PDF Editor Pro

الصف الثاني الثانوي – القسم العلمي
الوحدة الأولى – الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات

الدرس الخامس: حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة

ملخص الدرس: إذاكانت س ∋ ع فأن | س | = { س : س ≥ ٠ ، ــ س : س < ٠ }

- | ا | ≥ ٠
- | اب | = | ا | × | ب |
- إذا كان أ، ب عددين حقيقين: |أ| = | ب | ⟺ أ = ± ب
- إذا كان أ ∋ ع$^+$ ، | س | = أ فأن س = ± أ
- إذا كان | س | ≤ أ فأن - أ ≤ س ≤ أ
- إذا كان | س | ≥ أ فأن س ≥ أ أو س ≤ -أ
- | س |^٢ = | س^٢| = س^٢ ، $\sqrt{\text{س}^٢}$ = |س|

مثال محلول (١): أوجد مجموعة الحل في ع للمعادلة: | س - ٢ | = ٣

الحـــــــــــــــــــــــــل

س - ٢ = ٣
س = ٥

س - ٢ = - ٣
س = -١

م.ح = { ٥، -١ }

تدريب (١): أوجد مجموعة الحل في ع للمعادلة : | س – ١ | – ٢ = ٤

مثال محلول (٢): أوجد مجموعة الحل في ع للمعادلة | ٢س – ٤ | = | س +١ |

الحـــــــــــــــــــــــــل

٢س – ٤ = س +١
س = ٥

٢س – ٤ = - س – ١
س = ١

م.ح = { ٥، ١ }

PDF Editor Pro

تدريب (٢): اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

مجموعة الحل في ع للمعادلة : | ٥س – ١ | = | س |

(أ) ∅ (ب) { $\frac{١}{٤}$ } (ج) { $\frac{١}{٦}$ } (د) { $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٦}$ }

مثال محلول (٣): أوجد مجموعة الحل في ع للمعادلة: | س +٢ | + س –٢=٠

الحـــــــــــــــــل

س ≥ –٢	س < –٢
س+٢+ س –٢=٠	–س –٢+ س –٢=٠
٢س = ٠	–٤=٠ مرفوض (غير ممكن)
س = ٠	م.ح = { صفر }

تدريب (٣): أوجد مجموعة الحل في ع للمعادلة : | س +٢ | – س +١=٠

مثال محلول (٤): أوجد مجموعة الحل للمتباينة الاتية في ع : | س – ٣ | ≤ ٥

الحـــــــــــــــــل

–٥≤س – ٣ ≤ ٥

–٢ ≤ س ≤ ٨

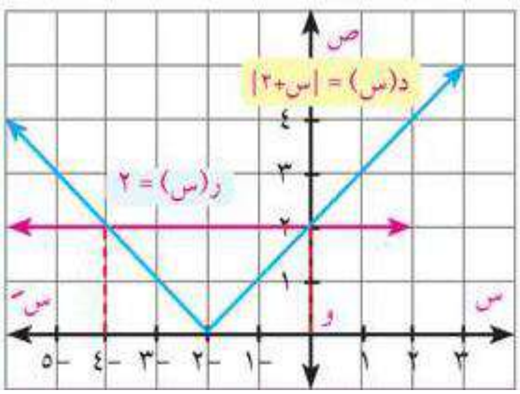
م.ح = [-٢، ٨]

تدريب (٤): أوجد مجموعة الحل للمتباينة الاتية في ع : | س –٤ | > ٢

PDF Editor Pro

مثال محلول (٥): أوجد بيانيا في ع مجموعة الحل للمعادلة : | س +٢ | = ٢

الحـــــــــــــــــل



بفرض أن :

د (س) = | س +٢ |

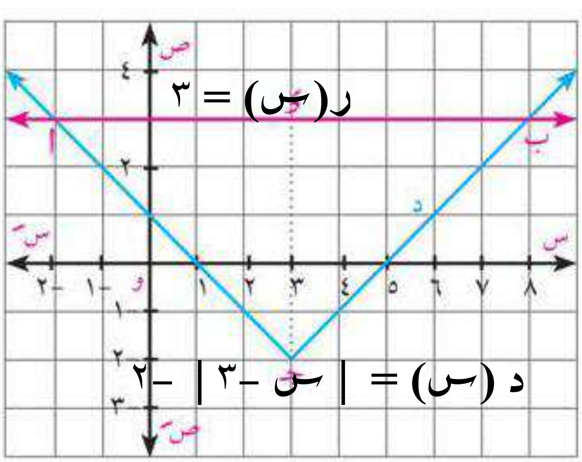
ر(س) = ٢

م.ح = { صفر، -٤ }

تدريب (٥): أوجد بيانيا في ع مجموعة الحل للمعادلة : | ٢س +٦ | =٨

مثال محلول (٦): أوجد بيانيا في ع مجموعة الحل للمتباينة : | س -٣ | -٢ > ٣

الحـــــــــــــــــل



بفرض أن :

د (س) = | س -٣ | -٢

ر(س) = ٣

م.ح =] -٢، ٨ [

تدريب (٦): أوجد بيانيا في ع مجموعة الحل للمتباينة : | س -٥ | > ٤

PDF Editor Pro

مثال محلول (٧): أوجد في ع مجموعة الحل للمتباينة : | س −١ | >٣

الحــــــــــــــــــــل

س −١ >٣ | س −١ < −٣

س >٤ | س < −٢

م . ح = ع −]−٢، ٤[

تدريب (٧):

أوجد في ع مجموعة الحل للمتباينة : | س +١ | >٢

حلول التدريبات

حل تدريب (١): م.ح = { −٥، ٧ }

حل تدريب (٢): ع { $\frac{1}{6}$، $\frac{1}{4}$ }

حل تدريب (٣): م.ح = ∅

حل تدريب (٤): م.ح = ع −]٢، ٦ [

حل تدريب (٥): م.ح = { −٧، ١ }

حل تدريب (٦): م.ح = [١، ٩]

حل تدريب (٧): م . ح = ع −]− ٣، ١[

PDF Editor Pro

تمارين على الدرس الخامس:

اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

١) مجموعة الحل في ع للمعادلة : | س - ٣ | = س - ٣ هي...............

(أ) ∅ (ب) { ٣ } (ج) [٣ ، ∞ [(د) ع

٢) مجموعة الحل في ع للمعادلة : | س + ٥ | = ٧ هي ....

(أ) ∅ (ب) { – ٢ } (ج) ع (د) { – ١٢، ٢ }

٣) مجموعة الحل في ع للمعادلة : | س + ٣ | + ٥ = ٢

(أ) ع (ب) ∅ (ج) { – ٣ } (د) { – ٥، – ٢ }

٤) مجموعة الحل في ع للمتباينة : | س +٣ | < ٤

(أ) ∅ (ب) [–٧، ١] (ج)] –٧، ١ [(د) ع

٥) مجموعة الحل في ع للمتباينة : | س +٥ | ≥ -٣

(أ)] – ٥، – ٣ [(ب) ∅ (ج) [– ٨، ٢] (د) ع

٦) مجموعة الحل في ع للمعادلة : | س | + ١ = ٠ هي...............

(أ) ∅ (ب) { – ١ } (ج) [- ١ ، ∞ [(د) ع

٧) مجموعة الحل في ع للمعادلة : | س | = س هي ....

(أ) ∅ (ب) [٠ ، ∞ [(ج) ع (د)] ٠ ، ∞ [

PDF Editor Pro

٨) **مجموعة الحل في ع للمعادلة** : | س | = ــ س هي ....

(أ) ع (ب)]ــ ∞ ، ٠] (ج) ∅ (د)]ــ ∞ ، ٠[

٩) **إذا كان س > ١** فإن $\frac{س^{٢} ـ ١}{\sqrt{س^{٢} ـ ٢ س + ١}}$ =.............

(أ) س + ١ (ب) س ـ ١ (ج) ـ س + ١ (د) ـ س ـ ١

١٠) | π ــ ٣ | ـ | ٣ ــ π | =.......

(أ) ــ ٦ (ب) ٢ π (ج) صفر (د) ــ ٢ π

حلول تمارين على الدرس الخامس:

١) ج ٢) د ٣) ب ٤) ج ٥) د

٦) أ ٧) ب ٨) ب ٩) د ١٠) ج

PDF Editor Pro

الصف الثاني الثانوي – القسم العلمى
الوحدة الثانية – الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها

الدرس الأول: الأسس الكسرية

المفاهيم الاساسية للدرس:

تعريف لكل $أ \in ح$ ولكل $ن \in ص^{+}$ فإن :

١) $أ^{ن} = أ \times أ \times أ \times أ \times .... \times أ$ (حيث العامل أ مكرر ن من المرات)

٢) $أ^{صفر} = ١$ حيث $أ \neq$ صفر

٣) $أ^{-١} = \frac{١}{أ}$ حيث $أ \neq$ صفر ٤) $أ^{-ن} = \frac{١}{أ^{ن}}$ حيث $أ \neq$ صفر

خواص الأسس الصحيحة : لكل $أ \in ح - \{٠\}$ ، $ب \in ح - \{٠\}$ ، $م \in ص$ ، $ن \in ص$

١) $أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$ ٢) $(أ ب)^{ن} = أ^{ن} ب^{ن}$

٣) $أ^{م} \div أ^{ن} = أ^{م-ن}$ ٤) $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{ن} = \frac{أ^{ن}}{ب^{ن}}$ ٥) $(أ^{م})^{ن} = أ^{م ن}$

أمثلة محلولة

مثال (١): أختصر لابسط صورة

$$\frac{٢٥^{٤ك-١} \times ٩^{٢ك-٢}}{٥^{٧ك-١} \times ٤٠٥^{ك-١}}$$

الحل : نقوم بتحليل الاساسات الى عواملها الاولية مثل $٢٥ = ٥^{٢}$ ، $٩ = ٣^{٢}$ ، $٤٠٥ = ٣^{٤} \times ٥$

المقدار $= \frac{(٥^{٢})^{٤ك-١} \times (٣^{٢})^{٢ك-٢}}{٥^{٧ك-١} \times (٣^{٤} \times ٥)^{ك-١}} = \frac{٥^{٨ك-٢} \times ٣^{٤ك-٤}}{٥^{٧ك-١} \times ٣^{٤ك-٤} \times ٥^{ك-١}}$

PDF Editor Pro

$= ٥^{\text{٨ك} - ٢ - \text{٧ك} + ١ - \text{ك} + ١} \times ٣^{\text{٤ك} - ٤ - \text{٤ ك} + ٤} = ٥^{\text{صفر}} \times ٣^{\text{صفر}} = ١ \times ١ = ١$

تدريب (١)

أوجد في ابسط صورة $\dfrac{٩^{\text{٤م}+١} \times ٤^{٢ - \text{٢م}}}{٣^{\text{٩م}+١} \times ٤٨^{١-\text{م}}}$

ملحوظة هامه :-

المعادلة $\text{س}^{\text{ن}} = \text{أ}$ حيث $\text{أ} \in \text{ح}$ ، $\text{ن} \in \text{ص}^{+}$ لها ن من الجذور

١) إذا كان ن عددا زوجيا ، أ > صفر فإن للمعادلة جذران حقيقيان هما $\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}}$ ، $-\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}}$ وباقي الجذور أعداد مركبة .

