الأدهم

في

التفاضل وحساب المثلثات

الصف الثانى الثانوى
الفصل الدراسى الثانى

اسم الطالب /

المدرســـة /

الفصـــــل /

إعداد أ/ محمد أدهم
ت / ٠١٠٠٧٤٥١٩٥٧

الدرس الاول "معدل التغير"

أولاً: دالة التغير ت(هـ)

$$ت(هـ) = د(س_١ + هـ) - د(س_١)$$

مثال ١ إذا كانت د(س) = $س^٢ - ٣س + ٤$ فأوجد

١) دالة التغير عند س = ٣ ثم اوجد ت(٢)

٢) مقدار التغير في د(س) عندما تتغير س من ١ إلى ١,٤

الحل

١) عند س = ٣ ⇐ ت(هـ) = د(٣+هـ) - د(٣)

$د(٣+هـ) = (٣+هـ)^٢ - ٣(٣+هـ) + ٤$

$= ٩ + ٦هـ + هـ^٢ - ٩ - ٣هـ + ٤$

$= هـ^٢ + ٣هـ + ٤$

$د(٣) = (٣)^٢ - ٣(٣) + ٤ = ٩ - ٩ + ٤$

$= ٤$

$\therefore ت(هـ) = هـ^٢ + ٣هـ + ٤ - ٤$

$= هـ^٢ + ٣هـ$

$ت(٠,٢) = (٠,٢)^٢ + ٣(٠,٢) = ٠,٦٤$

٢) مقدار التغير في د(س) = د($س_٢$) - د($س_١$)

$د(١,٤) = (١,٤)^٢ - ٣(١,٤) + ٤ = ١,٧٦$

$د(١) = (١)^٢ - ٣(١) + ٤ = ٢$

$د(١,٤) - د(١) = ٠,٧٦$

ثانياً: دالة متوسط التغير

١) دالة متوسط التغير

$$م(هـ) = \frac{ت(هـ)}{هـ} = \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$$

٢) نية متوسط التغير

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{د(س_٢) - د(س_١)}{س_٢ - س_١}$$

مثال ٢ إذا كانت د(س) = $س^٢ - ٣س + ٢$ فأوجد

أ) دالة متوسط التغير عند س = ٢ ثم اوجد م(٢,٠)

ب) متوسط التغير عندما تتغير س من ٤,٥ إلى ٣

الحل

$د(س) = س^٢ + ٣س - ١$

أ) عند س = ٢ ⇐ $م(هـ) = \frac{د(٢+هـ) - د(٢)}{هـ}$

$د(٢+هـ) = (٢+هـ)^٢ + ٣(٢+هـ) - ١$

$= ٤ + ٤هـ + هـ^٢ + ٦ + ٣هـ - ١$

$= هـ^٢ + ٧هـ + ٩$

$د(٢) = (٢)^٢ + ٣(٢) - ١ = ٩$

$\therefore م(هـ) = \frac{هـ^٢ + ٧هـ + ٩ - ٩}{هـ} = \frac{هـ^٢ + ٧هـ}{هـ}$

$م(هـ) = هـ + ٧$ ⇐ $م(٠,٢) = ٠,٢ + ٧ = ٧,٢$

ب) التغير = $\frac{د(٣) - د(٤,٥)}{٣ - ٤,٥}$

أكمل

$د(٣) =$

$د(٤,٥) =$

التغير =

مذكرتي Mothrty.com

ثالثاً: معدل التغير

معدل التغير = $\lim_{هـ \to 0}$ م (هـ)

$= \lim_{هـ \to 0} \frac{د(س_1 + هـ) - د(س_1)}{هـ}$

مثال ٣

إذا كانت د(س) = $س^2 - 3س$

فأوجد معدل التغير للدالة عندما س = ٢

الحل

نصنجيب دالة متوسط التغير ونبدسيه نأخذ نهـا

عند س = ٢ ⇐ م(هـ) = $\frac{د(٢+هـ) - د(٢)}{هـ}$

$د(٢+هـ) = (٢+هـ)^2 - ٣(٢+هـ)$

$= ٤ + ٤هـ + هـ^2 - ٦ - ٣هـ$

$= هـ^2 + هـ - ٢$

$د(٢) = (٢)^2 - ٣(٢) = ٤ - ٦ = -٢$

$م(هـ) = \frac{هـ^2 + هـ - ٢}{هـ} = \frac{هـ(هـ+١)}{هـ}$

∴ معدل التغير عند س = ٢ = نهـا $\lim_{هـ \to 0}$ هـ + ١

= ١

تدريب

إذا كان د(س) = $٢س^2 - ٥س + ٧$

فأوجد معدل التغير للدالة عندما س = ٣

مثال ٤

إذا كانت د(س) = $\frac{٣}{س - ٢}$

فأوجد دالة متوسط التغير عندما تتغير س من $س_1$ إلى $س_1 + هـ$ ثم استنتج معدل التغير في د عندما س = ٥

الحل

د(س) = $\frac{٣}{س - ٢}$ عندما $س = س_1$ فإن

$د(س_1 + هـ) - د(س_1) = \frac{٣}{س_1 + هـ - ٢} - \frac{٣}{س_1 - ٢}$

$= \frac{٣(س_1 - ٢) - ٣(س_1 + هـ - ٢)}{(س_1 + هـ - ٢)(س_1 - ٢)}$

نقرب المقاسيم في بعض ونعمل تقاطع فوق

$= \frac{٣س_1 - ٦ - ٣س_1 - ٣هـ + ٦}{(س_1 + هـ - ٢)(س_1 - ٢)} = \frac{-٣هـ}{(س_1 + هـ - ٢)(س_1 - ٢)^2}$

معدل التغير = $\lim_{هـ \to 0} \frac{د(س_1 + هـ) - د(س_1)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to 0} هـ \left(\frac{-٣}{(س_1 + هـ - ٢)(س_1 - ٢)^2} \right)$

$= \lim_{هـ \to 0} \frac{-٣}{(س_1 + هـ - ٢)(س_1 - ٢)^2}$

$= \frac{-٣}{(س_1 - ٢)(س_1 - ٢)^2} = \frac{-٣}{(س_1 - ٢)^3}$

عند س = ٥ معدل التغير = $\frac{-٣}{(٥-٢)^3} = \frac{-٣}{٢٧} = -\frac{١}{٩}$

تدريب

أوجد: مع كل مما يلي

١- أخطبوط

٢- عنكبوت

٣- عندليب بالتفاصيل بالحرف

مثال ٥

إذا كانت $د(س) = \sqrt{س}$ حيث $س > ٠$ فأوجد معدل التغير عند $س = س_١$ ثم احسب هذا المعدل عند $س_١ = ٢٥$

الحل

عند $س = س_١$ يكون $م(هـ) = \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$

$$م(هـ) = \frac{\sqrt{س_١ + هـ} - \sqrt{س_١}}{هـ}$$

ويكون معدل التغير $= نهـا_{هـ \to ٠}\ م(هـ)$

$$= نهـا_{هـ \to ٠} \frac{(س_١ + هـ)^{\frac{١}{٢}} - س_١^{\frac{١}{٢}}}{هـ}$$

$$= \frac{١}{٢} \times (س_١)^{\frac{١}{٢} - ١} = \frac{١}{٢} (س_١)^{-\frac{١}{٢}}$$

$$= \frac{١}{٢\sqrt{س_١}}$$

عندما $س_١ = ٢٥$ وهو ينتمي للمجال

يكون المعدل $= \frac{١}{٢\sqrt{٢٥}} = \frac{١}{١٠} = ٠.١$

مثال ٦

يصف جسم متزايد للبكتريا عند أي لحظة $(ن)$ بالدقائق بالعلاقة $د(ن) = ٢ن^٣ + ١٠٠$ ملليجرام أوجد معدل النمو اللحظي عند $ن = ٥$

الحل

$د(ن) = ٢ن^٣ + ١٠٠$

معدل النمو اللحظي = دالة معدل التغير

$$= نهـا_{هـ \to ٠} \frac{د(ن_١ + هـ) - د(ن_١)}{هـ}$$

$$د(ن_١ + هـ) = ٢(ن_١ + هـ)^٣ + ١٠٠$$

$$د(ن_١) = ٢ن_١^٣ + ١٠٠$$

$$\therefore \text{المعدل} = نهـا_{هـ \to ٠} \frac{٢(ن_١ + هـ)^٣ + ١٠٠ - ٢ن_١^٣ - ١٠٠}{هـ}$$

$$= نهـا_{هـ \to ٠} \frac{٢(ن_١ + هـ)^٣ - ٢ن_١^٣}{هـ}$$

$$= ٢ \times نهـا_{هـ \to ٠} \frac{(ن_١ + هـ)^٣ - ن_١^٣}{هـ}$$

$$= ٢ \times ٣ \times ن_١^٢ = ٦ن_١^٢$$

عندما $ن = ٥$ يكون المعدل $= ٦ \times ٥^٢ = ١٥٠$ ملليجرام

تدريب أوجد دالة متوسط التغير في $د$ حيث $د(س) = \sqrt{س - ٥}$ ثم احسب معدل التغير عند $س = ٩$

الحل

ناكر الفرق في المرافعة

تدريب فقاعة من الصابون كروية الشكل تتمدد بحيث تظل محافظة على شكلها الكروي احسب متوسط التغير في مساحة سطحها عندما يتغير نصف قطرها من ٥٠ إلى ٦٠ سم

مذكرتي
Mozkrty.com

ملاحظات هامة

المربع

المساحه = (طول الضلع)^{٢} ⟵ $س^{٢}$

المحيط = ٤ (طول الضلع) ⟵ ٤ س

المستطيل

المساحه = الطول × العرض

المحيط = (الطول + العرض) × ٢

الدائرة

المساحه = π نق^{٢}

المحيط = ٢ π نق

الكرة

المساحه = ٤ π نق^{٢}

الحجم = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣}

المكعب

المساحه الجانبيه = ٤ ل^{٢} ⟵ ٤ $س^{٢}$

المساحه الكليه = ٦ ل^{٢} ⟵ ٦ $س^{٢}$

الحجم = ل^{٣} ⟵ $س^{٣}$

مثال ٧

صفيحه معدنيه على شكل مربع تتمدد بإنتظام محتفظه بشكلها اصبح متوسط التغير فى مساحة سطحها عندما يتغير طول ضلعها من ٣ سم إلى ٣,٤ سم ثم اصبح معدل التغير عندما يكون طول الضلع ٥ سم

الحل

نفرض أن طول الضلع س فإن المساحه د(س)

د(س) = $س^{٢}$

دالة متوسط التغير = م(هـ)

$$م(هـ) = \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$$

$$= \frac{(س_١ + هـ)^{٢} - س_١^{٢}}{هـ}$$

$$= \frac{س_١^{٢} + ٢ س_١ هـ + هـ^{٢} - س_١^{٢}}{هـ}$$

$$= \frac{هـ(٢ س_١ + هـ)}{هـ} = ٢ س_١ + هـ$$

بوضع $س_١$ = ٣ ، هـ = ٣,٤ − ٣ = ٠,٤

∴ متوسط التغير = ٢ × ٣ + ٠,٤ = ٦,٤

← دالة معدل التغير = نهـا عند هـ → ٠ ٢ $س_١$ + هـ

= ٢ $س_١$

ولحساب المعدل عند س = ٥

= ٢ × ٥ = ١٠

الدرس الثاني: الاشتقاق

معدل التغير = $\lim_{h \to 0} \frac{د(س_1+h) - د(س_1)}{h}$

= ميل المماس للمنحنى عند $(س_1, ص_1)$

ملحوظة قديمة ميل المماس = ظا الزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

