# الرياضيات البحتة

2025

المراجعة المستمرة

## الجبر و الهندسة الفراغية

# المعاصر

إعداد نخبة من خبراء التعليم

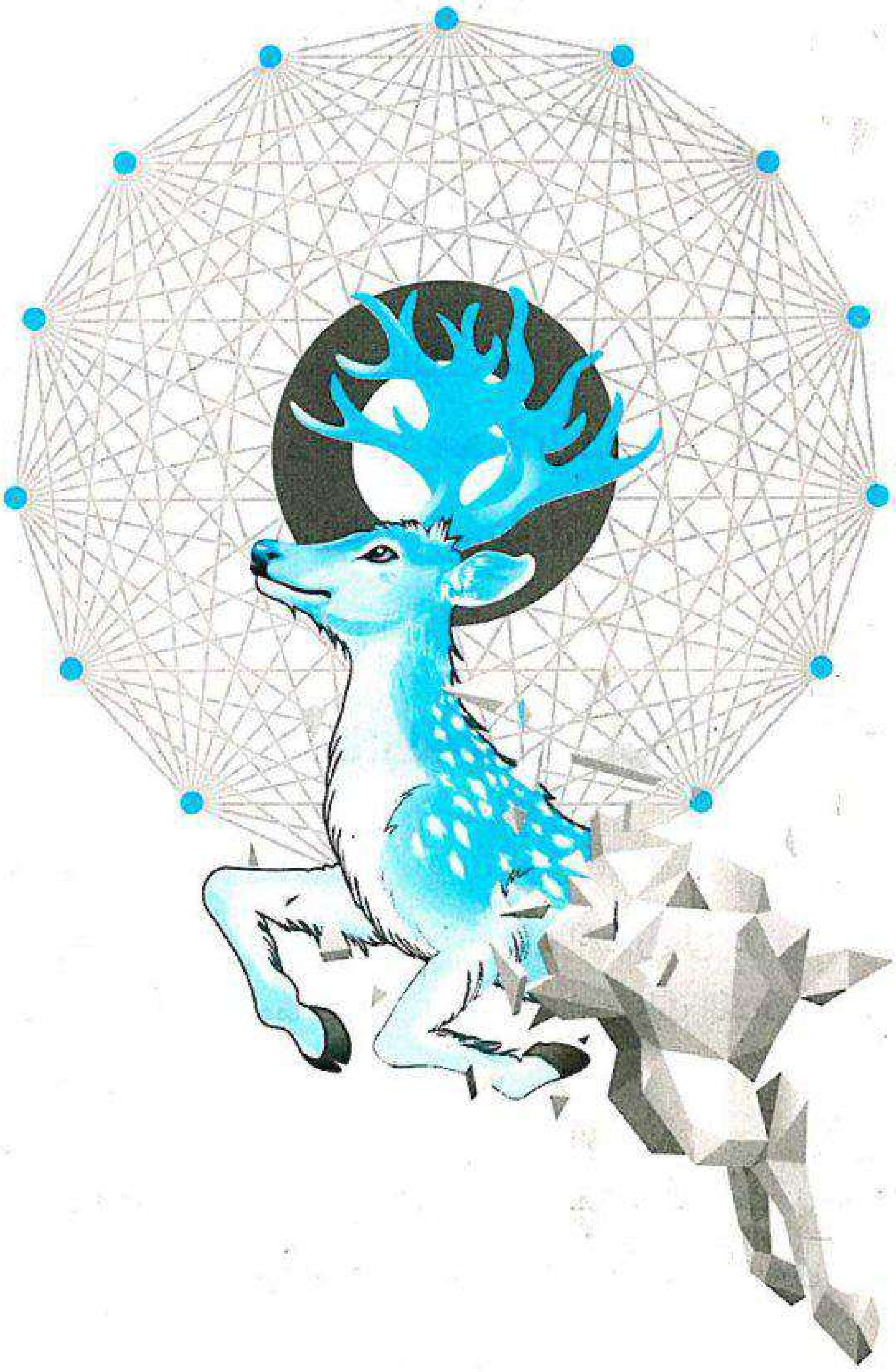
3
ثانوى

# المعاصر

## الرياضيات البحتة

## الجبر و الهندسة الفراغية

المراجعة المستمرة



GPS

3
ثانوى

إعداد نخبة من خبراء التعليم

مكتبة الطلبة
للطبع و النشر و التوزيع
٣ شارع كامل صدقي - الفجالة
تليفون: ٢٥٩٠٢٩٩٧ - ٢٥٩٣٧٧٩١ - ٢٥٩٣٤٠١٣ / ٠٢
e-mail: info@elmoasserbooks.com
www.elmoasserbooks.com
الخط الساخن
١٥٠١٤

بسم الله الرحمن الرحيم

# مقدمة

فى إطار خطتنا الطموحة لتطوير مؤلفاتنا فى مادة الرياضيات للمرحلة الثانوية - فى ضوء ما يرد إلينا من آراء ومقترحات - تحقيقًا للمستوى الأمثل الذى نرجوه جميعًا ، وانطلاقًا من إيماننا الكامل بأهمية التقويم المستمر فى نجاح العملية التعليمية نضع بين أيديكم :

## المراجعة المستمرة

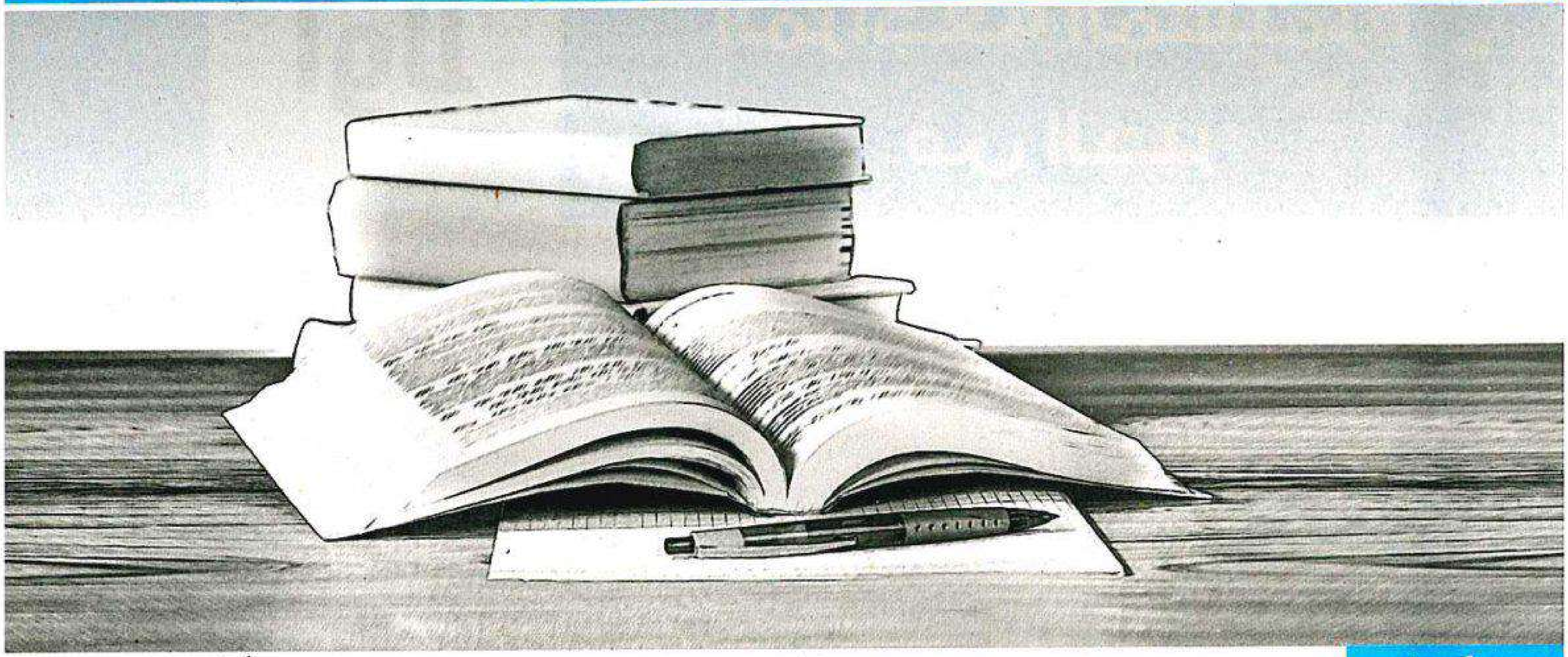
والتى تحتوى على :

- ملخص لكل وحدة.
- اختبار تراكمى على الوحدة وما قبلها.
- امتحانات مصر السابقة.
- اختبار على كل وحدة.
- اختبارات الكتاب المدرسى.

وكلنا أمل فى أن تحظى مؤلفاتنا بثقتكم الغالية التى نعتز بها دائمًا.
والله لا يضيع أجر من أحسن عملاً ، وهو ولى التوفيق.

« المؤلفون »

# محتويات الكتاب



# أولًا

# المراجعة المستمرة في الجبر

# ملخص الوحدة الأولى

- التباديل والتوافيق
- نظرية ذات الحدين

## تذكر أهم قوانين التباديل والتوافيق

إذا كان : ن ، ر $\in$ ص$^{+}$ ، $ن \ge ر$ فإن :

① $\underline{|ن} = ن(ن-١)(ن-٢) \times \dots \times ٣ \times ٢ \times ١ = {}^{ن}ل_{ن}$

② ${}^{ن}ل_{ر} = ن(ن-١)(ن-٢) \times \dots \times (ن-ر+١)$

③ ${}^{ن}ل_{ر} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر}}$ ، ${}^{ن}ق_{ر} = \frac{{}^{ن}ل_{ر}}{\underline{|ر}} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ر}\ \underline{|ن-ر}}$

④ $\underline{|ن} = ن\underline{|ن-١} = ن(ن-١)\underline{|ن-٢} = \dots\dots\dots$

⑤ ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$ ومنها إذا كان : ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{هـ}$ فإن : ر = هـ أو ر + هـ = ن

⑥ $\frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{ن-ر+١}{ر}$

⑦ ${}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-١} = {}^{ن+١}ق_{ر}$

### ملاحظات

① $\underline{|ن} \in$ ص$^{+}$ ، ${}^{ن}ل_{ر} \in$ ص$^{+}$ ، ${}^{ن}ق_{ر} \in$ ص$^{+}$

② ${}^{ن}ق_{١} = ن$ ، ${}^{ن}ق_{ن} = {}^{ن}ق_{٠} = ١$ ، ${}^{ن}ق_{ر} \le {}^{ن}ل_{ر}$

③ ${}^{ن}ل_{١} = ن$ ، ${}^{ن}ل_{٠} = ١$ ، $\underline{|٠} = \underline{|١} = ١$ ولذلك إذا كان : $\underline{|ن} = ١$ فإن : ن = ٠ أو ن = ١

④ $\underline{|ن} = {}^{ن}ل_{ن} = {}^{ن}ل_{ن-١}$ لذلك : إذا كان ${}^{ن}ل_{ر} = \underline{|ن}$ فإن : ر = ن أو ر = ن − ١

⑤ إذا كان : ${}^{أ}ل_{ر} = {}^{ب}ل_{ر}$ فإن : أما أ = ب أو ر = ٠

⑥ إذا كان : ${}^{أ}ق_{ر} = {}^{ب}ق_{ر}$ فإن : أ = ب أو ر = ٠

⑦ إذا كان : ${}^{ن}ل_{أ} = {}^{ن}ل_{ب}$ فإن : أما أ = ب أو أ = ن ، ب = ن − ١ أو أ = ن − ١ ، ب = ن

⑧ إذا كان : ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ل_{ر}$ فإن : $\underline{|ر} = ١$ أى أن : ر = ٠ أو ١

⑨ يمكن التعبير عن خارج قسمة مضروبين بصيغة التباديل كما يلى : $\frac{\underline{|أ}}{\underline{|ب}} = {}^{أ}ل_{أ-ب}$ بشرط $أ \ge ب$

⑩ قيم ن ، ر التى تجعل ${}^{ن}ل_{ر}$ لها قيمة حيث ${}^{ن}ل_{ر} \in$ ص$^{+}$ يجب أن تحقق المتباينة $٠ \le ر \le ن$ لكل ن ، ر $\in$ ط

⑪ أقصى قيمة للعدد ${}^{ن}ق_{ر}$ عند

- $ر = \frac{ن}{٢}$ إذا كان ن عدد زوجي
- $ر = \frac{ن-١}{٢}$ أو $ر = \frac{ن+١}{٢}$ إذا كان ن عدد فردى

## تذكر مبدأ العد

إذا كان عدد طرق إجراء عمل يساوى م طريقة وعدد طرق إجراء عمل آخر يساوى ن طريقة فإن :

- عدد طرق إجراء العمل الأول (و) العمل الثانى = م × ن طريقة (قاعدة الضرب)
- عدد طرق إجراء العمل الأول (أو) العمل الثانى = م + ن طريقة (قاعدة الجمع)

## تذكر عدد طرق اختيار أشياء عددها $ر$ من بين أشياء عددها $ن$

| و | مع مراعاة الترتيب | بدون مراعاة الترتيب |
|---|---|---|
| الاختيار مع الإحلال | $ن^{ر}$ | $^{ن+ر-١}ق_{ر}$ |
| الاختيار بدون إحلال | $^{ن}ل_{ر}$ | $^{ن}ق_{ر}$ |

## تذكر ترتيب $ن$ من الأشياء

① عدد طرق ترتيب $ن$ من الأشياء المتمايزة :

- في صف = $\underline{|ن}$
- في دائرة = $\underline{|ن-١}$

② عدد طرق ترتيب $ر$ من الأشياء المتمايزة في $ن$ من الأماكن المتمايزة بحيث تكون الأشياء متجاورة ، $ر < ن$ إذا كانت الأماكن :

- على شكل صف = $(ن-ر+١)\ \underline{|ر}$
- متمايزة على شكل دائرة = $ن\ \underline{|ر}$
- متماثلة على شكل دائرة = $\underline{|ر}$

③ عدد طرق ترتيب $ر$ من الأشياء المتمايزة في $ن$ من الأماكن ، $ر < ن$ إذا كانت الأماكن :

- متمايزة على شكل صف = $^{ن}ل_{ر}$
- متمايزة على شكل دائرة = $^{ن}ل_{ر}$
- متماثلة على شكل دائرة = $\frac{^{ن}ل_{ر}}{ن} = {}^{ن-١}ل_{ر-١}$

**ملاحظة :** عدد أقطار مضلع مكوّن من $ن$ من الأضلاع = $^{ن}ق_{٢} - ن$

## تذكر نظرية ذات الحدين

إذا كان : $أ$ ، $س \in ح$ ، $ن$ عددًا صحيحًا موجبًا فإن :

① $(س+أ)^{ن} = {}^{ن}ق_{٠}\, س^{ن} + {}^{ن}ق_{١}\, س^{ن-١} أ + {}^{ن}ق_{٢}\, س^{ن-٢} أ^{٢} + \dots + {}^{ن}ق_{ر}\, س^{ن-ر} أ^{ر} + \dots + {}^{ن}ق_{ن}\, أ^{ن}$

② $(س-أ)^{ن} = {}^{ن}ق_{٠}\, س^{ن} - {}^{ن}ق_{١}\, س^{ن-١} أ + {}^{ن}ق_{٢}\, س^{ن-٢} أ^{٢} - {}^{ن}ق_{٣}\, س^{ن-٣} أ^{٣} + \dots + {}^{ن}ق_{ن}\, (-أ)^{ن}$

**لاحظ أن :**

✪ من مفكوك $(س+أ)^{ن}$ حسب قوى $س$ التنازلية

① عدد حدود المفكوك = $(ن+١)$ حدًا.　② في أي حد يكون : أس $(س)$ + أس $(أ)$ = $ن$

③ الحد العام : $ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر}\, أ^{ر} س^{ن-ر}$

④ $\frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{ن-ر+١}{ر} \times \frac{أ}{س}$ ، $\frac{\text{معامل } ح_{ر+١}}{\text{معامل } ح_{ر}} = \frac{ن-ر+١}{ر} \times \frac{\text{معامل } أ}{\text{معامل } س}$

⑤ رتبة الحد من البداية = عدد حدود المفكوك − ترتيب الحد من النهاية + ١

⑥ إذا كانت $\text{ن}$ زوجية فإن رتبة الحد الأوسط = $\frac{\text{ن}}{\text{٢}} + \text{١}$

، إذا كانت $\text{ن}$ فردية فإن رتبتا الحدان الأوسطان $\frac{\text{ن}+\text{١}}{\text{٢}}$ ، $\frac{\text{ن}+\text{٣}}{\text{٢}}$

⑦ $(\text{س}+\text{أ})^{\text{ن}} + (\text{س}-\text{أ})^{\text{ن}} = \text{٢}\,(\text{ح}_{\text{١}} + \text{ح}_{\text{٣}} + \text{ح}_{\text{٥}} + \dots)$ أى ضعف مجموع الحدود الفردية الرتبة.

$(\text{س}+\text{أ})^{\text{ن}} - (\text{س}-\text{أ})^{\text{ن}} = \text{٢}\,(\text{ح}_{\text{٢}} + \text{ح}_{\text{٤}} + \text{ح}_{\text{٦}} + \dots)$ أى ضعف مجموع الحدود الزوجية الرتبة.

✪ **مجموع معاملات حدود مفكوك :** $(\text{أ}\text{س}+\text{ب}\text{ص})^{\text{ن}} = (\text{أ}+\text{ب})^{\text{ن}}$

✪ **فى مفكوك $(\text{س}+\text{أ})^{\text{ن}}$ حسب قوى س التنازلية لإيجاد الحد المشتمل على $\text{س}^{\text{ك}}$** حيث $\text{ك} \in \text{ط}$ نتبع ما يلى :

① نوجد $\text{ح}_{\text{ر}+\text{١}}$ فى أبسط صورة له لتحديد أس المتغير س بدلالة ر

② نساوى أس المتغير س الناتج فى $\text{ح}_{\text{ر}+\text{١}}$ بالأس المطلوب ك للحصول على قيمة ر ومنها نحدد الحد الذى يحتوى على $\text{س}^{\text{ك}}$ وهو $\text{ح}_{\text{ر}+\text{١}}$

③ نوجد الحد المشتمل على $\text{س}^{\text{ك}}$ بالتعويض عن قيمة ر التى حصلنا عليها فى $\text{ح}_{\text{ر}+\text{١}}$

لاحظ أن : ① إذا كانت قيمة ر التى حصلنا عليها لا تنتمى إلى مجموعة الأعداد الطبيعية فإن هذا يدل على أنه لا يوجد حد مشتمل على س أس ك المطلوبة.

② إذا كان المطلوب إيجاد الحد الخالى من س فنعتبر أن المطلوب إيجاد الحد المشتمل على $\text{س}^{\text{٠}}$

أى نساوى أس المتغير س فى $\text{ح}_{\text{ر}+\text{١}}$ بالصفر ونوجد قيمة ر

✪ **لإيجاد أكبر حد عدديًا فى مفكوك $(\text{أ}\text{س}+\text{ب}\text{ص})^{\text{ن}}$ عند قيمة معلومة لكل من س ، ص**

نفرض أن : $\text{ح}_{\text{ر}+\text{١}}$ هو أكبر حد عدديًا فى المفكوك

فيكون : $\frac{\text{ح}_{\text{ر}+\text{١}}}{\text{ح}_{\text{ر}}} \geq \text{١}$ ومنها $\frac{\text{ن}-\text{ر}+\text{١}}{\text{ر}} \times \left|\frac{\text{ب}\text{ص}}{\text{أ}\text{س}}\right| \geq \text{١}$ ونستنتج المتباينة : $\text{ر} \leq \text{م}$

ويكون : $\frac{\text{ح}_{\text{ر}+\text{٢}}}{\text{ح}_{\text{ر}+\text{١}}} \leq \text{١}$ ومنها $\frac{\text{ن}-(\text{ر}+\text{١})+\text{١}}{\text{ر}+\text{١}} \times \left|\frac{\text{ب}\text{ص}}{\text{أ}\text{س}}\right| \leq \text{١}$ ونستنتج المتباينة : $\text{ر} \geq \text{ك}$

ومنها نوجد قيم ر الصحيحة التى تحقق المتباينة : $\text{ك} \leq \text{ر} \leq \text{م}$ فيكون الحد أو الحدود التى رتبتها $(\text{ر}+\text{١})$ هى أكبر حدود المفكوك عدديًا.

✪ **لإيجاد أكبر معامل عدديًا فى مفكوك $(\text{أ}\text{س}+\text{ب}\text{ص})^{\text{ن}}$ نوجد أكبر حد عدديًا فى المفكوك عند $\text{س} = \text{ص} = \text{١}$**

لاحظ أن : ● فى مفكوك $(\text{١}+\text{س})^{\text{ن}}$

① إذا كان : ن عددًا زوجيًا فإن : أكبر معامل فى المفكوك هو معامل الحد الأوسط = ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\frac{\text{ن}}{\text{٢}}}$

② إذا كان : ن عددًا فرديًا فإن : معاملا الحدين الأوسطين متساويان ومعامل أى منها هو أكبر معامل فى المفكوك

$= {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\frac{\text{ن}-\text{١}}{\text{٢}}}$ أو ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\frac{\text{ن}+\text{١}}{\text{٢}}}$

● فى مفكوك $(\text{١}-\text{س})^{\text{ن}}$ المعامل الذى له أكبر قيمة عددية (قيمة مطلقة) = أكبر معامل فى مفكوك $(\text{١}+\text{س})^{\text{ن}}$

# اختبـار على الوحـدة الأولى

**١** أكبر معامل فى مفكوك $(١ + س)^{٢٤}$ هو ..............

(أ) ${}^{٢٤}ق_{٢٤}$ (ب) ${}^{٢٤}ق_{١٣}$ (ج) ${}^{٢٤}ق_{١٢}$ (د) ${}^{٢٤}ق_{١١}$

---

**٢** كم عدد يمكن تكوينه من الأرقام ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ بحيث يكون العدد أكبر من أو يساوى ١٠٠٠ وأقل من ٤٠٠٠ ؟

(أ) ١٢٥ (ب) ١٠٥ (ج) ٣٧٥ (د) ٦٢٥

---

**٣** إذا كان : ${}^{ن}ل_{٥} = ٦٠ \times {}^{ن-١}ل_{٣}$ فإن : ن = ..............

(أ) ٦ (ب) ١٥ (ج) ١٠ (د) ١٢

---

**٤** الحد الخامس من النهاية فى مفكوك $\left(\frac{س^{٢}}{٢} - \frac{٢}{س^{٢}}\right)^{١٢}$ يساوى ..............

(أ) $\frac{٧٩٢٠}{س^{٤}}$ (ب) $-\frac{٧٩٢٠}{س^{٤}}$ (ج) $٧٢٢٠\ س^{-٤}$ (د) $-٧٥٢٠\ س^{٤}$

---

**٥** فى مفكوك $\left(س^{٢} + \frac{٢}{س}\right)^{٦}$ النسبة بين قيمة الحد الخالى من س ومعامل الحد الأوسط = ..............

(أ) ١ : ٢ (ب) ٣ : ٤ (ج) ٣ : ٢ (د) ٢ : ٥

---

**٦** إذا كان : ${}^{ن+٢}ل_{ر} : {}^{ن+٢}ق_{ر} = ٢ : ١$ ، ${}^{ن}ق_{ر+١} : {}^{ن}ق_{ر} = ٥ : ٣$ فإن : ${}^{٢ن}ق_{ن-ر} =$ ..............

(أ) ٢٠٠٢ (ب) ${}^{١٤}ق_{٧}$ (ج) ٢٠٢٠ (د) ٢٠٢٤

---

**٧** عدد حدود مفكوك المقدار : $\left((س + ٤ ص)^{٣} (س - ٤ ص)^{٣}\right)^{٢}$ يساوى ..............

(أ) ٦ (ب) ٧ (ج) ٨ (د) ٣٢

---

**٨** عدد طرق اختيار حرفين مختلفين معًا أو ثلاثة أحرف مختلفة معًا من عناصر المجموعة $\{$أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ ، و$\}$ هى ..............

(أ) ${}^{٦}ق_{٢} \times {}^{٦}ق_{٣}$ (ب) ${}^{٦}ل_{٢} \times {}^{٦}ل_{٣}$ (ج) ${}^{٦}ق_{٢} + {}^{٦}ق_{٣}$ (د) ${}^{٦}ل_{٢} + {}^{٦}ل_{٣}$

---

**٩** فى مفكوك $\left(\sqrt{س} + \frac{١}{س}\right)^{٨}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان : $ح_{٤}$ ، $ح_{٥}$ ، $٢٥\ ح_{٧}$ ، $ح_{٦}$ متناسبة فإن : س = ..............

(أ) $\frac{٥}{٨}$ (ب) $\frac{٣}{٥}$ (ج) $\frac{٨}{٥}$ (د) $\frac{٥}{٢}$

**١٠** فى مفكوك $س^{ن}\left(\frac{١}{س} - ٢\right)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان : $ح_{٥} = ٢٠١٦ \, س^{٤}$ فإن النسبة بين معامل الحد الثالث ومعامل الحد الرابع تساوى ...............

(أ) ٣ : ٧ (ب) −٣ : ١٤ (ج) −١ : ١٤ (د) −٣ : ٧

---

**١١** إذا كان : $\frac{{}^{١٢}ق_{ر} + {}^{١٢}ق_{ر-١}}{{}^{١٢}ق_{ر+١} + {}^{١٢}ق_{ر}} = ٢$ فإن : ر = ...............

(أ) ١٠ (ب) ١١ (ج) ٨ (د) ٩

---

**١٢** فى مفكوك $\left(س + \frac{م}{س^{٢}}\right)^{١٠}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان الحد الأوسط = $\frac{٦٣}{٨}$ فإن : $\frac{س}{م}$ = ...............

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٢ (ج) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{٩}{٨}$

---

**١٣** فى مفكوك $\left(\frac{س^{٢}}{٢} - \frac{٤}{س}\right)^{١١}$ حسب قوى س التنازلية فإن معامل $س^{٥}$ = ...............

(أ) −١٣٤٠٣٥ (ب) ١٣٤٠٣٥ (ج) −٣٣٧٩٢٠ (د) ٣٥١٣٤٢

---

**١٤** مجموع معاملات حدود مفكوك : $(١ + س - ٣ س^{٢})^{٢٠٢١}$ = ...............

(أ) −١ (ب) ١ (ج) صفر (د) ٢٠١٧

---

**١٥** من مجموعة الأرقام {٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩} بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من رقمين مختلفين أو من ثلاثة أرقام مختلفة ؟

(أ) ٢٠ (ب) ٨٠ (ج) ١٠٠ (د) ١٢٠٠

---

**١٦** إذا كان : ${}^{ن}ق_{ر-١} = ٣٦$ ، ${}^{ن}ق_{ر} = ٨٤$ ، ${}^{ن}ق_{ر+١} = ١٢٦$ فإن : ر = ...............

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

---

**١٧** معامل $س^{١٣}$ فى مفكوك $\sum_{ر=٠}^{٥٠} {}^{٥٠}ق_{ر} \, (س - ١)^{٥٠ - ر} \times ٢^{ر}$ يساوى ...............

(أ) ${}^{٥٠}ق_{١٣}$ (ب) ${}^{٥٠}ق_{١٢}$ (ج) ١ (د) صفر

---

**١٨** فى مفكوك $(١ + س)^{٥٩}$ حسب قوى س التصاعدية مجموع معاملات الـ ٣٠ حدًا الأخيرة يساوى ...............

(أ) $٢^{٢٩}$ (ب) $٢^{٢٨}$ (ج) $٢^{٥٨}$ (د) $٢^{٥٩}$

---

**١٩** إذا كان ${}^{١٣}ق_{ر} : {}^{١٣}ق_{ر+١} = ٩ : ٥$ ، ${}^{ن}ق_{ر-٢} + {}^{ن}ق_{ر-١} = ٣٤٣٢$ ، فما قيمة كل من ن ، ر ؟

---

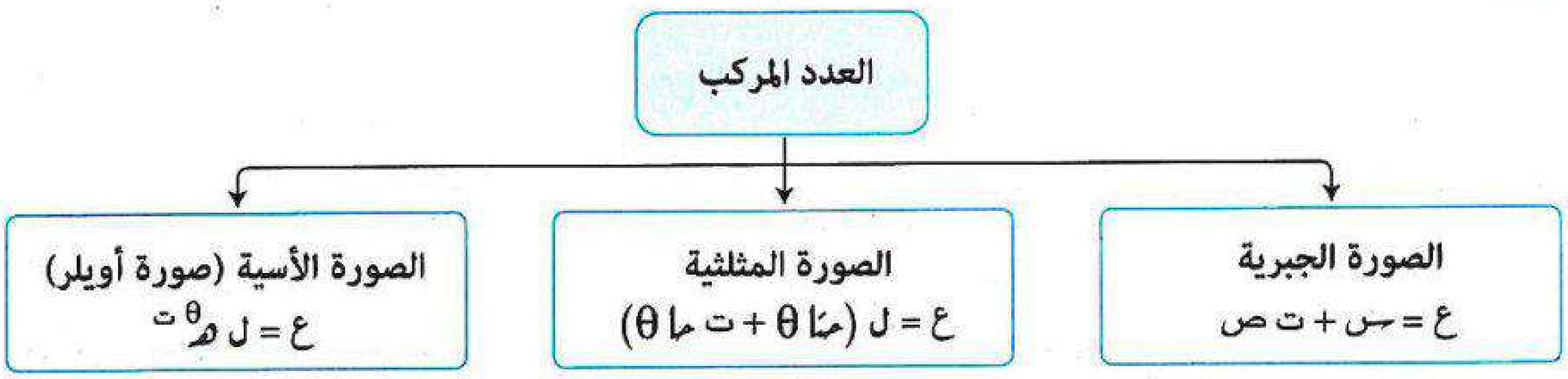
**٢٠** فى مفكوك $\left(٢ س + \frac{٣}{س^{٢}}\right)^{٢٠}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان : $ح_{٩} = ح_{١٠}$

فأوجد قيمة س ثم أوجد رتبتى حدين متتاليين فى هذا المفكوك بحيث تكون النسبة بين أحدهما والحد التالى له كنسبة ٨ : ١٥ وأثبت أن المفكوك لا يحتوى على حد خالٍ من س

# ملخص الوحدة الثانية

## الأعداد المركبة

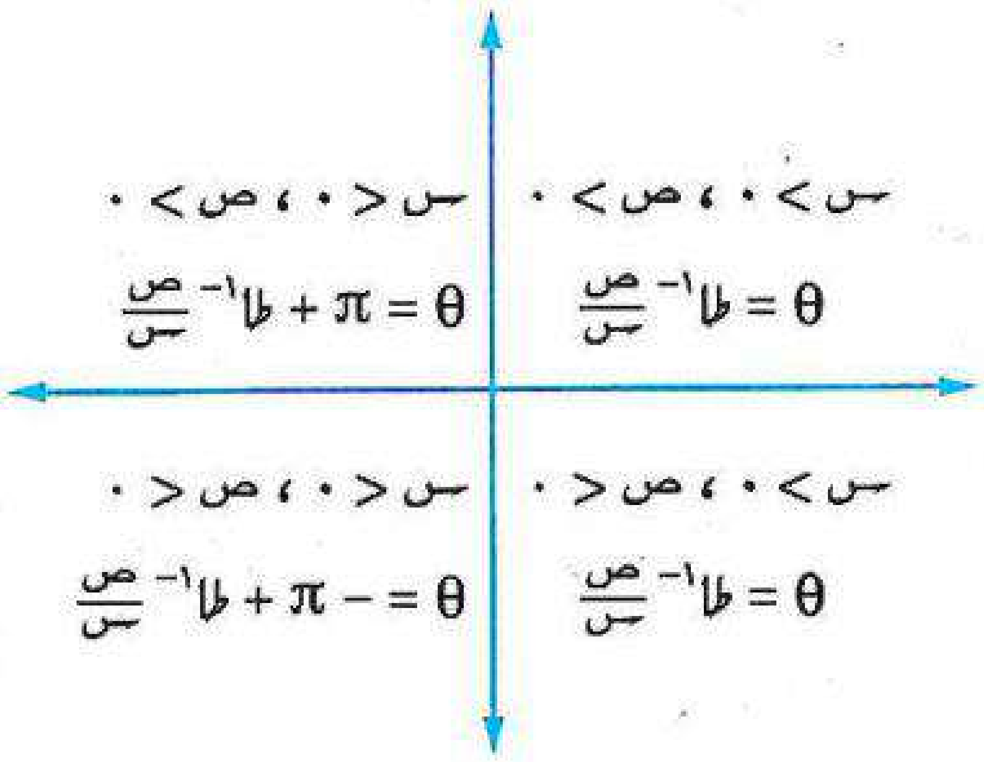
**تذكر** الصور المختلفة للعدد المركب



حيث : • مقياس العدد ع = | ع | = ل = $\sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2}$

• θ هى سعة العدد ع وتكون θ هى السعة الأساسية إذا كانت

θ ∈ ]− π ، π] وتحدد قيمتها بالاستعان بالشكل المقابل



### ملاحظات

① | ع | ≥ ٠ مع ملاحظة أن : | ع | = ٠ إذا كان ع = ٠

② $\overline{\text{ع}}$ = س − ت ص «مرافق العدد ع»

③ $\overline{\text{ع}_1 + \text{ع}_2} = \overline{\text{ع}_1} + \overline{\text{ع}_2}$ ، $\overline{\text{ع}_1 \text{ع}_2} = \overline{\text{ع}_1} \times \overline{\text{ع}_2}$

④ ع + $\overline{\text{ع}}$ = ٢ س «حقيقى صرف» ، ع − $\overline{\text{ع}}$ = ٢ ت ص «تخيلى صرف»

⑤ ع $\overline{\text{ع}}$ = $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = \text{ل}^2$ حيث ل مقياس العدد المركب «| ع |»

أى أن : ع $\overline{\text{ع}}$ = $|\text{ع}|^2$

⑥ إذا كان : ع = س فإن : $\overline{\text{ع}}$ = س

⑦ إذا كان : ع = ت ص فإن : $\overline{\text{ع}}$ = − ت ص

⑧ $|\text{ع}| = |\overline{\text{ع}}| = |-\text{ع}| = |-\overline{\text{ع}}|$

⑨ $\text{ع}\,\overline{\text{ع}} = |\text{ع}|^2 = |\overline{\text{ع}}|^2$

⑩ سعة العدد المركب تأخذ عدد غير منته من القيم وذلك بإضافة عدد صحيح من الدورات الكاملة ($2\pi$)

**أى أن :**

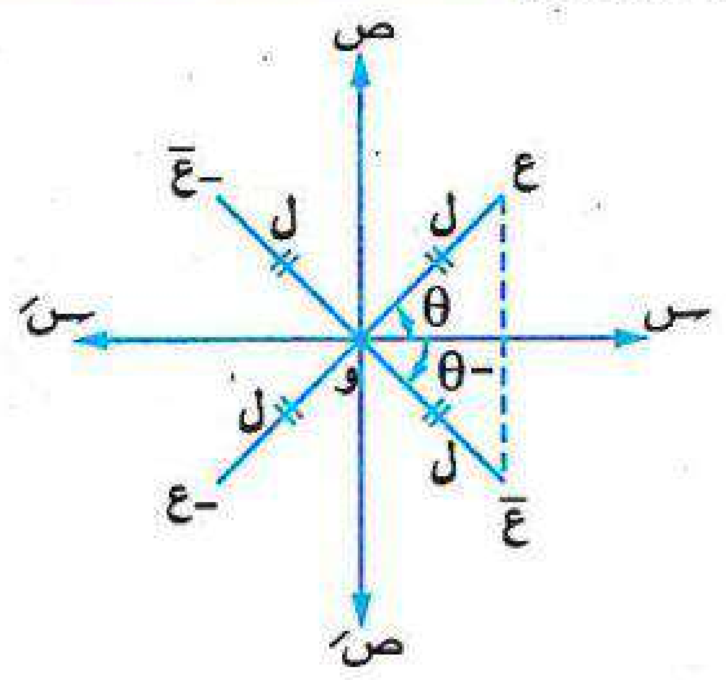
سعة العدد المركب = $\theta + 2\pi$ ن حيث ن ∈ ص

⑪ سعة العدد المركب لا تتغير عند ضربه فى عدد حقيقى موجب

**أى أن :**

سعة ع = سعة ك ع حيث ك ∈ $ح^+$

### من الرسم



- العدد ومرافقه متماثلان حول محور السينات.
- العدد ومعكوسه الجمعى متماثلان حول نقطة الأصل.
- العدد ومرافقه ومعكوساهما الجمعيان لهم نفس المقياس.

## تذكر تحويل الصورة المثلثية الغير قياسية إلى الصورة القياسية

نحدد الربع الذى يقع فيه العدد المركب حسب الإشارة التى أمام الدوال المثلثية بالجزئين الحقيقى والتخيلى ثم نستخدم الشكل التالى :

### الربع الأول

**الدوال المثلثية مضبوطة**

- إذا كان : ع = ل (حتا θ + ت حا θ)

تبقى كما هى : ل (حتا θ + ت حا θ)

**الدوال المثلثية معكوسة**

- إذا كان : ع = ل (حا θ + ت حتا θ)

تحول للصورة ع

= ل [حتا $(\frac{\pi}{2} - \theta)$ + ت حا $(\frac{\pi}{2} - \theta)$]

### الربع الثانى

**الدوال المثلثية مضبوطة**

- إذا كان : ع = ل (− حتا θ + ت حا θ)

تحول إلى ع

= ل [حتا $(\pi - \theta)$ + ت حا $(\pi - \theta)$]

**الدوال المثلثية معكوسة**

- إذا كان : ع = ل (− حا θ + ت حتا θ)

تحول إلى ع

= ل [حتا $(\frac{\pi}{2} + \theta)$ + ت حا $(\frac{\pi}{2} + \theta)$]

### الربع الثالث

**الدوال المثلثية مضبوطة**

- إذا كان : ع = ل (− حتا θ − ت حا θ)

تحول إلى ع = ل [حتا $(-\pi + \theta)$ + ت حا $(-\pi + \theta)$]

**الدوال المثلثية معكوسة**

- إذا كان : ع = ل (− حا θ − ت حتا θ)

تحول إلى ع

= ل [حتا $(-\frac{\pi}{2} - \theta)$ + ت حا $(-\frac{\pi}{2} - \theta)$]

### الربع الرابع

**الدوال المثلثية مضبوطة**

- إذا كان : ع = ل (حتا θ − ت حا θ)

تحول إلى ع = ل [حتا $(-\theta)$ + ت حا $(-\theta)$]

**الدوال المثلثية معكوسة**

- إذا كان : ع = ل (حا θ − ت حتا θ)

تحول إلى ع

= ل [حتا $(-\frac{\pi}{2} + \theta)$ + ت حا $(-\frac{\pi}{2} + \theta)$]

**لاحظ أن :** • الطريقة السابقة نستخدم لكل $ل > ٠$ ، $\theta \in [٠ ، ٢\pi[$

• إذا كانت السعة التى حصلنا عليها $\in ]-\pi ، \pi]$ فإنها تكون هى السعة الأساسية.

• إذا لم تكن السعة التى حصلنا عليها أساسية نضيف إليها $٢\pi$ أو نحذف منها $٢\pi$ نحصل على السعة الأساسية.

## تذكر ضرب وقسمة الأعداد المركبة

إذا كان : $ع_١$ ، $ع_٢$ عددين مركبين

| الصورة الجبرية | الصورة المثلثية | الصورة الأسية |
|---|---|---|
| $ع_١ = س_١ + ت\,ص_١$<br>$ع_٢ = س_٢ + ت\,ص_٢$ | $ع_١ = ل_١ (\text{حتا}\,\theta_١ + ت\,\text{حا}\,\theta_١)$<br>$ع_٢ = ل_٢ (\text{حتا}\,\theta_٢ + ت\,\text{حا}\,\theta_٢)$ | $ع_١ = ل_١\,هـ^{\theta_١\,ت}$<br>$ع_٢ = ل_٢\,هـ^{\theta_٢\,ت}$ |
| $ع_١\,ع_٢ = (س_١\,س_٢ - ص_١\,ص_٢)$<br>$+ (س_١\,ص_٢ + س_٢\,ص_١)\,ت$ | $ع_١\,ع_٢ = ل_١\,ل_٢ [\text{حتا}\,(\theta_١ + \theta_٢)$<br>$+ ت\,\text{حا}\,(\theta_١ + \theta_٢)]$ | $ع_١\,ع_٢ = ل_١\,ل_٢\,هـ^{(\theta_١ + \theta_٢)\,ت}$ |
| $ع_١ \div ع_٢ = \frac{س_١ + ت\,ص_١}{س_٢ + ت\,ص_٢} \times \frac{س_٢ - ت\,ص_٢}{س_٢ - ت\,ص_٢}$<br>أى نقوم بضرب كلاً من البسط والمقام فى مرافق المقام. | $ع_١ \div ع_٢ = \frac{ل_١}{ل_٢} [\text{حتا}\,(\theta_١ - \theta_٢)$<br>$+ ت\,\text{حا}\,(\theta_١ - \theta_٢)]$ | $ع_١ \div ع_٢ = \frac{ل_١}{ل_٢}\,هـ^{(\theta_١ - \theta_٢)\,ت}$ |

**تعميم :** $ع_١\,ع_٢ \dots ع_ن = ل_١\,ل_٢ \dots ل_ن [\text{حتا}\,(\theta_١ + \theta_٢ + \dots + \theta_ن) + ت\,\text{حا}\,(\theta_١ + \theta_٢ + \dots + \theta_ن)]$

### ملاحظات

• $ت = \text{حتا}\,\frac{\pi}{٢} + ت\,\text{حا}\,\frac{\pi}{٢} = هـ^{\frac{\pi}{٢}\,ت}$ ، $-ت = \text{حتا}\,\frac{-\pi}{٢} + ت\,\text{حا}\,\frac{-\pi}{٢} = هـ^{\frac{-\pi}{٢}\,ت}$

، $١ = \text{حتا}\,٠ + ت\,\text{حا}\,٠ = هـ^{\text{صفر}}$ ، $-١ = \text{حتا}\,\pi + ت\,\text{حا}\,\pi = هـ^{\pi\,ت}$

• إذا كان : $ع = ل\,(\text{حتا}\,\theta + ت\,\text{حا}\,\theta) = ل\,هـ^{\theta\,ت}$ فإن :

① $ع^ن = ل^ن [\text{حتا}\,(ن\theta) + ت\,\text{حا}\,(ن\theta)] = ل^ن\,هـ^{ن\theta\,ت}$

حيث $ن \in ص^+$ وتسمى نظرية ديموافر بأس صحيح موجب.

② $ع^{-١} = \frac{١}{ع} = \frac{\text{حتا}\,٠ + ت\,\text{حا}\,٠}{ل\,(\text{حتا}\,\theta + ت\,\text{حا}\,\theta)} = \frac{١}{ل} [\text{حتا}\,(-\theta) + ت\,\text{حا}\,(-\theta)] = \frac{١}{ل}\,هـ^{-\theta\,ت}$

③ $\bar{ع} = ل\,(\text{حتا}\,(-\theta) + ت\,\text{حا}\,(-\theta)) = ل\,هـ^{-\theta\,ت}$

## تذكر نظرية ديموافر بأس نسبى موجب

* تستخدم لإيجاد الجذر النونى للعدد المركب ع وذلك بوضعه فى الصورة المثلثية :

$ع = ل\,(\text{حتا}\,\theta + ت\,\text{حا}\,\theta)$ ومنها فإن : $ع^{\frac{١}{ن}} = ل^{\frac{١}{ن}} [\text{حتا}\,(\frac{\theta + ٣٦٠^\circ\,ر}{ن}) + ت\,\text{حا}\,(\frac{\theta + ٣٦٠^\circ\,ر}{ن})]$

لكل $ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، \dots ، (ن - ١)$ ، $ن \in ص^+$

وإذا كانت السعة بالجذور الناتجة ليست السعة الأساسية يتم تحويلها إلى السعة الأساسية.

## تذكر الجذور النونية

المعادلة $\text{س}^{\text{ن}} = \text{أ}$ حيث أ عدد مركب يكون لها ن من الجذور على الصورة : $\text{س} = \text{أ}^{\frac{١}{\text{ن}}}$ وتقع الجذور جميعًا فى مستوى أرجاند على دائرة واحدة طول نصف قطرها $|\text{أ}^{\frac{١}{\text{ن}}}|$ أى الجذر النونى الموجب لمقياس العدد المركب أ

وتكون رؤوس مضلع منتظم عدد أضلاعه ن ويكون الفرق بين سعة كل جذر والجذر التالى له $= \frac{٢\pi}{\text{ن}}$

## تذكر الجذور التكعيبية للواحد الصحيح $(١ ، \omega ، \omega^٢)$

* **الصورة المثلثية والصورة الجبرية للجذور التكعيبية للواحد الصحيح :**

- **الصورة المثلثية هى :** $(\text{حتا}\ ٠ + \text{ت جا}\ ٠)$ ، $\left(\text{حتا}\frac{٢\pi}{٣} + \text{ت جا}\frac{٢\pi}{٣}\right)$ ، $\left(\text{حتا}\frac{٤\pi}{٣} + \text{ت جا}\frac{٤\pi}{٣}\right)$
- **الصورة الجبرية هى :** ١ ، $\frac{-١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{ت}$ ، $\frac{-١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{ت}$ .

أى أن : الواحد الصحيح له ثلاثة جذور أحدهم حقيقى وهو العدد ١ والآخران غير حقيقيان مترافقان مربع أحدهما يساوى الآخر.

* مجموع الجذور التكعيبية للواحد الصحيح = صفر

أى أن : $\boxed{١ + \omega + \omega^٢ = \text{صفر}}$ ومنها $\boxed{١ + \omega = -\omega^٢}$ ، $\boxed{١ + \omega^٢ = -\omega}$ ، $\boxed{\omega + \omega^٢ = -١}$

* حاصل ضرب الجذرين التكعيبيين الغير حقيقيين للواحد الصحيح = ١

أى أن : $\omega^٣ = ١$ ومنها $\frac{١}{\omega} = \omega^٢$ ، $\frac{١}{\omega^٢} = \omega$

* الفرق بين الجذرين التكعيبيين الغير حقيقيين للواحد الصحيح = $\pm\sqrt{٣}$ ت

أى أن : $\boxed{\omega - \omega^٢ = \pm\sqrt{٣}\ \text{ت}}$ ، أ $\boxed{\omega^٢ - \omega = \pm\sqrt{٣}\ \text{ت}}$

لاحظ أن : ① مرافق العدد $\omega$ هو $\omega^٢$ وبالتالى يكون : مرافق العدد $(١ + \omega)$ هو $(١ + \omega^٢)$

ومرافق العدد $(٢٠١٨ + \omega)$ هو $(٢٠١٨ + \omega^٢)$

ومرافق العدد $(\text{أ}\omega - \text{ب}\omega^٢)$ هو $(\text{أ}\omega^٢ - \text{ب}\omega)$ لكل أ ، $\text{ب} \in \text{ح}$

② $\omega^{٣\text{ن}} = ١$ ، $\omega^{٣\text{ن}+١} = \omega$ ، $\omega^{٣\text{ن}+٢} = \omega^٢$ حيث $\text{ن} \in \text{ص}$

③ **الجذور النونية للواحد الصحيح :**

إذا كان $\text{ع}^{\text{ن}} = ١$ فإن : $\text{ع} = (\text{حتا}\ ٠^\circ + \text{ت جا}\ ٠^\circ)^{\frac{١}{\text{ن}}} = \text{حتا}\frac{٢\pi\text{ر}}{\text{ن}} + \text{ت جا}\frac{٢\pi\text{ر}}{\text{ن}}$

حيث $\text{ر} \in \text{ص}$ ، $\frac{٢\pi\text{ر}}{\text{ن}} \in ]-\pi ، \pi]$

وتمثل الجذور النونية للواحد الصحيح على مستوى أرجاند برؤوس مضلع منتظم عدد رؤوسه ن وتقع على دائرة مركزها نقطة الأصل ، وطول نصف قطرها ١ ويكون الفرق بين سعة كل جذر والجذر التالى له $= \frac{٢\pi}{\text{ن}}$

# اختبار على الوحدة الثانية

**١** إذا كان : $|ع| = |ع + ٢|$ فإن الجزء الحقيقى للعدد المركب ع = ……………

(أ) ١  (ب) −٢  (ج) ٢  (د) −١

---

**٢** إذا كان : $ع_١ = ٢ هـ^{\frac{\pi}{٦}ت}$ ، $ع_٢ = ٢ هـ^{\frac{-\pi}{٦}ت}$

وكان $ع = ع_١ + ع_٢ + ع_١ ع_٢$ فإن : ع = ………… حيث $ت^٢ = -١$

(أ) $٢\sqrt{٣} + ١$  (ب) $٢\sqrt{٣}$  (ج) $٢(\sqrt{٣} + ٢)$  (د) $\sqrt{٣} + ٢$

---

**٣** إذا كانت : ع = −٥ (حتا ٦٠° − ت حا ٦٠°) فإن السعة الأساسية للعدد ع تساوى ……………

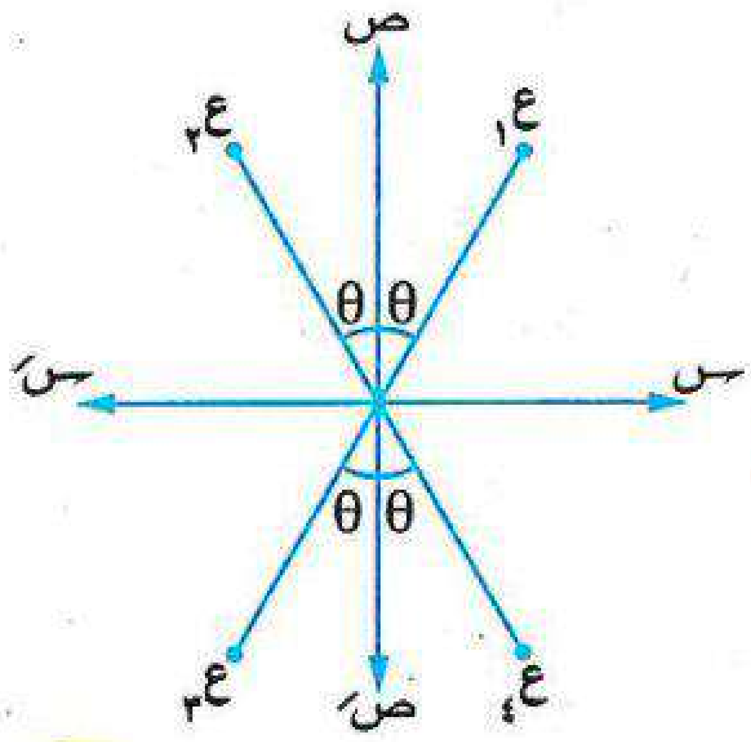
(أ) ٦٠°  (ب) ٣٠°  (ج) ٩٠°  (د) ١٢٠°

---

**٤** في الشكل المقابل :

إذا كانت : $ع_١$ ، $ع_٢$ ، $ع_٣$ ، $ع_٤$ أعداد مركبة

، فإن سعة $ع_١ ع_٢ ع_٣ ع_٤$ = ……………



(أ) ٠°  (ب) ٩٠°

(ج) ١٨٠°  (د) −٩٠°

---

**٥** إذا كان : $ع = ٦ \left(حتا \frac{٤\pi}{٣} - ت حا \frac{٤\pi}{٣}\right)^٢$ فإن : ع فى الصورة المثلثية = ……………

(أ) $٣٦ \left(حتا \frac{٤\pi}{٣} + ت حا \frac{٤\pi}{٣}\right)$  (ب) $٦ \left(حتا \frac{٨\pi}{٣} + ت حا \frac{٨\pi}{٣}\right)$

(ج) $٦ \left(حتا \left(\frac{-٢\pi}{٣}\right) + ت جا \left(\frac{-٢\pi}{٣}\right)\right)$  (د) $٦ \left(حتا \left(\frac{-\pi}{٣}\right) + ت حا \left(\frac{-\pi}{٣}\right)\right)$

---

**٦** إذا كان : ω ، $\omega^٢$ هى الجذور التكعيبية الغير حقيقية للواحد الصحيح

فإن : $\frac{أ + ب\omega + حـ\omega^٢}{حـ + أ\omega + ب\omega^٢} + \frac{أ + ب\omega + حـ\omega^٢}{ب + حـ\omega + أ\omega^٢} =$ ……………

(أ) −١  (ب) صفر  (ج) ١  (د) ٢

---

**٧** الجذرين التربيعيين للعدد ع حيث ع = −٢ ت على الصورة الأسية هما ……………

(أ) $\sqrt{٢} هـ^{\frac{-\pi}{٤}ت}$ ، $\sqrt{٢} هـ^{\frac{٢\pi}{٤}ت}$  (ب) $\sqrt{٢} هـ^{\frac{\pi}{٤}ت}$ ، $\sqrt{٢} هـ^{\frac{-٢\pi}{٤}ت}$

(ج) $٢ هـ^{\frac{\pi}{٤}ت}$ ، $٢ هـ^{\frac{٢\pi}{٤}ت}$  (د) $٢ هـ^{\frac{-\pi}{٤}ت}$ ، $٢ هـ^{\frac{-٢\pi}{٤}ت}$

**٨** إذا كان ع عدد مركب وكان سعة (ع − ٢) = $\frac{\pi}{٢}$ ، سعة (ع − ٤) = $\frac{٣\pi}{٤}$ فإن سعة ع = ……………

(أ) $\pi$ (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) $\frac{\pi}{٤}$ (د) $\frac{٣\pi}{٤}$

---

**٩** إذا كان : س = $\frac{-١ + \sqrt{٣}\,ت}{٢}$ حيث $ت^٢ = -١$ فإن : $س^٥ + س^٤ + ٥$ = ……………

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) $\omega$ (د) ٤

---

**١٠** إذا كان : (١ − ت) س + (١ + ت) ص + ٢ ت = ٠ لكل س ، ص ∈ ح

فإن : المقدار $\sqrt{٣ س + ٤ ص ت}$ = ……………

(أ) ± (٥ − ت) (ب) ± (٢ − ت) (جـ) (٣ + ت) أ، (١ − ت) (د) ٦ أ، − ت

---

**١١** إذا كان : $ع_١ = ٢\sqrt{٣} - ت$ ، $ع_٢ = ٢$ (جتا ٣٠° + ت جا ٣٠°) فإن : $\overline{ع_١} - \overline{ع_٢}$ = ……………

(أ) $٢\sqrt{٣} + ت$ (ب) $\sqrt{٣} - ت$ (جـ) $\sqrt{٣} + ٢ ت$ (د) $٣\sqrt{٣} + ٢ ت$

---

**١٢** المعادلة التربيعية التي جذراها : $(١ + \omega - \omega^٢)^٢$ ، $(١ - \omega + \omega^٢)^٢$ هي ……………

(أ) $س^٢ - ١٦ س + ٦٤ = ٠$ (ب) $س^٢ - ١٦ س - ٦٤ = ٠$

(جـ) $س^٢ + ١٦ س + ٦٤ = ٠$ (د) $٢ س^٢ + ١٦ س + ٦٤ = ٠$

---

**١٣** إذا كانت : ع = $\left(١ + \text{جتا}\frac{\pi}{٣} + ت\,\text{جا}\frac{\pi}{٣}\right)^٦$ فإن العدد ع على الصورة المثلثية هو ……………

(أ) ٣ $\left(\text{جتا}\frac{\pi}{٦} + ت\,\text{جا}\frac{\pi}{٦}\right)$ (ب) $٣^٢$ (جتا $\pi$ + ت جا $\pi$)

(جـ) ٢٧ $\left(\text{جتا}\frac{\pi}{٣} + ت\,\text{جا}\frac{\pi}{٣}\right)$ (د) ٢٧ (جتا $\pi$ + ت جا $\pi$)

---

**١٤** ٣ (جتا ٣٠° + ت جا ٣٠°) × ٦ (جتا ٧٠° + ت جا ٧٠°) = ……………

(أ) ١٨ (جتا ٢١٠° + ت جا ١٠٠°) (ب) ٩ (جتا ١٠٠° + ت جا ١٠٠°)

(جـ) ١٨ (جتا ١٠٠° + ت جا ١٠٠°) (د) ٩ (جتا ٤٠° + ت جا ٤٠°)

---

**١٥** $\frac{(\text{جتا}\,\theta + ت\,\text{جا}\,\theta)^٤}{(\text{جا}\,\theta + ت\,\text{جتا}\,\theta)^٥}$ = ……………

(أ) جا (٩ θ) − ت جتا (٩ θ) (ب) جتا (٩ θ) − ت جا (٩ θ)

(جـ) جتا θ − ت جا θ (د) جا θ − ت جتا θ

---

**١٦** إذا كان : س + ص ت = $\frac{أ + ب ت}{أ - ب ت}$ فإن : $س^٢ + ص^٢$ = ……………

(أ) $أ^٢ + ب^٢$ (ب) $أ^٢ - ب^٢$ (جـ) أ − ب (د) ١

**١٧** إذا كان : $س + ت\, ص = هـ^{θ\, ت}$ فإن أقل قيمة للعدد $س\, ص$ هى ..............

(أ) $-\frac{١}{٢}$ (ب) $-١$ (جـ) $-٢$ (د) $١$

---

**١٨** $(١ + ω)^{٤} + (١ + ω^{٢})^{٤} + (ω + ω^{٢})^{٤} =$ ..............

(أ) صفر (ب) $١$ (جـ) $-١$ (د) $ω$

---

**١٩** ضع العدد $ع = ١ + \sqrt{٣}\, ت$ فى الصورة المثلثية ثم أوجد جذريه التربيعيين فى الصورة الأسية.

---

**٢٠** إذا كان : $ع_{١} = ١ - \sqrt{٣}\, ت$ ، $ع_{٢} = هـ^{\frac{-π}{٦}\, ت}$ ، $ع_{٣} = \left(جتا \frac{π}{١٢} - ت\, جا \frac{π}{١٢}\right)^{٢}$ ، $ت^{٢} = -١$

فضع العدد ع على الصورة المثلثية ، ثم على الصورة الأسية ، حيث $ع = \frac{ع_{١}\, ع_{٢}}{ع_{٣}}$

# اختبار تراكمى على الوحدتين الأولى والثانية

**١** إذا كان : $ع_{١} = ٢ + ٢\sqrt{٣}\,ت$ ، $ع_{٢} = -٣ - ٣\sqrt{٣}\,ت$ فإن سعة العدد $(ع_{١} + ع_{٢})$ = ..............

ⓐ (أ) ٦٠° (ب) −١٢٠° (ج) ١٨٠° (د) −٦٠°

---

**٢** فى مفكوك $س^{٣}(١ + س)^{٧}$ معامل الحد الذى يحتوى على $س^{٤}$ هو ..............

(أ) $^{٧}ق_{٧}$ (ب) $^{٧}ق_{١}$ (ج) $^{٧}ق_{٤}$ (د) $^{٧}ق_{٢}$

---

**٣** $ه^{θت} + ه^{-θت}$ = ..............

(أ) $ه^{٢θت}$ (ب) ٢ جتا θ (ج) ٢ جا θ (د) $ه^{-٢θت}$

---

**٤** المقدار $\left(\frac{أ + بω + حـω^{٢}}{ω^{٢}أ + ب + حـω} - \frac{حـ + أω^{٢} + بω}{ωحـ + بω^{٢} + أ}\right)^{٨}$ = ..............

(أ) ٩ ت (ب) ± ٨١ (ج) ٨١ (د) ٨١ ت

---

**٥** فى مفكوك $(١ + س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان : $ح_{٣} = ١٧$ ، $٣ ح_{٢} × ح_{٤} = ٥٤٤$

فإن : $ن س$ = ..............

(أ) ± ١٨ (ب) ± ٦ (ج) ± ٣٦ (د) $\pm \frac{١}{٣}$

---

**٦** الحد الأخير فى مفكوك $(٢ - س)^{٥}(٢ + س)^{٥}$ حسب قوى س التصاعدية هو ..............

(أ) $س^{٥}$ (ب) $-س^{٥}$ (ج) $س^{١٠}$ (د) $-س^{١٠}$

---

**٧** فى مفكوك $\left(\frac{١}{س} + س^{٢}\right)^{١٥}$ حسب قوى س التصاعدية فإن قيمة الحد الخالى من س = ..............

(أ) ٤٥ (ب) ٢٠٠٢ (ج) ٣٠٠٣ (د) $^{١٥}ق_{٢}$

---

**٨** معامل $س^{٦}$ فى مفكوك $[(١ + س)^{٦} + (١ + س)^{٧} + (١ + س)^{٨} + ... + (١ + س)^{١٥}]$

يساوى ..............

(أ) $^{١٦}ق_{٩}$ (ب) $^{١٦}ق_{٢} - ١$ (ج) $^{١٦}ق_{٥} - {}^{٦}ق_{٥}$ (د) $^{١٦}ق_{١٠}$

---

**٩** المعادلة التربيعية التى جذراها $\frac{٥ω - ٢}{٥ - ٢ω^{٢}}$ ، $\frac{٧ - ٣ω^{٢}}{٧ω - ٣}$ هى ..............

(أ) $س^{٢} + ω = ١$ (ب) $ωس + ٣س + ١ = ٠$

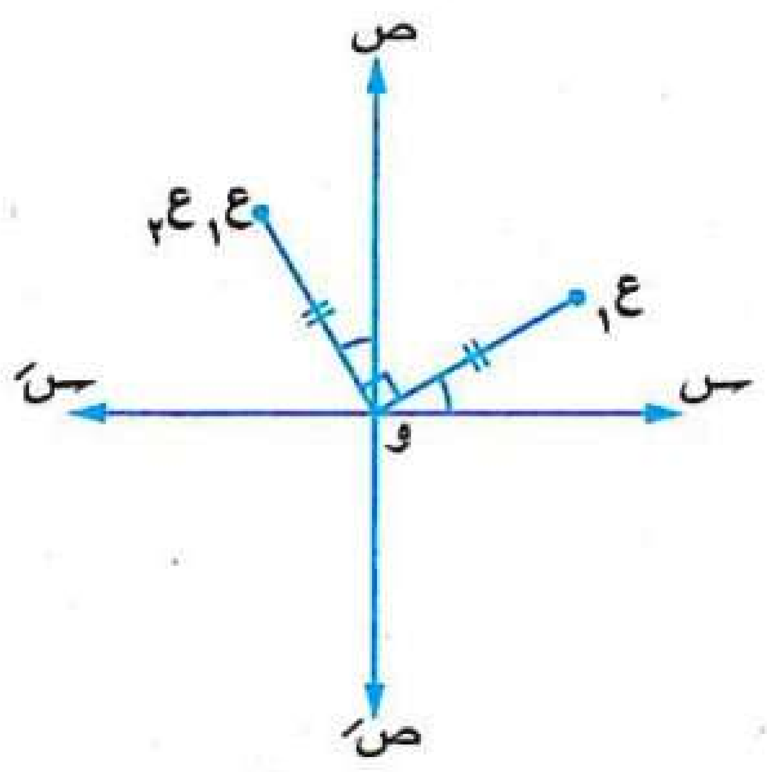
(ج) $س^{٢} + ١ = ٠$ (د) $س^{٢} + س + ١ = ٠$

**١٠** إذا كان : ${}^{ن+٢}ل_{ر} = ٢ \times {}^{ن+٢}ق_{ر}$ ، $\frac{{}^{ن}ق_{ر+١}}{{}^{ن}ق_{ر}} = \frac{٥}{٣}$

فإن : ${}^{٢ن}ق_{ن-ر} + {}^{ن+٣}ل_{ر-١} =$ ..............

(أ) ٢٠٠٥ (ب) ٢٠٢١ (جـ) ٢٠١٢ (د) ٢٠٢٢

**١١** في الشكل المقابل :



$ع_١$ ، $ع_٢$ عددان مركبان وكان ($ع_١$ $ع_٢$) عدد مركب

فإن : $ع_٢ =$ ..............

(أ) −٢ ت (ب) ٢ − ت

(جـ) ت (د) ٢ ت

**١٢** من مجموعة أشخاص تحتوى على ٦ رجال و ٤ سيدات يُراد تكوين لجنة مكونة من ٥ أشخاص بحيث تحتوى هذه اللجنة على ٣ رجال على الأقل ، فإن عدد اللجان التى يمكن تكوينها = ..............

(أ) ١٨٦ (ب) ٢١٠ (جـ) ١٣٢ (د) ١٨٠

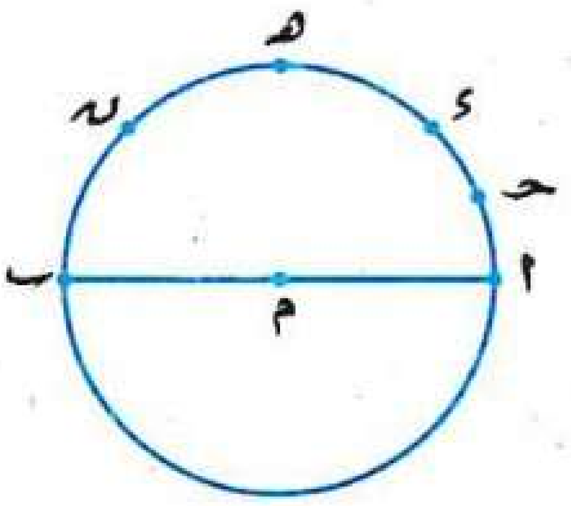
**١٣** إذا كان : $ع_١ = ٨$ (جتا $\pi$ + ت جا $\pi$) ، $ع_٢ = ٤\,هـ^{\frac{٢}{٢}\pi ت}$ فإن $\frac{ع_١}{ع_٢} =$ .............. حيث $ت^٢ = -١$

(أ) ٢ + ٢ ت (ب) ٢ ت (جـ) −٢ ت (د) ٢ − ٢ ت

**١٤** إذا كان : ك = $(٢ س + ت)^{١٥} - ١٥\,(ت - ٢ ص)\,(٢ س + ت)^{١٤} + \frac{١٥ \times ١٤}{\underline{|٢}}\,(ت - ٢ ص)^٢$ $(٢ س + ت)^{١٣} - ... - (ت - ٢ ص)^{١٥}$ فإن : ك عندما $س = ت\,\omega^٢$ ، $ص = ت\,\omega$ هى ..............

(أ) $٢^{١٥}$ ت (ب) $٢^{١٠}$ ت (جـ) $٢^{١٢}$ (د) $٢^{١٣}$ ت

**١٥** في الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ قطر فى دائرة مركزها م ، وكانت النقاط حـ ، ء ، هـ ، ن تقع على الدائرة ، فإن عدد المثلثات المختلفة التى يمكن تكوينها من النقاط أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ ، ن ، م يساوى ..............

(أ) ٢٠٤ (ب) ٣٥

(جـ) ٢١٠ (د) ٣٤

**١٦** ${}^{ن+١}ق_{٣} + ٢\,{}^{ن+١}ق_{٢} + {}^{ن+١}ق_{١} =$ ..............

(أ) ${}^{ن+١}ق_{٣}$ (ب) ${}^{ن+١}ق_{٢}$ (جـ) ${}^{ن+١}ق_{١}$ (د) ${}^{ن+٣}ق_{٣}$

**١٧** إذا كان : $\bar{ع} = \frac{٣٦}{ع}$ فإن : $|ع|^{٢} - ٤\,|\bar{ع}| - ١٠ =$ ..............

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

---

**١٨** إذا كان : $ل = أ + ب$ ، $م = أ\omega + ب\omega^{٢}$ ، $ن = أ\omega^{٢} + ب\omega$ فإن : $\frac{ل\,م\,ن}{أ^{٣} + ب^{٣}} =$ ..............

(أ) صفر (ب) $-١$ (جـ) ١ (د) $\frac{أ^{٣} - ب^{٣}}{أ^{٣} + ب^{٣}}$

---

**١٩** إذا كان : $ع_{١} = \frac{٦ + ٤ت}{١ + ت}$ ، $ع_{٢} = \frac{٢٦}{٥ - ت}$ فأوجد العدد ع حيث $ع = ٤\,(ع_{١} - ع_{٢})$ على الصورة الأسية وأوجد الجذور التكعيبية للعدد ع على الصورة المثلثية.

---

**٢٠** فى مفكوك : $\left(س^{٣} - \frac{١}{س}\right)^{٨}$ حسب قوى س التنازلية :

① أوجد رتبة وقيمة الحد الخالى من س

② أوجد النسبة بين الحد الأوسط فى هذا المفكوك والحد الذى يليه عندما $س = ١$

# ملخص الوحدة الثالثة

## المحددات والمصفوفات

### تذكر الخواص الأساسية للمحدد

① لا تتغير قيمة المحدد إذا تبدلت الصفوف بالأعمدة والأعمدة بالصفوف بنفس ترتيبها.

ومنها فإن قيمة محدد المصفوفة المربعة تساوى قيمة محدد مدور هذه المصفوفة

② قيمة المحدد لا تتغير بفكه عن طريق عناصر أى صف (عمود).

③ إذا وجد عامل مشترك فى جميع عناصر صف (عمود) فى محدد فإن هذا العامل يمكن أخذه خارج المحدد.

ومنها فإن ضرب المحدد فى عدد حقيقى ك ≠ ٠ فإننا نضرب هذا العدد فى عناصر صف (عمود) واحد فقط.

④ قيمة المحدد تساوى صفر فى الحالات الآتية :

- إذا كانت جميع عناصر أى صف أو (أى عمود) فى محدد تساوى صفر
- إذا تساوت العناصر المتناظرة فى أى صفين (أو عمودين)
- إذا كانت عناصر أى صف (عمود) مضاعفات لعناصر صف عمود آخر فى المحدد.

⑤ إذا بدلنا موضعى صفين (عمودين) فإن قيمة المحدد الناتج = −١ × قيمة المحدد الأصلى.

⑥ إذا كتبت جميع عناصر أى صف (عمود) كمجموع عنصرين فإنه يمكن كتابة المحدد الأصلى على صورة مجموع محددين.

⑦ إذا أضفنا لعناصر أى صف (عمود) العناصر المناظرة لها من صف (عمود) آخر مضروبة فى عدد مثل م فإن قيمة المحدد لا تتغير.

⑧ قيمة المحدد على الصورة المثلثة تساوى حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسى.

⑨ فى أى محدد إذا ضربنا عناصر أى صف (عمود) فى العوامل المرافقة للعناصر المناظرة فى أى صف (عمود) آخر ثم جمعنا نواتج الضرب فإن الناتج يكون مساويًا صفرًا.

**لاحظ أن :** إذا كان (س − أ) أحد عوامل المحدد فإن قيمة المحدد عند س = أ تساوى صفر

### تذكر المعكوس الضربى للمصفوفة ($\text{أ}^{-1}$)

* المعكوس الضربى للمصفوفة من النظم ٢ × ٢ :

إذا كان : $\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{ء} & \text{ح} \end{pmatrix}$

فإن : $\text{أ}^{-1} = \frac{1}{|\text{أ}|} \begin{pmatrix} -\text{ب} & \text{ء} \\ \text{أ} & -\text{ح} \end{pmatrix}$ بشرط $|\text{أ}| \neq 0$

**لاحظ أن**

المصفوفة التى ليس لها معكوس ضربى تعرف بالمصفوفة المنفردة (الشاذة) والتى لها معكوس ضربى تعرف بغير المنفردة (غير الشاذة)

### * المعكوس الضربي للمصفوفة من النظم ٣ × ٣ :

لإيجاد المعكوس الضربي للمصفوفة الغير منفردة أ على النظم٣ × ٣ نتبع الآتي :

- نوجد محدد المصفوفة أ مع ملاحظة أن $|\text{أ}| \neq ٠$
- نكّون مصفوفة العوامل المرافقة لكل عنصر من عناصر المصفوفة أ

حيث $\text{أ}_{\text{ص ع}} = (-١)^{\text{ص} + \text{ع}}$ × المحدد الناتج بعد حذف الصف ص والعمود ع من المصفوفة أ

- نوجد المصفوفة الملحقة $\text{أ}^{\text{مل}}$ وهى مدور مصفوفة العوامل المرافقة.
- نوجد المعكوس الضربي للمصفوفة أ من العلاقة : $\text{أ}^{-١} = \frac{١}{|\text{أ}|} \times \text{أ}^{\text{مل}}$

**لاحظ أن :** لأى مصفوفتين غير منفردتين أ ، ب على النظم ن × ن ، ك ∈ ح فإن :

① $\text{أ}\,\text{أ}^{\text{مل}} = \text{أ}^{\text{مل}}\,\text{أ} = \Delta\, I$ حيث $\Delta = |\text{أ}|$ ، $\text{أ}\,\text{أ}^{-١} = \text{أ}^{-١}\,\text{أ} = I$

② $I^{\text{مل}} = I$ ، $I^{-١} = I$

③ $(\text{أ}^{-١})^{-١} = \text{أ}$ ، $(\text{أ}^{-١})^{\text{مد}} = (\text{أ}^{\text{مد}})^{-١}$ ، $(\text{أ}^{-١})^{٢} = (\text{أ}^{٢})^{-١}$

④ $(\text{أ}\,\text{ب})^{-١} = \text{ب}^{-١}\,\text{أ}^{-١}$

⑤ $|\text{أ}\,\text{ب}| = |\text{أ}|\,|\text{ب}|$

⑥ $|\text{ك}\,\text{أ}| = \text{ك}^{\text{ن}}\,|\text{أ}|$

⑦ $|\text{أ}^{-١}| = \frac{١}{|\text{أ}|}$

⑧ $|\text{أ}^{\text{مل}}| = |\text{أ}|^{\text{ن}-١}$

## تذكر حل أنظمة المعادلات الخطية

لحل نظام مكّون من ن من المعادلات الخطية فى ن من المتغيرات

باستخدام المعكوس الضربي :

① نكّون الصورة المصفوفية لنظام المعادلات الخطية : $\boxed{\text{أ}\,\text{س} = \text{ب}}$

حيث أ مصفوفة المعاملات ، س مصفوفة المتغيرات

، ب مصفوفة الثوابت.

② نوجد عناصر المصفوفة س من العلاقة : $\boxed{\text{س} = \text{أ}^{-١}\,\text{ب}}$

**لاحظ أن**

- إذا كانت : ب = $\boxed{\phantom{00}}$ فإن النظام يكون نظام معادلات خطية متجانسة.
- إذا كانت : ب ≠ $\boxed{\phantom{00}}$ فإن النظام يكون نظام معادلات خطية غير متجانسة.

## تذكر مرتبة المصفوفة ر (أ)

مرتبة المصفوفة غير الصفرية أ هى أعلى درجة لمحدد أو محدد أصغر للمصفوفة قيمته لا تساوى الصفر.

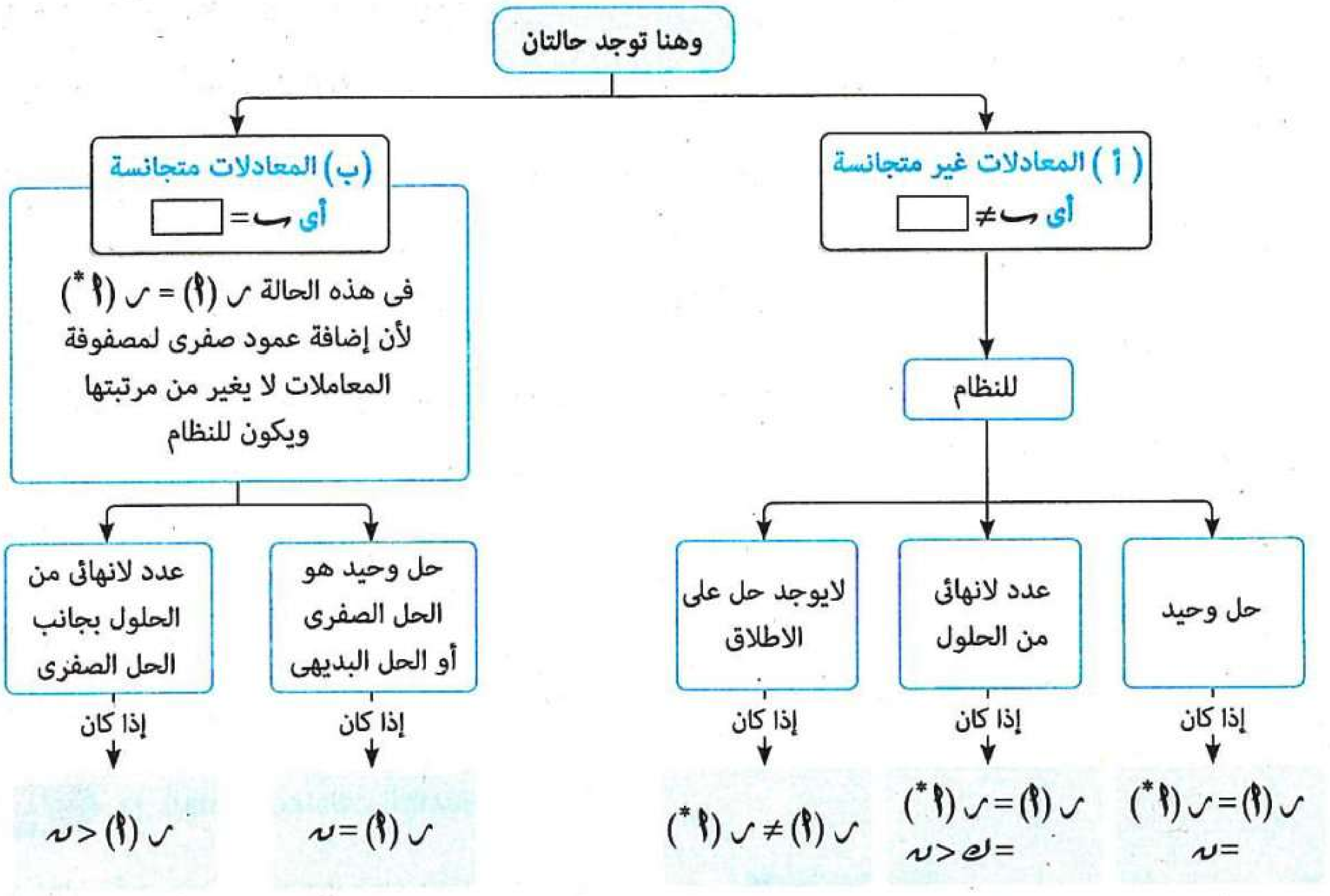
**لاحظ أن :** مرتبة المصفوفة الصفرية = صفر ، $\text{ر}(\text{أ}) = \text{ر}(\text{أ}^{\text{مد}})$

## تذكر المصفوفة الموسعة $\text{أ}^{*}$

إذا كان لدينا م من المعادلات الخطية فى ن من المجاهيل فإن معادلتها المصفوفية هى $\text{أ}\,\text{س} = \text{ب}$ ويمكن تعريف المصفوفة الموسعة $\text{أ}^{*}$ حيث $\text{أ}^{*} = (\text{أ} \,\vdots\, \text{ب})$ وتكون على النظم م × (ن + ١)

## تذكر بحث إمكانية حل نظام مكون من ن من المعادلات الخطية فى ن من المتغيرات

① نكتب المعادلة المصفوفية : $\boxed{أ س = ب}$ ② نوجد أ* ③ نوجد ر (أ) ، ر (أ*)



# اختبـار ؟ على الوحـدة الثالثة

**١** إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} \text{أ} & 0 & 0 \\ 0 & \text{أ} & 0 \\ 0 & 0 & \text{أ} \end{pmatrix}$ فإن : $|\text{أ}|\,|\text{أ}^{\text{مل}}|$ يساوى ..............

(أ) $\text{أ}^{3}$ (ب) $\text{أ}^{6}$ (جـ) $\text{أ}^{9}$ (د) $\text{أ}^{27}$

---

**٢** إذا كان للمعادلات : ٣ س − ٢ ص + ع = ٠ ، ٦ س − ٥ ص + ٢ ع = ٠

، ٩ س − ٦ ص + ك ع = ٠ عدد لانهائى من الحلول فإن : ك = ..............

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٣ (د) ٤

---

**٣** إذا كان : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \end{vmatrix}$ = ك فإن : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ \text{أ}+1 & \text{ب}+1 & \text{حـ}+1 \end{vmatrix}$ = ..............

(أ) ك (ب) ك − ١ (جـ) ك − ٦ (د) ك − ٣

---

**٤** إذا كان : أ = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ \text{ك} & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ وكان : ر (أ) = ٢ فإن : ك = ..............

(أ) −٢ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) ٦

---

**٥** لنظام المعادلات : ٣ س + ص + ٤ ع = ٠ ، ٢ س + ٣ ص + ٥ ع = ٠ ، س = ٢ ص + ع

نجد أنه ..............

(أ) يوجد حل وحيد هو الحل الصفرى. (ب) لا يوجد حل على الإطلاق.

(جـ) يوجد عدد لا نهائى من الحلول. (د) مجموعة الحل هى : {(٥ ، ٥ ، −٥)}

---

**٦** إذا كان : ن = $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ ، م = $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 4 & 6 & 10 \\ 5 & 20 & 10 \end{vmatrix}$ فإن : م = ..............

(أ) ن (ب) ١٠ ن (جـ) ٢٠ ن (د) ٣٠ ن

---

**٧** لأى مصفوفة مربعة أ إذا كان : $\text{أ}^{2} - \text{أ} + I = \boxed{\phantom{00}}$ فإن : $\text{أ}^{-1}$ = ..............

