# ملخص قوانين الجبر (٣ث)

* **مبدأ العد:-**

اذا كان عدد طرق اجراء عملية ما يساوى (ن) طريقة وعدد طرق اجراء عملية أخرى يساوى (م) طريقة فإن

(١) عدد طرق إجراء العملية الاولى **و** الثانية = م × ن طريقة

(٢) عدد طرق إجراء العملية الاولى **أو** الثانية = م + ن طريقة

ويمكن تعميم هذه القواعد لأكثر من عمليتين

* عند اختيار أشياء عددها (ر) من بين أشياء عددها (ن) فان عدد الطرق الممكنة اذا كان :-

(١) **الاختيار بدون احلال**
- مع مراعاة الترتيب = $^{ن}ل_{ر}$
- مع عدم مراعاة الترتيب = $^{ن}ق_{ر}$

(٢) **الاختيار مع الاحلال**
- مع مراعاة الترتيب = $(ن)^{ر}$
- مع عدم مراعاة الترتيب = $^{ن+ر-١}ق_{ر}$

* **ملاحظة :-**

يستخدم القانون $^{ن+ر-١}ق_{ر}$ لايجاد عدد طرق توزيع (ر) من الاشياء **المتماثلة** على (ن) من الاماكن **بدون شرط أو قيد** مثلاً

عدد طرق وضع ٤ كرات متماثلة فى ٥ سلال = $^{٥+٤-١}ق_{٤}$ = ٧٠ طريقة

عدد طرق توزيع ثلاث كتب على اربعة أرفف = $^{٤+٣-١}ق_{٣}$ = ٢٠ طريقة

## * الترتيب في صف واحد :-

(١) عدد طرق ترتيب (ن) من الأشياء في (ن) من الأماكن في صف واحد = ⌊ن طريقة

مثلا عدد طرق جلوس ٥ أشخاص على ٥ مقاعد في صف واحد = ⌊٥

(٢) عدد طرق ترتيب (ر) من الأشياء في (ن) من الأماكن في صف واحد = ^ن^ل~ر~ طريقة حيث ن ≥ ر (دون شرط)

(٣) عدد طرق ترتيب (ر) من الأشياء في (ن) من الأماكن في صف واحد **بحيث تكون متجاورة** = (ن − ر + ١) ⌊ر طريقة

مثلاً عدد طرق وقوف ٤ سيارات في ساحة انتظار بها ١٠ أماكن بحيث تكون متجاورة = (١٠ − ٤ + ١) ⌊٤ = ١٦٨ طريقة

## * الترتيب في دائرة واحدة :-

(١) عدد طرق ترتيب (ن) من الأشياء في (ن) من الأماكن في دائرة واحدة = ⌊ن − ١ طريقة

مثلاً عدد طرق جلوس ٥ أشخاص على ٥ مقاعد في شكل دائرة = ⌊٥ − ١ = ⌊٤ = ٢٤ طريقة

(٢) عدد طرق ترتيب (ر) من الأشياء في (ن) من الأماكن في دائرة واحدة = ^ن−١^ل~ر−١~ طريقة (دون شرط)

(٣) عدد طرق ترتيب (ر) من الأشياء في (ن) من الأماكن في دائرة واحدة **بحيث تكون متجاورة** = ن ⌊ر (مشروط)

مثلا عدد طرق وقوف ٤ سيارات في ١٠ أماكن على هيئة دائرة بحيث تكون متجاورة = ١٠ ⌊٤ = ٢٤٠ طريقة

* **تطبيق هندسي على مبدأ العد :-**

إذا كان لدينا مضلع عدد أضلاعه (ن) ضلع (عدد رؤوسه ن)
أو لدينا (ن) من النقط التي ليست على استقامة واحدة فإن

(١) عدد جميع القطع المستقيمة التي تصل بين رأسين من رؤوس المضلع = $^{ن}ق_{٢}$

(٢) عدد أقطار هذا المضلع = $^{ن}ق_{٢} - ن$

(٣) عدد المثلثات التي رؤوسها ثلاث رؤوس من رؤوس هذا المضلع = $^{ن}ق_{٣}$ وقس على ذلك

## التباديل (ن ل ر)

* التبديل هو ترتيب لعدة أشياء مختلفة بأخذها كلها أو بعض منها في كل مرة وهو عدد صحيح موجب

* $^{ن}ل_{ر}$ : هو عدد الترتيبات التي يمكن تكوينها باختيار (ر) من الأشياء المختلفة من بين (ن) من الأشياء

**قوانين التباديل :-**

(١) $^{ن}ل_{ر} = ن(ن-١)(ن-٢) ------ \times (ن-ر+١)$
حيث $ر \in ص^{+}$ ، $ن \in ص^{+}$ ، $ن \geq ر$

* نتيجة :-

① $^{ن}ل_{ن} = \lfloor ن = ن(ن-١)(ن-٢) ------ \times ٣ \times ٢ \times ١$

② $\lfloor ن = ن \lfloor ن-١ = ن(ن-١) \lfloor ن-٢$ (التبسيط)