مثال ١ أوجد ميل المماس للمنحنى $د(س) = س^3 - ٣$ عند النقطة $P(٢، ٥)$ ثم أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة P لأقرب دقيقة

الحل

$د(٢) = ٢^3 - ٣ = ٨ - ٣ = ٥$

∴ النقطة $(٢، ٥)$ تقع على المنحنى

ميل المماس = $\lim_{h \to 0} \frac{د(٢+h) - د(٢)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{[(٢+h)^3 - ٣] - [٢^3 - ٣]}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{(٢+h)^3 - ٣ - ٨ + ٣}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{(٢+h)^3 - ٢^3}{h}$

$= ٣ \times ٢^2 = ٣ \times ٤ = ١٢$

الزاوية اللي عاوزينها

ظا (ل) = ١٢

∴ ق (∠ل) = ظا$^{-1}$ ١٢ ≈ ٨٥° ١٤′

تدريب أوجد ميل المماس للمنحنى $د(س) = س^3 - ٤$ عند النقطة $P(١-، -٣)$ ثم أوجد قياس الزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند P

تدريب باستخدام تعريف المشتقة أوجد مشتقة $د(س) = س^2 + ٢س - ٥$ ثم أوجد ميل المماس عند $P(٣، ١٠)$ والزاوية

قابلية الاشتقاق عند نقطة (P)

إذا كان $د'(P^+) = د'(P^-)$

أي أن النهاية لها وجود

مثال ٢ اثبت أن $د(س) = س^2 + ٢س$ قابلة للاشتقاق عند $س = ١$

الحل

∵ المجال = ح ∴ أ ∈ المجال

$د(١) = ١^2 + ١ + ١ = ١$

$د'(١) = \lim_{h \to 0} \frac{د(١+h) - د(١)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{[(١+h)^2 + (١+h) + ١] - [١^2 + ١ + ١]}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{١ + ٢h + h^2 + ١ + h + ١ - ٣}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + ٣h}{h}$

$= \lim_{h \to 0} (h + ٣) = ٣$ ∈ ح ∴ الدالة قابلة للاشتقاق

مثال ٣ أثبت قابلية الاشتقاق عند س = ٢

$$د(س) = \begin{cases} س^٤ - ٥ & ، س \leq ٢ \\ ٤س - ٩ & ، س > ٢ \end{cases}$$

الحل

المجال = ح ∴ الدالة معرفة عند س = ٢

$د(٢) = ٤ \times ٢ - ٩ = ٨ - ٩ = -١$

$$د'(٢^+) = \lim_{هـ \to ٠^+} \frac{د(٢+هـ) - د(٢)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠^+} \frac{[(٢+هـ)^٤ - ٥] - (-١)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠^+} \frac{١٦ + ٣٢هـ + ٨هـ^٢ + هـ^٤ + ١}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠^-} \frac{هـ(٣٢ + ٨هـ + هـ^٣)}{هـ} = ٣٢ \quad ①$$

$$د'(٢^-) = \lim_{هـ \to ٠^-} \frac{د(٢+هـ) - د(٢)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠^-} \frac{[٤(٢+هـ) - ٩] - (-١)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠^-} \frac{٨ + ٤هـ - ٩ + ١}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠^-} \frac{٤هـ}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠^-} ٤ = ٤ \quad ②$$

∴ $د'(٢^+) \neq د'(٢^-)$

∴ الدالة قابلة للاشتقاق عند س = ٢

نظرية إذا كانت ص = د(س) قابلة للاشتقاق عند س = أ فإنها تكون متصلة عند أ

ملاحظات هامة

١) عكس النظرية غير صحيح دائماً يعني [كل دالة قابلة للاشتقاق تكون متصلة وليس كل دالة متصلة تكون قابلة للاشتقاق]

٢) إذا كانت الدالة غير متصلة عند نقطة فإنها تكون غير قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة

٣) عند بحث قابلية الاشتقاق عند نقطة في مجالها نبدأ بحث اتصالها فإذا كانت متصلة نبحث الاشتقاق وإذا كانت غير متصلة فإنها تكون غير قابلة للاشتقاق.

مثال ٤ أثبت قابلية الاشتقاق

عند س = ١

$$د(س) = \begin{cases} س^٤ + ٢ & ، س \leq ١ \\ ٢س + ١ & ، س > ١ \end{cases}$$

الحل

أولاً بحث الاتصال عند س = ١

① $د(١) = ١^٢ + ٢ = ٣$

② $\lim_{س \to ١^+} د(س) = \lim_{س \to ١^+} (س^٢ + ٢) = ١ + ٢ = ٣$

③ $\lim_{س \to ١^-} د(س) = \lim_{س \to ١^-} (٢س + ١) = ٢ + ١ = ٣$

∵ ① ، ② ، ③ ∴ الدالة متصلة عند س = ١

ثانياً بحث قابلية الاشتقاق عند س = ١

$$د'(١^+) = \lim_{هـ \to ٠^+} \frac{د(١+هـ) - د(١)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠^+} \frac{[(١+هـ)^٢ + ٢] - (٣)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠^+} \frac{١ + ٢هـ + هـ^٢ + ٢ - ٣}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠^+} \frac{هـ(٢ + هـ)}{هـ} = ٢$$

$$د'(١^-) = \lim_{هـ \to ٠^-} \frac{د(١+هـ) - د(١)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠^-} \frac{[٢(١+هـ)+١] - ٣}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠^-} \frac{٢هـ + ٢ + ١ - ٣}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠^-} \frac{٢هـ}{هـ} = ٢$$

∵ $د'(١^+) = د'(١^-)$ ∴ الدالة قابلة للاشتقاق عند س = ١

تحويلة سهلة بس حلوة

تدريب

إبحث قابلية الاشتقاق عند $س = \frac{\pi}{٢}$

$$د(س) = \begin{cases} جاس & ، س \geq \frac{\pi}{٢} \\ ١ + جتاس & ، س < \frac{\pi}{٢} \end{cases}$$

مثال ٥

إذا كانت $د(س) = أس^٢ + ب$

وميل المماس للمنحنى عند (١، -١) يساوي ٨

عليه = ٨ فأوجد قيمتي أ ، ب

الحل

ميل المماس للمنحنى عند (١، -١) = $د'(١) = ٨$

$$د'(١) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(١+هـ) - د(١)}{هـ} = ٨$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{[أ(١+هـ)^٢ + ب] - [أ + ب]}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{أ + ٢أهـ + أهـ^٢ + ب - أ - ب}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ(٢أ + أهـ)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} ٢أ + أهـ = ٢أ = ٨$$

∴ $٢أ = ٨$ ∴ $أ = \frac{٨}{٢} = ٤$

∴ النقطة (١، -١) ∈ للمنحنى للدالة

∴ $د(١) = -١$

∴ $أ + ب = -١$

$ب = -١ - أ = -١ - ٤ = -٥$

مذكرتي
Mozkrty.com

الدرس الثالث
قواعد الاشتقاق

١- مشتقة الدالة الثابتة = صفر
د(س) = ﻫ
د'(س) = صفر

٢- مشتقة د(س) = $س^{ن}$ = ن $س^{ن-١}$
ننزل الاس وننقص من الاس واحد

$س^{٥}$ ← ٥ $س^{٤}$
$س^{٣}$ ← ٣ $س^{٢}$
$س^{-٤}$ ← $-٤ س^{-٥}$
$٣ س^{٧}$ ← $٣ \times ٧ س^{٦} = ٢١ س^{٦}$
$\sqrt{س}$ ← $(س^{\frac{١}{٢}})$
$\frac{١}{٢} س^{\frac{١}{٢}-١} = \frac{١}{٢} س^{-\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٢\sqrt{س}}$

$\sqrt[٣]{س^{٥}} \Leftarrow س^{\frac{٥}{٣}}$
$= \frac{٥}{٣} س^{\frac{٥}{٣}-١} = \frac{٥}{٣} س^{\frac{٢}{٣}}$
$\frac{٥}{٣} \sqrt[٣]{س^{٢}}$

مثال ١
أوجد مشتقة كل مما يلي
أ) د(س) = $٣س^{٤} - ٥س^{٢} + ٧$
د'(س) = $١٢ س^{٣} - ١٠ س$

ب) ص = $٣س^{٨} - ٢س^{٥} + ٦س + ١$
$(\frac{ص}{س}) =$

ج) ص = $\frac{٥}{س} + س\sqrt{س} + ٣\sqrt{س} - ٤$
ص = $٥ س^{-١} + س^{\frac{٣}{٢}} + ٣ س^{\frac{١}{٢}} - ٤$
$(\frac{ص}{س}) = -٥ س^{-٢} + \frac{٣}{٢} س^{\frac{١}{٢}} + \frac{٣}{٢\sqrt{س}}$
$= \frac{-٥}{س^{٢}} + \frac{٣}{٢}\sqrt{س} + \frac{٣}{٢\sqrt{س}}$

مشتقة حاصل ضرب دالتين
= الأولى × مشتقة الثانية + الثانية × مشتقة الأولى

مثال ٢
أوجد $\frac{ص}{س}$ إذا كان
ص = $(٤س^{٤} - ١)(٧س^{٣} + س)$
ثم اوجد $(\frac{ص}{س})$ عندما س = ١

الحل

الأولى	مشتقة الأولى
$(٤س^{٤} - ١)$	٨ س
الثانية	**مشتقة الثانية**
$(٧س^{٣} + س)$	$٢١ س^{٢} + ١$

$(٤س^{٤} - ١)(٢١ س^{٢} + ١) + (٧س^{٣} + س) ٨ س$
عندما س = ١
$\frac{ص}{س} = (٤ - ١)(٢١ + ١) + ٨(٧ + ١)$
$= ١٣٠$

مثال ٣ إذا كان $ص = (س-١)(س^{٢}+س+١)(٢س)$

فأوجد $\frac{ص}{س}$ عندما $س = ١$

الحل

الأولى	الثانية	الثالثة
$(س-١)$	$(س^{٢}+س+١)$	$٢س$
مشتقة الأولى	مشتقة الثانية	مشتقة الثالثة
١	$٢س+١$	٢

$\frac{ص}{س}$ = مشتقة الأولى × الثانية × الثالثة
+ مشتقة الثانية × الأولى × الثالثة
+ مشتقة الثالثة × الأولى × الثانية
= الكل

مشتقة خارج قسمة والتيه

$$= \frac{[\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط}] - [\text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}]}{(\text{المقام})^{٢}}$$

مثال ٤ إذا كانت $ص = \frac{س^{٤}+٢س^{٢}-١}{(س+٥)}$

فأوجد $\frac{ص}{س}$

الحل

المقام = $س+٥$

مشتقة المقام = ١

البسط = $س^{٤}+٢س^{٢}-١$

مشتقة البسط = $٤س^{٣}+٤س$

$$\frac{ص}{س} = \frac{(س+٥)(٤س^{٣}+٤س) - (س^{٤}+٢س^{٢}-١)}{(س+٥)^{٢}}$$

$$= \frac{٤س^{٤}+٤س^{٢}+٢٠س^{٣}+٢٠س - س^{٤}-٢س^{٢}+١}{(س+٥)^{٢}}$$

$$= \frac{٣س^{٤}+٢٠س^{٣}+١٧س^{٢}+٢٠س+١}{(س+٥)^{٢}}$$

مثال ٥ أوجد $\frac{ص}{س}$ فى كل مما يأتى

(أ) $ص = (س^{٢}+٢س)(٣س-٢)$

(ب) $ص = \frac{٤س^{٢}-٣س+٢٧}{س}$

(ج) $ص = \frac{س^{٤}-١}{س^{٣}+١}$

مشتقة دالة الدالة
قاعدة السلسلة

إذا كان ص = د(ع)
، ع = ر(س)
فإن $\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ع} \times \frac{ع}{س}$

