التباديل والتوافيق

تباديل

توافيق

التباديل

عدد تراتيب n من العناصر ماخوذة r عنصر منها

$$nPr$$

هل الترتيب مهم؟

نعم

خطي

المضروب عدد تراتيب N من العناصر ماخوذة جميعها

بدون تكرار

$$N!$$

بتكرار

$$\frac{n!}{r1!.r2!.....}$$

دائري

بدون نقطة مرجع

$$(n-1)!$$

بنقطة مرجع

خطي

$$n!$$

لا

توافيق

$$nCr$$

مثال: بكم طريقة يمكن اختيار 3 موظفين من بين 5 لحضور مؤتمر؟

توافيق $5C3=10$

مذكرتي
Mozkrty.com

احتمالات الحوادث المتنافية

الحوادث المتنافية

عند ايجاد احتمال وقوع حادثة او وقوع حادثة اخرى،يجب ان تعرف العلاقة بين الحادثتين. فاذا لم يكن وقوع الحادثتين ممكنا في الوقت نفسه يقال انهم متنافيتان،لايوجد نواتج مشتركة بينهما

احتمال حادثتين غير متنافيتين

اذا كان الحادثتان 2و1 غير متنافيتين فاحتمال وقوع 1او2 يساوي مجموع احتماليهما مطروحا منه احتمال وقوع 2و1 معا

الحادثتانAوBغير متنافيتين فإن

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$$

احتمال حادثتين متنافيتان

التعبير اللفظي: اذا كان الحادثتان 1و2 متنافيتين فاحتمال وقوع 1او2 يساوي مجموع احتمال كل منهما

بالرموز الحادثتانAوB متنافيتين فإن:

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)$$

مذكرتي
Mozkrty.com

الاحتمال الهندسي

عند تحديد الاحتمال الهندسي لهدف ما نفترض الآتي:

1-وقوع الهدف من منطقة محدده

2-ان احتمال وقوع الهدف في اي مكان من المنطقة متساوي

يمكن ايضا استعمال قياسات الزاوية لإيجاد الاحتمال الهندسي

الاحتمال والاطوال

التعبير اللفظي: اذا احتوت القطعة المستقيمة 1 قطعه مستقيمه اخرى 2 واختيرت نقطه تقع على النقطه 1 عشوائيًا فإن احتمال ان تقع النقطه على القطعه 2 يساوي : طول القطعة المستقيمة2 على طول القطعة المستقيمة1

الاحتمال الهندسي

هو احتمال استقرار مؤشر القرص على أحد الالوان يعتمد على ذلك مساحه اللون ، ويسمى الاحتمال الذي يتضمن قياسات هندسية مثل الطول أو المساحه احتمال هندسيًا .

الاحتمال والمساحة

التعبير اللفظي : اذا احتوت المنطقه 1 منطقه آخرى2 واختيرت النقطه 3 من المنطقه 1 عشوائيًا ، فاحتمال ان تقع النقطه 3 يساوي : مساحة المنطقة 2 على مساحة المنطقة 1

مذكرتي
Mozkrty.com

الحوادث المستقلة والغير مستقلة

حادثتين مستقلتين

إذا كان احتمال حدوث A لا يؤثر في احتمال حدوث B

احتمال وقوع حادثتين مستقلتين معا يساوي حاصل ضرب احتمالي الحادثتين

$$P(A \cup B)=P(A)\cdot P(B)$$

حادثتين غير مستقلتين

اذا كان احتمال حدوث A يغير بطريقة ما احتمال حدوث B

احتمال وقوع حادثتين غير مستقلتين معا يساوي حاصل ضرب احتمال وقوع الحادثة الاولى في احتمال وقوع الحادثة الثانية بعد وقوع الاولى فعلا

$$P(A \cap B)= P(A)\cdot P(B|A)$$

الاحتمال المشروط

تستعمل الاحتمال المشروط لإيجاد احتمال وقوع حادثتين غير مستقلتين

ويقرأ احتمال الشرط هكذا $P(B|A)$ ، احتمال وقوع الحادثة B بشرط وقوع الحادثة A اولا

$$P(B|A)=P(A \cap B) \div P(A)$$

مذكرتي
Mozkrty.com

3-2 الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق
Probability with Permutations and Combinations

مفهوم أساسي — المضروب

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: يُكتب **مضروب** العدد الصحيح الموجب n على الصورة $n!$، ويساوي حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة التي هي أصغر من أو تساوي n .

بالرموز: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

وقد اتفق على اعتبار أن $0! = 1$،

تمارين إضافية
7 و 11 و 22

لماذا؟ وقف يوسف وعليٌّ وفراس وفهد لالتقاط صورة جماعية لهم. وهناك 4 خيارات لمن يقف في أقصى اليمين ، و 3 خيارات لمن يقف في المكان الثاني، وخياران للمكان الثالث، وخيار واحد للمكان الأخير.