Scanned by CamScanner

(٢) $^{ن}ل_{ر} = \frac{ن!}{(ن-ر)!}$ حيث ر ∈ ط ، ن ∈ ص$^+$ ، ن ≥ ر

(٣) $^{ن}ل_{٠} = ١$ ، $^{ن}ل_{١} = ن$

(٤) العامل الاوسط فى مفكوك $^{ن}ل_{ر} = \frac{٢ن - ر + ١}{٢}$

*** ملاحظات هامة :-**

(١) $٠! = ١$ ، $١! = ١$

(٢) $ن! = {}^{ن}ل_{ن} = {}^{ن}ل_{ن-١}$ مثلاً $٥! = {}^{٥}ل_{٥} = {}^{٥}ل_{٤}$

(٣) اذا كان $^{ن}ل_{ن} = {}^{ن}ل_{ر}$ فإن إما ن = ر أو ر = ن − ١

أى أنه اذا كان $^{ن}ل_{ر} = ن!$ فإن ر = ن أو ر = ن − ١

(٤) اذا كان $^{ن}ل_{ر} = ١$ فإن ر = ٠ عندما ن > ١
ر = ١ عندما ن = ١

(٥) اذا كان $^{ن}ل_{ر} > ١$ فإن ر > ٠ ، ن ≥ ر
ولابد أن يتحقق الشرطان معاً

**(٦) فى اى تبديل يكون ٠ ≤ الدليل ≤ العلم**

(٧) اذا كان $^{ن}ل_{ر} = {}^{ن}ل_{ر}$ فإن ٠ ≤ ر ≤ ن ، ن ≠ ٠

مثال :-

١) اوجد قيمة ن اذا كان $^{٧}ل_{ن-٣}$ له قيمة ② $^{٨}ل_{ن-٣} = {}^{٨}ل_{ن-٣}$

(1) $\because\ {}^{7}\text{ل}_{\text{ن}-3}$ له قيمة $\Leftarrow\ \therefore\ 0 \le \text{ن}-3 \le 7$

$3 \le \text{ن} \le 10\ ،\ \text{ن} \in \text{ص}^{+}$

$\therefore\ \text{ن} \in \{3، 4، 5، ......، 9، 10\}$

(2) $\because\ {}^{8}\text{ل}_{\text{ن}-3} = {}^{8}\text{ل}_{\text{ن}-3} \Leftarrow\ \therefore\ 0 \le \text{ن}-3 \le 8$

$\therefore\ 3 \le \text{ن} \le 11$

$\therefore\ \text{ن} \in \{3، 4، 5، ....، 10، 11\}$

## التوافيق (٢-٢)

* التوافيق هو كل مجموعة يمكن تكوينها من مجموعة من الاشياء بأخذها كلها أو بأخذ بعض منها بغض النظر عن ترتيبها

* ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}$ : هو عدد المجموعات الممكنة والتي يمكن تكوينها بأخذ (ر) عدد الأشياء من بين (ن) عدد الأشياء

## * قوانين التوافيق :-

(1) ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = \dfrac{{}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}}{\text{ر}!}$ لكل $\text{ر} \in \text{ص}^{+}\ ،\ \text{ن} \in \text{ص}^{+}\ ،\ \text{ن} \ge \text{ر}$

(2) ${}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = \text{ر}!\ {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}$ يستخدم اذا وجدت ${}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}$ ، ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}$ في طرفي المعادلة

مثلا اذا كان ${}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = 720$ ، ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = 120$ اوجد قيمة ن ، ر

الحل

$\because\ {}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = \text{ر}!\ {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\quad \therefore\ 720 = 120\ \text{ر}!\quad \therefore\ \text{ر}! = 6 \Rightarrow \text{ر} = 3$

$\therefore\ {}^{\text{ن}}\text{ل}_{3} = 720 = 10 \times 9 \times 8 \Rightarrow\ \therefore\ \text{ن} = 10$

(٣) ${}^{ن}ق_{ر} = \frac{ن!}{ر!\,(ن-ر)!}$ حيث ر ∈ ط ، ن ∈ ط ، ن ≥ ر

(٤) ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$ (قانون التبسيط) ويستخدم

في حالة ر > $\frac{ن}{٢}$ أو في حالة العلم والدليل بهما نفس الرمز

مثلاً: إذا كانت ${}^{ن}ق_{ن-٢} = ٥٥$ أوجد قيمة ن

الحل

∵ ${}^{ن}ق_{ن-٢} = {}^{ن}ق_{ن-ن+٢}$ ∴ ${}^{ن}ق_{٢} = ٥٥$ ∴ $\frac{{}^{ن}ل_{٢}}{٢!} = ٥٥$

∴ ${}^{ن}ل_{٢} = ١١٠ = ١١ \times ١٠$ ⟵ ∴ ن = ٢

(٥) إذا كان ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{هـ}$ فإن ر = هـ ، ن = ر + هـ

(٦) ${}^{ن}ق_{٠} = ١$ ، ${}^{ن}ق_{ن} = ١$ ، ${}^{ن}ق_{١} = ن$

أي أنه إذا كانت ${}^{ن}ق_{ر} = ١$ فإن ر = ٠ أو ر = ن

(٧) $\frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{ن-ر+١}{ر} = \frac{\text{العلم}+١-\text{الدليل الأكبر}}{\text{الدليل الأكبر}}$

أي أن النسبة بين توفيقتين متتاليتين لنفس العلم = $\frac{\text{العلم}+١-\text{الدليل الأكبر}}{\text{الدليل الأكبر}}$

مثلاً إذا كان ${}^{٨}ق_{ر} : {}^{٨}ق_{ر-١} = ٣ : ٥$ أوجد قيمة ر

∵ $\frac{{}^{٨}ق_{ر}}{{}^{٨}ق_{ر-١}} = \frac{٣}{٥}$ ∴ $\frac{٨-ر}{ر} = \frac{٣}{٥}$ ∴ ٤٠ − ٥ر = ٣ر

