مراجعة ليلية الإمتحان

جبر

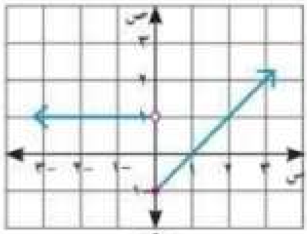
أستاذ : خالد جاد

الدوال الحقيقية

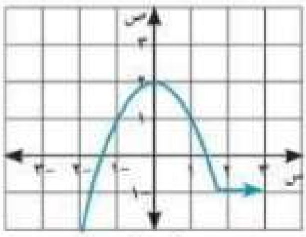
(١) جميع العلاقات الآتية تكون فيها ص دالة فى س ما عدا العلاقة:

(أ) ص = ٣س + ١ (ب) ص = $س^{٢}$ - ٤ (ج) س = $ص^{٢}$ - ٢ (د) ص = حا س

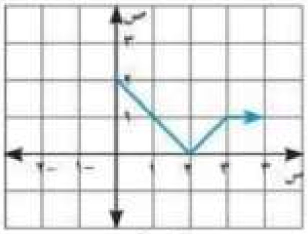
(٢) أى من العلاقات الآتية لا تمثل دالة؟



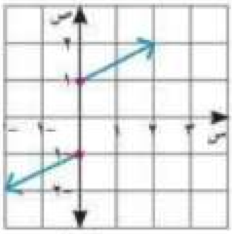
(أ)



(ب)

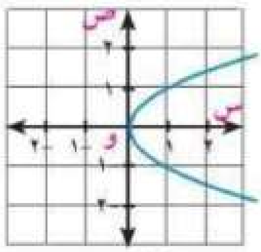


(ج)

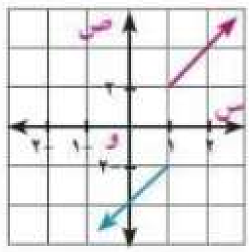


(د)

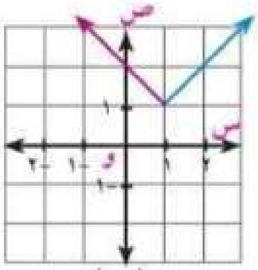
(٣) الشكل الذى يمثل دالة من بين الأشكال الآتية هو:



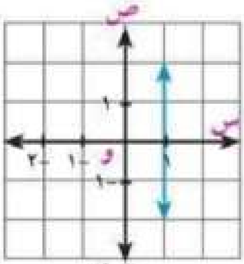
(أ)



(ب)



(ج)



(د)

تعيين مجال الدالة جبريًا

عين مجال كل من الدوال الحقيقية الآتية:

(١) د (س) = ٢$س^{٣}$ + س + ٣

الحل مجال الدالة هو ع

(٢) ر (س) = $\frac{س - ١}{س^{٢} - ١}$

الحل نضع $س^{٢}$ - ١ = ٠ أى س = ± ١

مجال الدالة هو ع - {-١ ، ١}.

(٣) د (س) = $\frac{س}{س^{٢} - ٣س - ١٠}$

الحل نضع $س^{٢}$ - ٣ س - ١٠ = ٠

(س - ٥) (س + ٢) = ٠

أى س = ٥ س = -٢

مجال الدالة هو ع - {٥ ، -٢} .

(٤) د (س) = $\frac{س^{٢} - ١}{س^{٢} + ١}$

الحل نضع $س^{٢}$ + ١ = ٠ مجال الدالة هو ع

(٥) د (س) = $\sqrt{س - ٣}$

الحل عندما س - ٣ ≥ ٠ أى أن س ≥ ٣

أى أن مجال د هو [٣، ∞[.

(٦) د (س) = $\sqrt{س + ٢}$

(٧) د(س) = $\frac{س}{\sqrt{١ - س}}$

الحل عندما ١ - س > ٠

-س > -١ ×-١ س < ١

مجال د (س) هو]-∞ ، ١[

(٨) د (س) = $\frac{٣}{\sqrt{س - ٣}}$

الدوال الزوجية والدوال الفردية

$د(س) = س^{2}$	$د(س) = حتا\ س$
$د(-س) = (-س)^{2} = س^{2}$ $د(-س) = د(س)$ أى أن الدالة زوجية	$د(-س) = حتا(-س) = حتا\ س$ $د(-س) = د(س)$ أى أن الدالة زوجية

$د(س) = س^{3}$	$د(س) = حا\ س$
$د(-س) = (-س)^{3} = -س^{3}$ $د(-س) = -د(س)$ أى أن الدالة فردية	$د(-س) = حا(-س) = -حا\ س$ $د(-س) = -د(س)$ أى أن الدالة فردية

ابحث أى من الدوال الآتية زوجية وأيها فردية وأيها غير ذلك؟

١) $د(س) = س^{2}\ حا\ س$

الحل $د(-س) = (-س)^{2}\ حا(-س) = -س^{2} \times -حا\ س$

$= س^{2}\ حا\ س = د(س)$ الدالة زوجية

٢) $د(س) = س\ حتا\ س$

الحل $د(-س) = (-س)\ حتا(-س) = -س\ حتا\ س$

$= -د(س)$ أى أن الدالة فردية

٣) $د(س) = حا\ س\ حتا\ س$

الحل $د(-س) = حا(-س)\ حتا(-س) = -حا\ س\ حتا\ س$

$= -د(س)$ أى أن الدالة فردية

٤) $د(س) = س^{3} - ٢س^{2}$

الحل $د(-س) = (-س)^{3} - ٢(-س)^{2} = -س^{3} - ٢س^{2}$

الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

٥) إذا كانت د(س) دالة زوجية ، د(٢) = ٤ فإن د(-٢) = ...

(أ) ٢ (ب) -٢ (ج) -٤ (د) ٤

٦) إذا كانت (د) دالة فردية على [- س ، س]

فإن $د(-س) + د(س) =$ ....

(أ) ٢ س (ب) س (ج) -٢ س (د) صفر

٧) اثبت أن الدالة ليست زوجية وليست فردية

حيث $د(س) = \begin{cases} س^{2} & س \geq ٠ \\ |س| & س < ٠ \end{cases}$

$د(-س) = \begin{cases} (-س)^{2} ، & -س \geq ٠ \\ |-س| ، & -س < ٠ \end{cases} = \begin{cases} س^{2} ، & س \leq ٠ \\ |س| ، & س > ٠ \end{cases}$

الدالة ليست زوجية وليست فردية

الدالة الأحادية

تعريف الدالة د: س ⟵ ص تسمى **دالة أحادية** إذا كان:

لكل أ ، ب ∈ س ، د(أ) = د(ب) فإن أ = ب

١) أثبت أن الدالة $ر(س) = \frac{٢س - ٣}{٤س + ٥}$ أحادية

الحل بوضع ر(أ) = ر(ب)

فإن $\frac{٢أ - ٣}{٤أ + ٥} = \frac{٢ب - ٣}{٤ب + ٥}$

٨أب + ١٠أ - ١٢ب - ١٥ = ٨أب - ١٢أ + ١٠ب - ١٥

بالحذف والتبسيط ١٠أ + ١٢أ = ١٠ب + ١٢ب

∴ ٢٢أ = ٢٢ب بالقسمة على ٢٢ أ = ب

لذلك فإن ر دالة أحادية.