مثال ١
إذا كانت ص = $ع^{٤}$
، ع = $س^{٣} - ٣س^{٢} + ٧$
فأوجد $\frac{ص}{س}$

الحل

$\frac{ص}{ع} = ٤ع^{٣}$

$\frac{ع}{س} = ٣س^{٢} - ٦س$

$\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ع} \times \frac{ع}{س} = ٤ع^{٣}(٣س^{٢} - ٦س)$

بالتعويض عن ع = $(س^{٣} - ٣س^{٢} + ٧)$

$\therefore \frac{ص}{س} = ٤(س^{٣} - ٣س^{٢} + ٧)^{٣}(٣س^{٢} - ٦س)$

تدريب
إذا كان ص = $(٧س^{٢} + ١)^{٥}$
فأوجد $\frac{ص}{س}$

الحل

مثال ٣
إذا كان ص = $\left[\frac{س^{٢} - ٤}{س + ١}\right]^{٥}$
فأوجد $\frac{ص}{س}$

الحل

$\frac{ص}{س} = ٥\left[\frac{س^{٢} - ٤}{س + ١}\right]^{٤} \times \frac{(س+١)(٢س) - (س^{٢}-٤)(١)}{(س+١)^{٢}}$

$= ٥\left[\frac{س^{٢} - ٤}{س + ١}\right]^{٤} \times \left[\frac{س^{٢} + ٢س + ٤}{(س+١)^{٢}}\right]$

$= \frac{٥(س^{٢}-٤)^{٤}(س^{٢}+٢س+٤)}{(س+١)^{٦}}$

تدريب
إذا كان ص = $ع^{٢} + ع$
، ع = $٢س^{٢}$
فأوجد $\left.\frac{ص}{س}\right|_{س=١}$

مشتقة (المقدار)^{ن}
= مشتقة المقدار × مشتقة ما بداخل المقدار

مثال ٢
إذا كان ص = $(س^{٣} + ٤)^{٩}$
فأوجد $\frac{ص}{س}$

الحل

$\frac{ص}{س} = ٩(س^{٣} + ٤)^{٨} \times ٣س^{٢}$

$= ٢٧س^{٢}(س^{٣} + ٤)^{٨}$

مثال ٤ أوجد قيم س التى تجعل $د'(س) = ٧$ إذا كان $د(س) = س^٣ - ٥س + ٢$

الحل

$د'(س) = ٣س^٢ - ٥ = ٧$

$٣س^٢ = ٧ + ٥$ $\quad ٣س^٢ = ١٢$

$س^٢ = ٤$ $\quad س = \pm\sqrt{٤} = \pm ٢$

تدريب أوجد قيم س التى تجعل $د'(س) = ٧$ حيث $د(س) = (س - ٥)^٧$

الحل

نتيجه إذا كانت ص دالة قابله للاشتقاق فإن

$\frac{د}{دس}(ص^ن) = ن ص^{ن-١} \times \frac{دص}{دس}$

مثال ٦ أوجد $\frac{دص}{دس}$ فى كل مما يلى

(أ) $ص = \sqrt{٥س^٣ - ١٢س^٢ + ٨س + ١}$

الحل

$\frac{دص}{دس} = \frac{١٥س^٢ - ٢٤س + ٨}{٢\sqrt{٥س^٣ - ١٢س^٢ + ٨س + ١}}$

(ب) $ص = \sqrt{س^٣ - ٢س^٢ + ١}$

$٣ص^٢ \times \frac{دص}{دس} = ٤س^٣ - ٤س$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{٤س^٣ - ٤س}{٣ص^٢}$

$= \frac{٤س^٣ - ٤س}{٣\sqrt{(س^٤ - ٢س^٢ + ١)^٢}}$

(ج) $ص^٤ = س^٥ - س$

ملحوظه مشتقه الجزر التربيعى لدالة

$= \frac{١}{٢\sqrt{\text{الجزر}}} \times$ مشتقه ما تحت الجزر

مثال ٥ أوجد $\frac{دص}{دس}$ لكل مما يلى

(أ) $ص = \sqrt{٢س + ٣}$

الحل

$\frac{دص}{دس} = \frac{٢}{٢\sqrt{٢س + ٣}}$

$= \frac{١}{\sqrt{٢س + ٣}}$

تدريب إذا كان $ص = ع^٢ + ٣ع + ٥$ ، $ع = \frac{١}{٢}س^٢ + ٢$

فأثبت أن $\frac{دص}{دس} - ٧\frac{دع}{دس} - س^٣ =$ صفر

مذكرتي Mothrty.com

الدرس الخامس
مشتقات الدوال المثلثية

الدالة		المشتقة
ﺟا(س)		جتا س
جتا(س)		− جا س
ظا(س)		قا^{٢} س

مثال ١ أوجد $\frac{ص}{س}$ فى كل مما يلى

(أ) ص = ٢ ظا٣س

الحل

$\frac{ص}{س} = ٢ \times قا^{٢}(٣س) \times ٣$

$= ٦ قا^{٢}٣س$

مشتقة الدالة المثلثية × مشتقة ما بداخلها

(ب) ص = ٢ جتا(٤ − ٣س^{٢})

الحل

$\frac{ص}{س} = [-٢ جا(٤-٣س^{٢})] \times (-٦س)$

$= ١٢ س جا(٤ - ٣س^{٢})$

(جـ) ص = ٢ جاس جتاس

مشتقة حاصل ضرب دالتين

جتاس ↓ — جاس ↓ — جاس

$\frac{ص}{س} = (٢ جاس)(-جاس) + ٢(جتاس \times جتاس)$

$= -٢ جا^{٢}س + ٢ جتا^{٢}س$

$= ٢ جتا^{٢}س - ٢ جا^{٢}س$

(د) ص = ٢س ظاس

٢ ↓ — ظاس ↓ — قا^{٢}س

$\frac{ص}{س} = ٢س \times قا^{٢}س + ٢ ظاس$

$= ٢س قا^{٢}س + ٢ ظاس$

(هـ) ص = ظا^{٢}٣س

الحل

$\frac{ص}{س} = ٢ ظا(٣س) \times قا^{٢}(٣س) \times ٣$

$= ٦ ظا٣س قا^{٢}٣س$

(و) ص = ظا ٤س^{٣}

الحل

$\frac{ص}{س} = قا^{٢}٤س^{٣} \times ١٢س^{٢}$

$= ١٢س^{٢} قا^{٢}٤س^{٣}$

مثال ٢ إذا كان ص = ٢س جاس جتاس

فأثبت أنه $\frac{ص}{س} = جا٢س + ٢س جا٢س$

الحل

ص = س × ٢ جاس جتاس = س جا٢س

$\frac{ص}{س} = س \times (جتا٢س \times ٢) + (جا٢س) \times ١$

$= ٢س جتا٢س + جا٢س$

$= جا٢س + ٢س جتا٢س$

وهو المطلوب

مذكرتي Mokrty.com

مثال ٣ اوجد ميل المماس للمنحنى $ص = ا جاس + ا جا٢س$ عندما $س = \frac{\pi}{٢}$

الحل

$$\frac{ص}{س} = جاس + ٢ جتا٢س$$

عند $س = \frac{\pi}{٢}$

ميل المماس $= جا\frac{\pi}{٢} + ٢ جتا(٢ \times \frac{\pi}{٢})$

$= ١ + ٢ \times (-١) = -١$

مثال ٤ أوجد $\frac{ص}{س}$ لكل مما يلى

(أ) $ص = ظاس$

الحل

$$ص = \frac{١}{جتاس} = \frac{[جتاس \times ٠] - [١ \times جاس]}{(جتاس)^٢}$$

$$= \frac{جاس}{جتا^٢س} = \frac{جاس}{جتاس \times جتاس}$$

$= ظاس \times قاس$

(ب) $ص = قتا٤س$

الحل

$$ص = \frac{١}{جا٤س} = (جا٤س)^{-١}$$

$$= -(جا٤س)^{-٢} \times جتا٤س \times ٤$$

$$= -٤ قتا^٢٤س \times جتا٤س$$

أو $= -٤ قتا٤س \times قتا٤س ظتا٤س$

(ج) $ص = س^٣ ظتا٢س$

الحل

$$ص = \frac{س^٣}{ظا٢س}$$

$$\frac{ص}{س} = \frac{(ظا٢س)(٣س^٢) - (٢ قا^٢٢س) \times س^٣}{(ظا٢س)^٢}$$

$$= \frac{٣س^٢ \times ظا٢س}{(ظا٢س)^٢} - \frac{٢س^٣ قا^٢٢س}{(ظا٢س)^٢}$$

$$= \frac{٣س^٢}{ظا٢س} - \frac{٢س^٣}{جا^٢٢س}$$

$= ٣س^٢ ظتا٢س - ٢س^٣ قتا^٢٢س$

مثال ٥ إذا كانت $ص = \sqrt{٧ - ٣ع}$ ، $ع = ظا\frac{س}{٢}$

فأثبت أن $٤\frac{ص}{س} + ٣ = ٠$

عندما $س = \frac{\pi}{٢}$

الحل

$$\frac{ص}{ع} = \frac{-٣}{٢\sqrt{٧ - ٣ع}} \quad ، \quad \frac{ع}{س} = \frac{١}{٢} قا^٢\frac{س}{٢}$$

$$\therefore \frac{ص}{س} = \frac{-٣}{٢\sqrt{٧ - ٣ع}} \times \frac{١}{٢} قا^٢\frac{س}{٢}$$

بالتعويض عن ع

$$\frac{ص}{س} = \frac{-٣ قا^٢\frac{س}{٢}}{٤\sqrt{٧ - ٣ظا\frac{س}{٢}}}$$

$$\frac{ص}{س}_{س = \frac{\pi}{٢}} = \frac{-٣ قا^٢\frac{\pi}{٤}}{٤\sqrt{٧ - ٣ظا\frac{\pi}{٤}}} = \frac{-٣}{٤}$$

$\therefore ٤ \times \frac{-٣}{٤} + ٣ = ٠$ وهو المطلوب

مثال ٦

إذا كان ص = جا²س - جتا²س

اثبت أن $\frac{د ص}{د س} = ٢ جا ٢س$

الحل

ص = جا²س - جتا²س

$\frac{د ص}{د س} = [٢ جاس جتاس] - [٢ جتاس (-جاس)]$

= ٢ جاس جتاس + ٢ جاس جتاس

= ٢ (٢ جاس جتاس)

= ٢ جا ٢س وهو المطلوب

مثال ٧

إذا كان $ص = \frac{جاس}{١ + جتاس}$

فاثبت أن $(١ + جتاس) \frac{د ص}{د س} = ١$

الحل

$\frac{د ص}{د س} = \frac{جتاس(١+جتاس) - (-جاس) جاس}{(١ + جتاس)^{٢}}$

$= \frac{جتاس + جتا²س + جا²س}{(١ + جتاس)^{٢}}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{١ + جتاس}{(١+جتاس)^{٢}}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{١}{(١ + جتاس)}$