∴ ر = ٥

(٨) قانون الجمع :- $^{ن}ق_{ر} + {^{ن}ق_{ر-1}} = {^{ن+1}ق_{ر}}$

* تذكر هذا جيداً :-

(١) اذا كان $^{ن}ل_{ر}$ أو $^{ن}ق_{ر}$ لهم قيمة فان

$0 \le ر \le ن$ اى أن $0 \le$ الدليل $\le$ العلم

(٢) اذا كان $^{ن}ل_{ر} = {^{ن}ل_{هـ}}$ فان هناك عدة حلول :-

(i) $0 \le ر \le ن$ بوجه عام ، $ر = هـ$

(ii) $ر = ن$ ، $هـ = ن - 1$

(iii) $ر = ن - 1$ ، $هـ = ن$

مثال :- اذا كان $^{30}ل_{س} = {^{30}ل_{س+2ص}}$ أوجد قيم س ، ص

الحل

$\because {^{30}ل_{س}} = {^{30}ل_{س+2ص}}$ $\therefore$ (i) $0 \le س \le 30$ ، $س = س + 2ص$

ومنها عندما $0 \le س \le 30$ فان $ص = 0$ (1)

(ii) $س = 30$ ، $س + 2ص = 29$ $\therefore ص = -\frac{1}{2}$

ومنها عندما $س = 30$ فان $ص = -\frac{1}{2}$ (2)

(iii) $س = 29$ ، $س + 2ص = 30$ ومنها $ص = \frac{1}{2}$

$\therefore$ عند $س = 29$ فان $ص = \frac{1}{2}$ (3)

من (1) ، (2) ، (3) ينتج أنه

عندما $0 \le س \le 30$ فان $ص = 0$

$س = 30$ فان $ص \in \{0 ، -\frac{1}{2}\}$

$س = 29$ فان $ص \in \{0 ، \frac{1}{2}\}$

# نظرية ذات الحدين

## * مفكوك ذات الحدين :-

إذا كان س ، أ ∈ ح ، ن ∈ ص⁺ فإن :-

$(\text{س}+\text{أ})^{\text{ن}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{0}\,\text{أ}^{0}\,\text{س}^{\text{ن}} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{1}\,\text{أ}^{1}\,\text{س}^{\text{ن}-1} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{2}\,\text{أ}^{2}\,\text{س}^{\text{ن}-2} + \ldots$

$+ \ldots + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}}\,\text{أ}^{\text{ن}}\,\text{س}^{0}$ (حسب قوى س التنازلية)

$\therefore (\text{س}+\text{أ})^{\text{ن}} = \text{س}^{\text{ن}} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{1}\,\text{أ}\,\text{س}^{\text{ن}-1} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{2}\,\text{أ}^{2}\,\text{س}^{\text{ن}-2} + \ldots + \text{أ}^{\text{ن}}$

$(\text{س}-\text{أ})^{\text{ن}} = \text{س}^{\text{ن}} - {}^{\text{ن}}\text{ق}_{1}\,\text{أ}\,\text{س}^{\text{ن}-1} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{2}\,\text{أ}^{2}\,\text{س}^{\text{ن}-2} - \ldots + (-\text{أ})^{\text{ن}}$

## * ملاحظات :-

(١) عدد حدود المفكوك يزيد عن الأس بمقدار واحد
(٢) مجموع قوى (س) وقوى (أ) في أي حد = أس المفكوك
(٣) لإيجاد مجموع معاملات ذات الحدين نضع المتغير = ١ داخل القوس

مثلاً مجموع معاملات حدود مفكوك $(2\text{س}-3)^{10} = (2-3)^{10} = 1$

" " " " $(5\text{س}-3\text{ص})^{5} = (5-3)^{5} = 32$

## حالات خاصة :-

(١) $(1+\text{س})^{\text{ن}} = 1 + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{1}\,\text{س} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{2}\,\text{س}^{2} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{3}\,\text{س}^{3} + \ldots + \text{س}^{\text{ن}}$

(٢) $(1-\text{س})^{\text{ن}} = 1 - {}^{\text{ن}}\text{ق}_{1}\,\text{س} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{2}\,\text{س}^{2} - {}^{\text{ن}}\text{ق}_{3}\,\text{س}^{3} + \ldots + (-\text{س})^{\text{ن}}$

(٣) ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{0} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{1} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{2} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{3} + \ldots + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}} = 2^{\text{ن}}$

## الحد العام فى مفكوك $(س + أ)^{ن}$ :-

$$ح_{ر+1} = {}^{ن}ق_{ر} \, (أ)^{ر} \, (س)^{ن-ر}$$

$$= {}^{ن}ق_{ر} \times (\text{الحد الثانى باشارته})^{ر} \times (\text{الحد الاول باشارته})^{ن-ر}$$

## قواعد هامة :-

(١) $ح_{ر}$ من النهاية فى مفكوك $(س + أ)^{ن}$ يساوى $ح_{ر}$ من البداية فى مفكوك $(أ + س)^{ن}$

(٢) $(س + أ)^{ن} + (س - أ)^{ن} = ٢ [ح_{١} + ح_{٣} + ح_{٥} + \text{-----}]$

يساوى ضعف مجموع الحدود الفردية الرتبة فى مفكوك $(س+أ)^{ن}$

(٣) $(س + أ)^{ن} - (س - أ)^{ن} = ٢ [ح_{٢} + ح_{٤} + ح_{٦} + \text{------}]$

يساوى ضعف مجموع الحدود الزوجية الرتبة فى مفكوك $(س+أ)^{ن}$

## * الحد الاوسط والحدان الاوسطان فى مفكوك $(س + أ)^{ن}$ :-

(١) اذا كانت ن عدداً "زوجياً" فان عدد حدود المفكوك يكون فردياً وعلى ذلك يوجد حد أوسط رتبته $\frac{ن}{٢} + ١$