٢) الدالة الإحادية من بين الدوال الآتية هي:

(أ) $د_{1}(س) = \frac{١}{س}$ (ب) $د_{2}(س) = س^{2}$

(ج) $د_{3}(س) = |س|$ (د) $د_{4}(س) = ٣$

٣) الدالة الإحادية من بين الدوال الآتية هي:

(أ) $د_{1}(س) = س + ٢$ (ب) $د_{2}(س) = س^{2}$

(ج) $د_{3}(س) = |س|$ (د) $د_{4}(س) = ٥$

تركيب دالتين

١) إذا كان : د(س) = $\frac{\text{١}}{\text{س}}$ ، ر(س) = س + ٣

أوجد (د ∘ ر)(٢)

الحل

(د ∘ ر)(س) = $\frac{\text{١}}{\text{س + ٣}}$

(د ∘ ر)(٢) = $\frac{\text{١}}{\text{٢ + ٣}}$ = $\frac{\text{١}}{\text{٥}}$

٢) إذا كان : د(س) = ٣س + ١ ، ر(س) = س^{٢} − ٥

أوجد : (ر ∘ د)(−٣)

الحل

(ر ∘ د)(س) = (٣س + ١)^{٢} − ٥

(ر ∘ د)(−٣) = (٣ × −٣ + ١)^{٢} − ٥ = ٥٩

٣) إذا كان : د(س) = س^{٢} − ٣ ، ر(س) = $\sqrt{\text{س − ٢}}$

و أوجد : (د ∘ ر)(٣)

الحل

(د ∘ ر)(س) = ($\sqrt{\text{س − ٢}}$)^{٢} − ٣

= س − ٢ − ٣ = س − ٥

(د ∘ ر)(٣) = ٣ − ٥ = −٢

٤) إذا كان : د(س) = س^{٢} + ٦ ، ر(س) = ٣ س

و أوجد قيمة س التي تحقق : (د ∘ ر)(س) = ٤٢

الحل

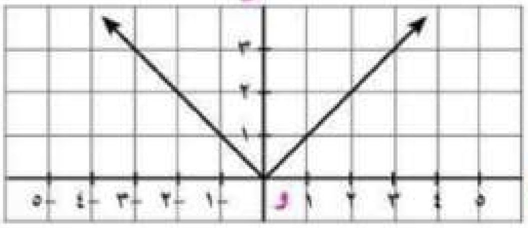
(د ∘ ر)(س) = (٣ س)^{٢} + ٦ = ٤٢

٩ س^{٢} = ٤٢ − ٦ = ٣٦   س^{٢} = ٤

س = ٢   س = −٢

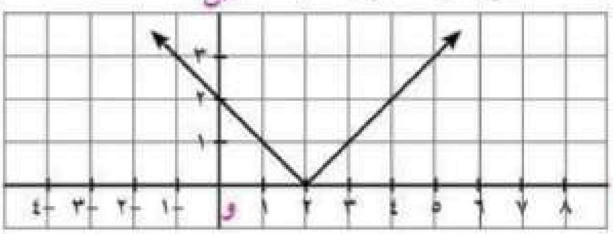
دالة المقياس

١) د(س) = |س|



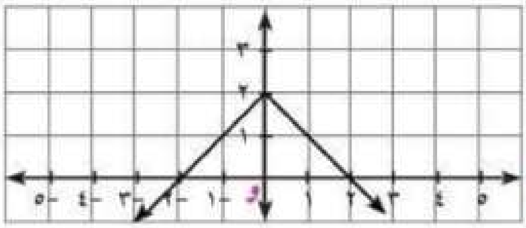
- نقطة التماثل : (٠ ، ٠)   مداها : [٠ ، ∞[
- الدالة تناقصية في]−∞ ، ٠[وتزايدية في]٠ ، ∞[
- المنحنى متماثل حول محور الصادات   زوجية.

٢) ر(س) = |س − ٢|



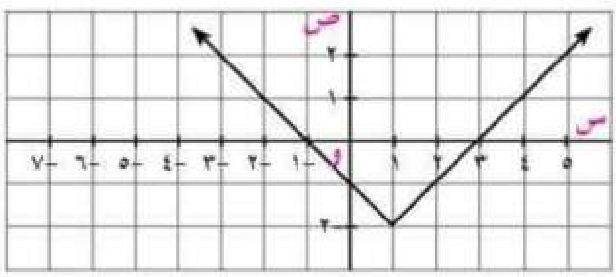
- نقطة التماثل : (٢ ، ٠)   مداها : [٠ ، ∞[
- الدالة تناقصية في]−∞ ، ٢[وتزايدية في]٢ ، ∞[

٣) د(س) = ٢ − |س|



- نقطة التماثل : (٠ ، ٢)   مداها :]−∞ ، ٢]
- الدالة تزايدية في]−∞ ، ٠[و تناقصية في]٠ ، ∞[

٤) د(س) = |س − ١| − ٢

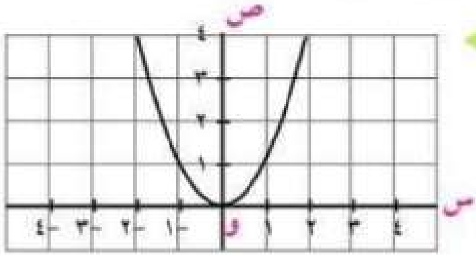


- نقطة التماثل : (١ ، −٢)   مداها : [−٢ ، ∞[
- تناقصية في]−∞ ، ١[و تزايدية في]١ ، ∞[

الدالة التربيعية

(١) د(س) = س^{٢}

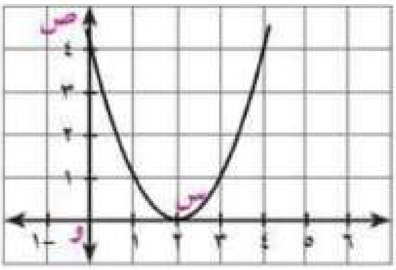
الحل



- رأس المنحنى هى (٠ ، ٠) ◄ مدى الدالة = [٠ ، ∞[
- الدالة تناقصية فى]-∞ ، ٠[وتزايدية فى]٠ ، ∞[
- المنحنى متماثل حول محور الصادات زوجية.

(٢) د(س) = (س - ٢)^{٢}

الحل



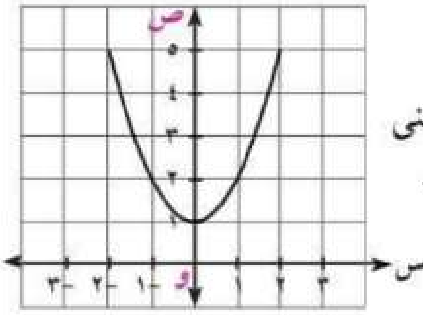
- نقطة رأس المنحنى هى (٢ ، ٠)

مدى الدالة = [٠ ، ∞[

- الدالة تناقصية فى]-∞ ، ٢[وتزايدية فى] ٢ ، ∞[

(٣) د(س) = س^{٢} + ١

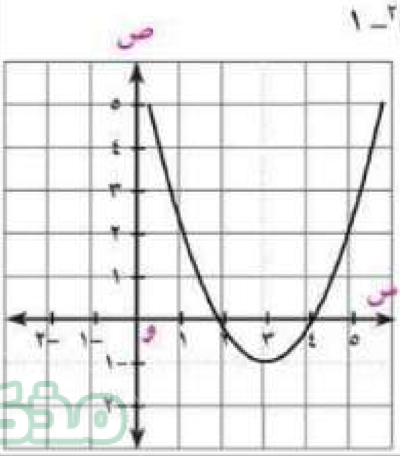
الحل



- نقطة رأس المنحنى هى (٠ ، ١) .
- مدى الدالة = [١ ، ∞[
- الدالة تناقصية فى]-∞ ، ٠[و تزايدية فى]٠ ، ∞[