$\therefore (١ + جتاس) \frac{د ص}{د س} = ١$

وهو المطلوب

مثال ٨

إذا كان ص = (جاس + جتاس)²

فأثبت أن $\frac{د ص}{د س} = ٢ جتا ٢س$

الحل

ص = (جاس + جتاس)²

$\frac{د ص}{د س} = ٢ (جاس + جتاس)(جتاس - جاس)$

$= ٢ (جتاس + جاس)(جتاس - جاس)$

$= ٢ (جتا²س - جا²س)$

= ٢ جتا ٢س وهو المطلوب

مذكرتي Mothrty.com

الدرس السادس
تطبيقات على المشتقة

ثوية ملاحظات عنب

١- إذا كان ل١م١ // ل٢م٢ فإن م١ = م٢

٢- ل١م١ ⊥ ل٢م٢ فإن م١ × م٢ = -١

٣- عشان نجيب ميل العمودى بنشقلب الميل وانغير الاشارة

٤- ميل الموازى لمحور السينات = صفر
او البسط = صفر

٥- ميل الموازى لمحور الصادات غير معرف
يعنى المقام = صفر

٦- لإيجاد الميل
(أ) المشتقة الأولى
(ب) ظا ل ← الزاوية اللى بيصنعها مع س+
(جـ) لو نقطتين (س١، ص١) ، (س٢، ص٢)

$$\text{الميل} = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$$

(د) لو معادلة م س + ن ص + ﻫ = ٠

$$\text{الميل} = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$$

(هـ) لو مستقيم معلوم
الموازى = نفس الميل
العمودى بنقلب البسط ونغير الاشارة

(و) ص = م س + جـ

٧- لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات
نضع ص = ٠ ونجيب منه س
(س، ٠)

٨- لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات
نضع س = ٠ ونجيب منه ص
(٠، ص)

معادلة المماس بمعلومية الميل (م)
و نقطة التماس (س١، ص١)

$$\text{ص} - \text{ص}_1 = \text{م}(\text{س} - \text{س}_1)$$

معادلة العمودى

$$\text{ص} - \text{ص}_1 = \frac{-1}{\text{م}}(\text{س} - \text{س}_1)$$

مثال ١ أوجد ميل المماس للمنحنى $د(س) = س^{٣} - ٣س + ١$ عند النقطة $(١، -١)$

الحل

$$\frac{ص}{س} = ٣س^{٢} - ٣$$

ميل المماس $= \left|\frac{ص}{س}\right|_{س=١} = ٣ - ٣ = -١$

مثال ٢ أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس مع $س^{+}$ حيث $د(س) = (س^{٣} - ١)(س + ٢)$ عند $(١، -٢)$

الحل

$ص = (س^{٣} - ١)(س + ٢)$

$= س^{٤} + ٢س^{٣} - س - ٢$

$\frac{ص}{س} = ٤س^{٣} + ٦س^{٢} - ١$

ميل المماس $= \left|\frac{ص}{س}\right|_{س=-١} = ٤(-١)^{٣} + ٦(-١)^{٢} - ١$

$= ١$

$\therefore ظا ل = ١ \quad \therefore ل = ٤٥°$

مثال ٣ أوجد النقط الواقعة على المنحنى $ص = س^{٣} - ٤س + ٣$ والتى يكون عندها المماس موازيًا لمحور السينات

الحل

$$\frac{ص}{س} = ٣س^{٢} - ٤$$

ميل الموازى لمحور السينات $= صفر$

$\therefore ٣س^{٢} - ٤ = ٠$

$٣س^{٢} = ٤ \quad س^{٢} = \frac{٤}{٣}$

$س = \pm ٢$

بالتعويض فى معادلة المنحنى [الأصلية]

$ص = (٢)^{٣} - ٤(٢) + ٣ = -١$

$\therefore$ النقطة ص $(٢، -١)$

مثال ٤ أوجد النقط الواقعة على المنحنى $ص = س^{٣} - ٦س + ١$ والتى عندها يكون المماس عمودى على المستقيم $س - ٣ص + ٦ = ٠$

الحل

$$\frac{ص}{س} = ٣س^{٢} - ٦$$

$\therefore$ ميل المماس $= ٣س^{٢} - ٦$

$\leftarrow$ ميل المستقيم المعطى $= \frac{-١}{-٣} = \frac{١}{٣}$

$\because$ المماس عمودى عليه

$\therefore$ ميل المماس $= -٣$

$\therefore ٣س^{٢} - ٦ = -٣$

$٣س^{٢} - ٣ = ٠$

$(س - ١)(س + ١) = ٠ \quad س^{٢} - ١ = ٠$

$س = \pm ١$

عند $س = ١ \therefore ص = -٤$ $\therefore$ النقطة $(١، -٤)$

عند $س = -١ \therefore ص = ٦$ $\therefore$ النقطة $(-١، ٦)$

أى خطأ

مذكرتى Mothrty.com

مثال ٥ أوجد معادلتى المماس والعمودى عليه للمنحنى
$ص = ٥س^{٣} + ٣س^{٢} + ٤$
عند النقطة $(-١، ٢)$ الواقعة عليه

الحل

$$\frac{دص}{دس} = ١٥س^{٢} + ٦س$$

$$\left(\frac{دص}{دس}\right)_{-١} = ١٥(-١)^{٢} + ٦(-١) = ٩$$

∴ ميل المماس $= ٩$

وميل العمودى عليه $= -\frac{١}{٩}$

معادلة المماس ص $(ص - ٢) = ٩(س + ١)$

$ص - ٢ = ٩س + ٩$

$$ص - ٩س - ١١ = ٠$$

معادلة العمودى $(ص - ٢) = -\frac{١}{٩}(س + ١)$

$٩ص - ١٨ + س + ١ = ٠$

$$٩ص + س - ١٧ = ٠$$

مثال ٦ أوجد معادلتى المماس والعمودى عليه للمنحنى $ص = س جا س$
عند $(\frac{\pi}{٤}، \frac{\pi}{٤})$

الحل

مثال ٧ أوجد قيمة $أ، ب$ إذا كان ميل المماس عند $(٢، ١)$ للمستقيم $ص = س^{٢} + أس + ب$ هو ٥

الحل

بالتعويض فى $(ص)$ عند $(٢، ١)$

$٣ = ١ + أ + ب$ ∴ $أ + ب = ٢$ ← ①

$$\frac{دص}{دس} = ٢س + أ$$

∴ $\left(\frac{دص}{دس}\right)_{١} = ٥$

$٢س + أ = ٥$ ∴ $أ = ٣$ ← ②

بالتعويض فى ① ∴ $ب = ٢ - ٣ = -١$

∴ $(أ = ٣)$ ∴ $(ب = -١)$

مثال ٨ أوجد مساحة المثلث المكون من محورى الإحداثيات والمماس والعمودى عليه للمنحنى
$ص = س^{٢} - ٨س + ١٩$ عند النقطة $(٤، ٥)$

الحل

$$\frac{دص}{دس} = ٢س - ٨$$

$$\left(\frac{دص}{دس}\right)_{٥} = ١٠ - ٨ = ٢$$

∴ الميل $= ٢$ ميل العمودى $= -\frac{١}{٢}$

معادلة المماس ← $ص - ٤ = ٢(س - ٥)$

$$ص - ٢س + ٦ = ٠$$

معادلة العمود عليه $ص - ٤ = -\frac{١}{٢}(س - ٥)$

$٢ص - ٨ = -س + ٥$

$$٢ص + س - ١٣ = ٠$$

نقطة تقاطع المنحنى مع محور الصادات $(٠، ٦٫٥)$

// // العمودى // // $(٠، ١٣)$

طول القاعدة $= ١٣ - ٣ = ١٠$ وحدات

الارتفاع = الاحداثى الصادى $= ٥$

∴ م $\Delta = \frac{١}{٢} \times ١٠ \times ٥ = ٢٥$ وحدة مربعة

مذكرتى Mozkrty.com

الدرس السابع التكامل

كفاضل

$د(س)$ ⟷ $ك(س)$

تكامل

قاعدة هامة

$$\int س^{ن} \, د(س) = \frac{س^{ن+1}}{ن+1} + ث$$

بنزود الاس (١) ونقسم على الاس الجديد

مثال ١

أوجد

(أ) $\int س^{٨} \, د(س) = \frac{١}{٩} س^{٩} + ث$

(ب) $\int س^{٩} \, د(س) = \frac{١}{١٠} س^{١٠} + ث$

(ج) $\int س^{١٥} \, د(س) =$

(د) $\int س \, د(س) =$

(هـ) $\int س^{٢} \, د(س) =$

مثال ٢

أوجد

(أ) $\int س^{\frac{٤}{٣}} \, د س$

$= \frac{٣}{٥} س^{\frac{٥}{٣}} + ث$

(ب) $\int \sqrt[٧]{س^{٥}} \, د س$

$= \int س^{\frac{٥}{٧}} \, د س$

$= \frac{٧}{١٢} س^{\frac{١٢}{٧}} + ث$

(ج) $\int (٢ + \sqrt{س} + \frac{١}{\sqrt{س}}) \, د س$

الكل

$= \int (٢ + س^{\frac{١}{٢}} + س^{-\frac{١}{٢}}) \, د س$

$= ٢س + \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + ٢ س^{\frac{١}{٢}} + ث$

$= ٢س + \frac{٢}{٣} \sqrt{س^{٣}} + ٢\sqrt{س} + ث$

(د) $\int (\frac{١}{س^{٢}} + \sqrt{س} + ٣) \, د س$

الكل

$= \int (س^{-٢} + س^{\frac{١}{٢}} + ٣) \, د س$

اكمل انت

مذكرتي

قاعدة واقفه

(١) $\int (أس+ب)^{ن} \, د(س) = \frac{1}{أ} \frac{(أس+ب)^{ن+1}}{ن+1} + ث$

نقسم على معامل س ونزود الاس (١) ونقسم على الاس الجديد

(٢) $\int (د(س))^{ن} \, د(س) \, د س = \frac{(د(س))^{ن+1}}{(ن+1)} + ث$

واذا كان تكامل القوس مرفوع لاس ومضروب فى مشتقة مابداخل القوس نزود على أس القوس (١) ونقسم على الاس الجديد