٢) إذا كان ن عددا زوجيا ، أ < صفر فإن المعادلة ليس لها جذور حقيقية (الجذور اعداد مركبة)

٣) إذا كان ن عددا فرديا ، $\text{أ} \in \text{ح} - \{٠\}$ فإن المعادلة لها جذر حقيقي وحيد (باقى الجذور اعداد مركبة)

٤) إذا كان $\text{ن} \in \text{ص}^{+}$ ، أ = صفر فإن المعادلة لها حل حقيقى وحيد وهو س = ٠ (الجذور مكررة وكل منها يساوى صفر عند ن > ١)

مثال (٢): أوجد فى ح مجموعة الحل لكل مما يلى:

١) $\text{س}^{٤} = ١٦$	**٢) $\text{س}^{٥} = ٢٤٣$**	**٣) $\text{س}^{٤} = -٨$**
الحل :	**الحل :**	**الحل :**
$\text{س}^{٤} = ١٦$	**$\text{س}^{٥} = ٢٤٣$**	**$\text{س}^{٤} = -٨$**
$\text{س}^{٤} = (\pm ٢)^{٤}$	**$\text{س}^{٥} = ٣^{٥}$**	
مجموعة الحل = {-٢ ، ٢}	**مجموعة الحل = {٣}**	**مجموعة الحل = ∅**

تدريب (٢)

أوجد فى ح مجموعة الحل لكل مما يلى:

١) $\text{س}^{٤} = ٨١$ ٢) $\text{س}^{٣} = ٢٧$ ٣) $\text{س}^{٢} = -١٦$

PDF Editor Pro

الاسس الكسرية :

تعريف

١) لأى عدد حقيقى أ ⩾ ٠ ، ن ∈ ص$^+$ - {١} يكون أ$^{\frac{١}{ن}}$ = $\sqrt[ن]{أ}$

هذه العلاقة صحيحة ايضا عندما أ < ٠ ، ن عدد صحيح فردى اكبر من ١

٢) **أ$^{\frac{م}{ن}}$ = ($\sqrt[ن]{أ}$)^م = $\sqrt[ن]{أ^م}$ حيث أ ∈ ح ، م ، ن عددان صحيحيان ليس بينهما عامل مشترك ، ن > ١ ، $\sqrt[ن]{أ}$ ∈ ح**

تعميم قوانين الأسس :- قوانين الأسس الكسرية تخضع لنفس قوانين الأسس الصحيحة

خواص الجذور النونية : إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين ، $\sqrt[ن]{أ}$ ∈ ح ، $\sqrt[ن]{ب}$ ∈ ح فإن:

١) $\sqrt[ن]{أ ب}$ = $\sqrt[ن]{أ}$ × $\sqrt[ن]{ب}$

٢) $\sqrt[ن]{\frac{أ}{ب}}$ = $\frac{\sqrt[ن]{أ}}{\sqrt[ن]{ب}}$ **: ب ≠ ٠**

مثال (٣): أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الاتية

١) ($\sqrt[٥]{س^٢}$ = ١٦

الحل :

س$^{\frac{٢}{٥}}$ = ١٦

س = ± (١٦)$^{\frac{٥}{٢}}$ ∴ س = ± ١٠٢٤ مجموعة الحل = { ـ ١٠٢٤، ١٠٢٤ }

٢) س$^{\frac{٤}{٣}}$ ـ ١٣ س$^{\frac{٢}{٣}}$ + ٣٦ = ٠

(س$^{\frac{٢}{٣}}$ ـ ٩) (س$^{\frac{٢}{٣}}$ ـ ٤) = ٠

PDF Editor Pro

س$^{\frac{٢}{٣}}$ = ٩ أو س$^{\frac{٢}{٣}}$ = ٤

س = ± ٩$^{\frac{٣}{٢}}$ أو س = ± ٤$^{\frac{٣}{٢}}$

س = ± ٢٧ أو س = ± ٨

مجموعة الحل = { ٢٧ ، -٢٧ ، ٨ ، -٨ }

تدريب (٣)

أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الاتية

١) س$^{\frac{٤}{٣}}$ = ٨١

٢) س$^{\frac{٤}{٥}}$ - ٣ س$^{\frac{٢}{٥}}$ - ٤ = ٠

اجابة التدريبات

تدريب ١) ١

تدريب ٢)

١) { ٣ ، -٣ }   ٢) {٣}   ٣) ∅

تدريب ٣)

١) { ٢٧ ، -٢٧ }   ٢) { -٣٢ ، ٣٢ }

PDF Editor Pro

وزارة التربية والتعليم
الإدارة المركزية لتطوير المناهج
إدارة تنمية مادة الرياضيات

تمارين على الدرس الاول

أختر الاجابة الصحيحية من بين الاجابات المعطاة :

١) عدد الجذور الحقيقية للمعادلة $س^{٢} = -٢٥$ هى ....

ⓐ صفر   ⓑ ٤   ⓒ ٣   ⓓ ٢

(أ) صفر   (ب) ٤   (ج) ٣   (د) ٢

٢) إذا كان $٥^{س} = ٣$ فإن $٢٥^{س} =$ ....

(أ) ٦   (ب) ٩   (ج) ١٥   (د) ٢٥

٣) إذا كان $س^{\frac{٣}{٢}} = ٦٤$ فإن س = ...

(أ) ٥١٢   (ب) ١٦   (ج) ٤   (د) ٢

٤) إذا كان $٤ س^{٥} = ١٢٨$ فإن س = ...

(أ) ٤   (ب) ± ٢ (ج) ٢   (د) -٢

٥) إذا كان $٣^{س+١} = ٥^{س+١}$ فإن $(٨)^{٢س+٢} =$ .....

(أ) ١   (ب) -١ (ج) ٣   (د) ٥

٦) مجموعة حل المعادلة $٢^{س-١} + ٢^{س} = ٢٤$ فى ح هى ....

(أ) ٢   (ب) -٢ (ج) ٣   (د) ٤

٧) مجموعة حل المعادلة $٣^{٢س} - ١٠(٣^{س}) + ٩ = ٠$ فى ح هى ....

(أ) {٢}   (ب) {٠}   (ج) {٠ ، ٢}   (د) {١ ، ٩}

٨) مجموع جذور المعادلة $س^{٤} = ١٦$ يساوى

(أ) ٢   (ب) ± ٢ (ج) -٢ (د) صفر

اجابات تمارين على الدرس الأول

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
أ	ب	ب	ج	أ	د	ج	د

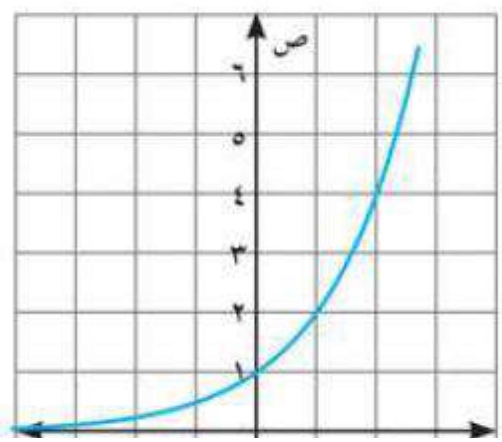
PDF Editor Pro

الدرس الثاني : الدالة الاسية وتطبيقاتها

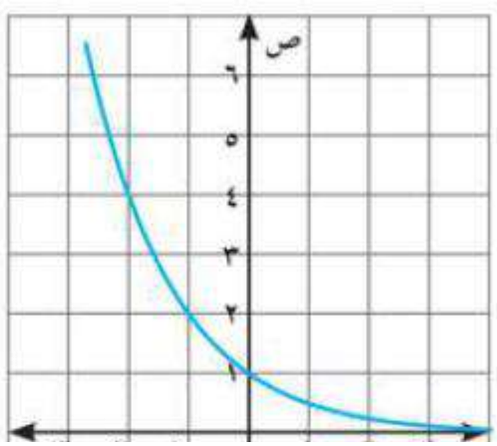
المفاهيم الاساسية:

- الدالة د حيث $د(س) = أ^{س}$ ، $أ > ٠$ ، $أ \neq ١$ تسمى دالة أسية

$د(س) = أ^{س}$ ، $أ > ١$



$د(س) = أ^{س}$ ، $٠ < أ < ١$



ونلاحظ ان

- مجال الدالة الاسية د : $د(س) = أ^{س}$ ، هو ح ومداها $ح^{+}$
- تكون الدالة تزايدية عندما $أ > ١$ (شكل ١) ، تكون الدالة تناقصية عندما $٠ < أ < ١$ (شكل ٢)
- منحنى الدالة الاسية د : $د(س) = أ^{س}$ يمر بالنقطة (٠ ، ١)
- الدالة الاسية دالة احادية و ليست فردية ولا زوجية
- منحنى الدالة د : $د(س) = أ^{س}$ ، و منحنى الدالة د : $د(س) = أ^{-س}$ كل منهما صورة للأخر بالإنعكاس في محور الصادات
- $\lim_{س \to \infty} أ^{س} = \infty$ عندما $أ > ١$ ، $\lim_{س \to \infty} أ^{س} = ٠$ عندما $٠ < أ < ١$
- يمكن تطبيق التحويلات الهندسية التي تمت دراستها في الوحدة الاولى على الدالة الاسية