(٤) د(س) = (س - ٣)^{٢} - ١

الحل

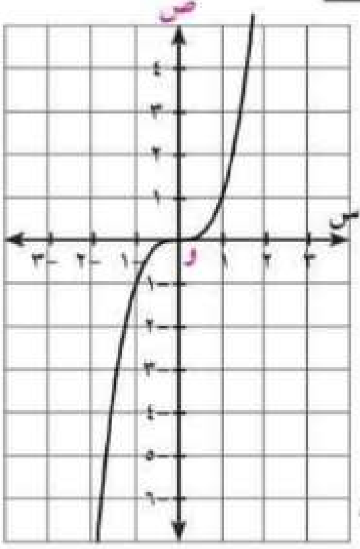


- نقطة رأس المنحنى هى (٣ ، -١).
- مدى الدالة = [-١ ، ∞[

الدالة التكعيبية

(١) د(س) = س^{٣}

الحل



نقطة التماثل : (٠ ، ٠)

مدى الدالة : ح

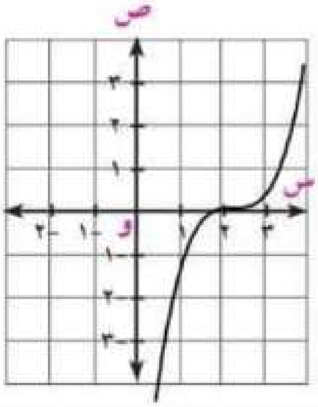
إطراد : تزايدية على ع

الدالة فردية.

متماثل بالنسبة لنقطة الأصل

(٢) د(س) = د (س - ٢)

الحل



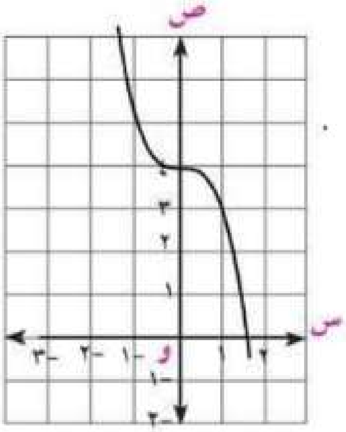
نقطة التماثل : (٢ ، ٠).

مدى الدالة : ح

إطراد : تزايدية على ع

(٣) د(س) = ٤ - س^{٣}

الحل



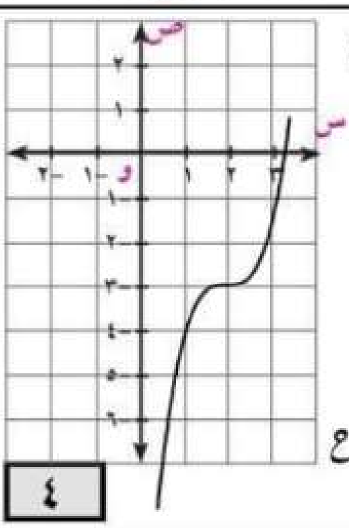
نقطة التماثل : (٠ ، ٤)

مدى الدالة : ح

إطراد : تناقصية على ع

(٤) د(س) = (س - ٢)^{٣} - ٣

الحل

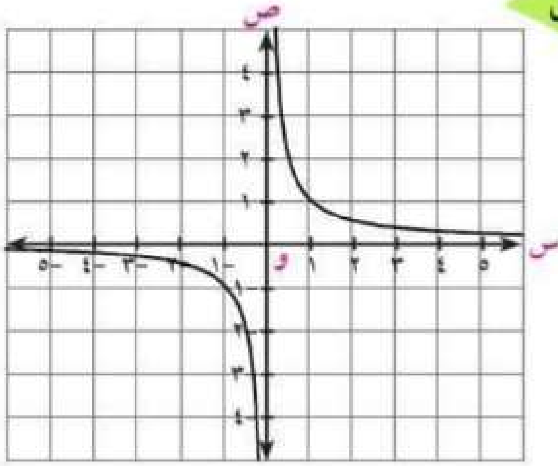


- نقطة التماثل للدالة هى (٢ ، -٣).
- مدى الدالة : ح
- إطراد : تزايدية على ع

الدالة الكسرية

① $\text{د(س)} = \frac{\text{١}}{\text{س}}$ نقطة التماثل : (٠ ، ٠)

الحل



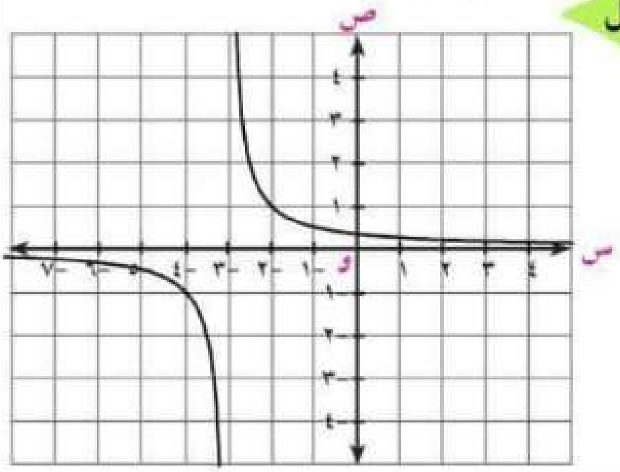
مدى الدالة : ح - { ٠ }

إطراد : تناقصية في]-∞ ، ٠[، تناقصية في]٠ ، ∞[.

: الدالة فردية. متماثل بالنسبة لنقطة الأصل

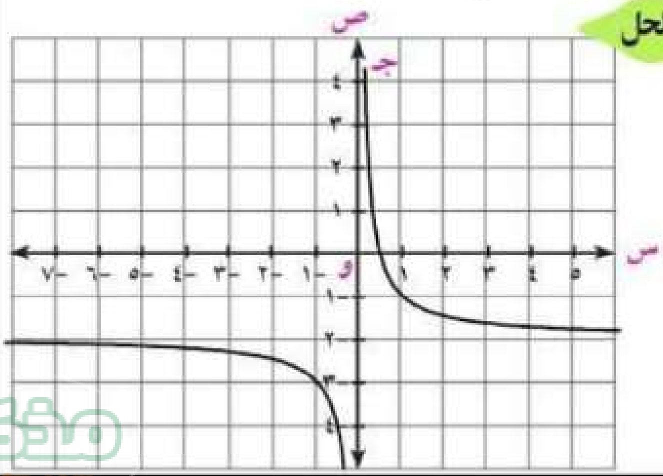
② $\text{د(س)} = \frac{\text{١}}{\text{س + ٣}}$ نقطة التماثل: (-٣ ، ٠)

الحل



③ $\text{د(س)} = \frac{\text{١}}{\text{س}} - \text{٢}$ نقطة التماثل : (٠ ، -٢).