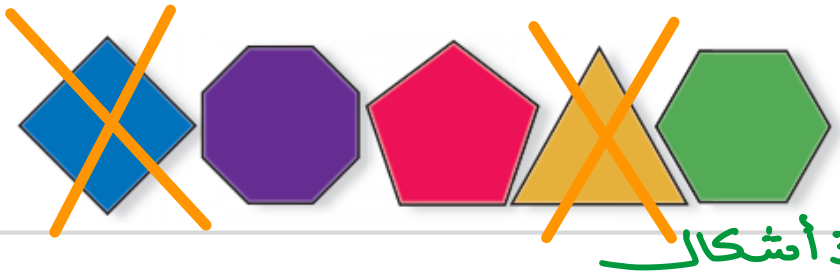
تحقق من فهمك

1) **تصوير:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟". ما احتمال أن يُختار علي ليقف في أقصى يسار الصورة، وأن يقف فراس في أقصى يمينها؟

ا/ فضاء العينة = $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

ا/ الاحتمال = $\frac{2!}{4!} = \frac{\cancel{2 \times 1}}{4 \times 3 \times \cancel{2 \times 1}} = \frac{1}{12}$ ← (تثبتنا علي وفراس)

1) **هندسة:** إذا طُلب إليك ترتيب المضلعات المبيّنة أدناه في صفٍّ من اليمين إلى اليسار، فما احتمال أن يكون المثلَّث هو الأول والمربع هو الثاني؟



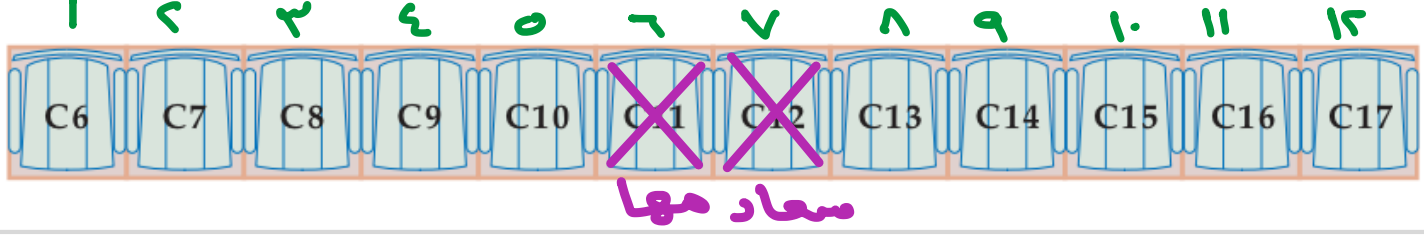
ا/ فضاء العينة = $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

ترتيب 3 أشكال

ا/ الاحتمال = $\frac{3!}{5!} = \frac{\cancel{3 \times 2 \times 1}}{5 \times 4 \times \cancel{3 \times 2 \times 1}} = \frac{1}{20}$

---

6) **محاضرات:** ذهبت مها وسعاد لحضور محاضرة علمية. إذا اختارت كلٌّ منهما مقعدًا في الصف المبين أدناه عشوائيًّا، فما احتمال أن تختار مها المقعد C11، وسعاد المقعد C12؟



ا/ فضاء العينة = $12! = 12 \times 11 \times 10 \times 9 \ldots \times 3 \times 2 \times 1$

ا/ الاحتمال = $\frac{10!}{12!} = \frac{\cancel{10 \times 9 \times 8 \ldots \times 3 \times 2 \times 1}}{12 \times 11 \times \cancel{10 \times 9 \ldots \times 3 \times 2 \times 1}} = \frac{1}{132}$

مذكرتي Mozkrty.com

مفهوم أساسي — التباديل

أضف إلى مطويتك

بالرموز: يرمز إلى عدد **تباديل** n من العناصر المختلفة مأخوذة r في كل مرة بالرمز ${}_nP_r$ حيث

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: عدد تباديل 5 عناصر مأخوذة 2 في كل مرة يساوي:

$${}_5P_2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 20$$

تحقق من فهمك

2) **بطاقات جامعية:** تستعمل الأرقام 9–1 دون تكرار؛ لعمل بطاقات للطلاب مكونة من 8 منازل.