مثال ٣ أوجد كلاً مما يأتى

(أ) $\int (٣س+٥)^{-٩} \, د س$

الحل

$= \frac{1}{٣} \times \frac{(٣س+٥)^{-٨}}{-٨} + ث$

$= -\frac{1}{٢٤} (٣س+٥)^{-٨} + ث$

مثال ٤ (ب) $\int (س^{٤}+٣س-٢)^{٩} (٢س+٣) \, د س$

الحل

$\because \frac{د}{د س} (س^{٤}+٣س-٢) = ٢س+٣$

$\therefore \int (س^{٤}+٣س-٢)^{٩} (٢س+٣) \, د س$

$= \frac{1}{١٠} (س^{٤}+٣س-٢)^{١٠} + ث$

(ج) $\int (س+١)(س+٣)^{٧} \, د س$

الحل

$\int (س+٣-٢)(س+٣)^{٧} \, د س$

$= \int (س+٣)(س+٣)^{٧} \, د س - ٢ \int (س+٣)^{٧} \, د س$

$= \int (س+٣)^{٨} \, د س - ٢ \int (س+٣)^{٧} \, د س$

$= \frac{1}{٩} (س+٣)^{٩} - ٢ \times \frac{1}{٨} (س+٣)^{٨} + ث$

$= \frac{1}{٩} (س+٣)^{٩} - \frac{1}{٤} (س+٣)^{٨} + ث$

(د) $\int س(٤س^{٣}-٣س^{٢}+٤)^{٥} (١٢س^{٢}-٦س) \, د س$

الحل

$\because \frac{د}{د س} (٤س^{٣}-٣س^{٢}+٤) = ١٢س^{٢}-٦س$

$\therefore \int \frac{1}{٦} (٤س^{٣}-٣س^{٢}+٤)^{٥} (١٢س^{٢}-٦س) \, د س$

$= \frac{1}{٦} \times \frac{1}{٦} (٤س^{٣}-٣س^{٢}+٤)^{٦} + ث$

$= \frac{1}{٣٦} (٤س^{٣}-٣س^{٢}+٤)^{٦} + ث$

تكامل بعض الدوال المثلثية

١- $\int$ جا س $\leftarrow$ $-$ جتا س

٢- $\int$ جتا س $\leftarrow$ جا س

٣- $\int$ قا^2 س $\leftarrow$ ظا س

مثال ٥ أوجد

(أ) $\int (س - جا س)\, د س$

الحل

$\int (س - جا س)\, د س$

$= \frac{1}{2} س^2 - (-جتا س) + ث$

$= \frac{1}{2} س^2 + جتا س + ث$

(ب) $\int (٤ جتا س + \frac{1}{جتا^2 س} + ١)\, د س$

الحل

$\int (٤ جتا س + قا^2 س + ١)\, د س$

$= ٤ جا س + ظا س + س + ث$

نتائج هامة

١- $\int جا(أ س + ب)\, د س = -\frac{1}{أ} جتا(أ س + ب) + ث$

٢- $\int جتا(أ س + ب)\, د س = \frac{1}{أ} جا(أ س + ب) + ث$

٣- $\int قا^2(أ س + ب)\, د س = \frac{1}{أ} ظا(أ س + ب) + ث$

علاقات هامة

١) $جا^2 س + جتا^2 س = ١$

٢) $١ + ظا^2 س = قا^2 س$

٣) $١ + ظتا^2 س = قتا^2 س$

٤) $٢ جا س جتا س = جا ٢س$

٥) $جتا^2 س - جا^2 س = جتا ٢س$

٦) $جا^2 س = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} جتا ٢س$

٧) $جتا^2 س = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} جتا ٢س$

$١ + ظا^2 س = قا^2 س$

$ظا^2 س = قا^2 س - ١$

مثال ٦ أوجد كلاً مما يلى

(أ) $\int$ جا (٣س − ٥) دس

الحل

$= -\frac{1}{3}$ جتا (٣س − ٥) + ث

(ب) $\int$ جتا $\left(\frac{س}{٣} - ٢\right)$ دس

$\frac{1}{\frac{1}{٣}}$ جا $\left(\frac{س}{٣} - ٢\right)$ + ث

$= ٣$ جا $\left(\frac{س}{٣} - ٢\right)$ + ث

(جـ) $\int (٣ + ٤$ ظا^{٢}س) دس

الحل

$= \int ٣ + ٤ ($ قا^{٢}س $- ١)$ دس

$= \int (٣ + ٤$ قا^{٢}س $- ٤)$ دس

$= \int (٤$ قا^{٢}س $- ١)$ دس

$= ٤$ ظا س $-$ س + ث

(د) $\int \left($قا$^{٢}\frac{س}{٢} - $جا$\left(\frac{\pi}{٤} - س\right)\right)$ دس

الحل

$\frac{1}{\frac{1}{٢}}$ ظا $\frac{س}{٢} -$ (−١) $-$ (جتا $\frac{\pi}{٤} - س$) + ث

٢ ظا $\frac{س}{٢}$ $-$ جتا $\left(\frac{\pi}{٤} - س\right)$ + ث

(ل) $\int$ (جا س + جتا س)^{٢} دس

الحل

نفك التربيع

$= \int$ (جا^{٢}س + جتا^{٢}س + ٢ جا س جتا س) دس

$= \int (١ +$ جا ٢س) دس

$= س - \frac{1}{٢}$ جتا ٢س + ث

(م) $\int (١ +$ جتا س)^{٢} دس

الحل

نفك التربيع

$= \int (١ + ٢$ جتا س + جتا^{٢}س) دس

$= \int \left(١ + ٢$ جتا س $+ \frac{1}{٢} + \frac{1}{٢}$ جتا ٢س$\right)$ دس

$= \int \left(\frac{٣}{٢} + ٢$ جتا س $+ \frac{1}{٢}$ جتا ٢س$\right)$ دس

$= \frac{٣}{٢}$س + ٢ جا س + $\frac{1}{٤}$ ظا ٢س + ث

(ن) $\int (٤ -$ جا^{٢}س) دس

الحل

$= \int \left(٤ - \left(\frac{1}{٢} - \frac{1}{٢}$ جتا ٢س$\right)\right)$ دس

$= \int \left(\frac{٧}{٢} - \frac{1}{٢}$ جتا ٢س$\right)$ دس

$= \frac{٧}{٢}$س + $\frac{1}{٤}$ جا ٢س + ث

انتهى التفاضل فى سطر واحد

ثانياً حساب المثلثات

الدرس الاول :
زوايا الارتفاع والانخفاض

الدرس الثانى :
الدوال المثلثية لمجموع وفرق قياسى زاويتين

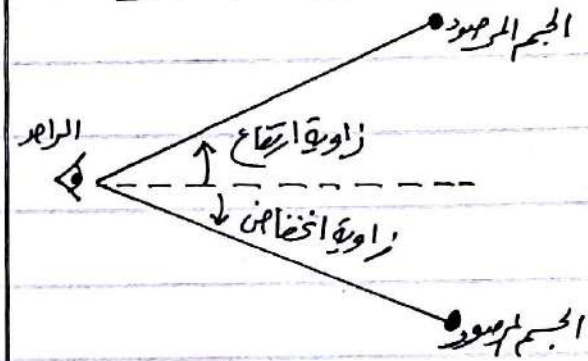
الدرس الثالث :
الدوال المثلثية لضعف قياس الزاوية

الدرس الرابع :
صيغة هيرون

مذكرتي

الدرس الأول
زوايا الارتفاع والانخفاض

هى الزاوية المحصورة بين امتداد الشعاع الأفقى للراصد والشعاع البادئ من الراصد ماراً بالجسم المرصود



كيفية حل سؤال الارتفاع أو الانخفاض

١ رسم المسألة رسم دقيقا

٢ باستخدام هندسة الشكل فى إيجاد الزوايا المجهولة

٣ غالباً فى عندك مثلثين غالباً فيهم واحد قائم ضتبدأ بالمثلث اللى فيه ضلع معلوم

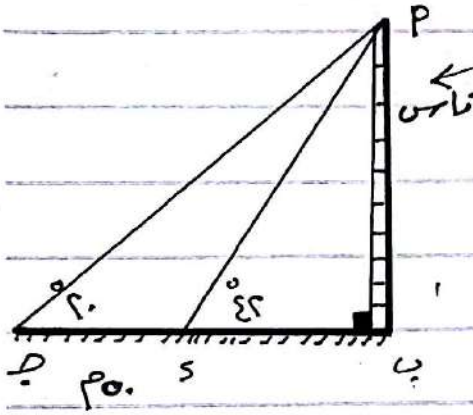
$$\frac{\text{الضلع المعلوم}}{\text{جا المقابلة}} = \frac{\text{الضلع المشترك}}{\text{جا المقابلة له}}$$

٤ ضتحل المثلث الثانى باستخدام قاعدة الجيب.

مثال ١

رصد رجل زاوية ارتفاع قمة برج فوجدانه فيساوى ٢٠° ثم سار على طريق أفقى متجهاً نحو قاعدة البرج مسافة ٥٠ متراً فوجدانه زاوية ارتفاع البرج ٤٢° ، أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر

الحل



$\overline{P ب}$ يمثل ارتفاع البرج

فى Δ P s جـ ∵ ق(P $\hat{s}$ ب) = ٤٢°

وهى زاوية خارجة لمثلث

∴ ق(s $\hat{P}$ جـ) = ٤٢° − ٢٠° = ٢٢°

$$\frac{s P}{\text{جا}٢٠} = \frac{s جـ}{\text{جا}٢٢}$$

$$s P = \frac{s جـ \times \text{جا}٢٠}{\text{جا}٢٢} = ٤٥,٦٥ \text{ م}$$

فى Δ P s ب

$$\frac{P ب}{s P} = \text{جا}٤٢$$

$$P ب = s P \times \text{جا}٤٢ = ٤٥,٦٥ \times \text{جا}٤٢$$

$$= ٣٠,٥٤ \simeq ٣١ \text{ م}$$

مذكرتي Mozkrty.com

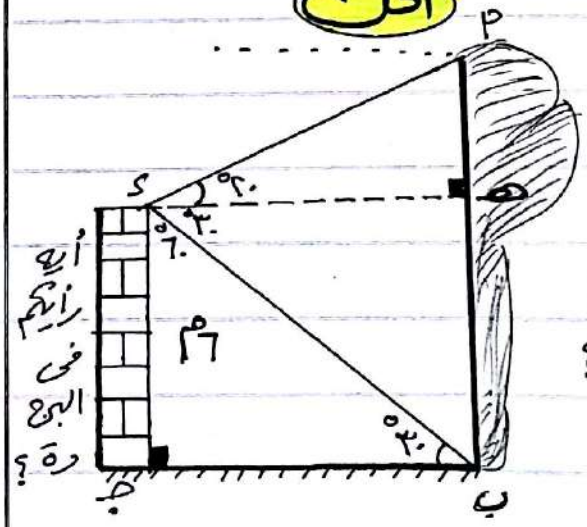
تدريب

يتحرك رجل فى مركب متجهاً عند صخرة إرتفاعها ٦٠٠ م فوجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة الصخرة فى لحظة معينة ٦٠° ثم أصبح قياسها بعد ٤ دقائق ٤٥° أحسب سرعة القارب لأقرب م/دقيقة علماً بأن السرعة = المسافة / الزمن

مثال ٢

عند قمة منزل ارتفاعه ٦ م إذا كان قياس زاوية ارتفاع قمة شجرة = ٣٠° وقياس زاوية إنخفاض قاعدة الشجرة ٦٠° ، أوجد المسافة بينه قاعدتى المنزل والشجرة علماً بأن قاعدتى المنزل والشجرة فى مستوى واحد

الحل



فى Δ ب أ د

$\frac{٦}{ظ ٣٠} = \frac{ب د}{ظ ٦٠}$

$ب د = \frac{٦ ظ ٦٠}{ظ ٣٠} = ٦ \sqrt{٣} \approx ١٠,٤$ م

وهو المسافة بينه قاعدتى المنزل والشجرة

فى Δ أ ب جـ

$ق(\hat{ب}) = ٧٠°$

$\frac{أ هـ}{ظ ٢٠} = \frac{١٠,٤}{ظ ٧٠}$

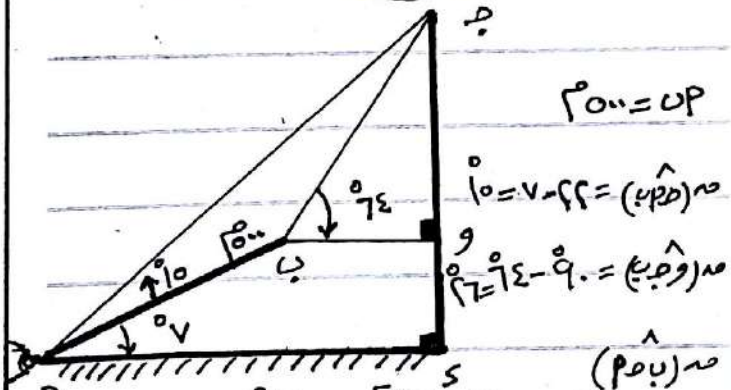
$أ هـ = \frac{١٠,٤ ظ ٢٠}{ظ ٧٠} \approx ٣,٨$ متر