(أ) $\text{أ}^{-2}$ (ب) أ + I (جـ) I − أ (د) أ − I

**٨** إذا كانت : س ∈ ك فإن مجموعة حل المعادلة : $\begin{vmatrix} \text{س} & ١ & ٢ \\ ٠ & \text{س} & ٣ \\ ٠ & ٠ & \text{س} \end{vmatrix} - ٨ =$ صفر هى ..............

(أ) $\{٢\}$ (ب) $\{٢ ، -١ + \sqrt{٣}\,\text{ت} ، -١ - \sqrt{٣}\,\text{ت}\}$

(ج) $\{٢ ، ٢\omega ، ٢\omega^٢\}$ (د) $\{\omega ، \omega^٢ ، ٢\}$

---

**٩** $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ \text{س} & \text{ص} & \text{س} \\ \text{س} & \text{س} & -\text{ص} \end{vmatrix} =$ ..............

(أ) ☐ (ب) ٢ س ص (ج) $\text{س}^٢ - \text{ص}^٢$ (د) $\text{ص}^٢ - \text{س}^٢$

---

**١٠** قيمة المحدد : $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & \omega & \omega^٢ \\ ١ & \omega^٢ & \omega \end{vmatrix} =$ ..............

(أ) $٣\sqrt{٣}\,\text{ت}$ (ب) $\pm ٣\sqrt{٣}\,\text{ت}$ (ج) $-\sqrt{٣}\,\text{ت}$ (د) $\sqrt{٣}\,\text{ت}$

---

**١١** المصفوفة الملحقة للنظام : س + ٣ ص + ٢ ع = ٠ ، س + ع = −١ ، س + ٢ ص = ٣

هى ..............

(أ) $\begin{pmatrix} -٢ & ١ & ٢ \\ ٤ & -٢ & ١ \\ ٣ & ١ & -٣ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} -٢ & ٤ & ٣ \\ ١ & -٢ & ١ \\ ٢ & ١ & -٣ \end{pmatrix}$

(ج) $\begin{pmatrix} \frac{-٢}{٥} & \frac{٤}{٥} & \frac{٣}{٥} \\ \frac{١}{٥} & \frac{-٢}{٥} & \frac{١}{٥} \\ \frac{٢}{٥} & \frac{١}{٥} & \frac{-٣}{٥} \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ١ & ٣ & ٢ \\ ١ & ٠ & ١ \\ ١ & ٢ & ٠ \end{pmatrix}$

---

**١٢** إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{أ}^٣ - ١ & \text{أ}^٢ & \text{أ} \\ \text{ب}^٣ - ١ & \text{ب}^٢ & \text{ب} \\ \text{جـ}^٣ - ١ & \text{جـ}^٢ & \text{جـ} \end{vmatrix} =$ صفر حيث أ ≠ ب ≠ جـ فإن : أ ب جـ = ..............

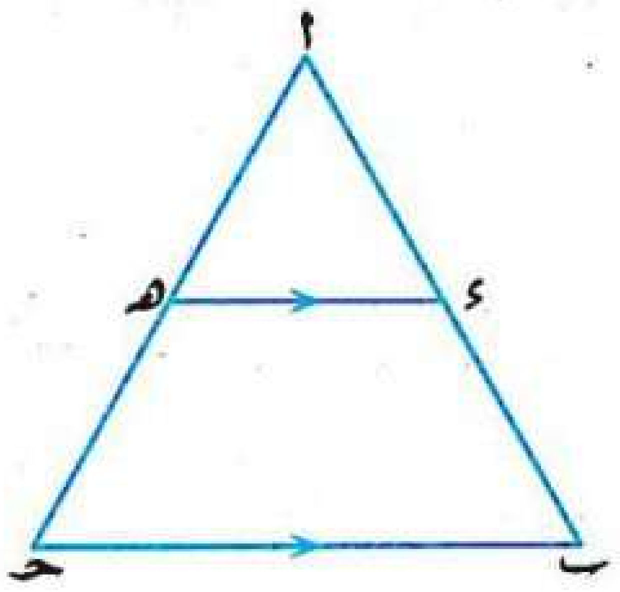
(أ) ١ (ب) صفر (ج) −١ (د) ٢

---

**١٣** إذا كان : (س − ٢) أحد عوامل المحدد $\begin{vmatrix} \text{س} - ١ & \text{س} + ٣ & ٢ \\ -٣ & \text{س} + ٥ & -٦ \\ \text{س} + ٣ & ٢ & \text{س} + \text{ك} \end{vmatrix}$ فإن : ك = ..............

(أ) ٤ (ب) ٢ (ج) ٦ (د) ٨

**١٤** في الشكل المقابل :



إذا كانت : $\overline{\text{ءهـ}} \,//\, \overline{\text{ب حـ}}$

فإن : $\begin{vmatrix} ٥ & ٦ & ٧ \\ \text{ءهـ} & \text{أء} & \text{أهـ} \\ \text{ب حـ} & \text{أب} & \text{أحـ} \end{vmatrix} =$ ..............

(أ) ٧ (ب) ٦ (ج) ٥ (د) صفر

---

**١٥** إذا كان $\text{أ}^* = \left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ٤ & ١ & ٢ \\ ١ & ٤ & ١ & ٠ \\ ٢ & ٧ & ٠ & ٠ \end{array}\right)$ فإن : ر (أ) + ر (أ*) = ..............

(أ) ٦ (ب) ٥ (ج) ٤ (د) ٢

---

**١٦** $\begin{vmatrix} ٤ & ٦ & ٨ \\ ٨ & ٦ & ٢ \\ ١٢ & ٢٠ & ١٠ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٤ \\ ٢ & ٣ & ١ \\ ٣ & ١٠ & ٥ \end{vmatrix} \times$ ..............

(أ) ٢ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٦

---

**١٧** إذا كانت : أ مصفوفة على النظم ٣ × ٣ وكان | أ | = –٣ فإن : $|\ \text{أ}\ \text{أ}^{\text{مل}}\ | =$ ..............

(أ) ٣ (ب) –٢٧ (ج) ٢٧ (د) –٩

---

**١٨** قيمة أ التى تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ & ٥ \\ ١ & \text{أ} & ٢ \\ ٠ & ١ & ١- \end{pmatrix}$ منفردة هى ..............

(أ) $\frac{٥-}{٣}$ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (ج) ٢ (د) ٣

---

**١٩** بدون فك المحدد أثبت أن : $\begin{vmatrix} ٣\text{س} & ٣\text{س} & ٣\text{س} \\ ١ & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{أ}+\text{ب} & \text{أ}+١ & \text{ب}+١ \end{vmatrix} =$ صفر

---

**٢٠** أثبت أن النظام الآتى له عدد لا نهائى من الحلول ثم اكتب الصورة العامة للحل :

س + ٢ ص + ٣ ع = صفر

٢ س + ٣ ص + ٥ ع = صفر

٣ س – ص + ٢ ع = صفر

# اختبار تراكمى

## من الوحدة الأولى حتى الوحدة الثالثة

**١** إذا كان : $ع_{١} = ٢$ ت ، $ع_{٢} = ١ + ٣$ ت حيث : $ت^{٢} = -١$ فإن سعة العدد $(ع_{١} - ع_{٢})$ تساوى ..............

(أ) $\frac{٣\pi}{٤}$ (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (ج) $-\frac{\pi}{٤}$ (د) $-\frac{٣\pi}{٤}$

---

**٢** عدد طرق توزيع ٣ كرات متماثلة على ٤ صناديق يساوى ..............

(أ) ${}^{٤}ق_{٣}$ (ب) ${}^{٤}ل_{٣}$ (ج) ${}^{٦}ق_{٣}$ (د) ${}^{٦}ل_{٣}$

---

**٣** إذا كان : ع = $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{\pi}{٤}$ − ت جا $\frac{\pi}{٤}$) فإن الصورة الأسية للعدد ع هى ..............

(أ) $\sqrt{٢}\,هـ^{\frac{\pi}{٤}ت}$ (ب) $\sqrt{٢}\,هـ^{-\frac{\pi}{٤}ت}$ (ج) $\sqrt{٢}\,هـ^{\frac{٣}{٤}\pi ت}$ (د) $\sqrt{٢}\,هـ^{-\frac{٣}{٤}\pi}$

---

**٤** إذا كان : $١ + ٥ س + \frac{٥ \times ٤}{٢ \times ١} س^{٢} + \frac{٥ \times ٤ \times ٣}{٣ \times ٢ \times ١} س^{٣} + ... + س^{٥} = ١٠٢٤$ فإن : س = ..............

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) ١٠ (د) ٣

---

**٥** عند حل المعادلات الآتية باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفة :

٢ س − ٣ ص − ع = ٩ ، س + ٢ ص + ٣ ع = ١٥ ، س − ٢ ع = ١٢

فإن المعكوس الضربي لمصفوفة المعاملات = ..............

(أ) $\frac{١}{٢١}\begin{pmatrix} -٤ & -٦ & -٧ \\ ٥ & -٣ & -٧ \\ -٢ & -٣ & ٧ \end{pmatrix}$ (ب) $\frac{-١}{٢١}\begin{pmatrix} ٢ & -٣ & -١ \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ١ & ١ & -٢ \end{pmatrix}$

(ج) $\frac{-١}{٢١}\begin{pmatrix} -٤ & ٥ & -٢ \\ -٦ & -٣ & -٣ \\ -٧ & -٧ & ٧ \end{pmatrix}$ (د) $\frac{١}{٢١}\begin{pmatrix} ٤ & ٦ & ٧ \\ -٥ & ٣ & ٧ \\ ٢ & ٣ & -٧ \end{pmatrix}$

---

**٦** $\frac{١}{٤\omega^{٣} + ٢\omega^{٢} + ٣\omega} + \frac{١}{٥\omega^{٦} + ٣\omega^{٤} + ٤\omega^{٢}} =$ ..............

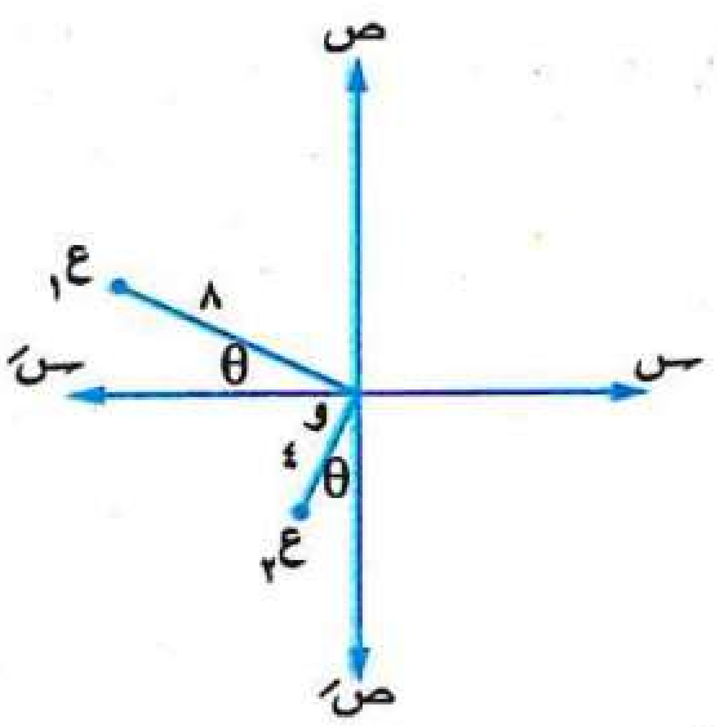
(أ) ١ (ب) $\omega$ (ج) $\omega^{٢}$ (د) −١

---

**٧** فى مفكوك $\left(٤ س^{٢} + \frac{١}{٢ س}\right)^{١٥}$ فإن قيمة س التى تجعل الحدين الأوسطين متساويين هى ..............

(أ) ٨ (ب) −٢ (ج) $-\frac{١}{٢}\omega$ (د) $\frac{١}{٢}$

**٨** **فى الشكل المقابل :**



ع$_{1}$ ، ع$_{2}$ عددان مركبان فإن : $\frac{ع_{1}}{ع_{2}}$ = ..............

(أ) −٢ (ب) ٢

(جـ) −٢ ت (د) ٢ ت

---

**٩** إذا كان : $^{ن}ق_{ن} + {}^{ن}ل_{ن} = ٧٢١$ فإن : ن = ..............

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

---

**١٠** إذا كان : ع$_{1}$ = هـ$^{\frac{\pi}{٣} - \frac{\pi}{٣} ت}$ ، ع$_{2}$ = هـ$^{\frac{\pi}{٦} - \frac{\pi}{٦} ت}$ ، حيث ت$^{2}$ = −١ فإن : ع$_{1}$ ع$_{2}$ = ..............

(أ) هـ$^{\frac{-\pi}{٢} ت}$ (ب) − هـ$^{\frac{\pi}{٢}}$ ت (جـ) − هـ$^{\frac{\pi}{٢} ت}$ (د) هـ$^{\frac{\pi}{٢}}$ ت

---

**١١** إذا كان : $\left(\frac{\omega^{2}}{١ + ٢\omega^{2}}\right)^{٤} + \left(\frac{١ + ٢\omega}{\omega}\right)^{٤} = أ\,\omega^{2}$ حيث ω هى أحد الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

فإن : أ = ..............

(أ) ٧٢ (ب) $\frac{٧٢}{٥}$ (جـ) $\frac{٨٢}{٩}$ (د) $\frac{٩}{٨٢}$

---

**١٢** فى مفكوك $\left(٢ س^{2} + \frac{١}{٢ س}\right)^{٣ن}$ حسب قوى س التنازلية ، إذا كان ح$_{ن}$ هو الحد الخالى من س ، فإن معامل س$^{3}$ يساوى ..............

(أ) ٤٩٥ (ب) ١٩٨ (جـ) ٧٩٢ (د) $\frac{٤٩٥}{١٦}$

---

**١٣** **مجموعة المعادلات الآتية :**

٢ س − ص + ٣ ع = ٠ ، ٤ س + ٥ ص − ع = ٠ ، ٢ س + ٣ ص − ع = ٠

(أ) لها الحل الصفرى فقط.

(ب) ليس لها حل على الإطلاق.

(جـ) لها عدد لا نهائى من الحلول ليس بينها الحل الصفرى.

(د) لها عدد لا نهائى من الحلول من بينهم الحل الصفرى.

---

**١٤** إذا كانت : (أ − س)$^{١٤}$ = حـ + حـ$_{1}$ س + حـ$_{2}$ س$^{2}$ + حـ$_{3}$ س$^{3}$ + ... + حـ$_{14}$ س$^{14}$

وكان : ٤ حـ$_{4}$ + ١١ (حـ$_{3}$ + حـ$_{2}$) = صفر فإن : أ = ..............

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) $\frac{٧}{٤}$ (د) −$\frac{١١}{٤}$

**١٥** إذا كان : $ع_١$ ، $ع_٢$ عددين مركبين ، سعة $(ع_١ ع_٢) = \frac{٥\pi}{١٨}$ ، سعة $\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{\pi}{٩}$ فإن : سعة $ع_١$ = ............

(أ) $\frac{٧\pi}{٣٦}$ (ب) $\frac{٥\pi}{٣٦}$ (ج) $\frac{\pi}{٣}$ (د) $\frac{\pi}{٤}$

---

**١٦** في مفكوك $(س + ص)^{ن}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان الحد السابع هو الحد الوحيد الذي له أكبر معامل فإن : ن = ............

(أ) ١٢ (ب) ١٣ (ج) ١٤ (د) ١٥

---

**١٧** إذا كان : $س = \frac{٤}{\sqrt{٣} + ت}$ ، $ص = \frac{٢}{حتا \frac{\pi}{٦} - ت حا \frac{\pi}{٦}}$ فإن : ............

(أ) س = ص (ب) س ، ص مترافقان (ج) س ص = ١ (د) س + ص = ٠

---

**١٨** قيمة المحدد : $\begin{vmatrix} ١ & \omega & \omega^٢ \\ \omega & \omega^٢ & ١ \\ \omega^٢ & ١ & \omega \end{vmatrix}$ = ............

(أ) صفر (ب) ١ (ج) $\omega$ (د) $\omega^٢$

---

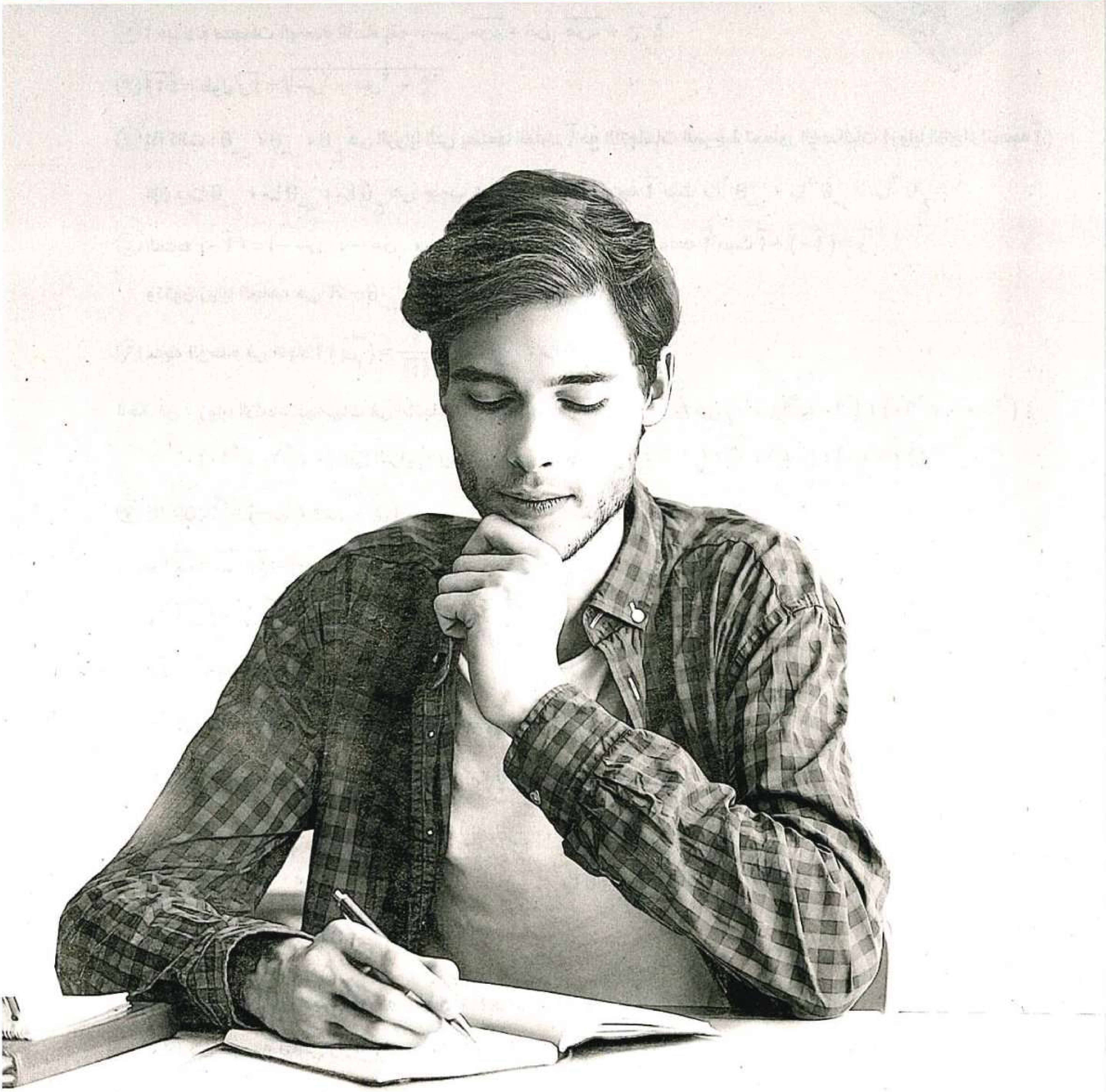
**١٩** إذا كان : $\begin{vmatrix} س & ص & ع + ٢ \\ س & ص + ٢ & ع \\ س + ٢ & ص & ع \end{vmatrix} = -٤$ **أوجد قيمة :** س + ص + ع

---

**٢٠** **أثبت أن :** $\left( \frac{١}{١ + \omega ت} - \frac{\omega + ت}{١ + \omega^٢ ت} \right)^٨ = ١٦$

# ثانيًا

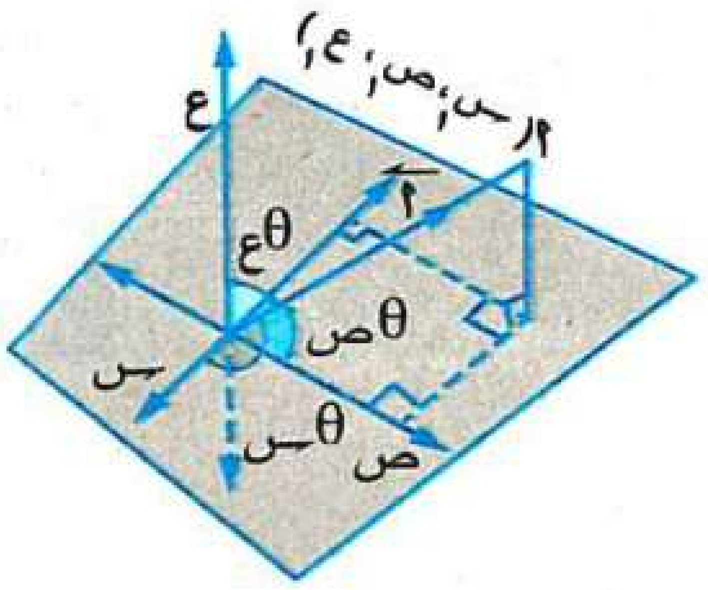
# المراجعة المستمرة فى الهندسة الفراغية



# ملخص الوحدة الأولى

# الهندسة والقياس فى بعدين وثلاثة أبعاد

## تذكر متجه الموضع لنقطة فى الفراغ



إذا كانت : أ (س$_1$ ، ص$_1$ ، ع$_1$) نقطة فى الفراغ حيث $\overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ع}}$ متجهات وحدة فى اتجاه $\overleftarrow{\text{وس}}$ ، $\overleftarrow{\text{وص}}$ ، $\overleftarrow{\text{وع}}$ على الترتيب ، «و» هى نقطة الأصل فإن :

① متجه موضع نقطة أ بالنسبة لنقطة و : $\overleftarrow{\text{وأ}} = \overleftarrow{\text{أ}}$ = (س$_1$ ، ص$_1$ ، ع$_1$)

② $\overleftarrow{\text{أ}}$ «بدلالة متجهات الوحدة الأساسية» = س$_1$ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ص$_1$ $\overleftarrow{\text{ص}}$ + ع$_1$ $\overleftarrow{\text{ع}}$

③ $\|\overleftarrow{\text{أ}}\|$ = طول $\overline{\text{وأ}}$ = $\sqrt{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ + \text{ع}^٢}$

④ إذا كانت : θ$_\text{س}$ ، θ$_\text{ص}$ ، θ$_\text{ع}$ هى الزوايا التى يصنعها المتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات (زوايا الاتجاه للمتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$)

فإن : جتا θ$_\text{س}$ ، جتا θ$_\text{ص}$ ، جتا θ$_\text{ع}$ هى جيوب تمام زوايا اتجاه المتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ حيث جتا$^٢$ θ$_\text{س}$ + جتا$^٢$ θ$_\text{ص}$ + جتا$^٢$ θ$_\text{ع}$ = ١

⑤ المتجه ($-\overleftarrow{\text{أ}}$) = (− س$_1$ ، − ص$_1$ ، − ع$_1$) هو المعكوس الجمعى للمتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ حيث $\overleftarrow{\text{أ}}$ + ($-\overleftarrow{\text{أ}}$) = $\overleftarrow{\text{و}}$

وتكون زوايا اتجاهه هى $\pi$ − θ$_\text{س}$ ، $\pi$ − θ$_\text{ص}$ ، $\pi$ − θ$_\text{ع}$

⑥ متجه الوحدة فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أ}}$ ($\overleftarrow{\text{ى}_\text{أ}}$) = $\dfrac{\overleftarrow{\text{أ}}}{\|\overleftarrow{\text{أ}}\|}$ = (جتا θ$_\text{س}$ ، جتا θ$_\text{ص}$ ، جتا θ$_\text{ع}$)

**لاحظ أن :** زوايا الاتجاه للمتجهات فى الاتجاه الموجب للمحاور س ، ص ، ع هى (٠ ، ٩٠° ، ٩٠°) ، (٩٠° ، ٠ ، ٩٠°) ، (٩٠° ، ٩٠° ، ٠) على الترتيب وبالتالى جيوب تمامها هى (١ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، ١ ، ٠) ، (٠ ، ٠ ، ١)

⑦ إذا كان : $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (س$_1$ ، ص$_1$ ، ع$_1$) ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (س$_2$ ، ص$_2$ ، ع$_2$) فإن :

- $\overleftarrow{\text{أب}} = \overleftarrow{\text{ب}} - \overleftarrow{\text{أ}}$ = (س$_2$ − س$_1$ ، ص$_2$ − ص$_1$ ، ع$_2$ − ع$_1$)
- $\|\overleftarrow{\text{أب}}\|$ = $\sqrt{(\text{س}_2 - \text{س}_1)^٢ + (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)^٢ + (\text{ع}_2 - \text{ع}_1)^٢}$
- $\overleftarrow{\text{أ}} = \overleftarrow{\text{ب}}$ إذا وفقط إذا كان : س$_1$ = س$_2$ ، ص$_1$ = ص$_2$ ، ع$_1$ = ع$_2$

⑧ إذا كان المتجه : $\overleftarrow{\text{أ}}$ يصنع زوايا متساوية مع محاور الإحداثيات

**أى أن :** θ$_\text{س}$ = θ$_\text{ص}$ = θ$_\text{ع}$ = θ فإن : جتا θ$_\text{س}$ = جتا θ$_\text{ص}$ = جتا θ$_\text{ع}$ = جتا θ

، ∵ جتا$^٢$ θ$_\text{س}$ + جتا$^٢$ θ$_\text{ص}$ + جتا$^٢$ θ$_\text{ع}$ = ١ ∴ ٣ جتا$^٢$ θ = ١

∴ جتا$^٢$ θ = $\frac{١}{٣}$ ∴ جتا θ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ومنها θ = ٥٤° ٤٤َ ٨ً

أ، جتا θ = − $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ومنها θ = ١٢٥° ١٥َ ٥٢ً

⑨ * مجموع قياس أى زاويتين من زوايا الاتجاه أكبر من أو يساوى ٩٠°

* إذا كان مجموع قياسى زاويتى اتجاه ٩٠° فإن قياس الزاوية الثالثة ٩٠°

## تذكر ◀ العمليات على المتجهات

①ضرب متجه فى عدد حقيقى غير صفرى : إذا كان : $\text{ك} \in \text{ح}^*$ فإن : $\text{ك}\,\overleftarrow{\text{أ}} = \text{ك}\,(\text{س}_{١} ، \text{ص}_{١} ، \text{ع}_{١}) = (\text{ك}\,\text{س}_{١} ، \text{ك}\,\text{ص}_{١} ، \text{ك}\,\text{ع}_{١})$

حيث $\overleftarrow{\text{أ}} \parallel \text{ك}\,\overleftarrow{\text{أ}}$ وفى نفس الاتجاه إذا كان $\text{ك} > ٠$ وفى عكس الاتجاه إذا كان $\text{ك} < ٠$

②جمع المتجهات : إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}} = (\text{س}_{١} ، \text{ص}_{١} ، \text{ع}_{١})$ ، $\overleftarrow{\text{ب}} = (\text{س}_{٢} ، \text{ص}_{٢} ، \text{ع}_{٢})$

فإن : $\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}} = (\text{س}_{١} + \text{س}_{٢} ، \text{ص}_{١} + \text{ص}_{٢} ، \text{ع}_{١} + \text{ع}_{٢})$

③الضرب القياسى لمتجهين : $\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}} = \|\overleftarrow{\text{أ}}\|\,\|\overleftarrow{\text{ب}}\|\,\text{جتا}\,\theta$

، $\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}} = \text{أ}_{\text{س}}\,\text{ب}_{\text{س}} + \text{أ}_{\text{ص}}\,\text{ب}_{\text{ص}} + \text{أ}_{\text{ع}}\,\text{ب}_{\text{ع}}$

④الضرب الاتجاهى لمتجهين : $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}} = (\|\overleftarrow{\text{أ}}\|\,\|\overleftarrow{\text{ب}}\|\,\text{جا}\,\theta)\,\overleftarrow{\text{ى}}$

حيث $\overleftarrow{\text{ى}}$ متجه وحدة فى اتجاه عمودى على مستوى المتجهين $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ : $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \overleftarrow{\text{س}} & \overleftarrow{\text{ص}} & \overleftarrow{\text{ع}} \\ \text{أ}_{\text{س}} & \text{أ}_{\text{ص}} & \text{أ}_{\text{ع}} \\ \text{ب}_{\text{س}} & \text{ب}_{\text{ص}} & \text{ب}_{\text{ع}} \end{vmatrix}$

**لاحظ الخواص الآتية :**

- $\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}} = \overleftarrow{\text{ب}} \cdot \overleftarrow{\text{أ}}$ بينما $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}} = -(\overleftarrow{\text{ب}} \times \overleftarrow{\text{أ}})$
- إذا كان : $\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}} =$ صفر فإن : $\overleftarrow{\text{أ}} \perp \overleftarrow{\text{ب}}$

بينما إذا كان : $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}} = \overleftarrow{٠}$ فإن : $\overleftarrow{\text{أ}} \parallel \overleftarrow{\text{ب}}$ حيث $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ غير صفريين

- $\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{أ}} = \|\overleftarrow{\text{أ}}\|^{٢}$ بينما $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{أ}} = \overleftarrow{٠}$
- $\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{و}} = \overleftarrow{\text{و}} \cdot \overleftarrow{\text{أ}} = \overleftarrow{\text{و}} \cdot \overleftarrow{\text{و}} =$ صفر بينما $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{و}} = \overleftarrow{\text{و}} \times \overleftarrow{\text{أ}} = \overleftarrow{\text{و}} \times \overleftarrow{\text{و}} = \overleftarrow{\text{و}}$
- $(\text{م}\,\overleftarrow{\text{أ}}) \cdot \overleftarrow{\text{ب}} = \overleftarrow{\text{أ}} \cdot (\text{م}\,\overleftarrow{\text{ب}}) = \text{م}\,(\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}})$ ، $(\text{م}\,\overleftarrow{\text{أ}}) \times \overleftarrow{\text{ب}} = \overleftarrow{\text{أ}} \times (\text{م}\,\overleftarrow{\text{ب}}) = \text{م}\,(\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}})$
- $(\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}) \cdot \overleftarrow{\text{حـ}} = \overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{حـ}} + \overleftarrow{\text{ب}} \cdot \overleftarrow{\text{حـ}}$ ، $(\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}) \times \overleftarrow{\text{حـ}} = \overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{حـ}} + \overleftarrow{\text{ب}} \times \overleftarrow{\text{حـ}}$
- $\overleftarrow{\text{س}} \cdot \overleftarrow{\text{س}} = \overleftarrow{\text{ص}} \cdot \overleftarrow{\text{ص}} = \overleftarrow{\text{ع}} \cdot \overleftarrow{\text{ع}} = ١$ بينما $\overleftarrow{\text{س}} \times \overleftarrow{\text{س}} = \overleftarrow{\text{ص}} \times \overleftarrow{\text{ص}} = \overleftarrow{\text{ع}} \times \overleftarrow{\text{ع}} = \overleftarrow{٠}$
- $\overleftarrow{\text{س}} \cdot \overleftarrow{\text{ص}} = \overleftarrow{\text{ص}} \cdot \overleftarrow{\text{ع}} = \overleftarrow{\text{ع}} \cdot \overleftarrow{\text{س}} = ٠$ بينما $\overleftarrow{\text{س}} \times \overleftarrow{\text{ص}} = \overleftarrow{\text{ع}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}} \times \overleftarrow{\text{ع}} = \overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ع}} \times \overleftarrow{\text{س}} = \overleftarrow{\text{ص}}$

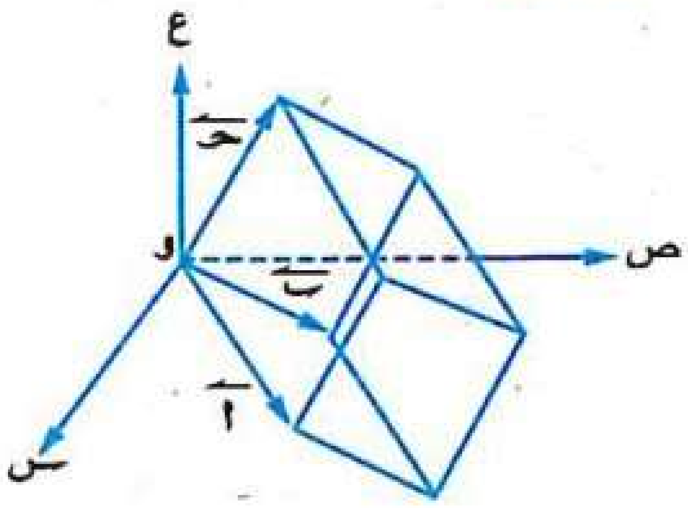
، $\overleftarrow{\text{ص}} \times \overleftarrow{\text{س}} = -\overleftarrow{\text{ع}}$ ، $\overleftarrow{\text{ع}} \times \overleftarrow{\text{ص}} = -\overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{س}} \times \overleftarrow{\text{ع}} = -\overleftarrow{\text{ص}}$

⑤الضرب الثلاثى القياسى : $\overleftarrow{\text{أ}} \cdot (\overleftarrow{\text{ب}} \times \overleftarrow{\text{حـ}}) = \begin{vmatrix} \text{أ}_{\text{س}} & \text{أ}_{\text{ص}} & \text{أ}_{\text{ع}} \\ \text{ب}_{\text{س}} & \text{ب}_{\text{ص}} & \text{ب}_{\text{ع}} \\ \text{حـ}_{\text{س}} & \text{حـ}_{\text{ص}} & \text{حـ}_{\text{ع}} \end{vmatrix}$

**لاحظ الخواص الآتية :**

- $\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}} \times \overleftarrow{\text{حـ}} = \overleftarrow{\text{ب}} \cdot \overleftarrow{\text{حـ}} \times \overleftarrow{\text{أ}} = \overleftarrow{\text{حـ}} \cdot \overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}}$ (يمكن تبديل المتجهات مع الاحتفاظ بالترتيب الدورى للمتجهات)
- $\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}} \times \overleftarrow{\text{حـ}} = \overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}} \cdot \overleftarrow{\text{حـ}}$ (يمكن تبديل علامتى الضرب مع الاحتفاظ بالترتيب الدورى للمتجهات)

## تذكر المعنى الهندسى لمعيار الضرب الاتجاهى لمتجهين والضرب الثلاثى القياسى

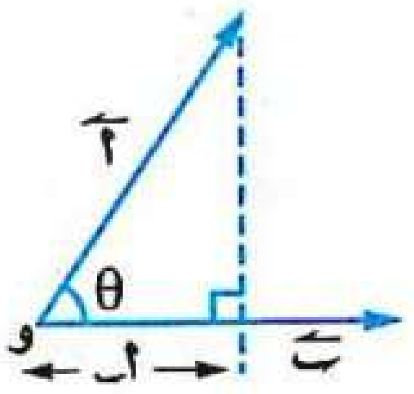


① $\|\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}}\|$ = مساحة متوازى الأضلاع الذى فيه : $\overleftarrow{\text{ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ}}$ ضلعان متجاوران فيه

= ضعف مساحة المثلث الذى فيه : $\overleftarrow{\text{ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ}}$ ضلعان متجاوران فيه.

② إذا كان : $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ح}}$ ثلاثة متجهات تكون ثلاثة أحرف غير متوازية فى متوازى سطوح فإن حجم متوازى السطوح = $|\overleftarrow{\text{أ}} . \overleftarrow{\text{ب}} \times \overleftarrow{\text{ح}}|$

### ملاحظات



① المركبة الجبرية (المسقط الجبرى) للمتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه المتجه $\overleftarrow{\text{ب}}$ .

$$\text{أ}_{\text{ب}} = \|\overleftarrow{\text{أ}}\| \text{ جتا } \theta = \frac{\overleftarrow{\text{أ}} . \overleftarrow{\text{ب}}}{\|\overleftarrow{\text{ب}}\|}$$

② المركبة الاتجاهية للمتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه المتجه $\overleftarrow{\text{ب}}$ $= \frac{\overleftarrow{\text{أ}} . \overleftarrow{\text{ب}}}{\|\overleftarrow{\text{ب}}\|} . \frac{\overleftarrow{\text{ب}}}{\|\overleftarrow{\text{ب}}\|} = \left(\frac{\overleftarrow{\text{أ}} . \overleftarrow{\text{ب}}}{\|\overleftarrow{\text{ب}}\|^2}\right) \overleftarrow{\text{ب}}$

③ جيب تمام الزاوية بين المتجهين $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ : $\text{جتا } \theta = \frac{\overleftarrow{\text{أ}} . \overleftarrow{\text{ب}}}{\|\overleftarrow{\text{أ}}\| \|\overleftarrow{\text{ب}}\|}$

④ $\|\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}\|^2 = \|\overleftarrow{\text{أ}}\|^2 + 2\,(\overleftarrow{\text{أ}} . \overleftarrow{\text{ب}}) + \|\overleftarrow{\text{ب}}\|^2 = \|\overleftarrow{\text{أ}}\|^2 + \|\overleftarrow{\text{ب}}\|^2 + 2\,\|\overleftarrow{\text{أ}}\| \|\overleftarrow{\text{ب}}\| \text{ جتا } \theta$

⑤ متجه الوحدة فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}}$ هو $\overleftarrow{\text{ى}} = \frac{\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}}}{\|\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}}\|}$

⑥ إذا كان : $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ متجهين غير صفريين وكان :

- $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}} = \overleftarrow{\text{و}}$ فإن : $\overleftarrow{\text{أ}} // \overleftarrow{\text{ب}}$ والعكس صحيح.
- $\frac{\text{أ}_{\text{س}}}{\text{ب}_{\text{س}}} = \frac{\text{أ}_{\text{ص}}}{\text{ب}_{\text{ص}}} = \frac{\text{أ}_{\text{ع}}}{\text{ب}_{\text{ع}}}$ فإن : $\overleftarrow{\text{أ}} // \overleftarrow{\text{ب}}$ والعكس صحيح.

⑦ إذا كانت : أ ، ب ، ح ثلاثة نقاط فى الفراغ ثلاثى الأبعاد وكان : $\overleftarrow{\text{أب}} \times \overleftarrow{\text{بح}} = \overleftarrow{\text{و}}$ فإن : أ ، ب ، ح على استقامة واحدة.

⑧ لإثبات أن النقاط أ ، ب ، ح تقع فى مستوى واحد يمر بنقطة الأصل نثبت أن : $\overleftarrow{\text{أ}} . (\overleftarrow{\text{ب}} \times \overleftarrow{\text{ح}}) = ٠$

ومنها فإن $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ح}}$ متجهات موضع تقع فى مستوى واحد.

⑨ لإيجاد قياس الزاوية الصغرى θ بين المتجهين $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ نستخدم القانون : $\text{جتا } \theta = \frac{\overleftarrow{\text{أ}} . \overleftarrow{\text{ب}}}{\|\overleftarrow{\text{أ}}\| \|\overleftarrow{\text{ب}}\|}$

⑩ إذا كان : $\|\overleftarrow{\text{ب}}\| = \|\text{م} \overleftarrow{\text{أ}}\|$ فإن : $\|\overleftarrow{\text{ب}}\| = |\text{م}| . \|\overleftarrow{\text{أ}}\|$

⑪ $\|\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}\| \le \|\overleftarrow{\text{أ}}\| + \|\overleftarrow{\text{ب}}\|$

⑫ $\|\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}}\| = \|\overleftarrow{\text{أ}}\| \|\overleftarrow{\text{ب}}\| \text{ جا } \theta$ ، $\text{جا } \theta = \frac{\|\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}}\|}{\|\overleftarrow{\text{أ}}\| \|\overleftarrow{\text{ب}}\|}$

⑬ متجه الوحدة فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}}$ وهو العمودى على كل من $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ هو $\overleftarrow{\text{ى}} = \frac{\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}}}{\|\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}}\|} = \frac{\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}}}{\|\overleftarrow{\text{أ}}\| \|\overleftarrow{\text{ب}}\| \text{ جا } \theta}$

⑭ إذا كان : $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ح}}$ ثلاثة متجهات غير صفرية

وكان : $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}} = \overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ح}}$ فهذا لا يعنى بالضرورة أن $\overleftarrow{\text{ب}} = \overleftarrow{\text{ح}}$ «خاصية الحذف غير متحققة»

## تذكر البُعد بين نقطتين فى الفراغ وإحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة

إذا كانت : $أ(س_١ ، ص_١ ، ع_١)$ ، $ب(س_٢ ، ص_٢ ، ع_٢)$ فإن :

① طول $\overline{أب} = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢ + (ع_٢ - ع_١)^٢}$

② إحداثيات نقطة منتصف $\overline{أب} = \left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} ، \frac{ع_١ + ع_٢}{٢}\right)$

## تذكر معادلة الكرة فى الفراغ

① الصورة القياسية : $\boxed{(س - ل)^٢ + (ص - ك)^٢ + (ع - ن)^٢ = نق^٢}$

ومنها مركز الكرة م (ل ، ك ، ن) ، طول نصف قطرها نق

② الصورة العامة : $\boxed{س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٢ ل س + ٢ ك ص + ٢ ن ع + ى = ٠}$

ومنها مركز الكرة م (− ل ، − ك ، − ن) وطول نصف قطرها $نق = \sqrt{ل^٢ + ك^٢ + ن^٢ - ى}$

**ملاحظة :**

فى المعادلة العامة للكرة يجب أن يكون :

- معامل $س^٢$ = معامل $ص^٢$ = معامل $ع^٢ \neq$ صفر
- $ل^٢ + ك^٢ + ن^٢ - ى >$ صفر
- المعادلة خالية من الحد الذى يشمل س ص أ، ص ع أ، س ع أ، س ص ع
- مساحة سطح الكرة = ٤ π $نق^٢$ وحجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π $نق^٣$
- الكرة التى تمس مستويات الإحداثيات الموجبة وطول نصف قطرها نق يكون مركزها هو النقطة (نق ، نق ، نق)
- الكرة التى مركزها نقطة الأصل وتمر بالنقطة (أ ، ب ، حـ)
  - طول نصف قطرها $نق = \sqrt{أ^٢ + ب^٢ + حـ^٢}$
  - معادلتها القياسية $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = أ^٢ + ب^٢ + حـ^٢$
- الكرة التى مركزها م (أ ، ب ، حـ) و
  - تمس المستوى س ص ← فإن ← نق = |حـ|
  - تمس المستوى س ع ← فإن ← نق = |ب|
  - تمس المستوى ص ع ← فإن ← نق = |أ|
- الكرة التى يقع مركزها على المحور
  - س وتمس المستوى ص ع ← فإن ← مركزها (أ ، ٠ ، ٠) ، نق = |أ|
  - ص وتمس المستوى س ع ← فإن ← مركزها (٠ ، ب ، ٠) ، نق = |ب|
  - ع وتمس المستوى س ص ← فإن ← مركزها (٠ ، ٠ ، حـ) ، نق = |حـ|

# اختبار على الوحدة الأولى

**١** إذا كان أ ب حـ ء متوازى أضلاع وكان : $\overleftarrow{\text{أحـ}}$ = (٢ ، ٢ ، –١) ، $\overleftarrow{\text{بء}}$ = (–١ ، ٢ ، –٣)

فإن مساحة متوازى الأضلاع تساوى .............. وحدة مربعة.

(أ) ٦ (ب) $٧\sqrt{٢}$ (ج) $\sqrt{١٠١}$ (د) $\frac{١}{٢}\sqrt{١٠١}$

**٢** طول قطر الكرة التى معادلتها : $٣ س^٢ + ٣ ص^٢ + ٣ ع^٢ + ١٨ س - ٢٤ ص + ١٢ ع + ٣ = ٠$

يساوى ............. وحدة طول.

(أ) $٢\sqrt{٧}$ (ب) $٤\sqrt{٧}$ (ج) $٦\sqrt{٢٩}$ (د) $١٢\sqrt{٢٩}$

**٣** إذا كان : $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (١ ، –١ ، ٢) ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (٣ ، –٢ ، ٠) ، $\overleftarrow{\text{حـ}}$ = (٠ ، ٢ ، ٤)

فإن : $\overleftarrow{\text{أ}} . \overleftarrow{\text{ب}} \times \overleftarrow{\text{حـ}}$ = .............

(أ) ١٠ (ب) ١٢ (ج) ١٤ (د) ١٦

**٤** إذا كانت θ هى قياس الزاوية المحصورة بين المتجهين $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (–٢ ، –٦ ، ١) ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (٢ ، ٦ ، –١)

فإن : θ = .............

(أ) صفر (ب) ٦٠° (ج) ١٢٠° (د) ١٨٠°

**٥** طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، –٣ ، ٤) على محور س يساوى ............. وحدة طول.

(أ) ١ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٥

**٦** إذا كان : $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (١ ، ٢ ، –٤) ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (١ ، ١ ، ك –١) وكان $\|\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}\|$ = ٧ وحدة طول

حيث ك ∈ $ص^+$ فإن : ك = .............

(أ) ١٠ (ب) ٨ (ج) ١١ (د) ١٢

**٧** حجم متوازى السطوح الذى فيه ثلاثة أحرف غير متوازية (متجاورة) تمثلها المتجهات $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (٣ ، –٤ ، ١)

، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (٠ ، ٢ ، –٣) ، $\overleftarrow{\text{حـ}}$ = (٣ ، ٢ ، ٢) يساوى ............. وحدة حجم.

(أ) ٥٠ (ب) ٤٨ (ج) ٦٤ (د) ٦٠

**٨** إذا قطع محور السينات الكرة التى مركزها (٣ ، −٤ ، ١٢) وطول نصف قطرها ١٣ وحدة طول فى النقطتين أ ، ب فإن طول $\overline{أب}$ = ...............

(أ) ٣　(ب) ١٢　(جـ) ٨　(د) ٦

**٩** إذا كان : ٣٠° ، ٧٠° ، θ هى زوايا الاتجاه لمتجه فإن إحدى قيم θ = ...............

(أ) ١٠٠°　(ب) ٨٠°　(جـ) ٢٦٠°　(د) ٦٨,٦١°

**١٠** المثلث الذى رؤوسه النقط : أ (٧ ، ١ ، ٣)　،　ب (٥ ، ٣ ، ٤)　،　حـ (٣ ، ٥ ، ٣) هو مثلث ...............

(أ) متساوى الأضلاع.　(ب) قائم الزاوية.　(جـ) متساوى الساقين.　(د) حاد الزوايا.

**١١** الصورة القياسية لمعادلة الكرة التى مركزها (٢ ، −٣ ، ٤) وتمس المستوى س ص هى ...............

(أ) (س − ٢)$^{٢}$ + (ص + ٣)$^{٢}$ + (ع − ٤)$^{٢}$ = ٤

(ب) (س − ٢)$^{٢}$ + (ص + ٣)$^{٢}$ + (ع − ٤)$^{٢}$ = ٩

(جـ) (س − ٢)$^{٢}$ + (ص + ٣)$^{٢}$ + (ع − ٤)$^{٢}$ = ١٦

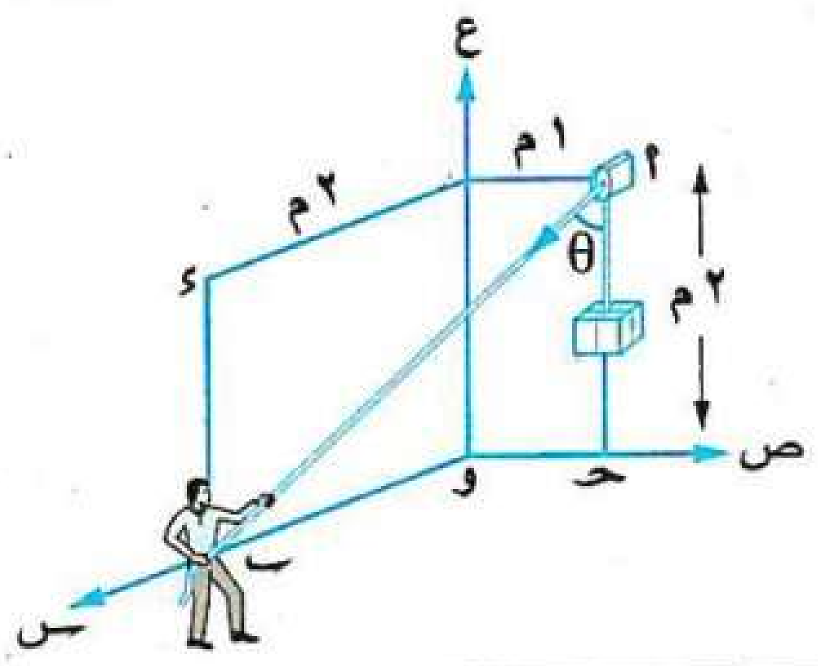
(د) (س + ٢)$^{٢}$ + (ص − ٣)$^{٢}$ + (ع + ٤)$^{٢}$ = ١٦

**١٢** في الشكل المقابل :

قياس الزاوية : θ = ...............

(أ) ٥٤° ١٢َ　(ب) ٩٦° ٢٢َ

(جـ) ١٣١° ٤٩َ　(د) ٤٨° ١١َ



**١٣** إذا كان $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ متجهى وحدة فى الفراغ قياس الزاوية بينهما θ

فإن : $\|\vec{أ} \times \vec{ب}\|^{٢} + (\vec{أ} \cdot \vec{ب})^{٢}$ = ...............

(أ) صفر　(ب) جا θ جتا θ　(جـ) جا ٢ θ　(د) ١

**١٤** إذا كانت الزاوية بين المتجهين : $\vec{أ}$ = ٢ م $\vec{س}$ + ٤ م $\vec{ص}$ + $\vec{ع}$　،　$\vec{ب}$ = ٧ $\vec{س}$ − ٢ $\vec{ص}$ − ٦ $\vec{ع}$ منفرجة

فإن : م ∈ ...............

(أ) ]١ ، ∞[　(ب) ]−∞ ، ١[　(جـ) ]٢ ، ∞[　(د) ]−∞ ، ٠[

**١٥** معادلة الكرة التى مركزها نقطة الأصل وتمر برؤوس مكعب طول حرفه ١٢ وحدة طول هى ...............

(أ) س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ + ع$^{٢}$ = ١٤٤

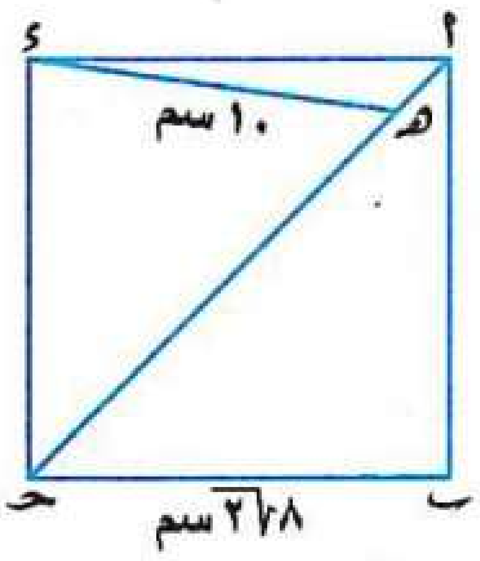
(ب) س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ + ع$^{٢}$ = ١٠٨

(ج) س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ + ع$^{٢}$ = ٣٦

(د) س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ + ع$^{٢}$ + ١٠٨ = ٠

---

**١٦** في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ٨ √٢ سم

فإن : $\overleftarrow{\text{حـ ب}}$ . $\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ = ...............

(أ) –٢٤ (ب) –١٨ (ج) –١٦ (د) –١٢

---

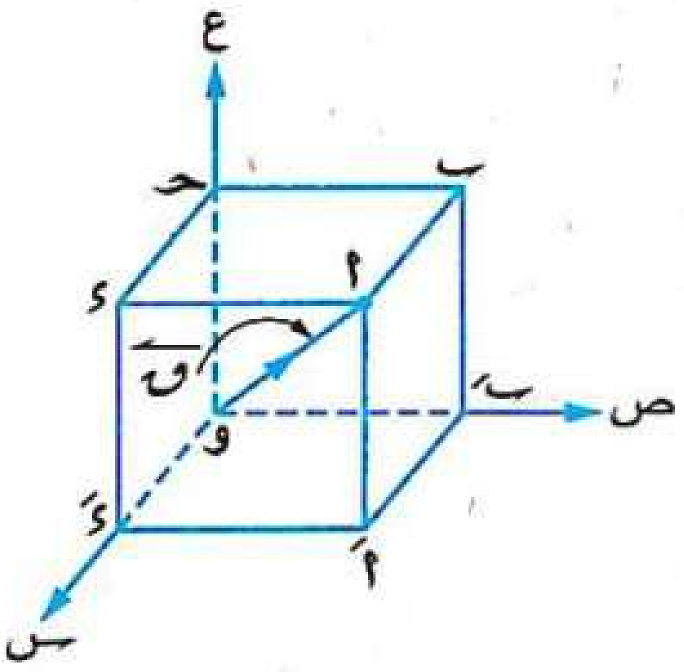
**١٧** إذا كان : $\overleftarrow{\text{أ}}$ = ٤ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٣ $\overleftarrow{\text{ص}}$ + ٢ $\overleftarrow{\text{ع}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = –٢ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٥ $\overleftarrow{\text{ص}}$ – $\overleftarrow{\text{ع}}$

، $\overleftarrow{\text{حـ}}$ = ٨ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ١٩ $\overleftarrow{\text{ص}}$ + ٤ $\overleftarrow{\text{ع}}$ فإن : $\overleftarrow{\text{حـ}}$ = ...............

(أ) ٢ $\overleftarrow{\text{أ}}$ – ٣ $\overleftarrow{\text{ب}}$ (ب) ٣ $\overleftarrow{\text{أ}}$ + ٥ $\overleftarrow{\text{ب}}$ (ج) ٣ $\overleftarrow{\text{أ}}$ + ٢ $\overleftarrow{\text{ب}}$ (د) ± (٣ $\overleftarrow{\text{أ}}$ + ٢ $\overleftarrow{\text{ب}}$)

---

**١٨** في الشكل المقابل :



مكعب طول حرفه ٥ وحدة طولية ، $\overleftarrow{\text{ق}}$ قوة معيارها ٢٥ نيوتن

فإن : $\overleftarrow{\text{ق}}$ = ...............

(أ) (٢٥ ، ٢٥ ، ٢٥)

(ب) ± (٥ ، ٥ ، ٥)

(ج) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (٢٥ ، ٢٥ ، ٢٥)

(د) ($\frac{٥}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{٥}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{٥}{\sqrt{٣}}$)

---

**١٩** أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ الذى معياره ٢١ √٣ ويصنع زوايا متساوية القياس مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات.

---

**٢٠** إذا كانت الكرتان : (س + ١)$^{٢}$ + (ص – ٤)$^{٢}$ + (ع – ك)$^{٢}$ = ٢٥

، (س – ٣)$^{٢}$ + ص$^{٢}$ + (ع – ٣)$^{٢}$ = ١٦ متماستين من الخارج

**أوجد :** قيمة ك

# ملخص الوحدة الثانية

## الخطوط المستقيمة والمستويات فى الفراغ

**تذكر** **الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم**

* **متجه اتجاه المستقيم :** إذا كان ل ، م ، ن هى جيوب تمام الاتجاه لمستقيم فإن المتجه : $\overrightarrow{\text{ه}} = \text{ك}\,(\text{ل} ، \text{م} ، \text{ن})$ يمثل متجه اتجاه للمستقيم ويرمز له بالرمز $\overrightarrow{\text{ه}} = (\text{أ} ، \text{ب} ، \text{حـ})$ وتسمى الأعداد أ ، ب ، حـ بنسب اتجاه المستقيم.

* **معادلة الخط المستقيم :** الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم المار بالنقطة $(\text{س}_{١} ، \text{ص}_{١} ، \text{ع}_{١})$ والمتجه $\overrightarrow{\text{ه}} = (\text{أ} ، \text{ب} ، \text{حـ})$ متجه اتجاه له هى :

**الصورة المتجهة :** $\overrightarrow{\text{ر}} = (\text{س}_{١} ، \text{ص}_{١} ، \text{ع}_{١}) + \text{ك}\,(\text{أ} ، \text{ب} ، \text{حـ})$

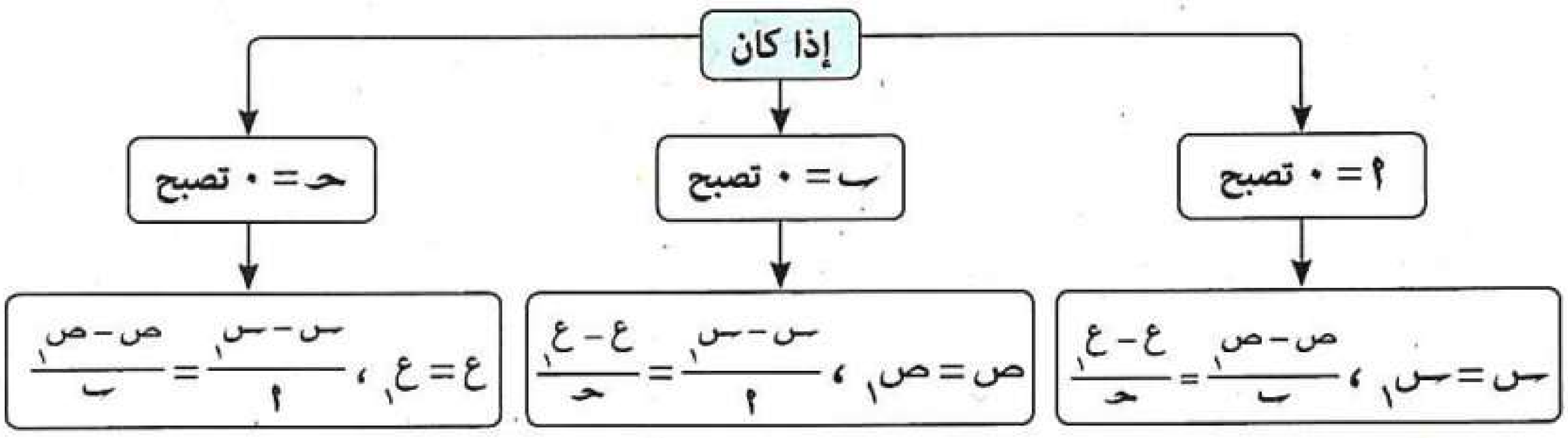
**الصورة البارامترية :** $\text{س} = \text{س}_{١} + \text{ك}\,\text{أ}$ ، $\text{ص} = \text{ص}_{١} + \text{ك}\,\text{ب}$ ، $\text{ع} = \text{ع}_{١} + \text{ك}\,\text{حـ}$

**الصورة الإحداثية :** $\dfrac{\text{س} - \text{س}_{١}}{\text{أ}} = \dfrac{\text{ص} - \text{ص}_{١}}{\text{ب}} = \dfrac{\text{ع} - \text{ع}_{١}}{\text{حـ}}$

**ملاحظات**

① فى معادلة المستقيم بالصورة البارامترية $\boxed{\dfrac{\text{س} - \text{س}_{١}}{\text{أ}} = \dfrac{\text{ص} - \text{ص}_{١}}{\text{ب}} = \dfrac{\text{ع} - \text{ع}_{١}}{\text{حـ}}}$

حيث $(\text{س}_{١} ، \text{ص}_{١} ، \text{ع}_{١})$ نقطة عليه ، (أ ، ب ، حـ) متجه اتجاه له

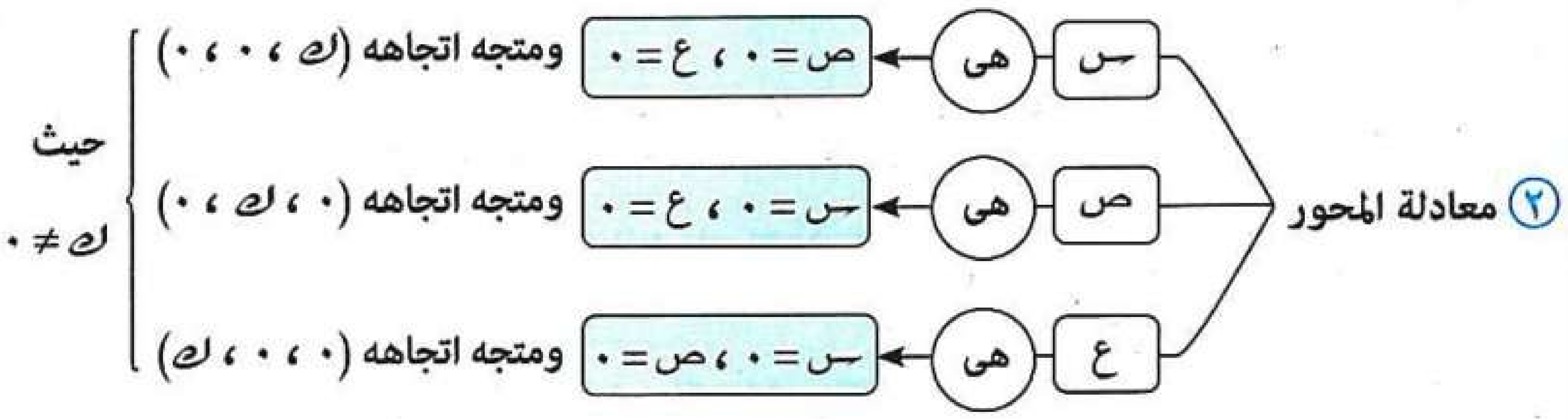


إذا كان

أ = ٠ تصبح $\text{س} = \text{س}_{١}$ ، $\dfrac{\text{ص} - \text{ص}_{١}}{\text{ب}} = \dfrac{\text{ع} - \text{ع}_{١}}{\text{حـ}}$

ب = ٠ تصبح $\text{ص} = \text{ص}_{١}$ ، $\dfrac{\text{س} - \text{س}_{١}}{\text{أ}} = \dfrac{\text{ع} - \text{ع}_{١}}{\text{حـ}}$

حـ = ٠ تصبح $\text{ع} = \text{ع}_{١}$ ، $\dfrac{\text{س} - \text{س}_{١}}{\text{أ}} = \dfrac{\text{ص} - \text{ص}_{١}}{\text{ب}}$



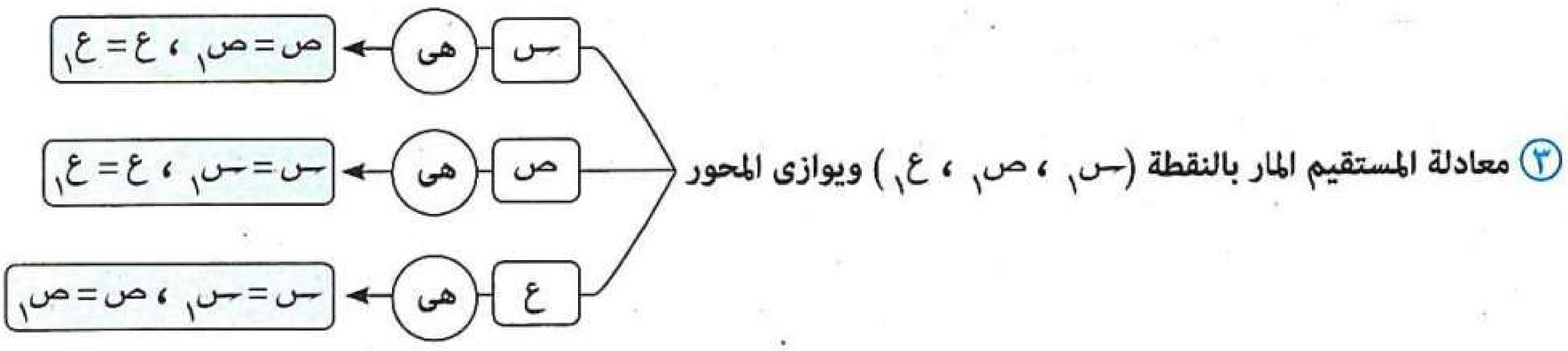
② معادلة المحور

س هى ص = ٠ ، ع = ٠ ومتجه اتجاهه (ك ، ٠ ، ٠)

ص هى س = ٠ ، ع = ٠ ومتجه اتجاهه (٠ ، ك ، ٠)

ع هى س = ٠ ، ص = ٠ ومتجه اتجاهه (٠ ، ٠ ، ك)

حيث ك ≠ ٠



③ معادلة المستقيم المار بالنقطة $(\text{س}_{١} ، \text{ص}_{١} ، \text{ع}_{١})$ ويوازى المحور

س هى $\text{ص} = \text{ص}_{١}$ ، $\text{ع} = \text{ع}_{١}$

ص هى $\text{س} = \text{س}_{١}$ ، $\text{ع} = \text{ع}_{١}$

ع هى $\text{س} = \text{س}_{١}$ ، $\text{ص} = \text{ص}_{١}$

## تذكر معادلة المستوى فى الفراغ

* الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقطة $(س_١ ، ص_١ ، ع_١)$ والمتجه $\overrightarrow{ن} = (أ ، ب ، ح)$ عموديًا عليه هى :

- الصورة المتجهة : $\overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} \cdot (س_١ ، ص_١ ، ع_١)$
- الصورة القياسية : $أ(س - س_١) + ب(ص - ص_١) + ح(ع - ع_١) = ٠$
- الصورة العامة : $أ س + ب ص + ح ع + د = ٠$

### ملاحظات

① المستوى الذى يقطع محاور الإحداثيات فى النقط $(س_١ ، ٠ ، ٠)$ ، $(٠ ، ص_١ ، ٠)$ ، $(٠ ، ٠ ، ع_١)$ معادلته هى :

$$\frac{س}{س_١} + \frac{ص}{ص_١} + \frac{ع}{ع_١} = ١$$

② إذا علمت ثلاث نقاط $أ(س_١ ، ص_١ ، ع_١)$ ، $ب(س_٢ ، ص_٢ ، ع_٢)$ ، $ح(س_٣ ، ص_٣ ، ع_٣)$ واقعة على المستوى

فإن معادلة المستوى تعطى من العلاقة : $\begin{vmatrix} س - س_١ & ص - ص_١ & ع - ع_١ \\ س_٢ - س_١ & ص_٢ - ص_١ & ع_٢ - ع_١ \\ س_٣ - س_١ & ص_٣ - ص_١ & ع_٣ - ع_١ \end{vmatrix} = ٠$

③ • معادلة المستوى س ص هى $ع = ٠$ ، المعادلة $ع = أ$ هى معادلة مستوى يوازى المستوى س ص

• معادلة المستوى ص ع هى $س = ٠$ ، المعادلة $س = أ$ هى معادلة مستوى يوازى المستوى ص ع

• معادلة المستوى س ع هى $ص = ٠$ ، المعادلة $ص = أ$ هى معادلة مستوى يوازى المستوى س ع

④ إذا كانت :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| • $أ = ٠$ | فإن | $ب ص + ح ع + د = ٠$ | وهى | يوازى محور س | وعموديًا | ص ع |
| • $ب = ٠$ | المعادلة | $أ س + ح ع + د = ٠$ | معادلة | يوازى محور ص | على | س ع |
| • $ح = ٠$ | تصبح | $أ س + ب ص + د = ٠$ | مستوى | يوازى محور ع | المستوى | س ص |

⑤ إذا كانت :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| • $أ = د = ٠$ | فإن | $ب ص + ح ع = ٠$ | وهى | يحوى المحور س | وعموديًا | ص ع |
| • $ب = د = ٠$ | المعادلة | $أ س + ح ع = ٠$ | معادلة | يحوى المحور ص | على | س ع |
| • $ح = د = ٠$ | تصبح | $أ س + ب ص = ٠$ | مستوى | يحوى المحور ع | المستوى | س ص |

### ★ الزوايا بين (مستقيمين - مستويين - مستقيم ومستوى) فى الفراغ :

① الزاوية $\theta$ بين مستقيمين $\text{ل}_1$ ، $\text{ل}_2$ فى الفراغ حيث متجها اتجاهيهما $\overleftarrow{\text{ه}_1}$ ، $\overleftarrow{\text{ه}_2}$ نوجدها من العلاقة :

مستقيمين

$$\text{جتا}\,\theta = \frac{|\overleftarrow{\text{ه}_1} \cdot \overleftarrow{\text{ه}_2}|}{\|\overleftarrow{\text{ه}_1}\|\,\|\overleftarrow{\text{ه}_2}\|}$$

حيث $٠ \le \theta \le ٩٠^\circ$

وإذا كان $(\text{ل}_1 ، \text{م}_1 ، \text{ن}_1)$ ، $(\text{ل}_2 ، \text{م}_2 ، \text{ن}_2)$ هى جيوب تمام الاتجاه للمستقيمين فإن : $\text{جتا}\,\theta = |\text{ل}_1\,\text{ل}_2 + \text{م}_1\,\text{م}_2 + \text{ن}_1\,\text{ن}_2|$

② الزاوية $\theta$ بين مستويين فى الفراغ حيث $\overleftarrow{\text{ن}_1}$ متجه الاتجاه العمودى على الأول

، $\overleftarrow{\text{ن}_2}$ متجه الاتجاه العمودى على الثانى نوجدها من العلاقة :

مستويين

$$\text{جتا}\,\theta = \frac{|\overleftarrow{\text{ن}_1} \cdot \overleftarrow{\text{ن}_2}|}{\|\overleftarrow{\text{ن}_1}\|\,\|\overleftarrow{\text{ن}_2}\|}$$

حيث $٠ \le \theta \le ٩٠^\circ$

③ قياس الزاوية بين مستقيم فى الفراغ متجه اتجاهه $\overleftarrow{\text{ه}}$ ومستوى متجه الاتجاه العمودى عليه $\overleftarrow{\text{ن}}$ هو

$(٩٠^\circ - \theta)$ حيث : $$\text{جتا}\,\theta = \frac{|\overleftarrow{\text{ن}} \cdot \overleftarrow{\text{ه}}|}{\|\overleftarrow{\text{ن}}\|\,\|\overleftarrow{\text{ه}}\|}$$

### ★ شرط توازى (مستقيمين - مستويين) فى الفراغ :

① شرط توازى مستقيمين $\text{ل}_1$ ، $\text{ل}_2$ فى الفراغ هو توازى متجهى اتجاهيهما أى $\boxed{\overleftarrow{\text{ه}_1} \,//\, \overleftarrow{\text{ه}_2}}$

② شرط توازى مستويين فى الفراغ هو توازى متجهى الاتجاه العموديين عليهما أى $\boxed{\overleftarrow{\text{ن}_1} \,//\, \overleftarrow{\text{ن}_2}}$

**لاحظ أن :** شرط توازى المستقيم والمستوى هو $\overleftarrow{\text{ه}} \perp \overleftarrow{\text{ن}}$ (أى أن $\overleftarrow{\text{ه}} \cdot \overleftarrow{\text{ن}} = ٠$)

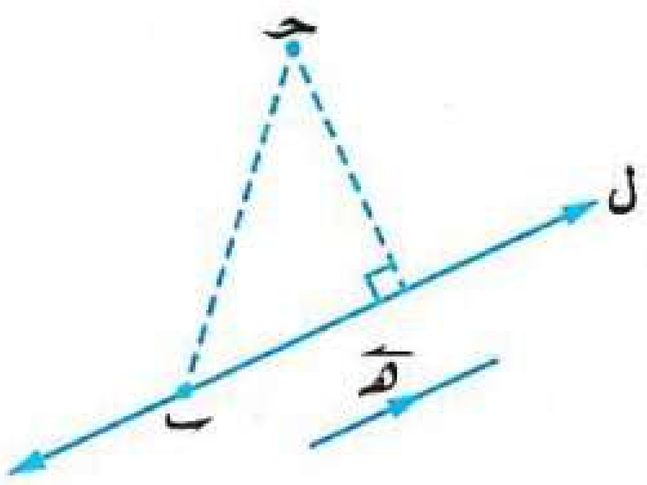
### ★ شرط تعامد (مستقيمين - مستويين) فى الفراغ :

① شرط تعامد مستقيمين هو تعامد متجهى اتجاهيهما أى $\overleftarrow{\text{ه}_1} \perp \overleftarrow{\text{ه}_2}$

② شرط تعامد مستويين هو تعامد متجهى الاتجاه العموديين عليهما أى $\overleftarrow{\text{ن}_1} \perp \overleftarrow{\text{ن}_2}$

**لاحظ أن :** شرط تعامد المستقيم والمستوى هو $\overleftarrow{\text{ه}} \,//\, \overleftarrow{\text{ن}}$ (أى $\overleftarrow{\text{ه}} \times \overleftarrow{\text{ن}} = \overleftarrow{\text{و}}$)

### ★ طول العمود من نقطة إلى مستقيم فى الفراغ :



بفرض مستقيم ل فى الفراغ حيث ب نقطة عليه ، $\overleftarrow{\text{ه}}$ متجه اتجاه له

فإن بعد نقطة حـ فى الفراغ عن المستقيم ل = $$\frac{\|\overleftarrow{\text{حب}} \times \overleftarrow{\text{ه}}\|}{\|\overleftarrow{\text{ه}}\|}$$

### ★ طول العمود من نقطة إلى مستوى :

إذا كانت المعادلة العامة للمستوى هى $\text{أ}\,\text{س} + \text{ب}\,\text{ص} + \text{حـ}\,\text{ع} + \text{د} = ٠$ .

فإن طول العمود المرسوم من النقطة م $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1 ، \text{ع}_1)$ إلى المستوى هو $$\boxed{\text{ل} = \frac{|\text{أ}\,\text{س}_1 + \text{ب}\,\text{ص}_1 + \text{حـ}\,\text{ع}_1 + \text{د}|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2 + \text{حـ}^2}}}$$

طول العمود المرسوم من النقطة ($س_١$ ، $ص_١$ ، $ع_١$) على ... أو بُعد النقطة ($س_١$ ، $ص_١$ ، $ع_١$) عن ...

المحور س = $\sqrt{ص_١^٢ + ع_١^٢}$

المحور ص = $\sqrt{س_١^٢ + ع_١^٢}$

المحور ع = $\sqrt{س_١^٢ + ص_١^٢}$

طول العمود المرسوم من النقطة ($س_١$ ، $ص_١$ ، $ع_١$) على ... أو بُعد النقطة ($س_١$ ، $ص_١$ ، $ع_١$) عن ...

المستوى ص ع = $|س_١|$

المستوى س ع = $|ص_١|$

المستوى س ص = $|ع_١|$

## ملاحظات

① المستقيمان المتوازيان يجمعهما مستوى واحد. ② المستقيمان المتقاطعان يجمعهما مستوى واحد.

③ المستقيمان المتعامدان : أما أن يكونا متقاطعين على التعامد وعندها يجمعهما مستوى واحد

أ، متخالفين وعندها لا يمكن أن يجمعهما مستوى واحد.

④ إذا توازى مستقيمان وكانت نقطة على أحدهما تحقق معادلة المستقيم الآخر فإن المستقيمين منطبقان.

⑤ في المستويين : $أ_١ س + ب_١ ص + جـ_١ ع + د_١ = ٠$ ، $أ_٢ س + ب_٢ ص + جـ_٢ ع + د_٢ = ٠$ إذا كان :

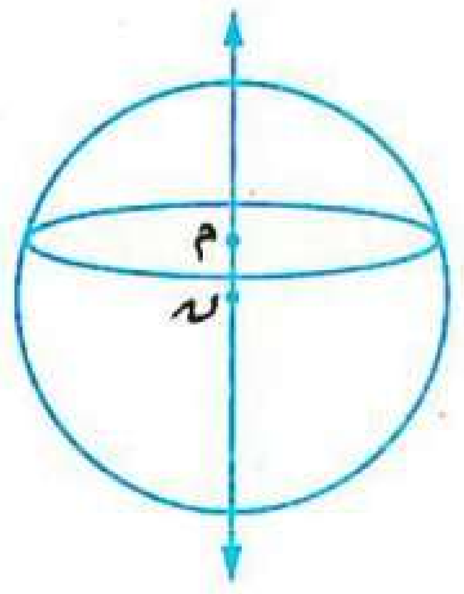
(١) $\frac{أ_١}{أ_٢} = \frac{ب_١}{ب_٢} = \frac{جـ_١}{جـ_٢} \neq \frac{د_١}{د_٢}$ فإن المستويين متوازيان وغير منطبقين.

(٢) $\frac{أ_١}{أ_٢} = \frac{ب_١}{ب_٢} = \frac{جـ_١}{جـ_٢} = \frac{د_١}{د_٢}$ فإن المستويين منطبقان.

⑥ لإيجاد المسافة بين مستويين متوازيين في الفراغ نوجد نقطة تقع على أحدهما ونحسب طول العمود المرسوم من هذه النقطة إلى المستوى الآخر.

⑦ المستقيم المار بمركز كرة ومركز الدائرة الناتجة من تقاطع مستوى مع هذه الكرة يكون عموديًا على مستوى الدائرة

فمثلًا : إذا قطع مستوى كرة مركزها ن ونتج من تقاطعهما دائرة مركزها م فإن $\overleftrightarrow{م ن}$ يكون عموديًا على مستوى الدائرة م



# اختبار على الوحدة الثانية

**١** النقطة التى تقع على المستقيم $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (٢ ، -١ ، ٣) + ك (١ ، ٢ ، -١) هى ............

(أ) (١ ، ١ ، ١) (ب) (٠ ، ٢ ، -٢) (ج) (٣ ، ١ ، ٢) (د) (٤ ، -٣ ، ٠)

---

**٢** معادلة المستوى المار بالنقطة (١ ، ٢ ، ٣) ويوازى كل من المحورين س ، ص هى ............

(أ) س + ص = ٣ (ب) ع = ٣ (ج) س = ١ (د) ص = ٢

---

**٣** إذا كان المستقيم $\frac{\text{س}}{\text{٣}}$ = ص = $\frac{\text{ع}}{\text{-٣}}$ يوازى المستوى س + ك ص + ٢ ع + ك = ٠

فإن : ك = ............

(أ) -٣ (ب) ١ (ج) ٣ (د) ٦

---

**٤** قياس الزاوية بين المستقيمين ل$_1$ : س = ٢ - ٥ ك ، ص = ١ - ك ، ع = ٣ + ٤ ك

، ل$_2$ : $\frac{\text{س + ١}}{\text{٣}} = \frac{\text{٢ - ص}}{\text{٤}} = \frac{\text{ع}}{\text{٢}}$ يساوى ............

(أ) ٧٥° (ب) ٨٣° (ج) ٣٥َ ٤٠° (د) ٤َ ٨٥°

---

**٥** معادلة خط تقاطع المستويين : ٢ س - ص + ع = ١ ، س - ٣ ص - ع = -٢ هى ............

(أ) $\frac{\text{س + ١}}{\text{-١}} = \frac{\text{ص}}{\text{٢}} = \frac{\text{ع}}{\text{٣}}$ (ب) $\frac{\text{س - ١}}{\text{١}} = \frac{\text{ص}}{\text{-٣}} = \frac{\text{ع - ٥}}{\text{١}}$

(ج) $\frac{\text{س - ٢}}{\text{١}} = \frac{\text{ص - ٣}}{\text{-٢}} = \frac{\text{ع}}{\text{-١}}$ (د) $\frac{\text{س - ١}}{\text{٤}} = \frac{\text{ص - ١}}{\text{٣}} = \frac{\text{ع}}{\text{-٥}}$

---

**٦** معادلة المستوى الذى يحتوى المستقيم $\overleftarrow{\text{ر}}_1$ = (١ ، ٢ ، ٤) + ك$_1$ (٤ ، ١ ، ١١) ، عمودى على المستقيم $\overleftarrow{\text{ر}}_2$ = (٤ ، ١٥ ، ٨) + ك$_2$ (٢ ، ٣ ، -١) هى ............

(أ) (٤ ، ١ ، ١١) : (س ، ص ، ع) = (٤ ، ١ ، ١١) . (٤ ، ١٥ ، ٨)

(ب) (١ ، ٢ ، ٤) . (س ، ص ، ع) = (١ ، ٢ ، ٤) . (٤ ، ١٥ ، ٨)

(ج) ٤ س + ١٥ ص + ١٨ ع = ٤

(د) ٢ س + ٣ ص - ع = ٤

---

**٧** قياس الزاوية بين المستقيم ل : $\frac{\text{س - ١}}{\text{٢}} = \frac{\text{ص - ٢}}{\text{١}} = \frac{\text{ع + ٣}}{\text{٢}}$ ، المستوى س + ص + ٤ = ٠

يساوى ............

(أ) ٠° (ب) ٤٥° (ج) ٣٠° (د) ٩٠°

**٨** حجم الكرة التى مركزها النقطة (−٢ ، ١ ، −١) والمستوى ٢ س + ٢ ص + ع = ٣ مماسًا لها يساوى .............. وحدة مكعبة.

(أ) ١٦ π　　(ب) $\frac{٣٢}{٣}$ π　　(جـ) $\frac{١٦}{٣}$ π　　(د) $\frac{٦٤}{٣}$ π

---

**٩** إذا كان المستوى س + ٥ ص − ٦ ع = ٣٠ يقطع محاور الإحداثيات س ، ص ، ع فى النقاط (أ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، ب ، ٠) ، (٠ ، ٠ ، حـ) على الترتيب　فإن : أ + ب + حـ = ..............