PDF Editor Pro

الامثلة

مثال ١ : اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

أيا مما يلي يمثل دالة اسية

أ د(س) = $(-٢)^{س}$ ب د(س) = $(١)^{س}$ ج د(س) = $(\sqrt{٢})^{س}$ د د(س) = $س^{٢}$

الحل

الاجابة ج لأنها الدالة الوحيدة التي تحقق شروط الدالة الاسية من بين الدوال المعطاه

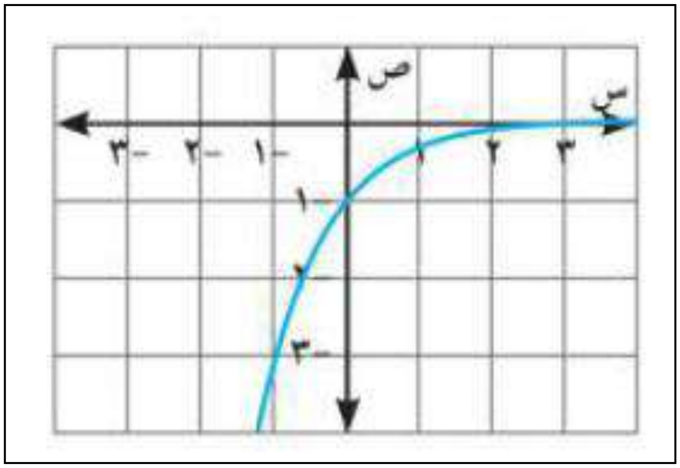
تذكر أن : شرط أن تكون الدالة د : د(س) = $أ^{س}$ دالة أسية هو أ > ٠ ، أ $\neq$ ١

تدريب ١ : اختر الاجابة الصحيحة

أيا مما يلي يمثل دالة اسية

أ د(س) = $(-١)^{س}$ ب د(س) = $(\frac{١}{٩})^{س}$ ج د(س) = $(١)^{س}$ د د(س) = $س^{٣}$

مثال ٢ :



المنحنى المرسوم في الشكل المقابل

يمثل منحنى الدالة ق ، والذي حصلنا

عليه من منحنى الدالة د : د(س) = $٣^{س}$

بعد إجراء بعض التحويلات الهندسية

على منحنى الدالة د

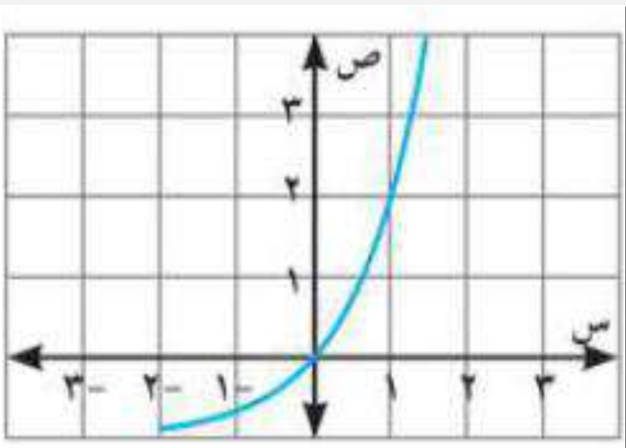
- أكتب قاعدة الدالة ق
- صف التحويلات الهندسية التي تمت على منحنى الدالة د للحصول على منحنى الدالة ق
- ابحث اطراد الدالة ق
- أوجد ق(٠) ،ق(٢) ، ق(-٢)

PDF Editor Pro

الحل

- قاعدة الدالة ق هي ق(س) = ـ (٣)$^{-س}$
- حصلنا على منحنى الدالة ق من منحنى الدالة د بالانعكاس في محور السينات ثم الانعكاس في محور الصادات
- الدالة تزايدية على مجالها
- ق(٠) = ـ ١ ، ق(٢) = ـ (٣)$^{-٢}$ = ـ $\frac{١}{٩}$ ، ق(ـ٢) = ـ (٣)^{٢} = ـ ٩

تدريب٢:

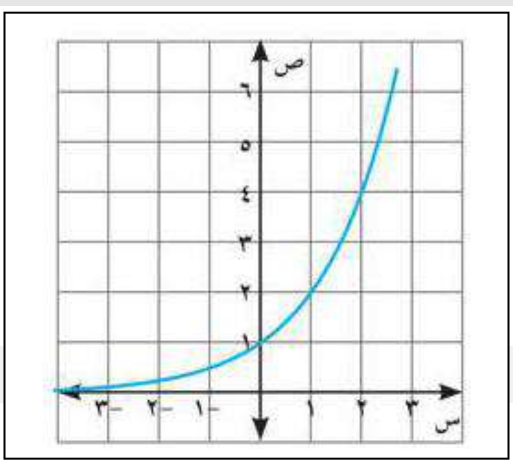


المنحنى المرسوم في الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة ق ، والذي حصلنا عليه من منحنى الدالة د : د(س) = ٢^{س}

بعد إجراء بعض التحويلات الهندسية على منحنى الدالة د

- أكتب قاعدة الدالة ق
- صف التحويلات الهندسية التي تمت على منحنى الدالة د للحصول على منحنى الدالة ق
- ابحث اطراد الدالة ق
- أوجد ق(٠) ،ق(٢) ، ق(-٢)

مثال٣:



الشكل المقابل يمثل الشكل البياني للدالة د حيث د(س) = ٢^{س}

- قدر قيمة ص عندما س = ـ٢ ، س = ١,٥
- قدر قيمة س عندما ص = ٣

الحل

من الرسم عند رسم المستقيم س = ـ٢

PDF Editor Pro

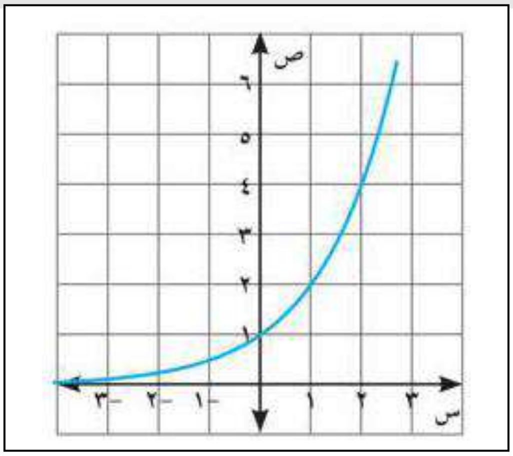
نجده يقطع منحنى الدالة عند ص = $\frac{1}{4}$ ، بالمثل عند رسم المستقيم س = ١,٥ نجده يقطع منحنى الدالة عند ص = ٢,٨ تقريبا ، وعند رسم المستقيم ص= ٣ نجده يقطع منحنى الدالة عند س= ١,٦ تقريبا

تدريب٣:

الشكل المقابل يمثل الشكل البياني

للدالة د حيث د(س) = ٢ ^{س}

- قدر قيمة ص عندما س = -١
- قدر قيمة س عندما عندما ص = ٦



حلول التدريبات

تدريب (١)

ب) د(س) = $(\frac{1}{9})^{س}$

تدريب (٢)

- قاعدة الدالة ق هي ق(س) = ٢ ^{س} - ١
- حصلنا على منحنى الدالة ق من منحنى الدالة د بإزاحة قدرها وحدة واحدة في اتجاه $\overleftarrow{وص}$/
- الدالة تزايدية على مجالها
- ق(٠) = ٠ ، ق(٢) = ٣ ، ق(-٢) = $-\frac{3}{4}$

تدريب (٣)

ص = ٠,٥
س = ٢,٦ تقريبا

PDF Editor Pro

تمارين على الدرس الثاني

السؤال الاول : اختر الاجابة الصحيحة

١) إذا كانت الدالة د : د(س) = أ^س^ تمثل دالة أسية فإن أ يمكن أن تساوي.......

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) -١ (د) $\frac{٥}{٤}$

٢) إذا كانت الدالة د : د(س) = أ^س^ تمثل دالة تناقصية فإن أ يمكن أن تساوي.......

(أ) $\frac{٨}{٩}$ (ب) ١ (جـ) -١ (د) $\frac{٥}{٤}$

٣) إذا كانت الدالة د : د(س) = أ^س^ تمثل دالة تزايدية فإن أ يمكن أن تساوي.......

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) -١ (د) ١,١

٤) إذا كان د(س) = ٢^س^ + ١ فإن : د(-٢) = ...

(أ) -٣ (ب) $\frac{٥}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٥}$

٥) إذا كان د(س) = ٣^س + ١^ فإن د(س) = $\frac{١}{٩}$ عندما س = ...

(أ) صفر (ب) -١ (جـ) -٢ (د) -٣

٦) منحنى الدالة د(س) = ٢^-س^ هو صورة لمنحنى الدالة د(س) = ٢^س^

بالانعكاس في ....

(أ) محور السينات (ب) محور الصادات (جـ) نقطة الاصل (د) المستقيم ص = س

٧) مدي الدالة د : د(س) = ٢ + ٣^س^ هو ....