(٢) اذا كانت ن عدداً "فردياً" فان عدد حدود المفكوك يكون زوجياً وبالتالى يوجد حدان أوسطان فى هذا المفكوك رتبتهما $\frac{ن+١}{٢}$ والذى يليه $\frac{ن+٣}{٢}$

## * الحد المشتمل على $س^{ك}$ فى مفكوك ذات الحدين $(س + أ)^{ن}$

لإيجاد الحد المشتمل على $س^{ك}$ فى مفكوك ذات الحدين $(س+أ)^{ن}$

(أ) نوجد الحد العام لهذا المفكوك وهو $ح_{ر+1} = {}^{ن}ق_{ر}\, أ^{ر}\, س^{ن-ر}$

(ب) نساوى أس الـ س بـ ك لنحصل على (ر) التى تجعل الحد مشتمل على $س^{ك}$

(جـ) للحصول على الحد الخالى من س نضع أس الـ س = صفر ثم نوجد قيمة ر التى تجعل الحد خالى من س

(د) إذا كانت ر ∉ ط فإن المفكوك لا يشتمل على $س^{ك}$

## * النسبة بين حدين متتاليين فى مفكوك $(س + أ)^{ن}$ :-

$$\frac{ح_{ر+1}}{ح_{ر}} = \frac{ن-ر+1}{ر} \times \frac{أ}{س} = \frac{ن+1-\text{رتبة الحد الأصغر}}{\text{رتبة الحد الأصغر}} \times \frac{\text{الحد الثانى}}{\text{الحد الأول}}$$

$$\frac{\text{معامل } ح_{ر+1}}{\text{معامل } ح_{ر}} = \frac{ن-ر+1}{ر} \times \frac{\text{معامل الحد الثانى}}{\text{معامل الحد الأول}}$$

$$= \frac{ن+1-\text{رتبة الحد الأصغر}}{\text{رتبة الحد الأصغر}} \times \frac{\text{معامل الحد الثانى}}{\text{معامل الحد الأول}}$$

مثلاً فى مفكوك $(2س + 3ص)^{10}$ أوجد النسبة معاملى الحد $ح_7$ ، $ح_6$

$$\frac{\text{معامل } ح_7}{\text{معامل } ح_6} = \frac{11-6}{6} \times \frac{3}{2} = \frac{5}{6} \times \frac{3}{2} = \frac{5}{4}$$

مثلاً $$\frac{ح_7}{ح_8} = \frac{7}{11-7} \times \frac{2س}{3ص} = \frac{7س}{6ص}$$

## * أكبر معامل فى مفكوك ذات الحدين :-

(١) فى مفكوك $(١ \pm س)^{ن}$ :-

(أ) إذا كانت ن عدد زوجى فإن أكبر معامل فى المفكوك يساوى **القيمة المطلقة لمعامل الحد الاوسط**

(ب) إذا كانت ن عدد فردى معاملى الحدين الاوسطين يكونان متساويان وتكون القيمة المطلقة لأى منهما هى أكبر معامل (لان معاملى الحدين الاوسطين يكونان متساويان عدديا و مختلفين فى الاشارة فى $(١ - س)^{ن}$ )

(٢) فى مفكوك $(أس \pm ب)^{ن}$ :-

أكبر قيمة للأكبر معامل فى المفكوك هو معامل $ح_{ر+١}$

وتعين ر من العلاقة $\frac{ن - ر + ١}{ر} \times |\frac{ب}{أ}| \geqslant ١$

مثلاً أوجد أكبر معامل فى مفكوك (١) $(٢س + ٣ص)^{٨}$

(٢) $(١ - \frac{١}{س})^{٩}$

الحل

(١) بوضع $\frac{٩ - ر}{ر} \times |\frac{٣}{٢}| \geqslant ١$ ∴ $٢٧ - ٣ر \geqslant ٢ر$ ⟸ ∴ $ر \geqslant ٥،٤$

∴ ر = ٥

∴ أكبر معامل هو معامل $ح_{٦}$ = $ق_{٥}^{٨}$ $(٣)^{٥}(٢)^{٣}$ = ١٠٨٨٦٤

(٢) بوضع $\frac{١٠ - ر}{ر} \times |\frac{-١}{١}| \geqslant ١$ ∴ $\frac{١٠ - ر}{ر} \geqslant ١$