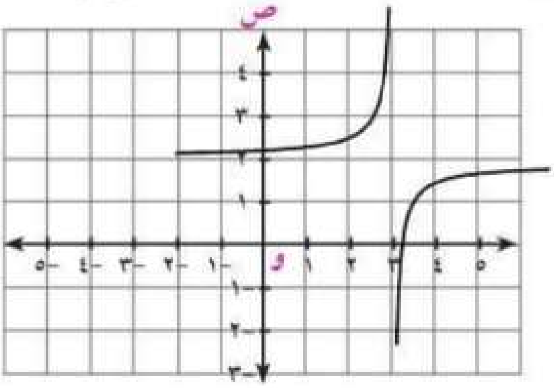
الحل



④ استخدم منحنى الدالة د حيث $\text{د(س)} = \frac{\text{١}}{\text{س}}$ لتمثيل منحنى الدالة $\text{د(س)} = \text{٢} - \frac{\text{١}}{\text{س - ٣}}$

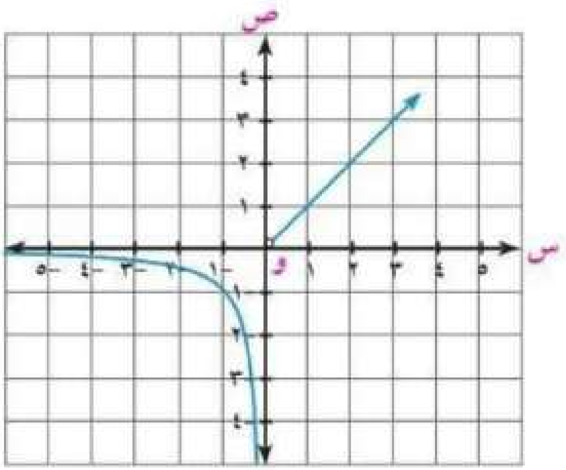
الحل

نقطة التماثل: (٣ ، ٢).



الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة

① $\text{د (س)} = \begin{cases} \frac{\text{١}}{\text{س}} & \text{عندما س} < \text{٠} \\ |\text{س}| & \text{عندما س} > \text{٠} \end{cases}$



ارسم الشكل البياني لكل من الدوال

② $\text{د (س)} = \begin{cases} \text{٤} & \text{عندما س} < \text{-٢} \\ \text{س}^{\text{٢}} & \text{عندما س} \geqslant \text{-٢} \end{cases}$

③ $\text{د (س)} = \begin{cases} |\text{س}| & \text{عندما س} \leqslant \text{٠} \\ \text{س}^{\text{٢}} & \text{عندما س} > \text{٠} \end{cases}$

④ $\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س}^{\text{٢}} & \text{لكل -٥} \leqslant \text{س} < \text{٢} \\ \text{٦-س} & \text{لكل ٢} \leqslant \text{س} \leqslant \text{٨} \end{cases}$

حل المعادلات

١) حل المعادلة: |س − ٣| = ٥

الحل

عندما س ≤ ٣	عندما س > ٣
−س + ٣ = ٥	س − ٣ = ٥

مجموعة حل المعادلة هى: {−٢ ، ٨}

٢) أوجد مجموعة حل المعادلة |٢س + ٣| = ٧

الحل

عندما س ≤ $\frac{-٣}{٢}$	عندما س > $\frac{-٣}{٢}$
−٢س − ٣ = ٧	∴ ٢س + ٣ = ٧
−٢س = ١٠	٢س = ٤
س = −٥	س = ٢

مجموعة الحل هى {−٥ ، ٢}

٣) أوجد مجموعة حل المعادلة |٢س − ٣| = ١١

٤) حل المعادلة: |٢س − ٣| = س + ٣

الحل

عندما س ≤ $\frac{٣}{٢}$	عندما س ≥ $\frac{٣}{٢}$
−٢س + ٣ = س + ٣	٢س − ٣ = س + ٣
ومنها س = ٠	ومنها س = ٦

مجموعة حل المعادلة هى: {٠ ، ٦}.

٥) حل المعادلة: |س + ٢| = ٣س − ١٠

٦) حل المعادلة: $س^{٢}$ − ٣|س| − ١٠ = ٠

الحل

---

٧) أوجد مجموعة حل المعادلة

$\sqrt{س^{٢} + ٦س + ٩}$ = ٩ − ٢س

الحل

∴ $\sqrt{(س - ٣)^{٢}}$ = ٩ − ٢س

∴ |س − ٣| = ٩ − ٢س

ثانيا: عندما س < ٣	**أولا**: عندما س > ٣
فإن: س − ٣ = −٩ + ٢س	فإن: س − ٣ = ٩ − ٢س
∴ س = ٦ أى أن:	∴ ٣س = ١٢

∴ مجموعة الحل هى {٤}

٨) حل المعادلة: $\sqrt{س^{٢} - ٤س + ٤}$ = ٤

٩) حل المعادلة: |س + ٢| = |س − ٣|

الحل

	∴ س + ٢ = ± (س − ٣)
س + ٢ = − (س − ٣)	س + ٢ = (س − ٣)
س + ٢ = − س + ٣	ولكن ٢ ≠ −٣
٢ س = ١ س = $\frac{١}{٢}$	(الحل مرفوض).
∴ مجموعة الحل هى {$\frac{١}{٢}$}	

١٠) أوجد مجموعة حل المعادلة |س + ٧| = |س − ٥|

الحل

ثانيا: حل المتباينات

- إذا كان |س| < ا فإن: -ا < س < ا
- إذا كان |س| ≤ ا فإن: -ا ≤ س ≤ ا
- إذا كان |س| > ا فإن: س > ا أ، س < -ا
- إذا كان |س| ≥ ا فإن: س ≥ ا أ، س ≤ -ا

(١) أوجد مجموعة حل المتباينة |س - ٣| < ٤

الحل

-٤ < س - ٣ < ٤

وبإضافة ٣ إلى المتباينة ∴ -٤ + ٣ < س - ٣ + ٣ < ٤ + ٣

وبالتبسيط ∴ -١ < س < ٧

∴ مجموعة الحل =]-١ ، ٧[

(٢) أوجد مجموعة حل المتباينة |٣س - ٧| ≤ ٥

(٣) أوجد مجموعة حل المتباينة |٢س - ٥| > ١

الحل

٢س - ٥ > ١	٢س - ٥ < -١
٢س > ٦	٢س < ٤
س > ٣	س < ٢

∴ مجموعة حل المتباينة س ∈ ح - [٢ ، ٣]

(٤) أوجد مجموعة حل المتباينة |٣س - ٢| ≥ ٧.

(٥) أوجد مجموعة حل المتباينة $\sqrt{س^٢ - ٢س + ١}$ ≥ ٤

الحل

∴ $\sqrt{(س - ١)^٢}$ = |س - ١|

أى أن: |س - ١| ≥ ٤

∴ س - ١ ≥ ٤	س - ١ ≤ -٤
س ≥ ٥	س ≤ -٣

∴ مجموعة حل المتباينة س ∈ ح -]-٣ ، ٥[

(٦) حل المتباينة $\sqrt{٤س^٢ - ١٢س + ٩}$ ≤ ٩

(٧) أوجد مجموعة حل المتباينة $\frac{١}{|٢س - ٣|}$ ≥ ٢

الحل وبأخذ المعكوس الضربى للطرفين

∴ |٢س - ٣| ≤ $\frac{١}{٢}$

∴ -$\frac{١}{٢}$ ≤ ٢س - ٣ ≤ $\frac{١}{٢}$

∴ -$\frac{١}{٢}$ + ٣ ≤ ٢س - ٣ + ٣ ≤ $\frac{١}{٢}$ + ٣

∴ $\frac{٥}{٢}$ ≤ ٢س ≤ $\frac{٧}{٢}$ وبالقسمة على ٢ ∴ $\frac{٥}{٤}$ ≤ س ≤ $\frac{٧}{٤}$

