,٣٦٤٣	٠,٣٦٦٥	٠,٣٦٨٦	٠,٣٧٠٨	٣٧٢٩	٠,٣٧٤٩	٠,٣٧٧٠	٠,٣٧٩٠	٠,٣٨١٠	٠,٣٨٣٠
١,٢	٠,٣٨٤٩	٠,٣٨٦٩	٠,٣٨٨٨	٠,٣٩٠٧	٠,٣٩٢٥	٠,٣٩٤٤	٠,٣٩٦٢	٠,٣٩٨٠	٠,٣٩٩٧	٠,٤٠١٥
١,٣	٠,٤٠٣٢	٠,٤٠٤٩	٠,٤٠٦٦	٠,٤٠٨٢	٠,٤٠٩٩	٠,٤١١٥	٠,٤١٣١	٠,٤١٤٧	٠,٤١٦٢	٠,٤١٧٧
١,٤	٠,٤١٩٢	٠,٤٢٠٧	٠,٤٢٢٢	٠,٤٢٣٦	٠,٤٢٥١	٠,٤٢٦٥	٠,٤٢٧٩	٠,٤٢٩٢	٠,٤٣٠٦	٠,٤٣١٩
١,٥	٠,٤٣٣٢	٠,٤٣٤٥	٠,٤٣٥٧	٠,٤٣٧٠	٠,٤٣٨٢	٠,٤٣٩٤	٠,٤٤٠٦	٠,٤٤١٨	٠,٤٤٢٩	٠,٤٤٤١
١,٦	٠,٤٤٥٢	٠,٤٤٦٣	٠,٤٤٧٤	٠,٤٤٨٤	٠,٤٤٩٥	٠,٤٥٠٥	٠,٤٥١٥	٠,٤٥٢٥	٠,٤٥٣٥	٠,٤٥٤٥
١,٧	٠,٤٥٥٤	٠,٤٥٦٤	٠,٤٥٧٣	٠,٤٥٨٢	٠,٤٥٩١	٠,٤٥٩٩	٠,٤٦٠٨	٠,٤٦١٦	٠,٤٦٢٥	٠,٤٦٣٣
١,٨	٠,٤٦٤١	٠,٤٦٤٩	٠,٤٦٥٦	٠,٤٦٦٤	٠,٤٦٧١	٠,٤٦٧٨	٠,٤٦٨٦	٠,٤٦٩٣	٠,٤٦٩٩	٠,٤٧٠٦
١,٩	٠,٤٧١٣	٠,٤٧١٩	٠,٤٧٢٦	٠,٤٧٣٢	٠,٤٧٣٨	٠,٤٧٤٤	٠,٤٧٥٠	٠,٤٧٥٦	٠,٤٧٦١	٠,٤٧٦٧
٢,٠	٠,٤٧٧٢	٠,٤٧٧٨	٠,٤٧٨٣	٠,٤٧٨٨	٠,٤٧٩٣	٠,٤٧٩٨	٠,٤٨٠٣	٠,٤٨٠٨	٠,٤٨١٢	٠,٤٨١٧
٢,١	٠,٤٨٢١	٠,٤٨٢٦	٠,٤٨٣٠	٠,٤٨٣٤	٠,٤٨٣٨	٠,٤٨٤٢	٠,٤٨٤٦	٠,٤٨٥٠	٠,٤٨٥٤	٠,٤٨٥٧
٢,٢	٠,٤٨٦١	٠,٤٨٦٤	٠,٤٨٦٨	٠,٤٨٧١	٠,٤٨٧٥	٠,٤٨٧٨	٠,٤٨٨١	٠,٤٨٨٤	٠,٤٨٨٧	٠,٤٨٩٠
٢,٣	٠,٤٨٩٣	٠,٤٨٩٦	٠,٤٨٩٨	٠,٤٩٠١	٠,٤٩٠٤	٠,٤٩٠٦	٠,٤٩٠٩	٠,٤٩١١	٠,٤٩١٣	٠,٤٩١٦
٢,٤	٠,٤٩١٨	٠,٤٩٢٠	٠,٤٩٢٢	٠,٤٩٢٥	٠,٤٩٢٧	٠,٤٩٢٩	٠,٤٩٣١	٠,٤٩٣٢	٠,٤٩٣٤	٠,٤٩٣٦
٢,٥	٠,٤٩٣٨	٠,٤٩٤٠	٠,٤٩٤١	٠,٤٩٤٣	٠,٤٩٤٥	٠,٤٩٤٦	٠,٤٩٤٨	٠,٤٩٤٩	٠,٤٩٥١	٠,٤٩٥٢