∴ ر $\geqslant$ ٥ ⟸ ر = ٥ ، ر = ٤

يوجد حدان متتاليان لهما نفس القيمة العددية للمعامل

أكبر معامل = معامل $ح_{٥}$ = معامل $ح_{٦}$ = $ق_{٤}^{٩}$ $(-١)^{٤}(١)^{٥}$ = ١٢٦

# الأعداد المركبة

الصورة الجبرية للعدد المركب هي ع = س + ت ص
حيث س ، ص ∈ ح ، $ت^2$ = -١

* ملاحظات هامة :-

(١) اذا كان ع = س + ت ص فان مرافق هذا العدد هو $\bar{ع}$ = س - ت ص

(٢) ع + $\bar{ع}$ = ٢ س (٣) ع × $\bar{ع}$ = $س^2 + ص^2$

(٤) $\overline{ع_1 + ع_2} = \bar{ع}_1 + \bar{ع}_2$

(٥) اذا كان ع = صفر فان س = ٠ ، ص = ٠

(٦) يكون العدد المركب في ابسط صورة اذا كان مقامه عدد صحيح موجب

(٧) المعادلة التكعيبية لها ثلاث جذور أحدهم حقيقي والآخران مركبان ومترافقان

مثلاً اذا كان ٣ ، ٢ - ت جذرين من جذور معادلة تكعيبية فان الجذر الثالث هو ٢ + ت

(٨) بالنسبة لمستوى آرجاند :-
اذا كان ع = س + ت ص فان

(أ) $\bar{ع}$ = س - ت ص وهو مرافق العدد ع وهو صورة العدد المركب ع بالانعكاس في محور س وتمثله النقطة (س ، -ص)

(ب) -ع هو المعكوس الجمعي للعدد المركب ع وهو انعكاس للعدد المركب في نقطة الاصل وتمثله النقطة (-س ، -ص)

(ج) |ع| = |$\bar{ع}$| = |-ع| = |-$\bar{ع}$|

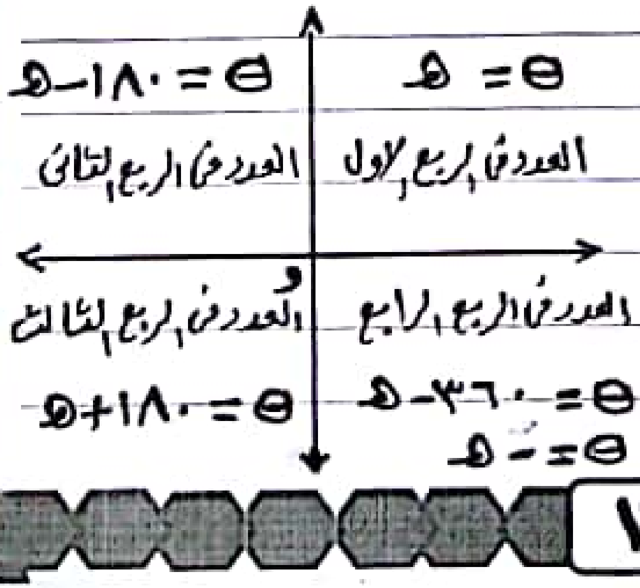
(9) سعة العدد المركب :- هى الزاوية القطبية عند نقطة الاصل والتى يصنعها المتجه الممثل للعدد المركب مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .
وهى تأخذ عدداً غير منتهى من القيم أى أن
سعة العدد المركب $= \theta + 2 ن \pi$ ، ن $\in$ ص
وهى لا تتغير اذا ضرب العدد المركب فى عدد موجب حقيقى
(10) السعة الاساسية للعدد المركب $\in ]-\pi ، \pi]$

## * الصورة المثلثية للعدد المركب :-

اذا كان ع = س + ت ص فان :
ل $= \sqrt{س^2 + ص^2}$ مقياس العدد المركب
$\theta =$ ظا$^{-1}$ (ص/س) سعة العدد المركب
وتكون اساسية عندما $\theta \in ]-\pi ، \pi]$
وتكون الصورة المثلثية للعدد المركب هى
ع = ل (جتا $\theta$ + ت جا $\theta$)

* اذا كان العدد المركب ع مقياسه ل وسعته هـ ويراد تحويل العدد المركب ع الى الصورة المثلثية فان

(1) اذا كان ع على الصورة
ع = (جتا هـ ، جا هـ)
نستخدم الشكل المقابل للحصول على سعة العدد المركب ومنها الحصول على سعته الاساسية



مثلا $ع = -٣ (جتا ٦٠° + ت جا ٦٠°)$

$\therefore ع = ٣ (جتا ٦٠ - ت جا ٦٠)$ في الربع الرابع

$\therefore \theta = ٣٦٠ - ٦٠ = ٣٠٠$

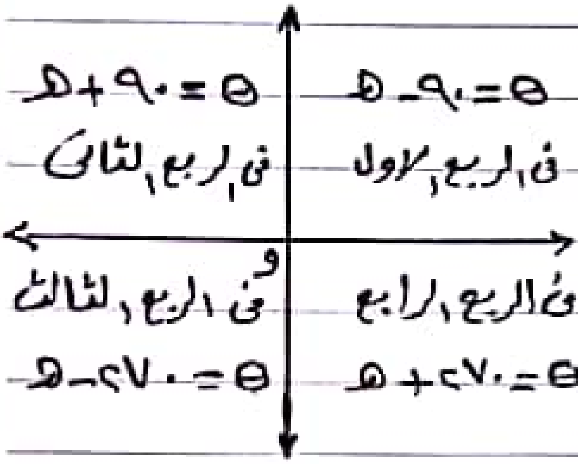
$\therefore$ السعة الأساسية $= ٣٠٠ - ٣٦٠ = -٦٠°$