∴ مجموعة الحل = [$\frac{٥}{٤}$ ، $\frac{٧}{٤}$]

(٨) أوجد مجموعة حل المتباينة $\frac{١}{|٢س - ٥|}$ ≥ ٣

(٩) حل المتباينة |٢س - ٣| + |٦ - ٤س| < ١٢

الحل

|٢س - ٣| + |٤س - ٦| < ١٢

|٢س - ٣| + ٢ |٢س - ٣| < ١٢

٣ |٢س - ٣| < ١٢ وبالقسمة على ٣

|٢س - ٣| < ٤

-٤ < ٢س - ٣ < ٤

وبإضافة ٣ إلى المتباينة

∴ -٤ + ٣ < ٢س - ٣ + ٣ < ٤ + ٣

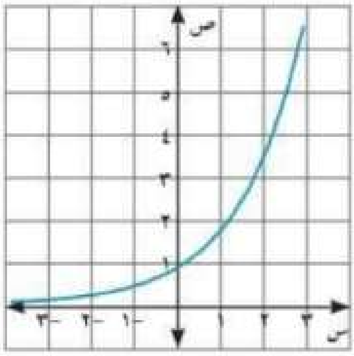
وبالتبسيط ∴ -١ < ٢س < ٧

وبالقسمة على ٢ $\frac{-١}{٢}$ < س < $\frac{٧}{٢}$

∴ مجموعة الحل =]$\frac{-١}{٢}$ ، $\frac{٧}{٢}$[

الدالة الكسرية

١) ارسم منحنى الدالة د: ع ⟵ ع⁺ حيث د(س) = ٢^س متخذًا س = [-٣، ٣]
ومن الرسم أوجد قيمة تقريبية لكل من د(-٠,٥) ، ٤√٢



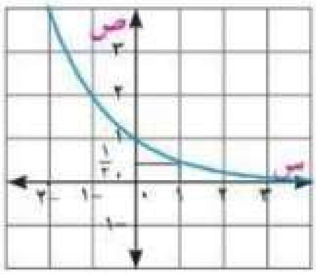
الحل

س	-٣	-٢	-١	صفر	١	٢	٣
د (س)	$\frac{١}{٨}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٤	٨

د(-٠,٥) = ٢

الدالة متزايدة على مجالها لكل أ > ١ وتسمى بدالة النمو الأسي

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:



٢) الشكل المقابل يمثل الدالة د حيث
(أ) د(س) = ٢^(س+١)　(ب) د (س) = ٢^(-س)
(جـ) د (س) = ٣^(-س)　(د) د (س) = ٢^س

٣) تكون الدالة الأسية التي أساسها أ تناقصية إذا كانت:
(أ) أ > ٠　(ب) أ < ٠　(جـ) ٠ < أ < ١　(د) -١ < أ < ٠

٤) في الدالة الأسية د حيث د(س) = أ^س ، (أ > ١) تكون د(س) > ١ عندما:
(أ) س ∈ ع　(ب) س ∈ ع⁺　(جـ) س ∈ ع⁻　(د) س ∈ ص

٥) في الدالة الأسية ر حيث ر(س) = أ^س ، (٠ < أ < ١) تكون ٠ < أ^س < ١ عندما س ∈
(أ)]٠، ∞[　(ب)]-∞، ٠[　(جـ)]١، ∞[　(د)]-∞، ١[

تطبيقات على الدالة الأسية

٦) أودع رجل مبلغ ٥٠٠٠ جنيه في أحد البنوك التي تُعطي فائدة سنويةً مركبةً قدرُها ٨٪، أوجد جملة المبلغ بعد مرور عشرة أعوام

الحل باستخدام العلاقة ج = أ (١ + ر)^ن = ٥٠٠٠ (١ + ٠,٠٨)^١٠ = ١٠٧٩٤,٦٢

٧) إذا بلغ أقصى إنتاج لمنجم من الذهب في السنة هو ١٨٥٠ كجم، وأخذ هذا الإنتاج في التناقص سنويًّا بنسبة ٩٪.
أ اكتب دالة أسية تمثل انتاج الذهب من هذا المنجم بعد ن سنة.
ب قدر لأقرب كجم إنتاج المنجم بعد مرور ٨ سنوات.

الحل أ = ١٨٥٠ ، ر = ٠,٠٩
أ دالة التضاؤل الأسي ج = أ (١ - ر)^ن　ج = ١٨٥٠ (١ - ٠,٠٩)^ن
ب ج = ١٨٥٠ (١ - ٠,٠٩)^٨ ≃ ٨٧٠ كجم

الأسس الكسرية

(١) إذا كان $٢^{س+١} = ٨$ ، فإن س = ...

(أ) ١   (ب) ٢   (ج) ٤   (د) ٣

(٢) إذا كان $٤ س^{٥} = ١٢٨$ ، فإن س تساوي ....

(أ) ٤   (ب) ± ٢ (ج) ٢   (د) -٢

(٣) إذا كان $٥^{س} = ٢$ فإن $٢٥^{س} =$

(أ) ١   (ب) ٢   (ج) ٣   (د) ٤

$ا^{صفر} = ١$ ، $(ا^{م})^{ن} = ا^{م ن}$ ، $ا^{-ن} = \frac{١}{ا^{ن}}$

(٤) $\left(\frac{١}{٢}\right)^{ا^{٢} - ا - ٢} = ١$ حيث ا > صفر، فإن ا = ...

(أ) ١   (ب) -٣ (ج) ٢   (د) ٣

(٥) إذا كانت $٣^{س-٢} = ٢^{س-٢}$ فإن س = ...

(أ) ٣   (ب) -٢ (ج) صفر   (د) ٢

(٦) إذا كان $٥^{س-١} = ٤^{س-١}$ ، فإن س = ...

(أ) ٥   (ب) ١   (ج) -١ (د) صفر

(٧) إذا كانت $س^{\frac{٣}{٥}} = ٢٧$ فإن س =

(أ) ٣   (ب) ٢٤٣   (ج) ٢٧   (د) $\frac{١}{٣}$

(٨) إذا كان $س^{\frac{٣}{٢}} = ٦٤$ فإن س تساوي ....

(أ) ٥١٢   (ب) ١٦   (ج) ٤   (د) ٢

(٩) إذا كان $٣^{ا} = ٤^{ب}$ فإن $٩^{\frac{ا}{ب}} + ١٦^{\frac{ب}{ا}}$ تساوي ....