(أ) صفر　　(ب) ٣٠　　(جـ) ٣١　　(د) ٤١

---

**١٠** معادلة المستوى المار بالنقطة أ (١ ، −١ ، ١) والذى يكون عموديًا على كل من المستويين :
س − ص + ع − ١ = ٠　،　٢ س + ص + ع + ١ = ٠ هى ..............

(أ) س − ص + ع = ٣　　(ب) −٢ س + ص + ٣ ع = ٠

(جـ) ٢ س + ص + ع = ٢　　(د) ٢ س − ص + ٣ ع = ٠

---

**١١** إذا كان قياس الزاوية بين مستقيم والمحور ص يساوى قياس الزاوية بين المستقيم والمحور ع وقياس كل منهما ٦٠° فإن قياس الزاوية بين المستقيم والمحور س يمكن أن تساوى ..............

(أ) ٣٠°　　(ب) ٤٥°　　(جـ) ٦٠°　　(د) ٧٥°

---

**١٢** إذا كان المستوى ٣ س − ص + ٢ ع + ٣ = ٠ والمستوى ك س − ٤ ص + ع − ٥ = ٠ متعامدين
فإن : ك = ..............

(أ) ٢　　(ب) −٢　　(جـ) ٣　　(د) −٣

---

**١٣** معادلة المستوى الموازى للمستوى : ٢ س + ص − ٤ ع = ٠ والمار بالنقطة (١ ، ٢ ، ٠) هى ..............

(أ) ٢ س + ص − ٤ ع = ٣　　(ب) ٢ س + ص = ٤

(جـ) ٢ س + ص − ٤ ع = ٤　　(د) س + ٢ ص − ٤ ع = ٥

---

**١٤** معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٤ ، ١) وعمودى على المستوى ٣ س − ص + ٥ ع = ٧٧ هى ..............

(أ) $\frac{\text{س} + ٣}{٢} = \frac{\text{ص} + ١}{٤} = \frac{\text{ع} - ٥}{٣}$　　(ب) $\frac{\text{س} - ٢}{٣} = \text{ص} - ٤ = \frac{\text{ع} - ١}{٥}$

(جـ) $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (٣ ، −١ ، ٥) + ك (٢ ، ٤ ، ١)　　(د) $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (٢ ، ٤ ، ١) + ك (٣ ، −١ ، ٥)

---

**١٥** إذا كانت زوايا الاتجاه لمستقيم هى $\theta_{\text{س}}$ ، $\theta_{\text{ص}}$ ، $\theta_{\text{ع}}$

فإن : حتا ٢ $\theta_{\text{س}}$ + حتا ٢ $\theta_{\text{ص}}$ + حتا ٢ $\theta_{\text{ع}}$ = ..............

(أ) −٢　　(ب) −١　　(جـ) ١　　(د) ٢

**١٦** المعادلات البارامترية للمستقيم المار بالنقطتين ؟ (–١ ، ٠ ، ٣) ، ب (١ ، –١ ، ٠) هى ..............

(أ) س = –١ + ك ، ص = – ك ، ع = ٣ – ٣ ك

(ب) س = –١ + ٢ ك ، ص = – ك ، ع = –٣ ك

(جـ) س = ١ + ٢ ك ، ص = –١ – ك ، ع = –٣ ك

(د) س = ١ + ٢ ك ، ص = –١ + ك ، ع = ٣ – ٣ ك

---

**١٧** إذا قطع المستوى : ٦ س + ٣ ص + ٤ ع – ٧٢ = صفر محاور الإحداثيات س ، ص ، ع فى النقاط ؟ ، ب ، حـ على الترتيب فإن حجم الهرم و ؟ ب حـ = .............. وحدة حجم (حيث «و» نقطة الأصل).

(أ) ١٢ (ب) ٨٦٤ (جـ) ١٧٢٨ (د) ٥٦٨٤

---

**١٨** وضع المستقيم : $\frac{س}{١} = \frac{ص}{٢} = \frac{ع}{٣}$ بالنسبة للمستوى س – ٢ ص + ع – ٦ = ٠ هو ..............

(أ) المستقيم يوازى المستوى. (ب) المستقيم عموديًا على المستوى.

(جـ) المستقيم يقع فى المستوى. (د) المستقيم مائل على المستوى.

---

**١٩** إذا كان المستوى : ٢ س – ص – ٢ ع + ١٢ = صفر

يقطع الكرة (س + ٣)$^{٢}$ + (ص + ٢)$^{٢}$ + (ع – ١)$^{٢}$ = ١٥ فأوجد مساحة المقطع الناتج.

---

**٢٠** أثبت أن المستقيمين :

$\overleftarrow{ر}_{١}$ = (٣ ، –١ ، ٢) + ك$_{١}$ (٤ ، ١ ، ٣) ، $\overleftarrow{ر}_{٢}$ = (صفر ، ٤ ، –١) + ك$_{٢}$ (١ ، –١ ، ٢) متخالفان.

# اختبار تراكمى على الوحدتين الأولى والثانية

**١** إذا كانت متجهات الموضع $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (١ ، –٢ ، ١) ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (ك ، –٥ ، ٣) ، $\overleftarrow{\text{ح}}$ = (٥ ، –٩ ، ٤) مستوية «تقع فى مستوى واحد» فإن : ك = ..............

(أ) ٢ (ب) –٢ (ج) ٣ (د) –٣

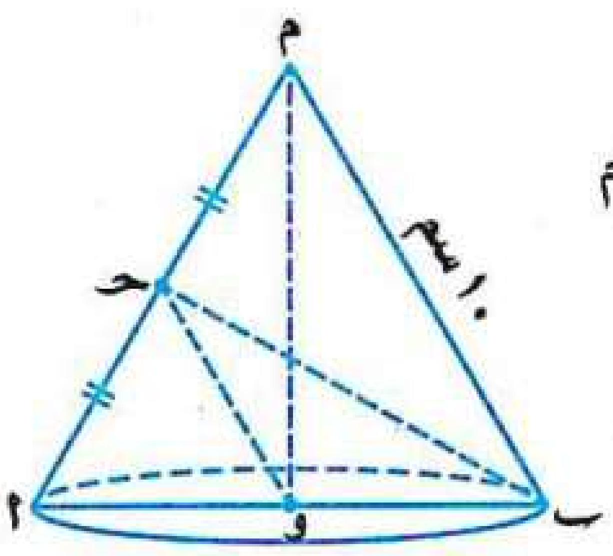
---

**٢** إذا كانت : $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} + \text{ع}^{٢}$ – ٤ ك س + ٤ ص – ٨ ع + ٢ ك = ٠ معادلة كرة طول قطرها ٤ $\sqrt{٥}$ وحدة طول حيث ك ∈ $\text{ح}^{+}$ فإن : ك = ...............

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{٢}$ (ج) $\frac{٣}{٢}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

---

**٣** في الشكل المقابل :



إذا كان محيط قاعدة المخروط الدائرى القائم هو ١٢ π سم وطول راسمه ١٠ سم وكانت نقطة ح هى منتصف $\overline{\text{مأ}}$ فإن : $\overleftarrow{\text{ب ح}} \cdot \overleftarrow{\text{ح و}}$ = ..............

(أ) ٩ (ب) ٣٦

(ج) –٤٣ (د) ٥٤

---

**٤** حجم متوازى السطوح الذى فيه ثلاثة أحرف متجاورة يمثلها المتجهات :

$\overleftarrow{\text{أ}}$ = (٣ ، –٤ ، ٠) ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (٠ ، –٤ ، ٣) ، $\overleftarrow{\text{ح}}$ = (٠ ، ٠ ، ٥) يساوى .............. وحدة مكعبة.

(أ) ١٢ (ب) ٥٠ (ج) ٦٠ (د) ١٣٥

---

**٥** معادلة المستوى المار بالنقطة (٢ ، –١ ، ٣) ويقطع المستقيم : $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (١ ، –١ ، ٢) + ك (٢ ، ٢ ، –١) على التعامد هى ..............

(أ) س – ٣ ص + ع – ٨ = ٠ (ب) ٢ س + ٢ ص – ع = –١

(ج) ٣ س + ٥ ص + ع = ٤ (د) ٢ س + ٣ ص – ع = –٢

---

**٦** البُعد العمودى بين المستويين : ٣ س + ١٢ ص – ٤ ع = ٩ ، ٣ س + ١٢ ص – ٤ ع = –١٧ يساوى ..............

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٥

---

**٧** إذا كان المستقيم : $\frac{\text{س} - ١}{٢} = \frac{\text{ص} + ٣}{-١} = \frac{\text{ع}}{٣}$ يقطع المستوى : ٣ س + ٢ ص + ع – ٨ = ٠ فى نقطة فإن قياس زاوية ميل المستقيم على المستوى = ..............

(أ) °٦٠ (ب) °٤٥ (ج) °٦٣ َ١٨ (د) °٣٠

**٨** إذا كان $ل_١$ : $\frac{س - ٣}{٢} = \frac{- ص - ١}{٦} = \frac{ع}{ك}$ يوازى $ل_٢$ : $\frac{س + ٢}{٦} = \frac{ص - ٤}{م} = \frac{ع - ١}{٣}$

فإن : ك + م = ..............

(أ) −١٧ (ب) −١٠ (جـ) ١٠ (د) ١٧

---

**٩** طول العمود المرسوم من النقطة أ (−٢ ، ٣ ، ١) على المستقيم : $\frac{س + ٢}{٢} = \frac{ص - ٣}{٤} = \frac{ع - ١}{٤}$

يساوى ..............

(أ) $\sqrt{٥}$ وحدة طول.

(ب) $\sqrt{٢}$ وحدة طول.

(جـ) طول العمود المرسوم من النقطة (٠ ، ٧ ، ٥) إلى نفس المستقيم.

(د) $\sqrt{٣}$ وحدة طول.

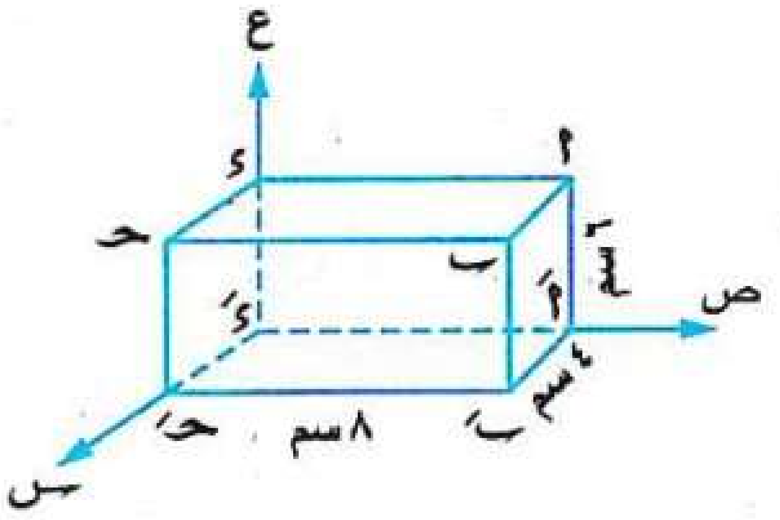
---

**١٠** قياس الزاوية الصغرى بين المستقيمين $ل_١$ : س − ١ = $\frac{ص + ٢}{\sqrt{٢}}$ = − ع + ١ ، $ل_٢$ : −س = ع + ٣
، ص = ٤ يساوى ..............

(أ) °٤٥ (ب) °١٢٠ (جـ) °١٣٥ (د) °١٥٠

---

**١١** **في الشكل المقابل :**



أبحـء أَبَحَءَ متوازى مستطيلات فإن : $\overleftarrow{بءَ} \cdot \overleftarrow{حـأَ}$ = ..............

(أ) ١٢ (ب) ٢٤

(جـ) −١٢ (د) −٢٤

---

**١٢** معادلة المستوى المار بالنقطة أ (−٢ ، ٣ ، ٤) والذى يوازى كل من المتجهين
$\overleftarrow{هـ_١}$ = (١ ، −٢ ، ١) ، $\overleftarrow{هـ_٢}$ = (٣ ، ٢ ، ٤) هى ..............

(أ) س − ٢ ص + ع = −٤ (ب) ٣ س + ٢ ص + ٤ ع = ١٦

(جـ) ٢ س + ٤ ص + ٣ ع = ٢٠ (د) ١٠ س + ص − ٨ ع = −٤٩

---

**١٣** معادلة خط تقاطع المستويين : س + ٢ ص − ٢ ع = ١ ، ٢ س + ص − ٣ ع = ٥ هى ..............

(أ) $\frac{س - ٧}{٤} = \frac{ع - ٣}{٣}$ = ص

(ب) $\overleftarrow{ر}$ = (٧ ، ٠ ، ٣) + ك (٤ ، ٣ ، ١)

(جـ) س = ٧ + ٤ ك ، ص = ٣ ، ع = ٣ + ٣ ك

(د) $\frac{س - ٧}{٤} = \frac{ع - ٣}{٣} = \frac{ص}{٢}$

**١٤** المستقيمان : $ل_1$ : { س = ٤ − ٢ $ك_1$ ، ص = ٣ + $ك_1$ ، ع = ١ + ٣ $ك_1$ } ، $ل_2$ : { س = ٥ + ٢ $ك_2$ ، ص = ١ − $ك_2$ ، ع = ١ − ٣ $ك_2$ } يكونان ..............

(أ) متخالفان. (ب) لايمر بهما مستوى واحد.

(جـ) متوازيان. (د) متقاطعان.

---

**١٥** ($\overleftarrow{\text{س}}$ × $\overleftarrow{\text{ص}}$) . $\overleftarrow{\text{ع}}$ + $\overleftarrow{\text{س}}$ . $\overleftarrow{\text{ص}}$ = ..............

(أ) ٢ (ب) −١ (جـ) ١ (د) صفر

---

**١٦** إذا كان مسقط النقطة و (٠ ، ٠ ، ٠) على المستوى (ط) هى م (٢ ، ٣ ، ١)

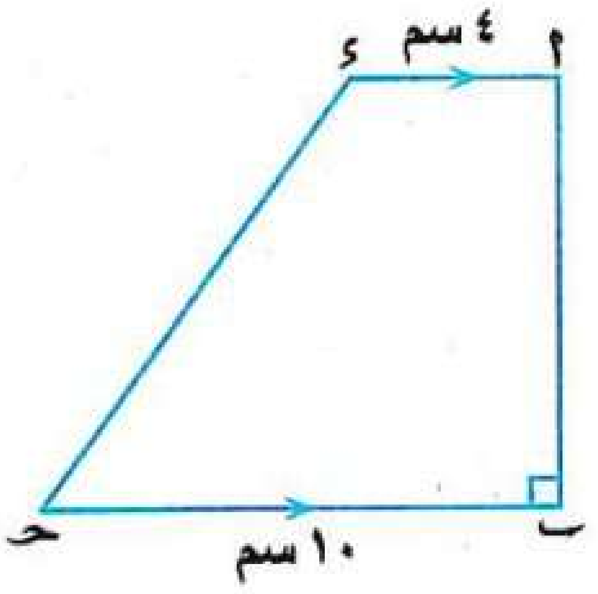
فإن معادلة هذا المستوى هى ..............

(أ) ٢ س + ٣ ص + ع − ١٤ = ٠ . (ب) س + ٣ ص + ٢ ع − ١٤ = ٠ .

(جـ) ٢ س + ٣ ص + ع = ٠ . (د) س + ٣ ص + ٢ ع = ٠ .

---

**١٧** في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء شبه منحرف قائم الزاوية فى ب ، $\overline{\text{أء}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

فإن : $\overleftarrow{\text{حـ ء}}$ . $\overleftarrow{\text{حـ ب}}$ = ..............

(أ) ٢٠ (ب) ٤٠

(جـ) ٦٠ (د) ٨٠

---

**١٨** المستوى ص ع يقسم الخط الواصل بين النقطتين : (٢ ، ٤ ، ٥) ، (٣ ، ٥ ، −٩) بنسبة ..............

(أ) ٢ : ٣ من الداخل. (ب) ٣ : ٢ من الداخل. (جـ) ٢ : ٣ من الخارج. (د) ٤ : ٣ من الخارج.

---

**١٩** أوجد مسقط النقطة أ (٠ ، ٩ ، ٦) على المستقيم المار بالنقطتين : ب (١ ، ٢ ، ٣) ، حـ (٧ ، −٢ ، ٥)

---

**٢٠** أ ب حـ ء شكل رباعى حيث :

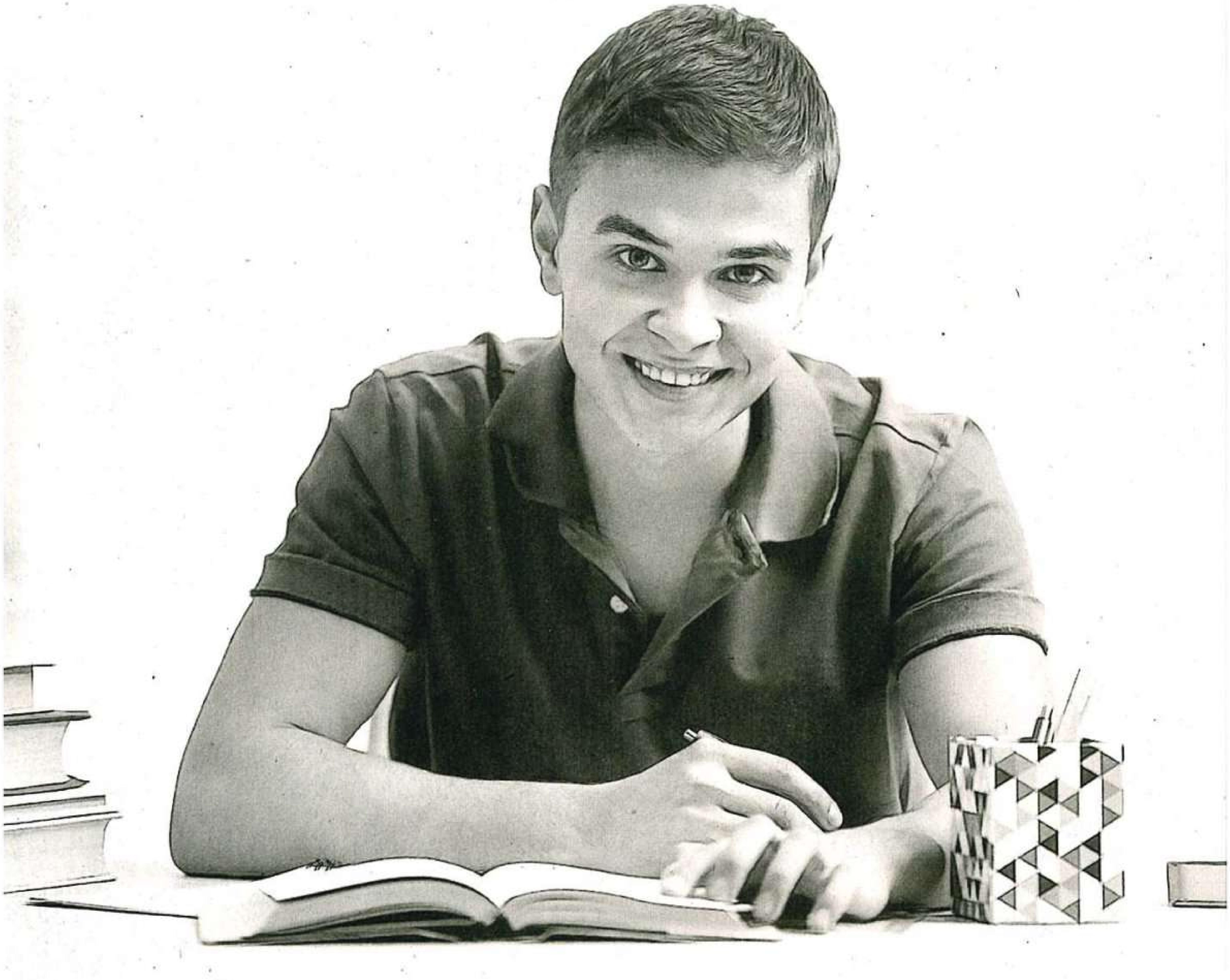
أ = (٣ ، ٠ ، ٢) ، ب = (٦ ، ٢ ، ٥) ، حـ = (٤ ، ٤ ، ٥) ، ء = (١ ، ٢ ، ٢)

① أثبت أن الشكل أ ب حـ ء متوازى أضلاع وأوجد مساحته.

② أوجد متجه وحدة عمودى على مستوى الشكل الرباعى.

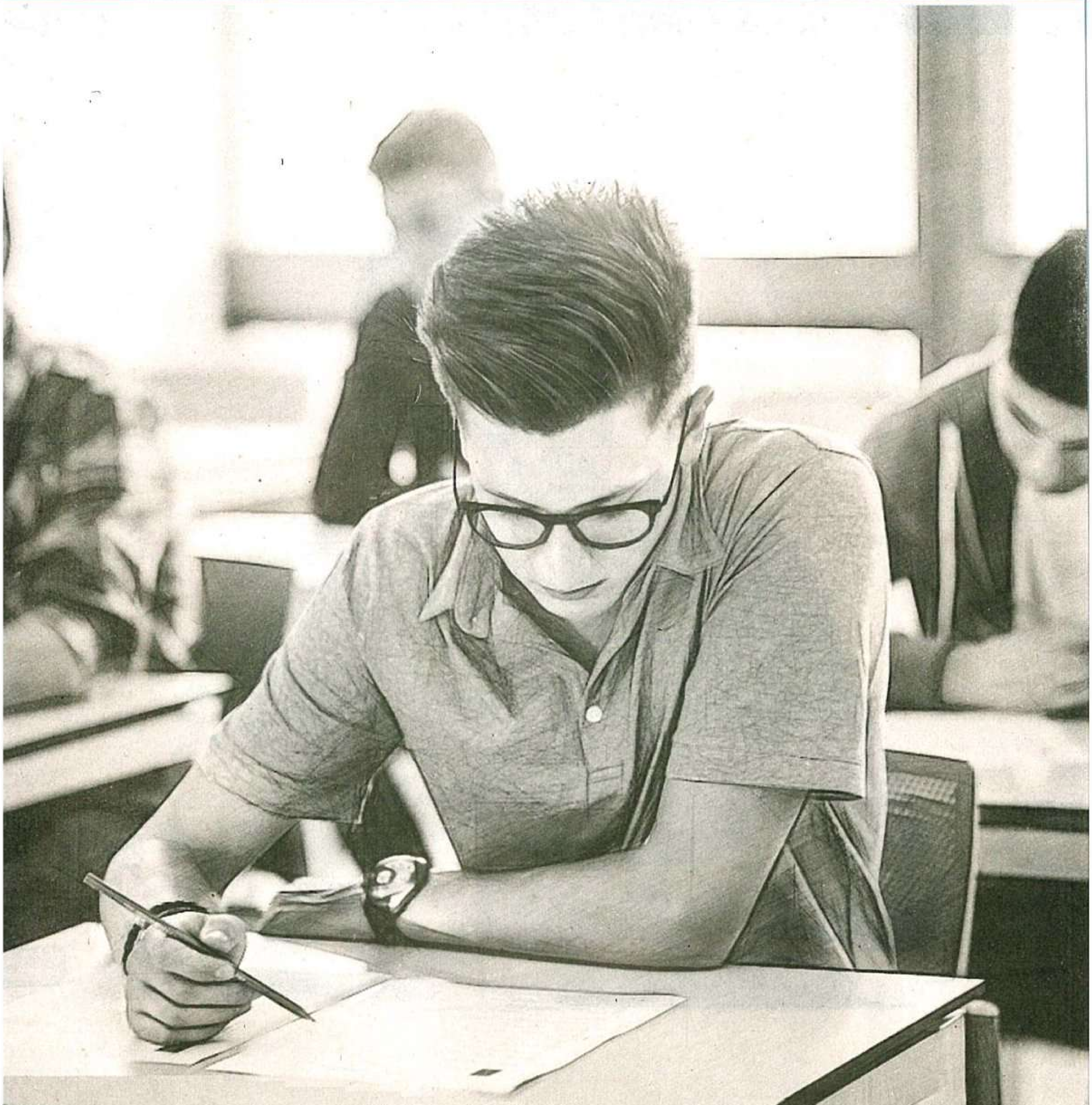
# ثالثاً

# الامتحانات النهائية



# اختبارات الكتاب المدرسى

## فى الجبر والهندسة الفراغية



# الاختبـار الأول

## أولاً أجب عن سؤال واحد من السؤالين الآتيين

### ١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : $^{ن}ق_{ن-٢} = ٢٠$ فإن : $ن = ..............$

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

② $ت + ت^{٢} + ت^{٣} + \cdots + ت^{١٠٠} = ..............$

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ١٠٠

③ إذا كان : $أ(٧ ، -١ ، ٨)$ ، $ب(١١ ، ٢ ، -٤)$ فإن طول : $\overline{أب} = ..............$ وحدة طول.

(أ) ١٠ (ب) ١١ (جـ) ١٢ (د) ١٣

④ $س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٤ س - ٦ ص + ٨ ع + ٤ = ٠$ معادلة كرة طول قطرها = .............. وحدة طول.

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ١٥ (د) ٢٠

⑤ إذا كان $ل_{١}$ : $\frac{س - ٣}{١} = \frac{ص + ٢}{-٢} = \frac{ع + ١}{-٤}$ يوازى $ل_{٢}$ : $\frac{س + ٥}{-٢} = \frac{ص}{ك + ١} = \frac{ع - ١}{٨}$

فإن : $ك = ..............$

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

⑥ إذا كان $\theta$ قياس الزاوية المحصورة بين المتجهين : $\overrightarrow{أ} = (-٢ ، -٦ ، ١)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٢ ، ٦ ، -١)$

فإن : $\theta = ..............$

(أ) °٣٠ (ب) °٦٠ (جـ) °١٢٠ (د) °١٨٠

---

### ٢ أكمل ما يأتى :

① معامل $س^{٥}$ فى مفكوك $(٣ - ٢ س)^{٧}$ يساوى ..............

② مجموعة حل المعادلة : $\begin{vmatrix} س & ١ & ٢ \\ ٠ & س & ٣ \\ ٠ & ٠ & س \end{vmatrix} - ٨ = ٠$ فى ح هى ..............

③ إذا كان : $\overleftarrow{أ}$ = ٢ $\overleftarrow{س}$ + ٣ $\overleftarrow{ص}$ + ك $\overleftarrow{ع}$ ، $\overleftarrow{ب}$ = −٦ $\overleftarrow{س}$ − ٤ $\overleftarrow{ص}$ + ٤ $\overleftarrow{ع}$ وكان : $\overleftarrow{أ} \perp \overleftarrow{ب}$

فإن : ك = ..............

④ إذا كان : $\overleftarrow{أ}$ = (٣ ، ٠ ، ٤) ، $\overleftarrow{ب}$ = $\overleftarrow{س}$ − ٢ $\overleftarrow{ص}$ + ٣ $\overleftarrow{ع}$ فإن : $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}$ = ..............

⑤ معادلة الكرة التى مركزها (٢ ، −٣ ، ١) وطول نصف قطرها ٢ $\sqrt{٥}$ وحدة طول هى ..............

⑥ معادلة المستقيم المار بالنقطتين أ (٢ ، −١ ، ٤) ، ب (−١ ، ٠ ، ٢) هى ..............

## ثانيًا أجب عن الأسئلة الآتية

**٣** ( أ ) فى مفكوك $\left(٢س + \frac{١}{س^{٢}}\right)^{١٥}$ أوجد قيمة الحد الخالى من س

وأثبت أن هذا المفكوك لا يشتمل على حد يشتمل على $س^{٥}$ «٣٠٧٥٠٧٢»

(ب) أوجد الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم : $\frac{س + ٣}{٢} = \frac{٢ص - ١}{٥} = \frac{٣ع + ٢}{٤}$

---

**٤** ( أ ) أوجد المعكوس الضربى للمصفوفة : أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ١- & ١ \\ ١ & ٣- & ٢ \\ ٢١ & ٥ & ١ \end{pmatrix}$

(ب) أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب : ع = ٢ − ٢ $\sqrt{٣}$ ت على الصورة المثلثية.

«٢ (جتا $\frac{-\pi}{٦}$ + ت جا $\frac{-\pi}{٦}$) ، ٢ (جتا $\frac{٥\pi}{٦}$ + ت جا $\frac{٥\pi}{٦}$)»

---

**٥** ( أ ) حل المعادلات الآتية : س + ٣ ص + ٢ ع = ١٣ ، ٢ س − ص + ع = ٣

، ٣ س + ص − ع = ٢ باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة. «١ ، ٢ ، ٣»

(ب) أوجد نقطة تقاطع المستويات :

٢ س + ص − ع = −١ ، س + ص + ع − ٢ = ٠ ، ٣ س − ص − ع = ٦ «(٢ ، $\frac{-٥}{٢}$ ، $\frac{٥}{٢}$)»

# الاختبـار الثانى

## أولًا أجب عن سؤال واحد من السؤالين الآتيين

### ١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان للمعادلتين : ٢ س + ص = ١ ، ٤ س + ٢ ص = ك عدد لا نهائى من الحلول

فإن : ك = ...............

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

② إذا كان : $^{\text{ن}+\text{١}}\text{ق}_{\text{٢}} : {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{٤}}$ = ٢ : ٣ فإن : ن= ...............

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ١١

③ إذا كان : $\text{س}^{\text{٢}} + \text{ص}^{\text{٢}} + \text{ع}^{\text{٢}}$ + ٦ س − ٤ ص + ١٠ ع − ٨ = ٠ معادلة كرة مركزها م

فإن : م = ...............

(أ) (−٣ ، ٢ ، −٥) (ب) (٤ ، −٢ ، −٥)

(جـ) (−٣ ، −٢ ، −٥) (د) (٣ ، ٢ ، ٥)

④ إذا كان : $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (−٢ ، ٤ ، ٦) ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (٠ ، ك ، ٣) حيث ك ∈ $\text{ص}^{+}$ وكان $\|\overleftarrow{\text{أب}}\|$ = ٧

فإن قيمة : ك = ...............

(أ) ١٠ (ب) ٨ (جـ) ٦ (د) ٤

⑤ إذا كان θ قياس الزاوية المحصورة بين : $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (٢ ، ٠ ، ٢) ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (٠ ، ٠ ، ٤)

فإن : θ = ...............

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

⑥ إذا كان ل$_{\text{١}}$ : $\frac{\text{س} - \text{٣}}{\text{٢}} = \frac{-\text{ص} - \text{١}}{\text{٦}} = \frac{\text{ع}}{\text{ك}}$ يوازى ل$_{\text{٢}}$ : $\frac{\text{س} + \text{٢}}{\text{٦}} = \frac{\text{ص} - \text{٤}}{\text{م}} = \frac{\text{ع} - \text{١}}{\text{٣}}$

فإن : ك + م = ...............

(أ) −١٧ (ب) −١٠ (جـ) ١٠ (د) ١٧

---

### ٢ أكمل ما يأتى :

① ω + $\omega^{\text{٢}}$ + ··· + $\omega^{\text{١٠٠}}$ = ...............

② إذا كان : أ ، ب ، حـ هى أطوال أضلاع مثلث فإن قيمة : $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{٥} & \text{٧} & \text{٨} \\ \text{ماأ} & \text{ماب} & \text{ماحـ} \end{vmatrix}$ = ...............

③ إذا كان : $\overleftarrow{أ}$ = (−١ ، ٤ ، ٢) ، $\overleftarrow{ب}$ = (٢ ، ٢ ، ١) فإن مركبة : $\overleftarrow{أ}$ فى اتجاه $\overleftarrow{ب}$ = ..............

④ س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ + ع$^{٢}$ − ٤ ك س + ٤ ص − ٨ ع + ٢ ك = ٠ معادلة كرة طول نصف قطرها ٢ $\sqrt{٥}$ وحدة طول فإن قيمة : ك = ..............

⑤ إذا كان المستوى : ٣ س − ص + ٢ ع + ٣ = ٠ ، المستوى : ك س − ٤ ص + ع − ٥ = ٠ متعامدان فإن قيمة : ك = ..............

⑥ إذا كانت : حـ (−١ ، ٦ ، −٥) منتصف $\overline{أب}$ حيث :

أ (ك − ٢ ، −١ ، م + ٣) ، ب (٢ ، ن − ٧ ، −٢) فإن : ك + م − ن = ..............

## ثانيًا أجب عن الأسئلة الآتية

**٣** ( أ ) أوجد معامل س$^{٥}$ فى مفكوك : (١ − س + س$^{٢}$) (١ + س)$^{١١}$ «٢٩٧»

(ب) أثبت أن المستقيم : $\frac{س - ١}{٢} = \frac{ص + ٣}{-١} = \frac{ع}{٣}$ يقطع المستوى : ٣ س + ٢ ص + ع − ٨ = ٠

فى نقطة ثم أوجد قياس زاوية ميل المستقيم على المستوى. «٣٠°»

---

**٤** ( أ ) احسب رتبة المصفوفة : $\begin{pmatrix} ٢ & -١ & -٣ \\ ١ & ٢ & ١ \\ ٣ & -٥ & ٢ \end{pmatrix}$ ومن ثم أثبت أن مجموعة المعادلات :

٢ س − ص − ٣ ع = ٢ ، س + ٢ ص + ع = ١ ، ٣ س − ٥ ص + ٢ ع = ١٣

لها حل وحيد وأوجد ذلك الحل باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة. «٣ ، (٢ ، −١ ، ١)»

(ب) أوجد الصورة الأسية للعدد : ع = $\frac{٢ + ٦ ت}{٣ - ت}$

ثم أوجد كلًا من : ع$^{-١}$ ، $\overline{ع}$ ، $\sqrt{ع}$ على الصورة المثلثية. «٢ هـ$^{\frac{\pi}{٢} ت}$»

---

**٥** ( أ ) أثبت أن إحدى قيم المقدار : $\sqrt{ت} - \sqrt{-ت} = \sqrt{٢}$ ت

(ب) إذا كان : (س − ٢)$^{٢}$ + (ص + ٤)$^{٢}$ + (ع − ٢)$^{٢}$ = ١ ، (س + ٤)$^{٢}$ + (ص − ٤)$^{٢}$ + (ع − ٢)$^{٢}$ = ٤

معادلتا كرتين أوجد البُعد بين مركزى الكرتين وبيِّن أن الكرتين غير متقاطعين. «١٠»

# الاختبـار الثالث

## أولًا أجب عن سؤال واحد من السؤالين الآتيين

### ١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① مجموع معاملات الحدود فى مفكوك $(١ + س)^٥$ يساوى ..............

| | | | |
|---|---|---|---|
| ( أ ) صفر | (ب) ٥ | (جـ) ٣٢ | ( د ) $\underline{٥|}$ |

② إذا كان س عدد مركب فإن عدد الحلول المختلفة للمعادلة : $\begin{vmatrix} س^٣ + ١ & س - ١ \\ س + ١ & س^٣ - ١ \end{vmatrix} = ٠$ .

يساوى ..............

| | | | |
|---|---|---|---|
| ( أ ) ٦ | (ب) ٥ | (جـ) ٤ | ( د ) ٣ |

③ إذا كان : (س ، ص ، ع) منتصف $\overline{أب}$ حيث : أ (−٤ ، ٠ ، ٥) ، ب (−٢ ، ٤ ، −١٣)

فإن : س + ص + ع = ..............

| | | | |
|---|---|---|---|
| ( أ ) −٥ | (ب) −٦ | (جـ) ٣ | ( د ) ٤ |

④ إذا كان : أ (−٤ ، −٢ ، ٣) ، ب (١ ، ٢ ، ك) وكان طول : $\overline{أب} = \sqrt{٧٧}$ وحدة طول.

فإن إحدى قيم ك هى ..............

| | | | |
|---|---|---|---|
| ( أ ) ٢ | (ب) ٤ | (جـ) ٦ | ( د ) ٩ |

⑤ إذا كان : $\overleftarrow{أ}$ = (−١ ، ٣ ، ٤) ، $\overleftarrow{ب}$ = (٠ ، −٢ ، ٥) فإن : $\| \overleftarrow{أب} \|$ = ..............

| | | | |
|---|---|---|---|
| ( أ ) $٢\sqrt{٣}$ | (ب) $٣\sqrt{٣}$ | (جـ) $٤\sqrt{٣}$ | ( د ) $٥\sqrt{٣}$ |

⑥ طول العمود المرسوم من النقطة أ (٣ ، ٠ ، −٥) على المستوى : $٢ س + \sqrt{٥} ص + ٤ ع - ٦ = ٠$ .

يساوى .............. وحدة طول.

| | | | |
|---|---|---|---|
| ( أ ) ٤ | (ب) ٥ | (جـ) ٦ | ( د ) ٧ |

---

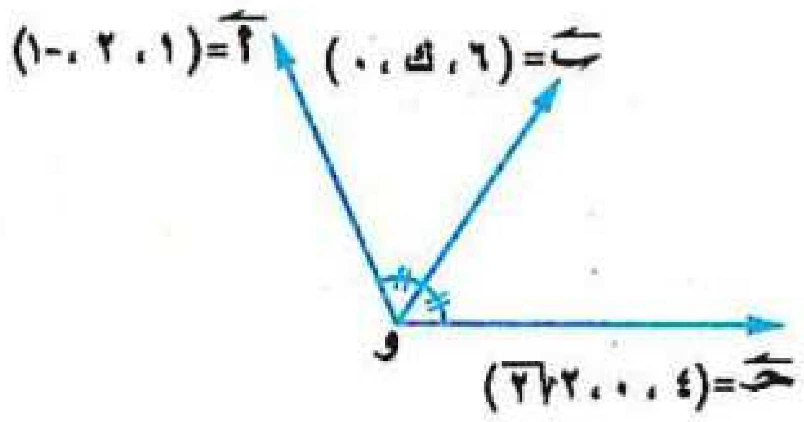
### ٢ أكمل ما يأتى :

① إذا كان : ع = حا ٦٠° − ت حتا ٦٠° فإن سعة العدد ع = ..............

② رتبة المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ & ٢ & ٢ \\ ٥ & ٥ & ٥ \end{pmatrix}$ تساوى ..............

③ من الشكل الموضح

قيمة ك = ..............



④ طول نصف قطر الكرة $س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٤س - ٦ص + ٨ع + ٤ = ٠$ يساوى ..............

⑤ إذا كان المستقيم : $\frac{س + ٣}{٢} = \frac{ص + ١}{-٦} = \frac{ع - ٢}{ك}$

يوازى المستقيم : $\frac{س + ٢}{٤} = \frac{ص - ٥}{م} = \frac{ع - ١}{٣}$ فإن : $ك + م =$ ..............

⑥ إذا كان : $\frac{س + ٢}{٦} = \frac{ص - ١}{م} = \frac{ع - ١}{٣}$ عمودى على المستقيم : $\frac{س - ٩}{-٢} = \frac{ص + ٨}{١}$ ، $ع = ٣$

فإن : $م =$ ..............

## ثانيًا أجب عن الأسئلة الآتية

**٣** (أ) إذا كان : $(م + س)^{ن} = ٣أ + ٦أس + ٥أس^{٢} + \cdots$ حيث $ن \in ص_{+}$

أوجد قيمة كل من : م ، أ «٣ ، ٢٤٣»

(ب) أثبت أن مجموعة المعادلات الآتية لها حل آخر غير الحل الصفرى واكتب الصورة العامة لهذا الحل :

$٢س - ص + ٣ع = ٠$ ، $٤س + ٥ص - ع = ٠$ ، $٢س + ٣ص - ع = ٠$

---

**٤** (أ) إذا كان : $|ع_{١}| = |ع_{٢}| = ١$ ، سعة $(ع_{١} ع_{٢}^{٣}) = ٨١^{\circ}$ ، سعة $\left(\frac{ع_{١}}{ع_{٢}}\right) = ٣٣^{\circ}$

أوجد على صورة $س + ص ت$ العدد $(ع_{١}^{١٥} ع_{٢}^{١٥})$ «$-\frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}}ت$»

(ب) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة أ $(-٢ ، ٣ ، ١)$ على المستقيم :

$\frac{س + ٢}{٢} = \frac{ص - ٣}{٤} = \frac{ع - ١}{٤}$ «صفر»

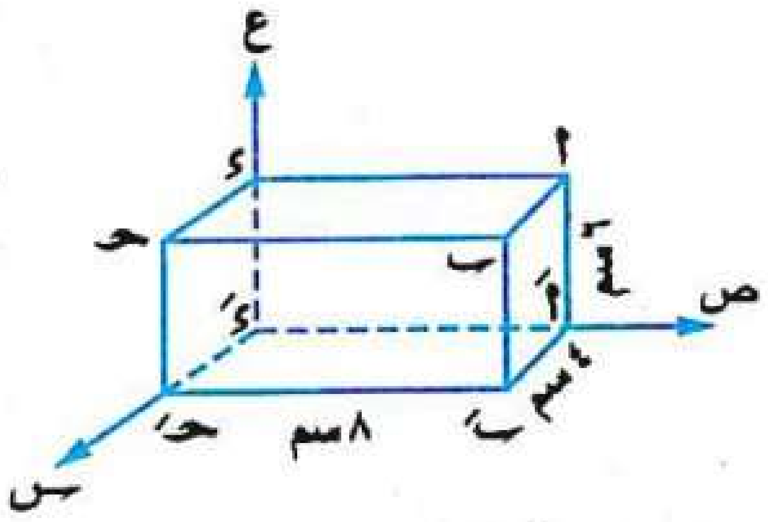
---

**٥** (أ) أثبت أن : $\begin{vmatrix} أ & ب & ج \\ أ^{٢} & ب^{٢} & ج^{٢} \\ ب ج & ج أ & أ ب \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} أ^{٢} & ب^{٢} & ج^{٢} \\ أ^{٣} & ب^{٣} & ج^{٣} \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix}$

(ب) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء أَ بَ جـَ ءَ متوازى مستطيلات

أوجد : $\overleftarrow{بءَ} . \overleftarrow{جـأَ}$



«-١٢»

# الاختبـار الرابع

## أولًا أجب عن سؤال واحد من السؤالين الآتيين

### ١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : $^{١٠}\text{ق}_{\text{ر}+١} : {}^{١٠}\text{ق}_{\text{ر}-١} = ٢١ : ١٠$ فإن قيمة : ر = ..............

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

② إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{لو}_{٢}٣ & ٣ & ٩ \\ ٠ & \text{لو}_{٣}٥ & ٧ \\ ٠ & ٠ & \text{لو}_{٥}\text{س} \end{vmatrix} = ٤$ فإن : س = ..............

(أ) ١٦ (ب) ٣٢ (جـ) ٦٤ (د) ١٢٨

③ إذا كان : $\overleftarrow{\text{أ}} = (١ ، -١ ، ٢)$ ، $\overleftarrow{\text{ب}} = (٠ ، ٢ ، -٣)$ ، $\overleftarrow{\text{حـ}} = (-٢ ، ١ ، ٠)$

فإن : $\| ٣ \overleftarrow{\text{أ}} - \overleftarrow{\text{ب}} + \overleftarrow{\text{حـ}} \| =$ ..............

(أ) $٨\sqrt{٣}$ (ب) ١١ (جـ) ١٢ (د) $٧\sqrt{٢}$

④ إذا كان ل$_{١}$ : $\frac{\text{س}+٢}{-١} = \frac{\text{ص}+٣}{٣} = \frac{\text{ع}+٥}{٢}$ عمودى على ل$_{٢}$ : $\frac{\text{س}}{٢} = \frac{\text{ص}-٥}{\text{ك}} = \frac{\text{ع}-٦}{\text{م}}$

فإن : ٣ ك + ٢ م = ..............

(أ) -١ (ب) ٠ (جـ) ٢ (د) ٤

⑤ قياس الزاوية الصغرى بين المستقيمين : $\text{س} - ١ = \frac{\text{ص}+٢}{\sqrt{٢}} = -\text{ع} + ١$ ، $-\text{س} = \text{ع} + ٣$

، ص = ٤ يساوى ..............

(أ) ٤٥° (ب) ١٢٠° (جـ) ١٣٥° (د) ١٥٠°

⑥ جيوب تمام الاتجاه للمتجه (٢ ، -٤ ، ٤) هى ..............

(أ) (٢ ، -٤ ، ٤) (ب) (١ ، -٢ ، ٢)

(جـ) $\left(\frac{١}{٣} ، \frac{-٢}{٣} ، \frac{٢}{٣}\right)$ (د) $\left(\frac{١}{٣} ، \frac{٢}{٣} ، \frac{٢}{٣}\right)$

---

### ٢ أكمل :

① $(٣ + ٧\omega + ٣\omega^{٢})(٣ - ٧\omega^{٢} + ٣\omega) =$ ..............

② رتبة المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} ٢ & -٦ \\ -٣ & ٣ \\ ٤ & -١٢ \end{pmatrix}$ يساوى ..............

③ مركز الكرة : $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٨ س - ١٢ ص + ٢ ع + ١ = ٠$ يساوى ..............

④ أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ١٠ سم فإن : $\overleftarrow{أب} \cdot \overleftarrow{أحـ} =$ ..............

⑤ متجه الوحدة فى اتجاه $\overleftarrow{أ}$ $(٢ ، ٣ ، ٢\sqrt{٣})$ يساوى ..............

⑥ طول العمود المرسوم من النقطة (-٢ ، -٣ ، ١) على محور س يساوى .............. وحدة طول.

## ثانيًا أجب عن الأسئلة الآتية

**٣** (أ) أوجد أكبر حد فى مفكوك : $(٣ + ٢ س)^٦$ حسب قوى س التصاعدية عند س = ١ «$ح_٣$»

(ب) أوجد حجم متوازى السطوح الذى فيه ثلاثة أضلاع متجاورة يمثلها المتجهات :

$\overleftarrow{أ} = (١ ، -١ ، ٢)$ ، $\overleftarrow{ب} = (٣ ، -٢ ، ٠)$ ، $\overleftarrow{حـ} = (٠ ، ٢ ، ٤)$ «١٦»

---

**٤** (أ) أوجد جذور المعادلة : $ع^٤ + ٤ =$ صفر على الصورة المثلثية.

(ب) إذا كان : $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ ، $\overleftarrow{حـ}$ ثلاث متجهات وحدة متعامدة مثنى مثنى

① أوجد : $\| ٢ \overleftarrow{أ} - \overleftarrow{ب} + ٣ \overleftarrow{حـ} \|$ «$\sqrt{١٤}$»

② إذا كان : $\overleftarrow{أ} = (\frac{١٦}{٢٥} ، \frac{-٣}{٥} ، \frac{١٢}{٢٥})$ ، $\overleftarrow{ب} = (\frac{٣}{٥} ، ٠ ، \frac{-٤}{٥})$ أوجد : $\overleftarrow{حـ}$

«$\frac{١٢}{٢٥} \overleftarrow{س} + \frac{٤}{٥} \overleftarrow{ص} + \frac{٩}{٢٥} \overleftarrow{ع}$»

---

**٥** (أ) ابحث إمكانية حل المعادلات الآتية واكتب الحل إن وجد : $س + ص = ٢$ ، $٢ س + ٣ ص = ٥$

(ب) إذا كان : $ع = حا \frac{\pi}{٩} + ت\ حتا \frac{\pi}{٩}$ أوجد $(\overline{ع})$ على الصورة المثلثية وأوجد الجذور التكعيبية للعدد $(\overline{ع})^٩$

# الاختبـار الخامس

## أولاً أجب عن سؤال واحد من السؤالين الآتيين

**١** اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : $٣٦ \; {}^{٢ن-١}ل_{ن-١} = ٩ \; {}^{٢ن}ل_{ن}$ فإن : ن = ……………

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

② إذا كان للمعادلتين : س + ص = ٢ ، ٢ س + ك ص = ٤ أكثر من حل فإن : ك = ……………

(أ) -٢ (ب) -١ (ج) ١ (د) ٢

③ إذا كان : $\overleftarrow{أب} = -٣\overleftarrow{س} + ٣\overleftarrow{ص} + ٧\overleftarrow{ع}$ ، $\overleftarrow{بح} = \overleftarrow{ص} + ٥\overleftarrow{ع}$

فإن : $\|\overleftarrow{أح}\|$ = ……………

(أ) ١٣ (ب) ١٢ (ج) ١٠ (د) ٩

④ إذا كان : $\overleftarrow{أ}$ = (-٧ ، ٣ ، ١٠) ، $\overleftarrow{ب}$ = (-٤ ، -١ ، -٢)

فإن متجه الوحدة فى اتجاه $\overleftarrow{أب}$ = ……………

(أ) $\left(\frac{٣}{١٣} ، \frac{٤}{١٣} ، \frac{١٢}{١٣}\right)$ (ب) $\left(\frac{٣}{١٣} ، \frac{-٤}{١٣} ، \frac{-١٢}{١٣}\right)$

(ج) $\left(\frac{-٣}{١٣} ، \frac{٤}{١٣} ، \frac{١٢}{١٣}\right)$ (د) $\left(\frac{-٣}{١٣} ، \frac{-٤}{١٣} ، \frac{-١٢}{١٣}\right)$

⑤ إذا كان : $\overleftarrow{أ}$ = (١ ، -١ ، ٢) ، $\overleftarrow{ب}$ = (٣ ، -٢ ، ٠) ، $\overleftarrow{ح}$ = (٠ ، ٢ ، ٤)

فإن : $\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{ح}$ = ……………

(أ) ١٠ (ب) ١٢ (ج) ١٤ (د) ١٦

⑥ طول العمود المرسوم من النقطة أ (١ ، ٠ ، ٢) على المستقيم : $\frac{س - ٢}{٢} = \frac{ص + ١}{-١} = \frac{ع - ٣}{-٢}$

يساوى …………… وحدة طول.

(أ) $\frac{\sqrt{٢٦}}{٤}$ (ب) $\frac{\sqrt{٢٦}}{٥}$ (ج) $\frac{\sqrt{٢٦}}{٣}$ (د) $\frac{\sqrt{٢٦}}{٦}$

---

**٢** أكمل :

① $\left(٢ + \frac{٣}{ω}\right)\left(٢ + \frac{٣}{ω^{٢}}\right)\left(٣ - \frac{٢}{ω}\right)\left(٣ - \frac{٢}{ω^{٢}}\right)$ = ……………

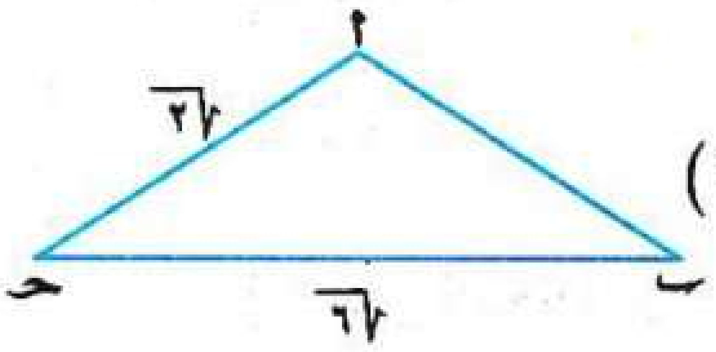
② إذا كان معامل $\text{ح}_{٦}$ ، $\text{ح}_{١٦}$ في مفكوك $(\text{أ} + \text{ب})^{\text{ن}}$ حسب قوى أ التنازلية متساويين

فإن قيمة : ن = ..............

③ جيب تمام الزاوية المحصورة بين المستقيمين : $\frac{\text{س}}{١} = \frac{\text{ص}}{-٢} = \frac{\text{ع} + ١}{-٢}$ ، $\frac{\text{س}}{١} = \frac{\text{ص} - ٢}{-٢} = \frac{\text{ع}}{٢}$

يساوى ..............

④ **في الشكل المقابل :**



إذا كان : $\|\overleftarrow{\text{ب حـ}}\| = \sqrt{٦}$ ، $\|\overleftarrow{\text{أ حـ}}\| = \sqrt{٢}$ ، $\overleftarrow{\text{ب أ}} = (-١ ، ٠ ، ١)$

فإن : $\overleftarrow{\text{ب أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب حـ}} =$ ..............

⑤ الصورة القياسية لمعادلة الكرة التي مركزها (٣ ، ٤ ، –٥) وتمس المستوى ص ع هي ..............

⑥ الصورة المتجهه لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، –١ ، ٤) ومتجه اتجاهه

$\overleftarrow{\text{هـ}} = (٤ ، ٧ ، ١)$ هي ..............

## ثانيا أجب عن الأسئلة الآتية

**٣** (أ) في مفكوك $(١ + \text{س})^{١٨}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان معاملا الحدين

$\text{ح}_{٢\text{ر}+٤}$ ، $\text{ح}_{\text{ر}-٢}$ متساويين **أوجد قيمة : ر** «٦»

(ب) إذا كان طول العمود المرسوم من النقطة أ (٠ ، –١ ، ٢) على المستوى

$\sqrt{٢}\,\text{س} + \text{ص} - \text{ع} + \text{ك} = ٠$ يساوى ٢ وحدة طول **أوجد قيمة : ك** «٧ أ، –١»

---

**٤** (أ) **حل المعادلات الآتية :** ٢ س + ص – ٢ ع = ١٠ ، س + ٢ ص + ٢ ع = ١

، ٥ س + ٤ ص + ٣ ع = ٦ باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفة. «$\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١٠}{٣}$ ، –٣»

(ب) إذا كان : $\text{ع}_{١} = \frac{٦ + ٤\text{ت}}{١ + \text{ت}}$ ، $\text{ع}_{٢} = \frac{٢٦}{٥ - \text{ت}}$ إذا كان : $\text{ع} = ٤\,(\text{ع}_{١} - \text{ع}_{٢})$

أوجد الجذور التكعيبية للعدد ع على الصورة الأسية.

---

**٥** (أ) **بدون فك أثبت أن :**

$$\begin{vmatrix} \text{أ}^{٢} + ١ & \text{أ ب} & \text{أ حـ} \\ \text{أ ب} & \text{ب}^{٢} + ١ & \text{حـ ب} \\ \text{أ حـ} & \text{حـ ب} & \text{حـ}^{٢} + ١ \end{vmatrix} = \text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢} + \text{حـ}^{٢} + ١$$

(ب) إذا قطع المستوى ٢ س – ص – ٢ ع + ١٢ = ٠ الكرة $(\text{س} + ٣)^{٢} + (\text{ص} + ٢)^{٢} + (\text{ع} - ١)^{٢} = ١٥$

أوجد مساحة المقطع الناتج. «١١ π وحدة مربعة»

# الاختبـار السادس

## أولًا أجب عن سؤال واحد من السؤالين الآتيين

### ١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : ${}^{ن}ل_{٣} : {}^{ن-١}ل_{٤} = ٨ : ٥$ فإن قيمة : ن= ..............

(أ) ٥ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ٩

② معامل الحد الأوسط فى مفكوك $\left(٣س - \frac{١}{٦}\right)^{١٠}$ يساوى ..............

(أ) $\frac{-٦٣}{٨}$ (ب) $\frac{-٦٧}{٨}$ (جـ) $\frac{٦٣}{٨}$ (د) $\frac{٦٧}{٨}$

③ قياس الزاوية المحصورة بين المستويين : س + ص − ١ = ٠ ، ص + ع − ١ = ٠ يساوى ..............

(أ) °٣٠ (ب) °٤٥ (جـ) °٦٠ (د) °٧٥

④ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٢ ، ١ ، −٢) ، $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$ فإن : $\overrightarrow{ب}$ = ..............

(أ) (٢ ، −١ ، −٢) (ب) (٢ ، ١ ، −٢)

(جـ) (−٢ ، −١ ، ٢) (د) (−٢ ، −٣ ، ٣)

⑤ إذا كان : أ(−٢ ، ٠ ، ٣) ، ب(٤ ، ٢ ، −٥) فإن : $\|\overrightarrow{أب}\|$ = .............. وحدة طول.

(أ) $\sqrt{١٢}$ (ب) $\sqrt{٤٠}$ (جـ) $\sqrt{٤٤}$ (د) $\sqrt{١٠٤}$

⑥ إذا كان : $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ح}$ وكان : $\overrightarrow{ب}$ = (٢ ، ٣ ، ٢) ، $\overrightarrow{ح}$ = (١ ، ٢ ، ١)

وكان : $\|\overrightarrow{أ}\| = ٤\sqrt{٢}$ فإن : $\overrightarrow{أ}$ = ..............

(أ) (٢ ، ٣ ، ١) (ب) (−٤ ، ٠ ، ٤) (جـ) (٤ ، ٤ ، ٠) (د) (٠ ، −٤ ، ٤)

---

### ٢ أكمل :

① $\left(١ - \frac{١}{\omega}\right)\left(١ - \frac{١}{\omega^{٢}}\right)\left(١ - \frac{١}{\omega^{٤}}\right)\left(١ - \frac{١}{\omega^{٨}}\right)$ .............. إلى ١٠ عوامل = ..............

② رتبة المصفوفة $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & -١ \\ ٠ & -١ & -١ \\ ١ & ١ & ١ \end{pmatrix}$ تساوى ..............

③ متجه اتجاه المستقيم $\frac{س + ٢}{٣} = \frac{ع - ١}{٢}$ ، ص = أ يساوى ..............

④ إذا كان قياس الزاوية بين المستقيمين : $\frac{\text{س}}{\text{أ}} = \frac{\text{ص}}{٢} = \frac{\text{ع}}{١}$ ، $\frac{\text{س}}{٢} = \frac{\text{ص}}{١} = \frac{\text{ع}}{-١}$ يساوى $٦٠^\circ$

فإن قيمة : أ = ..............

⑤ إذا كان : أ (١ ، ٠ ، ٠) ، ب (٠ ، ١ ، ١) ينتميان للمستوى : ك س + ص + م ع + ٢ = ٠

فإن : ك + م = ..............

⑥ إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (١ ، ٠ ، ٢) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٢ ، −١ ، −٢) فإن : $\left(\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}\right) \cdot \left(\overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{أ}}\right)$ = ..............

## ثانيا أجب عن الأسئلة الآتية

**٣** ( أ ) إذا كانت معاملات الحدود الرابع والخامس والسادس فى مفكوك $(٢\text{س} + \text{ص})^{\text{ن}}$ حسب قوى س التنازلية تكون متتابعة حسابية أوجد قيمة : ن «١٩ أ ، ٨»

(ب) كرة مركزها (١ ، ٢ ، ١) تمس سطح المستوى س + ص + ع = ١

أوجد معادلة الكرة. «$(\text{س} - ١)^٢ + (\text{ص} - ٢)^٢ + (\text{ع} - ١)^٢ = ٣$»

---

**٤** ( أ ) ابحث إمكانية حل مجموعة المعادلات الآتية :

٤ س + ٣ ص − ٥ ع = ٦ ، ٣ س + ٢ ص + ٤ ع = ١٢ ، ٥ س − ٢ ص − ٧ ع = ١

ثم أوجد مجموعة حل هذه المعادلات باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة. «{(٢ ، ١ ، ١)}»

(ب) إذا كان : $\text{ع}_١ = \left(\frac{\sqrt{٣} + \text{ت}}{٢}\right)^٤$ ، $\text{ع}_٢ = \text{جا}\frac{\pi}{٣} + \text{ت جتا}\frac{\pi}{٣}$ ، $\text{ت}^٢ = -١$ وكان $\text{ع} = \frac{\text{ع}_١}{\text{ع}_٢}$

أوجد الجذور التربيعية للعدد ع على الصورة المثلثية.

---

**٥** ( أ ) بدون فك المحدد أثبت أن : $\begin{vmatrix} \text{س} & \text{أ} & \text{ب} \\ \text{أ} & \text{س} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{أ} & \text{س} \end{vmatrix} = (\text{س} + \text{أ} + \text{ب})(\text{س} - \text{أ})(\text{س} - \text{ب})$

(ب) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ١ ، −٣) ويوازى المستقيم :

$$\frac{\text{س} - ١}{٥} = \frac{\text{ص} + ٣}{٢} = \frac{١ - \text{ع}}{٣}$$

# الاختبـار السابع

## أولًا أجب عن سؤال واحد من السؤالين الآتيين

### ١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : $^{30}\text{ق}_{\text{ر}} = {}^{30}\text{ق}_{\text{ر}+10}$ ، $^{\text{ن}}\text{ل}_{7} = 90 \times {}^{\text{ن}-2}\text{ل}_{5}$

فإن : $|\text{ن} - \text{ر}|$ = ............

(أ) صفر  (ب) ١  (ج) ١٠  (د) ٢٠

② إذا كان للمعادلات : ٣س − ٢ص + ع = ٠ ، ٦س − ٥ص + ٢ع = ٠

، ٩س − ٦ص + ك ع = ٠ حلول خلاف الحل الصفرى فإن : ك = ............

(أ) صفر  (ب) ١  (ج) ٣  (د) ٤

③ طول العمود المرسوم بين المستويين : ٣س + ١٢ص − ٤ع = ٩ ، ٣س + ١٢ص − ٤ع = −١٧

يساوى ............

(أ) ٢  (ب) ٣  (ج) ٤  (د) ٥

④ إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} = (4 ، -\text{ك} ، 6)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (2 ، 2 ، \text{م})$ وكان $\overrightarrow{\text{أ}} \parallel \overrightarrow{\text{ب}}$ فإن : ك + م = ............

(أ) −٣  (ب) −٢  (ج) −١  (د) صفر

⑤ إذا كان المستقيم : س = ٣ص = أ ع يوازى المستوى : س + ٣ص + ٢ع + ٤ = ٠

فإن : أ = ............

(أ) ٣  (ب) ٢  (ج) ١  (د) −١

⑥ إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} = (1 ، -2 ، 1)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (-2 ، 1 ، 2)$

فإن المركبة الاتجاهية للمتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ............

(أ) $\left(\frac{4}{9} ، \frac{-2}{9} ، \frac{-4}{9}\right)$  (ب) $\left(\frac{4}{9} ، \frac{2}{9} ، \frac{4}{9}\right)$

(ج) $\left(\frac{-4}{9} ، \frac{-2}{9} ، \frac{-2}{9}\right)$  (د) $\left(\frac{-4}{9} ، \frac{2}{9} ، \frac{-4}{9}\right)$

---

### ٢ أكمل :

① $\left(\frac{3 + 5\omega}{5 + 3\omega^{2}} + \frac{5 + 3\omega^{2}}{3 + 5\omega}\right)^{8}$ = ............

② رتبة المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ تساوى ............

③ إذا كان المستوى س : س − ع + ١ = ٠ ، المستوى ص : ٢ س − ٢ ص − ع = ٠

فإن قياس الزاوية الصغرى بين المستويين = ............°

④ طول نصف قطر الكرة $(\text{س} - ٢)^٢ + (\text{ص} + ٤)^٢ + (\text{ع} - ٥)^٢ = ٦٤$ يساوى ............

⑤ إذا كان : $\overleftarrow{\text{أ}} = (٤ ، -٥ ، ١)$ ، $\overleftarrow{\text{ب}} = (٢ ، -\text{ك} ، -٢)$

، $\overleftarrow{\text{ج}} = (-٤ ، ٤ ، \text{م} - ٢)$ وكان $\overleftarrow{\text{أب}} \,//\, \overleftarrow{\text{ج}}$ فإن : ك + م = ............

⑥ إذا كان : $\|\overleftarrow{\text{أ}}\| = ٢$ ، $\|\overleftarrow{\text{ب}}\| = ٣$ ، $\|\overleftarrow{\text{ج}}\| = ١٢$

وكان $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ج}}$ متعامدة مثنى مثنى فإن : $\|\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}} + \overleftarrow{\text{ج}}\| =$ ............

## ثانيًا أجب عن الأسئلة الآتية

**٣** (أ) إذا كان : $\text{ع}_١ = \left(\text{جا} \frac{\pi}{٩} + \text{ت جتا} \frac{\pi}{٩}\right)^٥$ ، $\text{ع}_٢ = \left(\text{جتا} \frac{\pi}{٢} + \text{ت جا} \frac{\pi}{٢}\right)^٤$ وكان $\text{ع} = \frac{\text{ع}_١}{\text{ع}_٢}$

أوجد الجذور التربيعية للعدد ع على الصورة الأسية.

(ب) إذا كان : $\overleftarrow{\text{أ}} = (٢ \text{ جتا } \theta ، \text{لو}_٣ \text{س} ، \text{جا } \theta)$ ، $\overleftarrow{\text{ب}} = (\text{جتا } \theta ، \text{لو}_٥ ٢٧ ، ٢ \text{ جا } \theta)$ وكان $\overleftarrow{\text{أ}} . \overleftarrow{\text{ب}} = ١١$

أوجد قيمة : س «١٢٥»

---

**٤** (أ) فى مفكوك $(١ + \text{س})^{\text{ن}}$ حسب قيمة س التصاعدية إذا كان $\text{ح}_٣ = ١٧$ ، $٣ \text{ح}_٢ \times \text{ح}_٤ = ٥٤٤$

أوجد قيمة كل من : ن ، س «١٨ ، $\pm \frac{١}{٢}$»

(ب) بدون فك المحدد أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} \text{أ} + \text{ب} + ٢ & \text{أ} & \text{ب} \\ ١ & ٢\text{أ} + \text{ب} + ١ & \text{ب} \\ ١ & \text{أ} & \text{أ} + ٢\text{ب} + ١ \end{vmatrix} = ٢ (\text{أ} + \text{ب} + ١)^٣$$

---

**٥** (أ) إذا كان : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٠ & ٢\text{ص} & \text{ع} \\ \text{س} & \text{ص} & -\text{ع} \\ \text{س} & -\text{ص} & \text{ع} \end{pmatrix}$ وكان : $\text{أ}^{\text{مد}} = \text{أ}^{-١}$

أوجد قيم كل من : س ، ص ، ع «$\pm \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $\pm \frac{١}{\sqrt{٦}}$ ، $\pm \frac{١}{\sqrt{٣}}$»

(ب) أوجد نقطة تقاطع المستقيم :

س = ص = ع مع المستوى : س + ٢ ص + ٣ ع = ١٢ «(٢ ، ٢ ، ٢)»

# الاختبـار الثامن

## أولًا أجب عن سؤال واحد من السؤالين الآتيين

### ١ أكمل ما يأتى :

① إذا كان : |١ + لو س| = ١ فإن : س = ............... أو ...............

② إذا كان : $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ٢ & ٣ \\ أ & ب & جـ \end{vmatrix} = ٥$ فإن قيمة : $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ٢ & ٣ \\ أ + ٥ & ب + ٥ & جـ + ٥ \end{vmatrix}$ = ...............

③ قياس الزاوية بين المستقيمين $\overleftarrow{ر_١}$ = (-٢ ، ٥ ، -٧) + ك (-٦ ، ٦ ، ٨)

، $\overleftarrow{ر_٢}$ = (١ ، -٢ ، ٣) + كَ (٤ ، ١٢ ، -٦) يساوى ...............

④ إذا كان ‖$\overleftarrow{أ}$‖ = ٤ ، ‖$\overleftarrow{ب}$‖ = ٦ وكان قياس الزاوية بين المتجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ يساوى °٦٠

فإن : (٢ $\overleftarrow{أ}$ + $\overleftarrow{ب}$) . ($\overleftarrow{أ}$ - $\overleftarrow{ب}$) = ...............

⑤ معادلة الكرة التى قطرها $\overline{أب}$ حيث : أ (٧ ، ١ ، -٤) ، ب (٣ ، -١ ، ٢)

هى ...............

⑥ إذا كان : $\overleftarrow{أ}$ = (١ ، ٢ ، -٤) ، $\overleftarrow{ب}$ = (١ ، ١ ، ك - ١) وكان ‖$\overleftarrow{أ}$ + $\overleftarrow{ب}$‖ = ٧ وحدة طولية

فإن : ك = ...............

---

### ٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : $\frac{أ^٢ + ب^٢}{أ + ب ت} = ٢ + ٣ ت$ فإن : أ × ب = ............... حيث : أ ، ب ∈ ع*

(أ) -٦ (ب) -٥ (جـ) ٥ (د) ٦

② رتبة المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} ٠ & -٢ & ٣ \\ -٢ & ٤ & -٦ \\ ٣ & -٦ & ٩ \end{pmatrix}$ تساوى ...............

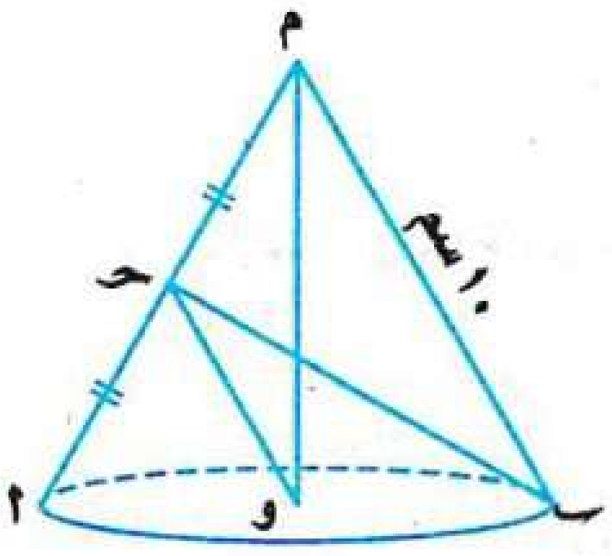
(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) صفر

③ أ ب جـ د متوازى أضلاع وكان $\overleftarrow{أب}$ = (٢ ، ٢ ، -١) ، $\overleftarrow{أد}$ = (-١ ، ٢ ، -٣)

فإن مساحة متوازى الأضلاع = ............... وحدة مربعة.

(أ) ٦ (ب) ٧ $\sqrt{٢}$ (جـ) ٣ $\sqrt{١١}$ (د) $\sqrt{١٠١}$

④ فى الشكل المقابل :



مخروط دائرى قائم محيط قاعدته = ١٢ π سم ، ح منتصف $\overline{\text{أم}}$

فإن : $\overleftarrow{\text{ب ح}} \cdot \overleftarrow{\text{ح و}}$ = …………

(أ) −٤٣　　(ب) −٤٠

(جـ) −٣٧　　(د) −٣٣

⑤ إذا كان : $\overleftarrow{\text{أ}} = \overleftarrow{\text{س}} + \overleftarrow{\text{ص}} + \overleftarrow{\text{ع}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}} = ٢\overleftarrow{\text{س}} - \overleftarrow{\text{ص}} - \overleftarrow{\text{ع}}$ فإن : $\overleftarrow{\text{أ}} \times (\overleftarrow{\text{أ}} - \overleftarrow{\text{ب}})$ = …………

(أ) $\overleftarrow{\text{س}} + \overleftarrow{\text{ع}}$　　(ب) $-٣\overleftarrow{\text{ص}} + ٣\overleftarrow{\text{ع}}$

(جـ) $-٣\overleftarrow{\text{س}} - ٣\overleftarrow{\text{ص}}$　　(د) $٣\overleftarrow{\text{س}} - ٢\overleftarrow{\text{ص}}$

⑥ إذا كان : $\text{ل}_١$ : س = ٠ ، ص = ع ، $\text{ل}_٢$ : ص = ٠ ، س = ع

مستقيمان فى الفراغ قياس الزاوية بينهما θ فإن : θ = …………

(أ) ٤٥°　　(ب) ٦٠°　　(جـ) ٧٠°　　(د) ٩٠°

## ثانيًا أجب عن الأسئلة الآتية

**٣** (أ) باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة حل المعادلات الآتية :

٢ س − ص + ع = −١ ، س − ع = ٢ ، س + ص = ٣ «١ ، ٢ ، −١»

(ب) أوجد نقطة تقاطع المستويات :

٢ س + ص − ع = −١ ، س + ص + ع = ٢ ، ٣ س − ص − ع = ٦ «$(٢ ، \frac{٥-}{٢} ، \frac{٥}{٢})$»

---

**٤** (أ) إذا كان : $\text{ع}_١ = ١ - \sqrt{٣}\,\text{ت}$ ، $\text{ع}_٢ = \text{جتا هـ} + \text{ت جا هـ}$ ، $\text{ع}_٣ = \left(\text{جتا}\frac{\text{هـ}}{٢} - \text{ت جا}\frac{\text{هـ}}{٢}\right)^٢$

وكان : $\text{ع} = \frac{\text{ع}_١\,\text{ع}_٢}{\text{ع}_٣}$ أوجد المقياس والسعة الأساسية للعدد ع ثم أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع

على الصورة المثلثية عند $\text{هـ} = \frac{\pi}{٦}$

(ب) ابحث إمكانية وجود حل خلاف الحل الصفرى لمجموعة المعادلات الخطية الآتية :

س + ٣ ص − ٢ ع = ٠ ، س − ٨ ص + ٨ ع = ٠ ، ٣ س − ٢ ص + ٤ ع = ٠

---

**٥** (أ) فى مفكوك $\left(\text{س}^٢ + \frac{١}{٢\,\text{س}}\right)^{٣\text{ن}}$ حسب قوى س التنازلية

① أثبت أن الحد الخالى من س رتبته (٢ ن + ١)

② أوجد النسبة بين الحد الخالى من س والحد الأوسط عندما ن = ٤ ، س = ١ «١٥ : ١١٢»

(ب) إذا كانت الكرتان $(\text{س} - ٣)^٢ + \text{ص}^٢ + (\text{ع} - ٣)^٢ = ١٦$

، $(\text{س} + ١)^٢ + (\text{ص} - ٤)^٢ + (\text{ع} - \text{ك})^٢ = ٢٥$ متماستان فأوجد قيمة : ك «١٠ أ ، −٤»

# الاختبار التاسع

## أولًا أجب عن سؤال واحد من السؤالين الآتيين

### ١ أكمل :

① إذا كان : ${}^{\text{س}+\text{ص}}\text{ل}_{٤} = ٣٦٠$ ، $\underline{|٢\text{س}+\text{ص}} = ٥٠٤٠$ فإن : ${}^{\text{ص}}\text{ق}_{٢\text{س}} =$ ............

② مجموعة حل المعادلة : $\begin{vmatrix} \text{أ}+١ & ٣ & ٢ \\ ٠ & \text{أ}-١ & ٥ \\ ٠ & ٠ & ٧ \end{vmatrix} = ٢١$ هى ............

③ جيب تمام الزاوية بين المتجهين : $\overrightarrow{\text{أ}} = (١ ، -٣ ، ٠)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (٢ ، ٠ ، ١)$ يساوى ............

④ طول نصف قطر الكرة : $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} + \text{ع}^{٢} + ٢\text{س} - ٢\text{ص} - ٤\text{ع} - ٣ = ٠$ .

يساوى ............ وحدة طول.

⑤ إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} = \left(\frac{-١}{٢} ، \frac{٣}{٤} ، \text{ك}\right)$ متجه وحدة فإن قيمة : ك = ............ أو ............

⑥ إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{ك} ، -٣ ، ١)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (٢ ، ٣ ، -\text{ك})$ متعامدين فإن قيمة : ك = ............

---

### ٢ أكمل :

① $(١ + \omega)^{٤} + (١ + \omega^{٢})^{٤} + (\omega + \omega^{٢})^{٤} =$ ............

② رتبة المصفوفة $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٣ \\ -١ & ٢ & ١ \\ ٣ & ١ & ٢ \end{pmatrix}$ يساوى ............

③ إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} = (٣ ، -٢ ، \text{ك})$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (١ ، \text{م} ، ٢)$ وكان : $\overrightarrow{\text{أ}} // \overrightarrow{\text{ب}}$

فإن : ك = ............ ، م = ............

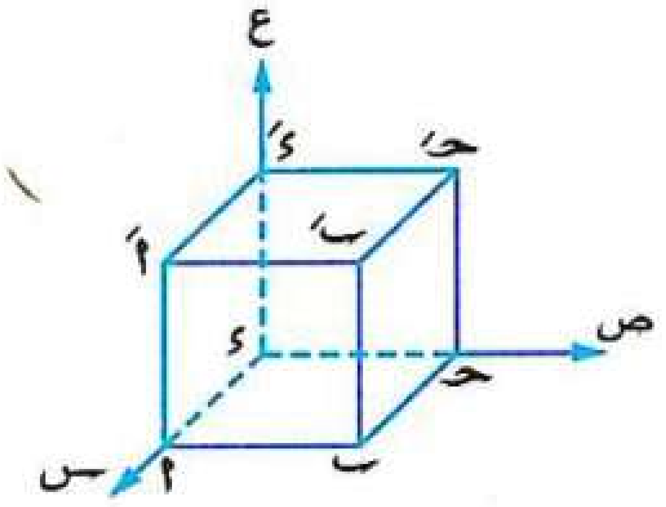
④ إذا كان قياس الزاوية التى يصنعها $\overrightarrow{\text{أ}} = (٢ ، ٤ ، \text{ك})$ مع الاتجاه الموجب لمحور الصادات يساوى °٤٥

فإن : ك = ............

⑤ إذا كان المستويان : $\text{س} + ٢\text{ص} + \text{ك}\,\text{ع} = ٢$ ، $٣\text{س} - \text{ص} + ٢\text{ع} + ٤ = ٠$ متعامدين

فإن : ك = ............

⑥ فى الشكل المقابل :



أ ب جـ د أَ بَ جَـ دَ مكعب طول حرفه الوحده

فإن : $\overrightarrow{\text{أبَ}} \cdot \overrightarrow{\text{بدَ}} =$ ............

## ثانيًا أجب عن الأسئلة الآتية

**٣** (أ) إذا كان : $ع_١ = ٢\left(حا\frac{\pi}{٣} + ت\ حتا\frac{\pi}{٣}\right)$ ، $ع_٢ = \sqrt{٢}\left(حا\frac{\pi}{٤} - ت\ حتا\frac{\pi}{٤}\right)$ ، $ع_٣ = ١ + \sqrt{٣}\ ت$

أوجد العدد $ع = \frac{ع_١^٣ \times ع_٢^٤}{ع_٣^٥}$ على الصورة الأسية ثم أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع على الصورة المثلثية.

(ب) إذا مر المستوى : $٢أس - ٣أص + ٤أع + ٦ = ٠$ بمنتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين

مركزى الكرتين : $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٦س - ٨ص - ٢ع = ١٣$

، $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ - ١٠س + ٤ص - ٢ع = ٨$ فما قيمة أ ؟ «−٢»

---

**٤** (أ) باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة حل المعادلات الآتية :

$س - ٢ص + ٢ع = ٢$ ، $٣س + ٤ع = ١٠$ ، $٦ع - ص = ٥$ «٢، ١، ١»

(ب) أثبت أن الحد الخالى من س فى مفكوك $\left(س^٢ + \frac{١}{س^٢}\right)^{٥ن}$ حيث $ن \in ص^+$ يساوى $\frac{\underline{|٥ن}}{\underline{|٢ن}\ \underline{|٣ن}}$

---

**٥** (أ) أوجد قيمة ك التى تجعل للمعادلات :

$كس + ص + ع = ١$ ، $س + كص + ع = ١$ ، $س + ص + كع = ١$

عدد غير منتهى من الحلول. «١»

(ب) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (−٤ ، ١ ، ١)

على المستقيم : $\frac{س + ٣}{١} = \frac{ص - ١}{\sqrt{٥}} = \frac{ع + ٢}{٢}$ «$\frac{\sqrt{٣٠}}{٢}$ وحدة طول»

# الاختبار العاشر

## أولًا أجب عن سؤال واحد من السؤالين الآتيين

### ١ أكمل :

① إذا كان : $\text{س} = \frac{-١ - \sqrt{٣}\,\text{ت}}{٢}$ حيث : $\text{ت}^{٢} = -١$ فإن القيمة العددية للمقدار : $\text{س}^{٨} + \text{س}^{٤} + ٥$ = ............

② إذا كان : |ن ، |ن – ٢ ، ن|٢ – ن هى أطوال أضلاع مثلث فإن القيمة العددية لمحيط المثلث = ............

③ إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (–٢ ، ك ، –٣) يوازى المستقيم : $\frac{\text{س} + ٢}{٤} = \frac{\text{ص}}{٨} = \frac{\text{ع} - ١}{٦}$ فإن : ك = ............

④ قياس الزاوية التى يصنعها المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٣ ، ٤ ، $\sqrt{١١}$) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات يساوى ............

⑤ إذا كان المستوى : س – ٣ ص + م ع = ٥ ، المستوى : ٣ س + ك ص + ٦ ع = ١٠ متوازيان فإن : ك × م = ............

⑥ طول العمود المحصور بين المستويين المتوازيين : ٤ س + ٦ ص + ١٢ ع + ١٨ = ٠ ، ٤ س + ٦ ص + ١٢ ع – ١٠ = ٠ هو ............ وحدة طول.

---

### ٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $١ - ٦\,\text{س} + \frac{٦ \times ٥}{٢ \times ١}\,\text{س}^{٢} - \frac{٦ \times ٥ \times ٤}{٣ \times ٢ \times ١}\,\text{س}^{٣} + \dots + \text{س}^{٦} = ٦٤$ فإن : س = ............

(أ) –١ (ب) ٣ (جـ) –١ أو ٣ (د) ٢

② $\left(\frac{٥ - ٣\omega^{٢}}{٥\omega - ٣} - \frac{٢ - ٧\omega}{٢\omega^{٢} - ٧}\right)^{٢}$ = ............

(أ) ٣ (ب) –٣ (جـ) ٣ ت (د) –٣ ت

③ إذا كان المستقيمان : $\frac{\text{س} + ١}{٢} = \frac{\text{ص} - ٢}{٣} = \frac{\text{ع} - ٣}{٤}$ ، $\frac{\text{س}}{٣} = \frac{\text{ص} + ١}{٤} = \frac{\text{ع} - ١}{\text{ك}}$ متعامدان فإن : ك = ............

(أ) ٤ (ب) –٤ (جـ) $\frac{٩}{٢}$ (د) $-\frac{٩}{٢}$

④ الصورة القياسية لمعادلة الكرة التى مركزها (٣ ، –٢ ، ١) وطول نصف قطرها = ٥ وحدة طول هى ............