$\therefore ع = ٣ (جتا(-٦٠°) + ت جا(-٦٠°))$ وقس على ذلك

(٢) إذا كان العدد على الصورة

$ع = (جا هـ \pm ت جتا هـ)$

نستخدم الشكل المقابل




مثلا $ع = ٦ (- جا \frac{٤\pi}{٣} + ت جتا \frac{٤\pi}{٣})$

$\therefore ع = ٦ (- جا ٢٤٠° + ت جتا ٢٤٠°)$ في الربع الثاني

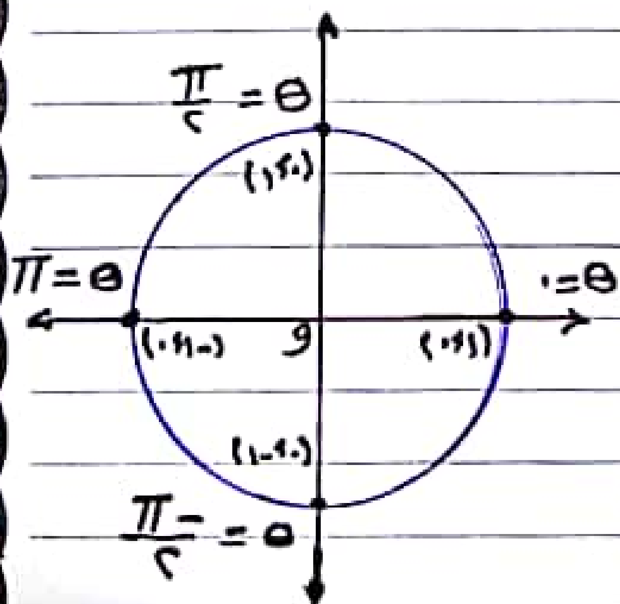
$\therefore \theta = ٩٠ + ٢٤٠ = ٣٣٠$

$\theta = ٣٣٠ - ٣٦٠ = -٣٠°$

$\therefore ع = ٦ (جتا -٣٠° + ت جا -٣٠°) = ٦ (جتا(\frac{-\pi}{٦}) + ت جا(\frac{-\pi}{٦}))$

وقس على ذلك

* استخدام دائرة الوحدة




$١ = (جتا ٠° + ت جا ٠)$

$ت = (جتا \frac{\pi}{٢} + ت جا \frac{\pi}{٢})$

$-١ = (جتا \pi + ت جا \pi)$

$-ت = (جتا(\frac{-\pi}{٢}) + ت جا(\frac{-\pi}{٢}))$

## * العمليات على الأعداد المركبة في الصورة المثلثية :-

اذا كان $ع_1 = ل_1 (جتا \theta_1 + ت جا \theta_1)$

$ع_2 = ل_2 (جتا \theta_2 + ت جا \theta_2)$ فان :

(1) $ع_1 ع_2 = ل_1 ل_2 (جتا (\theta_1 + \theta_2) + ت جا (\theta_1 + \theta_2))$

(2) $\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{ل_1}{ل_2} (جتا (\theta_1 - \theta_2) + ت جا (\theta_1 - \theta_2))$

* ملحوظة :- لاجراء اى عملية على الاعداد المركبة لابد أن تكون هذه الاعداد في الصورة المثلثية الاساسية

(3) نتيجة :-

اذا كان $ع = ل (جتا \theta + ت جا \theta)$ فان

$ع^ن = (ل)^ن (جتا (ن\theta) + ت جا (ن\theta))$ ، $ن \in ص^+$

## * معلومات اثرائية :-

مفكوك تايلور لبعض الدوال

$$جا س = \sum_{ن=0}^{\infty} \frac{(-1)^ن}{\lfloor 2ن+1} س^{2ن+1} = \frac{س}{\lfloor 1} - \frac{س^3}{\lfloor 3} + \frac{س^5}{\lfloor 5} - ----$$

$$جتا س = \sum_{ن=0}^{\infty} \frac{(-1)^ن}{\lfloor 2ن} س^{2ن} = 1 - \frac{س^2}{\lfloor 2} + \frac{س^4}{\lfloor 4} - ----$$

$$هـ^س = 1 + \frac{س}{\lfloor 1} + \frac{س^2}{\lfloor 2} + \frac{س^3}{\lfloor 3} + ----$$

## * الصورة الاسية للعدد المركب :-

اذا كان $ع = ل$ (جتا $\theta$ + ت جا $\theta$) فان الصورة الاسية للعدد المركب هي $ع = ل\, هـ^{\theta ت}$ حيث $\theta$ مقاسة بالتقدير الدائري

* اذا كان $ع_١ = ل_١ هـ^{\theta_١ ت}$ ، $ع_٢ = ل_٢ هـ^{\theta_٢ ت}$ فان

(١) $ع_١ ع_٢ = ل_١ ل_٢ هـ^{(\theta_١ + \theta_٢) ت}$

(٢) $\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{ل_١}{ل_٢} هـ^{(\theta_١ - \theta_٢) ت}$

(٣) $ع^{ن} = (ل)^{ن} هـ^{ن \theta ت}$ حيث $ن \in ص^+$

## * نظرية ديموافر :-

لاى عدد مركب $ع = ل$ (جتا $\theta$ + ت جا $\theta$) فانه

(١) $ع^{ن} = (ل)^{ن}$ (جتا $ن\theta$ + ت جا $ن\theta$) $ن \in ص^+$

(٢) اذا كانت $ك \in ص^+$ فان :

$$ع^{\frac{1}{ك}} = \sqrt[ك]{ل}\ (جتا\,\theta + ت\,جا\,\theta)^{\frac{1}{ك}}$$

$$\therefore ع = \sqrt[ك]{ل}\left(جتا\left(\frac{\theta + ٢ر\pi}{ك}\right) + ت\,جا\left(\frac{\theta + ٢ر\pi}{ك}\right)\right)$$

حيث ر = ٠ ، ١ ، -١ ، ٢ ، -٢ ، ..... ، (ك - ١)