(أ) ٧   (ب) ١٢   (ج) ٢٠   (د) ٢٥

(١٠) أثبت أن $\frac{(٣٤٣)^{٢س - \frac{١}{٣}} \times (٤)^{٣س+١}}{(١٩٦)^{٣س} \times ٤} = \frac{١}{٧}$

الحل

$$= \frac{(٧^{٣})^{٢س - \frac{١}{٣}} \times (٢^{٢})^{٣س+١}}{(٧^{٢} \times ٢^{٢})^{٣س} \times ٢^{٢}}$$

$$= \frac{٧^{٦س} \times ٧^{-١} \times ٢^{٦س} \times ٢^{٢}}{٧^{٦س} \times ٢^{٦س} \times ٢^{٢}} = ٧^{-١} = \frac{١}{٧}$$

١٩٦	٢
٩٨	٢
٤٩	٧
٧	٧
١	

حل المعادلات الأسية بأخذ العامل المشترك

(١) أوجد مجموعة حل المعادلة $٣^{س+٣} - ٣^{س+٢} = ١٦٢$

الحل

∴ **التجزيء** $٣^{س} \times ٣^{٣} - ٣^{س} \times ٣^{٢} = ١٦٢$

العامل المشترك $٣^{س}(٣^{٣} - ٣^{٢}) = ١٦٢$

الاختصار $٣^{س} \times ١٨ = ١٦٢$

$٣^{س} = ٩$ س = ٢

(٢) حل المعادلة $٢^{س} - ٢^{س+١} + ٢^{س-١} = -١$

(٣) إذا كانت $د(س) = ٣^{س}$

$د(س + ١) - د(س - ١) = ٧٢$ أوجد قيمة س

الحل

التعويض $٣^{س+١} - ٣^{س-١} = ٧٢$

التجزيء $٣^{س} \times ٣ - ٣^{س} \times ٣^{-١} = ٧٢$

العامل المشترك $٣^{س}\left(٣ - \frac{١}{٣}\right) = ٧٢$

الاختصار ∴ $٣^{س} \times \frac{٨}{٣} = ٧٢$ ∴ $٣^{س} = ٧٢ \times \frac{٣}{٨} = ٢٧$

∴ $٣^{س} = ٣^{٣}$ ومنها س = ٣

(٤) إذا كانت $د(س) = ٢^{س}$ أوجد قيمة س

التى تحقق المعادلة $د(س + ١) - د(س - ١) = ٢٤$.

(٥) إذا كانت $د(س) = ٢^{س}$ فإوجد مجموعة حل المعادلة

$د(س + ١) + د(س) - د(س - ١) = ٤٠$

٦) إذا كانت $د_1(س) = ٣^{س}$ ، $د_2(س) = ٩^{س}$ فأوجد قيمة س التي تحقق $د_1(٢س-١) + د_2(س-١) = ٧٥٦$

٧) إذا كان $د_1(س) = ٨^{س}$ ، $د_2(س) = ٤^{س}$

أثبت أن $\frac{د_1(٢س+١) + د_2(٣س+٢)}{د_1(٢س-١) + د_2(٣س-٢)} = ١٢٨$

الحل

$$\frac{٨^{٢س+١} + ٤^{٣س+٢}}{٨^{٢س-١} + ٤^{٣س-٢}} = \frac{(٢^٣)^{٢س+١} + (٢^٢)^{٣س+٢}}{(٢^٣)^{٢س-١} + (٢^٢)^{٣س-٢}}$$

$$\frac{٢^{٦س+٣} + ٢^{٦س+٤}}{٢^{٦س-٣} + ٢^{٦س-٤}} = \frac{٢^{٦س} \times ٢^٣ + ٢^{٦س} \times ٢^٤}{٢^{٦س} \times ٢^{-٣} + ٢^{٦س} \times ٢^{-٤}}$$

$$= \frac{٢^{٦س}(٢^٣ + ٢^٤)}{٢^{٦س}(٢^{-٣} + ٢^{-٤})} = ١٢٨$$

حل المعادلات الأسية كمعادلة تربيعية

٨) أوجد حل المعادلة $س^{\frac{٤}{٣}} - ١٠ س^{\frac{٢}{٣}} + ٩ = صفر$

الحل

$$(س^{\frac{٢}{٣}} - ٩)(س^{\frac{٢}{٣}} - ١) = ٠$$

إما $س^{\frac{٢}{٣}} - ٩ = ٠$ | أو $س^{\frac{٢}{٣}} - ١ = ٠$

∴ $س^{\frac{٢}{٣}} = ٩$ | $س^{\frac{٢}{٣}} = ١$

∴ $س = \pm(\sqrt{٩})^٣ = \pm ٢٧$ | $س = \pm ١$

∴ مجموعة الحل = {٢٧ ، -٢٧ ، ١ ، -١}

٩) حل المعادلة $\sqrt[٣]{س^٢} - ٢٥ \sqrt[٣]{س} - ٥٤ = صفر$

١٠) أوجد مجموعة حل المعادلة الآتية: $٤^{س} + ٢^{س+١} = ٨$

الحل

$$٢^{٢س} + ٢^{س} \times ٢^١ = ٨$$

$$٢^{٢س} + ٢ \times ٢^{س} - ٨ = ٠$$

$$(٢^{س} - ٢)(٢^{س} + ٤) = ٠$$

$٢^{س} = ٢$ ، $٢^{س} = -٤$ مرفوض

∴ س = ١ ∴ مجموعة الحل = {١}

١١) أوجد مجموعة حل المعادلة $٥^{٢س} + ٢٥ = ٢٦ \times ٥^{س}$

١٢) أوجد مجموعة حل المعادلة $٢^{س} + ٢^{٥-س} = ١٢$

الدالة العكسية

١) أوجد الدالة العكسية للدالة ص = س + ١ ومثلهما في شكل واحد .

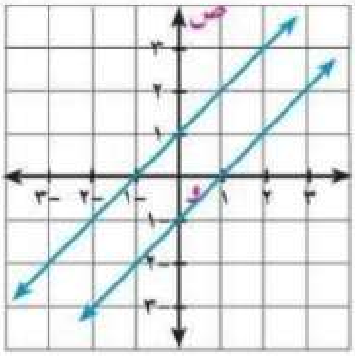
الحل

ص = س + ١

بتبديل المتغيرات

∴ س = ص + ١

ص = س − ١



٣) أوجد الدالة العكسية للدالة $ص = \frac{س}{س - ١}$

الحل

بتبديل المتغيرات $س = \frac{ص}{ص - ١}$

ص = س ص − س

ص (١ − س) = − س

ص − س ص = − س

$ص = \frac{-س}{١ - س}$

٤) الدالة العكسية للدالة د(س) = ٤س هي د(س) =

(أ) $\frac{١}{٤}س$ (ب) $\frac{١}{٤س}$ (جـ) ٤س (د) $\frac{٤}{س}$

٥) إذا كانت $ص = \sqrt[٣]{س}$ فإن الدالة العكسية لها ص =

(أ) $ص = \frac{١}{٣}س^٣$ (جـ) $ص = س^٣$

(ب) $ص = س^٣ - ١$ (د) $ص = س^٢$

٧) منحنى الدالة $د^{-١}(س)$ هو صورة منحنى الدالة د(س) بالإنعكاس في المستقيم:

(أ) س = ٠ (ب) ص = ٠ (جـ) ص = س (د) ص = −س

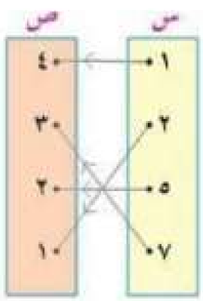
٦) الشكل المقابل يمثل

دالة د: س ⟵ ص

فإن $د^{-١}(٤) =$

(أ) ١ (جـ) ٥

(ب) ٢ (د) ٧



اللوغاريتمات

التحويل من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية

لو$_{أ}$ جـ = ب فإن أ^{ب} = جـ

١) إذا كان لو$_{٣}$ س = ٢ فإن س = ...

(أ) ٩ (ب) ٨ (جـ) ٣ (د) ٥

٢) إذا كان لو$_{أ}$ ١٦ = ٤ فإن أ ∈ ....