٢,٦	٠,٤٩٥٣	٠,٤٩٥٥	٠,٤٩٥٦	٠,٤٩٥٧	٠,٤٩٥٩	٠,٤٩٦٠	٠,٤٩٦١	٠,٤٩٦٢	٠,٤٩٦٣	٠,٤٩٦٤
٢,٧	٠,٤٩٦٥	٠,٤٩٦٦	٠,٤٩٦٧	٠,٤٩٦٨	٠,٤٩٦٩	٠,٤٩٧٠	٠,٤٩٧١	٠,٤٩٧٢	٠,٤٩٧٣	٠,٤٩٧٤
٢,٨	٠,٤٩٧٤	٠,٤٩٧٥	٠,٤٩٧٦	٠,٤٩٧٧	٠,٤٩٧٧	٠,٤٩٧٨	٠,٤٩٧٩	٠,٤٩٧٩	٠,٤٩٨٠	٠,٤٩٨١
٢,٩	٠,٤٩٨١	٠,٤٩٨٢	٠,٤٩٨٢	٠,٤٩٨٣	٠,٤٩٨٤	٠,٤٩٨٤	٠,٤٩٨٥	٠,٤٩٨٥	٠,٤٩٨٦	٠,٤٩٨٦
٣,٠	٠,٤٩٨٧	٠,٤٩٨٧	٠,٤٩٨٧	٠,٤٩٨٨	٠,٤٩٨٨	٠,٤٩٨٩	٠,٤٩٨٩	٠,٤٩٨٩	٠,٤٩٩٠	٠,٤٩٩٠
٣,١	٠,٤٩٩٠	٠,٤٩٩١	٠,٤٩٩١	٠,٤٩٩١	٠,٤٩٩٢	٠,٤٩٩٢	٠,٤٩٩٢	٠,٤٩٩٢	٠,٤٩٩٣	٠,٤٩٩٣
٣,٢	٠,٤٩٩٣	٠,٤٩٩٣	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٥
٣,٣	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٧
٣,٤	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٨
٣,٥	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨

جدول المساحات أسفل المنحنى الطبيعي المعياري

	٠٫٠٠	٠٫٠١	٠٫٠٢	٠٫٠٣	٠٫٠٤	٠٫٠٥	٠٫٠٦	٠٫٠٧	٠٫٠٨	٠٫٠٩
٠٫٠	٠٫٠٠٠٠	٠٫٠٠٤٠	٠٫٠٠٨٠	٠٫٠١٢٠	٠٫٠١٦٠	٠٫٠١٩٩	٠٫٠٢٣٩	٠٫٠٢٧٩	٠٫٠٣١٩	٠٫٠٣٥٩
٠٫١	٠٫٠٣٩٨	٠٫٠٤٣٨	٠٫٠٤٧٨	٠٫٠٥١٧	٠٫٠٥٥٧	٠٫٠٥٩٦	٠٫٠٦٣٦	٠٫٠٦٧٥	٠٫٠٧١٤	٠٫٠٧٥٣
٠٫٢	٠٫٠٧٩٣	٠٫٠٨٣٢	٠٫٠٨٧١	٠٫٠٩١٠	٠٫٠٩٤٨	٠٫٠٩٨٧	٠٫١٠٢٦	٠٫١٠٦٤	٠٫١١٠٣	٠٫١١٤١
٠٫٣	٠٫١١٧٩	٠٫١٢١٧	٠٫١٢٥٥	٠٫١٢٩٣	٠٫١٣٣١	٠٫١٣٦٨	٠٫١٤٠٦	٠٫١٤٤٣	٠٫١٤٨٠	٠٫١٥١٧
٠٫٤	٠٫١٥٥٤	٠٫١٥٩١	٠٫١٦٢٨	٠٫١٦٦٤	٠٫١٧٠٠	٠٫١٧٣٦	٠٫١٧٧٢	٠٫١٨٠٨	٠٫١٨٤٤	٠٫١٨٧٩