* ملحوظة هامة :

اذا كان عدد جذور عدد مركب ما يساوي $ن$ جذراً فان الفرق بين اى سعتى جذرين متتاليين $= \frac{360}{ن}$ بمعنى

اذا كانت سعة الجذر الاول $= \theta_1$

فان سعة الجذر الثانى $\theta_2 = \theta_1 + \frac{360}{ن}$

" " الثالث $\theta_3 = \theta_2 + \frac{360}{ن}$ وهكذا

مثلاً :

اوجد مجموعة حل المعادلة $ع^4 = 8(1 - \sqrt{3}\,ت)$ على الصورة المثلثية

الحل

$\because ع^4 = 16\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,ت\right) \quad \therefore ع^4 = 16(جتا\, 300 + ت\, جا\, 300)$

$\therefore ع^4 = 16\,(جتا(-60) + ت\, جا(-60))$

$\therefore ع = 2\left(جتا \frac{-60 + 2\pi ر}{4} + ت\, جا \frac{-60 + 2\pi ر}{4}\right)$

حيث $ر = 0 ، 1 ، -1 ، 2$

عند $ر = 0$ فان $ع = 2\,(جتا(-15) + ت\, جا(-15))$

$\therefore$ عند $ر = 0$ فان $ع = 2\left(جتا\left(\frac{-\pi}{12}\right) + ت\, جا\left(\frac{-\pi}{12}\right)\right)$

$\because \frac{360}{4} = 90 = \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ الجذر الثانى $= 2\left(جتا\left(\frac{5\pi}{12}\right) + ت\, جا\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)$

الجذر الثالث $= 2\left(جتا\left(\frac{11\pi}{12}\right) + ت\, جا\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right)$

الجذر الرابع $= 2\left(جتا \frac{17\pi}{12} + ت\, جا\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right)$

$= 2\left(جتا\left(\frac{-7\pi}{12}\right) + ت\, جا\left(\frac{-7\pi}{12}\right)\right)$

## * الجذور التكعيبية للواحد الصحيح :-

* الجذور التكعيبية للواحد الصحيح هي :

$1$ ، $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ت ، $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ ت

* خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح :

(1) الجذران المركبان كلاً منهما مرافق للآخر

(2) مربع أحد الجذرين المركبين يساوي الجذر المركب الآخر

لذلك نرمز للجذرين المركبين بالرمزين $\omega$ ، $\omega^2$

(3) $\omega^3 = 1$ ، $\omega^{3n} = 1$ ، $\omega^{3n+1} = \omega$ ، $\omega^{3n+2} = \omega^2$

(4) $1 + \omega + \omega^2 =$ صفر

ومجموع أي جذرين = سالب الجذر الثالث

(5) $\omega - \omega^2 = \omega^2 - \omega = \pm\sqrt{3}$ ت

(6) إذا كان ع $= \omega^{ن}$ فإن $|ع| = 1$

# المصفوفات

* المعكوس الضربي للمصفوفة (٢×٢) :-
يكون للمصفوفة أ معكوساً ضربياً $أ^{-1}$ إذا وفقط إذا كان محدد المصفوفة أ لا يساوي الصفر

إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} أ & ب \\ ﺟ & ء \end{pmatrix}$ فإن $أ^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} ء & -ب \\ -ﺟ & أ \end{pmatrix}$

أما إذا كان $\Delta$ = صفر فإن المصفوفة أ تسمى بالمصفوفة المنفردة (الشاذة) ولا يكون لها معكوساً ضربياً

* المصفوفة الملحقة :-

أولاً :- إذا كانت المصفوفة أ على النظم (٢×٢) حيث

$أ = \begin{pmatrix} أ & ب \\ ﺟ & ء \end{pmatrix}$ فإن المصفوفة الملحقة $أ^{مل}$ تكون على الصورة $أ^{مل} = \begin{pmatrix} ء & -ب \\ -ﺟ & أ \end{pmatrix}$

* ملحوظة هامة جداً $أ \; أ^{مل} = أ^{مل} \; أ = |أ| \; I$

ثانياً :- إذا كانت المصفوفة أ على النظم (٣×٣) حيث

$أ = \begin{pmatrix} أ_{11} & أ_{12} & أ_{13} \\ أ_{21} & أ_{22} & أ_{23} \\ أ_{31} & أ_{32} & أ_{33} \end{pmatrix}$ فإن المصفوفة المرافقة للمصفوفة أ يرمز لها بالرمز م

حيث م مصفوفة العوامل المرافقة وهي

$$\text{م} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} \text{أ}_{22} & \text{أ}_{23} \\ \text{أ}_{32} & \text{أ}_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \text{أ}_{21} & \text{أ}_{23} \\ \text{أ}_{31} & \text{أ}_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} \text{أ}_{21} & \text{أ}_{22} \\ \text{أ}_{31} & \text{أ}_{32} \end{vmatrix} \\ \cdot\begin{vmatrix} \text{أ}_{12} & \text{أ}_{13} \\ \text{أ}_{32} & \text{أ}_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{13} \\ \text{أ}_{31} & \text{أ}_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{12} \\ \text{أ}_{31} & \text{أ}_{32} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} \text{أ}_{12} & \text{أ}_{13} \\ \text{أ}_{22} & \text{أ}_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{13} \\ \text{أ}_{21} & \text{أ}_{23} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{12} \\ \text{أ}_{21} & \text{أ}_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