(أ) ع (ب) ع^+^ (جـ)] ٥ ، ∞ [(د)] ٢ ، ∞ [

PDF Editor Pro

اجابة تمارين الدرس الثاني

١) د　　٢) أ　　٣) د　　٤) ب　　٥) د

٦) ب　　٧) د

PDF Editor Pro

الدرس الثالث: المعادلات الأسية

المفاهيم الاساسية للدرس:

إذا تضمنت المعادلة متغيرا فى الأس فإنها تسمى معادلة أسية مثل ($أ^{س} = ل$)

أولا : إذاكان $أ^{م} = أ^{ن}$ حيث $أ \notin \{٠ ، ١ ، -١\}$ فإن م = ن

أمثلة محلول

مثال (١): أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة $٥^{س+٢} = ٦٢٥$

الحل : $٥^{س+٢} = ٦٢٥$

$٥^{س+٢} = ٥^{٤}$

س + ٢ = ٤

س = ٢ مجموعة الحل = {٢}

تدريب (١) أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة $٣^{س-٢} = ٨١$

مثال (٢): أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة $(\sqrt{٣})^{س-١} = ٢٧$

الحل : $(\sqrt{٣})^{س-١} = ٢٧$

$(\sqrt{٣})^{س-١} = ٣^{٣}$

$(\sqrt{٣})^{س-١} = (\sqrt{٣})^{٦}$

س - ١ = ٦

س = ٧ مجموعة الحل = {٧}

تدريب (٢): أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة $(\sqrt{٢})^{٢س-١} = ٤\sqrt{٢}$

مثال (٣): أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة $٢^{س-١} = \frac{١}{١٦}$

PDF Editor Pro

الحل : $٢^{س - ١} = ٢^{- ٤}$ ∴ س - ١ = -٤

∴ مجموعة الحل = {-٣}

تدريب (٣): أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة $٣^{س + ١} = \frac{١}{٩}$

ثانيا : إذاكان $أ^{م} = ب^{م}$ حيث أ ∌ { ٠ ، ١ ، -١ } فإن

إما م = صفر

أو أ = ب عندما م عدد فردى ، أ = ± ب عندما م عدد زوجى

مثال (٤): أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة $٥^{س+٣} = ٤^{س+٣}$

الحل : $٥^{س+٣} = ٤^{س+٣}$

س +٣ = ٠

س = -٣

مجموعة الحل = {-٣}

تدريب (٤) أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة $٧^{س-٣} = ٩^{س-٣}$

مثال (٥): أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة $٧^{س - ٤} = س^{س - ٤}$

الحل : $٧^{س - ٤} = س^{س - ٤}$

س = ٧ أو س-٤ = ٠ ∴ س = ٤

مجموعة الحل = { ٤ ، ٧}

PDF Editor Pro

تدريب (٥): أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة $\text{س}^{\text{س}-\text{٥}} = \text{٦}^{\text{س}-\text{٥}}$

مثال (٦): أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة $\text{س}^{\text{٦}} = \text{٦٤}$

الحل : $\text{س}^{\text{٦}} = (\pm \text{٢})^{\text{٦}}$

$\text{س} = \pm \text{٢}$

مجموعة الحل = {٢، -٢}

تدريب (٦): أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة $(\text{س}+\text{١})^{\text{٣}} = \text{٢٧}$

مثال (٧): إذا كان $\text{د(س)} = \text{٣}^{\text{س}}$ فأوجد قيمه س التى تحقق د(س-١) + د(س+٢) = ٧٥٦

الحل : $\text{٣}^{\text{س}-\text{١}} + \text{٣}^{\text{س}+\text{٢}} = \text{٧٥٦}$

$$\text{٣}^{\text{س}} \times \text{٣}^{-\text{١}} + \text{٣}^{\text{س}} \times \text{٣}^{\text{٢}} = \text{٣}^{\text{س}}(\text{٣}^{-\text{١}} + \text{٣}^{\text{٢}}) = \text{٣}^{\text{س}}\left(\frac{\text{٢٨}}{\text{٣}}\right) = \text{٧٥٦}$$

$$\text{٣}^{\text{س}} = \text{٧٥٦} \times \frac{\text{٣}}{\text{٢٨}} = \text{٨١}$$

$\text{٣}^{\text{س}} = \text{٣}^{\text{٤}}$ $\qquad$ $\text{س} = \text{٤}$

تدريب (٧): إذا كان $\text{د(س)} = \text{٣}^{\text{س}}$ فأوجد قيمه س التى تحقق د(س+١) - د(س - ١) = ٧٢

مثال (٨): إذا كان $\text{د(س)} = \text{٢}^{\text{س}}$ فأوجد قيمه س التى تحقق د(س) + د(٥- س) = ١٢

الحل : $\text{٢}^{\text{س}} + \text{٢}^{\text{٥}-\text{س}} = \text{١٢}$

$\text{٢}^{\text{س}} + \text{٢}^{\text{٥}} \times \text{٢}^{-\text{س}} = \text{١٢}$ $\qquad$ (بالضرب $\times \text{٢}^{\text{س}}$)

PDF Editor Pro

$٢^{٢س} - ١٢ \times ٢^{س} + ٣٢ = ٠$

$٢^{س} = ٤$ أ، $٢^{س} = ٨$

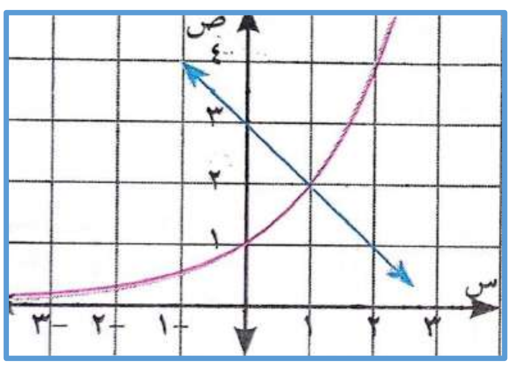
س = ٢ أ، س = ٣

تدريب (٨): إذا كان د(س) = $٣^{س}$ فأوجد قيمه س التى تحقق د(س+١) + د(٣ - س) = ٣٠.

حل المعادلات الأسية بيانيا

مثال (٩): إذا كان $د_١$(س) = $٢^{س}$ ، $د_٢$(س) = ٣ - س فأوجد قيمه س التى تحقق $د_١$(س) = $د_٢$(س)

الحل :



من رسم الشكل البيانى للدالتين نجد ان نقطه التقاطع
عند س = ١

تدريب (٩): إذا كان $د_١$(س) = $٢^{س}$ ، $د_٢$(س) = ٤ فأوجد بيانيا قيمه س التى تحقق $د_١$(س) = $د_٢$(س)

حلول التدريبات:

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
{٦}	{٣}	{-٣}	{٣}	{٥،٦}	{٢}	س=٣	س=٠ أ، ٢	س=٢

PDF Editor Pro

تمارين على الدرس الثالث

اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

١) إذا كان د(س) = $٢^{س}$ ، فإن مجموعة حل المعادلة د(س+١) = ٣٢ في ح هي ....

أ) { ٤ }   ب) { ٣ }   ج) { ٥ }   د) { ١٦ }

٢) إذا كان د(س) = $٣^{س}$ ، فإن مجموعة حل المعادلة د(س+١) + د(س – ١) = ١٠ في ح هي ....

أ) { ٣ }   ب) { ٢ }   ج) { ١ }   د) { ٠ }

٣) إذا كان $٤^{س+٢} = ٣^{س+٢}$ فإن س = ...

أ) ٢   ب) -٣   ج) -٢   د) ٣

٤) إذا كان $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{س} = \frac{٢٤٣}{٣٢}$ فإن س = ...

أ) ٥   ب) -٥   ج) ٤   د) -٤

٥) مجموعة حل المعادلة $٣^{|س+٤|} = ٨١$ في ح هي ....

أ) { ٠ }   ب) { -٨ }   ج) { -٨ ، ٠ }   د) { ٨ }

٦) مجموعة حل المعادلة $٧^{س^٢ - ٦} = ١$ في ح هي ....

أ) { ٦ }   ب) { ١ }   ج) { -٣ }   د) { ٣ }

PDF Editor Pro

٧) عدد جذور المعادلة س ^٣^ = ٤ في ك (مجموعة الاعداد المركبة) هى ....

أ) ١ ب) ٢ جـ) ٣ د) ٤

٨) مجموعة حل المعادلة (س – ٣) ^٥/٣^ = ٣٢ فى ح هى ....

أ) { ٢} ب) { ١١} جـ) {١١ ، -٥ } د) {-١١ ، ١١ }

٩) إذا كان ٣ ^س^ = ٢ فإن ٢٧ ^س^ = ...

أ) ١٨ ب) ٨ جـ) ٤ د) ١٦

١٠) إذا كان ٥ ^س^ = ٤ فإن ٥ ^س+٢^ = ...

أ) ٢٠ ب) ٤٠ جـ) ٨٠ د) ١٠٠

اجابة التمارين على الدرس الثالث

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
أ	جـ	جـ	ب	جـ	د	جـ	ب	ب	د

الدرس الثالث : نهاية الدالة عند اللانهاية

مفاهيم اساسية: نظرية (١) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{١}{\text{س}} =$ صفر

نتائج هامة (١) $\lim\limits_{\to \infty} \frac{أ}{} =$ صفر (٢) $\lim\limits_{\to \infty} \frac{أ}{} =$ صفر ، ن ∈ $ع_+$:أثابت

مثال محلول (١): أوجد: $\lim\limits_{\to \infty} \frac{٢ \qquad ٣}{٣ \qquad -٦}$

الحـــــــــــــل

بقسمة كل من البسط والمقام على

$\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{٢ \qquad ٣}{٣ \qquad -٦} = \lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{٢ \qquad \frac{٣}{}}{٣ \qquad \frac{٦}{}} = \frac{٢ \qquad ٠}{٣ \qquad -٠} = \frac{٢}{٣}$

تدريب (١): أوجد: $\lim\limits_{\to \infty} \frac{٥ \qquad ٢}{٧ \qquad -٢}$

مثال محلول (٢): $\lim\limits_{\to \infty} (\text{س}^٣ \qquad ٧\text{س}^٢ \qquad ٢)$

الحـــــــــــــل

بأخذ $\text{س}^٣$ عامل مشترك :

$\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \text{س}^٣ (١ \qquad \frac{٧}{} \qquad \frac{٣}{}_٢) = \infty (١+٠+٠) = \infty$

تدريب (٢): $\lim\limits_{\to \infty} (٤ - ٣ \qquad {}^٣)$

ملاحظات: عند إيجاد نها $\frac{\text{د(س)}}{\text{ر(س)}}$ حيث د(س) ، ر(س) دوال كثيرات الحدود فإن :

١) النهايه = عدد حقيقى لا يساوي الصفر إذا كانت درجة البسط = درجة المقام .

٢) النهايه = صفر إذا كامنت درجة البسط أصغر من درجة المقام .

٣) النهاية = $\pm \infty$ إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام .

PDF Editor Pro

مثال محلول (٣): أوجد : $\lim\limits_{\infty \leftarrow} \frac{٣\ \ ^{٢} - ٥\ \ \ ١}{٢\ \ \ \ ٣}$

الحــــــــــــــــــــــــــــــل

بقسمة كل من البسط والمقام على

$$\lim\limits_{\infty \leftarrow} \frac{٣\ \ ^{٢}\ \ ٥\ \ ١}{٢\ \ \ ٣} = \lim\limits_{\infty \leftarrow} \frac{٣\ \ \ ٥\ \ \frac{١}{}}{٢\ \ \frac{٣}{}} = \frac{(\infty - ٥ + \text{صفر})}{٢ + \text{صفر}} = \infty$$

تدريب (٣): أوجد : $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٥\ \ \ -٧\ \ ^{٢}}{٣\ \ \ +١}$

مثال محلول (٤):

أوجد: $\lim\limits_{\infty \leftarrow} \frac{٥\ \ ^{٢}+٣\ \ +١}{٢\ \ ^{٣}+٧}$

الحــــــــــــــــــــــــــــــل

بقسمة كل من البسط و المقام على $س^{٣}$:.

$$\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٥\ \ ^{٢}+٣\ \ +١}{٢\ \ ^{٣}+٧} = \lim\limits_{\infty \leftarrow} \frac{\frac{٥}{}\ \ \frac{٣}{٢}\ \ \frac{١}{٣}}{٢\ \ \frac{٧}{٢}} = \frac{٠+٠+٠}{٢ +٠} = \text{صفر}$$

تدريب (٤) أوجد : $\lim\limits_{\infty \leftarrow} \frac{٥\ \ \ ٣\ \ \ ^{٢}}{٢\ \ ^{٣}+٧\ \ \ -٧}$

مثال محلول (٥)

أوجد : $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{(٣\ \ -٥)(٢\ \ +١)}{^{٢}-٣\ \ \ ٢}$

PDF Editor Pro

الحـــــــــــــــــــــل

بقسمة كل من البسط والمقام على $س^{٢}$

$$\underset{\infty \leftarrow}{\text{نـهـــا}} \frac{(٣ \quad \frac{٥}{} \quad ٢) \quad \frac{١}{}}{١ - \frac{٣}{} \quad \frac{٢}{٢}} = \underset{\infty \leftarrow}{\text{نـهـــا}} \frac{(٣ - ٠)(٢ + ٠)}{١ - ٠ + ٠} = ٦$$

تدريب (٥)

أوجد : $\underset{\infty \leftarrow}{\text{نـهـــا}} \frac{(٤ \quad -٥) \quad (-٣)}{٢ + ٣ \quad ٢}$

مثال محلول (٦) أوجد : $\underset{\infty \leftarrow}{\text{نـهـــا}} \frac{\sqrt[٣]{٨ \quad ٣ \quad ٤ \quad ٢}}{\sqrt{٩ \quad ٢ \quad ٣}}$

الحـــــــــــــــــــــل

بقسمة كل من البسط والمقام على

$$\underset{\infty \leftarrow}{\text{نـهـــا}} \frac{\sqrt[٣]{٨ \quad \frac{٤}{٢} \quad \frac{٢}{٣}}}{\sqrt{٩ \quad \frac{٣}{٢}}} = \frac{\sqrt[٣]{٨ + ٠ - ٠}}{\sqrt{٩ - ٠}} = \frac{٢}{٣}$$

تدريب (٦): أوجد : $\underset{\infty \leftarrow}{\text{نـهـــا}} \frac{٢ \quad -٥}{\sqrt{٤ \quad ^{٢} + ٢ \quad + ١}}$

مثال محلول (٧)

أوجد : $\underset{\infty \leftarrow}{\text{نـهـــا}} (٣ \quad -^{٥} \quad ٤ \quad -^{٢} \quad ٥)$

الحـــــــــــــــــــــل

$$\underset{\infty \leftarrow}{\text{نـهـــا}} (\frac{٣}{٥} \quad \frac{٤}{٢} \quad ٥) = (٠ + ٠ + ٥) = ٥$$

تدريب (٧):

أوجد : $\underset{\infty \leftarrow}{\text{نـهـــا}} (٢ \quad -^{٣} \quad ٣ \quad -^{٤} \quad ٦)$

PDF Editor Pro

حلـول التدريبات

رقم التدريب	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
الاجابة	$\frac{٥}{٧}$	ـ ∞	ـ ∞	صفر	$\frac{٤}{٣}$	١	ـ ٦

تمارين على الدرس الثالث

١) $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{٣س^٢ + ٧}{٥س - ١}$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (ج) صفر (د) ∞

٢) $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{٥س - ١}{٣س^٢ + ٧}$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (ج) صفر (د) ∞

٣) $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{٥س^٢ - ١}{٣س^٢ + ٧}$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (ج) صفر (د) ∞

٤) $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\dfrac{س}{س^٢ - ١} - \dfrac{١}{س^٢ - ١} \right)$ = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{١}{٢}$ (ج) ١ (د) ∞

٥) إذا كان $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{أ س^٢ + ب س + ١}{س^٢ + ٥}$ = ٣ فإن (أ ، ب) = ...

(أ) (٠ ، ٣) (ب) (٠ ، ٦) (ج) (٦ ، ٠) (د) (٣ ، ٠)

PDF Editor Pro

٦) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـــا}} \left(١ + \text{س}^{٢} - \text{س}^{٣} \right) = ...$

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ∞ (د) $-\infty$

٧) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـــا}} \left(١ + \text{س}^{-٢} - \text{س}^{-٣} \right) = ...$

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ∞ (د) $-\infty$

٨) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{س} - \text{س}\sqrt{\text{س}}}{\text{س}} = ...$

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ∞ (د) $-\infty$

٩) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـــا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}^{٢} + ١}}{|\text{س}|} = ...$

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ∞ (د) $-\infty$

١٠) $\underset{\text{هـ} \to \infty}{\text{نهـــا}} \left(\sqrt{\text{هـ}^{٢} + ١} - \text{هـ} \right) = ...$

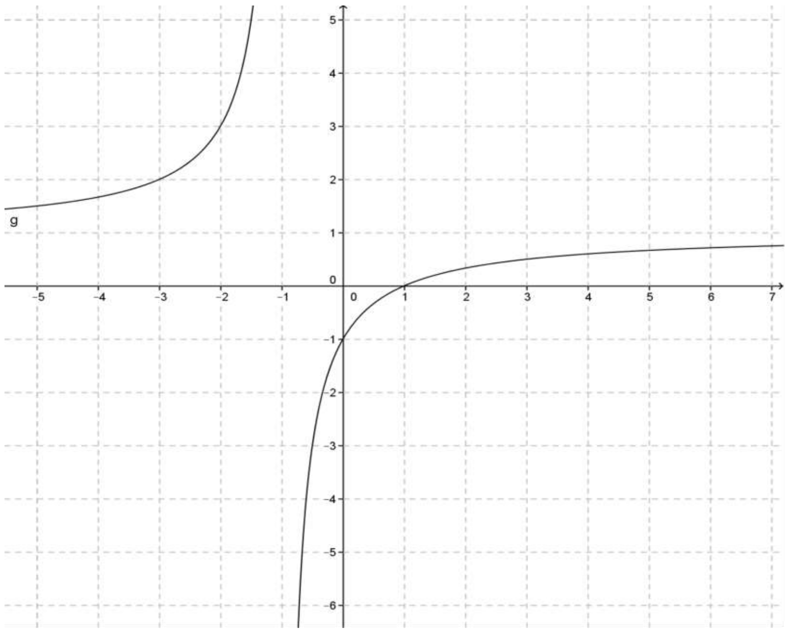
(أ) صفر (ب) ١ (ج) ∞ (د) $-\infty$

PDF Editor Pro

١١) إذا كان الشكل المقابل

يمثل الشكل البياني للدالة د فإن

$\lim_{س \to \infty}$ د(س) = ...



أ) صفر

ب) ١

ج) ∞

د) $-\infty$

حلول تمارين الدرس الثالث

١) د	٢) ج	٣) ب	٤) أ	٥) ب
٦) د	٧) ب	٨) د	٩) ب	١٠) أ
١١) ب				

PDF Editor Pro

الدرس الرابع: (نهايات الدوال المثلثيه)

مفاهيم اساسية: إذا كان س قياس الزاويه بالتقدير الدائرى فإن:

نظرية (١)

١) $\underset{\text{س} \leftarrow \cdot}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}}{} = ١$ ٢) $\underset{\text{س} \leftarrow \cdot}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا}}{} = ١$

نتائج هامة

١) $\underset{\text{س} \leftarrow \cdot}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا أ}}{} = \text{أ}$ مثلاً : $\underset{\text{س} \leftarrow \cdot}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا ٥}}{} = ٥$

٢) $\underset{\text{س} \leftarrow \cdot}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا أ}}{} = \text{أ}$ مثلاً : $\underset{\text{س} \leftarrow \cdot}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا ٣}}{} = ٣$

٣) $\underset{\text{س} \leftarrow \cdot}{\text{نهـا}} \frac{\text{١ − جتا}}{} = \text{صفر}$

مثال محلول (١): اوجد :

$$\underset{\text{س} \leftarrow \cdot}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا ٥}}{٣}$$

الحل:

بقسمة كل من البسط و المقام على س

$$\underset{\text{س} \leftarrow \cdot}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{جا ٥}}{}}{\frac{٣}{}} = \frac{٥}{٣}$$

تدريب (١): اوجد: $\underset{\text{س} \leftarrow \cdot}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا ٣ س}}{٤}$

PDF Editor Pro

مثال محلول (٢): اوجد $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{١ − جتا}}{\text{جا ٥}}$

الحل:

$$\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{١ − جتا}}{\quad} \times \dfrac{\quad}{\text{جا ٥}} = ٠ \times \dfrac{١}{٥} = ٠$$

تدريب (٢): اوجد $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{١ − جتا}}{\text{ظا ٣}}$

مثال محلول (٣): اوجد $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}}$ ٦ س^{٢} قتا٢ س ظتا

الحل:

$$\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٦ \qquad ٢}{\text{جا٢} \qquad \text{ظا}} = ٦ \times \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\quad}{\text{جا٢}} \times \dfrac{\quad}{\text{ظا}} = ٦ \times \dfrac{١}{٢} \times ١ = ٣$$