٠٫٥	٠٫١٩١٥	٠٫١٩٥٠	٠٫١٩٨٥	٠٫٢٠١٩	٠٫٢٠٥٤	٠٫٢٠٨٨	٠٫٢١٢٣	٠٫٢١٥٧	٠٫٢١٩٠	٠٫٢٢٢٤
٠٫٦	٠٫٢٢٥٩	٠٫٢٢٩١	٠٫٢٣٢٤	٠٫٢٣٥٧	٠٫٢٣٨٩	٠٫٢٤٢٢	٠٫٢٤٥٤	٠٫٢٤٨٦	٠٫٢٥١٧	٠٫٢٥٤٩
٠٫٧	٠٫٢٥٨٠	٠٫٢٦١١	٠٫٢٦٤٢	٠٫٢٦٧٣	٠٫٢٧٠٤	٠٫٢٧٣٤	٠٫٢٧٦٤	٠٫٢٧٩٤	٠٫٢٨٢٣	٠٫٢٨٥٢
٠٫٨	٠٫٢٨٨١	٠٫٢٩١٠	٠٫٢٩٣٩	٠٫٢٩٦٧	٠٫٢٩٩٥	٠٫٣٠٢٣	٠٫٣٠٥١	٠٫٣٠٧٨	٠٫٣١٠٦	٠٫٣١٣٣
٠٫٩	٠٫٣١٥٩	٠٫٣١٨٦	٠٫٣٢١٢	٠٫٣٢٣٨	٠٫٣٢٦٤	٠٫٣٢٨٩	٠٫٣٣١٥	٠٫٣٣٤٠	٠٫٣٣٦٥	٠٫٣٣٨٩
١٫٠	٠٫٣٤١٣	٠٫٣٤٣٨	٠٫٣٤٦١	٠٫٣٤٨٥	٠٫٣٥٠٨	٠٫٣٥٣١	٠٫٣٥٥٤	٠٫٣٥٧٧	٠٫٣٥٩٩	٠٫٣٦٢١
١٫١	٠٫٣٦٤٣	٠٫٣٦٦٥	٠٫٣٦٨٦	٠٫٣٧٠٨	٣٧٢٩	٠٫٣٧٤٩	٠٫٣٧٧٠	٠٫٣٧٩٠	٠٫٣٨١٠	٠٫٣٨٣٠
١٫٢	٠٫٣٨٤٩	٠٫٣٨٦٩	٠٫٣٨٨٨	٠٫٣٩٠٧	٠٫٣٩٢٥	٠٫٣٩٤٤	٠٫٣٩٦٢	٠٫٣٩٨٠	٠٫٣٩٩٧	٠٫٤٠١٥
١٫٣	٠٫٤٠٣٢	٠٫٤٠٤٩	٠٫٤٠٦٦	٠٫٤٠٨٢	٠٫٤٠٩٩	٠٫٤١١٥	٠٫٤١٣١	٠٫٤١٤٧	٠٫٤١٦٢	٠٫٤١٧٧
١٫٤	٠٫٤١٩٢	٠٫٤٢٠٧	٠٫٤٢٢٢	٠٫٤٢٣٦	٠٫٤٢٥١	٠٫٤٢٦٥	٠٫٤٢٧٩	٠٫٤٢٩٢	٠٫٤٣٠٦	٠٫٤٣١٩
١٫٥	٠٫٤٣٣٢	٠٫٤٣٤٥	٠٫٤٣٥٧	٠٫٤٣٧٠	٠٫٤٣٨٢	٠٫٤٣٩٤	٠٫٤٤٠٦	٠٫٤٤١٨	٠٫٤٤٢٩	٠٫٤٤٤١
١٫٦	٠٫٤٤٥٢	٠٫٤٤٦٣	٠٫٤٤٧٤	٠٫٤٤٨٤	٠٫٤٤٩٥	٠٫٤٥٠٥	٠٫٤٥١٥	٠٫٤٥٢٥	٠٫٤٥٣٥	٠٫٤٥٤٥
١٫٧	٠٫٤٥٥٤	٠٫٤٥٦٤	٠٫٤٥٧٣	٠٫٤٥٨٢	٠٫٤٥٩١	٠٫٤٥٩٩	٠٫٤٦٠٨	٠٫٤٦١٦	٠٫٤٦٢٥	٠٫٤٦٣٣
١٫٨	٠٫٤٦٤١	٠٫٤٦٤٩	٠٫٤٦٥٦	٠٫٤٦٦٤	٠٫٤٦٧١	٠٫٤٦٧٨	٠٫٤٦٨٦	٠٫٤٦٩٣	٠٫٤٦٩٩	٠٫٤٧٠٦
١٫٩	٠٫٤٧١٣	٠٫٤٧١٩	٠٫٤٧٢٦	٠٫٤٧٣٢	٠٫٤٧٣٨	٠٫٤٧٤٤	٠٫٤٧٥٠	٠٫٤٧٥٦	٠٫٤٧٦١	٠٫٤٧٦٧
٢٫٠	٠٫٤٧٧٢	٠٫٤٧٧٨	٠٫٤٧٨٣	٠٫٤٧٨٨	٠٫٤٧٩٣	٠٫٤٧٩٨	٠٫٤٨٠٣	٠٫٤٨٠٨	٠٫٤٨١٢	٠٫٤٨١٧
