جبر تانية ثانوى

ترم أول

01558319227
الإستاذ
محمد جابر

الدوال الحقيقة

امتى العلاقة بتكون دالة ؟!

① علاقات جبرية

لو أس الصاد فردى	لو أس الصاد زوجى
دالة	ليست دالة
• ص = سٔ + ٥ • ص=٢	• صٔ = سٔ + ٥ • س=٢

② رسمة بيانية

الخط الرأسى يقطع المنحنى فى نقطة	الخط الرأسى يقطع المنحنى فى نقطتين
دالة	ليست دالة

عافر حلمك يستاهل

• المجال هو قيم س اللى ينفع تعوض بيها وتفضل الدالة معرفه

مجال الدوال

كثيرة الحدود	مفيش جذر ، مفيش كسر ، مفيش س فى المقام — المجال = ح
كسرية	(بسط / مقام) — المقام = صفر — ح - { اصفار المقام }
جذرية زوجية	[√ ، √ ، √ ، ....) — فى البسط : ما تحت الجذر ≥ ٠ — فى المقام : ما تحت الجذر > ٠
جذرية فردية	[∛ ، ∛ ، ∛ ، ....) — فى البسط : المجال = ح — فى المقام : ح - { اصفار المقام }
معرفة على اكثر من قاعدة	طلها على خط الأعداد وجيب الإتحاد

ليس هناك تحدٍ اكبر من تحسين ذاتك وتطويرها

تركيبات مهمة اوووى

① اذا كانت دالة ح⁺ ← ح ، د(س) = ٥ سٔ - ٣

المجال ← لو معطى مجال : نلتزم باللى معانا

② مجموع مربعين [سٔ + عدد] المجال دائما = ح

← لوحدة ← تحت الكسر ← تحت الجذر ← فى الشارع

أمثلة

• د(س)= سٔ + ٩	• د(س)= √(سٔ + ٩)
• د(س)= ١ / (سٔ + ٩)	• د(س)= ١ / √(سٔ + ٩)

(المجال ، المدى ، الاطراد) ← بيانيا

① المجال : بص على محور السين من الشمال لليمين

② الاطراد : بص على محور السين من الشمال لليمين وفترات الاطراد ديما مفتوحه

③ المـدى : بص على محور الصاد من تحت لفوق

العمليات على الدوال

جمع دالتين	طرح دالتين	ضرب دالتين	قسمة دالتين
(د + ر) س = د(س) + ر(س)	(د - ر) س = د(س) - ر(س)	(د . ر) س = د(س) . ر(س)	(د / ر) س = د(س) / ر(س)

① هات المجالين ← م١ ، م٢

② هات تقاطع الاتنين ← م١ ∩ م٢

③ م١ ∩ م٢ - { اصفار المقام }

بنزود خطوه تالته

ملاحظات هامة يهندسة

① ح⁺ =] ٠ ، ∞ [ح⁻ =] -∞ ، ٠ [

② ح فترة = فترة (التقاطع ديما بيكون الحاجه الصغيرة)

③ ح - {أ} ح - {ب} = ح - { أ ، ب }

④ (د+ر)(د-ر)(د.ب) (١) ← لو العدد لا ينتمي للمجال ← غير معرف

تركيب دالتين

• (د ○ ر) = د [ر (س)] ← د تركيب ر

• (ر ○ د) = د [ر (س)] ← ر تركيب د

لاحظ أن : (د ○ ر) س ≠ (ر ○ د) س

مثال للتوضيح

اذا كان : د(س) = ٢ س + ١ ، ر(س) = (سٔ - ٣) / ٢

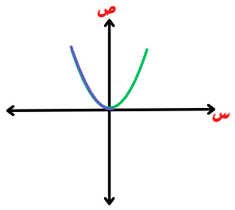
(د ○ ر)س = ٢ (سٔ - ٣) + ١ = ٢ سٔ - ٦ + ١ = ٢ سٔ - ٥

الخلاصة دائرة على الاولى وخط على التانيه وحط الخط مكان الدائرة

خواص الدوال

الدوال الزوجية	الدوال الفردية	دوال ليست زوجية وليست فردية
د(- س) = د(س)	د(- س) = - د(س)	د(- س) ≠ د(س) ، د(- س) ≠ - د(س)

• اولاً الدوال الزوجية



① د(س) = س عدد زوجى

② د(س) = جتا س

③ د(س) = | س |

④ د(س) = عدد

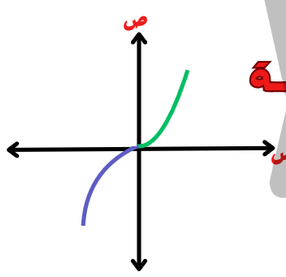
• طيب يا هندسة لو معاك دالة زوجية هتستنتج اى

← متماثلة حول محور الصادرات (معادلته : س = ٠)

← لو عندك نقطة (أ،ب) يبقى فيه نقطه كمان (- أ ، ب)

← بتاكل السالب اللى جوه القوس

• ثانياً الدوال الفردية



① د (س) = س عدد فردي

② د (س) = جا س

③ د (س) = ظا س

تصرف كما أنه من المستحيل أن تفشل

• لو معاك دالة فردية هتستنتج اى

متماثلة حول نقطة الاصل (٠،٠)	(أ ، ب) (- أ ، - ب)	بتطرد السالب برة القوس

ملحوظة مهمة اووووى

مجال الدالة [الزوجية ، الفردية] ← فترة متماثلة : بداية = -نهاية

← زى [- أ ، أ] ، [-٣ ، ٣] ، [- ∞ ، ∞] وهكذا...