(أ) $(\text{س} + ٣)^{٢} + (\text{ص} - ٢)^{٢} + (\text{ع} + ١)^{٢} = ٥$

(ب) $(\text{س} + ٣)^{٢} + (\text{ص} - ٢)^{٢} + (\text{ع} + ١)^{٢} = ٢٥$

(جـ) $(\text{س} - ٣)^{٢} + (\text{ص} + ٢)^{٢} + (\text{ع} - ١)^{٢} = ٢٥$

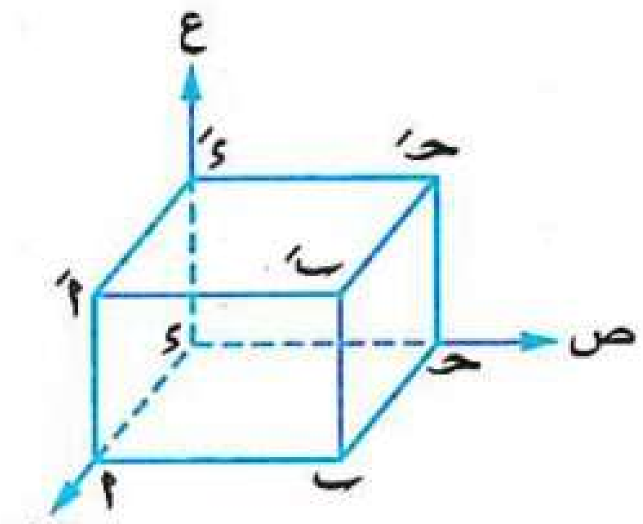
(د) $(\text{س} - ٣)^{٢} + (\text{ص} + ٢)^{٢} + (\text{ع} - ١)^{٢} = \sqrt{٥}$

⑤ قياس الزاوية المحصورة بين المستويين : $\text{س} + \sqrt{2}\,\text{ص} + \text{ع} = 5$ ، $\text{س} - \sqrt{2}\,\text{ص} + \text{ع} = 1$

يساوى ............

(أ) $0^\circ$ (ب) $45^\circ$ (جـ) $90^\circ$ (د) $135^\circ$

⑥ فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء أ' ب' حـ' ء' متوازى مستطيلات وكان : أ (٤ ، ٠ ، ٠)

، حـ (٠ ، ٩ ، ٠) ، ء (٠ ، ٠ ، ٧)

فإن : $\|\overrightarrow{\text{أ حـ'}}\| =$ ............

(أ) $\sqrt{146}$ (ب) $\sqrt{114}$ (جـ) $5$ (د) $\sqrt{20}$

## ثانيًا أجب عن الأسئلة الآتية

**٣** (أ) فى مفكوك $(2\text{س} - 3)^{15}$ حسب قوى س التنازلية أوجد قيم س التى تجعل :

$$13\,\text{ح}_3 + 10\,\text{ح}_4 + \text{ح}_5 = \text{صفر}$$

«$\frac{9}{2}$ أ ، $\frac{1}{2}$»

(ب) بدون فك المحدد أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{س} & \text{ص}+\text{ع} \\ \text{ص} & \text{ع}+\text{س} & \text{ص} \\ \text{س}+\text{ص} & \text{ع} & \text{ع} \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \text{ص} & \text{ع} & 0 \\ \text{س} & 0 & \text{ع} \\ 0 & \text{س} & \text{ص} \end{vmatrix}$$

---

**٤** (أ) أثبت أن : $\left(\frac{1 + \text{جا ى} + \text{ت جتا ى}}{1 + \text{جا ى} - \text{ت جتا ى}}\right)^{\text{ن}} = \text{جتا ن}\left(\frac{\pi}{2} - \text{ى}\right) + \text{ت جا ن}\left(\frac{\pi}{2} - \text{ى}\right)$

(ب) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، –١ ، ٠) ويقطع المستقيم :

$\overrightarrow{\text{ر}} = (2 ، 1 ، 1) + \text{ك}\,(1 ، 2 ، -1)$ على التعامد.

«$\overrightarrow{\text{ر}} = (3 ، -1 ، 0) + \text{ك}\,(-1 ، 1 ، 1)$»

---

**٥** (أ) باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة حل مجموعة المعادلات الآتية :

$$\frac{1}{\text{س}} + \frac{1}{\text{ص}} + \frac{1}{\text{ع}} = 1 \quad ، \quad \frac{1}{\text{س}} - \frac{1}{\text{ص}} + \frac{2}{\text{ع}} = \frac{1}{2} \quad ، \quad \frac{2}{\text{س}} + \frac{3}{\text{ص}} - \frac{4}{\text{ع}} = \frac{4}{3}$$

حيث س ، ص ، ع لا تساوى صفر.

«٢ ، ٣ ، ٦»

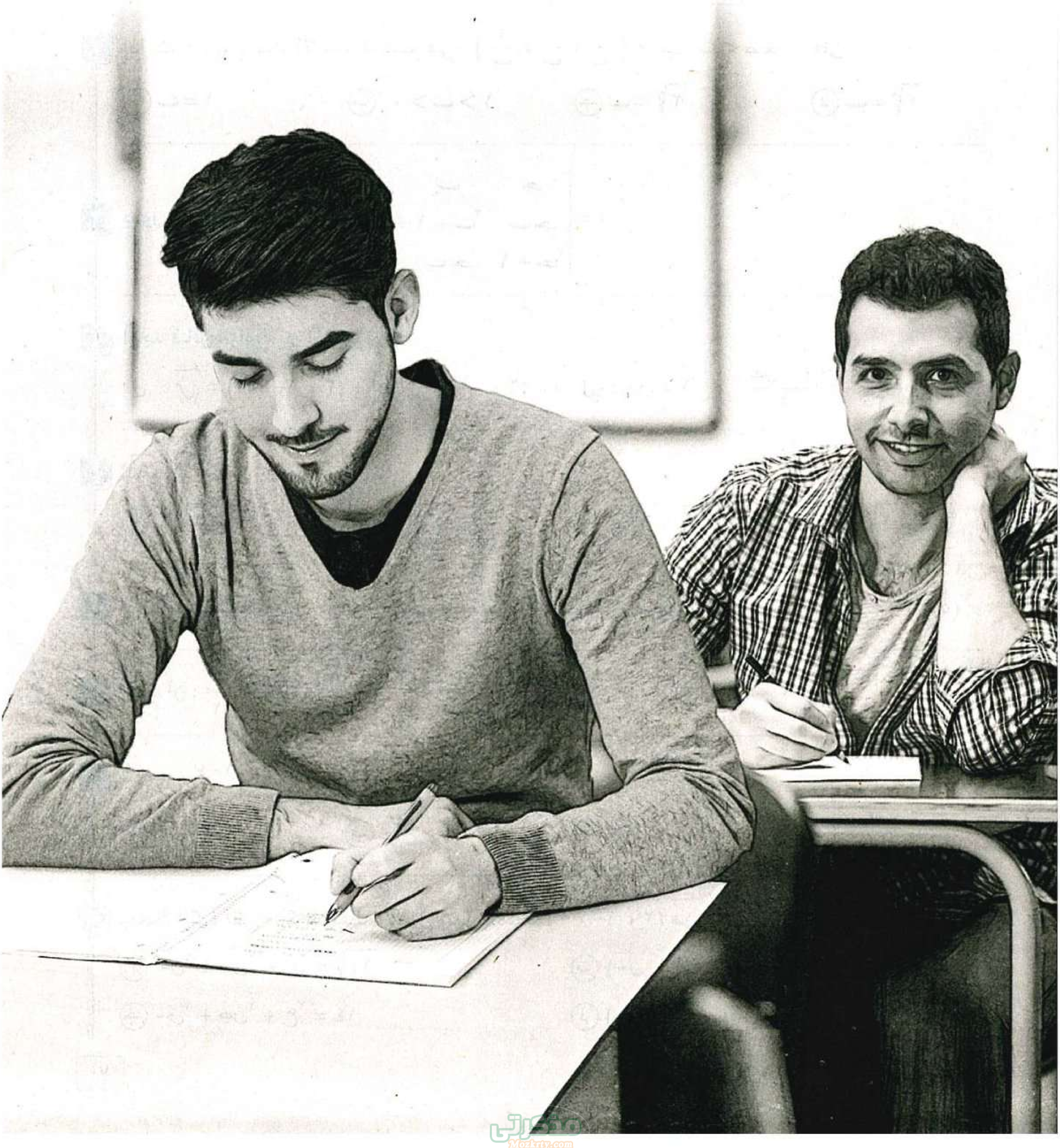
(ب) أوجد المركبة الاتجاهية للمتجه $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ حيث : أ (٢ ، ١ ، ٠) ، ب $(3 ، 1 ، \sqrt{3})$

فى اتجاه المتجه $\overleftarrow{\text{م}}$ حيث $\overleftarrow{\text{م}} = (3 ، 2 ، 2\sqrt{3})$

«$\left(\frac{27}{25} ، \frac{18}{25} ، \frac{18\sqrt{3}}{25}\right)$»

# امتحانات مصر

## فى الجبر والهندسة الفراغية



## ١ دور أول ٢٠٢٠

### أجب عن الأسئلة التالية :

**١** السعة الأساسية للعدد المركب ع = ١ − ت هى ........

ⓐ $\frac{\pi}{٤}$ ⓑ $-\frac{\pi}{٤}$ ⓒ $\frac{-٧\pi}{٤}$ ⓓ $\frac{٧\pi}{٤}$

أ $\frac{\pi}{٤}$ ب $-\frac{\pi}{٤}$ جـ $\frac{-٧\pi}{٤}$ د $\frac{٧\pi}{٤}$

**٢** إذا كانت جيوب تمام الاتجاه لمستقيم هى : $\left(\frac{١}{ب} ، \frac{١}{ب} ، \frac{١}{ب}\right)$ ، حيث ب > صفر فإن : ........

أ ب = ١ ب ٠ < ب < ١ جـ ب = $\sqrt{٣}$ د ب = $\sqrt{٢}$

**٣** بدون فك المحدد أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} ١ & ب & حـ \\ ب & ١ + ب^٢ & ب حـ \\ حـ & ب حـ & ١ + حـ^٢ \end{vmatrix} = ١$$

**٤** أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين :

ل$_١$ : $\overrightarrow{ر}_١$ = (٢ ، −١ ، ٣) + ك$_١$ (−٢ ، ٠ ، ٢) ، ل$_٢$ : س = ١ ، $\frac{ص - ٤}{٣} = \frac{ع + ٥}{-٣}$

**٥** $\sqrt{٦} - \sqrt{٢}$ ت = ........

أ $٢\sqrt{٢}$ هـ$^{\frac{\pi}{٦} ت}$ ب $٢\sqrt{٢}$ هـ$^{-\frac{\pi}{٦} ت}$ جـ $٢\sqrt{٢}$ هـ$^{\frac{\pi}{٣} ت}$ د $٢\sqrt{٢}$ هـ$^{\frac{-\pi}{٣} ت}$

**٦** أوجد مسقط النقطة أ (٠ ، ٩ ، ٦) على المستقيم المار بالنقطتين : ب (١ ، ٢ ، ٣) ، حـ (٧ ، −٢ ، ٥)

**٧** أثبت أن :

$$\frac{٣ + ٥\omega + ٣\omega^٢}{١ - ٢\omega - ٤\omega^٢} + \frac{٣ + ٥\omega^٢ + ٣\omega}{١ - ٢\omega^٢ - ٤\omega} = \frac{-٢}{١٩}$$

**٨** $^{ن}ق_{ر}$ : $^{ن-١}ق_{ر}$ = ........

أ $\frac{ن - ر}{ن}$ ب $\frac{ن}{ر}$ جـ $\frac{ر}{ن}$ د $\frac{ن}{ن - ر}$

**٩** معادلة الكرة التى مركزها نقطة الأصل وتمر بالنقطة (٣ ، −١ ، ٢) هى ........

أ $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = \sqrt{١٤}$

ب $(س - ٣)^٢ + (ص + ١)^٢ + (ع - ٢)^٢ = ١٤$

جـ $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ١٤$

د $(س - ٣)^٢ + (ص + ١)^٢ + (ع - ٢)^٢ = \sqrt{١٤}$

**١٠** فى إحدى المحافظات تتكون اللوحات المعدنية للسيارات من ٣ حروف مختلفة تليها ٤ أرقام مختلفة.

إذا كان عدد الحروف الأبجدية المستخدمة ٢٦ حرفًا والأرقام المستخدمة هى : (١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ٩)

فإن عدد اللوحات التى يمكن تكوينها فى هذه المحافظة يساوى ..............

أ $^{٢٦}\text{ل}_{٣} \times {}^{٩}\text{ل}_{٤}$ ب $^{٢٦}\text{ل}_{٣} + {}^{٩}\text{ل}_{٤}$ ج $^{٢٦}\text{ق}_{٣} \times {}^{٩}\text{ق}_{٤}$ د $^{٢٦}\text{ق}_{٣} + {}^{٩}\text{ق}_{٤}$

---

**١١** **أجب عن إحدى الفقرتين الآتيتين :**

أ ضع العدد ع = ١ − $\sqrt{٣}$ ت فى الصورة المثلثية ثم أوجد جذريه التربيعيين فى الصورة الأسية.

ب إذا كان : $ع_{١} = \left(\frac{\sqrt{٣} + ت}{٢}\right)^{٤}$ ، $ع_{٢} = \text{حا}\ \frac{\pi}{٣} + ت\ \text{حتا}\ \frac{\pi}{٣}$ ، $ت^{٢} = -١$

فضع العدد ع على الصورة المثلثية ، ثم على الصورة الأسية حيث $ع = \frac{ع_{١}}{ع_{٢}}$

---

**١٢** مجموع المعاملات فى مفكوك $(٣\text{س} - ٢\text{ص})^{١٠}$ يساوى ..............

أ ١ ب ١٠٢٤ ج ٥٨٠٢٥ د ٥٩٠٤٩

---

**١٣** إذا كانت : أ (ن − ١ ، ن + ٤ ، ٥ ن) تقع فى المستوى ص = ٥ فإن : ..............

أ أ (٤ ، ٩ ، ٢٥) ب أ (٥ ، ٠ ، ٥) ج أ (٠ ، ٥ ، ٥) د أ (٥ ، ٥ ، ٠)

---

**١٤** إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهى وحدة فإن : $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} \in$ ..............

أ ]٠ ، ١[ ب [−١ ، ١] ج ]−١ ، ١[ د $ح^{+}$

---

**١٥** **أجب عن إحدى الفقرتين الآتيتين :**

أ إذا كان المتجه $\overrightarrow{أ}$ يصنع مع محاور الإحداثيات الموجبة س ، ص ، ع زوايا قياساتها ٤٥° ، ٦٠° ، θ°

على الترتيب ، حيث θ زاوية حادة.

① **أوجد :** قيمة θ

② اكتب الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{أ}$ إذا كان : $\|\overrightarrow{أ}\| = ١٠$

ب إذا كان : $\|\overrightarrow{أ}\| = ٦$ ، كانت جيوب تمام زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$ هى على الترتيب : $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$ وكان المتجه $\overrightarrow{ب}$ = (−٢ ، ٣ ، ٥) أوجد مساحة متوازى الأضلاع الذى فيه : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ضلعان متجاوران.

**١٦** حاصل ضرب جذور المعادلة : $\text{س}^{٤} - ١ = ٠$ يساوى ..............

Ⓐ صفر (ب) ١ (جـ) -١ (د) ت

---

**١٧** معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٢ ، ٣) وزوايا الاتجاه له (٣٠° ، ٩٠° ، ٦٠°) هى ..............

(أ) $\frac{\text{٢س} - ١}{٢} = \frac{\text{ص} - ١}{٢} = \frac{\text{٢ع} - \sqrt{٣}}{٦}$

(ب) $\frac{\text{٢س} - \sqrt{٣}}{٢} = \frac{\text{ص}}{٢} = \frac{\text{٢ع} - ١}{٦}$

(جـ) $\frac{\text{س} - ١}{٢} = \frac{\text{٢ع} - ٦}{\sqrt{٣}}$ ، ص = ٢

(د) $\frac{\text{٢س} - ٢}{\sqrt{٣}} = \frac{\text{٢ع} - ٦}{١}$ ، ص = ٢

---

**١٨** إذا كان المستقيمان : ل$_{١}$ : $\frac{\text{س} + ٢}{-١} = \frac{\text{ص} + ٣}{٣} = \frac{\text{ع} + ٥}{٢}$ ، ل$_{٢}$ : $\frac{\text{س}}{٢} = \frac{\text{ص} - ٥}{\text{ك}} = \frac{\text{ع} - ٦}{\text{م}}$ متعامدين

فإن : ٣ ك + ٢ م = ..............

(أ) -١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

---

**١٩** فى مفكوك : $\left(\text{س}^{٢} - \frac{١}{\text{س}}\right)^{٨}$ حسب قوى س التنازلية :

① أوجد رتبة وقيمة الحد الخالى من س

② أوجد النسبة بين الحد الأوسط فى هذا المفكوك والحد الذى يليه عندما س = ١

# ٢ دور ثان ٢٠٢٠

## أجب عن الأسئلة التالية :

**١** معامل س$^{٤}$ فى مفكوك : (٢ س + ١)$^{٨}$ حسب قوى س التنازلية يساوى ..............

(أ) ١٦ (ب) ٢٥٦ (ج) ١١٢٠ (د) ١٦٨٠١

---

**٢** إذا كانت النقطة أ (١ – ك ، ٢ ك ، ٣ + ك) تقع فى المستوى س ص فإن : ..............

(أ) أ (٠ ، ٢ ، ٥) (ب) أ (–٦ ، ٤ ، ٠) (ج) أ (١ ، ٠ ، ٣) (د) أ (٤ ، –٦ ، ٠)

---

**٣** إذا كان : $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ متجهى وحدة ، وكان : $\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}} = -\frac{١}{٢}$ فإن قياس الزاوية بينهما يساوى ..............°

(أ) ١٥٠ (ب) ١٢٠ (ج) ٦٠ (د) ٣٠

---

**٤** **أجب عن إحدى الفقرتين الآتيتين :**

(أ) أوجد قياسات الزوايا التي يصنعها المتجه : $\overleftarrow{\text{ح}} = ٥\sqrt{٢}\,\overleftarrow{\text{س}} + ٥\,\overleftarrow{\text{ص}} + ٥\,\overleftarrow{\text{ع}}$ مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات.

(ب) إذا كان : $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}} = -٦٥\,\overleftarrow{\text{ى}}$ ، حيث $\overleftarrow{\text{ى}}$ متجه وحدة عمودى على المستوى الذى يحتوى $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ ، $\|\overleftarrow{\text{أ}}\| = ٥$ ، $\|\overleftarrow{\text{ب}}\| = ٢٦$ أوجد قياس الزاوية بين المتجهين $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$

---

**٥** مجموع جذور المعادلة : س$^{٤}$ – ١ = صفر يساوى ..............

(أ) صفر (ب) ١ (ج) –١ (د) ت

---

**٦** معادلة المستقيم المار بالنقطتين (–٤ ، ٣ ، ٤) ، (٦ ، –١ ، –٢) هى ..............

(أ) $\frac{\text{س} - ٤}{١٠} = \frac{\text{ص} + ٣}{-٤} = \frac{\text{ع} + ٤}{-٦}$ (ب) $\frac{\text{س} - ٦}{١٠} = \frac{\text{ص} + ١}{-٤} = \frac{\text{ع} + ٢}{-٦}$

(ج) $\frac{\text{س} + ٦}{١٠} = \frac{\text{ص} - ١}{-٤} = \frac{\text{ع} - ٢}{-٦}$ (د) $\frac{\text{س}}{٦} = \frac{\text{ص}}{-١} = \frac{\text{ع}}{-٢}$

---

**٧** إذا كان المستقيمان : ل$_{١}$ : $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (٢ ، ٣ ، –٤) + ك (٢ ، ٣ ، أ)

، ل$_{٢}$ : $\frac{\text{س} - ٥}{\text{ب}} = \frac{\text{ص} + ٤}{٦} = \frac{\text{ع} - ٤}{٢}$ متوازيين فإن : أ + ب = ..............

(أ) ١ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) ٦

**٨** فى مفكوك $\left(\text{س}^{٢} + \frac{٢}{\text{س}}\right)^{٨}$ حسب قوى س التنازلية :

① أوجد النسبة بين الحدين السادس والخامس ، وإذا كانت هذه النسبة تساوى ٢٥ : ٨ أوجد قيمة س

② أثبت أن هذا المفكوك لا يحتوى على حد خالٍ من س

---

**٩** إذا كان : ع = $\sqrt{٢}$ (جا ٣٠° + ت جتا ٣٠°) فإن السعة الأساسية للعدد ع تساوى ..............

Ⓐ $\frac{\pi}{٦}$ Ⓑ $\frac{\pi}{٣}$ Ⓒ $\frac{٢\pi}{٣}$ Ⓓ $\frac{٥\pi}{٦}$

(أ) $\frac{\pi}{٦}$ (ب) $\frac{\pi}{٣}$ (ج) $\frac{٢\pi}{٣}$ (د) $\frac{٥\pi}{٦}$

---

**١٠** جيوب تمام الاتجاه للمستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٢ ، ٣) ، (٣ ، ٢ ، ٢) هى ..............

(أ) (٢ ، ٠ ، -١) (ب) (٤ ، ٤ ، ٥)

(ج) $\left(\frac{٢}{\sqrt{٥}} ، ٠ ، \frac{-١}{\sqrt{٥}}\right)$ (د) $\left(\frac{٤}{\sqrt{٥٧}} ، \frac{٤}{\sqrt{٥٧}} ، \frac{٥}{\sqrt{٥٧}}\right)$

---

**١١** **بدون فك المحدد أثبت أن :** $\begin{vmatrix} ٣\text{س} & ٣\text{س} & ٣\text{س} \\ \text{أ} & \text{ب} & ١ \\ \text{ب}+١ & \text{أ}+١ & \text{أ}+\text{ب} \end{vmatrix}$ = صفر

---

**١٢** أوجد بُعد النقطة : أ (-١ ، ٢ ، ٥) عن المستقيم : $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (٣ ، ٤ ، ٥) + ك (٢ ، -٣ ، ٦)

---

**١٣** لجميع قيم س ، ص ∈ ح فإن : $\text{هـ}^{\text{ت س} + \text{ص}}$ = ..............

(أ) $\text{هـ}^{\text{س}}$ (جا ص + ت جتا ص) (ب) $\text{هـ}^{\text{س}}$ (جتا ص + ت جا ص)

(ج) $\text{هـ}^{\text{ص}}$ (جا س + ت جتا س) (د) $\text{هـ}^{\text{ص}}$ (جتا س + ت جا س)

---

**١٤** **أثبت أن المستقيمين :** $\overleftarrow{\text{ر}}_{١}$ = $\overleftarrow{\text{ص}}$ + ك$_{١}$ ($\overleftarrow{\text{س}}$ + ٢ $\overleftarrow{\text{ص}}$ - $\overleftarrow{\text{ع}}$)

، $\overleftarrow{\text{ر}}_{٢}$ = ($\overleftarrow{\text{س}}$ + $\overleftarrow{\text{ص}}$ + $\overleftarrow{\text{ع}}$) + ك$_{٢}$ (-٢ $\overleftarrow{\text{س}}$ - ٢ $\overleftarrow{\text{ص}}$) متقاطعان وأوجد نقطة تقاطعهما.

---

**١٥** **أثبت أن :** $\left(\frac{١}{١ + \omega\,\text{ت}} - \frac{\omega + \text{ت}}{١ + \omega^{٢}\,\text{ت}}\right)^{٨} = ١٦$

---

**١٦** $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}$ : $^{\text{ن}-١}\text{ق}_{\text{ر}-١}$ = ..............

(أ) $\frac{\text{ر}}{\text{ن}}$ (ب) $\frac{\text{ن}}{\text{ن}-\text{ر}}$ (ج) $\frac{\text{ن}-\text{ر}}{\text{ن}}$ (د) $\frac{\text{ن}}{\text{ر}}$

**١٧** معادلة الكرة التى مركزها (٣ ، −٢ ، ٤) وطول نصف قطرها ٥ وحدات طول هى ...............

- ⓐ $(\text{س} + ٣)^{٢} + (\text{ص} - ٢)^{٢} + (\text{ع} + ٤)^{٢} = ٢٥$
- ⓑ $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} + \text{ع}^{٢} = ٢٥$
- ⓒ $(\text{س} - ٣)^{٢} + (\text{ص} + ٢)^{٢} + (\text{ع} - ٤)^{٢} = ٢٥$
- ⓓ $(\text{س} - ٣)^{٢} + (\text{ص} + ٢)^{٢} + (\text{ع} - ٤)^{٢} = ٥$

---

**١٨** فى إحدى المحافظات تتكون اللوحات المعدنية للسيارات من ٣ حروف مختلفة تليها ٣ أرقام مختلفة. إذا كان عدد الحروف الأبجدية المستخدمة ٢٦ حرفًا والأرقام المستخدمة هى : (١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ٩) فإن عدد اللوحات التى يمكن تكوينها فى هذه المحافظة يساوى ...............

(أ) ${}^{٢٦}\text{ل}_{٣} + {}^{٩}\text{ل}_{٣}$ (ب) ${}^{٢٦}\text{ل}_{٣} \times {}^{٩}\text{ل}_{٣}$ (جـ) ${}^{٢٦}\text{ق}_{٣} + {}^{٩}\text{ق}_{٣}$ (د) ${}^{٢٦}\text{ق}_{٣} \times {}^{٩}\text{ق}_{٣}$

---

**١٩** **أجب عن إحدى الفقرتين الآتيتين :**

(أ) ضع العدد $\text{ع} = ١ + \sqrt{٣}\,\text{ت}$ فى الصورة المثلثية ثم أوجد جذريه التربيعيين فى الصورة الأسية.

(ب) إذا كان : $\text{ع}_{١} = ١ - \sqrt{٣}\,\text{ت}$ ، $\text{ع}_{٢} = \text{هـ}^{\frac{-\pi}{٦}\text{ت}}$ ، $\text{ع}_{٣} = \left(\text{جتا}\frac{\pi}{١٢} - \text{ت جا}\frac{\pi}{١٢}\right)^{٢}$ ، $\text{ت}^{٢} = -١$

فضع العدد ع على الصورة المثلثية ، ثم على الصورة الأسية ، حيث $\text{ع} = \frac{\text{ع}_{١}\,\text{ع}_{٢}}{\text{ع}_{٣}}$

## ٣ دور أول ٢٠٢١

### أجب عن الأسئلة التالية :

**١** إذا كان : $\text{ع}_{١} = \text{جتا } \theta + \text{ت جا } \theta$ ، $\text{ع}_{٢} = \text{جتا } ٢\theta + \text{ت جا } ٢\theta$

فإن السعة الأساسية للعدد المركب ٣ $\text{ع}_{١} \times \text{ع}_{٢}$ = ............... حيث $\theta \in ]٠ ، \frac{\pi}{٦}[$

(أ) ٩ θ (ب) θ (جـ) ٥ θ (د) ٣ θ

---

**٢** الحد الخالى من س فى مفكوك $\left(\text{س}^{٥} - \frac{\text{ك}}{\text{س}^{٢}}\right)^{٧\text{ن}}$ حسب قوى س التنازلية حيث ك ، ن $\in$ ص$^{+}$ هو ...............

(أ) $\text{ح}_{٥\text{ن}}$ (ب) $\text{ح}_{٥\text{ن}+١}$ (جـ) $\text{ح}_{٦\text{ن}+١}$ (د) $\text{ح}_{٦\text{ن}-١}$

---

**٣** إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{جـ} & \text{ب} & \text{أ} \\ ٣ & -٢ & ١ \\ \text{د} & \text{و} & \text{هـ} \end{vmatrix} = ٨$ فإن : $\begin{vmatrix} ٦ & -٤ & ٢ \\ ٢\text{جـ} & ٢\text{ب} & ٢\text{أ} \\ \text{د} & \text{و} & \text{هـ} \end{vmatrix}$ = ...............

(أ) ١٦ (ب) ٣٢ (جـ) −٣٢ (د) −١٦

---

**٤** إذا كان : $\overleftarrow{\text{أب}} = ٢\overleftarrow{\text{س}} - ٣\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{بجـ}} = -\overleftarrow{\text{ص}} + \overleftarrow{\text{س}} - \overleftarrow{\text{ع}}$ فإن : $\overleftarrow{\text{أجـ}}$ = ...............

(أ) $-\overleftarrow{\text{س}} + ٢\overleftarrow{\text{ص}} - \overleftarrow{\text{ع}}$ (ب) $٣\overleftarrow{\text{س}} + ٢\overleftarrow{\text{ص}} - \overleftarrow{\text{ع}}$

(جـ) $٣\overleftarrow{\text{س}} - ٤\overleftarrow{\text{ص}} - \overleftarrow{\text{ع}}$ (د) $-\overleftarrow{\text{س}} - ٤\overleftarrow{\text{ص}} + \overleftarrow{\text{ع}}$

---

**٥** إذا كان المستقيمان : $\text{ل}_{١} : \overleftarrow{\text{ر}} = \text{ك}_{١}$ (−٢ ، م ، ٧) ، $\text{ل}_{٢} : \frac{\text{س} - ١}{\text{ن}} = \frac{١ - \text{ص}}{٤} = \frac{\text{ع} - ٢}{٢}$ متعامدين

فإن : ن + ٢ م = ...............

(أ) ٧ (ب) −٧ (جـ) ١٤ (د) −١٤

---

**٦** إذا كان المستويان : ٢ س + جـ ص + ٤ ع = ١ ، (أ + ٢) س + ٦ ص + (ب − ٢) ع = ٥ متوازيين

فإن : ٢ أ − ب = ...............

(أ) −٦ (ب) ٦ (جـ) −١٢ (د) ١٢

---

**٧** إذا كان جيب تمام الزاوية التى يصنعها المتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (ك ، ١٢ ، ٤) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات يساوى $\frac{٣}{١٣}$ فإن : ك = ............... حيث ك $\in$ ح

(أ) ٤ (ب) $\sqrt{٣}$ (جـ) $-\sqrt{٣}$ (د) ٣

**٨** إذا كانت : ١ ، ω ، $\omega^{\text{٢}}$ هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح ،

وكانت : $\text{س} = \frac{\text{١}}{\text{١} + \omega\,\text{ت}}$ ، $\text{ص} = \frac{\omega + \text{ت}}{\text{١} + \omega^{\text{٢}}\,\text{ت}}$ فإن : س − ص = ..............

(أ) ت + ١ (ب) ١ − ت (ج) ١ (د) ت

**٩** مكتب به ٩ رجال ، ٦ سيدات ، يراد تكوين لجنة من خمسة أشخاص أغلب أعضائها من السيدات ولا تخلو من الجنسين ، فإن عدد اللجان التى يمكن تكوينها يساوى ..............

(أ) ١١٨٨٠ (ب) ٢٨٧١ (ج) ٣٠٠٣ (د) ٨٥٥

**١٠** إذا كان معامل الحد السادس فى مفكوك $\left(\text{أ}\,\text{س} + \frac{\text{١}}{\text{ب}\,\text{س}}\right)^{\text{١٠}}$ حسب قوى س التنازلية يساوى $^{\text{١٠}}\text{ق}_{\text{٥}}$

فإن : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ = .............. حيث أ ∈ ح* ، ب ∈ ح*

(أ) −١ (ب) ١ (ج) ١٠ (د) $\frac{\text{١}}{\text{١٠}}$

**١١** إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{س} - \text{١} & \text{أ} & \text{ب} \\ \text{٠} & \text{س}^{\text{٢}} + \text{س} + \text{١} & \text{حـ} \\ \text{٠} & \text{٠} & \text{١} \end{vmatrix} = \text{٨}$ فإن : قيمة $\text{س}^{\text{٩}} + \text{١}$ = ..............

(أ) ٧٣ (ب) ٧٢٩ (ج) ٧٣٠ (د) ٨

**١٢** فى المثلث س ص ع إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{٠} & \text{٠} & \text{سَ} \\ \text{٠} & \text{صَ} & \text{٠} \\ \text{عَ} & \text{٠} & \text{٠} \end{vmatrix} = -\text{١٠٠}$ سم$^{\text{٣}}$ وكانت مساحة Δ س ص ع = ٦,٢٥ سم$^{\text{٢}}$

فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث س ص ع = .............. سم.

(أ) ٤ (ب) ١٦ (ج) ٨ (د) ٢

**١٣** إذا كانت $\text{م}_{\text{١}}$ ، $\text{م}_{\text{٢}}$ كرتين متماستين من الداخل وكان : $\text{م}_{\text{١}}\left(-\text{٣} \text{ ، } \text{٢} \text{ ، } -\text{٦}\sqrt{\text{٢}}\right)$ ، $\text{نق}_{\text{١}} = \text{٨}$ وحدة طول ، $\text{م}_{\text{٢}}\left(-\text{٢} \text{ ، } \text{١} \text{ ، } -\text{٥}\sqrt{\text{٢}}\right)$ فإن : $\text{نق}_{\text{٢}}$ = .............. وحدة طول حيث $\text{نق}_{\text{١}} > \text{نق}_{\text{٢}}$

(أ) ٥ (ب) ٢ (ج) ٧ (د) ٦

**١٤** إذا كانت المسافة بين النقطة (−١ ، ٢ ، م) حيث م ∈ $\text{ح}^{+}$

والخط المستقيم $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (−١ ، ٣ ، ٠) + ك (٠ ، −٣ ، ٠) هى ٨ وحدة طول فإن قيمة م تساوى ..............

(أ) ٤ (ب) ١٦ (ج) ٨ (د) ٢

**١٥** إذا كان قياس الزاوية بين المستويين : $س + ص - ١ = ٠$ ، $ل ص + ع - ١ = ٠$ يساوى ٦٠°

فإن : $ل =$ ............... حيث $ل > ٠$

(أ) ٤ (ب) $\frac{١}{٢}$ (ج) ٢ (د) ١

---

**١٦** إذا كان : $ع = ل \left(جا \frac{٤}{٣} \pi - ت جتا \frac{٤}{٣} \pi\right)$ حيث $ل >$ صفر فإن : $ع^{٦} =$ ...............

(أ) $ل^{٦}$ (ب) $٦ ل$ (ج) $-ل^{٦}$ (د) $-٦ ل$

---

**١٧** إذا كان الحدان الأوسطان فى مفكوك $(أ س + ب)^{ن}$ حسب قوى $س$ التنازلية متساويين ، $ن$ عددًا فرديًا

فإن : $س =$ ............... علمًا بأن $أ \in ح^{*}$ ، $ب \in ح^{*}$

(أ) $\frac{ب}{أ}$ (ب) $\frac{أ}{ب}$ (ج) $أ ب$ (د) $-\frac{ب}{أ}$

---

**١٨** إذا كانت النقطة (٧ ، −٢ ، ٢) تقع على سطح الكرة التى معادلتها

$(س - ٤)^{٢} + (ص - ١)^{٢} + (ع + ١)^{٢} = ل^{٢}$ فإن : $|ل| =$ ...............

(أ) ٣ (ب) $٣\sqrt{٣}$ (ج) ٢٧ (د) $\sqrt{٣}$

---

**١٩** إذا كان : ع عددًا مركبًا ، $ع + \bar{ع} = ٢ هـ^{\pi ت}$ فإن : ع يمكن أن تساوى ...............

(أ) $هـ^{\pi ت}$ (ب) $٢ هـ^{\frac{\pi}{٢} ت}$ (ج) $هـ^{-\frac{\pi}{٢} ت}$ (د) $٢ هـ^{\pi ت}$

---

**٢٠** إذا كان : $\frac{{}^{ن}ق_{٤} + {}^{ن}ق_{٣}}{{}^{ن+١}ق_{٣}} = ١$ فإن : $\underline{|ن - ٦} =$ ...............

(أ) ٦ (ب) ١ (ج) صفر (د) ٢٤

---

**٢١** فى مفكوك $\left(س^{٢} + ٢ + \frac{١}{س^{٢}}\right)^{٦}$ معامل الحد الذى يشتمل على $س^{٢}$ هو ...............

(أ) ${}^{١٢}ق_{٥}$ (ب) ${}^{١٢}ق_{٦}$ (ج) ${}^{١٢}ق_{٣}$ (د) ${}^{٦}ق_{٥}$

---

**٢٢** إذا كانت المصفوفة $(أ_{س ص})$ على النظم ٣ × ٣ حيث $أ_{س ص} = ٢ س - ص$ فإن مرتبة المصفوفة أ

هى ...............

(أ) ٣ (ب) ٢ (ج) ١ (د) صفر

**٢٣** إذا كان : $\|\overleftarrow{\text{أ}}\| = \sqrt{١٣}$ ، $\overleftarrow{\text{أ}}$ // $\overleftarrow{\text{ءحـ}}$ وفى نفس اتجاهه حيث ء (١ ، ٣ ، −٢) ، حـ (١ ، −١ ، ٤)

، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (−٢ ، ٣ ، ٥) فإن : $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}}$ = ..............

Ⓐ $-١٩\,\overleftarrow{\text{س}} + ٦\,\overleftarrow{\text{ص}} + ٤\,\overleftarrow{\text{ع}}$ Ⓑ $-٢٨\,\overleftarrow{\text{س}} - ١٢\,\overleftarrow{\text{ص}} - ٨\,\overleftarrow{\text{ع}}$

Ⓒ $-٢٨\,\overleftarrow{\text{س}} + ١٢\,\overleftarrow{\text{ص}} - ٨\,\overleftarrow{\text{ع}}$ Ⓓ $-١٩\,\overleftarrow{\text{س}} - ٦\,\overleftarrow{\text{ص}} - ٤\,\overleftarrow{\text{ع}}$

---

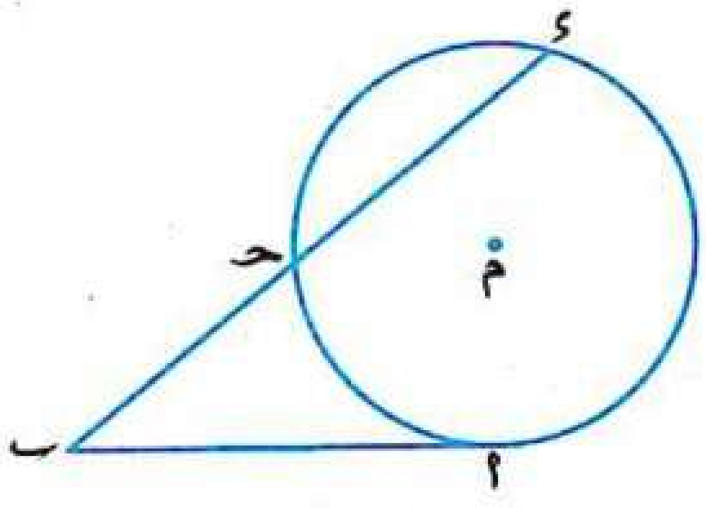
**٢٤** إذا كان أبحـ مثلث فيه : أ (١ ، ٢ ، ٤) ، ب (−٢ ، ٠ ، ٥) ، حـ (١ ، ٤ ، ٠) وكانت م نقطة تقاطع متوسطات المثلث فإن معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أم}}$ هى ..............

(أ) $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (١ ، ٢ ، ٤) + ك (−١ ، ٤ ، ٥) (ب) $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (١ ، ٢ ، ٤) + ك (−١ ، ١ ، ١)

(جـ) $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (١ ، ٢ ، ٤) + ك (−١ ، ٠ ، −١) (د) $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (٠ ، ٢ ، ٣) + ك (١ ، ٢ ، ٤)

---

**٢٥** **في الشكل المقابل :**



$\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مماس للدائرة م عند أ ، $\overline{\text{ءحـ}}$ وتر فى الدائرة

حيث $\overleftrightarrow{\text{ءحـ}} \cap \overleftrightarrow{\text{أب}} = \{\text{ب}\}$ إذا كان : $\begin{vmatrix} ١ & ٠ & \text{حء} \\ -١ & \text{أب} & \text{بحـ} \\ ٠ & -\text{بحـ} & \text{أب} \end{vmatrix} = ٣٢$

فإن : أب = .............. وحدة طول.

(أ) ٨ (ب) ٤ (جـ) ١٦ (د) ٦

# ٤ دور ثان ٢٠٢١

## أجب عن الأسئلة التالية :

١ إذا كان الحد الخالي من س في مفكوك $\left(\text{س}^{٣} + \frac{٥}{\text{س}}\right)^{\text{ن}}$ حسب قوى س التنازلية هو $\text{ح}_{٧}$ ،
فإن قيمة ن = ..............

(أ) ٩ (ب) ٧ (ج) ١٠ (د) ٨

---

٢ إذا كان : $\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب ح}} = ٤\,\overleftarrow{\text{س}} + ١٢\,\overleftarrow{\text{ص}} + ٩\,\overleftarrow{\text{ع}}$ ، حيث $\overleftarrow{\text{أ}} = (٠ ، -١ ، ٣)$ ، $\overleftarrow{\text{ب}} = (٤ ، -٢ ، ١)$
فإن : $\overleftarrow{\text{ح}}$ = ..............

(أ) $٨\,\overleftarrow{\text{س}} + ١٣\,\overleftarrow{\text{ص}} + ١٣\,\overleftarrow{\text{ع}}$ (ب) $٨\,\overleftarrow{\text{س}} + ١١\,\overleftarrow{\text{ص}} + ٧\,\overleftarrow{\text{ع}}$

(ج) $٨\,\overleftarrow{\text{س}} + ٩\,\overleftarrow{\text{ص}} + ٧\,\overleftarrow{\text{ع}}$ (د) $٨\,\overleftarrow{\text{س}} + ١٣\,\overleftarrow{\text{ص}} - ٧\,\overleftarrow{\text{ع}}$

---

٣ الصورة العامة لمعادلة المستوى الذى يمر بالنقطة (-٢ ، ٢ ، -١) ويوازى المستوى الذى معادلته
(٢ ، ٣ ، -٥) . $\overleftarrow{\text{ر}}$ = ١ هى ..............

(أ) ٢ س + ٣ ص - ٥ ع = -٧ (ب) ٢ س + ٢ ص - ع = ١

(ج) ٢ س - ٣ ص + ٥ ع = -٧ (د) ٢ س + ٣ ص - ٥ ع = ٧

---

٤ إذا كان : $\text{ع}_{١} = ١٥ \left(\text{حتا} \frac{\pi}{٢} + \text{ت حا} \frac{\pi}{٢}\right)$ ، $\text{ع}_{٢} = ٣ \left(\text{حتا}\, \theta + \text{ت حا}\, \theta\right)$ حيث $\theta \in\, ]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$
فإن : $\frac{\text{ع}_{١}}{\text{ع}_{٢}}$ = ..............

(أ) $٥ \left(\text{حتا}\, \theta + \text{ت حا}\, \theta\right)$ (ب) $١٢ \left(\text{حتا}\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right) + \text{ت حا}\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)\right)$

(ج) $٥ \left(\text{حتا}\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right) + \text{ت حا}\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)\right)$ (د) $١٥ \left(\text{حا}\, \theta + \text{ت حتا}\, \theta\right)$

---

٥ قيمة المحدد $\begin{vmatrix} ٧^{٤\text{ن}} & ٧^{٣\text{ن}} & ٧^{٢\text{ن}} \\ ٧^{٥\text{ن}} & ٧^{٤\text{ن}} & ٧^{٣\text{ن}} \\ ٧^{٦\text{ن}} & ٧^{٥\text{ن}} & ٧^{٤\text{ن}} \end{vmatrix}$ = .............. حيث $\text{ن} \in \text{ص}^{+}$

(أ) صفر (ب) $٧^{٢\text{ن}}$ (ج) $٧^{\text{ن}}$ (د) $٧^{٣\text{ن}}$

---

٦ إذا كان المستقيمان $\text{ل}_{١}$ : $\overleftarrow{\text{ر}}_{١} = (١ ، ٢ ، ٣) + \text{ك}_{١} (-١ ، ٣ ، ٤)$ ،
$\text{ل}_{٢}$ : $\overleftarrow{\text{ر}}_{٢} = (-٢ ، ٥ ، -١) + \text{ك}_{٢} (\text{م} ، \text{ن} ، ١)$ متعامدين فان : ٣ ن - م = ..............

(أ) -٤ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (ج) $\frac{-٤}{٣}$ (د) ٤

**٧** جيوب تمام الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$ = (−٢ ك ، ٢ ك ، ك) حيث ك ∈ ]٠ ، ١[ هى ..............

ⓐ $\left(\frac{-٢}{٣} ، \frac{٢}{٣} ، \frac{١}{٣}\right)$

ⓑ $\left(\frac{-٢ك}{٣} ، \frac{٢ك}{٣} ، \frac{-ك}{٣}\right)$

ⓒ $\left(\frac{-٢}{٣} ، \frac{-٢}{٣} ، \frac{-١}{٣}\right)$

ⓓ $\left(\frac{٢ك}{٣} ، \frac{٢ك}{٣} ، \frac{ك}{٣}\right)$

---

**٨** إذا كانت ١ ، ω ، $ω^٢$ هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح حيث أ ، ب أعداد حقيقية موجبة

فإن مرافق العدد أ ω + ب $ω^٢$ هو ..............

(أ) أ $ω^٢$ − ب ω

(ب) أ ω − ب $ω^٢$

(جـ) أ $ω^٢$ + ب ω

(د) أ ω + ب $ω^٢$

---

**٩** فى مفكوك $(١ + س)^{٢٠}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان معامل $ح_{ر+٢}$ = معامل $ح_{ر+٤}$ ، فإن قيمة

ر = ..............

(أ) ٩

(ب) ٨

(جـ) ١٠

(د) ١١

---

**١٠** إذا كانت ١ ، ω ، $ω^٢$ هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

فإن قيمة المحدد : $\begin{vmatrix} ١ & ω & ω - ١ \\ ١ & -١ & ω + ١ \\ ١ & ω & ω \end{vmatrix}$ = ..............

(أ) ω − ١

(ب) $ω^٢$

(جـ) ω

(د) $ω^٢$ + ١

---

**١١** البعد العمودى بين النقطة (٢ ، ٤ ، ٧) والخط المستقيم ٢ س − ٤ = $\frac{٢ص - ٨}{٣} = \frac{٢ع - ١٤}{٥}$

يساوى .............. وحدة طول.

(أ) صفر

(ب) ١

(جـ) ٢

(د) ٥

---

**١٢** قياس الزاوية المحصورة بين المستوى س ص ، المستوى س + $\sqrt{٣}$ ع − ٧ = صفر يساوى ..............°

(أ) ٦٠

(ب) ٩٠

(جـ) ٣٠

(د) ٤٥

---

**١٣** إذا كان : أ ب حـ مثلث فيه النقطة ء منتصف $\overline{ب حـ}$ ، أ(٣ ، ١ ، ٥) ، ب(٢ ، ٣ ، ٧) ، حـ(٠ ، ٣ ، ١)

فإن طول $\overline{أ ء}$ = .............. وحدة طول.

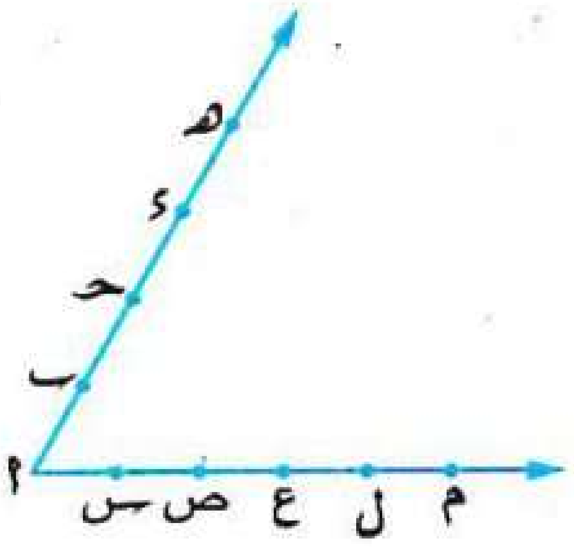
(أ) ٩

(ب) ٢

(جـ) ٧

(د) ٣

**١٤** **في الشكل المقابل :**



النقاط العشرة تقع على شعاعين بداية كل منهما النقطة أ ، فإن عدد المستقيمات المختلفة التي يمكن تعيينها من هذه النقاط يساوي ...............

(أ) ٢٢　(ب) ٤٥　(جـ) ٩٠　(د) ٣٠

---

**١٥** في المثلث أ ب حـ إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{أَ} + ٢ & ٣ & \text{جا حـ} \\ ١ & \text{بَ} & ٠ \\ ٢ & ٣ & \text{جا حـ} \end{vmatrix} = ١٢$ ، حيث أَ ، بَ ، حَ أطوال أضلاع المثلث أ ب حـ

، فإن مساحة سطح المثلث أ ب حـ = ............ وحدة مساحة.

(أ) ١٢　(ب) ٦　(جـ) ٢٤　(د) ٨

---

**١٦** معادلة الكرة التي مركزها (−١ ، ٠ ، ٥) وحجمها ٣٦ π وحدة حجم هي ...............

(أ) $(\text{س} + ١)^{٢} + \text{ص}^{٢} + (\text{ع} - ٥)^{٢} = ٣٦$

(ب) $(\text{س} - ١)^{٢} + \text{ص}^{٢} + (\text{ع} + ٥)^{٢} = ٦$

(جـ) $(\text{س} + ١)^{٢} + \text{ص}^{٢} + (\text{ع} - ٥)^{٢} = ٢٧$

(د) $(\text{س} + ١)^{٢} + \text{ص}^{٢} + (\text{ع} - ٥)^{٢} = ٩$

---

**١٧** في مفكوك $\left(\sqrt{\text{س}} + \frac{١}{\text{س}}\right)^{٨}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان ٥ $\text{ح}_{٤}$ ، $\text{ح}_{٥}$ ، $\text{ح}_{٧}$ ، $\text{ح}_{٦}$ كميات متناسبة فإن قيمة س = ...............

(أ) $\frac{١}{٢}$　(ب) $\frac{٥}{٨}$　(جـ) $\frac{٥}{٢}$　(د) $\frac{٨}{٥}$

---

**١٨** إذا كان : $\text{ع}_{١}$ ، $\text{ع}_{٢}$ عددان مركبان ، $\text{ع}_{١} = \text{هـ}^{٥ + \text{ك} \pi \text{ت}}$ ، $\text{ع}_{٢} = \text{هـ}^{(٥ + \text{ك ت}) \pi}$ حيث $-\frac{١}{٢} < \text{ك} < \frac{١}{٢}$

فإن السعة الأساسية للعدد المركب $\text{ع}_{١} + \text{ع}_{٢}$ يمكن أن تساوي ...............

(أ) $\frac{٢ \pi}{٣}$　(ب) $-\frac{\pi}{٢}$　(جـ) $\pi$　(د) $-\frac{\pi}{٦}$

---

**١٩** إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & \text{ك} & ٦ \\ ٥ & ٧ & ٩ \end{pmatrix}$ ، $\text{ر}(\text{أ}) = ٣$ ، فإن : $\text{ك} \in$ ...............

(أ) $\{٤\}$　(ب) $\text{ح} - \{٠\}$　(جـ) $\text{ح} - \{٤\}$　(د) $\text{ح} - \{٦\}$

**٢٠** إذا كانت النقطة أ $(\sqrt{\text{ل}}\ ،\ -\sqrt{\text{ل}})$ تُمثل العدد المركب على شكل أرجاند ، حيث ل > ١ ، فإن الصورة الأسية للعدد ع هى : ...............

(أ) $\sqrt{\text{٢ل}}\ \text{هـ}^{-\frac{\pi}{\text{٤}}\text{ت}}$ (ب) $\sqrt{\text{٢}}\ \text{ل هـ}^{-\frac{\pi}{\text{٤}}\text{ت}}$ (جـ) $\sqrt{\text{٢ل}}\ \text{هـ}^{\frac{\pi}{\text{٤}}\text{ت}}$ (د) $\sqrt{\text{٢}}\ \text{ل هـ}^{\frac{\pi}{\text{٤}}\text{ت}}$

---

**٢١** إذا كان معامل الحد الذى يحتوى على $\text{س}^{\text{٤}}$ فى مفكوك $\left(\text{س} + \frac{\text{أ}}{\text{س}^{\text{٢}}}\right)^{\text{٧}}$ يساوى ٤٩

فإن قيمة الثابت أ = ...............

(أ) −٧ (ب) ٤٩ (جـ) −٤٩ (د) ٧

---

**٢٢** إذا كان $\overleftarrow{\text{ى}}$ هو متجه الوحدة العمودى على مستوى المتجهين $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ حسب قاعدة اليد اليمنى

حيث $\overleftarrow{\text{ى}} = \left(\frac{\text{٣}}{\text{٥}}\ ،\ \text{٠}\ ،\ \frac{\text{٤}}{\text{٥}}\right)$ وكان $\|\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}}\| = \text{٥}$

فإن : $(\text{٣}\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}) \times (\text{٤}\overleftarrow{\text{أ}} + \text{٢}\overleftarrow{\text{ب}}) =$ ...............

(أ) (٣ ، ٠ ، ٤) (ب) (٣٠ ، ٠ ، ٤٠) (جـ) (−٣٠ ، ٠ ، −٤٠) (د) (٦ ، ٠ ، ٨)

---

**٢٣** الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة أ (٢ ، −١ ، ٤) ويوازى مُنصف الزاوية بين $\overleftrightarrow{\text{و ص}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{و ع}}$ فى المستوى ص ع هى ...............

(أ) $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (٢ ، −١ ، ٤) + ك (٠ ، ١ ، ١) (ب) $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (٢ ، −١ ، ٤) + ك (٠ ، −١ ، ١)

(جـ) $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (٢ ، −١ ، ٤) + ك (−١ ، ٠ ، ١) (د) $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (٢ ، −١ ، ٤) + ك (١ ، ٠ ، −١)

---

**٢٤** إذا كان $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} : {}^{\text{ن}-\text{١}}\text{ق}_{\text{ر}} = \text{٣} : \text{١}$ فإن $\left|\frac{\text{ن}^{\text{٤}}}{\text{ر}}\right. =$ ...............

(أ) ٢٤ (ب) ١٢٠ (جـ) ٧٢٠ (د) ٥٠٤٠

---

**٢٥** فى المثلث أ ب حـ إذا كان $\begin{vmatrix} -\text{بَ}^{\text{٢}} & \text{حـَ}^{\text{٢}} & \text{أَ}^{\text{٢}} \\ -\text{٢} & \text{١} & \text{١} \\ -\text{١} & \text{١} & \text{٠} \end{vmatrix}$ = أَ حـَ ، حيث أَ ، بَ ، حـَ أطوال أضلاع المثلث أ ب حـ

فإن : ق (د ب) = ............... °

(أ) ٤٥ (ب) ٩٠ (جـ) ٦٠ (د) ١٢٠

## ٥ دور أول ٢٠٢٢

### أجب عن الأسئلة التالية :

**١** إذا كان لنظام المعادلات الخطية :

$ك\,س - ٥\,ص - ٢\,ع = \text{صفر}$ ، $-س + ٤\,ص + ك\,ع = \text{صفر}$ ، $٢\,س + ك\,ع + ص = \text{صفر}$ عدد لا نهائى من الحلول ، فإن إحدى قيم ك = ..............

(أ) ٦　(ب) ٣　(جـ) ١　(د) − ٢

---

**٢** إذا كان ع عددًا مركبًا حيث $ع = ت^{٢٢} + ت^{٢٤ن - ١٣}$ ، حيث $ن \in ص^+$ فإن الصورة المثلثية للعدد المركب ع يمكن أن تساوى .............. (حيث $ت^٢ = -١$)

(أ) $\sqrt{٢}\left(\text{حتا}\left(\frac{-\pi}{٤}\right) + ت\,\text{حا}\left(\frac{-\pi}{٤}\right)\right)$　(ب) $\sqrt{٢}\left(\text{حتا}\left(\frac{\pi}{٤}\right) + ت\,\text{حا}\left(\frac{\pi}{٤}\right)\right)$

(جـ) $\sqrt{٢}\left(\text{حتا}\left(\frac{٣\pi}{٤}\right) + ت\,\text{حا}\left(\frac{٣\pi}{٤}\right)\right)$　(د) $\sqrt{٢}\left(\text{حتا}\left(\frac{-٣\pi}{٤}\right) + ت\,\text{حا}\left(\frac{-٣\pi}{٤}\right)\right)$

---

**٣** إذا كان المستقيمان $ل_١ : \frac{س + ١}{٢} = \frac{٢ - ص}{-٣} = \frac{٣ - ع}{-٤}$ ، $ل_٢ : \frac{س}{٣} = \frac{ص + ١}{٤} = \frac{١ - ع}{-م}$ متعامدين ،

فإن : م = ..............

(أ) −٥,٤　(ب) −٥,١　(جـ) ٥,١　(د) ٥,٤

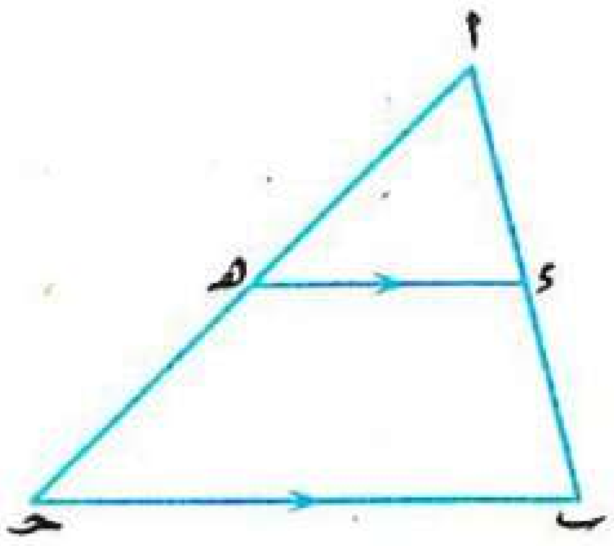
---

**٤** مجموع معاملى الحدين الأوسطين فى مفكوك $\left(\frac{٢}{س} + \frac{س^٢}{٢}\right)^{٢٥}$ يساوى ..............

(أ) $٢\;{}^{٢٥}ق_{١٢}$　(ب) $٤\;{}^{٢٥}ق_{١٢}$　(جـ) $\frac{٥}{٢}\;{}^{٢٥}ق_{١٢}$　(د) $\frac{٢}{٥}\;{}^{٢٥}ق_{١٢}$

---

**٥** في الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث فيه : $\overline{ءهـ} \parallel \overline{بحـ}$

وكانت : $س = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ أء & أهـ & ءهـ \\ أب & أحـ & بحـ \end{pmatrix}$

فإن المصفوفة س تكون ..............

(أ) غير منفردة.　(ب) منفردة.　(جـ) شبه متماثلة.　(د) متماثلة.

---

**٦** قياس الزاوية بين المستويين $س + ص + ٢\,ع = ٧$ ، $\overleftarrow{ر} \cdot (٢ ، -١ ، ١) = ٦$ يساوى ..............°

(أ) ٣٠　(ب) ٤٥　(جـ) ٦٠　(د) ٩٠

**٧** معادلة المستوى الذى يمر بمركز الكرة (س + ١)$^{٢}$ + (ص − ١)$^{٢}$ + ع$^{٢}$ = نق$^{٢}$ ويحوى المستقيم الذى معادلته $\frac{س}{٣} = \frac{ص - ١}{٤} = \frac{ع + ٢}{٢}$ هى ..............

(أ) ٢ س + ٢ ص + ع = ٠

(ب) ٢ س − ٢ ص + ع − ٤ = ٠

(جـ) −٢ س + ٢ ص − ع + ٨ = ٠

(د) ٢ س − ٢ ص + ع + ٤ = ٠

---

**٨** شركة صغيرة يعمل بها ١٠ رجال ، ٥ سيدات ، فإن عدد الطرق التى يمكن بها اختيار لجنة من خمسة أشخاص ، بحيث يكون عدد السيدات باللجنة عددًا أوليًا = .............. طريقة.

(أ) ١٩٩٢٠

(ب) ٧١٥٠

(جـ) ٢٧٠١

(د) ١٦٥١

---

**٩** فى مفكوك $\left(\frac{١}{س} + ك\, س^{٢}\right)^{٨}$ حسب قوى س التصاعدية ، إذا كان معامل س$^{٧}$ = ٥٦ ، فإن قيمة ك = ..............

(أ) $-\frac{١}{٥}$

(ب) ٥

(جـ) −١

(د) ١

---

**١٠** إذا كانت النسبة بين الحد الرابع من البداية إلى الحد الرابع من النهاية فى مفكوك $\left(\frac{أ}{س} + \frac{س}{أ}\right)^{٢ن}$ تساوى أ$^{٤}$ : س$^{٤}$ فإن : ن = .............. (علمًا بأن : س $\in$ ح$^{*}$ ، أ $\in$ ح$^{*}$)

(أ) ٢

(ب) ٤

(جـ) ٦

(د) ٨

---

**١١** إذا كان : ${}^{ن-١}ق_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر} - {}^{ن-١}ق_{ر}$ فإن : ن = ..............

(أ) ٢ ر + ١

(ب) ر − ١

(جـ) ر + ٢

(د) ر + ١

---

**١٢** إذا كان المستوى : $\overleftarrow{ر}$ . (١ ، م ، ١٦) = ٥ ، والمستوى : ل س + ٢ ص + ٨ ع = ٨ متوازيين ، فإن : ل م = ..............

(أ) ٨

(ب) ٢

(جـ) $\frac{١}{٢}$

(د) $\frac{١}{٨}$

---

**١٣** المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٢ ، ٨) والمتجه (٣ ، ١ ، ٤) متجه اتجاه له يقطع محور السينات فى النقطة ..............

(أ) (− ٤ ، ٠ ، ٠)

(ب) (٤ ، ٠ ، ٠)

(جـ) (١ ، ٠ ، ٠)

(د) (−١ ، ٠ ، ٠)

---

**١٤** إذا كانت : $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ ، $\overleftarrow{ح}$ ، $\overleftarrow{هـ}$ أربعة متجهات تقع جميعها فى مستوى واحد ، وكان : $\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب}$ ، $\overleftarrow{هـ} = \overleftarrow{أ} - \overleftarrow{ب}$ ، $\overleftarrow{ح} \times \overleftarrow{هـ} = ٣\, \overleftarrow{ى}$ فإن : $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}$ = ..............

حيث $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة عمودى على المستوى الذى يحتوى المتجهات $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ ، $\overleftarrow{ح}$ ، $\overleftarrow{هـ}$

(أ) $\frac{-٣}{٢}\, \overleftarrow{ى}$

(ب) $\frac{٣}{٢}\, \overleftarrow{ى}$

(جـ) $\frac{٢}{٣}\, \overleftarrow{ى}$

(د) $\frac{-٢}{٣}\, \overleftarrow{ى}$

**١٥** إذا كانت أ (٣ ، ٢ ، ٥) نقطة فى الفراغ مسقطها على المستوى س ص هو نقطة ب ، ومسقطها على المستوى س ع هو نقطة حـ فإن : $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ = ..............

(أ) $-٢\,\overleftarrow{\text{س}} + ٣\,\overleftarrow{\text{ص}}$ (ب) $٢\,\overleftarrow{\text{ص}} - ٥\,\overleftarrow{\text{ع}}$ (جـ) $-٢\,\overleftarrow{\text{ص}} + ٥\,\overleftarrow{\text{ع}}$ (د) $-٢\,\overleftarrow{\text{س}} - ٣\,\overleftarrow{\text{ع}}$

---

**١٦** إذا كان الجذران التربيعيان للعدد المركب $\frac{-٧ + ٢٦\,\text{ت}}{٥ - ٢\,\text{ت}}$ هما ± (أ + ب ت) حيث أ ، ب عددان حقيقيان

فإن : أ + ٢ ب يمكن أن يساوى .............. (حيث $\text{ت}^٢ = -١$)

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) صفر (د) -٤

---

**١٧** إذا كان : $\text{ع}_١ = ٩ + ١٢\,\text{ت}$ ، $\text{ع}_٢ = \text{هـ}^{\frac{-\pi}{٢}\text{ت}}$ فإن : $\frac{\text{ع}_١}{\text{ع}_٢}$ = ..............

(أ) ٣ (-٤ + ٣ ت) (ب) ٣ (٣ + ٤ ت) (جـ) ٣ (-٤ - ٣ ت) (د) ٣ (٣ - ٤ ت)

---

**١٨** إذا كان الحد الخامس فى مفكوك $\left(٢\,\text{س} - \frac{١}{\text{س}^٢}\right)^{\text{ن}}$ حسب قوى س التنازلية هو الحد الخالى من س

فإن : ن = ..............

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ١٢ (د) ١٥

---

**١٩** قيمة المحدد $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{أ} + ٢\,\text{س} & \text{ب} + ٢\,\text{ص} & \text{حـ} + ٢\,\text{ع} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix}$ = ..............

(أ) ٢ س (ب) ٢ ص (جـ) صفر (د) ٢ ع

---

**٢٠** إذا كانت مصفوفة المرافقات للمصفوفة أ هى $\begin{pmatrix} ٢ & -٤ & -٦ \\ -٨ & ٨ & ٣٢ \\ ٢ & -٤ & -٢٢ \end{pmatrix}$ وكان |أ| = -١٦

فإن : $\text{أ}^{-١}$ = ..............

(أ) $\frac{١}{١٦}\begin{pmatrix} -٢ & ٤ & ٦ \\ ٨ & -٨ & -٣٢ \\ -٢ & ٤ & ٢٢ \end{pmatrix}$

(ب) $\frac{-١}{١٦}\begin{pmatrix} -٢ & ٤ & ٦ \\ ٨ & -٨ & -٣٢ \\ -٢ & ٤ & ٢٢ \end{pmatrix}$

(جـ) $-\frac{١}{٢}\begin{pmatrix} ١ & -٤ & ١ \\ -٢ & ٤ & -٢ \\ -٣ & ١٦ & -١١ \end{pmatrix}$

(د) $\frac{-١}{٨}\begin{pmatrix} ١ & -٤ & ١ \\ -٢ & ٤ & -٢ \\ -٣ & ١٦ & -١١ \end{pmatrix}$

---

**٢١** طول العمود المرسوم من النقطة أ (٠ ، ٣ ، ٠) على المستقيم الذى معادلته :

$\overleftarrow{\text{ر}}$ = (٣ ، ٢ ، ١) + ك (٢ ، -١ ، ٤) يساوى .............. وحدة طول.

(أ) $\sqrt{٢١}$ (ب) $\sqrt{\frac{١٢١}{٢١}}$ (جـ) $\sqrt{١٠}$ (د) $\sqrt{\frac{١١٠}{٢١}}$

**٢٢** إذا كانت أ (٢ ، −٥ ، ٧) ، ب (١ ، ٣ ، ٦) ، نقطة حـ تنتمى إلى محور الصادات ،
فإذا كانت النقطة حـ على أبعاد متساوية من أ ، ب فإن : إحداثيات النقطة حـ هى ..............

ⓐ (٠ ، ٢ ، ٠) ⓑ (٠ ، ١ ، ٠) ⓒ (٠ ، −٢ ، ٠) ⓓ (٠ ، −١ ، ٠)

---

**٢٣** إذا كان : ع$_{١}$ = ٢ (جتا ١٥٠° − ت جا ١٥٠°) ، ع$_{٢}$ = ٣ (جا ١٥٠° + ت جتا ١٥٠°)
فإن الصورة الأسية للعدد ع$_{١}$ ع$_{٢}$ يمكن أن تساوى ............

أ ٦ هـ$^{\frac{٥}{٦}\pi \text{ت}}$ ب ٦ هـ$^{-\frac{٥}{٦}\pi \text{ت}}$ جـ ٦ هـ$^{\frac{\pi}{٣} \text{ت}}$ د ٦ هـ$^{\frac{\pi}{٢} \text{ت}}$

---

**٢٤** كرتان متساويتان فى الحجم ، إذا كانت معادلة الكرة الأولى
س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ + ع$^{٢}$ − ٢ س جتا θ − ٢ ص جا θ − ٨ = ٠ ، ومركز الكرة الثانية هو (جتا θ ، جا θ ، ن)
ويقع على سطح الكرة الأولى ، فإن معادلة الكرة الثانية هى .............. (حيث ن ∈ ح$^{+}$ ، θ ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[)

أ (س − جتا θ)$^{٢}$ + (ص − جا θ)$^{٢}$ + (ع − ٣)$^{٢}$ = ٨

ب (س − جتا θ)$^{٢}$ + (ص − جا θ)$^{٢}$ + ع$^{٢}$ = ٩

جـ (س − جتا θ)$^{٢}$ + (ص − جا θ)$^{٢}$ + ع$^{٢}$ = ٨

د (س − جتا θ)$^{٢}$ + (ص − جا θ)$^{٢}$ + (ع − ٣)$^{٢}$ = ٩

---

**٢٥** إذا كان أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب فإن : قيمة المحدد

$$\begin{vmatrix} \text{جا أ} & \text{٢ جتا حـ} & ٣ \\ \text{جتا أ} & \text{٢ جا حـ} & ٤ \\ \text{ظا أ} & \text{٢ ظتا حـ} & ٥ \end{vmatrix} = \text{..............}$$

أ ٢ جا ب ب ٢ جتا ب جـ ٢ جتا أ د ٢ جا أ

## ٦ دور ثان ٢٠٢٢

### أجب عن الأسئلة التالية :

**١** فى مفكوك $\left(\text{س}^{٢} + \frac{١}{٢\text{س}}\right)^{٣\text{ن}}$ حسب قوى س التنازلية ، رتبة الحد الخالى من س هى ..............

(حيث ن عدد صحيح موجب)

ⓐ $٢\text{ن} + ١$ ⓑ $٢\text{ن}$ ⓒ $٣\text{ن}$ ⓓ $٣\text{ن} + ١$

---

**٢** إذا قطع المستوى : ٤ س + ٣ ص + ٦ ع = ١٢ محاور الإحداثيات س ، ص ، ع فى النقط أ ، ب ، حـ على الترتيب ، فإن مساحة المثلث أ ب حـ = .............. وحدة مساحة.

(أ) $\sqrt{٦١}$ (ب) $٢\sqrt{٦١}$ (جـ) $\frac{١}{٢}\sqrt{٦١}$ (د) $٤\sqrt{٦١}$

---

**٣** البعد العمودى بين المستقيمين $\text{ل}_{١}$ : $\overleftarrow{\text{ر}} = (٢ ، -١ ، ٣) + \text{ك}_{١} (-٤ ، -٤ ، ٢)$

، $\text{ل}_{٢}$ : $\overleftarrow{\text{ر}} = (١ ، -١ ، ٢) + \text{ك}_{٢} (٢ ، ٢ ، -١)$ يساوى .............. وحدة طول.

(أ) $\frac{١٧}{٣}$ (ب) $\sqrt{\frac{١٧}{٣}}$ (جـ) $\frac{\sqrt{١٧}}{٣}$ (د) $٣\sqrt{١٧}$

---

**٤** قياس الزاوية بين المستويين ٢ س − ٤ ص + ٤ ع = ٣ ، ٥ س + ٢ ع − ص = ٥

تساوى .............. لأقرب دقيقة.

(أ) $٩٣^{\circ}\ ٢٩'$ (ب) $٨٦^{\circ}\ ٣١'$ (جـ) $٤٧^{\circ}\ ٥٩'$ (د) $٧٤^{\circ}\ ٥٩'$

---

**٥** إذا كان أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة طول نصف قطرها نق سم حيث أَ ، بَ ، حَ أطوال أضلاع المثلث

فإن : $\begin{vmatrix} \text{نق جا أ} & ٣ & \text{أَ} \\ \text{نق جا ب} & ٦ & \text{بَ} \\ \text{نق جا حـ} & ٩ & \text{حَ} \end{vmatrix} = ..............$

(أ) ٣ نق (ب) ٦ (جـ) ٩ نق (د) صفر

---

**٦** مضلع منتظم له ٢٠ رأسًا ، فإن عدد القطع المستقيمة التى طرفا كل منها رأسان غير متتاليين من رؤوس هذا المضلع هو ..............

(أ) ١٩٠ (ب) ١٧٠ (جـ) ٣٨٠ (د) ٣٦٠

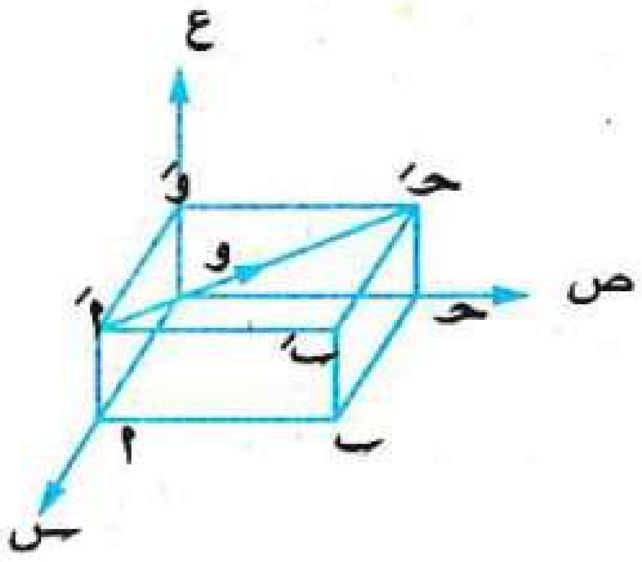
**٧** معادلة الكرة التى تمر برؤوس المثلث أ ب حـ حيث أ (٦ ، ٠ ، ٠) ، ب (٠ ، ٦ ، ٠) ، حـ (٠ ، ٠ ، ٦) ، ومركزها هو نقطة تقاطع متوسطات المثلث أ ب حـ هى ..............

(أ) (س − ٢)$^{٢}$ + (ص − ٢)$^{٢}$ + (ع − ٢)$^{٢}$ = $\sqrt{٢٤}$ (ب) (س − ٣)$^{٢}$ + (ص − ٣)$^{٢}$ + (ع − ٣)$^{٢}$ = ٢٤

(جـ) (س − ٣)$^{٢}$ + (ص − ٣)$^{٢}$ + (ع − ٣)$^{٢}$ = $\sqrt{٢٤}$ (د) (س − ٢)$^{٢}$ + (ص − ٢)$^{٢}$ + (ع − ٢)$^{٢}$ = ٢٤

---

**٨** **فى الشكل المقابل :**



أ ب حـ و أَ بَ حَ وَ متوازى مستطيلات

، إذا كانت النقطة بَ (٨ ، ٧ ، ٣)

فإن : $\overleftarrow{\text{أ حَ}}$ = ..............

(أ) − ٨ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٣ $\overleftarrow{\text{ع}}$ (ب) ٧ $\overleftarrow{\text{ص}}$ + ٣ $\overleftarrow{\text{ع}}$

(جـ) − ٨ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٧ $\overleftarrow{\text{ص}}$ (د) ٨ $\overleftarrow{\text{س}}$ − ٧ $\overleftarrow{\text{ص}}$

---

**٩** إذا كانت {$\overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ع}}$} هى مجموعة يمينية من متجهات الوحدة

، $\overleftarrow{\text{أ}}$ = $\overleftarrow{\text{س}}$ × ٢ $\overleftarrow{\text{ص}}$ + ٢ $\overleftarrow{\text{س}}$ × $\overleftarrow{\text{ع}}$ + $\overleftarrow{\text{ص}}$ × $\overleftarrow{\text{ع}}$ فإن متجه الوحدة فى اتجاه أ هو ..............

(أ) ($\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$) (ب) ($\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{-٢}{٣}$) (جـ) ($\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$) (د) ($\frac{١}{٣}$ ، $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$)

---

**١٠** إذا كان المستويان م س − ص + ٣ ع = ٥ ، ٤ س − م ص + ٦ ع = ١ متوازيين

فإن : م = ..............

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ٣ (د) −٣

---

**١١** إذا كانت المصفوفة $\begin{pmatrix} ٢ & \text{أ}^{٢} \\ \text{ب}^{٢} & ٨ \end{pmatrix}$ مصفوفة منفردة حيث أ ∈ ح ، ب ∈ ح فإن : أ ب = ..............

(أ) ± ٤ (ب) ± ٨ (جـ) ± ١٦ (د) ± ٢

---

**١٢** إذا كان ع عددًا مركبًا حيث ع = ت − ٦ فإن الصورة المثلثية للعدد المركب ع + ٥ هى ..............

حيث ت$^{٢}$ = −١

(أ) $\sqrt{٢}$ (جتا ($\frac{٣\pi}{٤}$) + ت جا ($\frac{٣\pi}{٤}$)) (ب) $\sqrt{٢}$ (جتا ($\frac{-\pi}{٤}$) + ت جا ($\frac{-\pi}{٤}$))

(جـ) $\sqrt{٢}$ (جتا ($\frac{\pi}{٤}$) + ت جا ($\frac{\pi}{٤}$)) (د) $\sqrt{٢}$ (جتا ($\frac{-٣\pi}{٤}$) + ت جا ($\frac{-٣\pi}{٤}$))

**١٣** معامل الحد الثالث فى مفكوك $(س^{٢} + ٩ س + \frac{٩^{٢}}{٤})^{٤}$ هو ............ حسب قوى س التنازلية حيث $٩ \in ص$

أ) $٧ ٩^{٢}$ ب) $\frac{١}{٧} ٩^{٢}$ ج) $\frac{٣}{٢} ٩^{٢}$ د) $\frac{٢}{٣} ٩^{٢}$

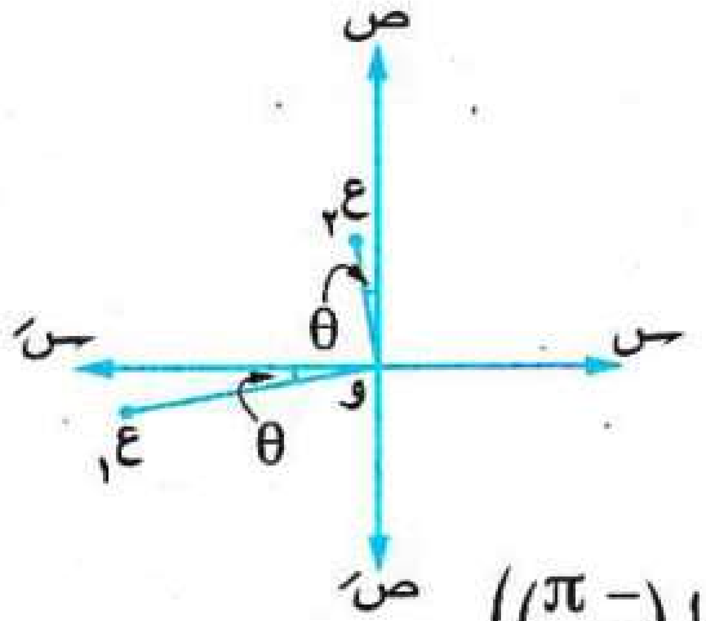
---

**١٤** الشكل المقابل يوضح التمثيل البيانى للعددين المركبين $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$

فى مستوى أرجاند إذا كان $|ع_{١}| = ٢ |ع_{٢}|$

فإن العدد المركب ع حيث $ع = \frac{ع_{٢}}{ع_{١}}$

على الصورة المثلثية هو ............



أ) $\frac{١}{٢} \left(جتا\left(\frac{\pi}{٢}\right) + ت\ جا\left(\frac{\pi}{٢}\right)\right)$ ب) $٢ \left(جتا\left(\frac{-\pi}{٢}\right) + ت\ جا\left(\frac{-\pi}{٢}\right)\right)$

ج) $\frac{١}{٢} \left(جتا\left(\frac{-\pi}{٢}\right) + ت\ جا\left(\frac{-\pi}{٢}\right)\right)$ د) $٢ \left(جتا\left(\frac{\pi}{٢}\right) + ت\ جا\left(\frac{\pi}{٢}\right)\right)$

---

**١٥** إذا كانت ٩ مصفوفة مربعة على النظم ٣ × ٣ ، وكانت $٩^{-١} = \frac{-١}{١٦} \begin{pmatrix} ٢ & -٨ & ٢ \\ -٤ & ٨ & -٤ \\ -٦ & ٣٢ & -٢٢ \end{pmatrix}$ ، $|٩| = -١٦$

فإن مصفوفة المرافقات للمصفوفة ٩ هى ............

أ) $\begin{pmatrix} ٢ & -٤ & -٦ \\ -٨ & ٨ & ٣٢ \\ ٢ & -٤ & -٢٢ \end{pmatrix}$ ب) $-١٦ \begin{pmatrix} ٢ & -٨ & ٢ \\ -٤ & ٨ & -٤ \\ -٦ & ٣٢ & -٢٢ \end{pmatrix}$

ج) $\begin{pmatrix} ٢ & -٨ & ٢ \\ -٤ & ٨ & -٤ \\ -٦ & ٣٢ & -٢٢ \end{pmatrix}$ د) $١٦ \begin{pmatrix} ٢ & -٤ & -٦ \\ -٨ & ٨ & ٣٢ \\ ٢ & -٤ & -٢٢ \end{pmatrix}$

---

**١٦** إذا كان الحدان الأوسطان فى مفكوك $(١ + س)^{٩٩} (١ - س + س^{٢})^{٩٩}$ متساويين

فإن : س = ............ حيث $س \in ح$

أ) ٢ ب) ١ ج) −٢ د) −١

---

**١٧** إذا كانت $صفر^{\circ} \leq س \leq ٩٠^{\circ}$ وكان $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ١ - ٢ جا س \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٢ جا س - ١ & ٠ & ٥ \end{vmatrix} =$ صفر ،

فإن : س = ............°

أ) ٣٠ ب) ٦٠ ج) ٤٥ د) ٩٠

---

**١٨** إذا كان : $^{ن}ق_{١} + ٢\ ^{ن}ق_{٢} + ^{ن}ق_{٣} = ٣٥$ ، $^{١٠}ل_{ر} = ٧٢٠$ فإن : $\underline{|ن - ر}$ = ............