(أ) {١٦} (ب) {٢} (جـ) {٢، -٢} (د) {١}

٣) إذا كان لو$_{٢}$ (س - ٤) = ٤ فإن س =

(أ) ٤ (ب) ٢٠ (جـ) ١٦ (د) ١٨

٤) إذا كان لو (س + ١١) = ٢ فإن س = ...

(أ) -٩ (ب) ٢٢ (جـ) ٨٩ (د) ٩١

٥) إذا كان ٣^{س} = ٥ فإن س =

(أ) ٢ (ب) لو$_{٣}$ ٥ (جـ) لو$_{٥}$ ٣ (د) $\frac{٥}{٣}$

٦) إذا كان لو$_{٣}$ ٢٧ = س + ٢ فإن قيمة س = ...

(أ) ٩ (ب) ٣ (جـ) ٨ (د) ١

٧) أوجد مجموعة حل المعادلة لو$_{س}$ (س + ٢) = ٢

الحل وبتحويل المعادلة للصورة الأسية

∴ س^{٢} = س + ٢ ∴ س^{٢} - س - ٢ = صفر

∴ (س - ٢) (س + ١) = صفر ∴ س = ٢ أو س = -١

∵ س = -١ ∉ مجال تعريف المعادلة

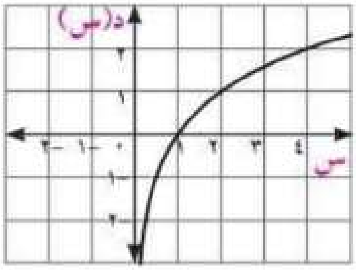
∴ مجموعة الحل = {٢}

التمثيل البياني للدالة اللوغاريتمية

١) ارسم منحنى الدالة د(س) = لو$_{٢}$ س

الحل لاحظ أن: الأساس ٢ > ١

س	٢	١	٤
د(س)	١	٠	٢



المدى: ح

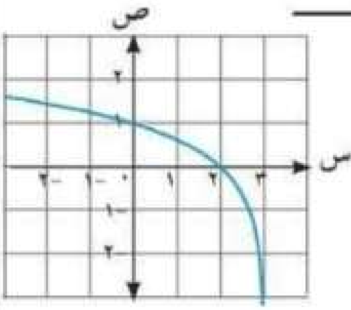
إطراد: تزايدية ح

٢) مجال الدالة د حيث د(س) = لو$_{(١-س)}$ ٣ هو ....

(أ)]-∞، ٠[∪]٠، ١[(جـ)]١، ∞[

(ب)]-∞، ١[(د)]-١، ١[

٣) الشكل المقابل يمثل الدالة



(أ) ص = ٣$^{س-١}$

(ب) ص = ٣$^{س+١}$

(جـ) ص = لو$_{٢}$ (٢ - س)

(د) ص = لو$_{٢}$ (٣ - س)

٤) إذا كان منحنى ص = لو$_{٤}$ (١ - أ س) يمر بالنقطة ($\frac{١}{٤}$ ، - $\frac{١}{٢}$) فإن أ =

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٨

٥) إذا كان منحنى الدالة د حيث د(س) = لو$_{أ}$ س يمر بالنقطة (٨، ٣) : فإن د(٤) = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) -٢

بعض خواص اللوغاريتمات

١- لو$_{أ}$ أ = ١   ٢- لو$_{أ}$ ١ = صفر

٣- خاصية الضرب في اللوغاريتمات:

لو$_{أ}$ س ص = لو$_{أ}$ س + لو$_{أ}$ ص

لو٢ + لو٥ = لو (٢ × ٥) = لو ١٠ = ١

(١) لو$_{أ ب جـ}$ أ + لو$_{أ ب جـ}$ ب + لو$_{أ ب جـ}$ جـ

الحل لو$_{أ ب جـ}$ (أ × ب × جـ) = ١

(٢) لو (حتا θ) + لو (قا θ) = ... حيث θ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

(أ) ١   (ب) صفر   (جـ) ٢   (د) -١

(٣) أوجد في ح مجموعة حل المعادلة الآتية:

لو$_{٣}$ (س - ١) + لو$_{٣}$ (س + ١) = لو$_{٣}$ ٨

الحل ∴ لو$_{٣}$ (س - ١) (س + ١) = لو$_{٣}$ ٨

∴ س^{٢} - ١ = ٨   ∴ س^{٢} = ٩

ومنها س = ±٣   ∴ مجموعة الحل = {٣}

أوجد مجموعة حل كلٍّ من المعادلات الآتية في ح:

(٤) لو$_{٣}$ س + لو$_{٣}$ (س + ٢) = ١

(٥) لو$_{٤}$ س = ١ - لو$_{٤}$ (س - ٣).

٤- خاصية القسمة في اللوغاريتمات:

لو$_{أ}$ $\frac{س}{ص}$ = لو$_{أ}$ س - لو$_{أ}$ ص

لو٣٠ - لو ٣ = لو $\frac{٣٠}{٣}$ = لو ١٠ = ١

(٦) أوجد قيمة المقدار: ١ + لو٣ - لو٢ - لو١٥

الحل المقدار = لو١٠ + لو٣ - لو٢ - لو١٥

= لو (١٠ × ٣ × $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{١٥}$) = لو ١ = ٠

(٧) اختصر: لو٠,٠٠٩ - لو$\frac{٢٧}{١٦}$ + لو١٥$\frac{٥}{٨}$ - لو$\frac{١}{١٢}$

الحل المقدار = لو $\frac{٩}{١٠٠٠}$ - لو$\frac{٢٧}{١٦}$ + لو$\frac{١٢٥}{٨}$ - لو$\frac{١}{١٢}$

= لو ($\frac{٩}{١٠٠٠}$ × $\frac{١٦}{٢٧}$ × $\frac{١٢٥}{٨}$ × $\frac{١٢}{١}$) = لو ١ = ٠

(٨) أوجد في ح مجموعة حل المعادلة الآتية:

لو (س + ٨) - لو (س - ١) = ١

الحل لو $\frac{س + ٨}{س - ١}$ = ١ $\frac{س + ٨}{س - ١}$ = ١٠^{١}

١٠س - ١٠ = س + ٨   ٩س = ١٨   س = ٢

٥- خاصية لوغاريتم القوة: لو$_{أ}$ س^{ن} = ن لو$_{أ}$ س

(٩) أوجد في أبسط صورة لو$_{٥}$ $\sqrt[٤]{١٢٥}$

الحل لو$_{٥}$ $\sqrt[٤]{١٢٥}$ = لو$_{٥}$ (٥)$^{\frac{٣}{٤}}$ = $\frac{٣}{٤}$ لو$_{٥}$ ٥ = $\frac{٣}{٤}$ × ١ = $\frac{٣}{٤}$

(١٠) لو ١٠٠ = ...

(أ) ١   (ب) ٢   (جـ) ٣   (د) -١

(١١) لو$_{٥}$ ١٢٥ = ...