• اذا كانت د دالة زوجية فى الفترة [أ ، ب] فإن ← أ = -ب ، ب = -أ

ازاى تحل المسائل من غير خطوات

① زوجية ± زوجية = زوجية
② فردية ± فردية = فردية
③ زوجية ± فردية = ليست زوجية وليست فردية
④ زوجية × زوجية = زوجية
⑤ فردية × فردية = زوجية
⑥ زوجية × فردية = زوجية

أمثلة

د : دالة فردية فإن : د (أ) + د (- أ) = ...
بتطرد السالب برة القوس ← د (أ) - د (أ) = صفر

د : دالة زوجية فإن : د (أ) + د (- أ) = ...
بتاكل السالب اللى جوه القوس ← د (أ) + د (أ) = ٢ د (أ)

د (س) = ٥ س متماثلة حول .....
دالة فردية ← متماثلة حول نقطة الاصل (٠،٠)

د : دالة هيث د :] - ٥ ، ٥ [← ع ، د (س) = س٢ فإن د(س) تكون
ليست زوجية وليست فردية (الفترة غير متماثلة)

الدالة الأحادية

• طريقتين تعرف بيهم الدالة الأحادية

جبريا نفرض : د(أ) = د(ب) ← لو : أ = ب ← أحادية ، لو : أ ≠ ب ← ليست أحادية

بيانيا إختيار الخط الافقى

ملاحظات

• اى دالة زوجية ← ليست أحادية
• اى دالة فردية ← قد تكون أحادية ام لا
• اذا كانت الدالة فى تزايد مستمر أو تناقص مستمر ← تكون أحادية

الصور الأساسية لبعض الدوال

① الدالة الثابتة د(س) = عدد
مدى = { عدد } ، مجال = ح
• زوجية • ليست أحادية • ثابتة على مجالها
• متماثل حول محور الصادرات (س = ٠)

② الدالة خطية د(س) = س
مدى = ح ، مجال = ح
• فردية • أحادية • تزايدية على مجالها
• متماثل حول نقطة الأصل (٠،٠)

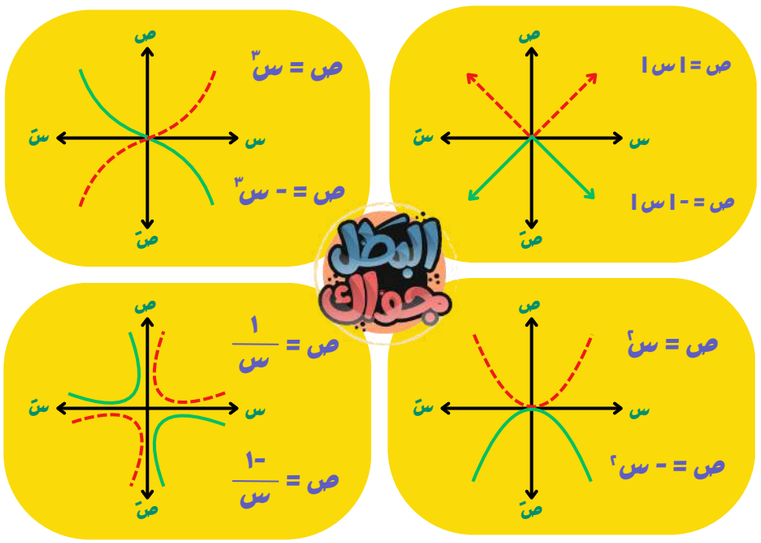
③ الدالة التربيعية د(س) = س٢
مدى = [٠ ، ∞ [، مجال = ح
• متماثل حول محور الصادات (س = ٠)
• زوجية • ليست أحادية
تناقصية فى] - ∞ ، ٠]
تزايدية فى [٠ ، ∞ [

④ الدالة التكعيبية د(س) = س٣
مدى = ح ، مجال = ح
• فردية • أحادية • تزايدية على مجالها
• متماثل حول نقطة الأصل (٠،٠)

⑤ الدالة القيمة المطلقة (المقياس) د(س) = | س |
مدى = [٠ ، ∞ [، مجال = ح
• متماثل حول محور الصادات (س = ٠)
• زوجية • ليست أحادية
تناقصية فى] - ∞ ، ٠]
تزايدية فى [٠ ، ∞ [