تدريب (٣): اوجد $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}}$ ٣ س قتا٢

مثال محلول (٤) اوجد $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظا٣}\ ^{٢} + \text{جا}^{٢}\ ٥}{٢}$

الحل:

بقسمة كل من البسط و المقام على س^{٢}

$$\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{\text{ظا٣}\ ^{٢}}{٢} \quad \dfrac{\text{جا}^{٢}\ ٥}{٢}}{\dfrac{٢}{٢}} = \dfrac{٣ + ٢٥}{١} = ٢٨$$

PDF Editor Pro

تدريب (٤): اوجد $\underset{\text{س} \leftarrow \cdot}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا ٥ }^{٣} \text{ + جا}^{٣} \text{ ٥}}{\text{٢ \quad ٣}}$

مثال محلول (٥): اوجد

$$\underset{\text{س} \leftarrow \cdot}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا٢}}{\text{٥ \quad جتا ٢}}$$

الحل:

بقسمة كل من البسط و المقام على

$$\underset{\text{س} \leftarrow \cdot}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{جا ٢}}{}}{\text{٥ \quad جتا ٢}} = \frac{٢}{٥ \times ١} = \frac{٢}{٥}$$

تدريب (٥):

اوجد $\underset{\text{س} \leftarrow \cdot}{\text{نهـا}} \frac{\text{٧ظا ٣}}{\text{جتا٣}}$

حلـــول التدريبات

رقم التدريب	١	٢	٣	٤	٥
الاجابة	$\frac{٣}{٤}$	صفر	$\frac{٣}{٢}$	٦٥	٢١

PDF Editor Pro

تمارين على الدرس الرابع

١) $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا ٣ س + ظا ٤س}}{\text{٥س}} = \text{............}$

(أ) $\frac{\text{٥}}{\text{٧}}$ (ب) $\frac{\text{٧}}{\text{٥}}$ (ج) صفر (د) ١

٢) $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}^{\text{٢}}\text{ ٣س}}{\text{٢س}^{\text{٢}}} = \text{...............}$

(أ) $\frac{\text{٣}}{\text{٢}}$ (ب) $\frac{\text{٩}}{\text{٢}}$ (ج) $\frac{\text{٩}}{\text{٤}}$ (د) صفر

٣) $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}^{\text{٢}}\text{ ٣س}}{\text{٢س}} = \text{...............}$

(أ) $\frac{\text{٣}}{\text{٢}}$ (ب) $\frac{\text{٩}}{\text{٢}}$ (ج) $\frac{\text{٩}}{\text{٤}}$ (د) صفر

٤) $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظا ٥س جا ٣س}}{\text{س}^{\text{٢}}} = \text{...............}$

(أ) صفر (ب) ٨ (ج) ١ (د) ١٥

٥) إذا كان $\underset{\text{س} \to \text{١}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{حا (س − ١)}}{\text{س}^{\text{٢}}\text{ − ١}} = \text{............}$

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$

٦) $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{(١ − جتا س) ظا س}}{\text{س جا س}} = \text{.............}$

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ∞ (د) غير موجودة

PDF Editor Pro

٧) $\lim\limits_{\text{س} \to \text{٠}} \dfrac{\text{جتا س} - \text{جا س} - \text{١}}{\text{٢ س}}$ = ...

أ) صفر   ب) ١   ج) $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ د) $-\frac{\text{١}}{\text{٢}}$

٨) $\lim\limits_{\text{س} \to \text{٠}} \dfrac{\text{١} - \text{جتا س}}{\text{س}^{\text{٢}}}$ = ...

أ) صفر   ب) ١   ج) $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ د) $-\frac{\text{١}}{\text{٢}}$

٩) $\lim\limits_{\text{س} \to \text{٠}} \text{س}\left(\text{قتا٢س} - \text{ظتا س}\right)$ = ...

أ) صفر   ب) ١   ج) $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ د) $-\frac{\text{١}}{\text{٢}}$

١٠) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \text{٢ س جا} \dfrac{\text{١}}{\text{س}}$ = ...

أ) صفر   ب) ١   ج) ٢   د) ∞

حلول تمارين الدرس الرابع

١) ب	٢) ب	٣) د	٤) د	٥) د
٦) أ	٧) د	٨) ج	٩) د	١٠) ج

PDF Editor Pro

الدرس الخامس: بحث وجود النهاية عند نقطة

المفاهيم الاساسية للدرس: النهاية اليمنى ــ النهاية اليسرى

يقال إن نهاية الدالة د عندما س تؤول إلى م تساوى ل إذا وفقط إذا كان نهايتها من اليمين ونهايتها من اليسار عندما س تؤول إلى م متساويتين وكل منهما تساوى ل حيث **ل ∋ ح**

وتكتب رمزيا

نهـــا د(س) = ل إذا وفقط إذا كان : د ($م^{+}$) = د ($م^{-}$) = ل
س ⟵ م

حيث

د ($م^{+}$) = نهـــا د(س) (النهاية اليمنى للدالة)
س ⟵ $م^{+}$

د ($م^{-}$) = نهـــا د(س) (النهاية اليسرى للدالة)
س ⟵ $م^{-}$

أمثلة محلولة

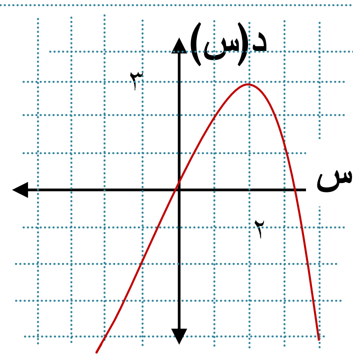
مثال توضيحى: لاحظ: انه

فى شكل (١)

د(٢^{-}) = ٣

د(٢^{+}) = ٣

∵ د(٢^{-}) = د(٢^{+}) = ٣



شكل (١)

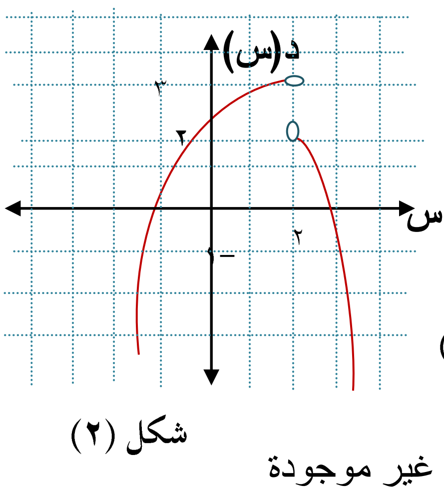
نهـــا د(س) = ٣
س ⟵ ٢

فى شكل (٢)

د(٢^{-}) = ٣

د(٢^{+}) = ٢

∵ د(٢^{-}) ≠ د(٢^{+})

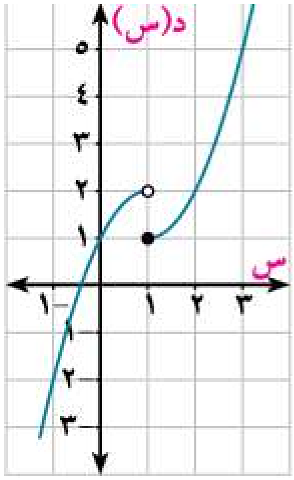


شكل (٢)

نهـــا د(س) غير موجودة
س ⟵ ٢

PDF Editor Pro

تدريب (١) في الشكل المقابل اكمل :



(١) $د(١^{-}) =$ ....

(٢) $د(١^{+}) =$ ....

(٣) $\underset{س \to ١}{نهـا}\ د(س) =$ ....

مثال (٢): ابحث وجود نهاية الدالة : $د(س) = \begin{cases} س^{٢} & س < ٢ \\ ٢\,س & س > ٢ \end{cases}$

عندما $س \longrightarrow ٢$

الحل:

$د(٢^{-}) = ٢^{٢} = ٤$ ، $د(٢^{+}) = ٢ \times ٢ = ٤$

$\because د(٢^{-}) = د(٢^{+}) = ٤$ $\therefore \underset{س \to ٢}{نهـا}\ د(س) = ٤$

تدريب (٢): ابحث وجود نهاية الدالة : $د(س) = \begin{cases} س^{٣} & س < ١ \\ ٢\,س - ١ & س > ١ \end{cases}$

عندما $س \longrightarrow ١$

مثال (٣): ابحث وجود نهاية الدالة : $د(س) = \begin{cases} ٣\,س + ١ & س < ٠ \\ س^{٢} + ٢ & س > ٠ \end{cases}$

عندما $س \longrightarrow ٠$

PDF Editor Pro

الحل:

د(٠$^-$) = ٣ × ٠ +١ = ١ ، د(٠$^+$) = ٠+ ٢ = ٢

∵ د(٠$^-$) د(٠$^+$) ∴ نهـا د(س) غير موجودة
س ← ٠

تدريب (٣):

ابحث وجود نهاية الدالة : د(س) = { ٥ ، س < ٠ ؛ س+٥ ، س ≥ ٠ }

عندما س ← ٠

مثال (٤):

أوجد قيمة ك التي تجعل للدالة د(س) نهاية عندما س ← ٣ حيث:

د (س) = { ٢ س + ك ، س < ٣ ؛ س^2 +٢ ، س ≥ ٣ }

الحل:

∵ د(س) لها نهاية عندما س ← ٣ ∴ د(٣$^-$) د(٣$^+$)

∴ ٢ × ٣ + ك = ٣^2 +٢ ← ك + ٦ =١١ ∴ ك = ٥

تدريب (٤): أوجد قيمة ك التي تجعل للدالة د(س) نهاية عندما س ← −١ حيث

د(س) = { س^2 + ك ، س ≥ −١ ؛ س +٤ ، س < −١ }

PDF Editor Pro

مثال (٥):

ابحث وجود نهاية الدالة : $\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{جا ٦س}}{\text{٢س}} & \text{س} < ٠ \\ ٣ & \text{س} \geq ٠ \end{cases}$

عندما س ⟵ ٠

الحل:

$\text{د}(٠^{+}) = \lim\limits_{\text{س} \to ٠^{+}} ٣ = ٣$ ، $\text{د}(٠^{-}) = \lim\limits_{\text{س} \to ٠^{-}} \dfrac{\text{جا ٦س}}{\text{٢س}} = ٣$