(أ) $\sqrt{٣}$ (ب) ٣   (جـ) ٥   (د) ١٢٥

(١٢) لو ٠,٠١ =

(أ) ١   (ب) ٢   (جـ) -١   (د) -٢

(١٣) لو$_{\sqrt{٣}}$ ٨١ =

(أ) ٤   (ب) ٨   (جـ) -٤   (د) $\frac{٣٢}{٣}$

(١٤) أي مما يأتي يكافئ $\frac{٢ \text{ لو } ٧}{\text{لو } ٧ + \text{لو } ٦}$؟

(أ) $\frac{\text{لو } ٧}{\text{لو } ٦}$ (ب) $\frac{\text{لو } ٤٩}{\text{لو } ٤٢}$ (جـ) $\frac{٢}{\text{لو } ٦}$ (د) لو $\frac{٧}{٦}$

(١٥) اختصر لأبسط صورة:

$$٢\text{لو}\,٢٥ + \text{لو}\left(\frac{١}{٣}+\frac{١}{٥}\right) + ٢\text{لو}\,٣ - \text{لو}\,٣٠$$

الحل

$$\text{المقدار} = \text{لو}\,٢٥^{٢} + \text{لو}\,\frac{٨}{١٥} + \text{لو}\,٣^{٢} - \text{لو}\,٣٠$$

$$= \text{لو}\left(٢٥^{٢} \times \frac{٨}{١٥} \times ٣^{٢} \times \frac{١}{٣٠}\right) = \text{لو}\,١٠٠ = ٢$$

(١٦) أثبت أن: $\dfrac{\text{لو}\,٧٢٩ - \text{لو}\,٦٤}{\text{لو}\,٩ - \text{لو}\,٤} = ٣$

الحل

$$\frac{\text{لو}\,٩^{٣} - \text{لو}\,٤^{٣}}{\text{لو}\,٩ - \text{لو}\,٤} = \frac{٣\,\text{لو}\,٩ - ٣\text{لو}\,٤}{\text{لو}\,٩ - \text{لو}\,٤} = \frac{٣\,(\text{لو}\,٩ - \text{لو}\,٤)}{\text{لو}\,٩ - \text{لو}\,٤} = ٣$$

أوجد مجموعة حل كلٍّ من المعادلات الآتية في ح:

(١٧) $\text{لو}_{٣}\,(س + ٦) = ٢\,\text{لو}_{٣}\,س$

(١٨) $\text{لو}\,(٨ - س) + ٢\text{لو}\,\sqrt{س - ٦} = ٠$

٦- خاصية تغيير الأساس: $\text{لو}_{ص}\,س = \dfrac{\text{لو}_{أ}\,س}{\text{لو}_{أ}\,ص}$

(١٩) اختصر: $\text{لو}_{٥}\,٤٩ \times \text{لو}_{٨}\,٥ \times \text{لو}_{٩}\,٨ \times \text{لو}_{٧}\,٩$

الحل

$$\text{المقدار} = \frac{\text{لو}\,٤٩}{\text{لو}\,٥} \times \frac{\text{لو}\,٥}{\text{لو}\,٨} \times \frac{\text{لو}\,٨}{\text{لو}\,٩} \times \frac{\text{لو}\,٩}{\text{لو}\,٧}$$

$$= \frac{\text{لو}\,٤٩}{\text{لو}\,٧} = \frac{٢\text{لو}\,٧}{\text{لو}\,٧} = ٢$$

(٢٠) المقدار $\dfrac{٣\,\text{لو}\,٢}{\text{لو}\,٤ + \text{لو}\,٣}$ يكافئ المقدار:

(أ) $\text{لو}_{٣}\,٢$ (ب) $\text{لو}_{٧}\,٢$ (جـ) $\text{لو}_{١٢}\,٨$ (د) $\text{لو}_{٧}\,٨$

٧- خاصية المعكوس الضربي: $\text{لو}_{أ}\,ب = \dfrac{١}{\text{لو}_{ب}\,أ}$

$$\text{لو}_{٣}\,٥ \times \text{لو}_{٥}\,٣ = \text{لو}_{٣}\,٥ \times \frac{١}{\text{لو}_{٣}\,٥} = ١$$

(٢١) اختصر: $\dfrac{١}{\text{لو}_{٢}\,١٢} + \dfrac{١}{\text{لو}_{٨}\,١٢} + \dfrac{١}{\text{لو}_{٩}\,١٢}$

الحل

$$\text{المقدار} = \frac{١}{\text{لو}_{٢}\,١٢} + \frac{١}{\text{لو}_{٨}\,١٢} + \frac{١}{\text{لو}_{٩}\,١٢}$$

$$= \text{لو}_{١٢}\,٢ + \text{لو}_{١٢}\,٨ + \text{لو}_{١٢}\,٩ = \text{لو}_{١٢}\,(٢ \times ٨ \times ٩) = \text{لو}_{١٢}\,١٤٤ = ٢$$

(٢٢) أوجد في ح مجموعة حل المعادلة الآتية:

$$\text{لو}_{٣}\,س + \text{لو}_{س}\,٣ = ٢$$

الحل

$\therefore \text{لو}_{٣}\,س + \dfrac{١}{\text{لو}_{٣}\,س} = ٢$ خاصية ٧

$\therefore (\text{لو}_{٣}\,س)^{٢} + ١ = ٢\text{لو}_{٣}\,س$ بالضرب في $\text{لو}_{٣}\,س$

$\therefore (\text{لو}_{٣}\,س)^{٢} - ٢\text{لو}_{٣}\,س + ١ = \text{صفر}$

$\therefore \text{لو}_{٣}\,س = ١$ $\therefore$ س = ٣ $\therefore$ مجموعة الحل = {٣}

أوجد مجموعة حل كلٍّ من المعادلات الآتية في ح:

(٢٣) $\text{لو}_{٨١}\,س = \text{لو}_{س}\,٣$ **(٢٤)** $(\text{لو}_{٢}\,س)^{٢} = \text{لو}_{٢}\,٤س$

(٢٥) $\text{لو}\,س - \text{لو}_{س}\,١٠٠ = ٢$

حل المعادلات الأسية باستخدام اللوغاريتمات

(٢٦) أوجد قيمة س مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين.

$$٢^{س+١} = ٥$$

الحل

$٢^{س+١} = ٥$ يأخذ لوغاريتم للطرفين

$\therefore \text{لو}\,٢^{س+١} = \text{لو}\,٥$ $\therefore (س + ١)\,\text{لو}\,٢ = \text{لو}\,٥$

$\therefore س + ١ = \dfrac{\text{لو}\,٥}{\text{لو}\,٢}$ أي أن: $س = \dfrac{\text{لو}\,٥}{\text{لو}\,٢} - ١ \simeq ١{,}٣٢$

(٢٧) أوجد قيمة س لأقرب رقم عشري واحد

$$٣^{س-١} = ٥^{س-٢}$$

الحل

بأخذ لو للطرفين $\text{لو}\,٣^{س+١} = \text{لو}\,٥^{س-٢}$

$\therefore (س+١)\,\text{لو}\,٣ = (س - ٢)\,\text{لو}\,٥$

$\therefore س\,\text{لو}\,٣ + \text{لو}\,٣ = س\,\text{لو}\,٥ - ٢\,\text{لو}\,٥$

$\therefore س\,(\text{لو}\,٣ - \text{لو}\,٥) = -\text{لو}\,٣ - ٢\,\text{لو}\,٥$

$\therefore س = \dfrac{-\text{لو}\,٣ - ٢\,\text{لو}\,٥}{\text{لو}\,٣ - \text{لو}\,٥}$ وباستخدام الحاسبة $س \simeq ٨{,}٥$

(٢٨) أوجد قيمة س لأقرب رقم عشري واحد

$$٣^{٧-٢س} = ١٣{,}٤$$

(٢٩) باستخدام الحاسبة حل المعادلة

$$٥^{٢س+٣} = ٣^{س+٥}$$