أ) ١ ب) ٢ ج) ٦ د) ٢٤

**١٩** إذا كانت أ ، ب ، حـ ثلاث نقاط فى الفراغ حيث أ (٣ ، ٤ ، ٨) ، ب (١ ، ٢ ، ٧) ، حـ (٣ ، صفر ، ٦)
فإن : ……………

(أ) ٢ أب = ب حـ　(ب) أب = ٢ ب حـ　(ج) أب = ب حـ　(د) ٣ أب = ب حـ

---

**٢٠** المعادلات البارامترية للمستقيم الذى معادلته الإحداثية ص = ٥ ، $\frac{\text{س} - ٤}{٣} = \frac{٢\,\text{ع} + ١}{٦}$ هى ……………

(أ) س = ٣ + ٤ ك ، ص = ٥ ، ع = ٣ − $\frac{١}{٢}$ ك　(ب) س = ٤ − ٣ ك ، ص = ٥ ، ع = ٣ + $\frac{١}{٢}$ ك

(ج) س = ٤ + ٣ ك ، ص = ٥ ، ع = ٣ + $\frac{١}{٢}$ ك　(د) س = ٤ + ٣ ك ، ص = ٥ ، ع = − $\frac{١}{٢}$ + ٣ ك

---

**٢١** نظام المعادلات الخطية : س − ص + ع = ٢ ، ٢ س + ٣ ص − ع = ٥
، ٣ س − ٥ ص + ٢ ع = − ١ ……………

(أ) له حل وحيد.　(ب) له عدد لا نهائى من الحلول.

(ج) ليس له حل على الإطلاق.　(د) له حل وحيد هو الحل الصفرى.

---

**٢٢** فى مفكوك $\left(\text{س} + \frac{٢}{\text{س}}\right)^{\text{ن}+١}$ حسب قوى س التنازلية ، إذا كان الحد الخالى من س هو $\text{ح}_{٧}$
فإن : ن = ……………

(أ) ٥　(ب) ١٢　(ج) ٧　(د) ١١

---

**٢٣** إذا كانت : ع = ٣ $\left(\text{جتا}\left(\frac{\pi}{٤}\right) + \text{ت جا}\left(\frac{\pi}{٤}\right)\right)$　فإن : $\frac{١}{\text{ع}}$ = ……………

(أ) ٩ ع　(ب) $\frac{١}{٣}$ ع　(ج) ٣ ع　(د) $\frac{١}{٩}$ ع

---

**٢٤** إذا كان المستقيمان :
$\text{ل}_{١}$ : $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (١ ، −٢ ، ٣) + ك (٣ ، ن ، −ن) ، $\text{ل}_{٢}$ : س = $\frac{\text{ص} - ٢}{٢} = \frac{\text{ع} - ٣}{٥}$ متعامدين
فإن : ن = ……………

(أ) −١　(ب) ١　(ج) ٢　(د) ٣

---

**٢٥** إذا كان ع عددًا مركبًا حيث ع − ٢ = ت (ع + ٢) فإن الجذرين التربيعين للعدد ع هما ……………
حيث $\text{ت}^{٢} = -١$

(أ) ± (١ − ت)　(ب) ± (١ + ت)　(ج) ± (٢ − ت)　(د) ± (٢ + ت)

## ٧ دور أول ٢٠٢٣

### أولًا أسئلة الاختيار من متعدد (كل سؤال درجة واحدة)

**١** إذا كان المستويان : $\overleftarrow{ر} \cdot (١ ، ٢ ، -م) = ٥$ ، م س + ٦ ص − ٩ ع = ١ متوازيين

فإن : م = ..............

(أ) −٤ (ب) −٣ (جـ) ٤ (د) ٣

---

**٢** إذا كانت أ مصفوفة المعاملات لنظام المعادلات : ٣ س + ص + ع = ٥ ، س + ص + ع = صفر

، ٤ س + ٢ ص + ٢ ع = ٧ فإن مرتبة المصفوفة أ تساوى ..............

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) صفر

---

**٣** إذا كان : $\begin{vmatrix} ٣ & ٠ & ٠ \\ ٠ & \text{س} & ٠ \\ ٠ & ٠ & \text{س} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٤ & \text{أ} & ٤ \\ ٠ & -٣ & \text{ب} \\ ٤ & \text{أ} & ٠ \end{vmatrix}$ حيث أ ∈ ح* ، ب ∈ ح*

فإن : س = ± ..............

(أ) ٤ (ب) ١٦ (جـ) ٨ (د) ٢

---

**٤** في مفكوك $\left(\text{س}^{٢} + \frac{١}{\text{س}}\right)^{١٣}$ حسب قوى س التنازلية ، يكون مجموع معاملي الحدين الأوسطين يساوى ..............

(أ) $^{١٣}\text{ق}_{٧}$ (ب) $^{١٤}\text{ق}_{٦}$ (جـ) $^{١٤}\text{ق}_{٧}$ (د) $^{١٣}\text{ق}_{٥}$

---

**٥** إذا كان مرافق العدد المركب ع هو $\overline{ع} = -١ + \sqrt{٣}\,ت$ فإن الصورة المثلثية للعدد المركب ع هى ..............

(أ) $٤ \left(\text{جتا} \left(\frac{-٢\pi}{٣}\right) + ت\ \text{جا} \left(\frac{-٢\pi}{٣}\right)\right)$

(ب) $٢ \left(\text{جتا} \left(\frac{-٢\pi}{٣}\right) + ت\ \text{جا} \left(\frac{-٢\pi}{٣}\right)\right)$

(جـ) $٢ \left(\text{جتا} \frac{٢\pi}{٣} + ت\ \text{جا} \frac{٢\pi}{٣}\right)$

(د) $٤ \left(\text{جتا} \frac{٢\pi}{٣} + ت\ \text{جا} \frac{٢\pi}{٣}\right)$

---

**٦** إذا كانت θ هى قياس الزاوية بين المستويين : $\overleftarrow{ر} \cdot (٢ ، -٢ ، ٤) = ٥$ ، ٢ س + ص − ٢ ع = ٣

فإن : جا θ = ..............

(أ) $-\frac{\sqrt{٦}}{٦}$ (ب) $\frac{\sqrt{٦}}{٦}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٣٠}}{٦}$ (د) $-\frac{\sqrt{٣٠}}{٦}$

**٧** إذا كان : أ ب حـ ء متوازى أضلاع ، حيث أ (٢ ، ٣ ، −١) ، ب (٠ ، ٥ ، ٣) ، حـ (−٢ ، −٣ ، ١)

فإن الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ هى ..............

(أ) $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (−٢ ، −٣ ، ١) + ك (−١ ، ١ ، ٢)

(ب) $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (−٢ ، −٣ ، ١) + ك (٢ ، ٣ ، −١)

(جـ) $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (−٢ ، −٣ ، ١) + ك (٠ ، ٥ ، ٣)

(د) $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (−٢ ، ٢ ، ٤) + ك (−٢ ، −٣ ، ١)

---

**٨** إذا كانت المتجهات : $\overleftarrow{\text{أ}}$ = م $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٣ $\overleftarrow{\text{ص}}$ − ٢ $\overleftarrow{\text{ع}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = ك $\overleftarrow{\text{ص}}$ + ٥ $\overleftarrow{\text{ع}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ}}$ = ن $\overleftarrow{\text{ع}}$ تمثل ثلاثة أحرف متجاورة فى متوازى السطوح الذى حجمه يساوى ٤٠ وحدة مكعبة

فإن : م ك ن = ± ..............

(أ) ١٠　(ب) ٤٠　(جـ) ٢٠　(د) ٨٠

---

**٩** إذا كان : $^{\text{ن}+2}\text{ل}_{\text{س}}$ = (ن$^{3}$ − ٤ ن) (ن$^{2}$ − ١) فإن : س يمكن أن تساوى ..............

(أ) ٥　(ب) ٣　(جـ) ٢　(د) ١

---

**١٠** إذا كانت : ١ ، ω ، ω$^{2}$ هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فإن : $\left(\frac{\text{أ}}{\omega} - \text{أ} + \text{أ}\,\omega^{7}\right)^{4}$ = ..............

حيث أ ≠ صفر

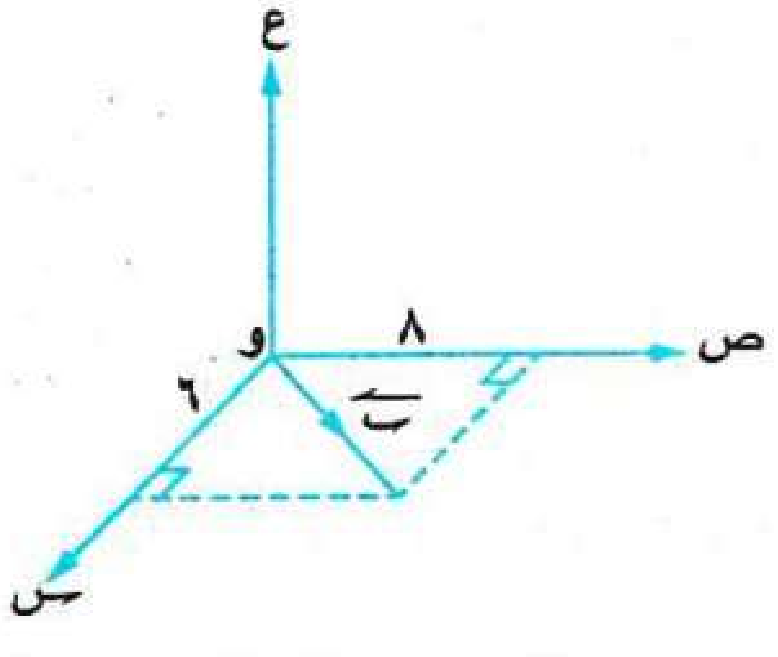
(أ) ٨ أ$^{4}$　(ب) ١٦ أ$^{4}$　(جـ) ٦ أ$^{4}$　(د) ٢ أ$^{4}$

## ثانيًا أسئلة الاختيار من متعدد (كل سؤال درجتان)

**١١** إذا كان الشكل المقابل

يمثل المتجه $\overleftarrow{\text{ب}}$ ، وكان المتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (٣ ، ٤ ، ١٢)

فإن : ‖ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ‖ = .............. وحدة طول.



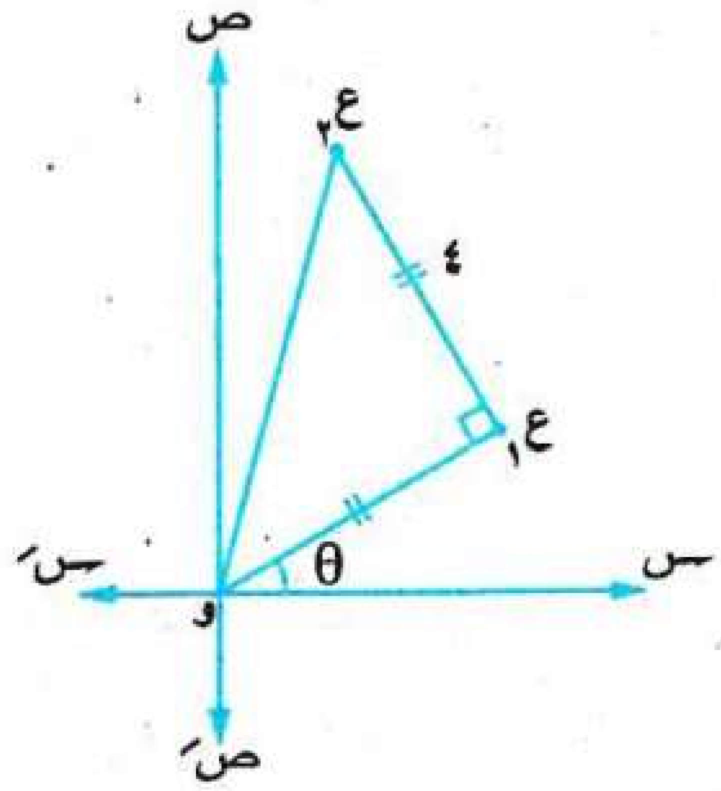
(أ) ٥　(ب) ١٣

(جـ) ١٢　(د) ١٠

---

**١٢** إذا كان الشكل المقابل يوضح العددين المركبين ع$_{1}$ ، ع$_{2}$

فى مستوى أرجاند فإن : $\frac{\text{ع}_2}{\text{ع}_1}$ = ..............



(أ) ٤ هـ$^{\frac{-\pi}{4}\text{ت}}$　(ب) $\sqrt{2}$ هـ$^{\frac{-\pi}{4}\text{ت}}$

(جـ) ٤ هـ$^{\frac{\pi}{4}\text{ت}}$　(د) $\sqrt{2}$ هـ$^{\frac{\pi}{4}\text{ت}}$

**١٣** إذا كانت م هى نقطة منتصف $\overline{\text{بح}}$ ، حيث أ (−٢ ، ٠ ، ٣) ، ب (١ ، ٠ ، ٦) ، ح (٥ ، ٤ ، ٢)
فإن معادلة الكرة التى مركزها م وتمر بالنقطة أ هى ..............

ⓐ (س − ٣)$^{٢}$ + (ص − ٢)$^{٢}$ + (ع − ٤)$^{٢}$ = $\sqrt{٣٠}$　ⓑ (س + ٢)$^{٢}$ + ص$^{٢}$ + (ع − ٣)$^{٢}$ = ٣٠

ⓒ (س − ٣)$^{٢}$ + (ص − ٢)$^{٢}$ + (ع − ٤)$^{٢}$ = ٣٠　ⓓ (س + ٢)$^{٢}$ + ص$^{٢}$ + (ع − ٣)$^{٢}$ = $\sqrt{٣٠}$

---

**١٤** إذا كان الحد السابع فى مفكوك $\left(\frac{\text{م}}{\text{س}^{٢}} - \frac{\text{س}^{٢}}{\text{م}}\right)^{٣\text{ن}}$ حسب قوى س التصاعدية هو الحد الخالى من س
(حيث م عدد حقيقى موجب) فإن قيمة هذا الحد = ..............

ⓐ −١٢　ⓑ ٩٢٤　ⓒ ٤ م　ⓓ −٩٢٤ م$^{١٢}$

---

**١٥** إذا كان : ع = ٤ $\left(\text{جا}\frac{\pi}{٦} - \text{ت جتا}\frac{\pi}{٦}\right)$ حيث ت$^{٢}$ = −١ فإن أحد الجذرين التربيعين للعدد ع هو ..............

ⓐ $\sqrt{٣}$ + ت　ⓑ $\sqrt{٣}$ + ٢ ت　ⓒ $\sqrt{٣}$ − ت　ⓓ $\sqrt{٣}$ − ٢ ت

---

**١٦** إذا كان لدينا مضلع محدب عدد أضلاعه ن ضلعًا وعدد أقطاره = ٧٤٠ قطرًا　فإن : $^{\text{ن}}\text{ل}_{٣}$ = ..............

ⓐ ٩٨٨٠　ⓑ ٨٩٨٠　ⓒ ٨٨٩٠　ⓓ ٩٠٨٨

---

**١٧** معادلة المستوى الذى يحتوى المستقيم الذى معادلته : س = ص = $\frac{١}{٢}$ ع ويمر بالنقطة (١ ، ٢ ، ٣)
هى ..............

ⓐ $\overleftarrow{\text{ر}}$ . (١ ، −١ ، −١) = صفر　ⓑ س + ٢ ص + ٣ ع = صفر

ⓒ س − ص + ع = صفر　ⓓ $\overleftarrow{\text{ر}}$ . (١ ، ١ ، −١) = صفر

---

**١٨** إذا كان : ح$_{١٥}$ هو الحد الأوسط فى مفكوك $\left(\text{أ}\sqrt{\text{س}} - \frac{١}{\text{أ}\sqrt{\text{س}}}\right)^{\text{ن}+٢}$ حسب قوى س التنازلية ،
فإن معامل ح$_{١٦}$ = .............. عند أ = $\frac{١}{٢}$

ⓐ −٤ × $^{٢٨}\text{ق}_{١٣}$　ⓑ ٤ × $^{٢٨}\text{ق}_{١٣}$　ⓒ −٤ × $^{٢٦}\text{ق}_{١٥}$　ⓓ ٤ × $^{٢٦}\text{ق}_{١٥}$

## ثالثًا　الأسئلة المقالية (كل سؤال درجتان)

**١٩** إذا كانت المصفوفة = $\begin{pmatrix} −٤ & ٥ & −٢ \\ −٦ & −٣ & −٣ \\ −٧ & −٧ & ٧ \end{pmatrix}$ هى مصفوفة المرافقات لمصفوفة المعاملات أ لنظام معادلات
وكان $|\text{أ}|^{٢} = |\text{أ}^{\text{مل}}|$ ، $|\text{أ}|$ > صفر فأوجد مجموعة حل المعادلة المصفوفية أ $\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٩ \\ ١٥ \\ ١٢ \end{pmatrix}$

---

**٢٠** أوجد طول العمود المرسوم من النقطة ب (٥ ، −١ ، ٠) على المستقيم ل
، الذى معادلته $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (٥ ، −١ ، ٥) + ك (٢ ، ٢ ، ١)

# ٨ دور ثان ٢٠٢٣

## أولًا أسئلة الاختيار من متعدد (كل سؤال درجة واحدة)

**١** الحد الخالى من س فى مفكوك $\left(\text{س} - \frac{١}{\text{س}}\right)^{٨}$ هو ...............

(أ) $\text{ح}_{٣}$ (ب) $\text{ح}_{٤}$ (ج) $\text{ح}_{٥}$ (د) $\text{ح}_{٦}$

---

**٢** إذا كان (س − ٢) هو أحد عوامل المحدد $\begin{vmatrix} ٣ & \text{س} + ٣ & ٠ \\ \text{ك} & \text{ك} - ٤ & ٤ - ٢\text{س} \\ ١ & ١ & ٢ \end{vmatrix}$ فإن : ك = ...............

(أ) −٦ (ب) −٢ (ج) ٢ (د) ٦

---

**٣** إذا كان المستويان : ٢ س + ص + م ع = ٥ ، ك س + ص + ٦ ع = ٣ متوازيين فإن : ك م = ...............

(أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٢

---

**٤** إذا كانت السعة الأساسية للعدد المركب ع تساوى $\left(\frac{\pi}{٦}\right)$ ومقياسه ١ وحدة طول ، فإن العدد المركب ع على الصورة الجبرية هو ...............

(أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢}\text{ت}$ (ب) $\frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢}\text{ت}$ (ج) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢}\text{ت}$ (د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢}\text{ت}$

---

**٥** إذا كان $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & \text{ن} \\ ٠ & \text{ن} & ٠ \\ \text{ن} & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ ، فإن : $|\text{أ}|\,|٢\,\text{أ}|$ = ............... حيث ن ≠ ٠

(أ) $٢\text{ن}^{٦}$ (ب) $\text{ن}^{٦}$ (ج) $٦\text{ن}^{٦}$ (د) $٨\text{ن}^{٦}$

---

**٦** إذا كان : $^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = ٢ \times ٥ \times ١١ \times ١٢$ فإن : ن يمكن أن تكون ...............

(أ) ٥ (ب) ١٠ (ج) ١١ (د) ١٢

---

**٧** إذا كانت : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (م ، −٣ ، ١) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (١ ، ٠ ، −٢) ، $\overrightarrow{\text{حـ}}$ = (−٢ ، −١ ، ٤) تمثل ثلاثة أحرف متجاورة فى متوازى سطوح حجمه يساوى ٧ وحدات مكعبة فإن : م = ...............

(أ) −٤ أو ٣ (ب) −٣ أو ٤ (ج) ٢ أو −٢ (د) ٥ أو −١

**٨** قياس الزاوية المحصورة بين المستويين : س + ع − ٧ = ٠
، ٣ (س − ١) − ٦ (ص − ٢) + ٦ (ع + ١) = ٠ يساوى ..............°

(أ) ٣٠ (ب) ٤٥ (ج) ٦٠ (د) ٩٠

---

**٩** كان ع عددًا مركبًا ، ω هى أحد الجذور التكعيبية للواحد الصحيح ، $ع (١ - ω - ω^{٢}) = \frac{٢}{١ + ω}$
فإن : ع = ..............

(أ) $-ω$ (ب) $١ + ω$ (ج) $١ - ω^{٢}$ (د) $ω$

---

**١٠** معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (١ ، −٢ ، ٤) ويوازى المستقيم : س = ٢ + ٣ ك ، ص = ٣ − ك
، ع = −١ + ٤ ك هى ..............

(أ) $\frac{س - ١}{٢} = \frac{ص + ٢}{٣} = \frac{ع - ٤}{-١}$ (ب) $\frac{س + ١}{٣} = \frac{ص - ٢}{-١} = \frac{ع + ٤}{٤}$

(ج) $\frac{س - ١}{٣} = \frac{ص + ٢}{-١} = \frac{ع - ٤}{٤}$ (د) $\frac{س - ١}{-٣} = \frac{ص + ٢}{١} = \frac{ع - ٤}{-١}$

## ثانيًا أسئلة الاختيار من متعدد (كل سؤال درجتان)

**١١** إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (-٣ ، ٠ ، ٤)$ فإن جيوب تمام زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$ هى ..............

(أ) $(\frac{٣}{٥} ، ٠ ، \frac{-٤}{٥})$ (ب) $(\frac{٣}{٥} ، ٠ ، \frac{٤}{٥})$ (ج) $(\frac{-٣}{٥} ، ٠ ، \frac{٤}{٥})$ (د) $(\frac{-٣}{٥} ، ٠ ، \frac{-٤}{٥})$

---

**١٢** إذا كان : $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$ عددين مركبين ، حيث : $ع_{١} = هـ^{٢ + \frac{π}{٢} ت}$ ، $ع_{٢} = هـ^{٢ - \frac{π}{٢} ت}$
فإن : $\frac{ع_{١}}{ع_{٢}} =$ ..............

(أ) ت (ب) ١ (ج) − ت (د) −١

---

**١٣** إذا كان : $ع = \frac{٢ + ٤ ت}{٢ - ت}$ حيث $ت^{٢} = -١$ فإن الصورة المثلثية للعدد المركب $ع^{٦}$ = ..............

(أ) $٦٤ \left(جتا \frac{π}{٢} + ت جا \frac{π}{٢}\right)$ (ب) $٦٤ (جتا π + ت جا π)$

(ج) $٣٢ (جتا π + ت جا π)$ (د) $٣٢ \left(جتا \left(\frac{-π}{٢}\right) + ت جا \left(\frac{-π}{٢}\right)\right)$

---

**١٤** إذا كان : $م_{١}$ (٢ ، ٣ ، ٤) ، $م_{٢}$ (٤ ، −٣ ، ٦) هما مركزى كرتين متماستين من الخارج وقطراهما متساويين فى الطول فإن معادلة الكرة التى مركزها $م_{٢}$ هى ..............

(أ) $(س - ٤)^{٢} + (ص - ٣)^{٢} + (ع - ٦)^{٢} = ٤٤$ (ب) $(س - ٢)^{٢} + (ص - ٣)^{٢} + (ع - ٤)^{٢} = \sqrt{١١}$

(ج) $(س - ٤)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} + (ع - ٦)^{٢} = ١١$ (د) $(س - ٤)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} + (ع - ٦)^{٢} = ٢\sqrt{١١}$

**١٥** عدد طرق تكوين عدد مكون من أربعة أرقام مختلفة بحيث يكون أكبر من ٦٠٠٠ من مجموعة الأرقام {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} يساوى ..............

ⓐ ٦٠    (ب) ٨٠    (جـ) ١٠٠    (د) ١٢٠

---

**١٦** عدد الحدود فى مفكوك $(س^{٢} - ٦ س + ٩)^{٢١}$ تساوى .............. حدًّا

(أ) ٤٣    (ب) ٤٢    (جـ) ٢٢    (د) ٢١

---

**١٧** المستقيم الذى معادلته : $\frac{س - ١}{٢} = \frac{ص + ٢}{٣} = \frac{ع - ١}{٤}$ يقطع المستوى الذى معادلته : ٢ س + ص – ع = ٥ فى النقطة ..............

(أ) (٢ ، ٣ ، ٩)    (ب) (٥ ، ٤ ، ٩)    (جـ) (٥ ، –٢ ، ٩)    (د) (٥ ، ٤ ، ٥)

---

**١٨** فى مفكوك $(١ + س)^{١٧}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان معامل $ح_{٢ ر + ٢}$ = معامل $ح_{ر + ٤}$ حيث ر ≠ ١ فإن : قيمة $\underline{|ر}$ = ..............

(أ) ٧٢٠    (ب) ١٢٠    (جـ) ٢٤    (د) ٦

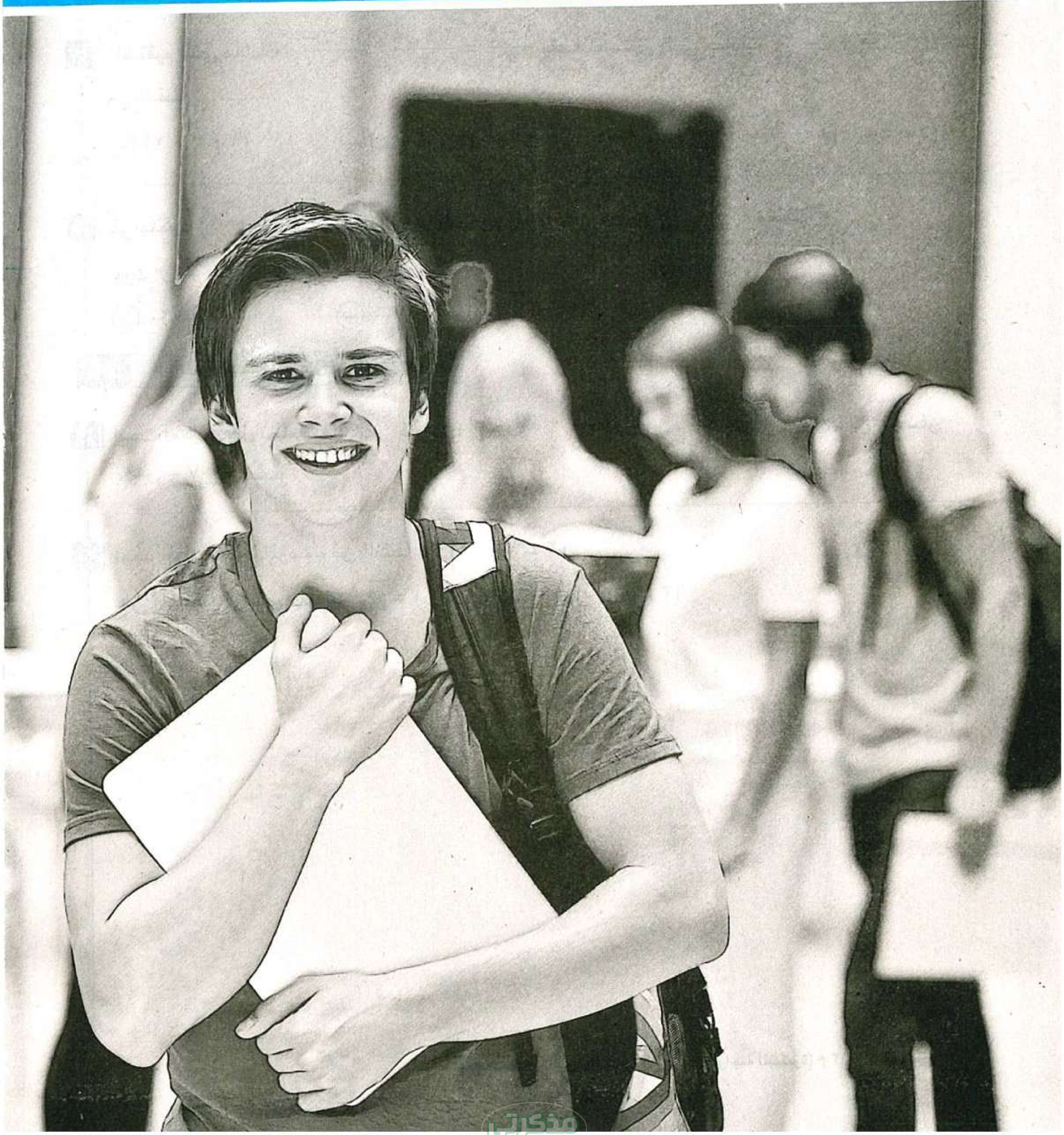
## ثالثًا الأسئلة المقالية (كل سؤال درجتان)

**١٩** ابحث إمكانية حل نظام المعادلات : ٤ س + ٣ ص + ٢ ع = صفر ، ٢ س + ص – ٤ ع = صفر ، س – ٧ ع = صفر

---

**٢٠** أوجد طول العمود المرسوم من النقطة : أ (١ ، –١ ، ٢) على المستقيم ل الذى معادلته : $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، ٣ ، ٥) + ك (٠ ، ٠ ، ٣)

# الإجابـــات



# إجابات اختبار على الوحدة الأولى في الجبر

**١** (جـ)

**الحل:**

∵ عدد الحدود فردى

∴ أكبر معامل هو معامل الحد الأوسط = ${}^{٢٤}ق_{١٢}$

---

**٢** (جـ)

**الحل:**

آحاد عشرات مئات آلاف

عدد الطرق = ٥ × ٥ × ٥ × ٣ = ٣٧٥

---

**٣** (جـ)

**الحل:**

$\frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن - ٥}} = ٦٠ \times \frac{\underline{|ن - ١}}{\underline{|ن - ٤}}$

∴ $\frac{ن\,\underline{|ن - ١}}{\underline{|ن - ٥}} = ٦٠ \times \frac{\underline{|ن - ١}}{(ن - ٤)\,\underline{|ن - ٥}}$

∴ $ن = \frac{٦٠}{ن - ٤}$ ∴ $ن^٢ - ٤ن - ٦٠ = ٠$

∴ $(ن - ١٠)(ن + ٦) = ٠$ ∴ $ن = ١٠$

---

**٤** (أ)

**الحل:**

الحد الخامس من النهاية = $ح_{١٢ - ٥ + ١}$ من البداية = $ح_٩$

، $ح_٩ = {}^{١٢}ق_٨ \left(\frac{س^٢}{٢}\right)^٤ \left(-\frac{٢}{س^٢}\right)^٨$

$= ٤٩٥ \times \frac{س^{١٢}}{٢^٤} \times \frac{٢^٨}{س^{١٦}} = \frac{٧٩٢٠}{س^٤}$

---

**٥** (جـ)

**الحل:**

$ح_{ر+١} = {}^{٦}ق_ر (س^٢)^{٦-ر} \left(\frac{٢}{س}\right)^ر$

$= {}^{٦}ق_ر\, س^{١٢ - ٣ر} \times ٢^ر$

الحد الخالى من س

∴ $١٢ - ٣ر = ٠$ ∴ $ر = ٤$

∴ $ح_٥$ هو الحد الخالى من س ، $ح_٥ = {}^{٦}ق_٤ \times ٢^٤ = ٢٤٠$

، $ح_٤$ هو الحد الأوسط ، $ح_٤ = {}^{٦}ق_٣\, س^٣ \times ٨ = ١٦٠\, س^٣$

∴ النسبة بين الحد الخالى من س ومعامل الحد الأوسط

$= \frac{٢٤٠}{١٦٠} = \frac{٣}{٢}$

---

**٦** (أ)

**الحل:**

∵ ${}^{ن+٢}ل_ر : {}^{ن+٢}ق_ر = ٢ : ١$

∴ ${}^{ن+٢}ل_ر \times \frac{\underline{|ر}}{{}^{ن+٢}ل_ر} = \frac{٢}{١}$

∴ $\underline{|ر} = ٢$ ∴ $ر = ٢$

∵ ${}^{ن}ق_٣ : {}^{ن}ق_٢ = ٥ : ٣$

∴ $\frac{ن - ٣ + ١}{٣} = \frac{٥}{٣}$ ∴ $ن - ٢ = ٥$

∴ $ن = ٧$

∴ ${}^{٢ن}ق_{ن-ر} = {}^{٢(٧)}ق_{(٧)-(٢)} = {}^{١٤}ق_٥ = ٢٠٠٢$

---

**٧** (ب)

**الحل:**

$[(س + ٤ص)^٣ (س - ٤ص)^٣]^٢$

$= [(س + ٤ص)(س - ٤ص)]^٦ = (س^٢ - ١٦ص^٢)^٦$

∴ عدد حدود المفكوك = ٧ حدود

---

**٨** (جـ)

---

**٩** (د)

**الحل:**

∵ $\frac{ح_٤}{ح_٥} = \frac{٢٥ ح_٧}{ح_٦}$

∴ $\frac{٤}{٨ - ٤ + ١} \times \frac{\sqrt{س}}{\frac{١}{س}} = ٢٥ \times \frac{٨ - ٦ + ١}{٦} \times \frac{\frac{١}{س}}{\sqrt{س}}$

∴ $\frac{٤}{٥} \times س\sqrt{س} = \frac{٢٥}{٢} \times \frac{١}{س\sqrt{س}}$

∴ $\frac{٤}{٥} \times س^٣ = \frac{٢٥}{٢}$

∴ $س^٣ = \frac{١٢٥}{٨}$ $س = \frac{٥}{٢}$

---

**١٠** (ب)

**الحل:**

$س^ن \left(\frac{١}{س} - ٢\right)^ن = \left(س\left(\frac{١}{س} - ٢\right)\right)^ن = (١ - ٢س)^ن$

∵ $ح_٥ = ٢٠١٦\, س^٤$

∴ ${}^{ن}ق_٤ \times (-٢س)^٤ = ٢٠١٦\, س^٤$

∴ ${}^{ن}ق_٤ = ١٢٦ = {}^{٩}ق_٤$ ∴ $ن = ٩$

∴ $\frac{\text{معامل } ح_٣}{\text{معامل } ح_٤} = \frac{٣}{٩ - ٣ + ١} \times \frac{١}{-٢} = \frac{-٣}{١٤}$

---

**١١** (د)

**الحل:**

$\frac{{}^{١٣}ق_ر + {}^{١٣}ق_{ر-١}}{{}^{١٣}ق_{ر+١} + {}^{١٣}ق_ر} = \frac{{}^{١٤}ق_ر}{{}^{١٤}ق_{ر+١}} = \frac{ر + ١}{١٤ - ر - ١ + ١} = ٢$

∴ $٢٨ - ٢ر = ر + ١$

∴ $٣ر = ٢٧$ ∴ $ر = ٩$

---

**١٢** (ب)

**الحل:**

الحد الأوسط = $ح_{\frac{١٠}{٢} + ١} = ح_٦$

∴ ${}^{١٠}ق_٥\, س^٥ \left(\frac{م}{س^٢}\right)^٥ = \frac{٦٣}{٨}$

∴ $٢٥٢\, م^٥ س^{-٥} = \frac{٦٣}{٨}$ ∴ $\frac{م^٥}{س^٥} = \frac{١}{٣٢}$

∴ $\frac{م}{س} = \frac{١}{٢}$ ∴ $\frac{س}{م} = ٢$

---

**١٣** (جـ)

**الحل:**

$ح_{ر+١} = {}^{١١}ق_ر \left(\frac{س^٣}{٢}\right)^{١١-ر} \times \left(\frac{-٤}{س}\right)^ر$

$= {}^{١١}ق_ر \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{١١-ر} \times (-٤)^ر \times س^{٣٣ - ٤ر}$

، بوضع $٣٣ - ٤ر = ٥$ ∴ $ر = ٧$

∴ معامل $س^٥$ هو ${}^{١١}ق_٧ \left(\frac{١}{٢}\right)^٤ (-٤)^٧ = -٣٣٧٩٢٠$

---

**١٤** (أ)

**الحل:**

نضع س = ١

∴ مجموع معاملات حدود مفكوك $(١ + س - ٢س^٢)^{٢٠٢١}$

$= (-١)^{٢٠٢١} = -١$

---

**١٥** (ب)

**الحل:**

الحد = ${}^{٥}ل_٢ + {}^{٥}ل_٣ = ٨٠$

---

**١٦** (جـ)

**الحل:**

$\frac{{}^{ن}ق_ر}{{}^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{٨٤}{٣٦}$ ∴ $\frac{ن - ر + ١}{ر} = \frac{٧}{٣}$

∴ $٣ن - ٣ر + ٣ = ٧ر$ ∴ $٣ن - ١٠ر = -٣$

، $\frac{{}^{ن}ق_{ر+١}}{{}^{ن}ق_ر} = \frac{١٢٦}{٨٤}$

∴ $\frac{ن - ر - ١ + ١}{ر + ١} = \frac{٣}{٢}$

∴ $٢ن - ٢ر = ٣ر + ٣$ ∴ $٢ن - ٥ر = ٣$

∴ $ن = ٩$ ، $ر = ٣$

---

**١٧** (أ)

**الحل:**

$\sum_{ر=٠}^{٥٠} {}^{٥٠}ق_ر (س - ١)^{٥٠ - ر} \times ٢^ر = (س - ١ + ٢)^{٥٠}$

$= (س + ١)^{٥٠}$

، $ح_{ر+١} = {}^{٥٠}ق_ر\, س^{٥٠ - ر}$

، $٥٠ - ر = ١٣$ ∴ $ر = ٣٧$

∴ معامل $س^{١٣} = {}^{٥٠}ق_{٣٧} = {}^{٥٠}ق_{١٣}$

---

**١٨** (جـ)

**الحل:**

∵ مجموع معاملات حدود كل المفكوك = $(١ + ١)^{٥٩} = ٢^{٥٩}$

، ∵ عدد حدود المفكوك = ٦٠ حدًا

∴ مجموع معاملات الـ ٣٠ حدًا الأخيرة يساوى = $\frac{٢^{٥٩}}{٢} = ٢^{٥٨}$

---

**١٩**

∵ $\frac{{}^{١٣}ق_{ر+١}}{{}^{١٣}ق_ر} = \frac{٥}{٩}$

∴ $\frac{١٣ - (ر + ١) + ١}{ر + ١} = \frac{٥}{٩}$ ∴ $\frac{١٣ - ر}{ر + ١} = \frac{٥}{٩}$

∴ $٥ر + ٥ = ١١٧ - ٩ر$

∴ $١٤ر = ١١٢$ ∴ $ر = ٨$

∵ ${}^{ن}ق_٦ + {}^{ن}ق_٧ = ٣٤٣٢$

∴ ${}^{ن+١}ق_٧ = ٣٤٣٢ = {}^{١٤}ق_٧$

∴ $ن + ١ = ١٤$ ∴ $ن = ١٣$

---

**٢٠**

∵ $ح_٩ = ح_{١٠}$

∴ $\frac{ح_{١٠}}{ح_٩} = \frac{٢٠ - ٩ + ١}{٩} \times \frac{\frac{٢}{س^٢}}{٢س} = ١$

∴ $\frac{٢}{س^٣} = ١$ ∴ $س^٣ = ٢$

∴ $س = \sqrt[٣]{٢}$

نفرض أن الحدين هما $ح_ر$ ، $ح_{ر+١}$

، ∵ $\frac{ح_{ر+١}}{ح_ر} = \frac{١٥}{٨}$

∴ $\frac{٢٠ - ر + ١}{ر} \times \frac{\frac{٣}{س^٢}}{٢ س} = \frac{١٥}{٨}$

، ∵ $س = \sqrt[٣]{٢}$

∴ $\frac{٢١ - ر}{ر} \times \frac{٣}{٢ \times ٢} = \frac{١٥}{٨}$

∴ $\frac{٢١ - ر}{ر} = \frac{٥}{٢}$　　∴ ٥ ر = ٤٢ − ٢ ر

∴ ٧ ر = ٤٢　　∴ ر = ٦

الحدان هما : $ح_٦$ ، $ح_٧$

، ∵ $ح_{ر+١} = {}^{٢٠}ق_ر \, (٢ س)^{٢٠ - ر} \left(\frac{٣}{س^٢}\right)^ر$

$= \left[{}^{٢٠}ق_ر \times ٢^{٢٠ - ر} \times ٣^ر\right] س^{٢٠ - ٣ ر}$

فى حالة وجود حد خالى من س

∴ ٢٠ − ٣ ر = ٠

$س = \frac{٢٠}{٣} \notin ص^+$

∴ لا يوجد حد خالى من س

## إجابات اختبار على الوحدة الثانية فى الجبر

**١** (د)

**الحل :**

ع = س + ت ص　　∴ $|ع| = \sqrt{س^٢ + ص^٢}$

، ع + ٢ = س + ٢ + ت ص

∴ $|ع + ٢| = \sqrt{(س + ٢)^٢ + ص^٢}$

∴ $\sqrt{س^٢ + ص^٢} = \sqrt{س^٢ + ٤ س + ٤ + ص^٢}$

∴ $\cancel{س^٢} + \cancel{ص^٢} = \cancel{س^٢} + ٤ س + ٤ + \cancel{ص^٢}$

∴ س = −١

---

**٢** (جـ)

**الحل :**

∵ $ع_١ = ٢ \left(جتا \frac{\pi}{٦} + ت جا \frac{\pi}{٦}\right)$

∵ $ع_٢ = \overline{ع_١} = ٢ \left(جتا \frac{\pi}{٦} - ت جا \frac{\pi}{٦}\right)$

∴ $ع = ع_١ + \overline{ع_١} + ع_١ \overline{ع_١} = ٢ \times ٢ جتا \frac{\pi}{٦} + |ع_١|^٢$

$= ٢\sqrt{٣} + ٤ = ٢ (\sqrt{٣} + ٢)$

---

**٣** (د)

**الحل :**

ع = −٥ (جتا ٦٠° − ت جا ٦٠°) = ٥ (− جتا ٦٠° + ت جا ٦٠°)

= ٥ (جتا ١٢٠° + ت جا ١٢٠°)

∴ السعة الأساسية = ١٢٠°

**٤** (أ)

**الحل :**

سعة $ع_١$ = (٩٠° − θ) ، سعة $ع_٢$ = (٩٠° + θ)

، سعة $ع_٣$ = (−٩٠° − θ) ، سعة $ع_٤$ = (−٩٠° + θ)

∴ سعة $ع_١ ع_٢ ع_٣ ع_٤ = \cancel{٩٠^\circ} - \cancel{\theta} + \cancel{٩٠^\circ} + \cancel{\theta}$

$- \cancel{٩٠^\circ} - \cancel{\theta} - \cancel{٩٠^\circ} + \cancel{\theta} =$ صفر°

---

**٥** (جـ)

**الحل :**

$ع = ٦ \left(جتا \frac{٤ \pi}{٣} - ت جا \frac{٤ \pi}{٣}\right)^٢$

$= ٦ \left(جتا \left(- \frac{٤ \pi}{٣}\right) + ت جا \left(\frac{-٤ \pi}{٣}\right)\right)^٢$

$= ٦ \left(جتا \frac{-٨ \pi}{٣} + ت جا \frac{-٨ \pi}{٣}\right)$

$= ٦ \left(جتا \frac{-٢ \pi}{٣} + ت جا \frac{-٢ \pi}{٣}\right)$

---

**٦** (أ)

**الحل :**

$\frac{أ + ب \omega + جـ \omega^٢}{جـ + أ \omega + ب \omega^٢} + \frac{أ + ب \omega + جـ \omega^٢}{ب + جـ \omega + أ \omega^٢}$

$= \frac{أ \omega + ب \omega^٢ + جـ}{جـ + أ \omega + ب \omega^٢} \times \frac{١}{\omega} + \frac{أ \omega^٢ + ب + جـ \omega}{ب + جـ \omega + أ \omega^٢} \times \frac{١}{\omega^٢}$

$= \frac{١}{\omega} + \frac{١}{\omega^٢} = \omega^٢ + \omega = -١$

---

**٧** (أ)

**الحل :**

ع = ٢ (− ت)　　∴ $ع = ٢ هـ^{-\frac{\pi}{٢} ت}$

∴ $ع^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{٢} \, هـ^{\frac{-\frac{\pi}{٢} + ٢ \pi ر}{٢}}$ حيث ر = ٠ ، ١

عند ر = ٠　　∴ $ع^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{٢} \, هـ^{-\frac{\pi}{٤} ت}$

، عند ر = ١　　∴ $ع^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{٢} \, هـ^{\frac{٣ \pi}{٤} ت}$

---

**٨** (جـ)

**الحل :**

بفرض ع = س + ت ص

∴ ع − ٢ = (س − ٢) + ت ص

، ∵ سعة (ع − ٢) = $\frac{\pi}{٢}$　　∴ $\frac{ص}{س - ٢} = ظا \frac{\pi}{٢}$

∴ س = ٢　　(١)

، ع − ٤ = س − ٤ + ت ص

، ∵ سعة (ع − ٤) = $\frac{٣ \pi}{٤}$

∴ $\frac{ص}{س - ٤} = ظا \frac{٣}{٤} \pi = -١$ ، من (١)

∴ ص = ٢　　∴ ع = ٢ + ٢ ت

∴ ظا θ = $\frac{٢}{٢}$ = ١　　∴ سعة ع = $\frac{\pi}{٤}$

---

**٩** (د)

**الحل :**

$س = \frac{-١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت$　　∴ $س = \omega ، \omega^٢$

- عند $س = \omega$

∴ $س^٥ + س^٤ + ٥ = \omega^٥ + \omega^٤ + ٥$

$= \omega^٢ + \omega + ١ + ٤ = ٤$

- عند $س = \omega^٢$

∴ $س^٥ + س^٤ + ٥ = \omega^{١٠} + \omega^٨ + ٥$

$= \omega + \omega^٢ + ١ + ٤ = ٤$

---

**١٠** (ب)

**الحل :**

س − ت س + ص + ت ص + ٢ ت = ٠

∴ (س + ص) + (ص + ٢ − س) ت = ٠

∴ س + ص = ٠ ، ص − س = −٢

∴ س = ١ ، ص = −١

∴ $\sqrt{٢ س + ٤ ص ت} = \sqrt{٢ + ٤ (-١) ت}$

$= \sqrt{٢ - ٤ ت} = \sqrt{٤ - ٤ ت + ت^٢}$

$= \sqrt{(٢ - ت)^٢} = \pm (٢ - ت)$

---

**١١** (جـ)

**الحل :**

$ع_٢ = ٢ (جتا ٣٠^\circ + ت جا ٣٠^\circ) = \sqrt{٣} + ت$

∴ $\overline{ع_١} - \overline{ع_٢} = ٢\sqrt{٣} + ت - (\sqrt{٣} - ت) = \sqrt{٣} + ٢ ت$

---

**١٢** (جـ)

**الحل :**

الجذر الأول = $(١ + \omega - \omega^٢)^٣ = (-\omega^٢ - \omega^٢)^٣$

$= (-٢ \omega^٢)^٣ = -٨ \omega^٦ = -٨$

، الجذر الآخر = $(١ - \omega + \omega^٢)^٣ = (-\omega - \omega)^٣$

$= (-٢ \omega)^٣ = -٨ \omega^٣ = -٨$

∴ المجموع = −٨ − ٨ = −١٦

حاصل الضرب = −٨ × −٨ = ٦٤

المعادلة هى : $س^٢ + ١٦ س + ٦٤ = ٠$

**١٣** (د)

**الحل :**

∵ $ع = \left(١ + جتا \frac{\pi}{٣} + ت جا \frac{\pi}{٣}\right)^٦$

∴ $ع = \left(١ + \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت\right)^٦$　　∴ $ع = \left(\frac{٣}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت\right)^٦$

$ل = \sqrt{\left(\frac{٣}{٢}\right)^٢ + \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^٢} = \sqrt{٣}$

∵ س > ٠ ، ص > ٠　　∴ θ تقع فى الربع الأول

∴ $\theta = ظا^{-١} \left(\frac{\frac{\sqrt{٣}}{٢}}{\frac{٣}{٢}}\right) = \frac{\pi}{٦}$

∴ $ع = (\sqrt{٣})^٦ \left(جتا \frac{\pi}{٦} + ت جا \frac{\pi}{٦}\right)^٦ = ٢٧ (جتا \pi + ت جا \pi)$

---

**١٤** (جـ)

---

**١٥** (أ)

**الحل :**

$\frac{(جتا \theta + ت جا \theta)^٤}{(جا \theta + ت جتا \theta)^٥} = \frac{جتا ٤ \theta + ت جا ٤ \theta}{[جتا (٩٠^\circ - \theta) + ت جا (٩٠^\circ - \theta)]^٥}$

$= \frac{جتا ٤ \theta + ت جا ٤ \theta}{جتا (٤٥٠^\circ - ٥ \theta) + ت جا (٤٥٠^\circ - ٥ \theta)}$

= جتا (٩ θ − ٤٥٠°) + ت جا (٩ θ − ٤٥٠°)

= جتا (٩ θ − ٩٠°) + ت جا (٩ θ − ٩٠°)

= جا ٩ θ − ت جتا ٩ θ

---

**١٦** (د)

**الحل :**

∵ $س + ص ت = \frac{أ + ب ت}{أ - ب ت}$

∴ $|س + ص ت| = \left|\frac{أ + ب ت}{أ - ب ت}\right|$

∴ $\sqrt{س^٢ + ص^٢} = \frac{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$　　∴ $س^٢ + ص^٢ = ١$

---

**١٧** (أ)

**الحل :**

$س + ت ص = هـ^{\theta ت}$

∴ س + ت ص = جتا θ + ت جا θ

∴ س = جتا θ ، ص = جا θ

∴ س ص = جا θ جتا θ = $\frac{١}{٢}$ جا ٢ θ

∴ أقل قيمة لـ س ص = $-\frac{١}{٢}$

**١٨** (أ)

**الحل :**

$(١ + \omega)^{٤} + (١ + \omega^{٢})^{٤} + (\omega + \omega^{٢})^{٤}$

$= (-\omega^{٢})^{٤} + (-\omega)^{٤} + (-١)^{٤}$

$= \omega^{٨} + \omega^{٤} + ١ = \omega^{٢} + \omega + ١ =$ صفر

**١٩**

$\text{ل} = \sqrt{(١)^{٢} + (\sqrt{٣})^{٢}} = ٢$

، ∵ $\text{س} > ٠$ ، $\text{ص} > ٠$

∴ $\theta$ تقع فى الربع الأول

$\theta = \text{ظا}^{-١}\left(\sqrt{٣}\right) = \frac{\pi}{٣}$

∴ $\text{ع} = ٢\left(\text{جتا}\frac{\pi}{٣} + \text{ت جا}\frac{\pi}{٣}\right)$ أى أن : $\text{ع} = ٢\,\text{ه}^{\frac{\pi}{٣}\text{ت}}$

* الجذور التربيعية للعدد ع

هى $\sqrt{٢}\,\text{ه}^{\left(\frac{\frac{\pi}{٣} + ٢\pi\text{ر}}{٢}\right)\text{ت}}$ حيث $\text{ر} = ٠ ، ١$

عند $\text{ر} = ٠$ ∴ الجذر التربيعى الأول $= \sqrt{٢}\,\text{ه}^{\frac{\pi}{٦}\text{ت}}$

، عند $\text{ر} = ١$

∴ الجذر التربيعى الثانى $= \sqrt{٢}\,\text{ه}^{\frac{٧\pi}{٦}\text{ت}} = \sqrt{٢}\,\text{ه}^{\frac{-٥\pi}{٦}\text{ت}}$

**٢٠**

$\text{ع}_{١} = ١ - \sqrt{٣}\,\text{ت}$

∴ $\text{ل} = \sqrt{(١)^{٢} + (-\sqrt{٣})^{٢}} = ٢$

، ∵ $\text{س} > ٠$ ، $\text{ص} < ٠$ ∴ $\theta$ تقع فى الربع الرابع

∴ $\theta = \text{ظا}^{-١}\left(\frac{-\sqrt{٣}}{١}\right) = -٦٠^{\circ} = -\frac{\pi}{٣}$

∴ $\text{ع}_{١} = ٢\left[\text{جتا}\left(-\frac{\pi}{٣}\right) + \text{ت جا}\left(-\frac{\pi}{٣}\right)\right]$

، $\text{ع}_{٢} = \text{ه}^{-\frac{\pi}{٦}\text{ت}} = \text{جتا}\left(-\frac{\pi}{٦}\right) + \text{ت جا}\left(-\frac{\pi}{٦}\right)$

، $\text{ع}_{٣} = \left(\text{جتا}\left(-\frac{\pi}{١٢}\right) + \text{ت جا}\left(-\frac{\pi}{١٢}\right)\right)^{٢}$

$= \text{جتا}\left(-\frac{\pi}{٦}\right) + \text{ت جا}\left(-\frac{\pi}{٦}\right)$

∴ $\text{ع} = \frac{\text{ع}_{١}\,\text{ع}_{٢}}{\text{ع}_{٣}}$

$= \frac{٢\left(\text{جتا}-\frac{\pi}{٣} + \text{ت جا}-\frac{\pi}{٣}\right) . \left(\text{جتا}-\frac{\pi}{٦} + \text{ت جا}-\frac{\pi}{٦}\right)}{\text{جتا}-\frac{\pi}{٦} + \text{ت جا}-\frac{\pi}{٦}}$

$= ٢\left[\text{جتا}\left(-\frac{\pi}{٣}\right) + \text{ت جا}\left(-\frac{\pi}{٣}\right)\right] = ٢\,\text{ه}^{-\frac{\pi}{٣}\text{ت}}$

## إجابات اختبار تراكمى على الوحدتين الأولى والثانية فى الجبر

**١** (ب)

**الحل :**

$\text{ع}_{١} + \text{ع}_{٢} = -١ - \sqrt{٣}\,\text{ت}$

∴ $\text{ظا}\,\theta = \sqrt{٣}$ ، $\theta$ فى الربع الثالث

∴ سعة $(\text{ع}_{١} + \text{ع}_{٢}) = -١٢٠^{\circ}$

**٢** (ب)

**الحل :**

∵ $\text{ح}_{\text{ر}+١} = \text{س}^{٢} \times {}^{٧}\text{ق}_{\text{ر}} \times \text{س}^{\text{ر}} = {}^{٧}\text{ق}_{\text{ر}} \times \text{س}^{\text{ر}+٢}$

بوضع : $\text{ر} + ٣ = ٤$ ∴ $\text{ر} = ١$

∴ $\text{ح}_{٢} = {}^{٧}\text{ق}_{١}\,\text{س}^{٤}$

∴ معامل الحد الذى يحتوى على $\text{س}^{٤} = {}^{٧}\text{ق}_{١}$

**٣** (ب)

**الحل :**

$\text{ه}^{\theta\text{ت}} + \text{ه}^{-\theta\text{ت}}$

$= \text{جتا}\,\theta + \text{ت جا}\,\theta + \text{جتا}(-\theta) + \text{ت جا}(-\theta)$

$= \text{جتا}\,\theta + \cancel{\text{ت جا}\,\theta} + \text{جتا}\,\theta - \cancel{\text{ت جا}\,\theta} = ٢\,\text{جتا}\,\theta$

**٤** (جـ)

**الحل :**

المقدار

$= \left(\frac{\omega(\omega^{٢}\text{أ} + \text{ب} + \omega\,\text{حـ})}{(\omega^{٢}\text{أ} + \text{ب} + \omega\,\text{حـ})} - \frac{\omega^{٢}(\text{حـ}\,\omega + \text{أ} + \text{ب}\,\omega^{٢})}{(\omega\,\text{حـ} + \text{ب}\,\omega^{٢} + \text{أ})}\right)^{٨}$

$= (\omega - \omega^{٢})^{٨} = (\pm\sqrt{٣}\,\text{ت})^{٨} = ٨١\,\text{ت}^{٨} = ٨١$

**٥** (ب)

**الحل :**

$\text{ح}_{٣} = ١٧$ $\qquad {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢} \times \text{س}^{٢} = ١٧$

$\text{ن}(\text{ن} - ١)\,\text{س}^{٢} = ٣٤$ (١)

$٣\,\text{ح}_{٢} \times \text{ح}_{٤} = ٥٤٤$

$٣ \times {}^{\text{ن}}\text{ق}_{١}\,\text{س} \times {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٣}\,\text{س}^{٣} = ٥٤٤$

$\cancel{٣}\,\text{ن} \times \frac{\text{ن}(\text{ن} - ١)(\text{ن} - ٢)}{\cancel{٣} \times ٢ \times ١}\,\text{س}^{٤} = ٥٤٤$

$\text{ن}^{٢}(\text{ن} - ١)(\text{ن} - ٢)\,\text{س}^{٤} = ١٠٨٨$ (٢)

بتربيع طرفى (١) وقسمة (٢) على (١) :

$\frac{\cancel{\text{ن}^{٢}}(\text{ن} - ١)(\text{ن} - ٢)\,\text{س}^{٤}}{\cancel{\text{ن}^{٢}}(\text{ن} - ١)^{٢}\,\text{س}^{٤}} = \frac{١٠٨٨}{(٣٤)^{٢}}$

$\frac{\text{ن} - ٢}{\text{ن} - ١} = \frac{١٦}{١٧}$ $\qquad$ ∴ $\text{ن} = ١٨$

بالتعويض فى (١) : $١٨ \times ١٧\,\text{س}^{٢} = ٣٤$

∴ $\text{س}^{٢} = \frac{١}{٩}$ $\qquad$ ∴ $\text{س} = \pm\frac{١}{٣}$ $\qquad$ ∴ $\text{ن}\,\text{س} = \pm ٦$

**٦** (د)

**الحل :**

$(٢ - \text{س})^{٥}(٢ + \text{س})^{٥} = (٤ - \text{س}^{٢})^{٥}$

الحد الأخير هو $\text{ح}_{٦} = {}^{٥}\text{ق}_{٥}\,(٤)^{٠}\,(-\text{س}^{٢})^{٥} = -\text{س}^{١٠}$

**٧** (جـ)

**الحل :**

$\text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{١٥}\text{ق}_{\text{ر}}\,(\text{س}^{٢})^{\text{ر}}\left(\frac{١}{\text{س}}\right)^{١٥-\text{ر}}$

$= {}^{١٥}\text{ق}_{\text{ر}}\,(\text{س})^{-١٥+٣\text{ر}}$

، بوضع $-١٥ + ٣\,\text{ر} = ٠$

∴ $\text{ر} = ٥$

أى أن : $\text{ح}_{٦}$ هو الحد الخالى من س

∴ قيمة الحد الخالى من س هو ${}^{١٥}\text{ق}_{٥} = ٣٠٠٣$

**٨** (أ)

**الحل :**

معامل $\text{س}^{٦} = {}^{٦}\text{ق}_{٦} + {}^{٧}\text{ق}_{٦} + {}^{٨}\text{ق}_{٦} + {}^{٩}\text{ق}_{٦} + \cdots + {}^{١٥}\text{ق}_{٦}$

$= {}^{٧}\text{ق}_{٧} + {}^{٧}\text{ق}_{٦} + {}^{٨}\text{ق}_{٦} + {}^{٩}\text{ق}_{٦} + \cdots + {}^{١٥}\text{ق}_{٦}$

$= {}^{٨}\text{ق}_{٧} + {}^{٨}\text{ق}_{٦} + {}^{٩}\text{ق}_{٦} + \cdots + {}^{١٥}\text{ق}_{٦}$

$= {}^{٩}\text{ق}_{٧} + {}^{٩}\text{ق}_{٦} + \cdots + {}^{١٥}\text{ق}_{٦}$ وهكذا ...

∴ معامل $\text{س}^{٦} = {}^{١٥}\text{ق}_{٧} + {}^{١٥}\text{ق}_{٦} = {}^{١٦}\text{ق}_{٧} = {}^{١٦}\text{ق}_{٩}$

**٩** (د)

**الحل :**

الجذر الأول $= \frac{٥\,\omega - ٢\,\omega^{٣}}{٥ - ٢\,\omega^{٢}} = \frac{\omega\,(٥ - ٢\,\omega^{٢})}{٥ - ٢\,\omega^{٢}} = \omega$

، الجذر الآخر $= \frac{٧ - ٣\,\omega^{٢}}{٧\,\omega - ٣\,\omega^{٣}} = \frac{٧ - ٣\,\omega^{٢}}{\omega\,(٧ - ٣\,\omega^{٢})} = \frac{١}{\omega} = \omega^{٢}$

∴ مجموع الجذرين $= \omega + \omega^{٢} = -١$

، حاصل ضرب الجذرين $= \omega \times \omega^{٢} = \omega^{٣} = ١$

∴ المعادلة هى $\text{س}^{٢} + \text{س} + ١ = ٠$

**١٠** (جـ)

**الحل :**

∵ $\frac{{}^{\text{ن}+٢}\text{ل}_{\text{ر}}}{{}^{\text{ن}+٢}\text{ق}_{\text{ر}}} = ٢$ $\qquad$ ∴ $\underline{|\text{ر}} = ٢ = \underline{|٢}$ $\qquad$ ∴ $\text{ر} = ٢$

∴ $\frac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{٣}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}} = \frac{٥}{٣}$ $\qquad$ ∴ $\frac{\text{ن} - ٣ + ١}{٣} = \frac{٥}{٣}$

∴ $\text{ن} - ٢ = ٥$ $\qquad$ ∴ $\text{ن} = ٧$

∴ ${}^{١٤}\text{ق}_{٥} + {}^{١٠}\text{ل}_{١} = ٢٠٠٢ + ١٠ = ٢٠١٢$

**١١** (جـ)

**الحل :**

$\text{ع}_{١} = \text{ل}\,(\text{جتا}\,\theta + \text{ت جا}\,\theta)$

، $\text{ع}_{١}\,\text{ع}_{٢} = \text{ل}\,[\text{جتا}\,(٩٠^{\circ} + \theta) + \text{ت جا}\,(٩٠^{\circ} + \theta)]$

∴ $\text{ع}_{٢} = \frac{\text{ع}_{١}\,\text{ع}_{٢}}{\text{ع}_{١}} = \text{جتا}\,(٩٠^{\circ} + \theta - \theta) + \text{ت جا}\,(٩٠^{\circ} + \theta - \theta)$

$= \text{جتا}\,٩٠^{\circ} + \text{ت جا}\,٩٠^{\circ} = \text{ت}$

**١٢** (أ)

**الحل :**

المجموعة تحتوى على :

٣ رجال وسيدتان أو ٤ رجال وسيدة أو ٥ رجال

$= {}^{٦}\text{ق}_{٣} \times {}^{٤}\text{ق}_{٢} + {}^{٦}\text{ق}_{٤} \times {}^{٤}\text{ق}_{١} + {}^{٦}\text{ق}_{٥} = ١٨٦$

**١٣** (جـ)

**الحل :**

$\frac{\text{ع}_{١}}{\text{ع}_{٢}} = \frac{٨\,(\text{جتا}\,\pi + \text{ت جا}\,\pi)}{٢\left(\text{جتا}\left(\frac{٣\pi}{٢}\right) + \text{ت جا}\left(\frac{٣\pi}{٢}\right)\right)}$

$= ٢\left(\text{جتا}\left(\frac{-\pi}{٢}\right) + \text{ت جا}\left(\frac{-\pi}{٢}\right)\right) = ٢ \times -\text{ت} = -٢\,\text{ت}$

**١٤** (أ)

**الحل :**

$\text{ك} = (٢\,\text{س} + \text{ت})^{١٥} - ١٥\,(٢\,\text{س} + \text{ت})^{١٤}\,(\text{ت} - ٢\,\text{ص}) + \cdots - (\text{ت} - ٢\,\text{ص})^{١٥}$

$= [(٢\,\text{س} + \text{ت}) - (\text{ت} - ٢\,\text{ص})]^{١٥} = (٢\,\text{س} + ٢\,\text{ص})^{١٥}$

عند $\text{س} = \text{ت}\,\omega^{٢}$ ، $\text{ص} = \text{ت}\,\omega$

∴ $\text{ك} = (٢\,\text{ت}\,\omega^{٢} + ٢\,\text{ت}\,\omega)^{١٥}$

$= (٢\,\text{ت}\,(\omega^{٢} + \omega))^{١٥} = ٢^{١٥}\,\text{ت}^{١٥}\,(-١)^{١٥}$

$= ٢^{١٥} \times -\text{ت} \times -١ = ٢^{١٥}\,\text{ت}$

**١٥** (د)

**الحل :**

عدد المثلثات $= {}^{٧}\text{ق}_{٣} - ١ = ٣٤$ مثلث

**١٦** (د)

**الحل :**

$(^{ن+١}ق_{٢} + {}^{ن+١}ق_{٣}) + (^{ن+١}ق_{٣} + {}^{ن+١}ق_{٤})$

$= {}^{ن+٢}ق_{٣} + {}^{ن+٢}ق_{٤} = {}^{ن+٣}ق_{٤}$

**١٧** (أ)

**الحل :**

$ع \bar{ع} = ٣٦$ $\therefore |ع|^{٢} = |\bar{ع}|^{٢} = ٣٦$

$\therefore |\bar{ع}| = ٦$

$\therefore |ع|^{٢} - ٤|\bar{ع}| - ١٠ = ٣٦ - ٤ \times ٦ - ١٠ = ٢$

**١٨** (ج)

**الحل :**

$م ن = (أ ω + ب ω^{٢})(أ ω^{٢} + ب ω)$

$= أ^{٢} + أب ω^{٢} + أب ω + ب^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} - أب$

$\therefore ل م ن = (أ + ب)(أ^{٢} - أب + ب^{٢}) = أ^{٣} + ب^{٣}$

$\therefore \frac{ل م ن}{أ^{٣} + ب^{٣}} = ١$

**١٩**

$ع_{١} = \frac{٦ + ٤ت}{١ + ت} \times \frac{١ - ت}{١ - ت} = ٥ - ت$

، $ع_{٢} = \frac{٢٦}{٥ - ت} \times \frac{٥ + ت}{٥ + ت} = ٥ + ت$

، $ع = ٤(ع_{١} - ع_{٢}) = ٤[(٥ - ت) - (٥ + ت)]$

$= -٨ت = ٨ هـ^{-\frac{π}{٢}ت}$

الجذور التكعيبية للعدد ع

$= ٢\left(جتا \frac{-\frac{π}{٢} + ٢πر}{٣} + ت\ جا \frac{-\frac{π}{٢} + ٢πر}{٣}\right)$

حيث ر = ٠ ، ١ ، −١

عند ر = ٠

∴ الجذر التكعيبى الأول للعدد ع

$= ٢\left(جتا \frac{-π}{٦} + ت\ جا \frac{-π}{٦}\right)$ ، عند ر = ١

∴ الجذر التكعيبى الثانى للعدد ع = $٢\left(جتا \frac{π}{٢} + ت\ جا \frac{π}{٢}\right)$

عند ر = −١

∴ الجذر التكعيبى الثالث للعدد ع

$= ٢\left(جتا \frac{-٥π}{٦} + ت\ جا \frac{-٥π}{٦}\right)$

**٢٠**

① $ح_{ر+١} = {}^{٨}ق_{ر} \left(-\frac{١}{س}\right)^{ر} (س^{٣})^{٨-ر}$

$= {}^{٨}ق_{ر} (-١)^{ر} (س)^{-ر + ٢٤ - ٣ر}$

$= {}^{٨}ق_{ر} (-١)^{ر} (س)^{٢٤ - ٤ر}$

بوضع ٢٤ − ٤ ر = ٠ ∴ ر = ٦

∴ $ح_{٧}$ هو الحد الخالى من س

، $ح_{٧} = {}^{٨}ق_{٦} (-١)^{٦} = ٢٨$

② الحد الأوسط = $ح_{\frac{٨}{٢}+١} = ح_{٥}$

$\therefore \frac{ح_{٥}}{ح_{٤}} = \frac{٥}{٨ - ٥ + ١} \times \frac{س^{٣}}{-\frac{١}{س}} = \frac{-٥}{٤} \times س^{٤}$

عند س = ١ . $\therefore \frac{ح_{٥}}{ح_{٤}} = -\frac{٥}{٤}$

## إجابات اختبار على الوحدة الثالثة في الجبر

**١** (ج)

**الحل :**

$أ\ أ^{مل} = |أ|\ I = أ^{٢}\ I$

$\therefore أ\ أ^{مل} = \begin{pmatrix} أ^{٢} & ٠ & ٠ \\ ٠ & أ^{٢} & ٠ \\ ٠ & ٠ & أ^{٢} \end{pmatrix}$ $\therefore |أ|\,|أ^{مل}| = أ^{٦}$

**٢** (ج)

**الحل :**

∵ المعادلات متجانسة ولها عدد لا نهائى من الحلول

∴ ر (أ) < ن ∴ |أ| = صفر

$\therefore \begin{vmatrix} ٣ & -٢ & ١ \\ ٦ & -٥ & ٢ \\ ٩ & -٦ & ك \end{vmatrix} = صفر$

$\therefore ٣(-٥ك + ١٢) + ٢(٦ك - ١٨) + (-٣٦ + ٤٥) = صفر$

$\therefore -١٥ك + \cancel{٣٦} + ١٢ك - \cancel{٣٦} + ٩ = صفر$

∴ ٣ك = ٩ ∴ ك = ٣

**٣** (أ)

**الحل :**

$\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ٢ & ٣ \\ أ + ١ & ب + ١ & ح + ١ \end{vmatrix}$ بإجراء ص٣ − ص١

$= \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ٢ & ٣ \\ أ & ب & ح \end{vmatrix} = ك$

**٤** (ج)

**الحل :**

∵ ر (أ) = ٢ ∴ |أ| = صفر

$\therefore \begin{vmatrix} ١ & -٢ & ٣ \\ ك & ٠ & ١ \\ ٣ & ٢ & -١ \end{vmatrix} = صفر$ (باستخدام الصف الثانى)

$\therefore -ك(٢ - ٦) - ١(٢ + ٦) = صفر$

∴ ٤ك = ٨ ∴ ك = ٢

**٥** (ج)

**الحل :**

∵ المعادلات متجانسة

، $|أ| = \begin{vmatrix} ٣ & ١ & ٤ \\ ٢ & ٣ & ٥ \\ ١ & -٢ & -١ \end{vmatrix}$

$= ٣(-٣ + ١٠) - ١(-٢ - ٥) + ٤(-٤ - ٣)$

$= ٢١ + ٧ - ٢٨ = صفر$

∴ ر (أ) < ٣

∴ يوجد عدد لا نهائى من الحلول من بينها الحل الصفرى

**٦** (د)

**الحل :**

$م = ٣ \times ٢ \times ٥ \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٣ \\ ٢ & ٣ & ٥ \\ ١ & ٤ & ٢ \end{vmatrix} = ٣٠ ن$

**٧** (ج)

**الحل :**

$\because أ^{٢} - أ + I = \boxed{\phantom{O}}$ $\therefore أ - أ^{٢} = I$

$\therefore أ(I - أ) = I$ $\therefore I - أ = أ^{-١}$

**٨** (ج)

**الحل :**

$س^{٣} = ٨$

$\therefore س = ٢ ، ٢ω ، ٢ω^{٢}$

**٩** (ج)

**الحل :**

بإجراء ع٢ − ع١ ، ع٣ − ع١

$\therefore المحدد = \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ س & ص - س & ٠ \\ س & ٠ & -ص - س \end{vmatrix}$

$= ١ \times (ص - س) \times (-ص - س)$

$= -(ص - س)(ص + س)$

$= -(ص^{٢} - س^{٢}) = س^{٢} - ص^{٢}$

**١٠** (ب)

**الحل :**

بإضافة ص٢ + ص٣ إلى ص١

$\begin{vmatrix} ٣ & ١ + ω + ω^{٢} & ١ + ω + ω^{٢} \\ ١ & ω & ω^{٢} \\ ١ & ω^{٢} & ω \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} ٣ & ٠ & ٠ \\ ١ & ω & ω^{٢} \\ ١ & ω^{٢} & ω \end{vmatrix} = ٣(ω^{٢} - ω^{٤})$

$= ٣(ω^{٢} - ω) = \pm ٣\sqrt{٣}\ ت$

**١١** (ب)

**الحل :**

$أ = \begin{pmatrix} ١ & ٣ & ٢ \\ ١ & ٠ & ١ \\ ١ & ٢ & ٠ \end{pmatrix}$

$أ^{مل} = \begin{pmatrix} -٢ & ٤ & ٣ \\ ١ & -٢ & ١ \\ ٢ & ١ & -٣ \end{pmatrix}$

**١٢** (أ)

**الحل :**

$\because \begin{vmatrix} أ^{٣} - ١ & أ^{٢} & أ \\ ب^{٣} - ١ & ب^{٢} & ب \\ ح^{٣} - ١ & ح^{٢} & ح \end{vmatrix} = ٠$

$\therefore \begin{vmatrix} أ^{٣} & أ^{٢} & أ \\ ب^{٣} & ب^{٢} & ب \\ ح^{٣} & ح^{٢} & ح \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ١ & أ^{٢} & أ \\ ١ & ب^{٢} & ب \\ ١ & ح^{٢} & ح \end{vmatrix} = ٠$

$\therefore أ ب ح \begin{vmatrix} أ^{٢} & أ & ١ \\ ب^{٢} & ب & ١ \\ ح^{٢} & ح & ١ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ١ & أ & أ^{٢} \\ ١ & ب & ب^{٢} \\ ١ & ح & ح^{٢} \end{vmatrix} = ٠$

$\therefore أ ب ح \begin{vmatrix} أ^{٢} & أ & ١ \\ ب^{٢} & ب & ١ \\ ح^{٢} & ح & ١ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} أ^{٢} & أ & ١ \\ ب^{٢} & ب & ١ \\ ح^{٢} & ح & ١ \end{vmatrix} = ٠$

$$\therefore (\text{أ ب حـ} - ١) \begin{vmatrix} \text{أ}^٢ & \text{أ} & ١ \\ \text{ب}^٢ & \text{ب} & ١ \\ \text{حـ}^٢ & \text{حـ} & ١ \end{vmatrix} = ٠$$

في حالة أ ≠ ب ≠ حـ $\therefore \Delta \neq$ صفر

$\therefore$ أ ب حـ − ١ = ٠ $\therefore$ أ ب حـ = ١

---

**١٣** (د)

**الحل :**

بوضع س = ٢ ينتج أن Δ = ٠

$$\begin{vmatrix} ١ & ٥ & ٢ \\ -٣ & ٧ & -٦ \\ ٥ & ٢ & ك + ٢ \end{vmatrix} = ٠$$

$\therefore$ (٧ ك + ١٤ + ١٢) − ٥ (−٣ ك − ٦ + ٣٠)

+ ٢ (−٦ − ٣٥) = ٠

$\therefore$ ك = ٨

---

**١٤** (د)

**الحل :**

في Δ أ ب حـ $\because \overline{\text{ءهـ}} \mathbin{//} \overline{\text{ب حـ}}$

$$\therefore \frac{\text{أ ء}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{أ حـ}} = \text{ك}$$

$\therefore$ أ ء = ك أ ب ، ء هـ = ك ب حـ ، أ هـ = ك أ حـ

$$\therefore \begin{vmatrix} ٥ & ٦ & ٧ \\ \text{ء هـ} & \text{أ ء} & \text{أ هـ} \\ \text{ب حـ} & \text{أ ب} & \text{أ حـ} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٥ & ٦ & ٧ \\ \text{ك ب حـ} & \text{ك أ ب} & \text{ك أ حـ} \\ \text{ب حـ} & \text{أ ب} & \text{أ حـ} \end{vmatrix} = \text{ك} \begin{vmatrix} ٥ & ٦ & ٧ \\ \text{ب حـ} & \text{أ ب} & \text{أ حـ} \\ \text{ب حـ} & \text{أ ب} & \text{أ حـ} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

---

**١٥** (ب)

**الحل :**

$$\because \begin{vmatrix} ١ & ٤ & ١ \\ ١ & ٤ & ١ \\ ٢ & ٧ & ٠ \end{vmatrix} = \text{صفر} ، \begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ ٢ & ٧ \end{vmatrix} \neq \text{صفر}$$

$\therefore$ ر(أ) = ٢

$$، \because \begin{vmatrix} ٤ & ١ & ٢ \\ ٤ & ١ & ٠ \\ ٧ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} \neq \text{صفر} \quad \therefore \text{ر}(\text{أ}^*) = ٣$$

$\therefore$ ر(أ) + ر(أ*) = ٥

---

**١٦** (د)

**الحل :**

$$\begin{vmatrix} ٤ & ٦ & ٨ \\ ٨ & ٦ & ٢ \\ ١٢ & ٢٠ & ١٠ \end{vmatrix} = ٤ \times ٢ \times ٢ \begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٤ \\ ٢ & ٣ & ١ \\ ٣ & ١٠ & ٥ \end{vmatrix}$$

$$= ١٦ \begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٤ \\ ٢ & ٣ & ١ \\ ٣ & ١٠ & ٥ \end{vmatrix}$$

---

**١٧** (ب)

**الحل :**

$$\because \text{أ}^{-١} = \frac{١}{|\text{أ}|} \times \text{أ}^{\text{مل}} \quad \therefore \text{أ أ}^{-١} = \frac{١}{|\text{أ}|} \times \text{أ أ}^{\text{مل}}$$

$$\therefore \text{أ أ}^{\text{مل}} = |\text{أ}|\, I \quad \therefore \text{أ أ}^{\text{مل}} = \begin{pmatrix} -٣ & ٠ & ٠ \\ ٠ & -٣ & ٠ \\ ٠ & ٠ & -٣ \end{pmatrix}$$

$$\therefore |\text{أ أ}^{\text{مل}}| = -٢٧$$

---

**١٨** (جـ)

**الحل :**

$$\text{المصفوفة منفردة إذا كان :} \begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ٥ \\ ١ & \text{أ} & ٢ \\ ٠ & ١ & -١ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

٢ (−أ − ٢) −٣ (−١) + ٥ (١) = صفر

$\therefore$ −٢ أ − ٤ + ٣ + ٥ = صفر $\therefore$ ٢ أ = ٤

$\therefore$ أ = ٢

---

**١٩**

بأخذ (٢ س) مشترك من $\text{ص}_١$

$$\text{المحدد} = ٢\text{س} \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{أ} + \text{ب} & \text{أ} + ١ & \text{ب} + ١ \end{vmatrix}$$

(بإجراء $\text{ص}_٣ + \text{ص}_٢ + \text{ص}_١$)

$$= ٢\text{س} \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{أ} + \text{ب} + ٢ & \text{أ} + \text{ب} + ٢ & \text{أ} + \text{ب} + ٢ \end{vmatrix}$$

(بأخذ (أ + ب + ٢) مشترك من $\text{ص}_٣$)

$$= ٢\text{س} (\text{أ} + \text{ب} + ٢) \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & \text{ب} & \text{أ} \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

(لأن $\text{ص}_١ = \text{ص}_٣$)

---

**٢٠**

س + ٢ ص + ٣ ع = ٠

، ٢ س + ٣ ص + ٥ ع = ٠ ، ٣ س − ص + ٢ ع = ٠

$$\therefore \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٣ & ٥ \\ ٣ & -١ & ٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ \\ ٠ \\ ٠ \end{pmatrix}$$

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٣ & ٥ \\ ٣ & -١ & ٢ \end{pmatrix}$$

$$\therefore |\text{أ}| = ٠ ، \because \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} \neq ٠$$

$\therefore$ ر (أ) = ر (أ*) = ٢ < عدد المجاهيل.

$\therefore$ للمعادلات عدد لا نهائي من الحلول.

، لإيجاد صورة الحل نضع س = ل

وبالتعويض في المعادلة الأولى :

$\therefore$ ل + ٢ ص + ٣ ع = ٠ (١)

وبالتعويض في المعادلة الثالثة :

$\therefore$ ٣ ل − ص + ٢ ع = ٠ (٢)

بضرب (٢) في (١) والجمع مع (١) :

$\therefore$ ٧ ل + ٧ ع = ٠ $\therefore$ ع = − ل

، من (١) : $\therefore$ ل + ٢ ص + ٣ (− ل) = ٠

$\therefore$ ص = ل

$\therefore$ المعادلات لها عدد لا نهائي من الحلول على الصورة (ل ، ل ، − ل) .