⑥ الدالة الكسرية د(س) = ١/س
مدى = ح - {٠} ، مجال = ح - {٠}
• متماثل حول نقطة الأصل (٠،٠)
• فردية • أحادية
تناقصية فى] - ∞ ، ٠ [
تناقصية فى] ٠ ، ∞ [

التحويلات الهندسية



• نقطة رأس المنحنى (س،ص) ← غير جوه وسبب بره كما هو

الدالة التربيعية

د(س) = (س + أ)٢ + ب
مقدار الازاحة الأفقية = | -أ | ، مقدار الازاحة الرأسية = | ب |
موجب ← وس ، سالب ← وس ، سالب ← وص ، موجب ← وص
نقطة رأس المنحنى = (-أ ، ب)

أمثلة

• د(س) = (س + ٢)٢ + ١
نقطة رأس المنحنى = (-٢ ، ١)
← إزاحة أفقية مقدارها ٢ فى إتجاه وس
← إزاحة رأسية مقدارها ١ فى إتجاه وص

• د(س) = - (س + ١)٢ + ٢
نقطة رأس المنحنى = (-١ ، ٢)
← إزاحة أفقية مقدارها ١ فى إتجاه وس
← إزاحة رأسية مقدارها ٢ فى إتجاه وص

ملحوظة هامة جدا

• لو عندك دالة تربيعية أو دالة مقياس ← غير الإشارات جوه براحتك

مثال
(-س + ١)٢ = (س - ١)٢
| -س + ١ | = | س - ١ |

جبر تانية ثانوى

تـــرم أول

01558319227
الإستاذ
محمـــد جابـــر

• لو الدالة اللى معاك هى : س^{2} + ٤س + ١

هنجيب نقطة رأس المنحنى من خلال (س ، ص)

س = $\frac{-ب}{2أ}$ = $\frac{-٤}{1×2}$ = -٢

هانت يا صديقى

ص = د ($\frac{-ب}{2أ}$) = د (-٢) = (-٢)^{2} + ٤ (-٢) + ١ = -٣

∴ النقطة هى (-٢ , -٣) لاعلى

نفس الكلام ينطبق على التكعيبية والمقياس

الدالة الكسرية

د (س) = $\frac{1}{س + أ}$ + ب ∴ نقطة رأس المنحنى هى (-أ ، ب)

المجال = ح - {س} المدى = ح - {ص}

خد بالك يهندسة

مسائل امتحان من الاخر
دوال كسرية

كسرية قياسية	كسرية يمكن اختصارها	كسرية لا يمكن اختصارها
د(س) = $\frac{1}{س+1}$ + ٢	د(س) = $\frac{س+1}{س}$	د(س) = $\frac{(س-٥)(س-٣)}{(س-٢)(س-١)}$
∴ (-١ , ٢)	= $\frac{س}{س}$ + $\frac{1}{س}$	د(س) = $\frac{(-٥)-(-٦)}{س-٢}$ + ٣
مجال = ح - { -١ }	= ١ + $\frac{1}{س}$	= $\frac{1}{س-٢}$ + ٣
مدى = ح - { ٢ }	∴ (١ , ٠)	∴ (٣ , ٢)
	مجال = ح - { ٠ }	مجال = ح - { ٢ }
	مدى = ح - { ١ }	مدى = ح - { ٣ }

لو البسط ماجبة واحدة وزع البسط عليها

ملحوظة هامة

$\sqrt{\text{مربع كامل}}$ = | دالة مقياس |

د(س) = $\sqrt{س^{2} - ٨س + ١٦}$ = | س - ٤ |

صفر الاول صفر التالت

اشارة الوسط

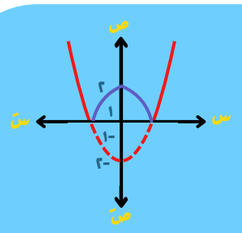
ركز فى حالات الخاصة دى

①	②	③
دالة تربيعية داخل مقياس	دالة تكعيبية داخل مقياس	دالة كسرية داخل مقياس

← ارسم الدالة ← أعكسها لأعلى ← لو قدام المقياس (+)

← ارسم الدالة ← أعكسها لأسفل ← لو قدام المقياس (-)

• د(س) = | س^{2} - ٢ | س^{2} - ٢ ← (٠ ، -٢)

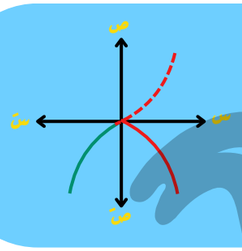


انعكاس لأعلى ← علشان إشارة المقياس (+)

مدى = [٠ ، ∞ [

مجال = ح زوجية ـ ليست أحادية

• د(س) = | س^{3} | س^{3} ← (٠ ، ٠)



مدى =] -∞ ، ٠]

مجال = ح زوجية ـ ليست أحادية

تزايدية] -∞ ، ٠] تناقصية [٠ ، ∞ [

حل معادلات القيمة المطلقة

• بعض الخواص الهامة

① | أ - س | = | س - أ |

② أ^{2} = | أ |^{2}

③ | أ | = أ

④ | س | = س ∴ س ∈ [٠ ، ∞ [

⑤ | س | = -س ∴ س ∈] -∞ ، ٠]