$n=9$
$r=8$

A) ما عدد البطاقات الجامعية الممكنة؟

$${}_nP_r = {}_9P_8 = 9 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2 = 362880$$

B) إذا اختيرت بطاقة جامعية عشوائيًّا، فما احتمال أن تحمل أحد الرقمين 42135976, 67953124؟

$$\text{الاحتمال} = \frac{2}{{}_9P_8} = \frac{2}{362880}$$

---

2) **معرض علمي:** تعرض جماعة النادي العلمي البالغ عدد أفرادها 40 طالبًا في مدرسة ثانوية تجارب علمية، إذا اختير ثلاثة طلاب من الجماعة عشوائيًّا. فما احتمال أن يتم اختيار عبد المجيد للإشراف على تجارب الفيزياء، وزيد للإشراف على تجارب الكيمياء، ومحمود للإشراف على تجارب الأحياء؟

١/ فضاء العينة $= {}_{40}P_3$

٢/ الاحتمال $= \frac{1}{{}_{40}P_3} = \frac{1}{40 \times 39 \times 38} =$

---

8) **مجموعات:** تمّ اختيار شخصين عشوائيًّا من مجموعة من عشرة أشخاص. ما احتمال اختيار طارق أولًا ثم سليم ثانيًا؟

$n=10$ $r=2$

١/ فضاء العينة $= {}_{10}P_2 = 10 \times 9 = 90$

٢/ الاحتمال $= \frac{1}{{}_{10}P_2} = \frac{1}{10 \times 9} = \frac{1}{90}$

مذكرتي Mozkrty.com

أضف إلى مطويتك

مفهوم أساسي

التباديل مع التكرار

عدد التباديل المختلفة لعناصر عددها n عندما يتكرر عنصر منها r_1 من المرات وآخر r_2 من المرات وهكذا . . . ، فإنه يساوي:

$$\frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \ldots \cdot r_k!}$$

الأرقام مكررة

مثل رقم جوال 0555333131

تحقق من فهمك

3) **أعداد:** تم تكوين عدد مكون من 6 أرقام عشوائيًّا باستعمال الأرقام 3, 5, 2, 1, 5, 1، ما احتمال أن يكون أول رقم في العدد هو 5 وآخر رقم هو 5 أيضًا؟

$n=6 \quad r_1=2 \quad r_2=2$

١) فضاء العينة $= \frac{6!}{2! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1)} = 180$

٢) بعد تثبيت الرقم 5 أول رقم وآخر رقم يتم تكوين العدد مكون من 4 أرقام (1, 2, 3, 1)

الحادثة $= \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 12$

الاحتمال $= \frac{6 \div 12}{6 \div 180} = \frac{2 \div 2}{2 \div 30} = \frac{1}{15}$

3) **أعداد:** يتكون عدد من الأرقام 1, 5, 6, 6, 3, 3, 3. ما احتمال أن يكون هذا العدد 5663133؟

$n=7 \quad r_1=2 \quad r_2=3$

١) فضاء العينة $= \frac{7!}{2!\,3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(2 \cdot 1)(3 \cdot 2 \cdot 1)} = 420$

٢) الاحتمال $= \frac{1}{420}$

10) **رموز بريدية:** ما احتمال أن يكون الرمز البريدي 97275 إذا تم تكوينه عشوائيًّا من الأرقام 2, 7, 5, 9, 7؟

$n=9 \quad r_1=2$

١) فضاء العينة $= \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 120$

٢) الاحتمال $= \frac{1}{120}$

22) **إجابة قصيرة:** إذا اخترت تبديلًا للأحرف المبينة أدناه عشوائيًّا، فما احتمال أن تتكون كلمة "فسيفساء"؟

$n=7$

ف	ء	س	ف	ي	س	ا

١) فضاء العينة $= \frac{7!}{(2!)(2!)}$

٢) الاحتمال $= \frac{1}{\frac{7!}{2! \cdot 2!}} = \frac{(2!)(2!)}{7!}$

مذكرتي Mozkrty.com

أضف إلى مطويتك

مفهوم أساسي

التباديل الدائرية

عدد التباديل المختلفة لـ n من العناصر مرتبة على دائرة يساوي:

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

تبديل دائري.

نقطة مرجعية ثابتة

تبديل خطي

تحقق من فهمك

(4A) بطاقات: إذا رتبت 5 بطاقات مُسجل عليها الأسماء: (حسن، محمد، أحمد، سالم، سعود) على منضدة دائرية عشوائيًّا، فما احتمال ظهورها كما في الشكل المجاور؟

لاتوجد نقطة مرجعية تباديل دائري

١/ عدد التباديل الدائرية = $\frac{5!}{5} = (5-1)! = 4! = 4\times3\times2\times1 = 24$

٢/ الاحتمال = $\frac{1}{24}$

(4B) كرة قدم: تجمَّع فريق كرة قدم مكوَّن من 11 لاعبًا على شكل حلقة يتشاورون قبل بداية المباراة، إذا وقف حكم المباراة تمامًا خلف أحدهم، فما احتمال وقوف الحكم خلف حارس المرمى؟ وضِّح تبريرك.