## إجابات اختبار تراكمي من الوحدة الأولى حتى الوحدة الثالثة في الجبر

**١** (د)

**الحل :**

$\text{ع}_١ - \text{ع}_٢ = -١ - \text{ت}$

، $\because$ ظا θ = ١ ، $(\text{ع}_١ - \text{ع}_٢)$ في الربع الثالث

$\therefore \theta = \frac{-٣}{٤} \pi$

---

**٢** (جـ)

**الحل :**

عدد الطرق = ${}^{٢+٤-١}\text{ق}_٢ = {}^{٦}\text{ق}_٢$

---

**٣** (ب)

**الحل :**

$$\text{ع} = \sqrt{٢} \left(\text{جتا} \frac{-\pi}{٤} + \text{ت جا} \frac{-\pi}{٤}\right)$$

$$\therefore \text{ع} = \sqrt{٢}\, \text{هـ}^{-\frac{\pi}{٤}\text{ت}}$$

---

**٤** (د)

**الحل :**

${}^{٥}\text{ق}_٠ + {}^{٥}\text{ق}_١ \text{س} + {}^{٥}\text{ق}_٢ \text{س}^٢ + {}^{٥}\text{ق}_٣ \text{س}^٣$

$+ {}^{٥}\text{ق}_٤ \text{س}^٤ + {}^{٥}\text{ق}_٥ \text{س}^٥ = ١٠٢٤$

$\therefore (١ + \text{س})^٥ = ١٠٢٤ \quad \therefore (١ + \text{س})^٥ = ٤^٥ \quad \therefore \text{س} = ٣$

---

**٥** (د)

**الحل :**

المعادلة المصفوفية هي :

$$\begin{pmatrix} ٢ & -٣ & -١ \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ١ & ٠ & -٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٩ \\ ١٥ \\ ١٢ \end{pmatrix}$$

$$\text{وبوضع أ} = \begin{pmatrix} ٢ & -٣ & -١ \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ١ & ٠ & -٢ \end{pmatrix}$$

$$\therefore |\text{أ}| = -٢١ \quad ، \text{أ}^{\text{مل}} = \begin{pmatrix} -٤ & -٦ & -٧ \\ ٥ & -٣ & -٧ \\ -٢ & -٣ & ٧ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{أ}^{-١} = \frac{١}{٢١} \begin{pmatrix} ٤ & ٦ & ٧ \\ -٥ & ٣ & ٧ \\ ٢ & ٣ & -٧ \end{pmatrix}$$

---

**٦** (أ)

**الحل :**

$$\frac{١}{٤\omega^٣ + ٢\omega^٢ + ٣\omega} + \frac{١}{٥\omega^٦ + ٣\omega^٤ + ٤\omega^٢}$$

$$= \frac{١}{٤ + ٢\omega^٢ + ٣\omega} + \frac{١}{٥ + ٣\omega + ٤\omega^٢}$$

$$= \frac{١}{٤ + ٢(-١ - \omega) + ٣\omega} + \frac{١}{٥ + ٣(-١ - \omega^٢) + ٤\omega^٢}$$

$$= \frac{١}{٢ + \omega} + \frac{١}{٢ + \omega^٢} = \frac{٢ + \omega^٢ + ٢ + \omega}{(٢ + \omega)(٢ + \omega^٢)}$$

$$= \frac{٤ + (\omega^٢ + \omega)}{٤ + ٢\omega + ٢\omega^٢ + \omega^٣} = \frac{٤ - ١}{٤ - ٢ + ١} = \frac{٣}{٣} = ١$$

**٧** (د)

**الحل :**

$ح_{٨} = ح_{٩}$   $\therefore \frac{ح_{٩}}{ح_{٨}} = ١$

$\therefore \frac{١٥ - ٨ + ١}{٨} \times \frac{١}{٨ س^{٣}} = ١$

$\therefore ٨ س^{٣} = ١$   $\therefore س = \frac{١}{٢}$

---

**٨** (جـ)

**الحل :**

$$\frac{ع_{١}}{ع_{٢}} = \frac{٨ \left[ جتا (١٨٠ - θ) + ت\ جا (١٨٠° - θ) \right]}{٤ \left[ جتا (٢٧٠° - θ) + ت\ جا (٢٧٠° - θ) \right]}$$

$$= ٢ \left[ جتا (-٩٠°) + ت\ جا (-٩٠°) \right] = -٢ ت$$

---

**٩** (جـ)

**الحل :**

$\because {}^{ن}ق_{ن} + {}^{ن}ل_{ن} = ١ + |\underline{ن} = ٧٢١$

$\therefore |\underline{ن} = ٧٢٠$   $\therefore ن = ٦$

---

**١٠** (ب)

**الحل :**

$$ع_{١}\ ع_{٢} = هـ^{\frac{π}{٢} - \frac{π}{٢} ت + \frac{π}{٦} - \frac{π}{٦} ت}$$

$$= هـ^{\frac{π}{٢} - \frac{π}{٢} ت} = هـ^{\frac{π}{٢}} \times هـ^{-\frac{π}{٢} ت} = هـ^{\frac{π}{٢}} \times - ت$$

$$= - هـ^{\frac{π}{٢}} ت$$

---

**١١** (جـ)

**الحل :**

الطرف الأيمن

$$= \left( \frac{ω^{٢}}{١ + ٢ ω^{٢}} \right)^{٤} + \left( \frac{١ + ٢ ω}{ω} \right)^{٤}$$

$$= \left( \left( \frac{ω^{٢}}{١ + ٢ ω^{٢}} \right)^{٢} \right)^{٢} + \left( \left( \frac{١ + ٢ ω}{ω} \right)^{٢} \right)^{٢}$$

$$= \left( \frac{ω^{٤}}{١ + ٤ ω^{٢} + ٤ ω^{٤}} \right)^{٢} + \left( \frac{١ + ٤ ω + ٤ ω^{٢}}{ω^{٢}} \right)^{٢}$$

$$= \left( \frac{ω}{١ - ٤} \right)^{٢} + \left( \frac{١ - ٤}{ω^{٢}} \right)^{٢} = \frac{ω^{٢}}{٩} + \frac{٩}{ω} = \frac{ω^{٢}}{٩} + ٩ ω^{٢} = \frac{٨٢}{٩} ω^{٢}$$

$\therefore أ ω^{٢} = \frac{٨٢}{٩} ω^{٢}$   $\therefore أ = \frac{٨٢}{٩}$

---

**١٢** (ب)

**الحل :**

$$ح_{ر+١} = {}^{٣ن}ق_{ر} \times \left( \frac{١}{٢ س} \right)^{ر} \times (٢ س^{٢})^{٣ن - ر}$$

$$= {}^{٣ن}ق_{ر} \times ٢^{٣ن - ٢ر} \times س^{٦ن - ٣ر}$$

$\because ح_{٩}$ هو الحد الخالى من س

$\therefore ٦ ن - ٣ \times ٨ = ٠$   $\therefore ن = ٤$

$\therefore ح_{ر+١} = {}^{١٢}ق_{ر} \times ٢^{١٢ - ٢ر} \times س^{٢٤ - ٣ر}$

بوضع $٢٤ - ٣ ر = ٣$   $\therefore ر = ٧$

$\therefore$ معامل $س^{٣} = {}^{١٢}ق_{٧} \times ٢^{١٢ - ١٤} = ١٩٨$

---

**١٣** (د)

**الحل :**

المعادلة المصفوفية :

$$\begin{pmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ ٤ & ٥ & -١ \\ ٢ & ٣ & -١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ \\ ٠ \\ ٠ \end{pmatrix}$$

$$أ = \begin{pmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ ٤ & ٥ & -١ \\ ٢ & ٣ & -١ \end{pmatrix}$$   $\therefore |أ| =$ صفر

، $\because$ المعادلات متجانسة

$\therefore ر (أ) <$ عدد المجاهيل

$\therefore$ للمعادلات عدد لا نهائى من الحلول من بينهم الحل الصفرى

---

**١٤** (أ)

**الحل :**

$\because (أ - س)^{١٤} = أ^{١٤} - {}^{١٤}ق_{١}\ س\ أ^{١٣}$
$+ {}^{١٤}ق_{٢}\ س^{٢}\ أ^{١٢} - \ldots\ldots + س^{١٤}$

وبمقارنة المفكوكين

$\therefore ح_{٣} = {}^{١٤}ق_{٢}\ أ^{١٢}$ ، $ح_{٤} = - {}^{١٤}ق_{٣}\ أ^{١١}$ ، $ح_{٥} = {}^{١٤}ق_{٤}\ أ^{١٠}$

، $\because ٤\ ح_{٥} + ١١ (ح_{٤} + ح_{٣}) = ٠$

$\therefore ٤ \times {}^{١٤}ق_{٤}\ أ^{١٠} - ١١ \times {}^{١٤}ق_{٣}\ أ^{١١} + ١١ \times {}^{١٤}ق_{٢}\ أ^{١٢} = ٠$

بالقسمة على ${}^{١٤}ق_{٢}\ أ^{١٠}$

$\therefore ١١ - ١١ أ + \frac{١١}{٤} أ^{٢} = ٠$ (بالضرب $\times \frac{٤}{١١}$)

$\therefore ٤ - ٤ أ + أ^{٢} = ٠$   $\therefore (٢ - أ)^{٢} = ٠$

$\therefore أ = ٢$

---

**١٥** (١)

**الحل :**

بفرض أن : سعة $ع_{١} = θ_{١}$ ، سعة $ع_{٢} = θ_{٢}$

$\therefore$ سعة $(ع_{١}\ ع_{٢}) = \frac{٥ π}{١٨}$

$\therefore θ_{١} + θ_{٢} = \frac{٥ π}{١٨}$   (١)

، $\because$ سعة $\frac{ع_{١}}{ع_{٢}} = \frac{π}{٩}$

$\therefore θ_{١} - θ_{٢} = \frac{π}{٩}$   (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) : $\therefore θ_{١} = \frac{٧ π}{٣٦}$

---

**١٦** (١)

**الحل :**

الحد الذى له أكبر معامل فى مفكوك $(س + ص)^{ن}$

هو الحد الأوسط

$\therefore ح_{٧}$ هو الحد الأوسط فى المفكوك

$\therefore \frac{ن + ٢}{٢} = ٧$   $\therefore ن = ١٢$

---

**١٧** (ب)

**الحل :**

$$س = \frac{٤}{\sqrt{٣} + ت} \times \frac{\sqrt{٣} - ت}{\sqrt{٣} - ت} = \frac{٤ (\sqrt{٣} - ت)}{٣ + ١} = \sqrt{٣} - ت$$

$$، ص = \frac{٢ (جتا ٠ + ت\ جا ٠)}{جتا \left( \frac{-π}{٦} \right) + ت\ جا \left( \frac{-π}{٦} \right)} = ٢ \left( جتا \frac{π}{٦} + ت\ جا \frac{π}{٦} \right)$$

$$= ٢ \left( \frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢} ت \right) = \sqrt{٣} + ت$$

$\therefore$ س ، ص مترافقان.

---

**١٨** (١)

**الحل :**

$$\begin{vmatrix} ١ & ω & ω^{٢} \\ ω & ω^{٢} & ١ \\ ω^{٢} & ١ & ω \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ω^{٣} & ω & ω^{٢} \\ ω & ω^{٢} & ١ \\ ω^{٢} & ١ & ω \end{vmatrix}$$

«ω عامل مشترك من $ص_{١}$»

$$= ω \begin{vmatrix} ω^{٢} & ١ & ω \\ ω & ω^{٢} & ١ \\ ω^{٢} & ١ & ω \end{vmatrix}$$ «$ص_{١} = ص_{٣}$»

$= ω \times$ صفر = صفر

---

**١٩**

«بإجراء $ع_{١} + (ع_{٢} + ع_{٣})$»

$$\therefore \begin{vmatrix} س + ص + ع + ٢ & ص & ع + ٢ \\ س + ص + ع + ٢ & ص + ٢ & ع \\ س + ص + ع + ٢ & ص & ع \end{vmatrix} = -٤$$

$$\therefore (س + ص + ع + ٢) \begin{vmatrix} ١ & ص & ع + ٢ \\ ١ & ص + ٢ & ع \\ ١ & ص & ع \end{vmatrix} = -٤$$

«بإجراء $ص_{٢} - ص_{١}$ ، $ص_{٣} - ص_{١}$»

$$\therefore (س + ص + ع + ٢) \begin{vmatrix} ١ & ص & ع + ٢ \\ ٠ & ٢ & -٢ \\ ٠ & ٠ & -٢ \end{vmatrix} = -٤$$

$\therefore (س + ص + ع + ٢) \times -٤ = -٤$

$\therefore س + ص + ع = -١$

---

**٢٠**

الطرف الأيمن

$$= \left( \frac{١}{١ + ω ت} - \frac{ω + ت}{١ + ω^{٢} ت} \right)^{٨}$$

$$= \left( \frac{١ + ω^{٢} ت - (ω + ت + ω^{٢} ت - ω)}{١ + ω^{٢} ت + ω ت + (-١)} \right)^{٨}$$

$$= \left( \frac{١ - ت}{ω^{٢} ت + ω ت} \right)^{٨} = \left( \frac{١ - ت}{ت (-١)} \right)^{٨}$$

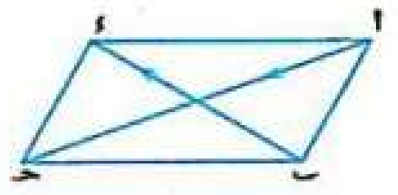
$$= \left( \frac{١ - ت}{-ت} \right)^{٨} = \left( \frac{(١ - ت)^{٢}}{(-ت)^{٢}} \right)^{٤} = \left( \frac{-٢ ت}{-١} \right)^{٤}$$

$= \frac{١٦}{١} = ١٦ =$ الطرف الأيسر.

# إجابات اختبار على الوحدة الأولى في الهندسة الفراغية

**١** (د)

**الحل :**



مساحة ▱ أ ب حـ ء = $\frac{١}{٢}$ ‖ $\overrightarrow{\text{أحـ}} \times \overrightarrow{\text{ب ء}}$ ‖

، ∵ $\overrightarrow{\text{أحـ}} \times \overrightarrow{\text{ب ء}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ ٢ & ٢ & -١ \\ -١ & ٢ & -٣ \end{vmatrix}$

= −٤ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٧ $\overrightarrow{\text{ص}}$ + ٦ $\overrightarrow{\text{ع}}$

∴ مساحة ▱ أ ب حـ ء = $\frac{١}{٢}\sqrt{١٦ + ٤٩ + ٣٦}$

= $\frac{١}{٢}\sqrt{١٠١}$ وحدة مربعة.

---

**٢** (ب)

**الحل :**

معادلة الكرة هي : ٣ س$^{٢}$ + ٣ ص$^{٢}$ + ٣ ع$^{٢}$ + ١٨ س − ٢٤ ص + ١٢ ع + ٣ = ٠

وبالقسمة على ٣

∴ س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ + ع$^{٢}$ + ٦ س − ٨ ص + ٤ ع + ١ = ٠

، ∵ نق$^{٢}$ = ل$^{٢}$ + ك$^{٢}$ + ن$^{٢}$ − ء = ٩ + ١٦ + ٤ − ١ = ٢٨

∴ طول القطر = ٤ $\sqrt{٧}$ وحدة طول.

---

**٣** (د)

**الحل :**

$\overrightarrow{\text{أ}} . \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{حـ}} = \begin{vmatrix} ١ & -١ & ٢ \\ ٢ & -٢ & ٠ \\ ٠ & ٢ & ٤ \end{vmatrix} = ١٦$

---

**٤** (د)

**الحل :**

$\overrightarrow{\text{أ}} = -\overrightarrow{\text{ب}}$

∴ θ = ١٨٠°

---

**٥** (د)

**الحل :**

طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، −٣ ، ٤) على محور س = $\sqrt{(-٣)^{٢} + (٤)^{٢}}$ = ٥ وحدات طول

---

**٦** (جـ)

**الحل :**

$\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}$ = (٢ ، ٣ ، ك − ٥)

، ∵ ‖ $\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}$ ‖ = ٧     ∴ ٢$^{٢}$ + ٣$^{٢}$ + (ك − ٥)$^{٢}$ = ٤٩

∴ ٤ + ٩ + ك$^{٢}$ − ١٠ ك + ٢٥ = ٤٩

∴ ك$^{٢}$ − ١٠ ك − ١١ = ٠     ∴ (ك − ١١) (ك + ١) = ٠

∴ ك = −١ (مرفوض) أ، ك = ١١

---

**٧** (د)

**الحل :**

حجم متوازى السطوح = | $\overrightarrow{\text{أ}} . (\overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{حـ}})$ |

، ∵ $\overrightarrow{\text{أ}} . (\overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{حـ}}) = \begin{vmatrix} ٢ & -٤ & ١ \\ ٠ & ٢ & -٣ \\ ٢ & ٢ & ٢ \end{vmatrix} = ٦٠$

∴ حجم متوازى السطوح = ٦٠ وحدة حجم.

---

**٨** (د)

**الحل :**

معادلة الكرة :

(س − ٣)$^{٢}$ + (ص + ٤)$^{٢}$ + (ع − ١٢)$^{٢}$ = ١٦٩

نقط التقاطع مع محور السينات نضع ص = ٠ ، ع = ٠

∴ (س − ٣)$^{٢}$ + ١٦ + ١٤٤ = ١٦٩

∴ (س − ٣)$^{٢}$ = ٩     ∴ س − ٣ = ± ٣

∴ س = ٣ ± ٣     ∴ س = ٦ أ، صفر

∴ أ ب = ٦ وحدة طول.

---

**٩** (د)

**الحل :**

∵ جتا$^{٢}$ ٣٠° + جتا$^{٢}$ ٧٠° + جتا$^{٢}$ θ = ١

∴ جتا θ ≈ ± ٠,٣٦٥     ∴ θ ≈ ٦٨,٦١° أ، ١١١,٣٩°

---

**١٠** (جـ)

**الحل :**

أ ب = $\sqrt{(٧ - ٥)^{٢} + (١ - ٣)^{٢} + (٣ - ٤)^{٢}}$ = ٣ وحدة طول

ب حـ = $\sqrt{(٥ - ٣)^{٢} + (٣ - ٥)^{٢} + (٤ - ٣)^{٢}}$ = ٣ وحدة طول

أ حـ = $\sqrt{(٧ - ٣)^{٢} + (١ - ٥)^{٢} + (٣ - ٣)^{٢}}$ = ٤ $\sqrt{٢}$ وحدة طول.

∴ Δ أ ب حـ متساوى الساقين.

**١١** (جـ)

**الحل :**

∵ الكرة تمس المستوى س ص

∴ نق = | ع | = ٤ وحدة طول     ∴ معادلة الكرة هى :

(س − ٢)$^{٢}$ + (ص + ٣)$^{٢}$ + (ع − ٤)$^{٢}$ = ١٦

---

**١٢** (د)

**الحل :**

∵ $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}}$ = (٢ ، ٠ ، ٠) − (٠ ، ١ ، ٢)

= (٢ ، −١ ، −٢)

، $\overrightarrow{\text{أحـ}} = \overrightarrow{\text{حـ}} - \overrightarrow{\text{أ}}$ = (٠ ، ١ ، ٠) − (٠ ، ١ ، ٢)

= (٠ ، ٠ ، −٢)

∴ جتا θ = $\frac{(٢ ، -١ ، -٢) . (٠ ، ٠ ، -٢)}{\sqrt{٤ + ١ + ٤}\sqrt{٠ + ٠ + ٤}} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

∴ θ ≈ ٤٨° ١١َ

---

**١٣** (د)

**الحل :**

‖ $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}$ ‖ = ‖ $\overrightarrow{\text{أ}}$ ‖ ‖ $\overrightarrow{\text{ب}}$ ‖ جا θ = جا θ

، $\overrightarrow{\text{أ}} . \overrightarrow{\text{ب}}$ = ‖ $\overrightarrow{\text{أ}}$ ‖ ‖ $\overrightarrow{\text{ب}}$ ‖ جتا θ = جتا θ

∴ المقدار = جا$^{٢}$ θ + جتا$^{٢}$ θ = ١

---

**١٤** (ب)

**الحل :**

∵ θ منفرجة     ∴ $\overrightarrow{\text{أ}} . \overrightarrow{\text{ب}}$ < ٠

∴ (٢ ن ، ٤ ن ، ١) . (٧ ، −٢ ، −٦) < ٠

∴ ١٤ ن − ٨ ن − ٦ < ٠     ∴ ٦ ن − ٦ < ٠

∴ ن < ١     ∴ ن ∈ ]−∞ ، ١[

---

**١٥** (ب)

**الحل :**

∵ الكرة تمر برءوس مكعب

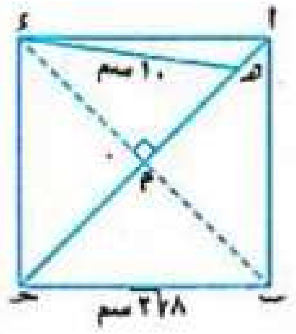
∴ طول قطر الكرة = طول قطر المكعب = ١٢ $\sqrt{٣}$ وحدة طول

∴ معادلة الكرة هى : س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ + ع$^{٢}$ = ١٠٨

---

**١٦** (جـ)

**الحل :**



ب ء = أ حـ = ١٦ سم

∴ ء م = ٨ سم ، من Δ ء هـ م

∴ هـ م = $\sqrt{(١٠)^{٢} - (٨)^{٢}}$ = ٦ سم

∴ أ هـ = ٨ − ٦ = ٢ سم

∴ $\overrightarrow{\text{حـ ب}} . \overrightarrow{\text{أهـ}}$ = ٨ $\sqrt{٢}$ × ٢ × جتا ١٣٥° = −١٦

---

**١٧** (جـ)

**الحل :**

بفرض $\overrightarrow{\text{حـ}}$ = ل $\overrightarrow{\text{أ}}$ + م $\overrightarrow{\text{ب}}$

∴ (٨ ، ١٩ ، ٤) = (٤ ل ، ٣ ل ، ٢ ل) + (−٢ م ، ٥ م ، −م)

∴ ٤ ل − ٢ م = ٨   ،   ٣ ل + ٥ م = ١٩

وبحل المعادلتين : ∴ ل = ٣ ، م = ٢

∴ $\overrightarrow{\text{حـ}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{أ}}$ + ٢ $\overrightarrow{\text{ب}}$

---

**١٨** (جـ)

**الحل :**

$\overrightarrow{\text{وأ}}$ = (٥ ، ٥ ، ٥)

∴ متجه وحدة فى اتجاه $\overrightarrow{\text{وأ}}$ = $\frac{(٥ ، ٥ ، ٥)}{\sqrt{٢٥ + ٢٥ + ٢٥}}$

= $\left(\frac{١}{\sqrt{٣}} ، \frac{١}{\sqrt{٣}} ، \frac{١}{\sqrt{٣}}\right)$

، ∵ معيار $\overrightarrow{\text{ق}}$ = ٢٥ نيوتن

∴ $\overrightarrow{\text{ق}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (٢٥ ، ٢٥ ، ٢٥)

---

**١٩**

∵ جتا$^{٢}$ θ$_{١}$ + جتا$^{٢}$ θ$_{٢}$ + جتا$^{٢}$ θ$_{٣}$ = ١

، ∵ θ$_{١}$ = θ$_{٢}$ = θ$_{٣}$ = θ

∴ ٣ جتا$^{٢}$ θ = ١     ∴ جتا$^{٢}$ θ = $\frac{١}{٣}$

∴ جتا θ = ± $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

∴ $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ٢١ $\sqrt{٣}$ (± $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ $\overrightarrow{\text{س}}$ ± $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ $\overrightarrow{\text{ص}}$ ± $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ $\overrightarrow{\text{ع}}$)

= ± ٢١ ($\overrightarrow{\text{س}}$ + $\overrightarrow{\text{ص}}$ + $\overrightarrow{\text{ع}}$)

---

**٢٠**

م$_{١}$ = (−١ ، ٤ ، ك) ، نق$_{١}$ = ٥

، م$_{٢}$ = (٣ ، ٠ ، ٣) ، نق$_{٢}$ = ٤

∴ م$_{١}$ م$_{٢}$ = $\sqrt{(-٤)^{٢} + (٤)^{٢} + (ك - ٣)^{٢}}$

∵ التماس من الخارج     ∴ م$_{١}$ م$_{٢}$ = نق$_{١}$ + نق$_{٢}$

∴ $\sqrt{٣٢ + (ك - ٣)^{٢}}$ = ٩

∴ (ك − ٣)$^{٢}$ = ٤٩     ∴ ك − ٣ = ± ٧

∴ ك = ١٠ أ، ك = −٤

## إجابات اختبار على الوحدة الثانية في الهندسة الفراغية

**١** (جـ) **٢** (ب)

---

**٣** (جـ)

**الحل :**

∵ المستقيم // المستوى

∴ متجه اتجاه المستقيم ⊥ متجه الاتجاه العمودى للمستوى

∴ (٣ ، ١ ، −٣) . (١ ، ك ، ٢) = ٠

∴ ٣ + ك − ٦ = ٠

∴ ك = ٣

---

**٤** (د)

**الحل :**

$$\text{حا}\,\theta = \left|\frac{(-٥ ، -١ ، ٤) . (٣ ، -٤ ، ٢)}{\sqrt{٢٥ + ١ + ١٦}\sqrt{٩ + ١٦ + ٤}}\right| = \frac{٣}{\sqrt{١٢١٨}}$$

∴ θ = ٤َ ٨٥°

---

**٥** (د)

**الحل :**

متجه اتجاه المستقيم المطلوب

$$= \begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ ٢ & -١ & ١ \\ ١ & -٣ & -١ \end{vmatrix} = (٤ ، ٢ ، -٥)$$

وبوضع س = ١ في كلًا من معادلتي المستويين

∴ − ص + ع = −١ ، −٣ ص − ع = −٣

وبحل المعادلتين معًا ∴ ص = ١ ، ع = ٠

∴ (١ ، ١ ، ٠) تقع على خط تقاطع المستويين

∴ معادلة خط التقاطع هي $\frac{س - ١}{٤} = \frac{ص - ١}{٢} = \frac{ع}{-٥}$

---

**٦** (د)

**الحل :**

∵ المستوى عمودى على المستقيم

$\overleftarrow{ر_٢} = (٤ ، ١٥ ، ٨) + ك_٢ (٢ ، ٣ ، -١)$

∴ المتجه العمودى على المستوى $\overleftarrow{ن} = (٢ ، ٣ ، -١)$

∵ المستوى يحتوى المستقيم

$\overleftarrow{ر_١} = (١ ، ٢ ، ٤) + ك_١ (٤ ، ١ ، ١١)$

∴ النقطة (١ ، ٢ ، ٤) تنتمي للمستوى

∴ معادلة المستوى هي :

(س ، ص ، ع) . (٢ ، ٣ ، −١) = (١ ، ٢ ، ٤) . (٢ ، ٣ ، −١)

∴ المعادلة هي : ٢ س + ٣ ص − ع = ٤

---

**٧** (ب)

**الحل :**

بفرض θ هي قياس الزاوية بين متجه اتجاه المستقيم والمتجه العمودى على المستوى فإن :

$$\text{حا}\,\theta = \left|\frac{(٢ ، ١ ، ٢) . (١ ، ١ ، ٠)}{\sqrt{٤ + ١ + ٤}\sqrt{١ + ١}}\right| = \frac{١}{\sqrt{٢}}$$

∴ θ = ٤٥°

∴ قياس الزاوية بين المستقيم والمستوى = ٩٠° − ٤٥° = ٤٥°

---

**٨** (ب)

**الحل :**

$$\text{نق} = \frac{|٢ (-٢) + ٢ (١) + (-١) - ٣|}{\sqrt{٤ + ٤ + ١}} = ٢$$

∴ حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^٣ = $\frac{٣٢}{٣}$ π وحدة مكعبة

---

**٩** (جـ)

**الحل :**

∵ س + ٥ ص − ٦ ع = ٣٠ وبالقسمة على ٣٠

∴ $\frac{س}{٣٠} + \frac{ص}{٦} + \frac{ع}{-٥} = ١$

∴ أ + ب + جـ = ٣٠ + ٦ − ٥ = ٣١

---

**١٠** (ب)

**الحل :**

متجه الاتجاه العمودى على المستوى المطلوب هو

$\overleftarrow{ن} = \overleftarrow{ن_١} \times \overleftarrow{ن_٢} = (١ ، -١ ، ١) \times (٢ ، ١ ، ١)$

$$= \begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ ١ & -١ & ١ \\ ٢ & ١ & ١ \end{vmatrix} = -٢ \overleftarrow{س} + \overleftarrow{ص} + ٣ \overleftarrow{ع}$$

ويمر بالنقطة : أ (١ ، −١ ، ١)

∴ المعادلة هي : $\overleftarrow{ر}$ . (−٢ ، ١ ، ٣) = (١ ، −١ ، ١) . (−٢ ، ١ ، ٣)

∴ $\overleftarrow{ر}$ . (−٢ ، ١ ، ٣) = ٠ ∴ −٢ س + ص + ٣ ع = ٠

**١١** (ب)

**الحل :**

حتا^٢ $\theta_{س}$ + حتا^٢ ٦٠° + حتا^٢ ٦٠° = ١

∴ حتا^٢ $\theta_{س}$ = $\frac{١}{٢}$ ∴ حتا $\theta_{س}$ = ± $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

∴ $\theta_{س}$ = ٤٥° أ، ١٣٥°

---

**١٢** (ب)

**الحل :**

∵ المستويان متعامدان

∴ (٣ ، −١ ، ٢) . (ك ، −٤ ، ١) = ٠

∴ ٣ ك + ٤ + ٢ = ٠ ∴ ك = −٢

---

**١٣** (جـ)

**الحل :**

معادلة المستوى هي :

(س ، ص ، ع) . (٢ ، ١ ، −٤) = (١ ، ٢ ، ٠) . (٢ ، ١ ، −٤)

∴ ٢ س + ص − ٤ ع = ٤

---

**١٤** (د)

**الحل :**

متجه اتجاه المستقيم العمودى على المستوى

٣ س − ص + ٥ ع = ٧٧

هو (٣ ، −١ ، ٥) ويمر بالنقطة (٢ ، ٤ ، ١)

∴ معادلته : $\overleftarrow{ر}$ = (٢ ، ٤ ، ١) + ك (٣ ، −١ ، ٥)

---

**١٥** (ب)

**الحل :**

المقدار = (٢ حتا^٢ $\theta_{س}$ − ١) + (٢ حتا^٢ $\theta_{ص}$ − ١)
+ (٢ حتا^٢ $\theta_{ع}$ − ١)

= ٢ (حتا^٢ $\theta_{س}$ + حتا^٢ $\theta_{ص}$ + حتا^٢ $\theta_{ع}$) − ٣

= ٢ − ٣ = −١

---

**١٦** (جـ)

**الحل :**

متجه اتجاه المستقيم هو $\overleftarrow{أب}$ = (٢ ، −١ ، −٣)

∴ معادلة المستقيم هي $\overleftarrow{ر}$ = (١ ، −١ ، ٠) + ك (٢ ، −١ ، −٣)

∴ س = ١ + ٢ ك ، ص = −١ − ك ، ع = −٣ ك

**١٧** (ب)

**الحل :**

٦ س + ٣ ص + ٤ ع = ٧٢ بالقسمة على ٧٢

∴ $\frac{س}{١٢} + \frac{ص}{٢٤} + \frac{ع}{١٨} = ١$

∴ حجم الهرم و أ ب جـ = $\frac{١}{٣} \left(\frac{١}{٢} \times ١٢ \times ٢٤\right) \times ١٨$

= ٨٦٤ وحدة حجم

---

**١٨** (أ)

**الحل :**

∵ (١ ، ٢ ، ٣) . (١ ، −٢ ، ١) = ٠

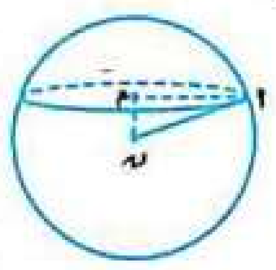
∴ المستقيم // المستوى

---

**١٩**

مركز الكرة هو ن(−٣ ، −٢ ، ١)

، طول نصف قطرها نق = $\sqrt{١٥}$ وحدة طول.



ويفرض م هي مركز المقطع الناتج

∴ بعد مركز الكرة عن المستوى

$$= م ن = \frac{|٢ (-٣) - (-٢) - ٢ (١) + ١٢|}{\sqrt{٤ + ١ + ٤}}$$

= ٢ وحدة طول.

∴ نق للدائرة = $\sqrt{١٥ - ٤} = \sqrt{١١}$ وحدة طول.

∴ مساحة المقطع الناتج = ١١ π وحدة مربعة.

---

**٢٠**

∵ $\frac{٤}{١} \neq \frac{١}{-١} \neq \frac{٣}{٢}$

∴ المستقيمان غير متوازيين.

، عند نقطة التقاطع يكون : $\overleftarrow{ر_١} = \overleftarrow{ر_٢}$

∴ (٣ ، −١ ، ٢) + ك_١ (٤ ، ١ ، ٣)
= (٠ ، ٤ ، −١) + ك_٢ (١ ، −١ ، ٢)

∴ ٣ + ٤ ك_١ = ك_٢

∴ ٤ ك_١ − ك_٢ = −٣ (١)

، −١ + ك_١ = ٤ − ك_٢ ∴ ك_١ + ك_٢ = ٥ (٢)

، ٢ + ٣ ك_١ = −١ + ٢ ك_٢

∴ ٢ ك$_١$ − ٢ ك$_٢$ = −٣ (٣)

من (١) ، (٢) ينتج أن : ك$_١$ = $\frac{٢}{٥}$ ، ك$_٢$ = $\frac{٢٣}{٥}$

وبالتعويض فى معادلة (٣) : ٣ × $\frac{٢}{٥}$ − ٢ × $\frac{٢٣}{٥}$ ≠ −٣

أى أن هذه القيم لا تحقق معادلة (٣)

∴ المستقيمان غير متقاطعين.

∴ المستقيمان متخالفان.

## إجابات اختبار تراكمى على الوحدة الأولى والثانية فى الهندسة الفراغية

**١** (أ)

**الحل :**

$\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{حـ}}$ = صفر

∴ $\begin{vmatrix} ١ & −٢ & ١ \\ \text{ك} & −٥ & ٣ \\ ٥ & −٩ & ٤ \end{vmatrix}$ = صفر

∴ ٧ + ٢ (٤ ك − ١٥) + (−٩ ك + ٢٥) = صفر

∴ ٧ + ٨ ك − ٣٠ − ٩ ك + ٢٥ = ٠ ∴ ك = ٢

**٢** (ب)

**الحل :**

∵ $(٢\sqrt{٥})^٢$ = (٢ ك)$^٢$ + (−٢)$^٢$ + (٤)$^٢$ − ٢ ك

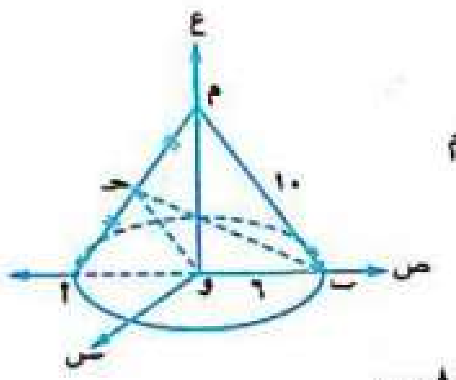
∴ ٢٠ = ٤ ك$^٢$ + ٤ + ١٦ − ٢ ك

∴ ٤ ك$^٢$ − ٢ ك = ٠ ∴ ٢ ك (٢ ك − ١) = ٠

∴ ك = ٠ (مرفوض) أ، ك = $\frac{١}{٢}$

**٣** (جـ)

**الحل :**



∵ محيط الدائرة = ١٢ π سم

∴ و ب = ٦ سم

، من Δ م ب و :

∴ م و = $\sqrt{(١٠)^٢ − (٦)^٢}$ = ٨ سم

∴ ب (٠ ، ٦ ، ٠) ، أ (٠ ، −٦ ، ٠) ، م (٠ ، ٠ ، ٨)

∴ حـ منتصف $\overline{\text{أم}}$ = (٠ ، −٣ ، ٤)

∴ $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$ = (٠ ، −٩ ، ٤) ، $\overrightarrow{\text{حـ و}}$ = (٠ ، ٣ ، −٤)

∴ $\overrightarrow{\text{ب حـ}} \cdot \overrightarrow{\text{حـ و}}$ = (٠ ، −٩ ، ٤) . (٠ ، ٣ ، −٤)

= ٠ − ٢٧ − ١٦ = −٤٣

**٤** (جـ)

**الحل :**

∵ $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{حـ}}$ = $\begin{vmatrix} ٣ & −٤ & ٠ \\ ٠ & −٤ & ٣ \\ ٠ & ٠ & ٥ \end{vmatrix}$

= ٣ × −٤ × ٥ = −٦٠

∴ حجم متوازى السطوح = ٦٠ وحدة مكعبة.

**٥** (ب)

**الحل :**

∵ النقطة (٢ ، −١ ، ٣) تقع على المستوى ، متجه اتجاه المستقيم العمودى على المستوى (٢ ، ٢ ، −١)

∴ معادلة المستوى هى :

(س ، ص ، ع) . (٢ ، ٢ ، −١)

= (٢ ، −١ ، ٣) . (٢ ، ٢ ، −١)

∴ ٢ س + ٢ ص − ع = −١

**٦** (أ)

**الحل :**

∵ $\frac{٢}{٣}$ = $\frac{١٢}{١٢}$ = $\frac{−٤}{−٤}$ ≠ $\frac{٩}{−١٧}$

∴ المستويان متوازيان وغير منطبقين

، بوضع ص = ٠ ، ع = ٠ فى معادلة المستوى الأول

∴ النقطة (٣ ، ٠ ، ٠) تقع على المستوى الأول

∴ البعد بين المستويين = $\frac{|٣ (٣) + ١٢ (٠) − ٤ (٠) + ١٧|}{\sqrt{٩ + ١٤٤ + ١٦}}$

= ٢ وحدة طول

**٧** (د)

**الحل :**

∵ (٢ ، −١ ، ٣) متجه اتجاه للمستقيم

، (٣ ، ٢ ، ١) متجه اتجاه عمودى على المستوى

∴ جتا θ = $\frac{|(٢ ، −١ ، ٣) . (٣ ، ٢ ، ١)|}{\sqrt{٤ + ١ + ٩} \times \sqrt{٩ + ٤ + ١}}$ = $\frac{١}{٢}$

∴ θ = ٦٠° وهى الزاوية بين متجه اتجاه المستقيم والمتجه العمودى على المستوى

∴ قياس الزاوية الصغرى بين المستقيم والمستوى

= ٩٠° − ٦٠° = ٣٠°

**٨** (أ)

**الحل :**

∵ متجه اتجاه ل$_١$ هو (٢ ، −٦ ، ك)

، متجه اتجاه ل$_٢$ هو (٦ ، م ، ٣)

، ∵ ل$_١$ // ل$_٢$ ∴ $\frac{٢}{٦}$ = $\frac{−٦}{\text{م}}$ = $\frac{\text{ك}}{٣}$

∴ م = −١٨ ، ك = ١ ∴ ك + م = −١٧

**٩** (جـ)

**الحل :**

∵ النقطة أ (−٢ ، ٣ ، ١) ∈ المستقيم

وكذلك النقطة (٠ ، ٧ ، ٥) ∈ المستقيم

∴ طول العمود المرسوم من النقطة أ على المستقيم

= طول العمود المرسوم من النقطة (٠ ، ٧ ، ٥)

**١٠** (أ)

**الحل :**

متجه اتجاه المستقيم ل$_١$ هو (١ ، $\sqrt{٢}$ ، −١)

، متجه اتجاه المستقيم ل$_٢$ هو (−١ ، ٠ ، ١)

∴ جتا θ = $\frac{|(١ ، \sqrt{٢} ، −١) . (−١ ، ٠ ، ١)|}{\sqrt{١ + ٢ + ١}\sqrt{١ + ١}}$

= $\frac{٢}{٢\sqrt{٢}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

∴ θ = ٤٥°

**١١** (جـ)

**الحل :**

$\overrightarrow{\text{ب ء}}$ = $\overrightarrow{\text{ء}}$ − $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٠ ، ٠ ، ٠) − (٤ ، ٨ ، ٦)

= (−٤ ، −٨ ، −٦)

، $\overrightarrow{\text{حـ أ}}$ = $\overrightarrow{\text{أ}}$ − $\overrightarrow{\text{حـ}}$ = (٠ ، ٨ ، ٠) − (٤ ، ٠ ، ٦)

= (−٤ ، ٨ ، −٦)

$\overrightarrow{\text{ب ء}} \cdot \overrightarrow{\text{حـ أ}}$ = (−٤ ، −٨ ، −٦) . (−٤ ، ٨ ، −٦)

= ١٦ − ٦٤ + ٣٦ = −١٢

**١٢** (د)

**الحل :**

المستوى يوازى كل من المتجهين $\overrightarrow{\text{ى}_١}$ ، $\overrightarrow{\text{ى}_٢}$

∴ $\overrightarrow{\text{ن}}$ = $\overrightarrow{\text{ى}_١} \times \overrightarrow{\text{ى}_٢}$ = $\begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ ١ & −٢ & ١ \\ ٣ & ٢ & ٤ \end{vmatrix}$

= −١٠ $\overrightarrow{\text{س}}$ − $\overrightarrow{\text{ص}}$ + ٨ $\overrightarrow{\text{ع}}$

∴ معادلة المستوى : $\overrightarrow{\text{ر}}$ . (−١٠ ، −١ ، ٨)

= (−٢ ، ٣ ، ٤) . (−١٠ ، −١ ، ٨)

أى : ١٠ س + ص − ٨ ع + ٤٩ = ٠

**١٣** (أ)

**الحل :**

بضرب المعادلة الأولى × −٢ ثم الجمع إلى المعادلة الثانية

∴ −٢ ص + ع = ٢ ∴ ص = $\frac{ع − ٢}{٢}$

، بضرب المعادلة الأولى × −٣ والثانية × ٢ والجمع

∴ س − ٤ ص = ٧ ∴ ص = $\frac{س − ٧}{٤}$

∴ $\frac{س − ٧}{٤}$ = ص = $\frac{ع − ٢}{٢}$ هى معادلة خط التقاطع

**١٤** (جـ)

**الحل :**

∵ $\overrightarrow{\text{ى}_١}$ = (−٢ ، ١ ، ٣) ، $\overrightarrow{\text{ى}_٢}$ = (٢ ، −١ ، −٣)

∵ $\frac{−٢}{٢}$ = $\frac{١}{−١}$ = $\frac{٣}{−٣}$ = −١

∴ $\overrightarrow{\text{ى}_١}$ // $\overrightarrow{\text{ى}_٢}$ (المستقيمان متوازيان)

**١٥** (جـ)

**الحل :**

($\overrightarrow{\text{س}} \times \overrightarrow{\text{ص}}$) . $\overrightarrow{\text{ع}}$ + $\overrightarrow{\text{س}}$ . $\overrightarrow{\text{ص}}$ = $\overrightarrow{\text{ع}}$ . $\overrightarrow{\text{ع}}$ + صفر = ١

**١٦** (أ)

**الحل :**

∵ $\overrightarrow{\text{و م}}$ ⊥ المستوى ، م ∈ المستوى

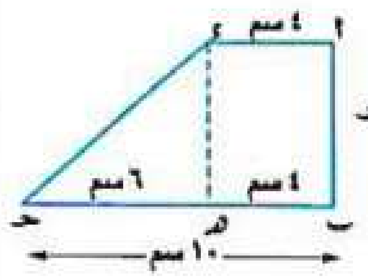
∴ معادلة المستوى هى :

(س ، ص ، ع) . (٢ ، ٣ ، ١) = (٢ ، ٣ ، ١) . (٢ ، ٣ ، ١)

∴ ٢ س + ٣ ص + ع = ١٤

**١٧** (جـ)

**الحل :**



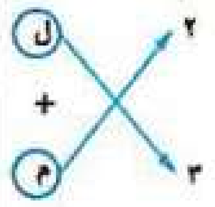
$\overline{\text{حـ ء}} \cdot \overline{\text{حـ ب}}$ = (حـ ء) (حـ ب) جتا حـ

= (حـ ء) (١٠) $\left(\frac{٦}{\text{ء حـ}}\right)$

= ٦٠

**١٨** (جـ)

**الحل :**



عندما يقسم المستوى ص ع الخط

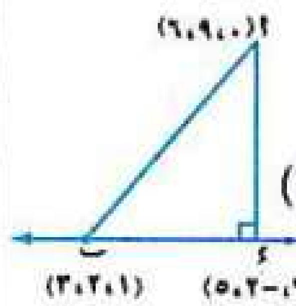
الواصل بين النقطتين بالنسبة ل : م

فإن الإحداثى السينى لنقطة التقسيم = صفر

∴ ٢ م + ٣ ل = ٠ ∴ $\frac{\text{ل}}{\text{م}} = \frac{-٢}{٣}$

**١٩**

نوجد معادلة الخط المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ :



متجه اتجاه المستقيم

$\overline{\text{ب حـ}}$ = (٧ ، −٢ ، ٥) − (١ ، ٢ ، ٣)

= (٦ ، −٤ ، ٢)

∴ معادلة الخط المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ هى :

$\overline{\text{ر}}$ = (١ ، ٢ ، ٣) + ك (٦ ، −٤ ، ٢)

∴ نقطة المسقط ولتكن

ء = (١ + ٦ ك ، ٢ − ٤ ك ، ٣ + ٢ ك)

$\overline{\text{أ ء}}$ = (١ + ٦ ك ، ٢ − ٤ ك ، ٣ + ٢ ك) − (٠ ، ٩ ، ٦)

= (١ + ٦ ك ، −٧ − ٤ ك ، −٣ + ٢ ك)

∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ء}} \perp \overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ ∴ $\overline{\text{أ ء}} \cdot \overline{\text{ب حـ}}$ = صفر

(١ + ٦ ك ، −٧ − ٤ ك ، −٣ + ٢ ك) . (٦ ، −٤ ، ٢)

= صفر

٦ + ٣٦ ك + ٢٨ + ١٦ ك + (−٦) + ٤ ك = ٠

٥٦ ك = −٢٨ ∴ ك = $-\frac{١}{٢}$

∴ النقطة ء هى (−٢ ، ٤ ، ٢)

**٢٠**

① $\overline{\text{أ ب}} = \overline{\text{ب}} - \overline{\text{أ}}$ = (٣ ، ٢ ، ٣)

$\overline{\text{ب حـ}} = \overline{\text{حـ}} - \overline{\text{ب}}$ = (−٢ ، ٢ ، ٠)

$\overline{\text{ء حـ}} = \overline{\text{حـ}} - \overline{\text{ء}}$ = (٣ ، ٢ ، ٣)

$\overline{\text{أ ء}} = \overline{\text{ء}} - \overline{\text{أ}}$ = (−٢ ، ٢ ، ٠)

∴ $\overline{\text{أ ب}} = \overline{\text{ء حـ}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}} = \overline{\text{أ ء}}$

∴ أ ب حـ ء متوازى أضلاع

$$\overline{\text{أ ب}} \times \overline{\text{أ ء}} = \begin{vmatrix} \overline{\text{س}} & \overline{\text{ص}} & \overline{\text{ع}} \\ ٣ & ٢ & ٣ \\ -٢ & ٢ & ٠ \end{vmatrix}$$

= −٦ $\overline{\text{س}}$ − ٦ $\overline{\text{ص}}$ + ١٠ $\overline{\text{ع}}$

∴ مساحة متوازى الأضلاع = $\|\overline{\text{أ ب}} \times \overline{\text{أ ء}}\|$

= $\sqrt{(-٦)^٢ + (-٦)^٢ + (١٠)^٢}$

= ٢ $\sqrt{٤٣}$ وحدة مساحة

② متجه الوحدة العمودى على مستوى المتوازى الأضلاع

$$= \frac{\overline{\text{أ ب}} \times \overline{\text{أ ء}}}{\|\overline{\text{أ ب}} \times \overline{\text{أ ء}}\|} = \left(\frac{-٦}{٢\sqrt{٤٣}} ، \frac{-٦}{٢\sqrt{٤٣}} ، \frac{١٠}{٢\sqrt{٤٣}}\right)$$

$$= \left(\frac{-٣}{\sqrt{٤٣}} ، \frac{-٣}{\sqrt{٤٣}} ، \frac{٥}{\sqrt{٤٣}}\right)$$

---

## اجابات اختبارات الكتاب المدرسى

### الاختبار الأول

**١** ① (د) ② (أ) ③ (د) ④ (ب) ⑤ (أ) ⑥ (د)

**٢** ① −٦٠٤٨ ② {٢} ③ ٦

④ ٨ $\overline{\text{س}}$ − ٥ $\overline{\text{ص}}$ − ٦ $\overline{\text{ع}}$

⑤ (س − ٢)$^٢$ + (ص + ٣)$^٢$ + (ع − ١)$^٢$ = ٢٠

⑥ $\overline{\text{ر}}$ = (٢ ، −١ ، ٤) + ك (٣ ، −١ ، ٢)

، $\frac{\text{س} - ٢}{٣} = \frac{\text{ص} + ١}{-١} = \frac{\text{ع} - ٤}{٢}$

**٣**

(أ) ع$_{\text{ر} + ١}$

= $^{١٥}\text{ق}_{\text{ر}} \left(\frac{١}{\text{س}^٢}\right)^{\text{ر}} (٢\text{ س})^{١٥ - \text{ر}}$

= $^{١٥}\text{ق}_{\text{ر}}$ (س)$^{-٢\text{ر}}$ (٢)$^{١٥ - \text{ر}}$ (س)$^{١٥ - \text{ر}}$

= $^{١٥}\text{ق}_{\text{ر}}$ (٢)$^{١٥ - \text{ر}}$ س$^{١٥ - ٣\text{ر}}$

، بوضع ١٥ − ٣ ر = صفر ∴ ر = ٥

∴ قيمة الحد الخالى من س هو

$^{١٥}\text{ق}_{٥}$ (٢)$^{١٥ - ٥}$ = $^{١٥}\text{ق}_{٥}$ × ٢$^{١٠}$ = ٣٠٧٥٠٧٢

، بوضع ١٥ − ٣ ر = ٥ ∴ ر = $\frac{١٠}{٣}$ ∉ ط

∴ لا يوجد حد يشتمل على س$^٥$

(ب) بوضع : $\frac{\text{س} + ٢}{٢} = \frac{٢\text{ ص} - ١}{٥} = \frac{٣\text{ ع} + ٢}{٤}$ = ك

∴ س = ٢ ك − ٢ ، ص = $\frac{٥}{٢}$ ك + $\frac{١}{٢}$

، ع = $\frac{٤}{٣}$ ك − $\frac{٢}{٣}$

وهى المعادلات البارامترية للمستقيم

، المعادلة المتجهة :

$\overline{\text{ر}}$ = (−٢ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{-٢}{٣}$) + ك (٢ ، $\frac{٥}{٢}$ ، $\frac{٤}{٣}$)

**٤**

(أ) $\text{ب} = \begin{pmatrix} ١ & -١ & ٢ \\ ٢ & -٣ & ١ \\ ١ & ٥ & ٢١ \end{pmatrix}$

|ب| = −١

مصفوفة المرافقات للمصفوفة

$\text{ب} = \begin{pmatrix} -٦٨ & -٤١ & ١٣ \\ ٣١ & ١٩ & -٦ \\ ٥ & ٣ & -١ \end{pmatrix}$

$\text{ب}^{\text{مل}} = \begin{pmatrix} -٦٨ & ٣١ & ٥ \\ -٤١ & ١٩ & ٣ \\ ١٣ & -٦ & -١ \end{pmatrix}$

$\text{ب}^{-١} = \begin{pmatrix} ٦٨ & -٣١ & -٥ \\ ٤١ & -١٩ & -٣ \\ -١٣ & ٦ & ١ \end{pmatrix}$

(ب) ع = ٢ − ٢ $\sqrt{٣}$ ت

∴ ل = $\sqrt{(٢)^٢ + (-٢\sqrt{٣})^٢}$ = ٤

∴ س > ٠ ، ص < ٠

∴ θ تقع فى الربع الرابع

∴ θ = ظا$^{-١}$ $\left(\frac{-٢\sqrt{٣}}{٢}\right)$ = −٦٠° = $\frac{-\pi}{٣}$

∴ ع = ٤ (جتا $\frac{-\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{-\pi}{٣}$)

الجذور التربيعية للعدد ع

= ٢ $\left(\text{جتا } \frac{\frac{-\pi}{٣} + ٢\pi\text{ ر}}{٢} + \text{ت جا } \frac{\frac{-\pi}{٣} + ٢\pi\text{ ر}}{٢}\right)$

حيث ر = ٠ ، ١ عند ر = ٠

∴ الجذر التربيعى الأول

= ٢ (جتا $\frac{-\pi}{٦}$ + ت جا $\frac{-\pi}{٦}$)

عند ر = ١

∴ الجذر التربيعى الثانى

= ٢ (جتا $\frac{٥\pi}{٦}$ + ت جا $\frac{٥\pi}{٦}$)

**٥**

(أ) المعادلة المصفوفية :

$$\begin{pmatrix} ١ & ٣ & ٢ \\ ٢ & -١ & ١ \\ ٣ & ١ & -١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٣ \\ ٣ \\ ٢ \end{pmatrix}$$

$\text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ٣ & ٢ \\ ٢ & -١ & ١ \\ ٣ & ١ & -١ \end{pmatrix}$ ∴ |أ| = ٢٥

$\text{أ}^{\text{مل}} = \begin{pmatrix} ٠ & ٥ & ٥ \\ ٥ & -٧ & ٣ \\ ٥ & ٨ & -٧ \end{pmatrix}$

$\text{أ}^{-١} = \frac{١}{٢٥} \begin{pmatrix} ٠ & ٥ & ٥ \\ ٥ & -٧ & ٣ \\ ٥ & ٨ & -٧ \end{pmatrix}$

$$\therefore \begin{pmatrix}\text{س}\\ \text{ص}\\ \text{ع}\end{pmatrix} = \frac{١}{٢٥}\begin{pmatrix}٠ & ٥ & ٥\\ ٥ & -٧ & ٣\\ ٥ & ٨ & -٧\end{pmatrix}\begin{pmatrix}١٣\\ ٣\\ ٢\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}١\\ ٢\\ ٣\end{pmatrix}$$

∴ س = ١ ، ص = ٢ ، ع = ٣

(ب) لإيجاد نقطة تقاطع المستويات الثلاثة نقوم بحل المعادلات الثلاثة معًا بطريقة كرامر

$$\Delta = \begin{vmatrix}٢ & ١ & -١\\ ١ & ١ & ١\\ ٣ & -١ & -١\end{vmatrix}$$

$= ٢ \times \text{صفر} - ١ \times -٤ - ١ \times -٤ = ٨$

$$، \Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix}-١ & ١ & -١\\ ٢ & ١ & ١\\ ٦ & -١ & -١\end{vmatrix}$$

$= -١ \times \text{صفر} - ١ \times -٨ - ١ \times -٨ = ١٦$

$$، \Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix}٢ & -١ & -١\\ ١ & ٢ & ١\\ ٣ & ٦ & -١\end{vmatrix}$$

$= ٢ \times -٨ + ١ \times -٤ - ١ \times ٠ = -٢٠$

$$، \Delta_{\text{ع}} = \begin{vmatrix}٢ & ١ & -١\\ ١ & ١ & ٢\\ ٣ & -١ & ٦\end{vmatrix}$$

$= ٢ \times ٨ - ١ \times \text{صفر} - ١ \times -٤ = ٢٠$

$\therefore \text{س} = \frac{١٦}{٨} = ٢ \text{ ، ص} = \frac{-٢٠}{٨} = \frac{-٥}{٢}$

$، \text{ع} = \frac{٢٠}{٨} = \frac{٥}{٢}$

∴ نقطة تقاطع المستويات الثلاثة هى :

$\left(٢ ، \frac{-٥}{٢} ، \frac{٥}{٢}\right)$

## الاختبار الثانى

١ ① (جـ) ② (د) ③ (أ)

④ (أ) ⑤ (ب) ⑥ (أ)

٢ ① ω ② صفر ③ $\frac{٨}{٣}$

④ صفر أ، $\frac{١}{٢}$ ⑤ $-٢$ ⑥ $-٣٢$

٣

(أ) $\text{ح}_{\text{ر}+١}$ هو الحد العام فى مفكوك $(١ + \text{س})^{١١}$

$= {}^{١١}\text{ق}_{\text{ر}}\ \text{س}^{\text{ر}}$

$\therefore (١ - \text{س} + \text{س}^{٢}) \times {}^{١١}\text{ق}_{\text{ر}}\ \text{س}^{\text{ر}}$

$= {}^{١١}\text{ق}_{\text{ر}}\ \text{س}^{\text{ر}} - {}^{١١}\text{ق}_{\text{ر}}\ \text{س}^{\text{ر}+١}$

$+ {}^{١١}\text{ق}_{\text{ر}}\ \text{س}^{\text{ر}+٢}$

الجزء الأول يحتوى على $\text{س}^{٥}$

، نضع ر = ٥ وقيمته ${}^{١١}\text{ق}_{٥}$

، الجزء الثانى يحتوى على $\text{س}^{٥}$

، نضع ر + ١ = ٥

∴ ر = ٤ وقيمته $- {}^{١١}\text{ق}_{٤}$

، الجزء الثالث يحتوى على $\text{س}^{٥}$

، نضع ر + ٢ = ٥

∴ ر = ٣ وقيمته ${}^{١١}\text{ق}_{٣}$

∴ معامل $\text{س}^{٥} = {}^{١١}\text{ق}_{٥} - {}^{١١}\text{ق}_{٤} + {}^{١١}\text{ق}_{٣} = ٢٩٧$

(ب) ∵ (٢ ، −١ ، ٣) متجه اتجاه للمستقيم

، (٣ ، ٢ ، ١) متجه اتجاه عمودى على المستوى

، ∵ (٢ ، −١ ، ٣) . (٣ ، ٢ ، ١) = ٧ ≠ صفر

∴ الخط المستقيم لا يوازى المستوى

∴ الخط المستقيم يقطع المستوى

$$\therefore \text{جتا}\ \theta = \frac{|(٢ ، -١ ، ٣) . (٣ ، ٢ ، ١)|}{\sqrt{٤ + ١ + ٩} \times \sqrt{٩ + ٤ + ١}} = \frac{١}{٢}$$

∴ θ = ٦٠° وهى الزاوية بين متجه اتجاه المستقيم والمتجه العمودى على المستوى.

∴ قياس الزاوية الصغرى بين المستقيم والمستوى

= ٩٠° − ٦٠° = ٣٠°

٤

$$(\text{أ})\ \text{المصفوفة أ} = \begin{pmatrix}٢ & -١ & -٣\\ ١ & ٢ & ١\\ ٣ & -٥ & ٢\end{pmatrix}$$

|أ| = ٥٠ ≠ صفر

∴ ر (أ) = ٣

$$\text{أ}^{*} = \left(\begin{array}{ccc:c}٢ & -١ & -٣ & ٢\\ ١ & ٢ & ١ & ١\\ ٣ & -٥ & ٢ & ١٣\end{array}\right)$$

∴ ر (أ) = ر ($\text{أ}^{*}$) = ٣ = عدد المجاهيل

∴ المعادلات لها حل وحيد

$$\text{أ}^{-١} = \frac{١}{٥٠}\begin{pmatrix}٩ & ١٧ & ٥\\ ١ & ١٣ & -٥\\ -١١ & ٧ & ٥\end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix}\text{س}\\ \text{ص}\\ \text{ع}\end{pmatrix} = \frac{١}{٥٠}\begin{pmatrix}٩ & ١٧ & ٥\\ ١ & ١٣ & -٥\\ -١١ & ٧ & ٥\end{pmatrix}\begin{pmatrix}٢\\ ١\\ ١٣\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}٢\\ -١\\ ١\end{pmatrix}$$

∴ س = ٢ ، ص = −١ ، ع = ١

(ب) $\text{ع} = \frac{٢ + ٦\text{ت}}{٣ - \text{ت}} \times \frac{٣ + \text{ت}}{٣ + \text{ت}} = ٢\text{ت} = ٢\ \text{هـ}^{\frac{\pi}{٢}\text{ت}}$

$\therefore \text{ع} = ٢\left(\text{جتا}\ \frac{\pi}{٢} + \text{ت جا}\ \frac{\pi}{٢}\right)$

$\text{ع}^{-١} = \frac{١}{٢}\left(\text{جتا}\ \frac{-\pi}{٢} + \text{ت جا}\ \frac{-\pi}{٢}\right)$

$\bar{\text{ع}} = ٢\left(\text{جتا}\ \frac{-\pi}{٢} + \text{ت جا}\ \frac{-\pi}{٢}\right)$

$\sqrt{\text{ع}} = \sqrt{٢}\left(\text{جتا}\ \frac{\frac{\pi}{٢} + ٢\pi\text{ر}}{٢}\right.$

$\left. + \text{ت جا}\ \frac{\frac{\pi}{٢} + ٢\pi\text{ر}}{٢}\right)$

حيث ر = ٠ ، ١

∴ عند ر = ٠ الجذر التربيعى الأول

$= \sqrt{٢}\left(\text{جتا}\ \frac{\pi}{٤} + \text{ت جا}\ \frac{\pi}{٤}\right)$

عند ر = ١ الجذر التربيعى الثانى

$= \sqrt{٢}\left(\text{جتا}\ \frac{٥\pi}{٤} + \text{ت جا}\ \frac{٥\pi}{٤}\right)$

$= \sqrt{٢}\left(\text{جتا}\ \frac{-٣\pi}{٤} + \text{ت جا}\ \frac{-٣\pi}{٤}\right)$

٥

(أ) $\because \sqrt{\text{ت}} = (\text{جتا}\ ٩٠° + \text{ت جا}\ ٩٠°)^{\frac{١}{٢}}$

$= \text{جتا}\ \frac{٩٠° + ٣٦٠°\ \text{ر}}{٢}$

$+ \text{ت جا}\ \frac{٩٠° + ٣٦٠°\ \text{ر}}{٢}$ حيث ر = ٠ ، ١

عند ر = ٠

$\therefore \sqrt{\text{ت}} = \text{جتا}\ ٤٥° + \text{ت جا}\ ٤٥° = \frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}}\text{ت}$

عند ر = ١

$\therefore \sqrt{\text{ت}} = \text{جتا}\ ٢٢٥° + \text{ت جا}\ ٢٢٥° = \frac{-١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}}\text{ت}$

$\therefore \sqrt{\text{ت}} = \pm\left(\frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}}\text{ت}\right)$

$، \because \sqrt{-\text{ت}} = \left(\text{جتا}\ (-٩٠°) + \text{ت جا}\ (-٩٠°)\right)$

$= \text{جتا}\ \frac{-٩٠° + ٣٦٠°\ \text{ر}}{٢} + \text{ت جا}\ \frac{-٩٠° + ٣٦٠°\ \text{ر}}{٢}$

حيث ر = ٠ ، ١

عند ر = ٠

$\therefore \sqrt{-\text{ت}} = \text{جتا}\ (-٤٥°) + \text{ت جا}\ (-٤٥°)$

$= \frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}}\text{ت}$

عند ر = ١

$\therefore \sqrt{-\text{ت}} = \text{جتا}\ (١٣٥°) + \text{ت جا}\ (١٣٥°)$

$= \frac{-١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}}\text{ت}$

$\therefore \sqrt{-\text{ت}} = \pm\left(\frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}}\text{ت}\right)$

$\therefore \sqrt{\text{ت}} - \sqrt{-\text{ت}} = \pm\sqrt{٢}\ \text{ت أ،} \pm\sqrt{٢}$

$\therefore \sqrt{٢}$ ت هى إحدى قيم المقدار $\sqrt{\text{ت}} - \sqrt{-\text{ت}}$

(ب) مركزا الكرتين هما (٢ ، −٤ ، ٢) ، (−٤ ، ٤ ، ٢)

، البُعد بين المركزين

$= \sqrt{(٢ + ٤)^{٢} + (-٤ - ٤)^{٢} + (٢ - ٢)^{٢}}$

$\therefore \text{م ن} = ١٠ \text{ ، نق}_{١} = ١ \text{ ، نق}_{٢} = ٢$

$\text{نق}_{١} + \text{نق}_{٢} < \text{م ن}$

∴ الكرتان غير متقاطعتين.

## الاختبار الثالث

١ ① (جـ) ② (ب) ③ (أ)

④ (د) ⑤ (ب) ⑥ (أ)

٢ ① −٣٠ أ، $\frac{-\pi}{٦}$ ② ١ ③ ٣

④ ٥ ⑤ $\frac{-٢١}{٢}$ ⑥ ١٢

٣

(أ) مفكوك $(\text{م} + \text{س})^{\text{ن}} = \text{م}^{\text{ن}} + \text{ن م}^{\text{ن}-١}\ \text{س}$

$+ \frac{\text{ن}(\text{ن} - ١)}{٢ \times ١}\ \text{م}^{\text{ن}-٢}\ \text{س}^{٢} + \dots$

بمقارنة معاملات الحد الخالى من س :

$\therefore \text{م}^{\text{ن}} = ٣\text{أ}$ (١)

، بمقارنة معاملات س : $\text{ن م}^{\text{ن}-١} = ٦\text{أ}$ (٢)

بقسمة (٢) على (١) :

$\therefore \text{ن م}^{-١} = ٢ \quad \therefore \frac{\text{ن}}{\text{م}} = ٢ \quad \therefore \text{م} = \frac{\text{ن}}{٢}$

بمقارنة معاملات $\text{س}^{٢}$ :

$\frac{\text{ن}(\text{ن} - ١)}{٢ \times ١}\ \text{م}^{\text{ن}-٢} = ٥\text{أ}$ (٣)

بقسمة (٣) على (١) : $\therefore \frac{\text{ن}(\text{ن} - ١)}{٢ \times ١}\ \text{م}^{-٢} = \frac{٥}{٣}$

∴ $\frac{\text{ن}(\text{ن}-١)}{٢\times١}\times\left(\frac{\text{ن}}{٢}\right)^{-٢}=\frac{٥}{٣}$

∴ $\frac{\text{ن}(\text{ن}-١)\times٤}{٢\text{ن}^{٢}}=\frac{٥}{٣}$

∴ $١٢\,(\text{ن}^{٢}-\text{ن})=١٠\,\text{ن}^{٢}$

∴ $١٢\,\text{ن}^{٢}-١٢\,\text{ن}=١٠\,\text{ن}^{٢}$

∴ $٢\,\text{ن}^{٢}-١٢\,\text{ن}=٠$ ∴ $٢\,\text{ن}\,(\text{ن}-٦)=٠$

∴ $\text{ن}=٦$ ، $\text{م}=٢$ ، $\text{أ}=\frac{٣^{٦}}{٣}=٣^{٥}=٢٤٣$

(ب) ∵ $$\text{أ}=\begin{pmatrix}٢ & -١ & ٣\\ ٤ & ٥ & -١\\ ٢ & ٣ & -١\end{pmatrix}$$

$$|\text{أ}|=\begin{vmatrix}٢ & -١ & ٣\\ ٤ & ٥ & -١\\ ٢ & ٣ & -١\end{vmatrix}=\text{صفر}$$

∴ $\text{ر}(\text{أ})<٣$ أى أقل من عدد المجاهيل

∴ المعادلات لها عدد لا نهائى من الحلول منها الحل الصفرى

أى أن : للمعادلات حل أخر غير الحل الصفرى.

وبوضع ع = ل

∴ ٢ س − ص = −٣ ل ، ٤ س + ٥ ص = ل

وبحل المعادلتين معًا

∴ س = − ل ، ص = ل

الحل العام هو (− ل ، ل ، ل)

**٤**

(أ) $\text{سعة}\,(\text{ع}_{١}\,\text{ع}_{٢}^{٣})=(\text{سعة ع}_{١})+٣\times(\text{سعة ع}_{٢})$

$=٨١^{\circ}$ (١)

، $\text{سعة}\left(\frac{\text{ع}_{١}}{\text{ع}_{٢}}\right)=(\text{سعة ع}_{١})-(\text{سعة ع}_{٢})=٣٣^{\circ}$ (٢)

بحل المعادلتين :

$\text{سعة ع}_{١}=٤٥^{\circ}$ ، $\text{سعة ع}_{٢}=١٢^{\circ}$

∴ $\text{ع}_{١}=\text{جتا }٤٥^{\circ}+\text{ت جا }٤٥^{\circ}$

، $\text{ع}_{٢}=\text{جتا }١٢^{\circ}+\text{ت جا }١٢^{\circ}$

∴ $\text{ع}_{١}^{١٥}\,\text{ع}_{٢}^{١٥}=(\text{ع}_{١}\,\text{ع}_{٢})^{١٥}$

$=(\text{جتا }٥٧^{\circ}+\text{ت جا }٥٧^{\circ})^{١٥}$

$=\text{جتا }١٣٥^{\circ}+\text{ت جا }١٣٥^{\circ}$

$=-\frac{١}{\sqrt{٢}}+\frac{١}{\sqrt{٢}}\,\text{ت}$

(ب) ∵ النقطة أ (−٢ ، ٣ ، ١) ∋ للمستقيم

∴ طول العمود = صفر

**٥**

(أ) الطرف الأيسر $=\begin{vmatrix}\text{أ}^{٢} & \text{ب}^{٢} & \text{ح}^{٢}\\ \text{أ}^{٣} & \text{ب}^{٣} & \text{ح}^{٣}\\ ١ & ١ & ١\end{vmatrix}$

بأخذ أ ، ب ، ح مشترك

من ع١ ، ع٢ ، ع٣ على الترتيب

$=\text{أ ب ح}\begin{vmatrix}\text{أ} & \text{ب} & \text{ح}\\ \text{أ}^{٢} & \text{ب}^{٢} & \text{ح}^{٢}\\ \frac{١}{\text{أ}} & \frac{١}{\text{ب}} & \frac{١}{\text{ح}}\end{vmatrix}$

بضرب أ ب ح × ص٣

$=\begin{vmatrix}\text{أ} & \text{ب} & \text{ح}\\ \text{أ}^{٢} & \text{ب}^{٢} & \text{ح}^{٢}\\ \text{ب ح} & \text{أ ح} & \text{أ ب}\end{vmatrix}=$ الطرف الأيمن

(ب) $\overrightarrow{\text{ب ء}}=\overrightarrow{\text{ء}}-\overrightarrow{\text{ب}}=(٠ ، ٠ ، ٠)-(٤ ، ٨ ، ٦)$

$=(-٤ ، -٨ ، -٦)$

، $\overrightarrow{\text{ح أ}}=\overrightarrow{\text{أ}}-\overrightarrow{\text{ح}}=(٠ ، ٨ ، ٠)-(٤ ، ٠ ، ٦)$

$=(-٤ ، ٨ ، -٦)$

∴ $\overrightarrow{\text{ب ء}}\,.\,\overrightarrow{\text{ح أ}}=(-٤ ، -٨ ، -٦)\,.\,(-٤ ، ٨ ، -٦)$

$=١٦-٦٤+٣٦=-١٢$

## الاختبار الرابع

**١**

① (ب) ② (أ) ③ (د)

④ (جـ) ⑤ (أ) ⑥ (جـ)

**٢**

① −٤٠ ② ٢

③ (−٤ ، ٦ ، −١) ④ ١٠٠

⑤ $\left(\frac{٢}{٥} ، \frac{٣}{٥} ، \frac{٢}{٥}\sqrt{٣}\right)$

⑥ $\sqrt{١٠}$ وحدة طول.

**٣**

(أ) نفرض أن $\text{ح}_{\text{ر}+١}$ هو أكبر حد : ∴ $\frac{\text{ح}_{\text{ر}+١}}{\text{ح}_{\text{ر}}}\geq١$

$\frac{٦-\text{ر}+١}{\text{ر}}\left|\frac{٢(١)}{٣}\right|\geq١$ ، $\frac{٢(٧-\text{ر})}{٣\text{ر}}\geq١$

$١٤-٢\,\text{ر}\geq٣\,\text{ر}$ ∴ $٥\,\text{ر}\leq١٤$

، $\text{ر}\leq٢\frac{٤}{٥}$

∴ ر = ٢ أ، ١ أ، صفر

∴ $\text{ح}_{٣}>\text{ح}_{٢}>\text{ح}_{١}$

، $\frac{\text{ح}_{\text{ر}+١}}{\text{ح}_{\text{ر}+٢}}\geq١$ ∴ $\frac{\text{ح}_{\text{ر}+٢}}{\text{ح}_{\text{ر}+١}}\leq١$

∴ $\frac{٦-(\text{ر}+١)+١}{\text{ر}+١}\times\left|\frac{٢(١)}{٣}\right|\leq١$

∴ $\frac{٢(٦-\text{ر})}{٣(\text{ر}+١)}\leq١$

∴ $١٢-٢\,\text{ر}\leq٣\,\text{ر}+٣$ ∴ $٥\,\text{ر}\geq٩$

∴ $\text{ر}\geq١\frac{٤}{٥}$

∴ ر = ٢ أ، ٣ أ، ..... أ، ٦

∴ $\text{ح}_{٣}>\text{ح}_{٤}>\text{ح}_{٥}>\text{ح}_{٦}>\text{ح}_{٧}$

∴ ح٣ هو أكبر حد

(ب) ∵ $\overrightarrow{\text{أ}}\,.\,\overrightarrow{\text{ب}}\times\overrightarrow{\text{ح}}=\begin{vmatrix}١ & -١ & ٢\\ ٣ & -٢ & ٠\\ ٠ & ٢ & ٤\end{vmatrix}=١٦$

∴ حجم متوازى السطوح = | ١٦ |

= ١٦ وحدة حجوم.

**٤**

(أ) $\text{ع}^{٤}=-٤=٤\,(\text{جتا }١٨٠+\text{ت جا }١٨٠)$

∴ $\text{ع}=٤^{\frac{١}{٤}}\left(\text{جتا }\frac{١٨٠+٣٦٠\,\text{ر}}{٤}\right.$

$\left.+\text{ت جا }\frac{١٨٠+٣٦٠\,\text{ر}}{٤}\right)$

حيث ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣

عند ر = ٠ ∴ $\text{ع}=\sqrt{٢}\,(\text{جتا }٤٥+\text{ت جا }٤٥)$

عند ر = ١ $\text{ع}=\sqrt{٢}\,(\text{جتا }١٣٥+\text{ت جا }١٣٥)$

عند ر = ٢ $\text{ع}=\sqrt{٢}\,(\text{جتا }-١٣٥+\text{ت جا }-١٣٥)$

عند ر = ٣ $\text{ع}=\sqrt{٢}\,(\text{جتا }-٤٥+\text{ت جا }-٤٥)$

(ب) $\|٢\overrightarrow{\text{أ}}-\overrightarrow{\text{ب}}+٣\overrightarrow{\text{ح}}\|^{٢}$

$=(٢\overrightarrow{\text{أ}}-\overrightarrow{\text{ب}}+٣\overrightarrow{\text{ح}})\,.\,(٢\overrightarrow{\text{أ}}-\overrightarrow{\text{ب}}+٣\overrightarrow{\text{ح}})$

$=٤\,\|\overrightarrow{\text{أ}}\|^{٢}-٢\,\overrightarrow{\text{أ}}\,.\,\overrightarrow{\text{ب}}+٦\,\overrightarrow{\text{أ}}\,.\,\overrightarrow{\text{ح}}-٢\,\overrightarrow{\text{أ}}\,.\,\overrightarrow{\text{ب}}$

$+\|\overrightarrow{\text{ب}}\|^{٢}-٣\,\overrightarrow{\text{ب}}\,.\,\overrightarrow{\text{ح}}+٦\,\overrightarrow{\text{أ}}\,.\,\overrightarrow{\text{ح}}$

$-٣\,\overrightarrow{\text{ب}}\,.\,\overrightarrow{\text{ح}}+٩\,\|\overrightarrow{\text{ح}}\|^{٢}$

$=٤-٠+٠-٠+١-٠+٠-٠+٩=١٤$

∴ $\|٢\overrightarrow{\text{أ}}-\overrightarrow{\text{ب}}+٣\overrightarrow{\text{ح}}\|=\sqrt{١٤}$

، $\overrightarrow{\text{ح}}=\overrightarrow{\text{أ}}\times\overrightarrow{\text{ب}}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}}\\ \frac{١٦}{٢٥} & \frac{-٣}{٥} & \frac{١٢}{٢٥}\\ \frac{٣}{٥} & ٠ & \frac{-٤}{٥}\end{vmatrix}$

$=\frac{١٢}{٢٥}\,\overrightarrow{\text{س}}+\frac{٤}{٥}\,\overrightarrow{\text{ص}}+\frac{٩}{٢٥}\,\overrightarrow{\text{ع}}$

**٥**

(أ) س + ص = ٢ ، ٢ س + ٣ ص = ٥

∴ المعادلة المصفوفية هى :

$$\begin{pmatrix}١ & ١\\ ٢ & ٣\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{س}\\ \text{ص}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}٢\\ ٥\end{pmatrix}$$

∴ $\text{أ}=\begin{pmatrix}١ & ١\\ ٢ & ٣\end{pmatrix}$

، $\text{أ}^{*}=\left(\begin{array}{cc:c}١ & ١ & ٢\\ ٢ & ٣ & ٥\end{array}\right)$

∴ $\text{ر}(\text{أ})=٢$ ، $\text{ر}(\text{أ}^{*})=٢$

∴ $\text{ر}(\text{أ})=\text{ر}(\text{أ}^{*})=$ عدد المجاهيل

∴ يوجد حل وحيد

لإيجاد الحل نوجد $\text{أ}^{-١}=\frac{١}{١}\begin{pmatrix}٣ & -١\\ -٢ & ١\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}٣ & -١\\ -٢ & ١\end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix}\text{س}\\ \text{ص}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}٣ & -١\\ -٢ & ١\end{pmatrix}\begin{pmatrix}٢\\ ٥\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}١\\ ١\end{pmatrix}$

∴ س = ١ ، ص = ١

(ب) $\text{ع}=\text{جا }\frac{\pi}{٩}+\text{ت جتا }\frac{\pi}{٩}$

∴ $\text{ع}=\text{جتا}\left(\frac{\pi}{٢}-\frac{\pi}{٩}\right)+\text{ت جا}\left(\frac{\pi}{٢}-\frac{\pi}{٩}\right)$

$=\text{جتا}\left(\frac{٧\pi}{١٨}\right)+\text{ت جا}\left(\frac{٧\pi}{١٨}\right)$

∴ $\bar{\text{ع}}=\text{جتا}\left(\frac{-٧\pi}{١٨}\right)+\text{ت جا}\left(\frac{-٧\pi}{١٨}\right)$

∴ $(\bar{\text{ع}})^{٩}=\text{جتا}\left(\frac{-٧\pi}{٢}\right)+\text{ت جا}\left(\frac{-٧\pi}{٢}\right)$

$=\text{جتا}\left(\frac{\pi}{٢}\right)+\text{ت جا}\left(\frac{\pi}{٢}\right)$

∴ الجذور التكعيبية للعدد $(\bar{\text{ع}})^{٩}$

$=\text{جتا}\left(\frac{\frac{\pi}{٢}+٢\pi\,\text{ر}}{٣}\right)+\text{ت جا}\left(\frac{\frac{\pi}{٢}+٢\pi\,\text{ر}}{٣}\right)$

حيث ر = ٠ ، ١ ، ٢ عند ر = ٠

∴ الجذر التكعيبى الأول $=\text{جتا}\left(\frac{\pi}{٦}\right)+\text{ت جا}\left(\frac{\pi}{٦}\right)$

عند ر = ١

∴ الجذر التكعيبى الثانى

$=\text{جتا}\left(\frac{٥\pi}{٦}\right)+\text{ت جا}\left(\frac{٥\pi}{٦}\right)$

عند ن = ٢

∴ الجذر التكعيبى الثالث

$= \text{جتا}\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \text{ت جا}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

$= \text{جتا}\left(\frac{-\pi}{2}\right) + \text{ت جا}\left(\frac{-\pi}{2}\right)$

## الاختبار الخامس

**١** ① (ب) ② (د) ③ (أ)
④ (ب) ⑤ (د) ⑥ (جـ)

---

**٢** ① ١٣٢ ② ٢٠ ③ $\frac{1}{9}$ ④ ٣

⑤ (س − ٣)$^2$ + (ص − ٤)$^2$ + (ع + ٥)$^2$ = ٩

⑥ $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (٢ ، −١ ، ٤) + ك (٤ ، ٧ ، ١)

---

**٣**

(أ)

معامل ح$_{2\text{ن}+4}$ = $^{18}\text{ق}_{2\text{ن}+3}$

معامل ح$_{\text{ن}-2}$ = $^{18}\text{ق}_{\text{ن}-3}$

∵ $^{18}\text{ق}_{2\text{ن}+3}$ = $^{18}\text{ق}_{\text{ن}-3}$

∴ ٢ ن + ٣ = ن − ٣ منها ن = −٦ مرفوض

أو ٢ ن + ٣ + ن − ٣ = ١٨ منها ٣ ن = ١٨

∴ ن = ٦

(ب) ∴ $\dfrac{|\sqrt{2}\,(0) + (-1) - (2) + \text{ك}|}{\sqrt{2+1+1}} = 2$

∴ |ك − ٣| = ٤ ∴ ك − ٣ = ± ٤

∴ ك = ٧ ، أ ك = −١

---

**٤**

(أ) المعادلة المصفوفية :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{أ} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \therefore |\text{أ}| = 15$$

$$\therefore \text{أ}^{\text{مل}} = \begin{pmatrix} -2 & -11 & 6 \\ 7 & 16 & -6 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{أ}^{-1} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} -2 & -11 & 6 \\ 7 & 16 & -6 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} -2 & -11 & 6 \\ 7 & 16 & -6 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{10}{3} \\ -3 \end{pmatrix}$$

∴ س = $\frac{1}{3}$ ، ص = $\frac{10}{3}$ ، ع = −٣

(ب) ع$_1$ = $\frac{6 + 4\text{ت}}{1 + \text{ت}} \times \frac{1 - \text{ت}}{1 - \text{ت}}$ = ٥ − ت

ع$_2$ = $\frac{26}{5 - \text{ت}} \times \frac{5 + \text{ت}}{5 + \text{ت}}$ = ٥ + ت

∴ ع$_1$ − ع$_2$ = (٥ − ت) − (٥ + ت) = −٢ ت

∴ ٤ (ع$_1$ − ع$_2$) = −٨ ت

$= 8\left(\text{جتا}\frac{-\pi}{2} + \text{ت جا}\frac{-\pi}{2}\right)$

الجذور التكعيبية للعدد ٤ (ع$_1$ − ع$_2$)

$= 2\left(\text{جتا}\dfrac{\frac{-\pi}{2} + 2\pi\text{ن}}{3} + \text{ت جا}\dfrac{\frac{-\pi}{2} + 2\pi\text{ن}}{3}\right)$

حيث ن = ٠ ، ١ ، ٢ عند ن = ٠

∴ الجذر التكعيبى الأول للعدد ٤ (ع$_1$ − ع$_2$)

$= 2\left(\text{جتا}\frac{-\pi}{6} + \text{ت جا}\frac{-\pi}{6}\right) = 2\,\text{هـ}^{-\frac{\pi}{6}\text{ت}}$

عند ن = ١ :

∴ الجذر التكعيبى الثانى للعدد ٤ (ع$_1$ − ع$_2$)

$= 2\left(\text{جتا}\frac{\pi}{2} + \text{ت جا}\frac{\pi}{2}\right) = 2\,\text{هـ}^{\frac{\pi}{2}\text{ت}}$

عند ن = ٢ :

∴ الجذر التكعيبى الثالث للعدد ٤ (ع$_1$ − ع$_2$)

$= 2\left(\text{جتا}\frac{-5\pi}{6} + \text{ت جا}\frac{-5\pi}{6}\right) = 2\,\text{هـ}^{-\frac{5\pi}{6}\text{ت}}$

---

**٥**

(أ) الأيمن $= \begin{vmatrix} \text{أ}^2+1 & \text{أب} & \text{أحـ} \\ \text{أب} & \text{ب}^2+1 & \text{بحـ} \\ \text{أحـ} & \text{بحـ} & \text{حـ}^2+1 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} \text{أ}^2 & \text{أب} & \text{أحـ} \\ \text{أب} & \text{ب}^2+1 & \text{بحـ} \\ \text{أحـ} & \text{بحـ} & \text{حـ}^2+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \text{أب} & \text{أحـ} \\ 0 & \text{ب}^2+1 & \text{بحـ} \\ 0 & \text{بحـ} & \text{حـ}^2+1 \end{vmatrix}$

مشترك أ من ص$_1$ ، ع$_1$ فى المحدد الأول

$= \text{أ}^2 \begin{vmatrix} 1 & \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{ب} & \text{ب}^2+1 & \text{بحـ} \\ \text{حـ} & \text{بحـ} & \text{حـ}^2+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \text{أب} & \text{أحـ} \\ 0 & \text{ب}^2 & \text{بحـ} \\ 0 & \text{بحـ} & \text{حـ}^2+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & \text{أحـ} \\ 0 & 1 & \text{بحـ} \\ 0 & 0 & \text{حـ}^2+1 \end{vmatrix}$

بإجراء (ص$_2$ − ب ص$_1$ ، ص$_3$ − حـ ص$_1$)

فى المحدد الأول ، ب مشترك من كل ص$_2$ ، ع$_2$ فى المحدد الثانى

$= \text{أ}^2 \begin{vmatrix} 1 & \text{ب} & \text{حـ} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \text{ب}^2 \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{أحـ} \\ 0 & 1 & \text{حـ} \\ 0 & \text{حـ} & \text{حـ}^2+1 \end{vmatrix} + (\text{حـ}^2 + 1)$

بإجراء (ص$_3$ − حـ ص$_2$) فى المحدد الثانى

$= \text{أ}^2 + \text{ب}^2 \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{أحـ} \\ 0 & 1 & \text{حـ} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (\text{حـ}^2 + 1)$

$= \text{أ}^2 + \text{ب}^2 + \text{حـ}^2 + 1$

حل آخر :

الأيمن $= \begin{vmatrix} \text{أ}^2+1 & \text{أب} & \text{أحـ} \\ \text{أب} & \text{ب}^2+1 & \text{بحـ} \\ \text{أحـ} & \text{بحـ} & \text{حـ}^2+1 \end{vmatrix}$

بإخراج عامل مشترك أ من ص$_1$ ، ب من ص$_2$ ، حـ من ص$_3$ ثم أ × ع$_1$ ، ب × ع$_2$ ، حـ × ع$_3$

$= \begin{vmatrix} \text{أ}^2+1 & \text{ب}^2 & \text{حـ}^2 \\ \text{أ}^2 & \text{ب}^2+1 & \text{حـ}^2 \\ \text{أ}^2 & \text{ب}^2 & \text{حـ}^2+1 \end{vmatrix}$

ع$_1$ + (ع$_2$ + ع$_3$)

$= \begin{vmatrix} \text{أ}^2+\text{ب}^2+\text{حـ}^2+1 & \text{ب}^2 & \text{حـ}^2 \\ \text{أ}^2+\text{ب}^2+\text{حـ}^2+1 & \text{ب}^2+1 & \text{حـ}^2 \\ \text{أ}^2+\text{ب}^2+\text{حـ}^2+1 & \text{ب}^2 & \text{حـ}^2+1 \end{vmatrix}$

$= (\text{أ}^2+\text{ب}^2+\text{حـ}^2+1) \begin{vmatrix} 1 & \text{ب}^2 & \text{حـ}^2 \\ 1 & \text{ب}^2+1 & \text{حـ}^2 \\ 1 & \text{ب}^2 & \text{حـ}^2+1 \end{vmatrix}$

(ص$_2$ − ص$_1$) ، (ص$_3$ − ص$_1$)

$= (\text{أ}^2+\text{ب}^2+\text{حـ}^2+1) \begin{vmatrix} 1 & \text{ب}^2 & \text{حـ}^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

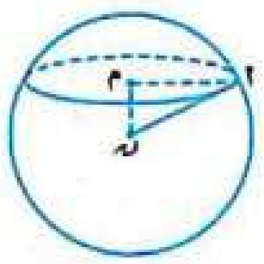
$= (\text{أ}^2+\text{ب}^2+\text{حـ}^2+1)$

(ب) مركز الكرة هو

ن(−٣ ، −٢ ، ١)

، طول نصف قطرها أ ن

$= \sqrt{15}$



، ∵ م ن = $\dfrac{|2(-3) - (-2) - 2(1) + 12|}{\sqrt{4+1+4}}$

= ٢ وحدة طول.