حالات المقياس

مقياس = عدد موجب	مقياس = مقياس	مقياس = اى حاجه تانيه
∴ ما بداخل المقياس = ± (عدد)	∴ نحرف المقياس ونربع الطرفين	| س + أ | = س + ب
ملحوظة	| ٣س+٧ | = | ٢س+٣ |	س ≤ -أ : س + أ = س + ب
مقياس = عدد سالب	بتربيع الطرفين	س > -أ : س + أ = -(س + ب)
م.ح = ∅	(٣س+٧)^{2} = (٢س+٣)^{2}	| س + ٢ | = س + ٤
• | س - ٤ | + ٢ = ٠	ثم أكمل	س ≤ ٢ : س + ٢ = س + ٤ ، -٢ = ٤ (مرفوض) ∴ م.ح = { -١ }
| س - ٤ | = -٢		س > ٢ : س - ٢ = -(س + ٤) ، س - ٢ = -س - ٤ ، ٢س = -٢ ، س = -١ (تحقق)
م.ح = ∅		

متباينات القيمة المطلقة

| س | ≥ أ	| س | ≤ أ
(كرر ٣ مرات)	(كرر مرتين غير اخر هاجتين)
كرر المسألة من غير مقياس كرر العلامة الناهية الاخرى كرر العدد بعكس الإشارة	س ≤ أ ، س ≥ -أ ∴ م.ح = ح -] -أ ، أ [

-أ ≥ س ≥ أ

∴ م.ح = [-أ ، أ]

هانت

تركيزات مهمة

هذا الوقت سوف يمضى

| س | ≥ ٠ ← م.ح = ح	| س | > ٠ ← م.ح = ∅
| س | ≤ ٠ ← م.ح = ∅	| س | = ٠ ← م.ح = ٠
| س | < -١ ← م.ح = ∅	| س | ≥ -١ ← م.ح = ح
| س | > -١ ← م.ح = ح	

أمثلة هامة

\| س - ٣ \| > ٤

+٤ ، -٤ ، +٣ ، -٣

-٤ > س - ٣ > ٤

-٤ + ٣ > س > ٤ + ٣

-١ > س > ٧

∴ م.ح =] ٧ ، -١ [

$\sqrt{س^{2} - ٢س + ١}$ ≤ ٤

\| س - ١ \| ≤ ٤

س - ١ ≤ ٤	س - ١ ≥ -٤
س ≤ ٥	س ≤ -٣

∴ م.ح = [-٣ ، ٥]

جبر تانية ثانوى

تـــــرم أول

01558319227
الإستاذ
محمـــد جابـــر

الأسس الكسرية و المعادلات الأسية

الجذر النونى

• إذا كان: س^{ن} = أ حيث ن ∈ ص$^{+}$ ، أ ∈ ح

∴ عدد الجذور = ن جذراً

ولـــو

ن عدد زوجى ، أ عدد موجب	ن عدد زوجى ، أ عدد سالب	ن عدد فى س ، اى عدد ≠ ٠
(جذران حقيقيان + الباقى اعداد مركبه)	(كل الجذور مركبة غير حقيقية)	(جذر وحيد حقيقى + الباقى اعداد مركبة)

للتوضيح

س^{٤} = ٦٤

عدد الجذور = ٤	عدد الجذور الحقيقة = ٢	عدد الجذور المركبة= ٢

س^{٤} = -٦٤

عدد الجذور = ٤	عدد الجذور الحقيقة = صفر	عدد الجذور المركبة= ٤

س^{٣} = ٢٧

عدد الجذور = ٣	عدد الجذور الحقيقة = ١	عدد الجذور المركبة= ٢

ملحوظة

لو دليل الجذر عدد زوجى والاس الناتج عدد فردى نضع قيمة مطلقة للناتج

قلبوظة

للتوضيح

$\sqrt[3]{٨ أ^{٦} ب^{٩}} = \sqrt[3]{٨} \times \sqrt[3]{أ^{٦}} \times \sqrt[3]{ب^{٩}} = ٢ أ^{٢} ب^{٣}$

$\sqrt[4]{١٦ س^{٤} ص^{٨}} = \sqrt[4]{١٦} \times \sqrt[4]{س^{٤}} \times \sqrt[4]{ص^{٨}}$