$\because \text{د}(٠^{-}) = \text{د}(٠^{+}) = ٣$

$\therefore \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \text{د(س)} = ٣$

تدريب (٥):

ابحث وجود نهاية الدالة : $\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{ظا ٤س}}{\text{٢س}} & \text{س} < ٠ \\ ٣ & \text{س} \geq ٠ \end{cases}$

عندما س ⟵ ٠

حلول التدريبات

تدريب (١)

(١) ٢ ، (٢) ١ ، (٣) غير موجودة

تدريب (٢): $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \text{د(س)} = ١$

تدريب (٣): $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \text{د(س)} = ٥$

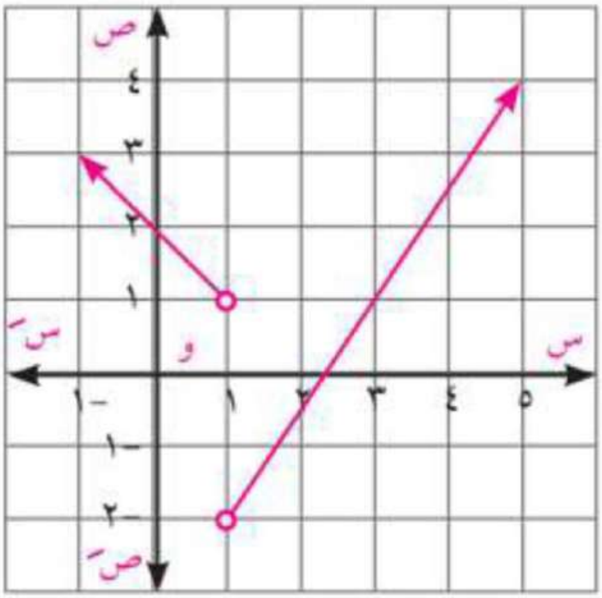
تدريب (٤): ك = ٢

تدريب (٥): $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \text{د(س)}$ غير موجودة

PDF Editor Pro

تمارين على الدرس الخامس

اختر الاجابة الصحيحة



الشكل المقابل يوضح الشكل البياني للدالة د

استعن بالشكل في الاجابة عن الأسئلة من ١ : ٣

١) $\lim\limits_{\text{س} \to ١^{+}}$ د(س) = ...

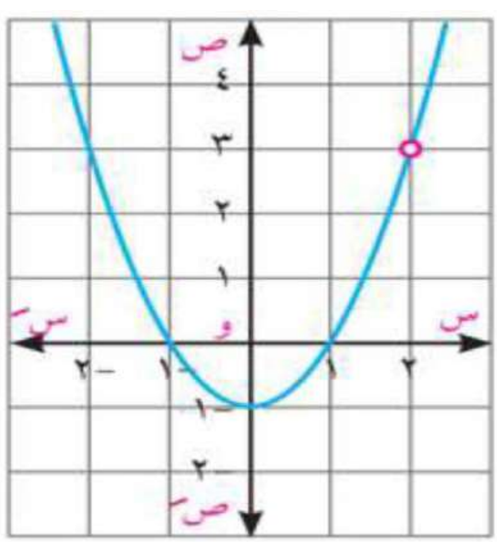
ⓐ ١ ⓑ - ٢
ⓒ صفر ⓓ غير موجودة

٢) $\lim\limits_{\text{س} \to ١^{-}}$ د(س) = ...

ⓐ ١ ⓑ - ٢
ⓒ صفر ⓓ غير موجودة

٣) $\lim\limits_{\text{س} \to ١}$ د(س) = ...

ⓐ ١ ⓑ - ٢ ⓒ صفر ⓓ غير موجودة



الشكل المقابل يوضح الشكل البياني للدالة د

استعن بالشكل في الاجابة عن الأسئلة من ٤ : ٥

٤) د(٢) = ...

ⓐ ٣ ⓑ صفر
ⓒ غيرمعينة ⓓ غير موجودة

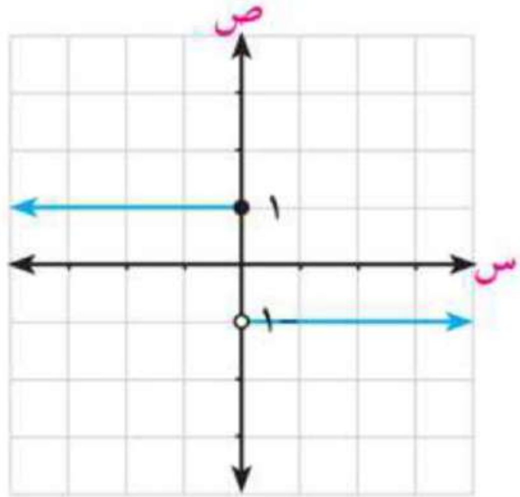
٥) $\lim\limits_{\text{س} \to ٢}$ د(س) = ...

ⓐ ٣ ⓑ صفر
ⓒ غيرمعينة ⓓ غير موجودة

PDF Editor Pro

الشكل المقابل يوضح الشكل البياني للدالة د

استعن بالشكل في الاجابة عن الأسئلة من ٦ : ٩



٦) د(٠) = ...

(أ) ١ (ب) صفر

(ج) ـ ١ (د) غير موجودة

٧) د(٠^+) = ...

(أ) ١ (ب) صفر

(ج) ـ ١ (د) غير موجودة

٨) د(٠^-) = ...

(أ) ١ (ب) صفر (ج) ـ ١ (د) غير موجودة

٩) نهـــا د (س) = ... (س ← ٠)

(أ) ١ (ب) صفر (ج) ـ ١ (د) غير موجودة

١٠) نهـــا $\sqrt{\text{س} - ٤}$ = ... (س ← ٤)

(أ) صفر (ب) ٢ (ج) ـ ٢ (د) غير موجودة

١١) نهـــا $\frac{\text{س}}{|\text{س}|}$ = ... (س ← ٠)

(أ) ١ (ب) صفر (ج) ـ ١ (د) غير موجودة

١٢) نهـــا $\sqrt{|\text{س}|}$ = ... (س ← ٠)

(أ) ١ (ب) صفر (ج) ـ ١ (د) غير موجودة

PDF Editor Pro

١٣) **إذا كانت د دالة :**

$$د(س) = \begin{cases} \dfrac{جاس}{س\ جتا\ س} & : س \neq ٠ \\ ٣ & : س = ٠ \end{cases}$$

فإن $\lim\limits_{س \to ٠}$ د (س) =............

(أ) ١ (ب) صفر (ج) ٣ (د) غير موجودة

١٤) **إذا كانت د دالة :**

$$د(س) = \begin{cases} ٣س - ١ & : س > ١ \\ س^٢ + ١ & : س < ١ \end{cases}$$

فإن $\lim\limits_{س \to ١}$ د (س) =............

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) غير موجودة

١٥) **إذا كانت د دالة :**

$$د(س) = \begin{cases} \dfrac{س^٢ - ١}{س - ١} & : س < ١ \\ ك & : س > ١ \end{cases}$$

وكان $\lim\limits_{س \to ١}$ د (س) موجودة فإن ك =....

(أ) ١ (ب) صفر (ج) ٢ (د) ـ ١

PDF Editor Pro

حلول تمارين الدرس الخامس

١) ب	٢) أ	٣) د	٤) ج	٥) أ
٦) أ	٧) ج	٨) أ	٩) د	١٠) د
١١) د	١٢) ب	١٣) د	١٤) ب	١٥) ج

الدرس الثاني: قانون (قاعدة) جيب التمام

سوف نتعلم :(١) قانون أو قاعدة جيب التمام لأي مثلث

(٢) استخدام قاعدة جيب التمام في حل المثلث

قانون (قاعدة) جيب التمام :

في أي مثلث أ ب جـ يكون :

$$\text{أَ}^2 = \text{بَ}^2 + \text{جَ}^2 - 2\,\text{بَ}\,\text{جَ}\,\text{جتا أ}$$

$$\text{بَ}^2 = \text{جَ}^2 + \text{أَ}^2 - 2\,\text{جَ}\,\text{أَ}\,\text{جتا ب}$$

$$\text{جَ}^2 = \text{أَ}^2 + \text{بَ}^2 - 2\,\text{أَ}\,\text{بَ}\,\text{جتا جـ}$$

ومنها :

$$\text{جتا أ} = \frac{\text{بَ}^2 + \text{جَ}^2 - \text{أَ}^2}{2\,\text{بَ}\,\text{جَ}} \quad ، \quad \text{جتا ب} = \frac{\text{جَ}^2 + \text{أَ}^2 - \text{بَ}^2}{2\,\text{جَ}\,\text{أَ}} \quad ، \quad \text{جتا جـ} = \frac{\text{أَ}^2 + \text{بَ}^2 - \text{جَ}^2}{2\,\text{أَ}\,\text{بَ}}$$

أمثلة محلولة

مثال (١):

أوجد قياس أكبر زاوية في المثلث أ ب جـ حيث $\text{أَ} = 3$ سم ، $\text{بَ} = 5$ سم ، $\text{جَ} = 7$ سم

الحل :

∵ أكبر زاوية في المثلث في القياس تقابل أكبر ضلع في الطول من أضلاع المثلث .

∵ $\text{جَ} > \text{بَ} > \text{أَ}$ ∴ $\angle$ جـ هي أكبر زوايا المثلث في القياس

$$\text{جتا جـ} = \frac{\text{أَ}^2 + \text{بَ}^2 - \text{جَ}^2}{2\,\text{أَ}\,\text{بَ}} = \frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2 \times 3 \times 5} = -\frac{1}{2}$$

∴ $\text{ق}(\angle \text{جـ}) = 120^\circ$

PDF Editor Pro

تدريب (١)

أ ب جـ مثلث فيه أ = ١٢سم ، ب = ٢٠سم ، جـ = ٢٦سم أوجد قياس أصغر زاوية في المثلث.