∴ نق للدائرة = $\sqrt{15 - 4} = \sqrt{11}$ وحدة طول.

∴ مساحة المقطع الناتج = ١١ π وحدة مربعة.

## الاختبار السادس

**١** ① (جـ) ② (أ) ③ (جـ)
④ (جـ) ⑤ (د) ⑥ (ب)

---

**٢** ① ٢٤٣ ② ٣ ③ (٣ ، ٠ ، ٢)
④ ١ ، أ $\frac{-13}{5}$ ⑤ −٥ ⑥ −٤١

---

**٣**

(أ) ح$_4$ ، ح$_5$ ، ح$_6$ تكون متتابعة حسابية

∴ ٢ ح$_5$ = ح$_4$ + ح$_6$ بالقسمة على ح$_5$

$2 = \frac{\text{ح}_4}{\text{ح}_5} + \frac{\text{ح}_6}{\text{ح}_5}$

$2 = \frac{4}{\text{ن} - 4 + 1} \times 2 + \frac{\text{ن} - 5 + 1}{5} \times \frac{1}{2}$

$2 = \frac{8}{\text{ن} - 3} + \frac{\text{ن} - 4}{10}$ بالضرب × ١٠ (ن − ٣)

٢٠ (ن − ٣) = ٨٠ + (ن − ٣) (ن − ٤)

ن$^2$ − ٢٧ ن + ١٥٢ = ٠ ∴ ن = ١٩ ، أ ن = ٨

(ب) نق للكرة = طول العمود المرسوم من مركزها إلى المستوى

∴ نق = $\dfrac{|1 + 2 + 1 - 1|}{\sqrt{1+1+1}} = \sqrt{3}$ وحدة طول.

∴ معادلة الكرة هى :

(س − ١)$^2$ + (ص − ٢)$^2$ + (ع − ١)$^2$ = ٣

**٤**

(أ) المعادلة المصفوفية :

$$\begin{pmatrix} ٤ & ٣ & -٥ \\ ٣ & ٢ & ٤ \\ ٥ & -٢ & -٧ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ٦ \\ ١٢ \\ ١ \end{pmatrix}$$

$$\text{أ}=\begin{pmatrix} ٤ & ٣ & -٥ \\ ٣ & ٢ & ٤ \\ ٥ & -٢ & -٧ \end{pmatrix} \qquad \therefore |\text{أ}| = ١٧٩$$

$$\text{أ}^{\text{مل}}=\begin{pmatrix} -٦ & ٣١ & ٢٢ \\ ٤١ & -٣ & -٣١ \\ -١٦ & ٢٣ & -١ \end{pmatrix}$$

$$\text{أ}^{-١}=\frac{١}{١٧٩}\begin{pmatrix} -٦ & ٣١ & ٢٢ \\ ٤١ & -٣ & -٣١ \\ -١٦ & ٢٣ & -١ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix}=\frac{١}{١٧٩}\begin{pmatrix} -٦ & ٣١ & ٢٢ \\ ٤١ & -٣ & -٣١ \\ -١٦ & ٢٣ & -١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٦ \\ ١ \\ ١ \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} ٢ \\ ١ \\ ١ \end{pmatrix}$$

$\therefore$ س $= ٢$ ، ص $= ١$ ، ع $= ١$

$\therefore$ م.ح $= \{(٢ ، ١ ، ١)\}$

(ب) $\text{ع}_١ = \left(\frac{\sqrt{٣}+\text{ت}}{٢}\right)^٤ = \left[\left(\frac{\sqrt{٣}+\text{ت}}{٢}\right)^٢\right]^٢$

$= \left[\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{ت}\right]^٢$

$= \frac{-١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{ت}$

، $\text{ع}_٢ = \text{جا}\,\frac{\pi}{٣} + \text{ت جتا}\,\frac{\pi}{٣}$

$= \text{جتا}\,\frac{\pi}{٦} + \text{ت جا}\,\frac{\pi}{٦} = \frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢}\text{ت}$

$\therefore \text{ع} = \dfrac{-\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{ت}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢}\text{ت}} \times \dfrac{\frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢}\text{ت}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢}\text{ت}} = \text{ت}$

$= \text{جتا}\left(\frac{\pi}{٢}\right) + \text{ت جا}\left(\frac{\pi}{٢}\right)$

الجذور التربيعية للعدد ع

$= \text{جتا}\left(\dfrac{\frac{\pi}{٢}+٢\pi\text{ر}}{٢}\right) + \text{ت جا}\left(\dfrac{\frac{\pi}{٢}+٢\pi\text{ر}}{٢}\right)$

حيث ر $= ٠ ، ١$ عند ر $= ٠$

$\therefore$ الجذر التربيعى الأول للعدد ع

$= \text{جتا}\,\frac{\pi}{٤} + \text{ت جا}\,\frac{\pi}{٤}$ عند ر $= ١$

$\therefore$ الجذر التربيعى الثانى للعدد ع

$= \text{جتا}\,\frac{٥\pi}{٤} + \text{ت جا}\,\frac{٥\pi}{٤}$

$= \text{جتا}\,\frac{-٣\pi}{٤} + \text{ت جا}\,\frac{-٣\pi}{٤}$

**٥**

(أ) الأيمن $= \begin{vmatrix} \text{س} & \text{أ} & \text{ب} \\ \text{أ} & \text{س} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{أ} & \text{س} \end{vmatrix}$

(بإجراء $(\text{ع}_١ + \text{ع}_٢ + \text{ع}_٣)$)

ثم بأخذ (س + أ + ب) مشترك من $\text{ع}_١$)

$= (\text{س}+\text{أ}+\text{ب})\begin{vmatrix} ١ & \text{أ} & \text{ب} \\ ١ & \text{س} & \text{ب} \\ ١ & \text{أ} & \text{س} \end{vmatrix}$

(بإجراء $\text{ص}_٢ - \text{ص}_١$ ، $\text{ص}_٣ - \text{ص}_١$)

$= (\text{س}+\text{أ}+\text{ب})\begin{vmatrix} ١ & \text{أ} & \text{ب} \\ ٠ & \text{س}-\text{أ} & ٠ \\ ٠ & ٠ & \text{س}-\text{ب} \end{vmatrix}$

$= (\text{س}+\text{أ}+\text{ب})\,(\text{س}-\text{أ})\,(\text{س}-\text{ب}) =$ الأيسر

(ب) متجه الاتجاه $= (٥ ، ٢ ، -٣)$

المعادلة المتجهة :

$\overline{\text{س}} = (٢ ، ١ ، -٣) + \text{ك}\,(٥ ، ٢ ، -٣)$

المعادلة البارامترية :

س $= ٢ + ٥$ ك ، ص $= ١ + ٢$ ك

، ع $= -٣ - ٣$ ك

المعادلة الاحداثية $\frac{\text{س}-٢}{٥} = \frac{\text{ص}-١}{٢} = \frac{\text{ع}+٣}{-٣}$

## الاختبار السابع

**١** ① (ب) ② (جـ) ③ (أ)

④ (جـ) ⑤ (د) ⑥ (أ)

**٢** ① ١ ② ٢ ③ ٤٥

④ ٨ ⑤ $-١$ ⑥ $\sqrt{١٥٧}$

**٣**

(أ) $\text{ع}_١ = \left(\text{جتا}\,\frac{٧\pi}{١٨} + \text{ت جا}\,\frac{٧\pi}{١٨}\right)^٥$

$= \text{جتا}\,\frac{٣٥\pi}{١٨} + \text{ت جا}\,\frac{٣٥\pi}{١٨}$

$= \text{جتا}\,\frac{-\pi}{١٨} + \text{ت جا}\,\frac{-\pi}{١٨}$

$\text{ع}_٢ = \left(\text{جتا}\,\frac{\pi}{٢} + \text{ت جا}\,\frac{\pi}{٢}\right)^٤$

$=$ (جتا صفر + ت جا صفر)

$\therefore \text{ع} = \frac{\text{ع}_١}{\text{ع}_٢} = \text{جتا}\,\frac{-\pi}{١٨} + \text{ت جا}\,\frac{-\pi}{١٨} = \text{هـ}^{\frac{-\pi}{١٨}\text{ت}}$

$\sqrt{\text{ع}} = \text{هـ}^{\frac{\left(\frac{-\pi}{١٨}+٢\pi\text{ر}\right)\text{ت}}{٢}}$ حيث ر $= ٠ ، ١$

عند ر $= ٠$ $\quad \sqrt{\text{ع}} = \text{هـ}^{\frac{-\pi}{٣٦}\text{ت}}$

عند ر $= ١$ $\quad \sqrt{\text{ع}} = \text{هـ}^{\frac{٣٥\pi}{٣٦}\text{ت}}$

(ب) $\hat{\text{أ}} \,.\, \overline{\text{ب}} = ٢\,\text{جتا}^٢\,\theta + \text{لو}_٣\,\text{س} \,.\, \text{لو}_٥\,٢٧$

$+ ٢\,\text{جا}^٢\,\theta = ١١$

$\therefore \text{لو}_٣\,\text{س}\ \text{لو}_٥\,٢٧ = ٩$

$\therefore \frac{\text{لو س}}{\text{لو }٣} \times \frac{\text{لو }٢٧}{\text{لو }٥} = ٩$

$\therefore \frac{\text{لو س}}{\text{لو }٣} \times \frac{٣\,\text{لو }٣}{\text{لو }٥} = ٩$

$\therefore \frac{\text{لو س}}{\text{لو }٥} = ٣$ $\qquad \therefore$ لو س $= ٣$ لو ٥

$\therefore$ لو س $=$ لو $٥^٣$ $\qquad \therefore$ س $= ١٢٥$

**٤**

(أ) $\text{ح}_٣ = ١٧$ $\qquad {}^{\text{ن}}\text{ق}_٢ \times \text{س}^٢ = ١٧$

$\text{ن}(\text{ن}-١)\,\text{س}^٢ = ٣٤$ (١)

$٣\,\text{ح}_٢ \times \text{ح}_٤ = ٥٤٤$

$٣ \times {}^{\text{ن}}\text{ق}_١\,\text{س} \times {}^{\text{ن}}\text{ق}_٣\,\text{س}^٣ = ٥٤٤$

$\cancel{٣}\text{ن} \times \frac{\text{ن}(\text{ن}-١)\,(\text{ن}-٢)}{\cancel{٣} \times ٢ \times ١}\,\text{س}^٤ = ٥٤٤$

$\text{ن}^٢\,(\text{ن}-١)\,(\text{ن}-٢)\,\text{س}^٤ = ١٠٨٨$ (٢)

بتربيع طرفى (١) وقسمة (٢) على (١)

$\frac{\cancel{\text{ن}^٢}\,(\text{ن}-١)\,(\text{ن}-٢)\,\text{س}^٤}{\cancel{\text{ن}^٢}\,(\text{ن}-١)^٢\,\text{س}^٤} = \frac{١٠٨٨}{(٣٤)^٢}$

$\frac{\text{ن}-٢}{\text{ن}-١} = \frac{١٦}{١٧}$ $\qquad \therefore$ ن $= ١٨$

بالتعويض فى (١) : $١٨ \times ١٧\,\text{س}^٢ = ٣٤$

$\therefore \text{س}^٢ = \frac{١}{٩}$ $\qquad \therefore \text{س} = \pm\frac{١}{٣}$

(ب) الأيمن =

$$\begin{vmatrix} \text{أ}+\text{ب}+٢ & \text{أ} & \text{ب} \\ ١ & ٢\text{أ}+\text{ب}+١ & \text{ب} \\ ١ & \text{أ} & \text{أ}+٢\text{ب}+١ \end{vmatrix}$$

(بإجراء $(\text{ع}_١ + \text{ع}_٢ + \text{ع}_٣)$ ثم أخذ

٢ (أ + ب + ١) مشترك من $\text{ع}_١$)

$= ٢\,(\text{أ}+\text{ب}+١)$

$$\begin{vmatrix} ١ & \text{أ} & \text{ب} \\ ١ & ٢\text{أ}+\text{ب}+١ & \text{ب} \\ ١ & \text{أ} & \text{أ}+٢\text{ب}+١ \end{vmatrix}$$

(بإجراء $\text{ص}_٢ - \text{ص}_١$ ، $\text{ص}_٣ - \text{ص}_١$)

$= ٢\,(\text{أ}+\text{ب}+١)\begin{vmatrix} ١ & \text{أ} & \text{ب} \\ ٠ & \text{أ}+\text{ب}+١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & \text{أ}+\text{ب}+١ \end{vmatrix}$

$= ٢\,(\text{أ}+\text{ب}+١)^٣ =$ الأيسر.

**٥**

(أ) $\because \text{أ}^{\text{مد}} = \text{أ}^{-١}$ بالضرب × أ من جهة اليسار

$\therefore \text{أ}^{\text{مد}}\,\text{أ} = \text{أ}^{-١}\,\text{أ} = \text{I}$

$$\therefore \begin{pmatrix} ٠ & ٢\text{ص} & \text{ع} \\ \text{س} & \text{ص} & -\text{ع} \\ \text{س} & -\text{ص} & \text{ع} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٠ & \text{س} & \text{س} \\ ٢\text{ص} & \text{ص} & -\text{ص} \\ \text{ع} & -\text{ع} & \text{ع} \end{pmatrix}$$

$= \text{I}$

$$\therefore \begin{pmatrix} ٢\text{س}^٢ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٦\text{ص}^٢ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٢\text{ع}^٢ \end{pmatrix} = \text{I}$$

$\therefore ٢\text{س}^٢ = ١$ $\qquad \therefore \text{س} = \pm\frac{١}{\sqrt{٢}}$

، $٦\text{ص}^٢ = ١$ $\qquad \therefore \text{ص} = \pm\frac{١}{\sqrt{٦}}$

، $٢\text{ع}^٢ = ١$ $\qquad \therefore \text{ع} = \pm\frac{١}{\sqrt{٢}}$

(ب) بفرض س = ص = ع = ك

وبالتعويض فى معادلة المستوى

$\therefore$ ك $+ ٢$ ك $+ ٣$ ك $= ١٢$

$\therefore ٦$ ك $= ١٢$ $\qquad \therefore$ ك $= ٢$

$\therefore$ النقطة هى (٢ ، ٢ ، ٢)

## الاختبار الثامن

**١**

① $\frac{١}{١٠}$ أو ١ ② ٥ ③ ٩٠°

④ −١٦

⑤ $(س - ٥)^٢ + ص^٢ + (ع + ١)^٢ = ١٤$

⑥ ١١ أو −١

**٢**

① (أ) ② (ب) ③ (د)

④ (أ) ⑤ (ب) ⑥ (ب)

**٣**

(أ) المعادلة المصفوفية هى

$$= \begin{pmatrix} ٢ & -١ & ١ \\ ١ & ٠ & -١ \\ ١ & ١ & ٠ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ \\ ٢ \\ ٣ \end{pmatrix}$$

$$|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & -١ & ١ \\ ١ & ٠ & -١ \\ ١ & ١ & ٠ \end{vmatrix} = ٤$$

$$\therefore أ^{-١} = \frac{١}{٤}\begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ -١ & -١ & ٣ \\ ١ & -٣ & ١ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \frac{١}{٤}\begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ -١ & -١ & ٣ \\ ١ & -٣ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -١ \\ ٢ \\ ٣ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -١ \\ ٢ \\ -١ \end{pmatrix}$$

∴ س = ١ ، ص = ٢ ، ع = −١

(ب) لإيجاد نقطة تقاطع المستويات الثلاثة نقم بحل المعادلات الثلاثة معًا بطريقة كرامر

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & -١ \\ ١ & ١ & ١ \\ ٣ & -١ & -١ \end{vmatrix}$$

= ٢ × صفر − ١ × −٤ − ١ × −٤ = ٨

$$، \Delta_{س} = \begin{vmatrix} -١ & ١ & -١ \\ ٢ & ١ & ١ \\ ٦ & -١ & -١ \end{vmatrix}$$

= −١ × صفر − ١ × −٨ − ١ × −٨ = ١٦

$$، \Delta_{ص} = \begin{vmatrix} ٢ & -١ & -١ \\ ١ & ٢ & ١ \\ ٣ & ٦ & -١ \end{vmatrix}$$

= ٢ × −٨ + ١ × −٤ − ١ × ٠ = −٢٠

$$، \Delta_{ع} = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & -١ \\ ١ & ١ & ٢ \\ ٣ & -١ & ٦ \end{vmatrix}$$

= ٢ × ٨ − ١ × صفر −١ × −٤ = ٢٠

$\therefore س = \frac{١٦}{٨} = ٢$ ، $ص = \frac{-٢٠}{٨} = \frac{-٥}{٢}$

، $ع = \frac{٢٠}{٨} = \frac{٥}{٢}$

∴ نقطة تقاطع المستويات الثلاثة هى :

$\left(٢ ، \frac{-٥}{٢} ، \frac{٥}{٢}\right)$

**٤**

(أ) $ع_١ = ١ - \sqrt{٣}\,ت$

$\therefore ل = \sqrt{(١)^٢ + (-\sqrt{٣})^٢} = ٢$

∴ س > ٠ ، ص < ٠

∴ θ تقع فى الربع الرابع

$\therefore \theta = ظا^{-١}\left(\frac{-\sqrt{٣}}{١}\right) = -٦٠° = \frac{-\pi}{٣}$

$\therefore ع_١ = ٢\left(جتا \frac{-\pi}{٣} + ت\,جا \frac{-\pi}{٣}\right)$

$ع_٢ = \left(جتا \frac{هـ}{٢} - ت\,جا \frac{هـ}{٢}\right)^٢$

$= \left(جتا \frac{-هـ}{٢} + ت\,جا \frac{-هـ}{٢}\right)^٢$

$= جتا(-هـ) + ت\,جا(-هـ)$

$$\therefore ع = \frac{٢\left(جتا -\frac{\pi}{٣} + ت\,جا -\frac{\pi}{٣}\right)(جتا هـ + ت\,جا هـ)}{جتا(-هـ) + ت\,جا(-هـ)}$$

$$= \frac{٢\left[جتا\left(هـ - \frac{\pi}{٣}\right) + ت\,جا\left(هـ - \frac{\pi}{٣}\right)\right]}{جتا(-هـ) + ت\,جا(-هـ)}$$

$= ٢\left(جتا\left(٢هـ - \frac{\pi}{٣}\right) + ت\,جا\left(٢هـ - \frac{\pi}{٣}\right)\right)$

عند $هـ = \frac{\pi}{٦}$ : ع = ٢ (جتا ٠ + ت جا ٠)

الجذور التربيعية للعدد ع

$= \sqrt{٢}\left(جتا \frac{٠ + ٢\pi ر}{٢} + ت\,جا \frac{٠ + ٢\pi ر}{٢}\right)$

حيث ر = ٠ ، ١

عند ر = ٠ : الجذر التربيعى الأول للعدد ع

$= \sqrt{٢}\,(جتا ٠ + ت\,جا ٠)$

عند ر = ١ : الجذر التربيعى الثانى للعدد ع

$= \sqrt{٢}\,(جتا \pi + ت\,جا \pi)$

(ب) س + ٣ ص − ٢ ع = ٠

، س − ٨ ص + ٨ ع = ٠

٢ س − ٢ ص + ٤ ع = ٠

$$\begin{pmatrix} ١ & ٣ & -٢ \\ ١ & -٨ & ٨ \\ ٣ & -٢ & ٤ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ \\ ٠ \\ ٠ \end{pmatrix}$$

$$أ = \begin{pmatrix} ١ & ٣ & -٢ \\ ١ & -٨ & ٨ \\ ٣ & -٢ & ٤ \end{pmatrix} \quad \therefore |أ| = ٠$$

$$، \begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ١ & -٨ \end{vmatrix} \neq صفر$$

∴ ر (أ) = ر (أ*) = ٢ < عدد المجاهيل

للمعادلات عدد لا نهائى من الحلول من بينهم الحل الصفرى.

لإيجاد صورته نضع س = ل

وبالتعويض فى المعادلة الأولى

ل + ٣ ص − ٢ ع = ٠ (١)

وبالتعويض فى المعادلة الثانية

، ل − ٨ ص + ٨ ع = ٠ (٢)

من (١) ، (٢)

∴ ٥ ل + ٤ ص = ٠ ∴ $ص = \frac{-٥}{٤}$ ل

ومن (١) : ∴ ل + ٣ $\left(\frac{-٥}{٤} ل\right)$ − ٢ ع = ٠

$\therefore ع = \frac{-١١}{٨}$

∴ صورة الحل = $\left(ل ، \frac{-٥}{٤} ل ، \frac{-١١}{٨} ل\right)$

**٥**

(أ) نفرض أن الحد العام من س هو

$ح_{ر+١} = {}^{٣ن}ق_ر\,(س^٢)^{٣ن-ر}\left(\frac{١}{٢س}\right)^ر$

$= {}^{٣ن}ق_ر\left(\frac{١}{٢}\right)^ر \times س^{٦ن-٢ر-ر}$

∴ ٦ن − ٣ر = ٠ ∴ ر = ٢ن

∴ الحد الخالى من س هو $ح_{٢ن+١}$

عند ن = ٤ ، س = ١

الحد الخالى = ${}^{١٢}ق_٨ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^٨$

الحد الأوسط = $ح_٧$

$= {}^{١٢}ق_٦\left(\frac{١}{٢}\right)^٦ \times س^{٦\times٤-٢\times٨}$

$= {}^{١٢}ق_٦\left(\frac{١}{٢}\right)^٦ \times ١$

النسبة هى = $\frac{{}^{١٢}ق_٨}{{}^{١٢}ق_٦} \times \frac{\left(\frac{١}{٢}\right)^٢}{\left(\frac{١}{٢}\right)^٢} = \frac{١٥}{١١٢}$

(ب) $م_١\,(٣ ، ٠ ، ٣)$ ، $نق_١ = ٤$

$م_٢\,(-١ ، ٤ ، ك)$ ، $نق_٢ = ٥$

$م_١ م_٢ = \sqrt{١٦ + ١٦ + (ك - ٣)^٢}$

$= \sqrt{ك^٢ - ٦ ك + ٤١}$

فى حالة الكرتان متماستان فإن :

$م_١ م_٢ = نق_٢ + نق_١$ أو $نق_٢ - نق_١$

أولًا من الخارج :

$ك^٢ - ٦ ك + ٤١ = (٥ + ٤)^٢$

$ك^٢ - ٦ ك - ٤٠ = ٠$

ك = ١٠ ، أ −٤

ثانيًا من الداخل :

$ك^٢ - ٦ ك + ٤١ = (٥ - ٤)^٢$

$ك^٢ - ٦ ك + ٤٠ = ٠$

ليس لها حل

∴ لا يمكن أن تكون الكرتان متماستان من الداخل.

## الاختبار التاسع

**١**

① ١٠ ② {٢ ، −٢} ③ $\frac{\sqrt{٢}}{٥}$

④ ٣ ⑤ $\frac{\sqrt{٢}}{٤}$ ، أ $\frac{-\sqrt{٢}}{٤}$ ⑥ ٩

**٢**

① صفر ② ٣ ③ ٦ ، $\frac{-٢}{٣}$

④ $\pm ٢\sqrt{٣}$ ⑤ $-\frac{١}{٢}$ ⑥ −١

**٣**

(أ) $ع_١ = ٢\left(جا \frac{\pi}{٣} + ت\,جتا \frac{\pi}{٣}\right)$

$= ٢\left(جتا\left(\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{٣}\right) + ت\,جا\left(\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{٣}\right)\right)$

$= ٢\left(جتا \frac{\pi}{٦} + ت\,جا \frac{\pi}{٦}\right)$

، $ع_٢ = \sqrt{٢}\left(جا \frac{\pi}{٤} - ت\,جتا \frac{\pi}{٤}\right)$

$= \sqrt{٢}\left(جتا\left(\frac{٣\pi}{٢} + \frac{\pi}{٤}\right)\right.$

$\left.+ ت\,جا\left(\frac{٣\pi}{٢} + \frac{\pi}{٤}\right)\right)$

$= \sqrt{٢}\left(جتا \frac{٧\pi}{٤} + ت\,جا \frac{٧\pi}{٤}\right)$

$= \sqrt{٢}\left(جتا \frac{-\pi}{٤} + ت\,جا \frac{-\pi}{٤}\right)$

$ع_٢ = ١ + \sqrt{٣}\ ت$

∴ $ل = \sqrt{١^٢ + (\sqrt{٣})^٢} = ٢$

∴ س > ٠ ، ص > ٠

∴ θ تقع فى الربع الأول

∴ $θ = ظا^{-١}\left(\frac{\sqrt{٣}}{١}\right) = ٦٠° = \frac{π}{٣}$

∴ $ع_٢ = ٢\left(جتا \frac{π}{٣} + ت\ جا \frac{π}{٣}\right)$

$$ع = \frac{\left[٢\left(جتا\frac{π}{٦}+ت\ جا\frac{π}{٦}\right)\right]^٢ × \left[\sqrt{٢}\left(جتا\frac{-π}{٤}+ت\ جا\frac{-π}{٤}\right)\right]^٤}{\left[٢\left(جتا\frac{π}{٣}+ت\ جا\frac{π}{٣}\right)\right]^٥}$$

$$= \frac{٨\left(جتا\frac{π}{٣}+ت\ جا\frac{π}{٣}\right) × ٤\left(جتا -π + ت\ جا -π\right)}{٣٢\left(جتا\frac{٥π}{٣}+ت\ جا\frac{٥π}{٣}\right)}$$

$= جتا\frac{-١٣π}{٦} + ت\ جا\frac{-١٣π}{٦}$

$= جتا -\frac{π}{٦} + ت\ جا -\frac{π}{٦} = هـ^{\frac{-π}{٦}ت}$

الجذور التربيعية للعدد ع

$= جتا\left(\frac{\frac{-π}{٦}+٢πر}{٢}\right) + ت\ جا\left(\frac{\frac{-π}{٦}+٢πر}{٢}\right)$

حيث ر = ٠ ، ١

عند ر = ٠

∴ الجذر التربيعي الأول للعدد ع

$= جتا\left(\frac{-π}{١٢}\right) + ت\ جا\left(\frac{-π}{١٢}\right)$

عند ر = ١

∴ الجذر التربيعى الثانى لعدد ع

$= جتا\left(\frac{١١π}{١٢}\right) + ت\ جا\left(\frac{١١π}{١٢}\right)$

(ب) $م_١ = (-٣ ، ٤ ، ١)$ ، $م_٢ = (٥ ، -٢ ، ١)$

∴ منتصف $\overline{م_١م_٢} = \left(\frac{٥ - ٣}{٢} ، \frac{٤ - ٢}{٢} ، \frac{١ + ١}{٢}\right)$

$= (١ ، ١ ، ١)$

∴ ٢أ − ٣أ + ٤أ + ٦ = ٠

∴ ٣أ = −٦   ∴ أ = −٢

**٤**

(أ) المعادلة المصفوفية :

$$\begin{pmatrix} ١ & -٢ & ٢ \\ ٣ & ٠ & ٤ \\ ٠ & -١ & ٦ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ١٠ \\ ٥ \end{pmatrix}$$

$أ = \begin{pmatrix} ١ & -٢ & ٢ \\ ٣ & ٠ & ٤ \\ ٠ & -١ & ٦ \end{pmatrix}$   ∴ $|أ| = ٣٤$

$$أ^{مل} = \begin{pmatrix} ٤ & ١٠ & -٨ \\ -١٨ & ٦ & ٢ \\ -٣ & ١ & ٦ \end{pmatrix}$$

$$أ^{-١} = \frac{١}{٣٤}\begin{pmatrix} ٤ & ١٠ & -٨ \\ -١٨ & ٦ & ٢ \\ -٣ & ١ & ٦ \end{pmatrix}$$

$$∴ \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \frac{١}{٣٤}\begin{pmatrix} ٤ & ١٠ & -٨ \\ -١٨ & ٦ & ٢ \\ -٣ & ١ & ٦ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢ \\ ١٠ \\ ٥ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٢ \\ ١ \\ ١ \end{pmatrix}$$

∴ س = ٢ ، ص = ١ ، ع = ١

(ب) $ح_{ر+١} = {}^{٥ن}ق_ر \left(\frac{١}{س^٣}\right)^ر (س^٢)^{٥ن - ر}$

$= {}^{٥ن}ق_ر\ (س)^{-٣ر}\ (س)^{١٠ن - ٢ر}$

$= {}^{٥ن}ق_ر\ س^{١٠ن - ٥ر}$

، بوضع ١٠ن − ٥ر = صفر

∴ ٢ن = ر

∴ قيمة الحد الخالي من س = ${}^{٥ن}ق_{٢ن}$

$$= \frac{\underline{|٥ن}}{\underline{|٢ن}\ \underline{|٣ن}}$$

**٥**

$$(أ)\ \begin{pmatrix} ك & ١ & ١ \\ ١ & ك & ١ \\ ١ & ١ & ك \end{pmatrix}\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ١ \\ ١ \end{pmatrix}$$

لكي يكون للمعادلات عدد غير منته من الحلول

فإن : ر(أ) = ر(أ*) < عدد المجاهيل

$$\text{ويوضع}\ \begin{vmatrix} ك & ١ & ١ \\ ١ & ك & ١ \\ ١ & ١ & ك \end{vmatrix} = ٠$$

∴ $ك(ك^٢ - ١) - ١(ك - ١) + ١(١ - ك) = ٠$

∴ $ك(ك^٢ - ١) - ك + ١ + ١ - ك = ٠$

∴ $ك(ك - ١)(ك + ١) - ٢ك + ٢ = ٠$

∴ $ك(ك - ١)(ك + ١) - ٢(ك - ١) = ٠$

∴ $(ك - ١)(ك^٢ + ك - ٢) = ٠$

---

## الاختبار العاشر

**١**

① ٤   ② ٥   ③ −٤

④ ٦٠°   ⑤ −١٨   ⑥ ٢

**٢**

① (جـ)   ② (ب)   ③ (د)

④ (جـ)   ⑤ (جـ)   ⑥ (أ)

**٣**

(أ) $١٢\ ح_٣ + ١٠\ ح_٤ + ح_٥ = ٠$ بالقسمة على $ح_٤$

$١٢ \frac{ح_٣}{ح_٤} + ١٠ + \frac{ح_٥}{ح_٤} = ٠$

$١٢ × \frac{٣}{١٥ - ٣ + ١} × \frac{٢س}{-٣} + ١٠$

$+ \frac{١٥ - ٤ + ١}{٤} × \frac{-٣}{٢س} = ٠$

$-٢س + ١٠ + \frac{-٩}{٢س} = ٠$ بالضرب × (−٢س)

$٤س^٢ - ٢٠س + ٩ = ٠$

∴ $س = \frac{٩}{٢}$ أ، $س = \frac{١}{٢}$

$$(ب)\ \text{الأيمن} = \begin{vmatrix} ص + ع & س & س \\ ص & ع + س & ص \\ ع & ع & س + ص \end{vmatrix}$$

بإجراء $ص_١ - (ص_٢ + ص_٣)$

$$= \begin{vmatrix} ٠ & -٢ع & -٢ص \\ ص & ع + س & ص \\ ع & ع & س + ص \end{vmatrix}$$

$$= -٢\begin{vmatrix} ٠ & ع & ص \\ ص & ع + س & ص \\ ع & ع & س + ص \end{vmatrix}$$

بإجراء $(ص_٢ - ص_١)$ ، $(ص_٣ - ص_١)$

$$= -٢\begin{vmatrix} ٠ & ع & ص \\ ص & س & ٠ \\ ع & ٠ & س \end{vmatrix}$$

بتبديل $ص_٢$ ، $ص_٣$

$$= ٢\begin{vmatrix} ٠ & ع & ص \\ ع & ٠ & س \\ ص & س & ٠ \end{vmatrix} = \text{الأيسر}$$

∴ ك = ١ أ، ك = −٢

عند ك = ١   ∴ |أ| = ٠

$$∴ ١ \le ر(أ) < ٣ ،\ أ = \begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \end{pmatrix}$$

$$، ∵ أ^* = \left(\begin{array}{ccc:c} ١ & ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ & ١ \end{array}\right)$$

، ∵ جميع المحددات من الدرجة ٢ = صفر

∴ ر(أ) = ر(أ*) = ١

∴ يوجد عدد غير منته من الحلول عند ك = ١

عند ك = −٢   ∴ |أ| = ٠

∴ ١ ≤ ر(أ) < ٣

$$، أ = \begin{pmatrix} -٢ & ١ & ١ \\ ١ & -٢ & ١ \\ ١ & ١ & -٢ \end{pmatrix}$$

$، ∵ \begin{vmatrix} -٢ & ١ \\ ١ & -٢ \end{vmatrix} = ٣ \ne ٠$   ∴ ر(أ) = ٢

$$، أ^* = \left(\begin{array}{ccc:c} -٢ & ١ & ١ & ١ \\ ١ & -٢ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & -٢ & ١ \end{array}\right)$$

$$، ∵ \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ -٢ & ١ & ١ \\ ١ & -٢ & ١ \end{vmatrix} = ٩ \ne ٠$$

∴ ر(أ*) = ٣   ، ∵ ر(أ) ≠ ر(أ*)

∴ لا يوجد حل عند ك = −٢

(ب) $\overrightarrow{هـ_١} = (-٣ ، ١ ، -٢) - (-٤ ، ١ ، ١)$

$= (١ ، ٠ ، -٣)$

$\overrightarrow{هـ_٢} = (١ ، \sqrt{٥} ، ٢)$

$$جتا\ θ = \frac{|(١ ، ٠ ، -٣) . (١ ، \sqrt{٥} ، ٢)|}{\sqrt{١ + ٠ + ٩} × \sqrt{١ + ٥ + ٤}}$$

$= \frac{|١ - ٦|}{١٠} = \frac{١}{٢}$

∴ θ = ٦٠°   $أب = \sqrt{١٠}$

∴ بعد النقطة عن المستقيم

$= أب\ جا\ θ = \sqrt{١٠} × جا\ ٦٠$

$= \frac{\sqrt{٣٠}}{٢}$ وحدة طول.

**٤**

(أ) بوضع $ى = \frac{\pi}{٢} - ٢\theta$

∴ الطرف الأيمن

$$= \left(\frac{\left(١ + \text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} - ٢\theta\right)\right) + ت\,\text{جتا}\left(\frac{\pi}{٢} - ٢\theta\right)}{\left(١ + \text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} - ٢\theta\right)\right) - ت\,\text{جتا}\left(\frac{\pi}{٢} - ٢\theta\right)}\right)^{ن}$$

$$= \left(\frac{١ + \text{جتا}\,٢\theta + ت\,\text{جا}\,٢\theta}{١ + \text{جتا}\,٢\theta - ت\,\text{جا}\,٢\theta}\right)^{ن}$$

$$= \left(\frac{٢\,\text{جتا}^{٢}\theta + ٢ت\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta}{٢\,\text{جتا}^{٢}\theta - ٢ت\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta}\right)^{ن}$$

$$= \left(\frac{٢\,\text{جتا}\,\theta\,(\text{جتا}\,\theta + ت\,\text{جا}\,\theta)}{٢\,\text{جتا}\,\theta\,(\text{جتا}\,\theta - ت\,\text{جا}\,\theta)}\right)^{ن}$$

$$= \left(\frac{\text{جتا}\,\theta + ت\,\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}(-\theta) + ت\,\text{جا}(-\theta)}\right)^{ن}$$

$$= (\text{جتا}\,٢\theta + ت\,\text{جا}\,٢\theta)^{ن}$$

لكن $٢\theta = \frac{\pi}{٢} - ى$

$$= \left(\text{جتا}\left(\frac{\pi}{٢} - ى\right) + ت\,\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} - ى\right)\right)^{ن}$$

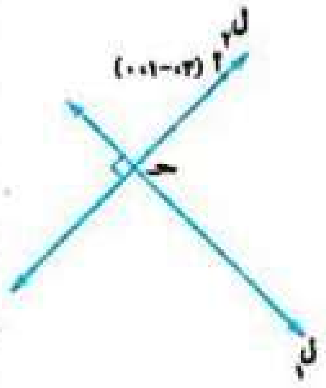
$$= \text{جتا}\,ن\left(\frac{\pi}{٢} - ى\right) + ت\,\text{جا}\,ن\left(\frac{\pi}{٢} - ى\right)$$

(ب) نفرض أن

المستقيمين متقاطعان

في نقطة جـ

جـ $\in$ المستقيم $ل_{١}$



∴ $جـ = (٢ + ك ، ١ + ٢ك ، ١ - ك)$

متجه اتجاه $ل_{٢}$ (المستقيم المطلوب)

$\overrightarrow{ى_{٢}} = \overrightarrow{أجـ} = (-١ + ك ، ٢ + ٢ك ، ١ - ك)$

∵ المستقيمين متعامدان

∴ $\overrightarrow{ى_{١}} \cdot \overrightarrow{ى_{٢}} = ٠$

∴ $(١ ، ٢ ، -١) \cdot$

$(-١ + ك ، ٢ + ٢ك ، ١ - ك) = ٠$

∴ $-١ + ك + ٤ + ٤ك - ١ + ك = ٠$

∴ $ك = -\frac{١}{٢}$

∴ $\overrightarrow{ى_{٢}} = \left(\frac{-٤}{٣} ، \frac{٤}{٣} ، \frac{٤}{٣}\right) = (-١ ، ١ ، ١)$

∴ معادلة $ل_{٢}$ هي :

$\overrightarrow{ر} = (٣ ، -١ ، ٠) + ك\,(-١ ، ١ ، ١)$

**٥**

(أ) نفرض أن : $\frac{١}{ص} = ل$ ، $\frac{١}{س} = م$ ، $\frac{١}{ع} = ن$

∴ المعادلات تصبح $ل + م + ن = ١$

$ل - م + ٢ن = \frac{١}{٢}$

$٢ل + ٣م - ٤ن = \frac{٤}{٣}$

$$أ = \begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & -١ & ٢ \\ ٢ & ٣ & -٤ \end{pmatrix} ، |أ| = ١١$$

$$أ^{-١} = \frac{١}{١١}\begin{pmatrix} -٢ & ٧ & ٣ \\ ٨ & -٦ & -١ \\ ٥ & -١ & -٢ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ل \\ م \\ ن \end{pmatrix} = \frac{١}{١١}\begin{pmatrix} -٢ & ٧ & ٣ \\ ٨ & -٦ & -١ \\ ٥ & -١ & -٢ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ١ \\ \frac{١}{٢} \\ \frac{٤}{٣} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٣} \\ \frac{١}{٦} \end{pmatrix}$$

$ل = \frac{١}{٢}$ منها $س = ٢$

$م = \frac{١}{٣}$ منها $ص = ٣$

$ن = \frac{١}{٦}$ منها $ع = ٦$

(ب) $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = (١ ، ٠ ، \sqrt{٣})$

$\overrightarrow{م} = (٣ ، ٢ ، ٢\sqrt{٣})$ ، $\|\overrightarrow{م}\| = ٥$

المركبة الاتجاهية لـ $\overrightarrow{أب}$ في اتجاه $\overrightarrow{م}$

$$= \frac{\overrightarrow{أب} \cdot \overrightarrow{م}}{\|\overrightarrow{م}\|^{٢}}\,\overrightarrow{م} = \frac{٣ + ٠ + ٦}{٢٥}\,(٣ ، ٢ ، ٢\sqrt{٣})$$

$$= \frac{٩}{٢٥}\,(٣ ، ٢ ، ٢\sqrt{٣})$$

$$= \left(\frac{٢٧}{٢٥} ، \frac{١٨}{٢٥} ، \frac{١٨\sqrt{٣}}{٢٥}\right)$$

---

## إجابات امتحانات مصر

### ١ دور أول ٢٠٢٠

**١** (ب) **٢** (جـ)

**٣**

$$\text{الأيمن} = \begin{vmatrix} ١ & ب & جـ \\ ب & ١ + ب^{٢} & ب جـ \\ جـ & ب جـ & ١ + جـ^{٢} \end{vmatrix}$$

بإجراء $(ص_{٢} - ب\,ص_{١})$ ، $(ص_{٣} - جـ\,ص_{١})$

$$= \begin{vmatrix} ١ & ب & جـ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix} = ١$$

**٤**

$\overrightarrow{ى_{١}} = (-٢ ، ٠ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{ى_{٢}} = (٠ ، ٣ ، -٣)$

$$\text{جتا}\,\theta = \frac{|(-٢ ، ٠ ، ٢) \cdot (٠ ، ٣ ، -٣)|}{\sqrt{(-٢)^{٢} + (٢)^{٢}}\,\sqrt{(٣)^{٢} + (-٣)^{٢}}}$$

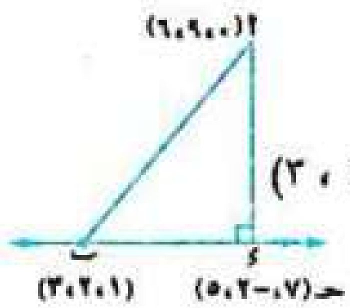
$$= \frac{|-٦|}{٢\sqrt{٢} \times ٣\sqrt{٢}} = \frac{١}{٢}$$

∴ $ق(\angle \theta) = ٦٠^{\circ}$

**٥** (ب)

**٦**

نوجد معادلة الخط المستقيم $\overleftrightarrow{ب جـ}$ :



متجه اتجاه المستقيم

$\overrightarrow{ب جـ} = (٧ ، -٢ ، ٥) - (١ ، ٢ ، ٣)$

$= (٦ ، -٤ ، ٢)$

∴ معادلة الخط المستقيم $\overleftrightarrow{ب جـ}$ هي :

$\overrightarrow{ر} = (١ ، ٢ ، ٣) + ك\,(٦ ، -٤ ، ٢)$

∴ نقطة المسقط ولتكن

$ء = (١ + ٦ك ، ٢ - ٤ك ، ٣ + ٢ك)$

$\overrightarrow{أء} = (١ + ٦ك ، ٢ - ٤ك ، ٣ + ٢ك) - (٠ ، ٩ ، ٦)$

$= (١ + ٦ك ، -٧ - ٤ك ، -٣ + ٢ك)$

∵ $\overrightarrow{أء} \perp \overleftrightarrow{ب جـ}$ ∴ $\overrightarrow{أء} \cdot \overrightarrow{ب جـ} =$ صفر

$(١ + ٦ك ، -٧ - ٤ك ، -٣ + ٢ك) \cdot (٦ ، -٤ ، ٢)$

= صفر

$٦ + ٣٦ك + ٢٨ + ١٦ك + (-٦) + ٤ك = ٠$

$٥٦ك = -٢٨$ ∴ $ك = -\frac{١}{٢}$

∴ النقطة ء هي $(-٢ ، ٤ ، ٢)$

**٧**

$$\text{الطرف الأيمن} = \left(\frac{٣ + ٥\omega + ٣\omega^{٢}}{١ - ٢\omega - ٤\omega^{٢}} + \frac{٣ + ٥\omega^{٢} + ٣\omega}{١ - ٢\omega^{٢} - ٤\omega}\right)$$

$$= \frac{٥\omega - ٣\omega}{١ - ٢\omega - ٤(-١ - \omega)}$$

$$+ \frac{٥\omega^{٢} - ٣\omega^{٢}}{١ - ٢\omega^{٢} - ٤(-١ - \omega^{٢})}$$

$$= \frac{٢\omega}{١ - ٢\omega + ٤ + ٤\omega} + \frac{٢\omega^{٢}}{١ - ٢\omega^{٢} + ٤ + ٤\omega^{٢}}$$

$$= \frac{٢\omega}{٥ + ٢\omega} + \frac{٢\omega^{٢}}{٥ + ٢\omega^{٢}}$$

$$= \frac{٢\omega\,(٥ + ٢\omega^{٢}) + ٢\omega^{٢}\,(٥ + ٢\omega)}{(٥ + ٢\omega)\,(٥ + ٢\omega^{٢})}$$

$$= \frac{١٠\omega + ٤ + ١٠\omega^{٢} + ٤}{٢٥ + ١٠\omega^{٢} + ١٠\omega + ٤}$$

$$= \frac{٨ + ١٠\,(-١)}{٢٩ + ١٠\,(-١)} = \frac{-٢}{١٩} = \text{الطرف الأيسر.}$$

**٨** (د) **٩** (جـ) **١٠** (أ)

**١١**

(أ) $ع = ١ - \sqrt{٣}\,ت$

$ل = \sqrt{(١)^{٢} + (-\sqrt{٣})^{٢}} = ٢$ ، ∵ $س > ٠$ ، $ص < ٠$

∴ $\theta$ تقع في الربع الرابع

، $\theta = \text{ظا}^{-١}\left(\frac{-\sqrt{٣}}{١}\right) = -٦٠^{\circ} = \frac{-\pi}{٣}$

∴ $ع = ٢\left(\text{جتا}\,\frac{-\pi}{٣} + ت\,\text{جا}\,\frac{-\pi}{٣}\right)$

أي أن : $ع = ٢\,هـ^{\frac{-\pi}{٣}\,ت}$

، الجذور التربيعية للعدد ع

$= \sqrt{٢}\,هـ^{\left(\frac{\frac{-\pi}{٣} + ٢\pi ر}{٢}\right)ت}$ حيث $ر = ٠ ، ١$

عند $ر = ٠$ ∴ الجذر التربيعي الأول $= \sqrt{٢}\,هـ^{\frac{-\pi}{٦}\,ت}$

، عند $ر = ١$ ∴ الجذر التربيعي الثاني $= \sqrt{٢}\,هـ^{\frac{٥\pi}{٦}\,ت}$

(ب) $ع_{١} = \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢}ت\right)^{٤} = (\text{جتا}\,٣٠^{\circ} + ت\,\text{جا}\,٣٠^{\circ})^{٤}$

$= \text{جتا}\,١٢٠^{\circ} + ت\,\text{جا}\,١٢٠^{\circ}$

، $ع_{٢} = \text{جا}\,٦٠^{\circ} + ت\,\text{جتا}\,٦٠^{\circ} = \text{جتا}\,٣٠^{\circ} + ت\,\text{جا}\,٣٠^{\circ}$

$$∴ ع = \frac{ع_{١}}{ع_{٢}} = \frac{\text{جتا}\,١٢٠^{\circ} + ت\,\text{جا}\,١٢٠^{\circ}}{\text{جتا}\,٣٠^{\circ} + ت\,\text{جا}\,٣٠^{\circ}}$$

$= \text{جتا}\,٩٠^{\circ} + ت\,\text{جا}\,٩٠^{\circ}$

أي أن: $ع = \text{جتا}\,\frac{\pi}{٢} + ت\,\text{جا}\,\frac{\pi}{٢} = هـ^{\frac{\pi}{٢}\,ت}$

**١٢** (أ)  **١٣** (جـ)  **١٤** (ب)

**١٥**

(أ) ① ∵ (٤٥° ، ٦٠° ، θ) هى زوايا الاتجاه للمتجه $\vec{أ}$

∴ $جتا^{٢} ٤٥° + جتا^{٢} ٦٠° + جتا^{٢} θ = ١$

∴ $جتا^{٢} θ = \frac{١}{٤}$

∴ $جتا θ = ± \frac{١}{٢}$ (السالب مرفوض)

∴ ق(∠θ) = ٦٠°

② $\vec{أ} = ١٠$ (جتا ٤٥° ، جتا ٦٠° ، جتا ٦٠°)

$= ١٠ \left(\frac{١}{\sqrt{٢}} ، \frac{١}{٢} ، \frac{١}{٢}\right)$

$= ٥\sqrt{٢}\, \vec{س} + ٥\, \vec{ص} + ٥\, \vec{ع}$

(ب) ∵ $\frac{٢}{٣} ، \frac{-٢}{٣} ، \frac{١}{٣}$ هى جيوب تمام زوايا الاتجاه للمتجه $\vec{أ}$

∴ $\vec{أ} = ٦ \left(\frac{٢}{٣} ، \frac{-٢}{٣} ، \frac{١}{٣}\right) = (٤ ، -٤ ، ٢)$

∴ $\vec{أ} \times \vec{ب} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ٤ & -٤ & ٢ \\ -٢ & ٣ & ٥ \end{vmatrix}$

$= -٢٦\, \vec{س} - ٢٤\, \vec{ص} + ٤\, \vec{ع}$

∴ مساحة متوازى الأضلاع

$= \|\vec{أ} \times \vec{ب}\| = \sqrt{(-٢٦)^{٢} + (-٢٤)^{٢} + (٤)^{٢}}$

$= ٢\sqrt{٢١٧} \simeq ٣٥,٦$ وحدة مساحة.

**١٦** (جـ)  **١٧** (د)  **١٨** (ب)

**١٩**

① $ح_{ر+١} = {}^{٨}ق_{ر} \left(-\frac{١}{س}\right)^{ر} (س^{٣})^{٨-ر}$

$= {}^{٨}ق_{ر} (-١)^{ر} (س)^{-ر+٢٤-٣ر}$

$= {}^{٨}ق_{ر} (-١)^{ر} (س)^{٢٤-٤ر}$

بوضع ٢٤ − ٤ر = ٠   ∴ ر = ٦

∴ $ح_{٧}$ هو الحد الخالى من س

، $ح_{٧} = {}^{٨}ق_{٦} (-١)^{٦} = ٢٨$

② الحد الأوسط = $ح_{\frac{٨}{٢}+١} = ح_{٥}$

∴ $\frac{ح_{٥}}{ح_{٤}} = \frac{٥}{٨-٥+١} \times \frac{س^{٣}}{-\frac{١}{س}} = \frac{-٥}{٤} \times س^{٤}$

عند س = ١   ∴ $\frac{ح_{٥}}{ح_{٤}} = -\frac{٥}{٤}$

## ٢ دور ثان ٢٠٢٠

**١** (جـ)  **٢** (د)  **٣** (ب)

**٤**

(أ) ∵ $\vec{ح} = ٥\sqrt{٢}\, \vec{س} + ٥\, \vec{ص} + ٥\, \vec{ع}$

$\|\vec{ح}\| = \sqrt{(٥\sqrt{٢})^{٢} + (٥)^{٢} + (٥)^{٢}} = ١٠$

∴ $جتا θ_{س} = \frac{٥\sqrt{٢}}{١٠} = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$   ∴ $θ_{س} = ٤٥°$

، $جتا θ_{ص} = \frac{٥}{١٠} = \frac{١}{٢}$   ∴ $θ_{ص} = ٦٠°$

، $جتا θ_{ع} = \frac{٥}{١٠} = \frac{١}{٢}$   ∴ $θ_{ع} = ٦٠°$

(ب) ∵ $جا θ = \frac{\|\vec{أ} \times \vec{ب}\|}{\|\vec{أ}\| \|\vec{ب}\|} = \frac{٦٥}{٥ \times ٢٦} = \frac{١}{٢}$

∴ θ = ٣٠° أ، ١٥٠°

**٥** (أ)  **٦** (ب)  **٧** (جـ)

**٨**

① $\frac{ح_{٦}}{ح_{٥}} = \frac{٨-٥+١}{٥} \times \frac{\frac{٢}{س}}{س^{٢}} = \frac{٨}{٥س^{٣}}$

* إذا كان : $\frac{ح_{٦}}{ح_{٥}} = \frac{٢٥}{٨}$   ∴ $\frac{٨}{٥س^{٣}} = \frac{٢٥}{٨}$

∴ $١٢٥ س^{٣} = ٦٤$   ∴ $س^{٣} = \frac{٦٤}{١٢٥}$

∴ $س = \frac{٤}{٥}$

② $ح_{ر+١} = {}^{٨}ق_{ر} \left(\frac{٢}{س}\right)^{ر} (س^{٢})^{٨-ر}$

$= {}^{٨}ق_{ر} (٢)^{ر} (س)^{-ر} (س)^{١٦-٢ر}$

$= {}^{٨}ق_{ر} (٢)^{ر} (س)^{١٦-٣ر}$

، بوضع ١٦ − ٣ر = ٠

∴ $ر = \frac{١٦}{٣} \notin ص^{+}$

∴ لا يوجد حد خالى من س

**٩** (ب)  **١٠** (جـ)

**١١**

بأخذ (٣س) مشترك من ص١

$المحدد = ٣س \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ب & أ \\ ب+أ & ١+أ & ب+١ \end{vmatrix}$

(بإجراء ص٣ + ص٢ + ص١)

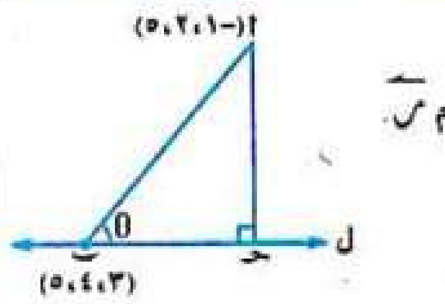
$= ٣س \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ب & أ \\ أ+ب+٢ & أ+ب+٢ & أ+ب+٢ \end{vmatrix}$

(بأخذ (أ + ب + ٢) مشترك من ص٣)

$= ٣س (أ+ب+٢) \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ب & أ \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix} = صفر$

(لأن ص١ = ص٣)

**١٢**



بفرض أن متجه اتجاه المستقيم $\vec{ل}$

هو $\vec{ى_{١}} = (٢ ، -٣ ، ٦)$

، $\vec{ى_{٢}} = \vec{أب} = (٤ ، ٢ ، ٠)$

$جتا θ = \frac{|(٢ ، -٣ ، ٦) . (٤ ، ٢ ، ٠)|}{\sqrt{٤+٩+٣٦}\sqrt{١٦+٤}}$

∴ ق(∠θ) ≃ ٨٦° ٢٠َ ، $\|\vec{أب}\| = \sqrt{٤^{٢}+٢^{٢}} = \sqrt{٢٠}$

∴ البعد العمودى (أحـ) = أب جا θ = $\sqrt{٢٠}$ جا ٨٦° ٢٠َ

≃ ٤,٤٦ وحدة طول.

أى أن بعد النقطة عن المستقيم = ٤,٤٦ وحدة طول.

**١٣** (د)

**١٤**

عند تقاطع المستقيمين : $\vec{ر_{١}} = \vec{ر_{٢}}$

∴ (٠ ، ١ ، ٠) + ك١ (١ ، ٢ ، −١)

= (١ ، ١ ، ١) + ك٢ (−٢ ، −٢ ، ٠)

∴ ك١ = ١ − ٢ك٢   ∴ ك١ + ٢ك٢ = ١   (١)

، ١ + ٢ك١ = ١ − ٢ك٢

∴ ٢ك١ + ٢ك٢ = ٠   (٢)

، −ك١ = ١   ∴ ك١ = −١   (٣)

ومن (١) ، (٢) ينتج أن :

ك١ = −١ ، ك٢ = ١

وهذه القيم تحقق معادلة (٣)

∴ (س ، ص ، ع) = (٠ ، ١ ، ٠) + −١ (١ ، ٢ ، −١)

ومنها س = −١ ، ص = −١ ، ع = ١

∴ المستقيمان متقاطعان فى النقطة (−١ ، −١ ، ١)

**١٥**

الطرف الأيمن

$= \left(\frac{١}{١+ωت} - \frac{ω+ت}{١+ω^{٢}ت}\right)^{٨}$

$= \left(\frac{١+ω^{٢}ت - (ω+ت+ω^{٢}ت^{٢}-ω)}{١+ω^{٢}ت+ωت+(-١)}\right)^{٨}$

$= \left(\frac{١-ت}{ω^{٢}ت+ωت}\right)^{٨} = \left(\frac{١-ت}{ت(-١)}\right)^{٨}$

$= \left(\frac{١-ت}{-ت}\right)^{٨} = \left(\frac{(١-ت)^{٢}}{(-ت)^{٢}}\right)^{٤} = \left(\frac{-٢ت}{-١}\right)^{٤}$

$= \frac{١٦}{١} = ١٦$ = الطرف الأيسر.

**١٦** (د)  **١٧** (جـ)  **١٨** (ب)

**١٩** (أ) $ل = \sqrt{(١)^{٢} + (\sqrt{٣})^{٢}} = ٢$

، ∵ س > ٠ ، ص > ٠

∴ θ تقع فى الربع الأول

$θ = ظا^{-١}(\sqrt{٣}) = \frac{π}{٣}$

∴ $ع = ٢\left(جتا \frac{π}{٣} + ت جا \frac{π}{٣}\right)$ أى أن : $ع = ٢ هـ^{\frac{π}{٣}ت}$

* الجذور التربيعية للعدد ع

هى $\sqrt{٢} هـ^{\left(\frac{\frac{π}{٣}+٢πر}{٢}\right)ت}$ حيث ر = ٠ ، ١

عند ر = ٠   ∴ الجذر التربيعى الأول = $\sqrt{٢} هـ^{\frac{π}{٦}ت}$

، عند ر = ١

∴ الجذر التربيعى الثانى = $\sqrt{٢} هـ^{\frac{٧π}{٦}ت}$

$= \sqrt{٢} هـ^{\frac{-٥π}{٦}ت}$

(ب) $ع_{١} = ١ - \sqrt{٣}ت$

∴ $ل = \sqrt{(١)^{٢} + (-\sqrt{٣})^{٢}} = ٢$

، ∵ س > ٠ ، ص < ٠   ∴ θ تقع فى الربع الرابع

∴ $θ = ظا^{-١}\left(\frac{-\sqrt{٣}}{١}\right) = -٦٠° = -\frac{π}{٣}$

∴ $ع_{١} = ٢\left[جتا\left(-\frac{π}{٣}\right) + ت جا\left(-\frac{π}{٣}\right)\right]$

، $ع_{٢} = هـ^{-\frac{π}{٦}ت} = جتا\left(-\frac{π}{٦}\right) + ت جا\left(-\frac{π}{٦}\right)$

، $ع_{٣} = \left(جتا\left(-\frac{π}{١٢}\right) + ت جا\left(-\frac{π}{١٢}\right)\right)^{٢}$

$= جتا\left(-\frac{π}{٦}\right) + ت جا\left(-\frac{π}{٦}\right)$

∴ $ع = \frac{ع_{١}\, ع_{٢}}{ع_{٣}}$

$= \frac{٢\left(جتا -\frac{π}{٣} + ت جا -\frac{π}{٣}\right) . \left(جتا -\frac{π}{٦} + ت جا -\frac{π}{٦}\right)}{جتا -\frac{π}{٦} + ت جا -\frac{π}{٦}}$

$= ٢\left[جتا\left(-\frac{π}{٣}\right) + ت جا\left(-\frac{π}{٣}\right)\right] = ٢ هـ^{-\frac{π}{٣}ت}$

## ٣ دور أول ٢٠٢١

**١** (د)

**الحل :**

∵ ٣ ع$_{١}$ × ع$_{٢}$ = ٣ (جتا θ + ت جا θ) (جتا ٢ θ + ت جا ٢ θ)

= ٣ (جتا ٣ θ + ت جا ٣ θ)

∴ السعة الأساسية للعدد (٣ ع$_{١}$ × ع$_{٢}$) هى ٣ θ

**٢** (ب)

**الحل :**

ع$_{ر+١}$ = $^{٧ن}$ق$_{ر}$ $\left(\frac{-ك}{س^{٢}}\right)^{ر}$ (س$^{٥}$)$^{٧ن-ر}$

= $^{٧ن}$ق$_{ر}$ (−ك)$^{ر}$ س$^{٣٥ن-٧ر}$

بوضع ٣٥ن − ٧ ر = ٠ ∴ ر = ٥ ن

∴ الحد الخالى من س هو ع$_{٥ن+١}$

**٣** (جـ)

**الحل :**

$$∵ ٢ \times ٢ \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ ١ & -٢ & ٣ \\ \text{هـ} & \text{و} & \text{د} \end{vmatrix} = ٢ \times ٢ \times ٨$$

$$∴ \begin{vmatrix} ٢\text{أ} & ٢\text{ب} & ٢\text{جـ} \\ ٢ & -٤ & ٦ \\ \text{هـ} & \text{و} & \text{د} \end{vmatrix} = ٣٢$$

$$∴ \begin{vmatrix} ٢ & -٤ & ٦ \\ ٢\text{أ} & ٢\text{ب} & ٢\text{جـ} \\ \text{هـ} & \text{و} & \text{د} \end{vmatrix} = -٣٢$$

**٤** (أ)

**الحل :**

$\overrightarrow{\text{جـ أ}}$ = $\overrightarrow{\text{جـ ب}}$ + $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ = (−$\overrightarrow{ص}$ + $\overrightarrow{س}$ − $\overrightarrow{ع}$)

+ (−٢ $\overrightarrow{س}$ + ٣ $\overrightarrow{ص}$)

= −$\overrightarrow{س}$ + ٢ $\overrightarrow{ص}$ − $\overrightarrow{ع}$

**٥** (أ)

**الحل :**

∵ المستقيمان متعامدان

∴ (−٢ ، م ، ٧) . (ن ، −٤ ، ٢) = صفر

∴ −٢ن − ٤ م + ١٤ = ٠ ∴ ٢ ن + ٤ م = ١٤

∴ ن + ٢ م = ٧

**٦** (أ)

**الحل :**

∵ $\overrightarrow{ن_{١}}$ = (٢ ، جـ ، ٤) ، $\overrightarrow{ن_{٢}}$ = (أ + ٢ ، ٦ ، ب − ٢)

، ∵ المستويان متوازيان

∴ $\frac{٢}{\text{أ}+٢}$ = $\frac{\text{جـ}}{٦}$ = $\frac{٤}{\text{ب}-٢}$ ∴ ٢ (ب − ٢) = ٤ (أ + ٢)

∴ ٢ب − ٤ = ٤أ + ٨ ∴ ٤أ − ٢ب = −١٢

∴ ٢أ − ب = −٦

**٧** (د)

**الحل :**

∵ جتا θ$_{س}$ = $\frac{\text{أ}_{س}}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|}$ ∴ $\frac{٣}{١٣}$ = $\frac{ك}{\sqrt{ك^{٢} + (١٢)^{٢} + (٤)^{٢}}}$

∴ ٩ (ك$^{٢}$ + ١٦٠) = ١٦٩ ك$^{٢}$

∴ ٩ ك$^{٢}$ + ٩ × ١٦٠ = ١٦٩ ك$^{٢}$

∴ ١٦٠ ك$^{٢}$ = ٩ × ١٦٠ ∴ ك$^{٢}$ = ٩

∴ ك = −٣ (مرفوض لأن الزاوية حادة) أ، ك = ٣

**٨** (أ)

**الحل :**

س − ص = $\frac{١}{١ + ω ت}$ − $\frac{ω + ت}{١ + ω^{٢} ت}$

= $\frac{(١ + ω^{٢} ت) - (ω + ت) (١ + ω ت)}{(١ + ω ت) (١ + ω^{٢} ت)}$

= $\frac{١ + ω^{٢} ت - (\cancel{ω} + ت + ω^{٢} ت - \cancel{ω})}{\cancel{١} + ω ت + ω^{٢} ت - \cancel{١}}$

= $\frac{١ - ت}{(ω + ω^{٢}) ت}$ = $\frac{١ - ت}{-ت}$ = ت + ١

**٩** (د)

**الحل :**

∵ أغلب أعضاء اللجنة من السيدات ولا تخلو من الجنسين

∴ اللجنة تتكون من (٣ سيدات ورجلين أو ٤ سيدات ورجل)

= $^{٦}$ق$_{٣}$ × $^{٩}$ق$_{٢}$ + $^{٦}$ق$_{٤}$ × $^{٩}$ق$_{١}$ = ٨٥٥

**١٠** (ب)

**الحل :**

∵ معامل ع$_{٦}$ = $^{١٠}$ق$_{٥}$

∴ $^{١٠}$ق$_{٥}$ × $\left(\frac{١}{ب}\right)^{٥}$ (أ)$^{٥}$ = $^{١٠}$ق$_{٥}$

∴ $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{٥}$ = ١ ∴ $\frac{أ}{ب}$ = ١

**١١** (جـ)

**الحل :**

∵ (س − ١) (س$^{٢}$ + س + ١) = ٨

∴ س$^{٣}$ − ١ = ٨

∴ س$^{٣}$ = ٩

∴ س$^{٩}$ + ١ = (٩)$^{٣}$ + ١ = ٧٣٠

**١٢** (جـ)

**الحل :**

∵ سَ صَ عَ = ١٠٠ (١)

، $\frac{١}{٢}$ سَ صَ جا ع = ٦,٢٥ (٢)

بقسمة (١) على (٢) :

∴ $\frac{عَ}{جا ع}$ = ٨

∴ ٢ نق = ٨ سم

**١٣** (د)

**الحل :**

∵ م$_{١}$ م$_{٢}$ = $\sqrt{(-٣ + ٢)^{٢} + (٢ - ١)^{٢} + (-٦\sqrt{٢} + ٥\sqrt{٢})^{٢}}$

= ٢ وحدة طول

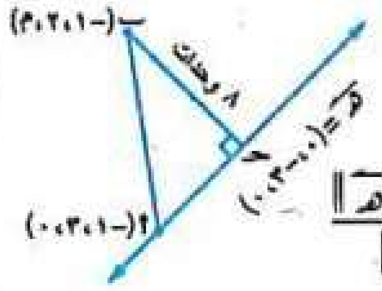
، ∵ نق$_{١}$ − نق$_{٢}$ = م$_{١}$ م$_{٢}$

∴ ٨ − نق$_{٢}$ = ٢

∴ نق$_{٢}$ = ٦ وحدة طول

**١٤** (جـ)

**الحل :**



∵ طول العمود (ب جـ) = $\frac{\|\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{هـ}}\|}{\|\overrightarrow{\text{هـ}}\|}$

∴ $\|\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{هـ}}\|$ = ٨ × ٣ = ٢٤

، ∵ $\overrightarrow{\text{أب}}$ = $\overrightarrow{\text{ب}}$ − $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٠ ، −١ ، م)

$$∴ \overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{هـ}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٠ & -١ & \text{م} \\ ٠ & -٢ & ٠ \end{vmatrix} = ٢ \text{ م } \overrightarrow{س}$$

∴ |٢ م| = ٢٤

∴ ٢ م = ٢٤

∴ م = ٨ حيث م ∈ ح$^{+}$

**١٥** (د)

**الحل :**

∵ جتا θ = $\frac{|\overrightarrow{ن_{١}} . \overrightarrow{ن_{٢}}|}{\|\overrightarrow{ن_{١}}\| . \|\overrightarrow{ن_{٢}}\|}$

∴ $\frac{١}{٢}$ = $\frac{|(١ ، ١ ، ٠) . (٠ ، ك ، ١)|}{\sqrt{(١)^{٢} + (١)^{٢}} \sqrt{ك^{٢} + (١)^{٢}}}$

∴ ٢ |ك| = $\sqrt{٢}$ $\sqrt{ك^{٢} + ١}$

∴ ٤ ك$^{٢}$ = ٢ (ك$^{٢}$ + ١)

∴ ٢ ك$^{٢}$ = ك$^{٢}$ + ١ ∴ ك$^{٢}$ = ١

∴ ك = ١ (لأن ك > ٠)

**١٦** (جـ)

**الحل :**

ع = ك (جا $\frac{٤π}{٣}$ − ت جتا $\frac{٤π}{٣}$) = ك (جتا $\frac{٥π}{٦}$ + ت جا $\frac{٥π}{٦}$)

∴ ع$^{٦}$ = ك$^{٦}$ (جتا $\frac{٥π}{٦}$ + ت جا $\frac{٥π}{٦}$)$^{٦}$

= ك$^{٦}$ (جتا ٥ π + ت جا ٥ π) = − ك$^{٦}$

**١٧** (أ)

**الحل :**

∵ الحدان الأوسطان متساويان

∴ أس = ب ∴ س = $\frac{ب}{أ}$

**١٨** (ب)

**الحل :**

∵ النقطة (٧ ، −٢ ، ٢) تقع على سطح الكرة

∴ تحقق معادلتها

∴ (٧ − ٤)$^{٢}$ + (−٢ − ١)$^{٢}$ + (٢ + ١)$^{٢}$ = ك$^{٢}$

∴ ك$^{٢}$ = ٢٧

∴ |ك| = ٣ $\sqrt{٣}$

**١٩** (أ)

**الحل :**

بفرض ع = س + ت ص ∴ $\bar{ع}$ = س − ت ص

∴ ع + $\bar{ع}$ = ٢ س ∴ ٢ س = ٢ هـ$^{π ت}$

∴ س = −١

∴ ع يمكن أن تساوى أى عدد مركب جزءه الحقيقى = −١

∴ ع يمكن أن تساوى هـ$^{π ت}$

**٢٠** ⓑ

**الحل:**

∵ $\frac{{}^{ن}ق_{٤} + {}^{ن}ق_{٣}}{{}^{ن+١}ق_{٣}} = \frac{{}^{ن+١}ق_{٤}}{{}^{ن+١}ق_{٣}} = \frac{(ن+١) - ٤ + ١}{٤} = \frac{ن - ٢}{٤}$

∴ $\frac{ن - ٢}{٤} = ١$   ∴ ن = ٦

∴ $\underline{|ن - ٦} = \underline{|٦ - ٦} = ١$

---

**٢١** ⓐ

**الحل:**

∵ $\left(س^{٢} + ٢ + \frac{١}{س^{٢}}\right)^{٦} = \left(\left(س + \frac{١}{س}\right)^{٢}\right)^{٦}$

$= \left(س + \frac{١}{س}\right)^{١٢}$

، ∵ $ح_{ر+١} = {}^{١٢}ق_{ر} \left(\frac{١}{س}\right)^{ر} (س)^{١٢-ر}$

$= {}^{١٢}ق_{ر}\, س^{١٢-٢ر}$

بوضع ١٢ − ٢ ر = ٢

∴ ر = ٥

∴ $ح_{٦}$ هو الحد الذى يشتمل على $س^{٢}$

∴ معامل $ح_{٦} = {}^{١٢}ق_{٥}$

---

**٢٢** ⓑ

**الحل:**

∵ $أ_{س ص} = ٢ س - ص$

∴ $(أ_{س ص}) = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & -١ \\ ٣ & ٢ & ١ \\ ٥ & ٤ & ٣ \end{pmatrix}$

، ∵ $|أ_{س ص}| = \begin{vmatrix} ١ & ٠ & -١ \\ ٣ & ٢ & ١ \\ ٥ & ٤ & ٣ \end{vmatrix} = صفر$

، ∵ $\begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} = ٢ \neq صفر$

∴ $ر(أ_{س ص}) = ٢$

---

**٢٣** ⓓ

**الحل:**

∵ $\overrightarrow{ءحـ} = \overrightarrow{حـ} - \overrightarrow{ء} = (٠ ، -٤ ، ٦)$

، ∵ $\overrightarrow{أ} \parallel \overrightarrow{ءحـ}$

∴ $\overrightarrow{أ} = \sqrt{١٣} \times$ (متجه وحدة فى اتجاه $\overrightarrow{ءحـ}$)

$= \sqrt{١٣} \times \frac{(٠ ، -٤ ، ٦)}{\sqrt{(-٤)^{٢} + (٦)^{٢}}} = (٠ ، -٢ ، ٣)$

∴ $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = (٠ ، -٢ ، ٣) \times (-٢ ، ٣ ، ٥)$

$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٠ & -٢ & ٣ \\ -٢ & ٣ & ٥ \end{vmatrix} = -١٩ \overrightarrow{س} - ٦ \overrightarrow{ص} - ٤ \overrightarrow{ع}$

---

**٢٤** ⓙ

**الحل:**

$م = \left(\frac{١ - ٢ + ١}{٣} ، \frac{٢ + ٠ + ٤}{٣} ، \frac{٤ + ٥ + ٠}{٣}\right) = (٠ ، ٢ ، ٣)$

∴ $\overrightarrow{أم}$ متجه اتجاه للمستقيم $\overleftrightarrow{أم} = \overrightarrow{م} - \overrightarrow{أ} = (-١ ، ٠ ، -١)$

∴ $\overrightarrow{ر} = (١ ، ٢ ، ٤) + ك (-١ ، ٠ ، -١)$

---

**٢٥** ⓑ

**الحل:**

∵ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة

∴ $(أب)^{٢} = ب حـ \times ب ء = ب حـ \times (ب حـ + حـ ء)$

$= (ب حـ)^{٢} + ب حـ \times حـ ء$

، ∵ المحدد $= (أب)^{٢} + (ب حـ)^{٢} + حـ ء \times ب حـ$

$= (أب)^{٢} + (أب)^{٢} = ٢ (أب)^{٢}$

∴ $٢ (أب)^{٢} = ٣٢$

∴ $(أب)^{٢} = ١٦$

∴ أب = ٤ وحدة طول

---

## ٤ دور ثان ٢٠٢١

**١** ⓓ

**الحل:**

$ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر} \left(\frac{٥}{س}\right)^{ر} (س^{٣})^{ن-ر}$

$= {}^{ن}ق_{ر} (٥^{ر})\, س^{٣ن-٤ر}$

∵ الحد الخالى من س هو $ح_{٧}$

∴ ر = ٦   ∴ ٣ن − ٤ (٦) = ٠   ∴ ن = ٨

---

**٢** ⓑ

**الحل:**

∵ $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب حـ} = (٤ ، ١٢ ، ٩)$

∴ $(٠ ، -١ ، ٣) + \overrightarrow{حـ} - (٤ ، -٢ ، ١) = (٤ ، ١٢ ، ٩)$

∴ $\overrightarrow{حـ} + (-٤ ، ١ ، ٢) = (٤ ، ١٢ ، ٩)$

∴ $\overrightarrow{حـ} = (٨ ، ١١ ، ٧)$

---

**٣** ⓓ

**الحل:**

∵ المتجه العمودى على المستوى المعطى هو (٢ ، ٣ ، −٥)

، ∵ المستويين متوازيين

∴ المتجه العمودى على المستوى المطلوب هو (٢ ، ٣ ، −٥)

∵ المستوى يمر بالنقطة (−٢ ، ٢ ، −١)

∴ معادلته $(٢ ، ٣ ، -٥) . \overrightarrow{ر} = (٢ ، ٣ ، -٥) . (-٢ ، ٢ ، -١)$

∴ ٢ س + ٣ ص − ٥ ع = ٧

---

**٤** ⓙ

**الحل:**

$\frac{ع_{١}}{ع_{٢}} = \frac{١٥ \left(جتا \frac{\pi}{٢} + ت\, جا \frac{\pi}{٢}\right)}{٣ (جتا \theta + ت\, جا \theta)}$

$= ٥ \left(جتا \left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right) + ت\, جا \left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)\right)$

---

**٥** ⓐ

**الحل:**

(بأخذ $٧^{ن}$ عامل مشترك من $ع_{٢}$)

∴ المحدد $= ٧^{ن} \times \begin{vmatrix} ٧^{٢ن} & ٧^{٣ن} & ٧^{٣ن} \\ ٧^{٣ن} & ٧^{٤ن} & ٧^{٤ن} \\ ٧^{٤ن} & ٧^{٥ن} & ٧^{٥ن} \end{vmatrix}$

، ∵ $ع_{٢} = ع_{٣}$   ∴ قيمة المحدد = صفر

---

**٦** ⓐ

**الحل:**

∵ المستقيمين متعامدين

∴ $\overrightarrow{ى_{١}} . \overrightarrow{ى_{٢}} = صفر$

∴ (−١ ، ٣ ، ٤) . (م ، ن ، ١) = ٠

∴ − م + ٣ ن + ٤ = ٠

∴ ٣ ن − م = −٤

---

**٧** ⓐ

**الحل:**

∵ $\overrightarrow{أ} = (-٢ ك ، ٢ ك ، ك)$

∴ $\overrightarrow{ى_{أ}} = \frac{(-٢ ك ، ٢ ك ، ك)}{\sqrt{٤ ك^{٢} + ٤ ك^{٢} + ك^{٢}}} = \left(\frac{-٢}{٣} ، \frac{٢}{٣} ، \frac{١}{٣}\right)$

∴ جيوب تمام الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$ هو $\left(\frac{-٢}{٣} ، \frac{٢}{٣} ، \frac{١}{٣}\right)$

---

**٨** ⓙ

---

**٩** ⓑ

**الحل:**

∵ معامل $ح_{ر+٢}$ = معامل $ح_{ر+٤}$

∴ ${}^{٢٠}ق_{ر+١} = {}^{٢٠}ق_{ر+٣}$

∴ ر + ١ = ر + ٣   ومنها   ١ = ٣ (مرفوض)

أو ر + ١ + ر + ٣ = ٢٠   ∴ ر = ٨

---

**١٠** ⓑ

**الحل:** المحدد $= \begin{vmatrix} ١ & \omega & \omega - ١ \\ ١ & -١ & \omega + ١ \\ ١ & \omega & \omega \end{vmatrix}$

(بإجراء $ص_{٢} - ص_{١}$ ، $ص_{٣} - ص_{١}$)

∴ المحدد $= \begin{vmatrix} ١ & \omega & \omega - ١ \\ ٠ & -١ - \omega & ٢ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix}$

$= ١ \times (-١ - \omega) \times ١ = \omega^{٢}$

---

**١١** ⓐ

**الحل:**

المستقيم : $٢ س - ٤ = \frac{٢ ص - ٨}{٢} = \frac{٢ ع - ١٤}{٥}$

بالقسمة على ٢

ل : $\frac{\text{س}-٢}{١}=\frac{\text{ص}-٤}{٢}=\frac{\text{ع}-٧}{٥}$

∴ $\overrightarrow{\text{هـ}}$ = (١ ، ٣ ، ٥) ويمر بالنقطة ب (٢ ، ٤ ، ٧)

أى أن البُعد العمودى = صفر

---

**١٢** (ج)

**الحل :**

∵ $\overrightarrow{\text{ن}_١}$ = (٠ ، ٠ ، ١) ، $\overrightarrow{\text{ن}_٢}$ = (١ ، ٠ ، $\sqrt{٣}$)

∴ جتا θ = $\frac{|(٠ ، ٠ ، ١) . (١ ، ٠ ، \sqrt{٣})|}{\sqrt{٠+٠+١}\ \sqrt{١+٠+٣}}=\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ θ = ٣٠°

---

**١٣** (د)

**الحل :**

∵ ء منتصف $\overline{\text{بحـ}}$ = $\left(\frac{٢+٠}{٢} ، \frac{٣+٣}{٢} ، \frac{٧+١}{٢}\right)$

= (١ ، ٣ ، ٤)

∴ طول $\overline{\text{أء}}$ = $\sqrt{(٣-١)^٢+(١-٣)^٢+(٥-٤)^٢}$

= $\sqrt{٤+٤+١}$ = ٣ وحدة طول.