$\sqrt[3]{١٦ أ^{١٢}} = ١٢ | أ^{٣} |$ = ١٢ | س | × ص^{٢}

علشان الدليل زوجى وناتج الاس فى س

حل المعادلات الأسية فى ح

• إذا كان: س$^{\frac{م}{ب}}$ = أ ، أ > ٠

س = أ$^{\frac{ن}{م}}$ ← س = ± أ$^{\frac{ن}{م}}$

م عدد فردى

م عدد زوجى

حتـــه تراكمـــى عالماشـــى

نضرب الأس: س$^{م ن}$

(س^{م})^{ن} على حسب احتياج المسألة

نبدل الأس: (س^{ن})^{م}

مثلا

٥ = ٢^{س} فإن : ٢٥^{س} تساوى

٢٥^{س} = (٥^{٢})^{س} = (٥^{س})^{٢} = (٢)^{٢} = ٤

بدلنا الأس — عوضنا

انت البطل

الدالة الأسية

هانت

• يكون الاساس عدد ∈ ح$^{+}$ - { ١ } والمجهول فى الأس

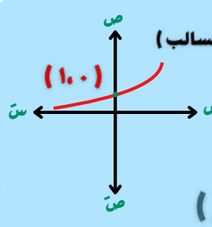
د(س) = أ^{س} بشرط أن : أ ∈ ح$^{+}$ - {١}

د(س) = ٢^{س}	الأساس = ٢	الاس =س
د(س) = ٥$^{س+١}$	الأساس = ٥	الاس =س+١
د(س) = ($\frac{١}{٣}$)^{٢س}	الأساس = $\frac{١}{٣}$	الاس = ٢س
د(س) = (-٣)^{س}	ليست أسية	
د(س) = (١)^{س}	ليست أسية	

الرســـــم البيانـــي

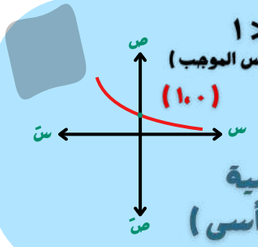
د(س) = أ^{س}

أ > ١ (تقترب من محور س السالب)



تزايدية (نمو أسى)

٠ < أ < ١ (تقترب من محور س الموجب)



تناقصية (تضاؤل أسى)

• مجال = ح • مدى = ح$^{+}$ =] ٠ ، ∞ [• أحادية

الدوال أ^{س} ، ($\frac{١}{أ}$)^{س} متماثلة بالانعكاس حول محور الصادات (س = ٠)

المعادلات الأسية

① أ^{ن} = ١	الاس = صفر	ن = صفر

الاس = ٠ ، ($\frac{١}{٢}$)$^{أ^{٢}-أ-٢}$ = ١ ، أ > ٠ فإن أ = ...

أ^{٢} - أ - ٢ = ٠

أ = ٢ ✓

أ = -١ مرفوض

مثلا

② أ^{م} = أ^{ن}	الاساس = الاساس	الاس = الاس	م = ن

٢$^{س+١}$ = ٤ ← ٢$^{س+١}$ = ٢^{٢}

س + ١ = ٢

س = ١ ✓

مثلا

③ • أ^{م} = ب^{م} • أ = ب الاس فردى

• أ = ± ب الاس زوجى. • أ ≠ ب. نضع م = ٠

٢ س$^{-٣}$ = ٥ س$^{-٣}$

∵ الاس = الاس

الاساس ≠ الاساس

∴ س - ٣ = ٠ س = ٣

س س$^{-٢}$ = ٤ س$^{-٢}$

∵ الاس = الاس ∵ الاساس = الاساس

∴ س + ٢ = ٠ س = -٢

∴ س^{٤} = ٤ ∴ س = ± ٤

الاس = زوجى

هذا الوقت سوف يمضى

الدالة العكسية

• شرط الدالة العكسية أن تكون أحادية

لذلك : الزوجية ← ليست أحادية ← ليست زوجية

ملاحظات هامة

1. مجال د هو مدى د$^{-١}$ ، مدى د هو مجال د$^{-١}$
2. الدالة " د " ودالتها العكسية د$^{-١}$ متماثلين حول المستقيم ص = س صورة النقطة (١،٢) بالانعكاس حول المستقيم ص=س هى (٢،١)
3. اذا تقاطع المنحنى د مع المنحنى د$^{-١}$ فى نقطة فإن الأحداثى السينانى = الأحداثى الصاداتى

الدالة اللوغاريتمية

ص = لو س ← جوه
تحت ← P

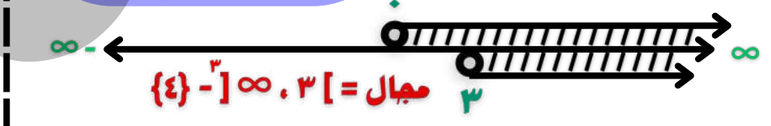
علشان تجيب المجال

اللى جوه بشرط
س > ٠

اللى تحت بشرطين
أ > ٠ أ ≠ ١

د(س) = لو (٤ - س)
٤
اللى جوه بشرط
٤ - س > ٠ ، -س > -٤
س < ٤] -∞ ، ٤ [

لو س
س-٣
اللى جوه بشرط
س > ٠] -∞ ، ٠ [
اللى تحت بشرطين
س -٣ > ٠ ، س -٣ ≠ ١
س < ٣ ، س ≠ ١+٣
] ∞ ، ٣ [س ≠ ٤