∴ ارتفاع الشجرة = ٣,٨ + ٦ = ٩,٨ متر

مثال ٣

قام رجل بقياس زاوية ارتفاع قمة تل د التى تقطة على سطح الأرض فوجدها ٢٢° وعندما صعد نحو التل مسافة ٥٠٠ م على طريق يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٧° وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة التل ٦٤° أوجد ارتفاع التل لأقرب متر

الحل



$ب أ = ٥٠٠$ م

$ق(\hat{ب أ و}) = ٢٢ - ٧ = ١٥°$

$ق(\hat{و ب جـ}) = ٩٠ - ٦٤ = ٢٦°$

$ق(\hat{ب أ د}) = ١٨٠ - [٩٠ + ٢٢ + ٢٦] = ٤٢°$

$ق(\hat{ب أ د}) = ١٨٠ - [١٥ + ٤٢] = ١٢٣°$

$\frac{ب د}{ظ ١٢٣°} = \frac{٥٠٠}{ظ ٤٢°}$ ⟸

$د هـ = \frac{٥٠٠ ظ ١٢٣°}{ظ ٤٢°} = ٦٢٦,٧٩$ م

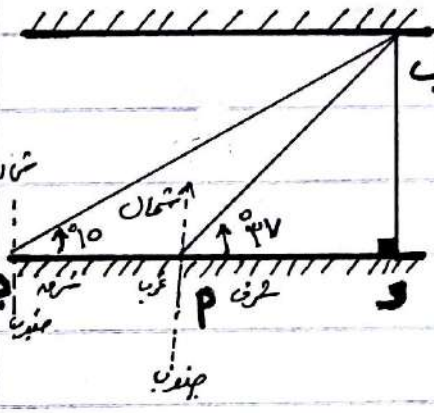
$\frac{ك د}{ظ ٢٢} = \frac{٦٢٦,٧٩}{ظ ٩٠}$ ⟸ $ك د = \frac{٦٢٦,٧ ظ ٢٢}{ظ ٩٠}$

$\approx ٢٣٤,٧ \approx ٢٣٥$ متر

مثال ٤

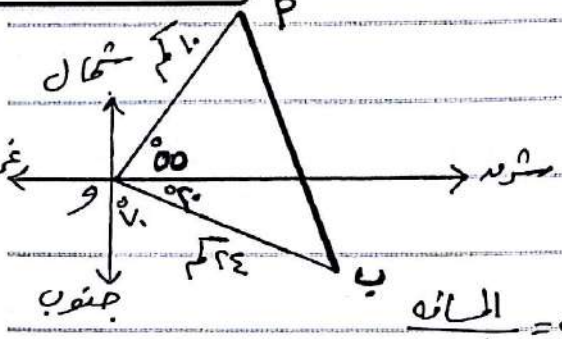
من نقطة P على شاطئ نهر رأى رجل شجرة عند ب على الضفة الأخرى للنهر فوجد أن ب في اتجاه ٣٧° شمال الشرق، ولما سار الرجل بمحاذاة الشاطئ في اتجاه الغرب مسافة ٢٠٠ م حتى وصل إلى نقطة جـ وجد أن ب في اتجاه ١٥° شمال الشرق أوجد عرض النهر لأقرب متر

الحل



لكن الحل

عرض النهر هو (ب د)



المسافة = السرعة × الزمن

و ب = ١٢ × ٢ = ٢٤ كم

و P = ٥ × ٢ = ١٠ كم

البعد بين السفينتين P ب هو نتيجة من قاعدة جيب التمام (اكمل)

مثال ٥

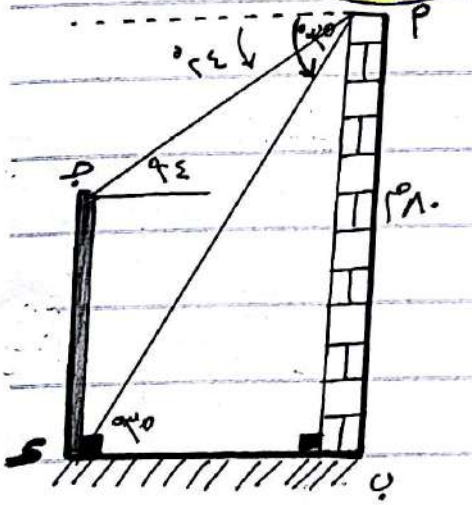
تحركت سفينة من نقطة معينة في اتجاه ٧٠° شرق الجنوب بسرعة مقدارها ١٢ كم/س وفي نفس اللحظة تحركت سفينة في اتجاه ٥٥° شمال الشرق بسرعة مقدارها ٥ كم/س، أوجد المسافة بينهما بعد ساعتين لأقرب رقمين عشريين

الحل

مثال ٦

من قمة برج ارتفاعه ٨٠ م قيست زاويتا انخفاض قمة وقاعدة صخرة فوجدتا ٢٤° ، ٣٥° على الترتيب أوجد ارتفاع الصخرة لأقرب متر علماً بأن قاعدتي الصخرة والبرج في مستوى أفقي واحد

الحل



الدرس الثاني
الدوال المثلثية لمجموع وفرق زاويتين

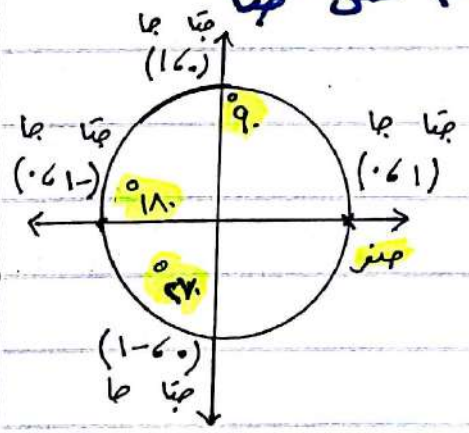
مراجعة

ملاحظات هامة
تذكر أن

١- الدوال المثلثية للزوايا الخاصة

	٣٠°	٦٠°	٤٥°
جا	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
جتا	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
ظا	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	١

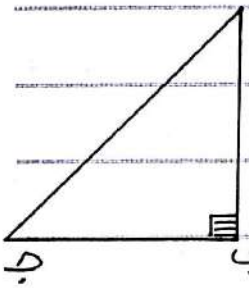
في دائرة الوحدة جا ← الإحداثي الصادي
جتا ← الإحداثي السيني
ظا ← $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\text{جا}}{\text{جتا}}$



	صفر°	١٨٠°	٩٠°	٢٧٠°
جا				
جتا				
ظا				

تعرف تكمله سد الدائرة اللي فوقه وتحفظها

في المثلث القائم



جا هـ = المقابل / الوتر

جتا هـ = المجاور / الوتر

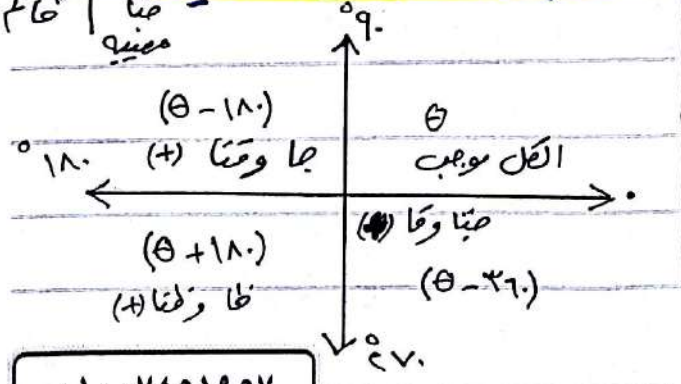
ظا هـ = المقابل / المجاور

فيثاغورث
لو عايز الوتر ربع واجمع
لو عندك الوتر وعايز ضلع ربع واطرح

المتطابقات المثلثية
١- $\text{جا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta = 1$
٢- $1 + \text{ظا}^2\theta = \text{قا}^2\theta$
٣- $1 + \text{ظتا}^2\theta = \text{قتا}^2\theta$

إذا كان P ب جـ مثلث فيه
جا (P+ب) = جا هـ
جتا (P+ب) = - جتا جـ

إشارات الدوال المثلثية



أولاً: جا (أ ± ب)

جا(أ+ب) = جاأ جتاب + جتاأ جاب

جا(أ−ب) = جاأ جتاب − جتاأ جاب

الإشارة لا تتغير في جا (أ ± ب)

ثانياً: جتا (أ ± ب)

جتا(أ+ب) = جتاأ جتاب − جاأ جاب

جتا(أ−ب) = جتاأ جتاب + جاأ جاب

لاحظ تغير نا الإشارة

ثالثاً: ظا (أ ± ب)

$$ظا(أ+ب) = \frac{ظاأ + ظاب}{1 - ظاأ\ ظاب}$$

$$ظا(أ-ب) = \frac{ظاأ - ظاب}{1 + ظاأ\ ظاب}$$

إشارة البسط عكس وإشارة المقام عكس

لاحظ (١٨٠ ± θ) تحدد الإشارة فقط

(٣٦٠ ± θ)

(٩٠ ± θ) تحدد الإشارة وتغير نا ئي

(٢٧٠ ± θ)

دي الزوايا اللي هتقابلك

① ١٠٥° = ٦٠° + ٤٥°

② ١٥° = (٦٠° − ٤٥°) أو (٤٥° − ٣٠°)

③ ٧٥° = (٣٠° + ٤٥°)

إذا اعطاك نسبه مثلثيه تبص الاشارة وتحدد الربع اللي هي فيه وترسم مثلث قائم عادي وتطلع منه النسب والبديه تحط الاشارات على حسب الربع اللي تقع في الزاويه.