---

**١٤** (أ)

**الحل :**

المستقيمات هى التى تمر بنقطة من المجموعة الأولى

{ب ، حـ ، ء ، هـ}

ونقطة من المجموعة الثانية {س ، ص ، ع ، ل ، م} بدون تكرار بالإضافة للمستقيمين الحاملين للشعاعين

∴ عددهم = ٥ × ٤ + ٢ = ٢٢ مستقيم.

---

**١٥** (ب)

**الحل :**

$$∵ \begin{vmatrix} \text{أ}+٢ & ٣ & \text{جاحـ} \\ ١ & \text{بَ} & ٠ \\ ٢ & ٣ & \text{جاحـ} \end{vmatrix} = ١٢$$

بإجراء ($\text{ص}_١ - \text{ص}_٢$)

$$∴ \begin{vmatrix} \text{أ} & ٠ & ٠ \\ ١ & \text{بَ} & ٠ \\ ٢ & ٣ & \text{جاحـ} \end{vmatrix} = ١٢$$

∴ أ بَ جاحـ = ١٢

∴ مساحة Δ أبحـ = $\frac{١}{٢}$ أ بَ جاحـ = ٦ وحدة مساحة.

---

**١٦** (د)

**الحل :**

∵ حجم الكره = $\frac{٤}{٣}$ π نق$^٣$ = ٣٦ π

∴ نق$^٣$ = ٢٧   ومنها نق = ٣ وحدة طول

∴ معادلة الكرة هى

$(\text{س}+١)^٢+\text{ص}^٢+(\text{ع}-٥)^٢=٩$

---

**١٧** (أ)

**الحل :**

∵ ٥ ح$_٤$ ، ح$_٥$ ، ح$_٧$ ، ح$_٦$ متناسبه

∴ $\frac{٥\,\text{ح}_٤}{\text{ح}_٥}=\frac{\text{ح}_٧}{\text{ح}_٦}$

∴ $٥ \times \frac{٤}{٨-٤+١} \times \frac{\sqrt{\text{س}}}{\frac{١}{\text{س}}} = \frac{٨-٦+١}{٦} \times \frac{\frac{١}{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}}$

بالضرب × $\frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س}}$

∴ ٤ س = $\frac{١}{٢}\left(\frac{١}{\text{س}^٢}\right)$

∴ س$^٣$ = $\frac{١}{٨}$   ∴ س = $\frac{١}{٢}$

---

**١٨** (د)

**الحل :**

$\text{ع}_١+\text{ع}_٢=\text{هـ}^{٥+\text{ك}\pi\text{ت}}+\text{هـ}^{(٥+\text{ك ت})\pi}$

$=\text{هـ}^{٥+\text{ك}\pi\text{ت}}+\text{هـ}^{٥\pi+\pi\text{ك ت}}$

$=(\text{هـ}^{٥}+\text{هـ}^{٥\pi})\,\text{هـ}^{(\text{ك}\pi)\text{ت}}$

فإن سعة ($\text{ع}_١+\text{ع}_٢$) هى ك π

، ∵ ك ∈ $]-\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٢}[$   ∴ السعة ∈ $]-\frac{\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}[$

∴ السعة يمكن أن تكون $\frac{-\pi}{٦}$

---

**١٩** (ج)

**الحل :**

∵ ر (أ) = ٣   ∴ |أ| ≠ صفر

$$∴ \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & \text{ك} & ٦ \\ ٥ & ٧ & ٩ \end{vmatrix} \neq \text{صفر}$$

∴ ١ (٩ك − ٤٢) − ٢ (١٨ − ٣٠) + ٣ (١٤ − ٥ك) ≠ ٠

∴ ٩ك − ٤٢ + ٢٤ + ٤٢ − ١٥ك ≠ ٠

∴ ٦ك ≠ ٢٤   ∴ ك ≠ ٤

---

**٢٠** (أ)

**الحل :**

العدد المركب هو $\sqrt{\text{ك}}-\text{ت}\sqrt{\text{ك}}$

∴ ل = $\sqrt{(\sqrt{\text{ك}})^٢+(-\sqrt{\text{ك}})^٢}=\sqrt{٢\text{ك}}$

أ تقع فى الربع الرابع ، ظا θ = $\frac{-\sqrt{\text{ك}}}{\sqrt{\text{ك}}}$ = −١

∴ θ = $\frac{-\pi}{٤}$

∴ العدد هو $\sqrt{٢\text{ك}}\ \text{هـ}^{\frac{-\pi}{٤}\text{ت}}$

---

**٢١** (د)

**الحل :**

∵ $\text{ح}_{\text{ر}+١}={}^{٧}\text{ق}_{\text{ر}}\left(\frac{\text{أ}}{\text{س}^٢}\right)^{\text{ر}}(\text{س})^{٧-\text{ر}}$

$={}^{٧}\text{ق}_{\text{ر}}\ \text{أ}^{\text{ر}}\ \text{س}^{٧-٣\text{ر}}$

∴ عند ٧ − ٣ر = ٤

∴ ر = ١

∴ معامل س$^٤$ = ${}^{٧}\text{ق}_١\ \text{أ}^١$ = ٤٩

∴ أ = ٧

---

**٢٢** (د)

**الحل :**

∵ $\overrightarrow{\text{أ}}\times\overrightarrow{\text{ب}}=\|\overrightarrow{\text{أ}}\times\overrightarrow{\text{ب}}\|\ .\ \overrightarrow{\text{ى}}$

= ٥ $\left(\frac{٣}{٥} ، ٠ ، \frac{٤}{٥}\right)$ = (٣ ، ٠ ، ٤)

∴ $(٣\overrightarrow{\text{أ}}+\overrightarrow{\text{ب}})\times(٤\overrightarrow{\text{أ}}+٢\overrightarrow{\text{ب}})$

$=\overrightarrow{\text{و}}+٦\,\overrightarrow{\text{أ}}\times\overrightarrow{\text{ب}}+٤\,\overrightarrow{\text{ب}}\times\overrightarrow{\text{أ}}+\overrightarrow{\text{و}}$

$=٢\,\overrightarrow{\text{أ}}\times\overrightarrow{\text{ب}}$ = ٢ (٣ ، ٠ ، ٤) = (٦ ، ٠ ، ٨)

---

**٢٣** (ب)

**الحل :**

∵ (٠ ، −١ ، ١) هو متجه اتجاه للمستقيم المنصف للزاوية بين $\overleftrightarrow{\text{وص}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{وع}}$

∴ معادلة المستقيم المطلوب هى

$\overrightarrow{\text{ر}}$ = (٢ ، −١ ، ٤) + ك (٠ ، −١ ، ١)

---

**٢٤** (ج)

**الحل :**

∵ ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} : {}^{\text{ن}-١}\text{ق}_{\text{ر}}$ = ٣ : ١

∴ $\frac{\underline{|\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}-\text{ر}}\ \underline{|\text{ر}}}\times\frac{\underline{|\text{ن}-١-\text{ر}}\ \underline{|\text{ر}}}{\underline{|\text{ن}-١}}=\frac{٣}{١}$

∴ $\frac{\text{ن}\ \underline{|\text{ن}-١}}{(\text{ن}-\text{ر})\ \underline{|\text{ن}-\text{ر}-١}\ \underline{|\text{ر}}}\times\frac{\underline{|\text{ن}-١-\text{ر}}\ \underline{|\text{ر}}}{\underline{|\text{ن}-١}}=\frac{٣}{١}$

∴ $\frac{\text{ن}}{\text{ن}-\text{ر}}=\frac{٣}{١}$   ∴ ٣ن − ٣ر = ن

∴ ٢ن = ٣ر   ∴ $\frac{\text{ن}}{\text{ر}}=\frac{٣}{٢}$

∴ $\underline{|٤\frac{\text{ن}}{\text{ر}}}=\underline{|٦}$ = ٧٢٠

---

**٢٥** (ج)

**الحل :**

∵ أ$^٢$ (−١ − (−٢)) − حـ$^٢$ (−١ − ٠) + (−ب$^٢$) (١ − ٠) = أحـ

∴ أ$^٢$ + حـ$^٢$ − ب$^٢$ = أحـ

، ∵ جتا ب = $\frac{\text{أ}^٢+\text{حـ}^٢-\text{ب}^٢}{٢\,\text{أحـ}}=\frac{\text{أحـ}}{٢\,\text{أحـ}}=\frac{١}{٢}$

∴ ق (∠ب) = ٦٠°

## ٥ دور أول ٢٠٢٢

**١** (ب)

**الحل :**

∵ المعادلات متجانسة ولها عدد لا نهائى من الحلول

$$\therefore \begin{vmatrix} ك & -٥ & -٢ \\ -١ & ٤ & ك \\ ٢ & ١ & ك \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

$\therefore ك\,(٤\,ك - ك) + ٥\,(-ك - ٢\,ك) - ٢\,(-١ - ٨) = \text{صفر}$

$\therefore ٣\,ك^{٢} - ١٥\,ك + ١٨ = ٠$

$\therefore ك^{٢} - ٥\,ك + ٦ = ٠$

$\therefore (ك - ٢)\,(ك - ٣) = ٠$

ومنها $ك = ٢$ أ، $ك = ٣$

---

**٢** (د)

**الحل :**

$ع = ت^{٣٢} + ت^{٢٤ن} \times ت^{-١٣} = ت^{٢} + \frac{١}{ت^{١٣}} = -١ + \frac{١}{ت}$

$= -١ - ت$

$|ع| = \sqrt{١ + ١} = \sqrt{٢}$

، ∵ $س < ٠$ ، $ص < ٠$ ∴ θ تقع فى الربع الثالث

$\therefore θ = -π + ظا^{-١}\left(\frac{ص}{س}\right) = -π + ظا^{-١}\left(\frac{-١}{-١}\right)$

$= -π + \frac{π}{٤} = \frac{-٣π}{٤}$

$\therefore ع = \sqrt{٢}\left(جتا\left(\frac{-٣π}{٤}\right) + ت\,جا\left(\frac{-٣π}{٤}\right)\right)$

---

**٣** (أ)

**الحل :**

$ل_{١} : \frac{س + ١}{٢} = \frac{ص - ٢}{٣} = \frac{ع - ٣}{٤}$ ∴ $\overline{ه_{١}} = (٢ ، ٣ ، ٤)$

، $ل_{٢} : \frac{س}{٣} = \frac{ص + ١}{٤} = \frac{ع - ١}{م}$ ∴ $\overline{ه_{٢}} = (٣ ، ٤ ، م)$

∵ المستقيمان متعامدان ∴ $\overline{ه_{١}} . \overline{ه_{٢}} = \text{صفر}$

$\therefore (٢ ، ٣ ، ٤) . (٣ ، ٤ ، م) = ٠$

$\therefore ٦ + ١٢ + ٤\,م = ٠$ ∴ $م = -٤,٥$

---

**٤** (ج)

**الحل :**

$ح_{ر+١} = {}^{٢٥}ق_{ر} \times \left(\frac{س^{٢}}{٢}\right)^{ر} \times \left(\frac{٢}{س}\right)^{٢٥ - ر}$

$= {}^{٢٥}ق_{ر} \times ٢^{-ر} \times ٢^{٢٥ - ر} \times س^{٢ر} \times س^{ر - ٢٥}$

$= {}^{٢٥}ق_{ر} \times ٢^{٢٥ - ٢ر} \times س^{٣ر - ٢٥}$

رتبتا الحدان الأوسطان : $\frac{٢٥ + ١}{٢} = ١٣$ ، $\frac{٢٥ + ٣}{٢} = ١٤$

∴ مجموع معاملى الحدين الأوسطين

$= {}^{٢٥}ق_{١٢} \times ٢^{٢٥ - ٢ \times ١٢} + {}^{٢٥}ق_{١٢} \times ٢^{٢٥ - ٢ \times ١٢}$

$= {}^{٢٥}ق_{١٢} \times ٢ + {}^{٢٥}ق_{١٢} \times ٢^{-١}$

$= {}^{٢٥}ق_{١٢} \times \left(٢ + \frac{١}{٢}\right) = \frac{٥}{٢}\;{}^{٢٥}ق_{١٢}$

---

**٥** (ب)

**الحل :**

∵ $\overline{ده} \,//\, \overline{بح}$ ∴ $\frac{أب}{أد} = \frac{أح}{أه} = \frac{بح}{ده} = ك$

∴ $أب = ك\,أد$ ، $أح = ك\,أه$ ، $بح = ك\,ده$

$$\therefore |س| = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ أد & أه & ده \\ ك\,أد & ك\,أه & ك\,ده \end{vmatrix}$$

$$= ك \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ أد & أه & ده \\ أد & أه & ده \end{vmatrix} \quad (ص_{٢} = ص_{٣})$$

$= ك \times \text{صفر} = \text{صفر}$

∴ س مصفوفة منفردة

---

**٦** (ج)

**الحل :**

$\overline{ن_{١}} = (١ ، ١ ، ٢)$ ، $\overline{ن_{٢}} = (٢ ، -١ ، ١)$

$\therefore جتا\,θ = \frac{|(١ ، ١ ، ٢) . (٢ ، -١ ، ١)|}{\sqrt{١ + ١ + ٤} \times \sqrt{٤ + ١ + ١}} = \frac{|٢ - ١ + ٢|}{\sqrt{٦} \times \sqrt{٦}}$

$= \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

$\therefore θ = ٦٠°$

---

**٧** (د)

**الحل :**

∵ مركز الكرة م = (−١ ، ١ ، ٠) ، م ∈ المستوى

، ∵ المستقيم يمر بالنقطة أ (٠ ، ١ ، −٢) ، أ ∈ المستوى

∵ $\overline{أم} = (-١ ، ١ ، ٠) - (٠ ، ١ ، -٢) = (-١ ، ٠ ، ٢)$

، ∵ متجه إتجاه المستقيم $\overline{ه} = (٣ ، ٤ ، ٢)$

∴ المتجه العمودى على المستوى $\overline{ن}$

$$= \overline{أم} \times \overline{ه} = \begin{vmatrix} \overline{س} & \overline{ص} & \overline{ع} \\ -١ & ٠ & ٢ \\ ٣ & ٤ & ٢ \end{vmatrix}$$

$= (٠ - ٨)\,\overline{س} - (-٢ - ٦)\,\overline{ص} + (-٤ - ٠)\,\overline{ع}$

$= -٨\,\overline{س} + ٨\,\overline{ص} - ٤\,\overline{ع}$

∴ معادلة المستوى هى :

$(-٨ ، ٨ ، -٤) . \overline{ر} = (-٨ ، ٨ ، -٤) . (٠ ، ١ ، -٢)$

$-٨\,س + ٨\,ص - ٤\,ع = ٠ + ٨ + ٨$

$\therefore -٨\,س + ٨\,ص - ٤\,ع = ١٦$

$\therefore ٢\,س - ٢\,ص + ع + ٤ = ٠$

---

**٨** (د)

**الحل :**

عدد الطرق $= {}^{٥}ق_{٥} \times {}^{١٠}ق_{٠} + {}^{٥}ق_{٣} \times {}^{١٠}ق_{٢} + {}^{٥}ق_{٢} \times {}^{١٠}ق_{٣}$

= ١٦٥١ طريقة

---

**٩** (د)

**الحل :**

$ح_{ر+١} = {}^{٨}ق_{ر} \times (ك\,س^{٢})^{ر} \times \left(\frac{١}{س}\right)^{٨ - ر}$

$= {}^{٨}ق_{ر} \times ك^{ر} \times س^{٢ر} \times س^{ر - ٨}$

$= {}^{٨}ق_{ر} \times ك^{ر} \times س^{٣ر - ٨}$

بوضع : $٣\,ر - ٨ = ٧$ ∴ $ر = ٥$

∴ $ح_{٦}$ هو الحد المشتمل على $س^{٧}$

∴ ${}^{٨}ق_{٥} \times ك^{٥} = ٥٦$ ∴ $ك^{٥} = ١$ ∴ $ك = ١$

---

**١٠** (ب)

**الحل :**

$ح_{٤}$ من البداية $= {}^{٢ن}ق_{٣} \times \left(\frac{س}{أ}\right)^{٣} \times \left(\frac{أ}{س}\right)^{٢ن - ٣}$

$= {}^{٢ن}ق_{٣} \times أ^{٢ن - ٦} \times س^{٦ - ٢ن}$

$ح_{٤}$ من النهاية فى مفكوك $\left(\frac{أ}{س} + \frac{س}{أ}\right)^{٢ن}$

$= ح_{٤}$ من البداية فى مفكوك $\left(\frac{س}{أ} + \frac{أ}{س}\right)^{٢ن}$

$= {}^{٢ن}ق_{٣} \times \left(\frac{أ}{س}\right)^{٣} \times \left(\frac{س}{أ}\right)^{٢ن - ٣}$

$= {}^{٢ن}ق_{٣} \times أ^{٦ - ٢ن} \times س^{٢ن - ٦}$

$\therefore \frac{{}^{٢ن}ق_{٣} \times أ^{٢ن - ٦} \times س^{٦ - ٢ن}}{{}^{٢ن}ق_{٣} \times أ^{٦ - ٢ن} \times س^{٢ن - ٦}} = \frac{أ^{٤}}{س^{٤}}$

$\therefore أ^{٤ن - ١٢} \times س^{١٢ - ٤ن} = أ^{٤} \times س^{-٤}$

$\therefore ٤ن - ١٢ = ٤$ ∴ $ن = ٤$

---

**١١** (أ)

**الحل :**

$\because {}^{ن-١}ق_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر} - {}^{ن-١}ق_{ر}$

$\therefore {}^{ن-١}ق_{ر+١} + {}^{ن-١}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ر}$

$\therefore {}^{ن}ق_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر}$

$\therefore ن = ر + ١ + ر = ٢\,ر + ١$

---

**١٢** (ب)

**الحل :**

$\overline{ن_{١}} = (١ ، م ، ١٦)$ ، $\overline{ن_{٢}} = (ل ، ٢ ، ٨)$

∵ المستويان متوازيان

$\therefore \overline{ن_{١}} \,//\, \overline{ن_{٢}}$ ∴ $\frac{١}{ل} = \frac{م}{٢} = \frac{١٦}{٨}$

∴ $ل\,م = ٢$

---

**١٣** (أ)

**الحل :**

معادلة المستقيم هى : $\frac{س - ٢}{٣} = \frac{ص - ٢}{١} = \frac{ع - ٨}{٤}$

المستقيم يقطع محور السينات فى النقطة (ك ، ٠ ، ٠)

$\therefore \frac{ك - ٢}{٣} = \frac{٠ - ٢}{١} = \frac{٠ - ٨}{٤}$ ∴ $ك = -٤$

∴ نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات هى (−٤ ، ٠ ، ٠)

---

**١٤** (أ)

**الحل :**

$\overline{ح} \times \overline{ه} = (\overline{أ} + \overline{ب}) \times (\overline{أ} - \overline{ب})$

$= \overline{أ} \times \overline{أ} - \overline{أ} \times \overline{ب} + \overline{ب} \times \overline{أ} - \overline{ب} \times \overline{ب}$

$= \overline{٠} - \overline{أ} \times \overline{ب} - \overline{أ} \times \overline{ب} - \overline{٠} = -٢\,(\overline{أ} \times \overline{ب})$

$\therefore -٢\,(\overline{أ} \times \overline{ب}) = ٢\,\overline{ى}$ ∴ $\overline{أ} \times \overline{ب} = -\frac{٢}{٢}\,\overline{ى}$

---

**١٥** (ج)

**الحل :**

∵ أ (٣ ، ٢ ، ٥) ∴ ب (٣ ، ٢ ، ٠) ، ح (٣ ، ٠ ، ٥)

$\therefore \overline{بح} = \overline{ح} - \overline{ب} = (٣ ، ٠ ، ٥) - (٣ ، ٢ ، ٠)$

$= (٠ ، -٢ ، ٥)$

$\therefore \overline{بح} = -٢\,\overline{ص} + ٥\,\overline{ع}$

**١٦** ⓐ

**الحل :**

$ع = \frac{-٧ + ٢٦ت}{٥ - ٢ت} \times \frac{٥ + ٢ت}{٥ + ٢ت} = \frac{-٣٥ + ١١٦ت - ٥٢}{٢٥ + ٤}$

$= \frac{-٨٧ + ١١٦ت}{٢٩} = -٣ + ٤ت$

$= ١ + ٤ت + ٤ت^{٢} = (١ + ٢ت)^{٢}$

∴ جذرا العدد ع = ± (١ + ٢ ت)

∴ ± (أ + ب ت) = ± (١ + ٢ ت)   ∴ أ = ± ١ ، ب = ± ٢

∴ أ + ٢ ب = ± ٥

**١٧** ⓐ

**الحل :**

$ع_{٢} = جتا\left(\frac{-\pi}{٢}\right) + ت\, جا\left(-\frac{\pi}{٢}\right)$

$ع_{٢} = -ت$

∴ $\frac{ع_{١}}{ع_{٢}} = \frac{٩ + ١٢ت}{-ت} \times \frac{ت}{ت} = ٩ت - ١٢ = ٣(-٤ + ٢ت)$

**١٨** (جـ)

**الحل :**

$ح_{٥} = {}^{ن}ق_{٤} \left(\frac{-١}{س^{٢}}\right)^{٤} \times (٢س)^{ن-٤}$

$= {}^{ن}ق_{٤} \times ٢^{ن-٤} \times س^{ن-١٢}$

∵ ن − ١٢ = ٠   ∴ ن = ١٢

**١٩** (جـ)

**الحل :**

$$\begin{vmatrix} أ & ب & حـ \\ أ+٢س & ب+٢ص & حـ+٢ع \\ س & ص & ع \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} أ & ب & حـ \\ أ & ب & حـ \\ س & ص & ع \end{vmatrix} + ٢ \begin{vmatrix} أ & ب & حـ \\ س & ص & ع \\ س & ص & ع \end{vmatrix} = ٠ + ٢(٠) = ٠$$

**٢٠** (د)

**الحل :**

$$أ^{مل} = \begin{pmatrix} ٢ & -٨ & ٢ \\ -٤ & ٨ & -٤ \\ -٦ & ٣٢ & -٢٢ \end{pmatrix} = ٢ \begin{pmatrix} ١ & -٤ & ١ \\ -٢ & ٤ & -٢ \\ -٣ & ١٦ & -١١ \end{pmatrix}$$

$$∴ أ^{-١} = \frac{١}{|أ|} أ^{مل} = -\frac{١}{١٦} \times ٢ \begin{pmatrix} ١ & -٤ & ١ \\ -٢ & ٤ & -٢ \\ -٣ & ١٦ & -١١ \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-١}{٨} \begin{pmatrix} ١ & -٤ & ١ \\ -٢ & ٤ & -٢ \\ -٣ & ١٦ & -١١ \end{pmatrix}$$

**٢١** (د)

**الحل :**

∵ النقطة ب (٣ ، ٢ ، ١) ∈ المستقيم ل

∴ $\overrightarrow{ب أ}$ = (٠ ، ٣ ، ٠) − (٣ ، ٢ ، ١) = (−٣ ، ١ ، −١)

، ∵ متجه اتجاه المستقيم $\overrightarrow{هـ}$ = (٢ ، −١ ، ٤)

$$، ∵ \overrightarrow{ب أ} \times \overrightarrow{هـ} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ -٣ & ١ & -١ \\ ٢ & -١ & ٤ \end{vmatrix}$$

$= (٤ - ١)\overrightarrow{س} - (-١٢ + ٢)\overrightarrow{ص} + (٣ - ٢)\overrightarrow{ع}$

$= ٣\overrightarrow{س} + ١٠\overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع}$

∴ طول العمود $= \frac{\|\overrightarrow{ب أ} \times \overrightarrow{هـ}\|}{\|\overrightarrow{هـ}\|} = \frac{\sqrt{٩ + ١٠٠ + ١}}{\sqrt{٤ + ١ + ١٦}}$

$= \sqrt{\frac{١١٠}{٢١}}$

**٢٢** (جـ)

**الحل :**

∵ حـ ∈ محور الصادات   ∴ حـ (٠ ، ص ، ٠)

، ∵ حـ أ = حـ ب

∴ $\sqrt{٤ + (ص + ٥)^{٢} + ٤٩} = \sqrt{١ + (ص - ٣)^{٢} + ٣٦}$

∴ $٥٣ + \cancel{ص^{٢}} + ١٠ص + ٢٥ = ٣٧ + \cancel{ص^{٢}} - ٦ص + ٩$

∴ ١٦ ص = −٣٢   ∴ ص = −٢

∴ حـ (٠ ، −٢ ، ٠)

**٢٣** ⓐ

**الحل :**

$ع_{١} = ٢ \left(جتا (-١٥٠°) + ت\, جا (-١٥٠°)\right)$

$، ع_{٢} = ٣ \left(جا (٩٠ + ٦٠°) + ت\, جتا (٩٠ + ٦٠°)\right)$

$= ٣ \left(جتا ٦٠° - ت\, جا ٦٠°\right)$

$= ٣ \left(جتا (-٦٠°) + ت\, جا (-٦٠°)\right)$

$∴ ع_{١} ع_{٢} = ٦ \left(جتا (-٢١٠°) + ت\, جا (-٢١٠°)\right)$

$= ٦ \left(جتا ١٥٠° + ت\, جا ١٥٠°\right)$

$= ٦ \left(جتا \frac{٥}{٦}\pi + ت\, جا \frac{٥}{٦}\pi\right)$

$∴ ع_{١} ع_{٢} = ٦ هـ^{\frac{٥}{٦}\pi ت}$

---

**٢٤** (د)

**الحل :**

مركز الكرة الأولى $م_{١}$ = (جتا θ ، جا θ ، ٠)

، $نق_{١} = \sqrt{جتا^{٢} θ + جا^{٢} θ + صفر + ٨} = ٣$ وحدة طول

، مركز الكرة الثانية $م_{٢}$ = (جتا θ ، جا θ ، ن) ويقع على الكرة الأولى

، ∵ الكرتان متساويتان في الحجم

∴ $م_{١} م_{٢} = نق_{٢} = نق_{١}$

∴ $\sqrt{(جتا θ - جتا θ)^{٢} + (جا θ - جا θ)^{٢} + (ن - ٠)^{٢}} = ٣$

∴ ن = ٣

∴ معادلة الكرة الثانية هي :

$(س - جتا θ)^{٢} + (ص - جا θ)^{٢} + (ع - ٣)^{٢} = ٩$

**٢٥** (ب)

**الحل :**

∵ Δ أ ب حـ قائم الزاوية في ب

∴ جتا حـ = جا أ ، جا حـ = جتا أ ، ظتا حـ = ظا أ

$$∴ \begin{vmatrix} جا أ & ٢ جتا حـ & ٣ \\ جتا أ & ٢ جا حـ & ٤ \\ ظا أ & ٢ ظتا حـ & ٥ \end{vmatrix} = ٢ \begin{vmatrix} جا أ & جا أ & ٣ \\ جتا أ & جتا أ & ٤ \\ ظا أ & ظا أ & ٥ \end{vmatrix} = ٢ \times صفر$$

= صفر

، ∵ ٢ جتا ب = ٢ جتا ٩٠° = صفر

∴ قيمة المحدد = ٢ جتا ب

## ٦ دور ثان ٢٠٢٢

**١** ⓐ

**الحل :**

$ح_{ر+١} = {}^{٢ن}ق_{ر} \times \left(\frac{١}{٢س}\right)^{ر} \times (س^{٢})^{٣ن-ر}$

$= {}^{٢ن}ق_{ر} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{ر} \times س^{٦ن-٢ر}$

بوضع ٦ ن − ٣ ر = ٠   ∴ ر = ٢ ن

∴ $ح_{٢ن+١}$ هو الحد الخالي من س

**٢** ⓐ

**الحل :**

∵ ٤ س + ٣ ص + ٦ ع = ١٢

∴ $\frac{٤س}{١٢} + \frac{٣ص}{١٢} + \frac{٦ع}{١٢} = ١$

∴ $\frac{س}{٣} + \frac{ص}{٤} + \frac{ع}{٢} = ١$

∴ المستوى يقطع محاور الإحداثيات س ، ص ، ع في النقط

أ (٣ ، ٠ ، ٠) ، ب (٠ ، ٤ ، ٠) ، حـ (٠ ، ٠ ، ٢) على الترتيب

∴ $\overrightarrow{أ ب}$ = (−٣ ، ٤ ، ٠) ، $\overrightarrow{أ حـ}$ = (−٣ ، ٠ ، ٢)

$$∴ \overrightarrow{أ ب} \times \overrightarrow{أ حـ} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ -٣ & ٤ & ٠ \\ -٣ & ٠ & ٢ \end{vmatrix}$$

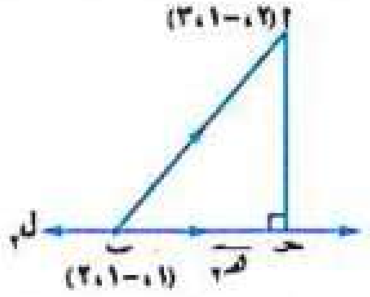
$= ٨\overrightarrow{س} + ٦\overrightarrow{ص} + ١٢\overrightarrow{ع}$

∴ $\|\overrightarrow{أ ب} \times \overrightarrow{أ حـ}\| = \sqrt{٦٤ + ٣٦ + ١٤٤} = ٢\sqrt{٦١}$

∴ مساحة Δ أ ب حـ $= \frac{١}{٢} \times ٢\sqrt{٦١} = \sqrt{٦١}$ وحدة مساحة

**٣** (جـ)

**الحل :**



∵ $\frac{-٤}{٢} = \frac{-٤}{٢} = \frac{٢}{-١}$

∴ $ل_{١} \mathbin{//} ل_{٢}$

∴ البعد بين المستقيمين $ل_{١}$ ، $ل_{٢}$ يساوي طول العمود الساقط من النقطة أ (٢ ، −١ ، ٣) على المستقيم $ل_{٢}$

، $\overrightarrow{ب أ}$ = (١ ، ٠ ، ١)

، $\overrightarrow{هـ_{٢}}$ = (٢ ، ٢ ، −١)

$$∴ \overrightarrow{ب أ} \times \overrightarrow{هـ_{٢}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ١ & ٠ & ١ \\ ٢ & ٢ & -١ \end{vmatrix}$$

$= -٢\overrightarrow{س} + ٣\overrightarrow{ص} + ٢\overrightarrow{ع}$

البعد بين المستقيمين $= \frac{\|\overrightarrow{ب أ} \times \overrightarrow{هـ_{٢}}\|}{\|\overrightarrow{هـ_{٢}}\|} = \frac{\sqrt{٤ + ٩ + ٤}}{\sqrt{٤ + ٤ + ١}}$

$= \frac{\sqrt{١٧}}{٣}$ وحدة طول.

**٤** (جـ)

**الحل :**

$\overrightarrow{ن_{١}}$ = (٢ ، −٤ ، ٤) ، $\overrightarrow{ن_{٢}}$ = (٥ ، −١ ، ٢)

∴ $جتا θ = \frac{|(٢ ، -٤ ، ٤) . (٥ ، -١ ، ٢)|}{\sqrt{٤ + ١٦ + ١٦} \times \sqrt{٢٥ + ١ + ٤}} = \frac{١١\sqrt{٣٠}}{٩٠}$

∴ θ = ٤٧° ٥٩′

**٥** (د)

**الحل :**

∵ $\frac{أ'}{جا أ} = \frac{ب'}{جا ب} = \frac{حـ'}{جا حـ} = ٢ نق$

∴ أ′ = ٢ نق جا أ ، ب′ = ٢ نق جا ب ، حـ′ = ٢ نق جا حـ

$\therefore \begin{vmatrix} \text{أَ} & ٣ & \text{نق جاأ} \\ \text{بَ} & ٦ & \text{نق جاب} \\ \text{حَ} & ٩ & \text{نق جاحـ} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢\,\text{نق جاأ} & ٣ & \text{نق جاأ} \\ ٢\,\text{نق جاب} & ٦ & \text{نق جاب} \\ ٢\,\text{نق جاحـ} & ٩ & \text{نق جاحـ} \end{vmatrix}$

$= ٢ \begin{vmatrix} \text{نق جاأ} & ٣ & \text{نق جاأ} \\ \text{نق جاب} & ٦ & \text{نق جاب} \\ \text{نق جاحـ} & ٩ & \text{نق جاحـ} \end{vmatrix}$

$\text{ع}_١ = ٢\,\text{ع}_٢ = ٢ \times \text{صفر} = \text{صفر}$

**٦** (ب)

**الحل :**

عدد القطع $= {}^{٢٠}\text{ق}_٢ - ٢٠ = ١٧٠$

**٧** (د)

**الحل :**

$\text{م} = \left(\frac{٦ + ٠ + ٠}{٣} ، \frac{٠ + ٦ + ٠}{٣} ، \frac{٠ + ٠ + ٦}{٣}\right) = (٢ ، ٢ ، ٢)$

$\text{نق} = \text{م أ} = \sqrt{١٦ + ٤ + ٤} = \sqrt{٢٤}$

$\therefore$ معادلة الكرة هى :

$(\text{س} - ٢)^٢ + (\text{ص} - ٢)^٢ + (\text{ع} - ٢)^٢ = ٢٤$

**٨** (جـ)

**الحل :**

$\text{أ}\,(٨ ، ٠ ، ٢) ، \text{حـ}\,(٠ ، ٧ ، ٢)$

$\therefore \overrightarrow{\text{أحـ}} = (٠ ، ٧ ، ٢) - (٨ ، ٠ ، ٢) = (-٨ ، ٧ ، ٠)$

$\therefore \overrightarrow{\text{أحـ}} = -٨\,\overrightarrow{\text{س}} + ٧\,\overrightarrow{\text{ص}}$

**٩** (د)

**الحل :**

$\overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{س}} \times ٢\,\overrightarrow{\text{ص}} + ٢\,\overrightarrow{\text{س}} \times \overrightarrow{\text{ع}} + \overrightarrow{\text{ص}} \times \overrightarrow{\text{ع}}$

$= ٢\,\overrightarrow{\text{ع}} + ٢\left(-\overrightarrow{\text{ص}}\right) + \overrightarrow{\text{س}} = \overrightarrow{\text{س}} - ٢\,\overrightarrow{\text{ص}} + ٢\,\overrightarrow{\text{ع}}$

$\therefore$ متجه الوحدة فى اتجاه $\overrightarrow{\text{أ}} = \frac{(١ ، -٢ ، ٢)}{\sqrt{١ + ٤ + ٤}}$

$= \left(\frac{١}{٣} ، \frac{-٢}{٣} ، \frac{٢}{٣}\right)$

**١٠** (أ)

**الحل :**

$\because$ المستويان متوازيان $\therefore \frac{\text{م}}{٤} = \frac{-١}{-\text{م}} = \frac{٣}{٦} \quad \therefore \text{م} = ٢$

**١١** (أ)

**الحل :**

$\because$ المصفوفة منفردة $\quad \therefore \begin{vmatrix} \text{أ}^٢ & ٢ \\ ٨ & \text{ب}^٢ \end{vmatrix} = ٠$

$\therefore \text{أ}^٢\text{ب}^٢ - ١٦ = ٠ \quad \therefore \text{أب} = \pm ٤$

**١٢** (أ)

**الحل :**

$\text{ع} + ٥ = \text{ت} - ٦ + ٥ = -١ + \text{ت}$

$\therefore |\text{ع} + ٥| = \sqrt{١ + ١} = \sqrt{٢}$

$، \because \text{س} < ٠ ، \text{ص} > ٠$

$\therefore \theta$ تقع فى الربع الثانى

$\therefore \theta = \pi + \text{ظا}^{-١}\left(\frac{١}{-١}\right) = \frac{٣}{٤}\pi$

$\therefore \text{ع} + ٥ = \sqrt{٢}\left(\text{جتا}\left(\frac{٣}{٤}\pi\right) + \text{ت جا}\left(\frac{٣}{٤}\pi\right)\right)$

**١٣** (أ)

**الحل :**

$\left(\text{س}^٢ + \text{أ س} + \frac{\text{أ}^٢}{٤}\right)^٤ = \left(\text{س} + \frac{\text{أ}}{٢}\right)^٨$

$\therefore$ معامل $\text{ح}_٣ = {}^{٨}\text{ق}_٢ \times \left(\frac{\text{أ}}{٢}\right)^٢ = ٧\,\text{أ}^٢$

**١٤** (جـ)

**الحل :**

$\text{ع}_١ = |\text{ع}_١|\left(\text{جتا}(\theta - \pi) + \text{ت جا}(\theta - \pi)\right)$

$\text{ع}_٢ = |\text{ع}_٢|\left(\text{جتا}\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right) + \text{ت جا}\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)\right)$

$\therefore \text{ع} = \frac{|\text{ع}_٢|}{|\text{ع}_١|}\left(\text{جتا}\left(\frac{\pi}{٢} + \theta - \theta + \pi\right)\right.$

$\left. + \text{ت جا}\left(\frac{\pi}{٢} + \theta - \theta + \pi\right)\right)$

$= \frac{|\text{ع}_٢|}{٢|\text{ع}_٢|}\left(\text{جتا}\left(\frac{٣\pi}{٢}\right) + \text{ت جا}\left(\frac{٣\pi}{٢}\right)\right)$

$= \frac{١}{٢}\left(\text{جتا}\left(\frac{-\pi}{٢}\right) + \text{ت جا}\left(\frac{-\pi}{٢}\right)\right)$

**١٥** (أ)

**الحل :**

$\text{أ}^{\text{مل}} = \begin{pmatrix} ٢ & -٨ & ٢ \\ -٤ & ٨ & -٤ \\ -٦ & ٣٢ & -٢٢ \end{pmatrix}$

$\therefore$ مصفوفة المرافقات $= \begin{pmatrix} ٢ & -٨ & ٢ \\ -٤ & ٨ & -٤ \\ -٦ & ٣٢ & -٢٢ \end{pmatrix}^{\text{مد}}$

$= \begin{pmatrix} ٢ & -٤ & -٦ \\ -٨ & ٨ & ٣٢ \\ ٢ & -٤ & -٢٢ \end{pmatrix}$

**١٦** (ب)

**الحل :**

$(١ + \text{س})^{٩٩}\,(١ - \text{س} + \text{س}^٢)^{٩٩}$

$= \left((١ + \text{س})\,(١ - \text{س} + \text{س}^٢)\right)^{٩٩} = (١ + \text{س}^٣)^{٩٩}$

$\because$ الحدان الأوسطان متساويان

$\therefore \text{س}^٣ = ١ \qquad \therefore \text{س} = ١$

**١٧** (أ)

**الحل :**

$\because \begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ١ - ٢\,\text{جاس} \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٢\,\text{جاس} - ١ & ٠ & ٥ \end{vmatrix} = ٠$

$\therefore -(١ - ٢\,\text{جاس}) \times ١ \times (٢\,\text{جاس} - ١) = ٠$

$\therefore (٢\,\text{جاس} - ١)^٢ = ٠$

$\therefore \text{جاس} = \frac{١}{٢}$

$، \because \text{صفر} \leq \text{س} \leq ٩٠^\circ \quad \therefore \text{س} = ٣٠^\circ$

**١٨** (ب)

**الحل :**

$\because {}^{\text{ن}}\text{ق}_١ + ٢\,{}^{\text{ن}}\text{ق}_٢ + {}^{\text{ن}}\text{ق}_٣ = ٣٥$

$\therefore \left({}^{\text{ن}}\text{ق}_١ + {}^{\text{ن}}\text{ق}_٢\right) + \left({}^{\text{ن}}\text{ق}_٢ + {}^{\text{ن}}\text{ق}_٣\right) = ٣٥$

$\therefore {}^{\text{ن}+١}\text{ق}_٢ + {}^{\text{ن}+١}\text{ق}_٣ = ٣٥ \quad \therefore {}^{\text{ن}+٢}\text{ق}_٣ = ٣٥ = {}^{٧}\text{ق}_٣$

$\therefore \text{ن} + ٢ = ٧ \qquad \therefore \text{ن} = ٥$

$، \because {}^{١٠}\text{ل}_{\text{ر}} = ٧٢٠ = {}^{١٠}\text{ل}_٣ \quad \therefore \text{ر} = ٣$

$\therefore \underline{|\text{ن} - \text{ر}} = \underline{|٥ - ٣} = \underline{|٢} = ٢$ .

**١٩** (جـ)

**الحل :**

$\text{أب} = \sqrt{(٣ - ١)^٢ + (٤ - ٢)^٢ + (٨ - ٧)^٢} = ٣$ وحدة طول

$، \text{ب حـ} = \sqrt{(١ - ٣)^٢ + (٢ - ٠)^٢ + (٧ - ٦)^٢} = ٣$ وحدة طول

$\therefore \text{أب} = \text{ب حـ}$

**٢٠** (د)

**الحل :**

$\because \text{ص} = ٥ ، \frac{\text{س} - ٤}{٢} = \frac{\text{ع} + \frac{١}{٢}}{٢} = \text{ك}$

$\therefore$ المعادلات البارامترية للمستقيم هى :

$\text{س} = ٤ + ٢\,\text{ك} ، \text{ص} = ٥ ، \text{ع} = \frac{-١}{٢} + ٢\,\text{ك}$

**٢١** (أ)

**الحل :**

$\text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & -١ & ١ \\ ٢ & ٣ & -١ \\ ٣ & -٥ & ٢ \end{pmatrix}$

$\therefore |\text{أ}| = \begin{vmatrix} ١ & -١ & ١ \\ ٢ & ٣ & -١ \\ ٣ & -٥ & ٢ \end{vmatrix}$

$= ١\,(٦ - ٥) + ١\,(٤ + ٣) + ١\,(-١٠ - ٩) = -١١ \neq ٠$

$\therefore \text{ر}(\text{أ}) = ٣$

$\text{أ}^* = \left(\begin{array}{ccc:c} ١ & -١ & ١ & ٢ \\ ٢ & ٣ & -١ & ٥ \\ ٣ & -٥ & ٢ & -١ \end{array}\right)$ على النظم ٣ × ٤ وغير صفرية

$\therefore \text{ر}(\text{أ}^*) = ٣$

$\therefore \text{ر}(\text{أ}) = \text{ر}(\text{أ}^*) =$ عدد المجاهيل $= ٣$

$\therefore$ نظام المعادلات له حل وحيد

**٢٢** (د)

**الحل :**

$\because \text{ح}_٧ = {}^{\text{ن}+١}\text{ق}_٦ \times \left(\frac{٢}{\text{س}}\right)^٦ \times \text{س}^{\text{ن}+١-٦}$

$= {}^{\text{ن}+١}\text{ق}_٦ \times ٢^٦ \times \text{س}^{\text{ن}-١١}$

$\therefore \text{ن} - ١١ = ٠ \qquad \therefore \text{ن} = ١١$

**٢٣** (د)

**الحل :**

$\because |\text{ع}| = ٣$

$\therefore \frac{١}{\text{ع}} = \frac{\bar{\text{ع}}}{\text{ع}\,\bar{\text{ع}}} = \frac{\bar{\text{ع}}}{|\text{ع}|^٢} = \frac{\bar{\text{ع}}}{٩} = \frac{١}{٩}\,\bar{\text{ع}}$

**٢٤** (ب)

**الحل :**

$\overrightarrow{\text{ص}_١} = (٣ ، \text{ن} ، -\text{ن}) ، \overrightarrow{\text{ص}_٢} = (١ ، ٢ ، ٥)$

$، \because \text{ل}_١ \perp \text{ل}_٢ \qquad \therefore \overrightarrow{\text{ص}_١} \cdot \overrightarrow{\text{ص}_٢} = ٠$

$\therefore ٣ + ٢\text{ن} - ٥\text{ن} = ٠ \qquad \therefore \text{ن} = ١$

**٢٥** (ب)

**الحل :**

$\text{ع} - ٢ = \text{ت}\,(\text{ع} + ٢)$

$\therefore \text{ع} - ٢ = \text{ت ع} + ٢\text{ت}$

$\therefore \text{ع} - \text{ت ع} = ٢ + ٢\text{ت}$

$\therefore \text{ع}\,(١ - \text{ت}) = ٢\,(١ + \text{ت})$

$\therefore \text{ع} = \frac{٢\,(١ + \text{ت})}{(١ - \text{ت})} \times \frac{١ + \text{ت}}{١ + \text{ت}} = \frac{٢\,(١ + \text{ت})^٢}{٢}$

$\therefore \text{ع} = (١ + \text{ت})^٢ \qquad \therefore \sqrt{\text{ع}} = \pm(١ + \text{ت})$

## ٧ دور اول ٢٠٢٣

**١** (د)

**الحل:**

∵ $ن_١ = (١ ، ٢ ، -م)$ ، $ن_٢ = (م ، ٦ ، -٩)$

، ∵ المستويان متوازيان

∴ $\frac{١}{م} = \frac{٢}{٦} = \frac{-م}{-٩}$ ∴ $م = \frac{١ \times ٦}{٢} = ٣$

**٢** (ج)

**الحل:**

∵ $أ = \begin{pmatrix} ٣ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \\ ٤ & ٢ & ٢ \end{pmatrix}$

، ∵ $|أ| =$ صفر (لأن $ع_٢ = ع_٣$)

، ∵ $\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} \neq$ صفر ∴ مرتبة المصفوفة أ تساوى ٢

**٣** (أ)

**الحل:**

∵ $\begin{vmatrix} ٣ & ٠ & ٠ \\ ٠ & س & ٠ \\ ٠ & ٠ & س \end{vmatrix} = ٣س^٢$

، ∵ $\begin{vmatrix} ٤ & أ & ٤ \\ ٠ & -٣ & ب \\ ٤ & أ & ٠ \end{vmatrix}$ (بإجراء $ص_٣ - ص_١$)

∴ $\begin{vmatrix} ٤ & أ & ٤ \\ ٠ & -٣ & ب \\ ٠ & ٠ & -٤ \end{vmatrix} = ٤٨$

∴ $٣س^٢ = ٤٨$ ∴ $س^٢ = ١٦$

∴ $س = \pm ٤$

**٤** (ج)

**الحل:**

∵ $ح_{ر+١} = {}^{١٣}ق_ر \left(\frac{١}{س}\right)^ر (س^٢)^{١٣-ر}$

$= {}^{١٣}ق_ر \, س^{٢٦-٣ر}$

∵ رتبتا الحدين الأوسطين هما : $\frac{١٣+١}{٢} = ٧$ ، $\frac{١٣+٣}{٢} = ٨$

∴ مجموع معاملى الحدين الأوسطين = مجموع معاملى $ح_٧$ ، $ح_٨$

$= {}^{١٣}ق_٦ + {}^{١٣}ق_٧ = {}^{١٤}ق_٧$

**٥** (ب)

**الحل:**

∵ $\bar{ع} = -١ + \sqrt{٣}\,ت$ ∴ $ع = -١ - \sqrt{٣}\,ت$

∴ $ل = \sqrt{(-١)^٢ + (-\sqrt{٣})^٢} = ٢$

، $ظا\,θ = \frac{-\sqrt{٣}}{-١} = \sqrt{٣}$ ∵ س < ٠ ، ص < ٠

∴ $θ = -π + \frac{π}{٣} = \frac{-٢π}{٣}$

∴ $ع = ٢\left(جتا\left(\frac{-٢π}{٣}\right) + ت\,جا\left(\frac{-٢π}{٣}\right)\right)$

**٦** (ج)

**الحل:**

∵ $ن_١ = (٢ ، -٢ ، ٤)$ ، $ن_٢ = (٢ ، ١ ، -٢)$

∴ $جتا\,θ = \frac{|(٢ ، -٢ ، ٤) . (٢ ، ١ ، -٢)|}{\sqrt{٤+٤+١٦}\sqrt{٤+١+٤}} = \frac{١}{\sqrt{٦}}$

∴ $جا\,θ = \frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٦}} = \frac{\sqrt{٣٠}}{٦}$

**٧** (أ)

**الحل:**

∵ $\overrightarrow{أب} = \vec{ب} - \vec{أ} = (-٢ ، ٢ ، ٤)$ ، ∵ $\overline{أب} // \overline{حـ ء}$

∴ (−٢ ، ٢ ، ٤) متجه اتجاه المستقيم $\overleftrightarrow{حـ ء}$

∴ (−١ ، ١ ، ٢) متجه اتجاه له أيضًا

∴ الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم $\overleftrightarrow{حـ ء}$

هى $\vec{ر} = (-٢ ، -٣ ، ١) + ك(-١ ، ١ ، ٢)$

**٨** (ب)

**الحل:**

∵ $\vec{أ} . \vec{ب} \times \vec{حـ} = \begin{vmatrix} م & ٢ & -٢ \\ ٠ & ل & ٥ \\ ٠ & ٠ & ن \end{vmatrix} = م\,ل\,ن$

، ∵ حجم متوازى السطوح = $|\vec{أ} . \vec{ب} \times \vec{حـ}| = ٤٠$

∴ $|م\,ل\,ن| = ٤٠$ ∴ $م\,ل\,ن = \pm ٤٠$

**٩** (أ)

**الحل:**

∵ ${}^{ن+٢}ل_س = (ن^٣ - ٤ن)(ن^٢ - ١) = ن(ن^٢ - ٤)(ن^٢ - ١)$

$= ن(ن-٢)(ن+٢)(ن-١)(ن+١)$

$= (ن+٢)(ن+١)(ن)(ن-١)(ن-٢)$

$= {}^{ن+٢}ل_٥$

∴ س = ٥

**١٠** (ب)

**الحل:**

∵ $\left(\frac{أ}{ω} - أ + أω^٢\right)^٤ = (أω^٢ - أ + أω)^٤$

$= (أ(ω^٢ + ω - ١))^٤$

$= (-٢أ)^٤ = ١٦أ^٤$

**١١** (ب)

**الحل:**

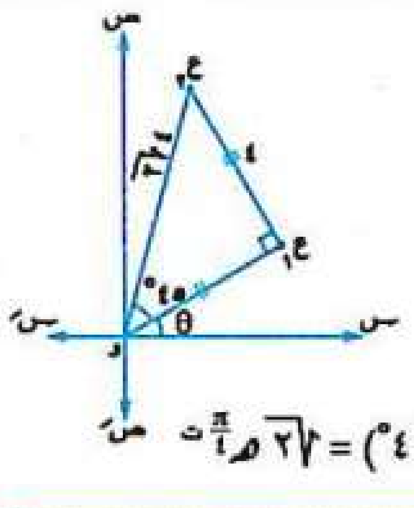
∵ $\vec{ب} = (٦ ، ٨ ، ٠)$ ، $\vec{أ} = (٣ ، ٤ ، ١٢)$

∴ $\overrightarrow{أب} = \vec{ب} - \vec{أ} = (٣ ، ٤ ، -١٢)$

∴ $\|\overrightarrow{أب}\| = \sqrt{(٣)^٢ + (٤)^٢ + (-١٢)^٢} = ١٣$ وحدة طول.

**١٢** (د)

**الحل:**



∵ $ع_١ = ٤\,(جتا\,θ + ت\,جا\,θ)$

، $ع_٢ = ٤\sqrt{٢}\,(جتا\,(٤٥° + θ)$
$+ ت\,جا\,(٤٥° + θ))$

∴ $\frac{ع_٢}{ع_١} = \sqrt{٢}\,(جتا\,٤٥° + ت\,جا\,٤٥°) = \sqrt{٢}\,هـ^{\frac{π}{٤}ت}$

**١٣** (ج)

**الحل:**

∵ م منتصف $\overline{بحـ} = \left(\frac{١+٥}{٢} ، \frac{٠+٤}{٢} ، \frac{٦+٢}{٢}\right) = (٣ ، ٢ ، ٤)$

، ∵ $\overrightarrow{أم} = \vec{م} - \vec{أ} = (٥ ، ٢ ، ١)$

∴ $\|\overrightarrow{أم}\| = \sqrt{(٥)^٢ + (٢)^٢ + (١)^٢} = \sqrt{٣٠}$

∴ نق = $\sqrt{٣٠}$ وحدة طول.

∴ معادلة الكرة هى $(س - ٣)^٢ + (ص - ٢)^٢ + (ع - ٤)^٢ = ٣٠$

**١٤** (ب)

**الحل:**

∵ $ح_{ر+١} = {}^{٣ن}ق_ر \left(\frac{-س^٢}{م}\right)^ر \left(\frac{م}{س^٢}\right)^{٣ن-ر}$

$= (-١)^ر \, {}^{٣ن}ق_ر \, (م)^{٣ن-٢ر} \, س^{٤ر-٦ن}$

∴ $ح_٧ = (-١)^٦ \, {}^{٣ن}ق_٦ \, (م)^{٣ن-١٢} \, س^{٢٤-٦ن}$

، ∵ $ح_٧$ هو الحد الخالى من س

∴ ٢٤ − ٦ن = صفر ∴ ن = ٤

∴ $ح_٧ = (-١)^٦ \times {}^{١٢}ق_٦ \times م^{صفر} = ٩٢٤$

**١٥** (ج)

**الحل:**

$ع = ٤\,(جا\,٣٠° - ت\,جا\,٣٠°)$

∵ $ع = ٤\,(جتا\,(-٩٠° + ٣٠°) + ت\,جا\,(-٩٠° + ٣٠°))$

∴ $ع = ٤\,(جتا\,(-٦٠°) + ت\,جا\,(-٦٠°))$

∴ $ع^{\frac{١}{٢}} = ٢\left(جتا\,\frac{-٦٠° + ٣٦٠°ر}{٢} + ت\,جا\,\frac{-٦٠° + ٣٦٠°ر}{٢}\right)$

حيث ر = ٠ ، ١

، بوضع ر = ٠

∴ $ع^{\frac{١}{٢}} = ٢\,(جتا\,-٣٠° + ت\,جا\,-٣٠°) = ٢\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢}ت\right)$

$= \sqrt{٣} - ت$

، بوضع ر = ١

∴ $ع^{\frac{١}{٢}} = ٢\,(جتا\,١٥٠° + ت\,جا\,١٥٠°) = ٢\left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢}ت\right)$

$= -\sqrt{٣} + ت$

حل آخر :

$ع = ٤\left(جا\,\frac{π}{٦} - ت\,جا\,\frac{π}{٦}\right) = ٤\left(\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت\right)$

$= ٢ - ٢\sqrt{٣}\,ت$

، بتربيع الاختيارات نجد أن

$(\sqrt{٣} - ت)^٢ = ٣ - ١ - ٢\sqrt{٣}\,ت = ٢ - ٢\sqrt{٣}\,ت$

∴ الاختيار الصحيح هو (ج)

**١٦** (أ)

**الحل:**

∵ عدد الأضلاع = ن ∴ عدد الأقطار = ${}^{ن}ق_٢ - ن$

∴ ${}^{ن}ق_٢ - ن = ٧٤٠$ ∴ $\frac{ن(ن-١)}{٢} - ن = ٧٤٠$

∴ $ن^٢ - ٣ن - ١٤٨٠ = ٠$ ∴ $(ن - ٤٠)(ن + ٣٧) = ٠$

∴ ن = ٤٠ أ، ن = −٣٧ (مرفوض)

∴ ${}^{ن}ق_٢ = {}^{٤٠}ق_٢ = ٩٨٨٠$

**١٧** (د)

**الحل:**

∵ معادلة المستقيم هى $\frac{س}{١} = \frac{ص}{١} = \frac{ع}{٢}$

متجه اتجاهه $\vec{هـ} = (١ ، ١ ، ٢)$ ويمر بالنقطة أ (٠ ، ٠ ، ٠)

، ∵ المستوى يمر بالنقطة ب (١ ، ٢ ، ٣)

∴ $\vec{ن}$ متجه اتجاه عمودى على المستوى

$= \overrightarrow{أب} \times \vec{هـ} = (١ ، ٢ ، ٣) \times (١ ، ١ ، ٢)$

$= \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ١ & ١ & ٢ \end{vmatrix} = \vec{س} + \vec{ص} - \vec{ع}$

∴ معادلة المستوى هى $(١ ، ١ ، -١) \cdot \overrightarrow{\text{ر}}$

$= (١ ، ١ ، -١) \cdot (٠ ، ٠ ، ٠)$

أى أن : $\overrightarrow{\text{ر}} \cdot (١ ، ١ ، -١) =$ صفر

---

**١٨** ①

**الحل :**

∵ $\text{ح}_{١٥}$ هو الحد الأوسط

∴ عدد الحدود $= ١٥ \times ٢ - ١ = ٢٩$

∴ $\text{ن} + ٣ = ٢٩ - ١$ ∴ $\text{ن} = ٢٥$

، ∵ معامل $\text{ح}_{١٦}$ فى مفكوك $\left(٢\sqrt{\text{س}} - \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}\right)^{٢٨}$

هو $^{٢٨}\text{ق}_{١٥} \left(-\frac{١}{٢}\right)^{١٥} (٢)^{١٣}$

∴ معامل $\text{ح}_{١٦} = -\,^{٢٨}\text{ق}_{١٥}\, ٢^{-٢} = -\,^{٢٨}\text{ق}_{١٥} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{-٢}$

$= -٤ \times \,^{٢٨}\text{ق}_{١٥} = -٤ \times \,^{٢٨}\text{ق}_{١٣}$

---

**١٩**

∵ مصفوفة المرافقات لصفوفة المعاملات أ هى $\begin{pmatrix} -٤ & ٥ & -٢ \\ -٦ & -٣ & -٣ \\ -٧ & -٧ & ٧ \end{pmatrix}$

∴ $\text{أ}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} -٤ & ٥ & -٢ \\ -٦ & -٣ & -٣ \\ -٧ & -٧ & ٧ \end{pmatrix}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} -٤ & -٦ & -٧ \\ ٥ & -٣ & -٧ \\ -٢ & -٣ & ٧ \end{pmatrix}$

، ∵ $|\text{أ}^{\text{مد}}| = \begin{vmatrix} -٤ & -٦ & -٧ \\ ٥ & -٣ & -٧ \\ -٢ & -٣ & ٧ \end{vmatrix}$

$= -٤(-٢١ - ٢١) + ٦(٣٥ - ١٤) - ٧(-١٥ - ٦)$

$= ٤٤١$

، ∵ $|\text{أ}|^{٢} = |\text{أ}^{\text{مد}}| = ٤٤١$ ∴ $|\text{أ}| = \pm ٢١$

، ∵ $|\text{أ}| <$ صفر ∴ $|\text{أ}| = -٢١$

∴ $\text{أ}^{-١} = \frac{١}{|\text{أ}|}\text{أ}^{\text{مد}} = \frac{-١}{٢١}\begin{pmatrix} -٤ & -٦ & -٧ \\ ٥ & -٣ & -٧ \\ -٢ & -٣ & ٧ \end{pmatrix}$

، ∵ $\text{أ}\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٩ \\ ١٥ \\ ١٢ \end{pmatrix}$ ∴ $\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \text{أ}^{-١}\begin{pmatrix} ٩ \\ ١٥ \\ ١٢ \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \frac{-١}{٢١}\begin{pmatrix} -٤ & -٦ & -٧ \\ ٥ & -٣ & -٧ \\ -٢ & -٣ & ٧ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٩ \\ ١٥ \\ ١٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٠ \\ ٤ \\ -١ \end{pmatrix}$

∴ س = ١٠ ، ص = ٤ ، ع = −١

∴ مجموعة الحل = {(١٠ ، ٤ ، −١)}

---

**٢٠**

∵ أ = (٥ ، −١ ، ٥) نقطة على المستقيم ل

، ∵ $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}} = (٠ ، ٠ ، -٥)$

، $\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{هـ}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ ٠ & ٠ & -٥ \\ ٢ & ٢ & ١ \end{vmatrix} = ١٠\,\overrightarrow{\text{س}} - ١٠\,\overrightarrow{\text{ص}}$

∴ طول العمود $= \frac{\|\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{هـ}}\|}{\|\overrightarrow{\text{هـ}}\|} = \frac{\sqrt{(١٠)^{٢} + (-١٠)^{٢}}}{\sqrt{(٢)^{٢} + (٢)^{٢} + (١)^{٢}}}$

$= \frac{١٠\sqrt{٢}}{٣}$ وحدة طول.

## ٨ دور ثان ٢٠٢٣

**١** (ج)

**الحل :**

∵ $\text{ح}_{\text{ر}+١} = \,^{٨}\text{ق}_{\text{ر}} \times \left(\frac{-١}{\text{س}}\right)^{\text{ر}} (\text{س})^{٨-\text{ر}}$

$= (-١)^{\text{ر}} \times \,^{٨}\text{ق}_{\text{ر}}\, \text{س}^{٨-٢\text{ر}}$

بوضع ٨ − ٢ ر = ٠

∴ ر = ٤

∴ $\text{ح}_{٥}$ هو الحد الخالى من س

---

**٢** ①

**الحل :**

∵ (س − ٢) أحد عوامل المحدد

∴ المحدد = صفر عندما س = ٢

∴ $\begin{vmatrix} ٠ & ٥ & ٣ \\ ٠ & \text{ك} - ٤ & \text{ك} \\ ٢ & ١ & ١ \end{vmatrix} = ٠$

∴ $٢\,[٥\,\text{ك} - ٣\,(\text{ك} - ٤)] =$ صفر

∴ ٢ ك + ١٢ = ٠ ∴ ك = −٦

---

**٣** (د)

**الحل :**

∵ $\overrightarrow{\text{ن}_١} = (٢ ، ١ ، \text{م})$ ، $\overrightarrow{\text{ن}_٢} = (\text{ك} ، ١ ، ٦)$

∴ المستويان متوازيان.

∴ $\overrightarrow{\text{ن}_١} \,/\!/\, \overrightarrow{\text{ن}_٢}$ ∴ $\frac{٢}{\text{ك}} = \frac{١}{١} = \frac{\text{م}}{٦}$

∴ ك م = ١٢

---

**٤** (ب)

**الحل :**

$\text{ع} = ١\left(\text{جتا}\left(\frac{\pi}{٦}\right) + \text{ت جا}\left(\frac{\pi}{٦}\right)\right) = \frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢}\text{ت}$

---

**٥** (د)

**الحل :**

∵ $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} \text{ن} & ٠ & ٠ \\ ٠ & \text{ن} & ٠ \\ ٠ & ٠ & \text{ن} \end{vmatrix} = \text{ن}^{٣}$

، $|٢\text{أ}| = ٢^{٣}|\text{أ}| = ٨\,\text{ن}^{٣}$

∴ $|\text{أ}|\,|٢\text{أ}| = \text{ن}^{٣} \times ٨\,\text{ن}^{٣} = ٨\,\text{ن}^{٦}$

---

**٦** (د)

**الحل :**

∵ $^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = ٢ \times ٥ \times ١١ \times ١٢ = ١٢ \times ١١ \times ١٠ = \,^{١٢}\text{ل}_{٣}$

∴ ن = ١٢

---

**٧** ①

**الحل :**

∵ $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{ج}} = \begin{vmatrix} \text{م} & -٣ & ١ \\ ١ & ٠ & -٢ \\ -٢ & -١ & ٤ \end{vmatrix}$

$= \text{م}\,(٠ - ٢) + ٣\,(٤ - ٤) + (-١ - ٠)$

$= -٢\,\text{م} - ١$

، ∵ جسم متوازى السطوح $= |\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{ج}}|$

∴ |−٢ م − ١| = ٧ ∴ ٢ م + ١ = ±٧

∴ −٢ م − ١ = ٧ ومنها م = −٤

أ، −٢ م − ١ = −٧ ومنها م = ٣

---

**٨** (ب)

**الحل :**

∵ $\overrightarrow{\text{ن}_١} = (١ ، ٠ ، ١)$

، $\overrightarrow{\text{ن}_٢} = (٣ ، -٦ ، ٦)$ أى $(١ ، -٢ ، ٢)$

∴ $\text{جتا}\,\theta = \frac{|\overrightarrow{\text{ن}_١} \cdot \overrightarrow{\text{ن}_٢}|}{\|\overrightarrow{\text{ن}_١}\|\,\|\overrightarrow{\text{ن}_٢}\|} = \frac{|١ + ٠ + ٢|}{\sqrt{١ + ٠ + ١}\,\sqrt{١ + ٤ + ٤}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

∴ $\theta = ٤٥^{\circ}$

---

**٩** ①

**الحل :**

$\text{ع} = \frac{٢}{(١ + \omega)(١ - \omega - \omega^{٢})} = \frac{٢}{(-\omega^{٢})(١ - (-١))} = -\omega$

---

**١٠** (ج)

**الحل :**

∵ متجه اتجاه المستقيم = (٣ ، −١ ، ٤)

ويمر بالنقطة (١ ، −٢ ، ٤)

∴ معادلة المستقيم هى : $\frac{\text{س} - ١}{٣} = \frac{\text{ص} + ٢}{-١} = \frac{\text{ع} - ٤}{٤}$

---

**١١** (ج)

**الحل :**

∵ $\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = \sqrt{(-٣)^{٢} + ٠ + (٤)^{٢}} = ٥$

∴ جيوب تمام زوايا الاتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$

هى $\frac{\overrightarrow{\text{أ}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|} = \frac{١}{٥}(-٣ ، ٠ ، ٤) = \left(\frac{-٣}{٥} ، ٠ ، \frac{٤}{٥}\right)$

---

**١٢** (د)

**الحل :**

$\frac{\text{ع}_١}{\text{ع}_٢} = \frac{\text{هـ}^{٣ + \frac{\pi}{٢}\text{ت}}}{\text{هـ}^{٣ - \frac{\pi}{٢}\text{ت}}} = \text{هـ}^{٣ + \frac{\pi}{٢}\text{ت} - ٣ + \frac{\pi}{٢}\text{ت}} = \text{هـ}^{\pi\text{ت}}$

$= \text{جتا}\,\pi + \text{ت جا}\,\pi = -١$

---

**١٣** (ب)

**الحل :**

$\text{ع} = \frac{٢ + ٤\text{ت}}{٢ - \text{ت}} \times \frac{٢ + \text{ت}}{٢ + \text{ت}} = \frac{٤ + ٢\text{ت} + ٨\text{ت} - ٤}{٥} = ٢\,\text{ت}$

∴ $\text{ع}^{٦} = (٢\,\text{ت})^{٦} = ٦٤\,\text{ت}^{٦} = ٦٤\,\text{ت}^{٢} = -٦٤$

$= ٦٤\,(\text{جتا}\,\pi + \text{ت جا}\,\pi)$

---

**١٤** (ج)

**الحل :**

∵ $\text{م}_١\text{م}_٢ = \sqrt{(٤ - ٢)^{٢} + (-٣ - ٣)^{٢} + (٦ - ٤)^{٢}}$

$= \sqrt{٤٤} = ٢\sqrt{١١}$

، ∵ $\text{م}_١\text{م}_٢ = ٢$ نق ∴ نق $= \frac{١}{٢} \times ٢\sqrt{١١} = \sqrt{١١}$

∴ معادلة الكرة الثانية هى

$(\text{س} - ٤)^{٢} + (\text{ص} + ٣)^{٢} + (\text{ع} - ٦)^{٢} = ١١$

---

**١٥** (د)

**الحل :**

عدد الطرق $= \boxed{٤} \times \boxed{٥} \times \boxed{٦} \times \boxed{١} = ١٢٠$ طريقة

---

**١٦** ①

**الحل :**

∵ $(\text{س}^{٢} - ٦\,\text{س} + ٩)^{٢١} = \left((\text{س} - ٣)^{٢}\right)^{٢١} = (\text{س} - ٣)^{٤٢}$

∴ عدد حدود المفكوك = ٤٣ حدًا

**١٧** (ب)

**الحل :**

بفرض نقطة تقاطع المستقيم مع المستوى هى

$(١ + ٢ ك \text{ ، } -٢ + ٣ ك \text{ ، } ١ + ٤ ك)$

$\therefore ٢ (١ + ٢ ك) + (-٢ + ٣ ك) - (١ + ٤ ك) = ٥$

$\therefore ٢ + ٤ ك - ٢ + ٣ ك - ١ - ٤ ك = ٥$

$٣ ك = ٦$

$\therefore ك = ٢$

∴ النقطة هى $(٥ \text{ ، } ٤ \text{ ، } ٩)$

---

**١٨** (جـ)

**الحل :**

∵ معامل $ح_{٢ س + ٢}$ = معامل $ح_{س + ٤}$

$\therefore {}^{١٧}ق_{٢ س + ٢} = {}^{١٧}ق_{س + ٣}$

$\therefore ٢ س + ٢ = س + ٣$

∴ $س = ١$ (مرفوض)

أ، $٢ س + ٢ + س + ٣ = ١٧$

$\therefore ٣ س + ٥ = ١٧$ $\qquad$ $\therefore ٣ س = ١٢$

$\therefore س = ٤$ $\qquad$ $\therefore \underline{|س} = \underline{|٤} = ٢٤$

---

**١٩**

$$\because أ = \begin{pmatrix} ٤ & ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ & -٤ \\ ١ & ٠ & -٧ \end{pmatrix}$$

$\therefore |أ| = ٤ (-٧ - ٠) - ٣ (-١٤ + ٤) + ٢ (٠ - ١) = \text{صفر}$

$$\text{، } \because \begin{vmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} \neq ٠$$

∴ ر (أ) = ٢ (أقل من عدد المجاهيل)

، ∵ المعادلات متجانسة

∴ يوجد عدد لا نهائى من الحلول بجانب الحل الصفرى.

---

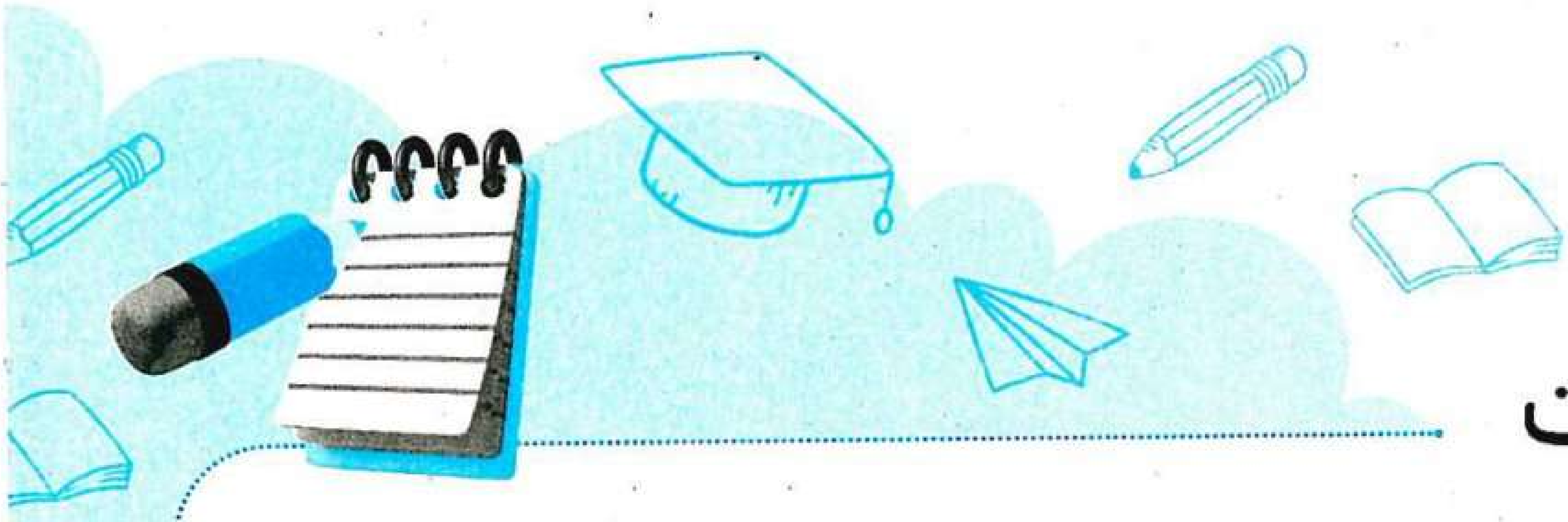
**٢٠**

∵ النقطة ب (١ ، ٢ ، ٥) تقع على المستقيم

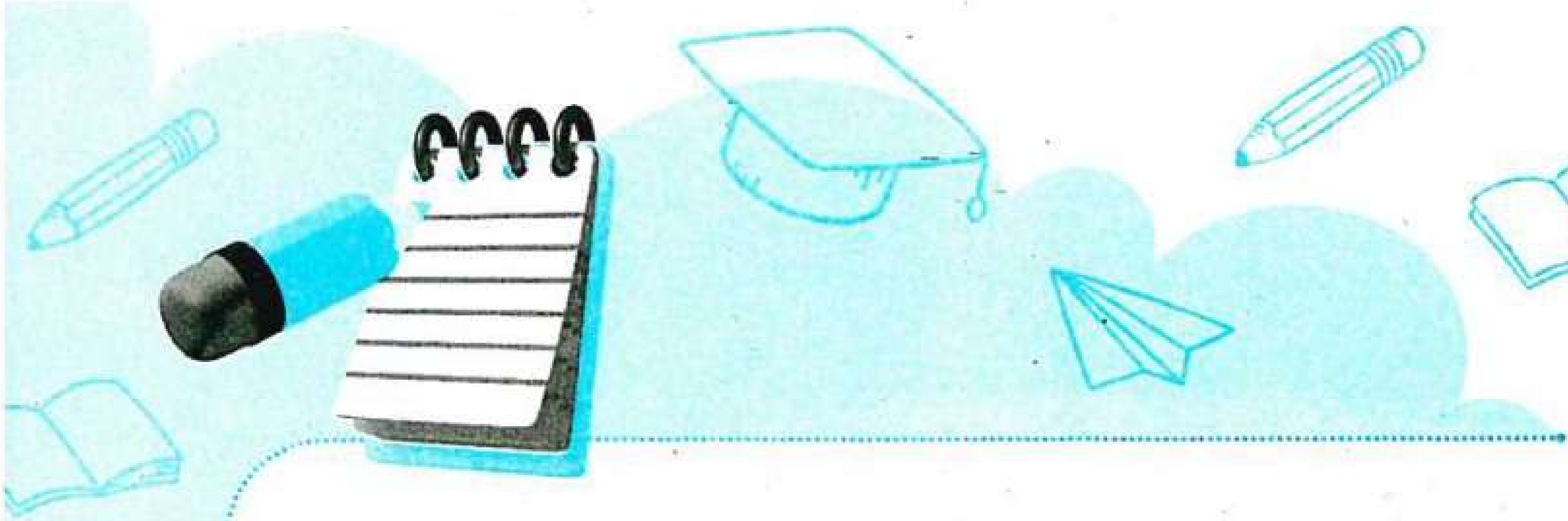
$\therefore \overrightarrow{ب أ} = (٠ \text{ ، } -٤ \text{ ، } -٣) \text{ ، } \overrightarrow{ه} = (٠ \text{ ، } ٠ \text{ ، } ٣)$

$$\therefore \overrightarrow{ب أ} \times \overrightarrow{ه} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٠ & -٤ & -٣ \\ ٠ & ٠ & ٣ \end{vmatrix} = -١٢ \overrightarrow{س}$$

$$\therefore \text{طول العمود} = \frac{\|\overrightarrow{ب أ} \times \overrightarrow{ه}\|}{\|\overrightarrow{ه}\|} = \frac{\sqrt{١٤٤ + ٠ + ٠}}{\sqrt{٠ + ٠ + ٩}} = ٤ \text{ وحدة طول.}$$



# مذكــرات



# مذكــرات

احرص على اقتناء كتب

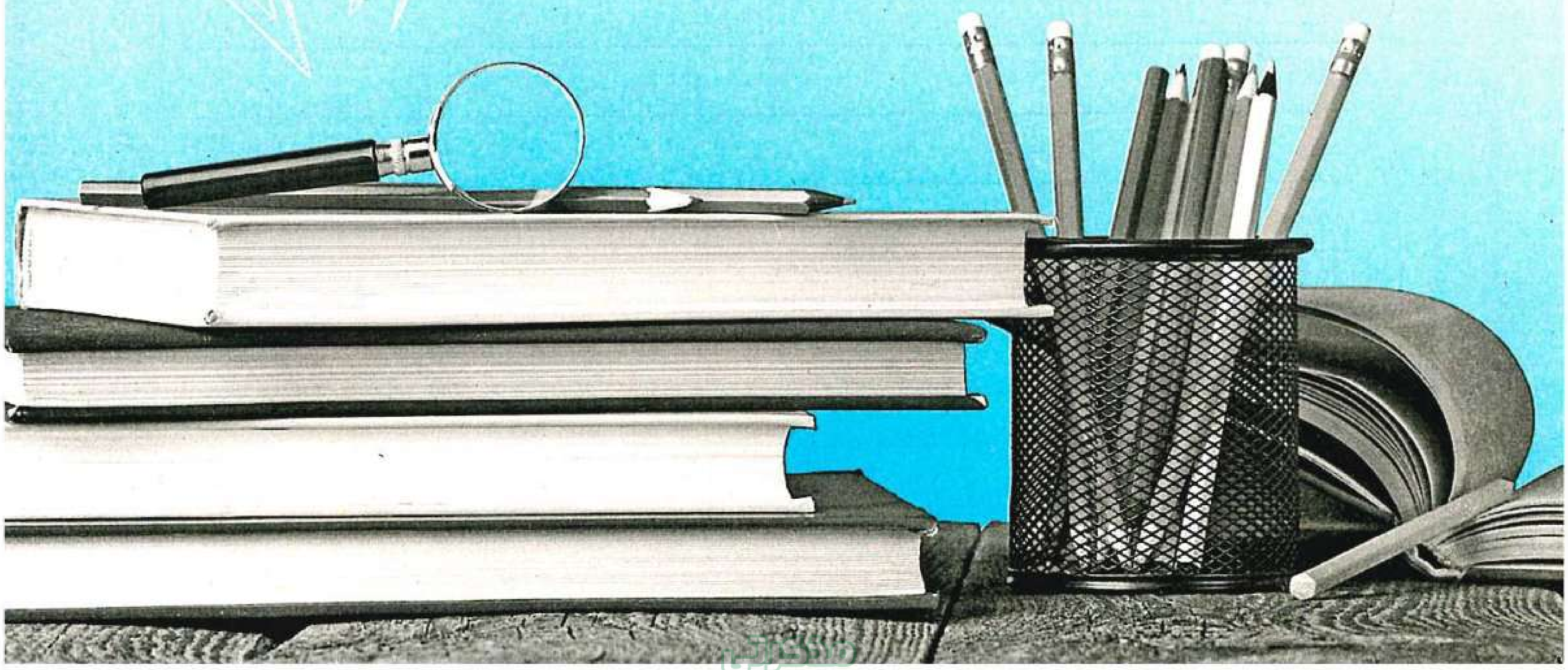
# المعاصر

## بنك الاسئلة ونماذج الامتحانات

---

- التفاضل والتكامل
- الاستاتيكا
- الجبر والهندسة الفراغية
- الديناميكا

للصف 3 الثانوي



# الجبر و الهندسة الفراغية

## الرياضيات البحتة

**المراجعة المستمرة**

تُصرف مجانًا مع الكتاب

GPS

مكتبة الطلبة
للطبع والنشر والتوزيع
٣ شارع كامل صدقى - الفجالة
تليفون: ٢٥٩٠٢٩٩٧ - ٢٥٩٣٧٧٩١ - ٢٥٩٣٤٠١٣/ ٠٢
e-mail: info@elmoasserbooks.com
www.elmoasserbooks.com

الخط الساخن
١٥٠١٤

/ElMoasser.eg

6 223007 310642