التمثيل البياني للعدالة اللوغاريتمية

د(س) = لو س
P
أ > ١
مجال = ع+
مدى = ع
تزايدية ع+

أ ≠ ١
٠ < أ < ١
مجال = ع+
مدى = ع
تناقصية على مجالها ع+

خد بالك

لوغاريتم معتاد هو لوغاريتم أساسى = ١٠ ولا تكتب
مثلا: لو٣ ، لو٥ ، لو١٠ ، لو س

لو س = لو ص ← س = ص
P P

التحويل من الدالة اللوغاريتمية للدالة الأسية

لو س = ص ↔ س = P^ص
P

اللى جـــوه = اللى تحت أس اللى بـــره

توضيح

لو س = -٤
٢
س = ٢^-٤ = ١/١٦
س = ١/١٦

لو لو لو (س+١) = ٠
٤ ٢ ٣
لو لو (س+١) = ٤^٠ = ١
٢ ٣
لو (س+١) = ٢^١ = ٢
٣
س+١ = ٣^٢ = ٩
س = ٨

ملاحظات

1. المنحنى يقطع محور السينات — نضع ص = ٠
2. المنحنى يقطع محور الصادات — نضع س = ٠
3. المنحنى يمر بالنقطة (أ ، ب) — س = أ ، ص = ب

مثال للتوضيح

منحنى الدالة د(س) = لو (٣-س) يقطع محور السينات فى النقطة (٢ ، ٠)
٢
لو (٣ - س) = ٠
٢
٣ - س = ٢^٠ = ١
س = ٢
ص = ٠
(٢ ، ٠)

عافـــر حلمـــك يستاهـــل

بعض خواص اللوغاريتمـــات

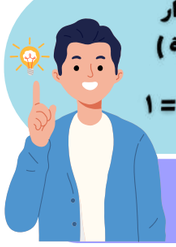
1. لو أ = ١ — لو ٥ = ١ — لو ١٠ = ١ — لو س = ١
   أ ٥ ١٠ س
2. لو ١ = صفر — لو ١ = صفر — لو ١ = صفر — لو ١ = صفر
   أ ٥ ١٠ س
3. لو س^ن = ن لو س
   أ أ
   الاس يترحلق بره معامل ، والمعامل يتشعبط بره أس
   ٢ لو ٧ = لو ٧^٢ = ٤٩ | لو ٥^٢ = ٢ لو ٥
4. لو س + لو ص = لو (س × ص)
   أ أ أ
   اللوغاريتمات المجموعة تحول للوغاريتم وحيد وتضرب اللى بعده
   لو ٥ = لو ٧ = لو (٥ × ٧) = لو ٣٥
   لو ٣ = لو ٤ = لو (٣ × ٤) = لو ١٢

لازم نفس الأساس من غير معاملات **خالى بالك**

5. لو س - لو ص = لو (س/ص)
   أ أ أ
   (اللوغاريتمات المطروحة تحول للوغاريتم وحيد ونقسم اللى بعده)

لازم نفس الأساس من غير معاملات **خالى بالك**

6. لو س = لو (س/ص)
   (تستخدم دائما لاختصار اللوغاريتمات المضروبة)
   لو أ × لو ب × لو جـ = لو ء = لو أ/لو أ × لو ب/لو ب × لو جـ/لو جـ × لو ء/لو أ = ١



7. لو س = لو (١/ص)
   ن أ

عند حل المعادلات اللوغاريتمية

1. لو س = لو ص ← س = ص
   أ أ
2. لو س^ن ← ن عدد زوجى = ٠
   أ
   لو الأس زوجى وهينزل معامل حط قيمة مطلقة تحتة
3. لما تحسب قيم س جربها فى المعادلة الأصلية اذا كانت تحقق أم لا

إيجاد نهاية الدالة بيانياً

أنواع الكميات

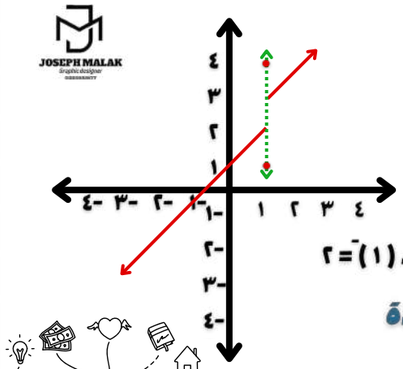
- **كمية معينة** (لها ناتج محدد) (صفر ، ٥ ، ٨/٣ ، ....)
- **كمية غير معرفة** (ليس لها معنى) (٥/٠ ، ٧/٠ ، عدد/٠ ، ....)
- **كمية غير معينة** (ليس لها ناتج محدد) (صفر/صفر ، ∞/∞ ، ∞ - ∞)

نهاية الدالة
القيمة التى تقترب منها الدالة من اليمين واليسار

ركز معايا
- د (أ) ← دالة (أ)
- د (أ)⁻ ← النهاية اليسرى (نهاد (س) ، س ← أ⁻)
- د (أ)⁺ ← النهاية اليمنى (نهاد (س) ، س ← أ⁺)