مثال ١ بدون استخدام الآله أوجد:

(أ) جا ١٠٥° (ب) جا ١٥°

الحل

(أ) جا(١٠٥°) = جا(٦٠ + ٤٥)

= جا٦٠° جتا٤٥° + جتا٦٠° جا٤٥°

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(ب) جا(١٥°) = حل إنت

مثال ٢ بدون إستخدام الآلة أوجد

(أ) جتا ٧٥° (ب) جتا ١٥°

الحل

(أ) جتا (٧٥°) = جتا (٤٥° + ٣٠°)

= جتا ٤٥° جتا ٣٠° − جا ٤٥° جا ٣٠°

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$

$= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(ب) جتا (١٥°) = ... حل انت

مثال ٣ بدون إستخدام الآلة أوجد

(أ) ظا (١٠٥°) (ب) ظا ١٥°

الحل

(أ) ظا (١٠٥°) = ظا (٦٠° + ٤٥°)

$= \frac{\text{ظا }60° + \text{ظا }45°}{1 - \text{ظا }60° \text{ ظا }45°} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - (\sqrt{3} \times 1)}$

$= \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(1-\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)}$

$= \frac{3 + 2\sqrt{3} + 1}{1 - 3} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{-2} = -2 - \sqrt{3}$

(ب) ظا ١٥° = ... حل انت

مثال ٤ بدون إستخدام الآلة أوجد

(أ) جا ٧٥° جتا ١٥° + جتا ٧٥° جا ١٥°

(ب) جتا ٨٠° جتا ٢٠° + جا ٨٠° جا ٢٠°

(ج) جتا ٧٨° جتا ١٨° + جا ١٢° جا ١٨°

(د) $\frac{\text{ظا }\frac{11\pi}{12} + \text{ظا }\frac{\pi}{4}}{1 - \text{ظا }\frac{11\pi}{12} \text{ ظا }\frac{\pi}{4}}$

الحل

(أ) جا ٧٥° جتا ١٥° + جتا ٧٥° جا ١٥°

= جا (٧٥° + ١٥°) = جا ٩٠° = ١

(ب) ..... حل

(ج) جتا ٧٨° جتا ١٨° + جا ٧٨° جا ١٨°

↓

جتا ١٢° = جا (٩٠° − ١٢°) = جتا ٧٨°

= جتا (٧٨° − ١٨°) = جتا ٦٠° = $\frac{1}{2}$

(د) ..... حل

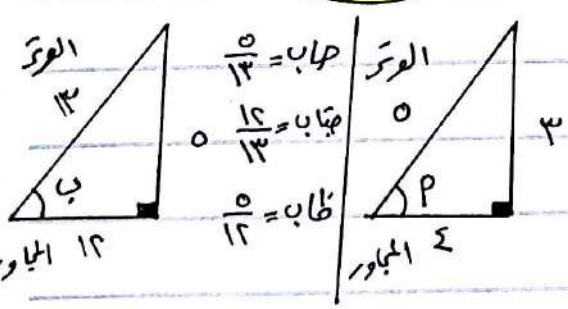
مثال ٥ إذا كان أ ، ب زاويتين حادتين

وكان جتا أ = $\frac{4}{5}$ ، جتا ب = $\frac{12}{13}$

فأوجد ① جا (أ + ب)

② قا (أ + ب) ③ ظا (أ − ب)

الحل



مدكرلي
Mdkrly.com

[١] $\text{جا}(\text{أ}+\text{ب}) = \text{جا أ جتا ب} + \text{جتا أ جا ب}$

$= \frac{٣}{٥} \times \frac{١٢}{١٣} + \frac{٤}{٥} \times \frac{٥}{١٣} = \frac{٥٦}{٦٥}$

[٢] $\text{جا}(\text{أ}-\text{ب})$ ← معكوب جتا $(\text{أ}-\text{ب})$

$\text{جتا}(\text{أ}-\text{ب}) = \text{جتا أ جتا ب} + \text{جا أ جا ب}$

$= \frac{٤}{٥} \times \frac{١٢}{١٣} + \frac{٣}{٥} \times \frac{٥}{١٣} = \frac{٦٣}{٦٥}$

$\therefore \text{ظا}(\text{أ}-\text{ب}) = \frac{٥٦}{٦٣}$

[٣] $\text{ظا}(\text{أ}-\text{ب}) =$ الكل

مثال ٧

أ ب ج ∆ قياسات زواياه مثلث اثبت أن $\text{ق}(\hat{\text{أ}}) = ٤٥°$

إذا كان $\text{ظا ب} = \frac{٤}{٣}$ ، $\text{ظا ج} = ٧$

الحل

$\because \text{أ} + \text{ب} + \text{ج} = ١٨٠$

$\therefore \text{أ} = ١٨٠ - (\text{ب}+\text{ج})$

$\text{ظا أ} = \text{ظا}[١٨٠ - (\text{ب}+\text{ج})] = -\text{ظا}(\text{ب}+\text{ج})$

الكل

مثال ٦

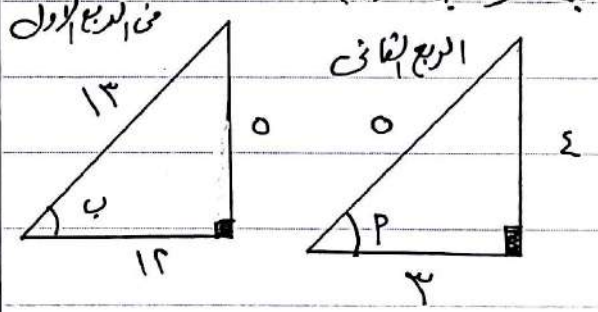
أ ب ج مثلث فيه $\text{جتا أ} = \frac{٣}{٥}$

$\text{جا ب} = \frac{٥}{١٣}$ أوجد جا ج

الحل

∵ جتا أ (−) ← يعنى زاوية منفرجة

تقع فى الربع الثانى حتكون جتا ، ظا سالبه و جا (+)



$\text{جا أ} = \frac{٤}{٥}$ $\quad \text{جا ب} = \frac{٥}{١٣}$

$\text{جتا أ} = -\frac{٣}{٥}$ $\quad \text{جتا ب} = \frac{١٢}{١٣}$

$\text{ظا أ} = -\frac{٤}{٣}$ $\quad \text{ظا ب} = \frac{٥}{١٢}$

$\text{جا ج} = \text{جا}(١٨٠ - (\text{أ}+\text{ب})) = \text{جا}(\text{أ}+\text{ب})$

$= \text{جا أ جتا ب} + \text{جتا أ جا ب}$

$= \frac{٤}{٥} \times \frac{١٢}{١٣} + (-\frac{٣}{٥}) \times \frac{٥}{١٣}$

$= \frac{٤٨-١٥}{٦٥} = \frac{٣٣}{٦٥}$

مثال ٨

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية $°٠ \leq \text{س} < °٣٦٠$

[أ] $\text{جا س جتا}٢٠° - \text{جتا س جا}٢٠° = \frac{١}{٢}$

[ب] $\text{جتا}٢\text{س جتا س} + \text{جا}٢\text{س جا س} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

الحل

[أ] $\text{جا}(\text{س} - ٢٠°) = \frac{١}{٢}$ ← جا موجبة فى الأول أو الثانى

$\text{جا}^{-١}\frac{١}{٢} = ٣٠°$

إما $\text{س} - ٢٠° = ٣٠°$	$\text{س} - ٢٠° = ١٨٠° - ٣٠°$
$\text{س} = ٣٠° + ٢٠°$	$\text{س} = ١٨٠° - ٣٠° + ٢٠°$
$\text{س} = ٥٠°$	$\text{س} = ١٧٠°$

$\text{م}(\text{ح}) = \{٥٠°, ١٧٠°\}$

[ب] $\text{جتا}(٢\text{س} - \text{س}) = \text{جتا س} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

جتا (موجبة) $\theta = ٣٠°$

الأول	الرابع
$\text{س} = ٣٠°$	$\text{س} = ٣٦٠° - ٣٠°$
	$= ٣٣٠°$

$\text{م}(\text{ح}) = \{٣٠°, ٣٣٠°\}$

مذكرتي Mothrty.com

الدرس الثالث
الدوال المثلثية لضعف الزاوية

1) $\text{حا}2\theta = 2\,\text{حا}\theta\,\text{جتا}\theta$

2) $\text{جتا}2\theta = \text{جتا}^2\theta - \text{حا}^2\theta$
$= 2\,\text{جتا}^2\theta - 1$
$= 1 - 2\,\text{حا}^2\theta$

3) $\text{ظا}2\theta = \dfrac{2\,\text{ظا}\theta}{1 - \text{ظا}^2\theta}$

ملحوظة: زاوية الطرف الايمن ضعف زاوية الطرف الايسر

1) $\text{حا}\theta = 2\,\text{حا}\dfrac{\theta}{2}\,\text{جتا}\dfrac{\theta}{2}$

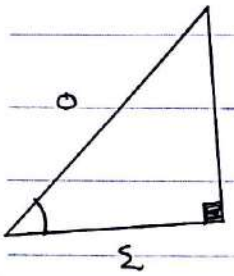
2) $\text{جتا}\theta = \text{جتا}^2\dfrac{\theta}{2} - \text{حا}^2\dfrac{\theta}{2}$
$= 2\,\text{جتا}^2\dfrac{\theta}{2} - 1$
$= 1 - 2\,\text{حا}^2\dfrac{\theta}{2}$

3) $\text{ظا}\theta = \dfrac{2\,\text{ظا}\frac{\theta}{2}}{1 - \text{ظا}^2\frac{\theta}{2}}$

مثال ١ إذا كان $\text{جتا}\theta = \frac{4}{5}$ حيث $0° < \theta < 90°$ فأوجد قيمة
$\text{حا}2\theta$ ، $\text{جتا}2\theta$ ، $\text{ظا}2\theta$

الحل

$\because 0° < \theta < 90°$ $\therefore \theta$ فى الربع الاول



المقابل $= \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$

$\text{حا}\theta = \frac{3}{5}$

$\text{جتا}\theta = \frac{4}{5}$

$\text{ظا}\theta = \frac{3}{4}$

$\text{حا}2\theta =$

$\text{جتا}2\theta =$

$\text{ظا}2\theta =$

مثال ٢ بدون استخدام الآلة أوجد

(أ) $2\,\text{جتا}^2 75° - 1$

(ب) $\text{جتا}^2 67{,}5° - \text{حا}^2 67{,}5°$

(جـ) $2\,\text{حا}\,22°\,30'\,\text{جتا}\,22°\,30'$

(د) $\dfrac{2\,\text{ظا}\,22°\,30'}{1 - \text{ظا}^2\,22°\,30'}$

(هـ) $\dfrac{2\,\text{جتا}^2 165° - 1}{\text{حا}75°\,\text{جتا}75°}$

الحل

(أ) $2جتا^2 75° - 1$ ← ضعف الزاوية

$= جتا 2 \times 75°$

$= جتا 150° = جتا(180° - 30°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(ب) $جتا^2 67,5° - جا^2 67,5°$

$= جتا(2 \times 67,5°) = جتا 135° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

(ج) $2جا 22°30' جتا 22°30'$

$= جا(2 \times 22°30') = جا 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(د) $\frac{2ظا 22°30'}{1 - ظا^2 22°30'}$ (حل انت)

(هـ) $\frac{2جتا^2 165° - 1}{جا 75° جتا 75°}$

$2جتا^2 165° - 1 = جتا(2 \times 165°) = جتا 330°$

$جا 75° جتا 75° = \frac{1}{2} جا 2 \times 75° = \frac{1}{2} جا 150°$

$= \frac{جتا 330°}{\frac{1}{2} جا 150°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = 2\sqrt{3}$

أنا سايب الحته دى ناهيه
محدش يشخبط فيها

الدوال المثلثية لنصف الزاوية

① $جا \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - جتا \theta}{2}}$

② $جتا \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + جتا \theta}{2}}$

③ $ظا \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - جتا \theta}{1 + جتا \theta}}$

ويتم تحديد الاشارة طبقاً للربع الذى تقع فيه الزاوية $\frac{\theta}{2}$

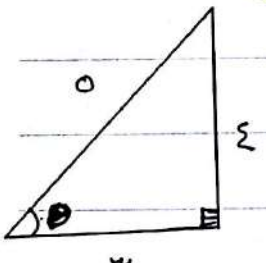
مثال ٣ بدون استخدام الآلة أوجد

(أ) $جتا \frac{\theta}{2}$ إذا كان $جا \theta = -\frac{4}{5}$

$180° < \theta < 270°$

(ب) $جتا 22°30'$ (جـ) $ظا 15°$

الحل



θ فى الربع الثالث

$جا$ ، $ظا$ $جتا$ (-)