مثال (٢):

أ ب جـ مثلث فيه أ = ٢٠ سم ، ب = ١٥سم ، ق (∠ جـ) = ٦٠° احسب جـ

الحل:

جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ - ٢ أ ب جتا جـ

= ٢٠^٢ + ١٥^٢ - ٢ × ٢٠ × ١٥ جتا ٦٠° = ٣٢٥

∴ جـ = ٥ √١٣ سم

تدريب (٢)

أ ب جـ مثلث فيه أ = ٨ سم ، جـ = ٦سم ، ق (∠ ب) = ٦٠° احسب ب

PDF Editor Pro

استخدام قانون جيب التمام في حل المثلث

أولا: حل المثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما

مثال (٣)

حل المثلث أ ب جـ الذي فيه: أ = ١١ سم ، ب = ٥سم ، ق (∠ جـ) = ٢٠°

الحل:

جـ² = أ² + ب² − ٢ أ ب جتا جـ

= ١١² + ٥² − ٢ × ١١ × ٥ جتا ٢٠° = ٤٢,٦٣ ∴ جـ = ٦,٥٢٩ سم

∵ جتا أ = $\frac{\text{ب}^2 + \text{جـ}^2 - \text{أ}^2}{2\,\text{ب}\,\text{جـ}}$ = (٥)² + ٦,٥٢٩ ... = −٠,٨١٧

ق (∠ أ) = ١٤٤° ٤٩'

ق (∠ ب) = ١٨٠° − (١٤٤° ٤٩' + ٢٠°) = ١٥° ١١'

تدريب (٣)

حل المثلث أ ب جـ الذي فيه: أ = ٢٤,٦ سم ، جـ = ١٤,٢سم ، ق (∠ ب) = ١٨° ٤٢'

ثانيا: حل المثلث بمعلومية أطوال أضلاعه الثلاثة:

مثال (٤) حل المثلث أ ب جـ الذي فيه أً = ٤سم ، بً = ٤ $\sqrt{٣}$ سم ، جـً = ٨سم

الحل:

∵ جتا أ = $\dfrac{\text{بً}^٢ + \text{جـً}^٢ - \text{أً}^٢}{٢\,\text{بً}\,\text{جـً}} = \dfrac{(٤\sqrt{٣})^٢ + (٨)^٢ - (٤)^٢}{٢ \times ٤\sqrt{٣} \times ٨} = \dfrac{\sqrt{٣}}{٢}$

ق (∠ أ) = ٣٠°

∵ جتا ب = $\dfrac{\text{جـً}^٢ + \text{أً}^٢ - \text{بً}^٢}{٢\,\text{جـً}\,\text{أً}} = \dfrac{(٨)^٢ + (٤)^٢ - (٤\sqrt{٣})^٢}{٢ \times ٨ \times ٤} = \dfrac{١}{٢}$

ق (∠ ب) = ٦٠° ∴ ق (∠ جـ) = ١٨٠° - (٦٠° + ٣٠°) = ٩٠°

تدريب (٤)

حل المثلث أ ب جـ الذي فيه أً = ١٢,٢سم ، بً = ١٨,٤ سم ، جـً = ٢١,١سم

الحالة المبهمه لحل المثلث باستخدام قاعدة جيب التمام

مثال (٥)

حل المثلث أ ب جـ الذي فيه أً = ٦ سم ، بً = ٧سم ، ق(∠ أ) = ٣٠°

الحل:

أً^{٢} = بً^{٢} + جـً^{٢} - ٢ بً جـً جتا أ

٦^٢ = ٧^٢ + جـً^{٢} - ٢ × ٧ × جـً جتا ٣٠°

∴ جـً^{٢} - ٧ $\sqrt{٣}$ جـً + ١٣ = ٠ (باستخدام القانون العام لحل المعادلة التربيعية)

∴ جـً = ١٠,٩٣٥ سم أو ١,١٨٨ سم

كل قيمة موجبة لـ جـً تقابل مثلث واحد

∴ يوجد مثلثان (حلان) يحققان الشروط السابقة .

PDF Editor Pro

الحل الأول

عندما جـ = ١٠,٩٣٥ سم

جتا ب = $\frac{(١٠,٩٣٥)^٢ + (٦)^٢ - (٧)^٢}{٢(١٠,٩٣٥)(٦)}$ = ٠,٨١٢

∴ ق (∠ب) = ٣٦ً ٤َ ٣٥°

ق (∠ب) = ١٨٠° − (٣٠ + ٣٦ً ٤َ ٣٥°) = ٥٠ً ١٨َ ١١٤°

الحل الثاني

عندما جـ = ١,١٨٨ سم

جتا ب = $\frac{(١,١٨٨)^٢ + (٦)^٢ - (٧)^٢}{٢(١,١٨٨)(٦)}$ = −٠,٨١٢ ∴ ق (∠ب) = ٥٠ً ١٨َ ١٤٤°

∴ ق (∠جـ) = ١٨٠° − (٣٠ + ٥٠ً ١٨َ ١٤٤°) = ٦ً ٤١َ ٥°

تدريب (٥)

حل المثلث ا ب جـ الذي فيه ا = ٨ سم ، ب = ١٠سم ، ق(∠ا) = ٤٢°

مثال (٦):

فى الشكل المقابل : أ ب جـ د متوازى أضلاع فيه :

ق(∠ أ ب د)=٨٠° ، ب د = ٧سم ، أ ب = ٥سم

أوجد محيط متوازى الاضلاع لأقرب سم .

الحل

فى المثلث أ ب د :

(أ د)² = (أ ب)² + (ب د)² −٢ أ ب × ب د جتا د

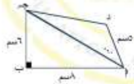
= ٥² + ٧² −٢ × ٥ × ٧ جتا ٨٠°

أ د = ٧,٩سم

∴ محيط متوازى الاضلاع = ٢ (أ د + أ ب)

= ٢ (٧,٩ + ٥) = ٢٦سم

تدريب (٦)



فى الشكل المقابل : أ ب جـ د شكل رباعى فيه :

ق(∠ جـ أ د)=٦٠° ، ق(∠ أ ب جـ)=٩٠° ،

أ د = ٥سم ، أ ب = ٨سم ، ب جـ = ٦ سم

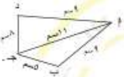
أوجد محيط الشكل أ ب جـ د لأقرب سم .

PDF Editor Pro

مثال (٧)

أب جـ د شكل رباعي فيه : أب = ٩سم ، ب جـ = ٥سم ، جـ د = ٨سم ، أ د = ٩سم ، أجـ = ١١ سم ، أثبت أن الشكل أب جـ د شكل رباعي دائري .

الحل



فى المثلث أ جـ د

جتا د = $\frac{٩^٢ + ٨^٢ - ١١^٢}{٢ \times ٩ \times ٨} = \frac{١}{٦}$

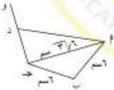
فى المثلث أب جـ

جتا ب = $\frac{٩^٢ + ٥^٢ - ١١^٢}{٢ \times ٩ \times ٥} = \frac{-١}{٦}$

∵ جتا د = - جتا ب   ∴ ق (∠ ب) + ق (∠ د) = ١٨٠°

∴ الشكل أب جـ د شكل رباعي دائرى

تدريب (٧)



فى الشكل المقابل : اذا كان أب جـ د شكل رباعي دائرى فيه،

أ جـ = $٦\sqrt{٣}$ سم ، أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٦ سم

أوجد : ق (∠ أ د و)

PDF Editor Pro

حلول التدريبات :

(١) ق (∠ أ) = ٢٤° ٢٠َ ٢٦ً

(٢) بَ = ٧,٢سم

(٣) بَ = ١٧سم ، ق (∠ جـ) = ٣٠° ٦ َ ٢٤ً ، ق (∠ أ) = ١٠٣° ٣٥ َ ٣٠ً

(٤) ق (∠ أ) = ٤٠° ٧ َ ٢٩ً ، ق (∠ ب) = ٦٠° ١٤ َ ٥١ً

ق (∠ جـ) = ٧٩° ٣٨ َ ٢٦ً

(٥) أولاً : جَ = ١٢سم ، ق (∠ ب) = ٤٦° ٥٥ ، ق (∠ جـ) = ٨٢° ١٣ َ ٥٩ً

ثانياً: جَ = ٣سم ، ق (∠ ب) = ١٢٤° ١٣ َ ٤٣ً ، ق (∠ جـ) = ١٣° ٤٦ َ ١٧ً

(٦) محيط الشكل أ ب جـ د = ٢٤,٧ سم

(٧) ق (∠ أ د و) = ١٢٠°

تمارين على قانون (قاعدة) جيب التمام

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) في المثلث ٵ ب جـ إذا كان : ٵ = ٥سم ، بَ = ٧سم ، جَ = ٨سم فإن ق(∠ ب) = ...

(أ) ٧٠° (ب) ٨٠° (جـ) ٧٥° (د) ٦٠°

(٢) في المثلث ٵ ب جـ إذا كان : ٵ = ٣سم ، بَ = ٥سم ، ق(∠ ب) = ١٢٠° فإن جـَ = ... سم

(أ) ٥ (ب) ٩ (جـ) ١٠ (د) ٢

(٣) في المثلث س ص ع يكون صَ٢ + عَ٢ − سَ٢ = ٢صَ عَ × ....

(أ) جتاس (ب) جاع (جـ) جتاع (د) جاس

(٤) في أي مثلث ل م ن يكون المقدار $\frac{م^٢ + ن^٢ - ل^٢}{٢ م ن}$ مساويا : ....

(أ) جتام (ب) جان (جـ) جتال (د) جام

أجب على الأسئلة الآتية:

(٥) مثلث أطوال أضلاعه ١٧، ١٣، ١٥ من السنتيمترات أوجد قياس أكبر زاوية في المثلث .

(٦) ٵ ب جـ د متوازي أضلاع فيه ٵ ب = ٩سم ، ب جـ = ١٣سم ، ٵ جـ = ٢٠سم ، أوجد طول $\overline{ب د}$

(٧) ٵ ب جـ مثلث محيطه ٧٠سم ، ٵ = ٢٦سم ، ق(∠ ب) = ٦٠° ، أوجد مساحة سطحه

PDF Editor Pro

حلول التمارين: (١) د (٢) د (٣) أ (٤) جـ

(٥) ق (∠ ب) = ٥٣° ٢٢' ٤٧"

(٦) ب د = ١٠سم

(٧) مساحة المثلث = ٢٢٨٫٥سم^2