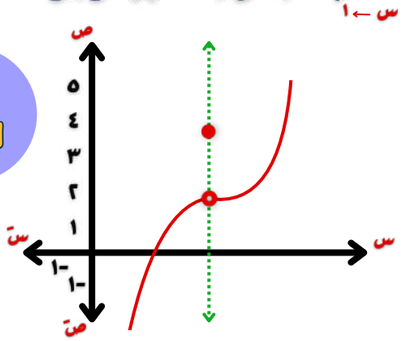
يقال للدالة أنها غير معروفة ، يقال للنهاية أنها غير موجودة

هنعمل خط كروكى عند ١
- الجزء الأيمن هيقطع الخط عند رقم ← د (أ)⁺
- الجزء الأيسر هيقطع الخط عند رقم ← د (أ)⁻



- د (١) = ٤ ، د (١)⁺ = ٣ ، د (١)⁻ = ٢

نهاد (س) = غير موجودة ، س ← ١



- د (٣) = ٤ ، د (٣)⁺ = ٢ ، د (٣)⁻ = ٢

نهاد (س) = ٢ ، س ← ٣

قد أقترب الحلم يا صديقى

ايجاد نهاية الدالة جبريا
ال π بعد [جا ، جتا ، ظا] نحط مكانها ١٨٠ وخلاف ذلك تفضل π

نهاد (ثابت) = ثابت ، س ← أ

خطوات إيجاد نهاية الدالة جبريا

التعويض المباشر

- **كمية معينة** المسألة خلصت
- **كمية غير معروفة** النهاية غير موجودة
- **كمية غير معينة** (صفر/صفر ، ∞/∞ ، ∞ - ∞)

يجب الحل مرة أخرى من خلال ← التحليل ، المرافق ، القسمة التركيبة ، نظرية ل

أمثلة للتوضيح

❶ نهاد $\sqrt{}$ ٤ - س² = ... ، عوض عن س = ٠
= $\sqrt{}$ ٤ - ٠ = $\sqrt{}$ ٤ = ٢

❷ نهاد طا س/س = ... ، عوض عن س = π/٤
= طا π/٤ ÷ π/٤ = ١ ÷ π/٤ = ٤/π

❸ نهاد (س² - ٥س + ٦)/(س - ٣) = ... ، عوض عن س = ٣
بعد التعويض المباشر = ÷ كمية غير معينة وهب تعينها
= نهاد (س - ٣)(س - ٢)/(س - ٣) = ...
= نهاد (س - ٢) = ٣ - ٢ = ١

❹ نهاد (٢س + س²)/(س + ٤س) = ... ، س ← ٠ ، تعديل المسألة أولا × س
= نهاد (٣س² + ٢)/(س² + ٤) ، س ← ٠ ، تعويض مباشر
= (٣(٠)² + ٢)/(٠ + ٤)² = ١/٢

❺ نهاد (س - ٩)/($\sqrt{}$ س - ٣) = ... ، عوض عن س = ٩ ، ليها ٣ حلول

تحليل
= نهاد (($\sqrt{}$ س - ٣)($\sqrt{}$ س + ٣))/($\sqrt{}$ س - ٣) ، س ← ٩
= نهاد ($\sqrt{}$ س + ٣) ، س ← ٩
= $\sqrt{}$ ٩ + ٣ = # ٦

ضرب × مرافق
= نهاد (س - ٩)/($\sqrt{}$ س - ٣) × ($\sqrt{}$ س + ٣)/($\sqrt{}$ س + ٣) ، س ← ٩
= نهاد (س - ٩)($\sqrt{}$ س + ٣)/(س - ٩) ، س ← ٩
= # $\sqrt{}$ س + ٣ = # ٦

نظرية ل
= نهاد (س - ٩)/($\sqrt{}$ س - ٩) ، س ← ٩
= ١/(١/٢) × ٩^(١/٢ - ١) = # ٦

متنساش

جا π	٠
جتا π	-١
ظا π	٠
π	١٨٠

ازاى نعرف مسائل الضرب × المرافق
[عندك جذر تربيعى فالبسط أو المقام أو الاتنين]

= نهاد ($\sqrt{}$ س + ١ - ١)/س × ($\sqrt{}$ س + ١ + ١)/($\sqrt{}$ س + ١ + ١) ، س ← ٠
= نهاد (س + ١ - ١)/(س($\sqrt{}$ س + ١ + ١)) ، س ← ٠
= نهاد ١/($\sqrt{}$ س + ١ + ١) = ١/٢

ازاى نحل مسائل القسمة التركيبية
❶ اكتب المعاملات بالترتيب
❷ اقسم على قيم س
❸ نزل أول معامل
❹ أضرب واجمع