٢٫١	٠٫٤٨٢١	٠٫٤٨٢٦	٠٫٤٨٣٠	٠٫٤٨٣٤	٠٫٤٨٣٨	٠٫٤٨٤٢	٠٫٤٨٤٦	٠٫٤٨٥٠	٠٫٤٨٥٤	٠٫٤٨٥٧
٢٫٢	٠٫٤٨٦١	٠٫٤٨٦٤	٠٫٤٨٦٨	٠٫٤٨٧١	٠٫٤٨٧٥	٠٫٤٨٧٨	٠٫٤٨٨١	٠٫٤٨٨٤	٠٫٤٨٨٧	٠٫٤٨٩٠
٢٫٣	٠٫٤٨٩٣	٠٫٤٨٩٦	٠٫٤٨٩٨	٠٫٤٩٠١	٠٫٤٩٠٤	٠٫٤٩٠٦	٠٫٤٩٠٩	٠٫٤٩١١	٠٫٤٩١٣	٠٫٤٩١٦
٢٫٤	٠٫٤٩١٨	٠٫٤٩٢٠	٠٫٤٩٢٢	٠٫٤٩٢٥	٠٫٤٩٢٧	٠٫٤٩٢٩	٠٫٤٩٣١	٠٫٤٩٣٢	٠٫٤٩٣٤	٠٫٤٩٣٦
٢٫٥	٠٫٤٩٣٨	٠٫٤٩٤٠	٠٫٤٩٤١	٠٫٤٩٤٣	٠٫٤٩٤٥	٠٫٤٩٤٦	٠٫٤٩٤٨	٠٫٤٩٤٩	٠٫٤٩٥١	٠٫٤٩٥٢
٢٫٦	٠٫٤٩٥٣	٠٫٤٩٥٥	٠٫٤٩٥٦	٠٫٤٩٥٧	٠٫٤٩٥٩	٠٫٤٩٦٠	٠٫٤٩٦١	٠٫٤٩٦٢	٠٫٤٩٦٣	٠٫٤٩٦٤
٢٫٧	٠٫٤٩٦٥	٠٫٤٩٦٦	٠٫٤٩٦٧	٠٫٤٩٦٨	٠٫٤٩٦٩	٠٫٤٩٧٠	٠٫٤٩٧١	٠٫٤٩٧٢	٠٫٤٩٧٣	٠٫٤٩٧٤
٢٫٨	٠٫٤٩٧٤	٠٫٤٩٧٥	٠٫٤٩٧٦	٠٫٤٩٧٧	٠٫٤٩٧٧	٠٫٤٩٧٨	٠٫٤٩٧٩	٠٫٤٩٧٩	٠٫٤٩٨٠	٠٫٤٩٨١
٢٫٩	٠٫٤٩٨١	٠٫٤٩٨٢	٠٫٤٩٨٢	٠٫٤٩٨٣	٠٫٤٩٨٤	٠٫٤٩٨٤	٠٫٤٩٨٥	٠٫٤٩٨٥	٠٫٤٩٨٦	٠٫٤٩٨٦
٣٫٠	٠٫٤٩٨٧	٠٫٤٩٨٧	٠٫٤٩٨٧	٠٫٤٩٨٨	٠٫٤٩٨٨	٠٫٤٩٨٩	٠٫٤٩٨٩	٠٫٤٩٨٩	٠٫٤٩٩٠	٠٫٤٩٩٠
٣٫١	٠٫٤٩٩٠	٠٫٤٩٩١	٠٫٤٩٩١	٠٫٤٩٩١	٠٫٤٩٩٢	٠٫٤٩٩٢	٠٫٤٩٩٢	٠٫٤٩٩٢	٠٫٤٩٩٣	٠٫٤٩٩٣
٣٫٢	٠٫٤٩٩٣	٠٫٤٩٩٣	٠٫٤٩٩٤	٠٫٤٩٩٤	٠٫٤٩٩٤	٠٫٤٩٩٤	٠٫٤٩٩٤	٠٫٤٩٩٥	٠٫٤٩٩٥	٠٫٤٩٩٥
٣٫٣	٠٫٤٩٩٥	٠٫٤٩٩٥	٠٫٤٩٩٥	٠٫٤٩٩٦	٠٫٤٩٩٦	٠٫٤٩٩٦	٠٫٤٩٩٦	٠٫٤٩٩٦	٠٫٤٩٩٦	٠٫٤٩٩٧
٣٫٤	٠٫٤٩٩٧	٠٫٤٩٩٧	٠٫٤٩٩٧	٠٫٤٩٩٧	٠٫٤٩٩٧	٠٫٤٩٩٧	٠٫٤٩٩٧	٠٫٤٩٩٧	٠٫٤٩٩٧	٠٫٤٩٩٨
٣٫٥	٠٫٤٩٩٨	٠٫٤٩٩٨	٠٫٤٩٩٨	٠٫٤٩٩٨	٠٫٤٩٩٨	٠٫٤٩٩٨	٠٫٤٩٩٨	٠٫٤٩٩٨	٠٫٤٩٩٨	٠٫٤٩٩٨