**وفي هذه الحالة $\text{أ}^{\text{مد}}$ = مدور مصفوفة العوامل المرافقة**

* ملاحظات هامة :-

لأي مصفوفة أ مربعة النظم وغير منفردة فإنه

(1) $\text{أ}^{-1} = \frac{1}{|\text{أ}|}\,\text{أ}^{\text{مد}}$ حيث $|\text{أ}| \neq$ صفر

(2) $I^{\text{مد}} = I$

(3) $\text{أ}\,\text{أ}^{\text{مد}} = \text{أ}^{\text{مد}}\,\text{أ} = |\text{أ}|\, I$

*** خواص المعكوس الضربي :-**

(1) $(\text{أ}\,\text{ب})^{-1} = \text{ب}^{-1}\,\text{أ}^{-1}$ (2) $(\text{أ}^{-1})^{-1} = \text{أ}$

(3) $(\text{أ}^{-1})^{\text{مد}} = (\text{أ}^{\text{مد}})^{-1}$ (4) $(\text{أ}^{-1})^{2} = (\text{أ}^{2})^{-1}$

(5) $I^{-1} = I$ (6) إذا كانت $\text{أ} = \text{ك}\, I$ فإن $\text{أ}^{-1} = \frac{1}{\text{ك}}\, I$

حيث ك $\neq$ ٠

# * حل انظمة المعادلات الخطية :-

(١) ترتيب المعادلات بحيث تكون المجاهيل في طرف والثوابت في الطرف الاخر

(٢) نكون مصفوفة المعاملات ولتكن أ

(٣) نوجد محدد المصفوفة أ فاذا كان

|أ| = صفر ← المعادلات ليس لها حل في ح

|أ| ≠ صفر ← نظام المعادلات له حل

(٤) نكون مصفوفة الثوابت (النواتج) ولتكن حـ

(٥) مصفوقة المجاهيل س = أ$^{-1}$ جـ

اى أن مصفوفة المجاهيل = المعكوس الضربي لمصفوفة المعاملات × مصفوفة الثوابت

# * مرتبة المصفوفة :-

اذا كانت المصفوفة أ مصفوفة غير صفرية فان

(١) اذا كانت المصفوفة أ مربعة النظم وكان محدد المصفوفة |أ| ≠ ٠ فان :-

مرتبة المصفوفة أ = رتبة المحدد

اما اذا كان |أ| = ٠ فان :-

مرتبة المصفوفة أ تساوى رتبة اى محدد أصغر يمكن تكوينه من المصفوفة أ وقيمته لا تساوى صفراً

(٢) مرتبة المصفوفة أ دائماً ≥ ١ أى أن ر(أ) ≥ ١

(٣) اذا كانت المصفوفة أ على النظم م × ن (غير مربعة) اما

١ ≤ ر(أ) ≤ م عندما م < ن

١ ≤ ر(أ) ≤ ن عندما ن < م

(٤) اذا كانت جميع قيم المحددات للمصفوفة = صفر فان مرتبة المصفوفة (أ) تكون أقل من رتبة اصغر محدد فيها بمقدار ١ (اى ان مرتبتها = ١ -)

## * ملاحظات هامة :-

(١) اذا كانت أ مصفوفة صفرية فان ر(أ) = صفر

(٢) " " " " صف أو عمود فان ر(أ) = ١

(٣) " " " " وحدة على النظم ن×ن فان ر(أ) = ن

## * المصفوفة الموسعة :-

اذا كان لدينا نظام من المعادلات الخطية وكانت أ مصفوفة المعاملات و ج مصفوفة الثوابت فان المصفوفة الموسعة أ* = (أ : ج)

اى أن المصفوفة الموسعة أ* هى مصفوفة المعاملات مضافاً اليها عمود النواتج

## * ملاحظة هامة :-

لايجاد مرتبة المصفوفة الموسعة لابد من ادخال عمود النواتج فى المحددات الصغرى للمصفوفة الموسعة عند ايجاد مرتبتها

## * امكانية حل أنظمة المعادلات الخطية :-

لاى نظام من المعادلات الخطية المكون من عدد (ن) من المعادلات فى (ن) من المجاهيل يمكن كتابة معادلته المصفوفية على الصورة :

أ س = ج حيث أ مصفوفة المعاملات

س مصفوفة المجاهيل ، ج مصفوفة النواتج (الثوابت) فان

(١) اذا كانت ج $\neq$ المصفوفة الصفرية فان هذا النظام يسمى ويمثل نظام معادلات خطية غير متجانسة وعلى ذلك يكون :

(i) لهذا النظام حل وحيد اذا كان ر(م) = ر(م$^*$) = ن

(ii) يكون له عدد لانهائي من الحلول اذا كان ر(م) = ر(م$^*$) < ن

(iii) النظام ليس له حل على الاطلاق عندما ر(م) $\neq$ ر(م$^*$)

(٢) اذا كانت مصفوفة الثوابت ج = المصفوفة الصفرية فان هذا النظام يسمى ويمثل نظام معادلات خطية متجانس وفي هذه الحالة لابد أن تكون ر(م) = ر(م$^*$) دائماً وعلى ذلك يكون :

(i) النظام له حل وحيد اذا كانت ر(م) = ن
اى أن ر(م) = ر(م$^*$) = ن وتكون قيمة كل متغير تساوى صفراً ويسمى هذا الحل في (٠، ٠، ٠) بالحل الصفري أو الحل البديهي

(ii) النظام له عدد لانهائي من الحلول بالاضافة الى الحل الصفري اذا كان ر(م) < ن
اى أن ر(م) = ر(م$^*$) < ن