$جا \theta = -\frac{4}{5}$

$جتا \theta = -\frac{3}{5}$

$ظا \theta = \frac{4}{3}$

$جتا \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + جتا \theta}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 + (-\frac{3}{5})}{2}}$

$\text{جتا}\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{5}} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

بالقسمة ÷ 2 : $180° < \theta < 270°$

$90° < \frac{\theta}{2} < 135°$ في الربع الثاني

تكون جتا سالب

$\text{جتا}\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

(ب) $\text{جتا}\,22°30' = \text{جتا}\frac{45°}{2}$

وتأخذ القيمة الموجبة لأن الزاوية في الربع الأول

$\text{جتا}\,22°30' = \text{جتا}\frac{45°}{2} = \sqrt{\frac{1+\text{جتا}45°}{2}}$

$= \sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}$

(جـ) $\text{ظا}\,15° = \text{ظا}\frac{30°}{2}$ نأخذ القيمة الموجبة لأن الزاوية في الربع الأول

$\text{ظا}\,15° = \text{ظا}\frac{30°}{2} = \sqrt{\frac{1-\text{جتا}30°}{1+\text{جتا}30°}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}}$

$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \times \frac{(2-\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})}} = 2-\sqrt{3}$

تدريب اثبت أن $\text{جتا}2س = \frac{1-\text{ظا}^2س}{1+\text{ظا}^2س}$

ومن ذلك أوجد قيمة $\frac{1-\text{ظا}^2 15°}{1+\text{ظا}^2 15°}$

مثال ٤ $\triangle أ ب جـ$ فيه $أ ب = 4$ سم، $ب جـ = 5$ سم، $جـ أ = 6$ سم

فأثبت بدون الآلة أن $ق(\hat{ب}) = 2\,ق(\hat{أ})$

الحل

$\text{جتا}\,ب = \frac{أ ب^2 + ب جـ^2 - جـ أ^2}{2 أ ب \times ب جـ} = \frac{16+25-36}{2\times4\times5} = \frac{1}{8}$

$\text{جتا}\,أ = \frac{ب جـ^2 + جـ أ^2 - أ ب^2}{2 ب جـ \times جـ أ} = \frac{25+36-16}{2\times5\times6} = \frac{3}{4}$

$\text{جتا}2أ = 2\,\text{جتا}^2 أ - 1 = 2(\frac{3}{4})^2 - 1 = \frac{1}{8}$

$\therefore \text{جتا}2أ = \text{جتا}ب \quad \therefore ق(\hat{ب}) = 2\,ق(\hat{أ})$

مثال ٥ اثبت أن $\frac{1-\text{جتا}ه+\text{جا}ه}{1+\text{جتا}ه+\text{جا}ه} = \text{ظا}\frac{ه}{2}$

الحل

الطرف الأيمن $= \frac{1-\text{جتا}ه+\text{جا}ه}{1+\text{جتا}ه+\text{جا}ه}$

$= \frac{2\,\text{جا}^2\frac{ه}{2} + 2\,\text{جا}\frac{ه}{2}\,\text{جتا}\frac{ه}{2}}{2\,\text{جتا}^2\frac{ه}{2} + 2\,\text{جا}\frac{ه}{2}\,\text{جتا}\frac{ه}{2}}$

$= \frac{2\,\text{جا}\frac{ه}{2}(\text{جا}\frac{ه}{2} + \text{جتا}\frac{ه}{2})}{2\,\text{جتا}\frac{ه}{2}(\text{جتا}\frac{ه}{2} + \text{جا}\frac{ه}{2})}$

$= \frac{\text{جا}\frac{ه}{2}}{\text{جتا}\frac{ه}{2}} = \text{ظا}\frac{ه}{2} =$ الأيسر

تذكر

الحل العام للمعادلات المثلثية

١ $\text{ظا}\theta = \text{ظا}\alpha$

$\theta = n\pi + \alpha$

٢ $\text{جتا}\theta = \text{جتا}\alpha$

$\theta = 2n\pi \pm \alpha$

٣ $\text{جا}\theta = \text{جا}\alpha$

$\theta = n\pi + (-1)^n \alpha$

مثال ٦

أوجد قيم س التى تحقق كلاً من المعادلات الاتية حيث $س \in [0, 2\pi[$

(١) $\text{جا}^2 س - \text{جتا} س = 0$

$1 - \text{جتا}^2 س - \text{جتا} س = 0$

$\text{جتا}^2 س + \text{جتا} س - 1 = 0$

$(\text{جتا} س + 2)(\text{جتا} س - 1) = 0$

إما $\text{جتا} س = -2$ مرفوضة

أو $\text{جتا} س = 1$

$س = 0$

$\therefore$ قيم س هى $\{0\}$

(٢) $\text{جا} 2س + \text{جا} س = 0$

$\text{جا} 2س + \text{جا} س = 0$

$2\text{جا} س \text{جتا} س + \text{جا} س = 0$

$\text{جا} س (2\text{جتا} س + 1) = 0$

إما $\text{جا} س = 0$

$س = 0, \pi$

أو $2\text{جتا} س + 1 = 0$

$\text{جتا} س = -\frac{1}{2}$

$س = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

$\therefore$ قيم س هى $\{0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}\}$

(٣) $\text{ظا}^2 س + 2\text{ظا} س = 1$

$\text{ظا}^2 س + 2\text{ظا} س - 1 = 0$

$(\text{ظا} س + 1)^2 - 2 = 0$

$(\text{ظا} س + 1)^2 = 2$

$\text{ظا} س + 1 = \pm\sqrt{2}$

$\text{ظا} س = -1 \pm \sqrt{2}$

$\text{ظا} س = -1 + \sqrt{2}$ (موجبة)

أصغر قيمة لـ س موجبة تحقق المعادلة هى $س = \frac{\pi}{8}$

الحل العام $2س = n\pi + \frac{\pi}{4}$ (÷ 2)

$س = \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$

عند $n = 0$ $\therefore س = \frac{\pi}{8}$

$n = 1$ $س = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{5\pi}{8}$

$n = 2$ $س = \pi + \frac{\pi}{8} = \frac{9\pi}{8}$

$n = 3$ $س = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{13\pi}{8}$

$\therefore$ قيم س هى $\{\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}\}$

مذكرتي Mozkrty.com

الدرس الرابع
صيغة هيرون

تذكر أن

١) مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ طول القاعدة × الارتفاع

٢) مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب أى ضلعين × جا المحصورة

مساحة المثلث بصيغة هيرون

$$= \sqrt{ع(ع-أ)(ع-ب)(ع-ج)}$$

حيث ع = نصف المحيط

يعنى $\frac{1}{2}$ أ + ب + ج = ٢ع

نتيجة = مساحة المثلث / نصف محيط المثلث

متباينة المثلث

مجموع أطوال ضلعين فى المثلث أكبر من طول الضلع الثالث

أى ضلع < نصف المحيط (ع)

مثال ١

أ ب ج مثلث فيه أ = ٩ سم

ب = ٤٠ سم ، ج = ٤١ سم

أوجد مساحة سطحه

الحل

٢ع = ٩ + ٤٠ + ٤١ = ٩٠

ع = $\frac{٩٠}{٢}$ = ٤٥

م∆ = $\sqrt{ع(ع-أ)(ع-ب)(ع-ج)}$

= $\sqrt{٤٥(٤٥-٩)(٤٥-٤٠)(٤٥-٤١)}$

= $\sqrt{٤٥ \times ٣٦ \times ٥ \times ٤}$ = ١٨٠ سم٢

مثال ٢

أ ب ج ∆ فيه أ = ٥ سم

ب = ١٢ سم ، ج = ١٣ سم

أوجد مساحة سطحه

الحل حل انت

مثال ٣

س = ٥ سم ، ص = ٦ سم

ع = ١٣ سم

اثبت مساقة

الحل

س + ص = ٥ + ٦ = ١١ < ع

∴ الأطوال لا تصلح أن تكون أضلاع مثلث

يعنى مينفعش يا حماده

مذكرتي Mothrty.com

مثال ٤ أوجد نصف قطر الدائرة التى تمس أضلاع Δ أ ب جـ الذى فيه أ ب = ٧ سم ، ب جـ = ٩ سم ، جـ أ = ١٢ سم

الحل

$$\text{ح} = \frac{٧ + ٩ + ١٢}{٢} = ٢٨$$

$$\text{ح} = \frac{\text{ط}}{٢} = ١٤ \text{ سم}$$

$$\text{مساحة } \Delta = \sqrt{\text{ح}(\text{ح}-\text{أ ب})(\text{ح}-\text{ب جـ})(\text{ح}-\text{جـ أ})}$$

$$= \sqrt{١٤(١٤-٧)(١٤-٩)(١٤-١٢)}$$

$$= \sqrt{١٤ \times ٧ \times ٥ \times ٢} = \sqrt{١٤٠} \text{ سم}^٢$$

$$\text{نصف} = \frac{\text{المساحة}}{\text{نصف المحيط}} = \frac{\Delta}{\text{ح}} = \frac{\sqrt{١٤٠}}{١٤}$$

$$= \sqrt{١٠} \text{ سم}$$

مثال ٦ أوجد مساحة Δ أ ب جـ الذى فيه ح - أ = ٣ سم ، ح - ب = ٥ سم ، ح - جـ = ٩ سم

الحل

بالجمع

$$\text{ح} - \text{أ} + \text{ح} - \text{ب} + \text{ح} - \text{جـ} = ٣ + ٥ + ٩$$

$$٣\text{ح} - [\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ}] = ١٧$$

$$٣\text{ح} - ٢\text{ح} = ١٧$$

$$\text{ح} = ١٧$$

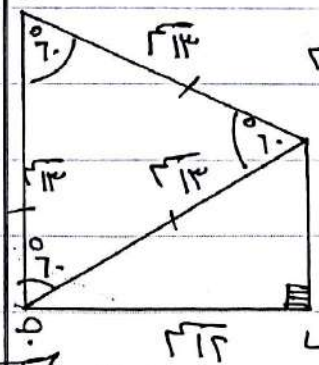
$$\therefore \text{مساحة } \Delta = \sqrt{\text{ح}(\text{ح}-\text{أ})(\text{ح}-\text{ب})(\text{ح}-\text{جـ})}$$

$$= \sqrt{١٧ \times ٣ \times ٥ \times ٩}$$

$$= ٣\sqrt{٢٠٠} \text{ سم}^٢$$

مثال ٥ أوجد مساحة الشكل الرباعى أ ب جـ د الذى فيه ق(∠ب) = ٩٠°، أ ب = ٥ سم ، ب جـ = ١٢ سم ، أ د = جـ د = ١٣ سم

الحل



من فيثاغورث

$$\text{أ جـ} = \sqrt{٥^٢ + ١٢^٢} = ١٣$$

مساحة الشكل الرباعى

= مساحة Δ أ ب جـ + Δ أ جـ د

$$= \frac{١}{٢} \times ٥ \times ١٢ \times \text{جا}٩٠° + \frac{١}{٢} \times ١٣ \times ١٣ \times \text{جا}٦٠° = ١٨٠ \text{ و } ١٠٣ \text{ سم}^٢$$

انتهى المنهج
مع أطيب وأرق تمنياتى
القلبية
خالص دعواتى لكم
لطلابى الاعزاء كم أنى حزين لأنى
لا أراكم بعد هذا العام لكم منى
كل التحية والتقدير والحب
واللى عليه ملوسين درس يدفعها
ولا أجبن الكشف عندكم متعودش من ملوسين

م / محمد أدهم

مذكرتى Mothkrty.com
Scanned by CamScanner