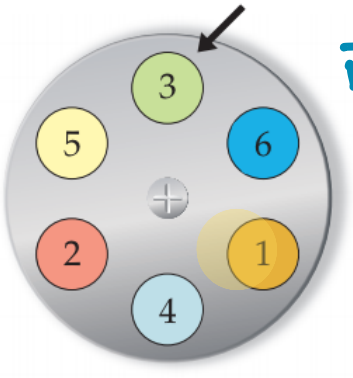
توجد نقطة مرجعية (وقوف الحكم) ← تبديل خطي

١/ فضاء العينة = $11!$

٢/ الحادثة (ترتيب اللاعبين ماعدا الحارس) = $10!$

الاحتمال = $\frac{10!}{11!} = \frac{\cancel{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}}{11\cdot\cancel{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}} = \frac{1}{11}$

(4) كيمياء: في معمل الكيمياء طَلب إليك اختبار ست عينات رُتِّبت عشوائيًّا على منضدة دائرية.



الاحتمال = $\frac{1}{120}$

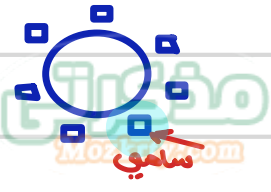
a) ما احتمال ظهور الترتيب المبين في الشكل المجاور؟ لاتوجد نقطة مرجعية

الاحتمال = $\frac{6!}{6} = (6-1)! = 5! = 5\times4\times3\times2\times1 = 120$

b) ما احتمال أن تكون العينة 2 في المكان المشار إليه بسهم على الرسم؟ العينة 2 نقطة مرجعية

الاحتمال = $\frac{\text{ترتيب 5 عينات}}{\text{ترتيب 6 عينات}} = \frac{5!}{6!} = \frac{1}{6}$

(11) مجموعات: يرتب سامي المقاعد على صورة دوائر للعمل في مجموعات متعاونة. إذا كان في دائرة سامي 7 مقاعد، فما احتمال أن يكون مقعد سامي هو الأقرب إلى الباب؟



الاحتمال = $\frac{\text{ترتيب المقاعد من غير سامي}}{\text{ترتيب 7 مقاعد}} = \frac{6!}{7!} = \frac{1}{7}$

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

التوافيق

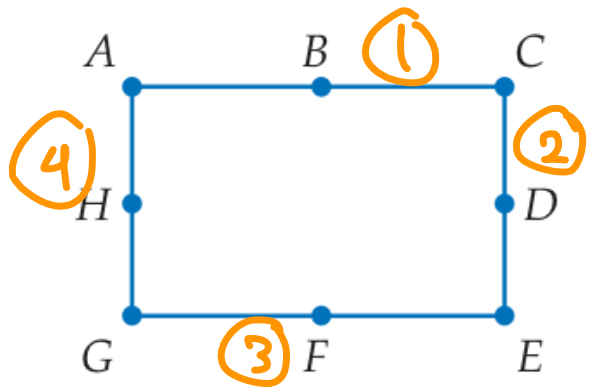
بالرموز: يرمز إلى عدد توافيق n من العناصر المختلفة مأخوذة r في كل مرة بالرمز ${}_nC_r$، حيث ${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}$$

مثال: عدد توافيق 8 عناصر مأخوذة 3 في كل مرة يساوي:

$${}_8C_3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5!}}{\cancel{6} \cdot \cancel{5!}} = 56$$

تحقق من فهمك



5) **هندسة:** إذا تم اختيار ثلاث نقاط عشوائيًّا من النقاط المسماة على المستطيل في الشكل المجاور، فما احتمال أن تقع النقاط الثلاث على قطعة مستقيمة واحدة؟

عدد النقاط = 10 $\quad n = 10$ $\quad r = 3$

١ عدد اختيار النقاط

$${}_8C_3 = \frac{8 \times 7 \times \cancel{6}}{\cancel{3 \times 2 \times 1}} = 56$$

٢ الاحتمال

$$= \frac{4}{56} = \frac{4}{7 \times 8} = \frac{\cancel{4}}{7 \times \cancel{8}_2} = \frac{1}{7 \cdot 2} = \frac{1}{14}$$

5) **مسابقات:** اشترك 15 طالبًا من الصف الثاني الثانوي في مسابقة ثقافية. إذا اختير منهم 4 طلاب عشوائيًّا، فما احتمال أن يكونوا: ماجد وعبدالعزيز وخالد وفوزي؟

١

١ فضاء العينة

$${}_{15}C_4 = \frac{15 \times \cancel{14}^{2} \times 13 \times \cancel{12}}{\cancel{4 \times 3 \times 2 \times 1}} = 1365$$

٢ الاحتمال

$$= \frac{1}{1365}$$

15) **مستقيمات:** ما عدد المستقيمات التي يمكن رسمها من 10 نقاط ولا تقع أيٌّ ثلاث منها على استقامة واحدة؟ وضِّح إجابتك.

مذكرتي Mozkrty.com