أمثلة للتوضيح

نهاد (س² - ١٥ س - ٤)/(س - ٤) ، س ← ٤ = ...
= نهاد (س - ٤)(.....)/(س - ٤) ، س ← ٤
= نهاد (س - ٤)(س² + ٤س + ١)/س - ٤ ، س ← ٤
= نهاد (س² + ٤س + ١) = ١٦ + ١٦ + ١ = ٣٣ ، س ← ٤

	س³	س²	س	حد مطلق
	١	٠	-١٥	-٤
↓		٤	١٦	٤
	١	٤	١	٠

٤ | (س² + ٤س + ١)

نظريـــــة ل

نهاد (س^ن - أ^ن)/(س^م - أ^م) ، س ← أ = ن/م × أ^(ن-م)

نهاد (س + أ)^ن - أ^ن)/س ، س ← ٠ = ن × أ^(ن-١)

شروطها
- هدين/هدين ← متشابهين
- الإشارة (-) ، الأسس متساوية

ملاحظـــات هامـــة
اقسم اللى جوه على اللى بره

$\sqrt{}$ س ← س^(١/٢)
$\sqrt[٥]{}$ س³ ← س^(٣/٥)
$\sqrt[٥]{(س+٣)^٢}$ ← (س+٣)^(٢/٥)

أنـــواع المسائـــل

مسائل مباشرة
نهاد (س^٥ + ٣٢)/(س + ٢) ، س ← -٢ = ٠/٠
= نهاد (س^٥ - (-٢)^٥)/(س - (-٢)) ، س ← -٢
= نهاد ٥/١ × (-٢)^(٥-١) = ٨٠

مسائل تعديل النهاية
نهاد (س - ٥)^٧ - ١)/(س - ٦) ، س ← ٦
هنعدل النهاية ونخليها شبه القوس
نهاد (س - ٥)^٧ - ١^٧)/(س - ٥) - ١) ، س ← ٥ + ١
= ٧/١ × ١^٦ = ٧

مسائل تقسيم النهاية لنهايتين
عوض عن س = -٢ والقوس اللى يطلع صفر خده مع البسط

نهاد (س + ٣)^٥ - ١)/(س² - ٤) ، س ← -٢
نهاد (س + ٣)^٥ - ١)/((س - ٢)(س + ٢)) ، س ← -٢
= نهاد (س + ٣)^٥ - ١)/(س + ٢) × ١/س - ٢ ، س ← -٢
= نهاد (س + ٣)^٥ - ١)/(س + ٣ - ١) × ١/س - ٢ ، س + ٣ ← ١

إيجاد نهاية الدالة عند اللا نهاية

نها $\frac{1}{س^{ن}}$ = صفر ، س ← ∞

مسائل الكسور | مسائل الاقواس والجذور | مسائل على سطر واحد

مسائل الكسور

هنقسم البسط والمقام على اكبر أس فى المقام

① نها $\frac{٢س - ٥}{٣س + ٧}$ = نها $\frac{\frac{٥}{س} - ٢}{\frac{٧}{س} + ٣}$ = $\frac{٢}{٣}$ ، س ← ∞
لو درجة البسط = درجة المقام
معامل البسط / معامل المقام

② نها $\frac{٥س^{٧} + ٣س - ١}{٦س^{٤} + ١٣}$ = نها $\frac{٥س^{٧} + \frac{٣}{س^{٦}} - \frac{١}{س^{٧}}}{\frac{١٣}{س^{٤}} + ٦}$ = $\frac{٥(\infty)^{٣}}{٦}$ = ∞ ، س ← ∞
درجة البسط > درجة المقام
∞ ±

③ نها $\frac{٧س^{٢} + ١}{٤س^{٣} - ٨س + ١}$ = نها $\frac{\frac{٧}{س} + \frac{١}{س^{٣}}}{٤ - \frac{٨}{س^{٢}} + \frac{١}{س^{٣}}}$ = صفر ، س ← ∞
درجة البسط < درجة المقام
صفر

نهاية الدوال المثلثية

علمى فقط

① نها $\frac{جا أس}{ب س}$ = $\frac{أ}{ب}$ ، س ← ٠ حيث س بالقياس الدائرى

② نها $\frac{ظا أس}{ب س}$ = $\frac{أ}{ب}$ ، س ← ٠

③ نها $\frac{جا أس}{ظا ب س}$ = $\frac{أ}{ب}$ ، س ← ٠

قوانين "جتا"

① نها $\frac{١ - جتا س}{س}$ = صفر ، س ← ٠

② نها $\frac{١ - جتا س}{س^{٢}}$ = $\frac{١}{٢}$ ، س ← ٠

خلاف ذلك تتحل بالتعويض المباشر.

ليس هناك تحدٍ أكبر من تحسين ذاتك وتطويرها.

خد بالك من المسائل دى (متشابهات النهايات)

نها $\frac{جا س}{س}$ = ١ ، س ← ٠ VS نها $\frac{جا س}{س}$ = $\frac{\pi}{١٨٠}$ ، س ← ٠ (س بالتقدير الستينى)

نها $\frac{ظا س}{س}$ = ١ ، س ← ٠ VS نها $\frac{ظا س}{س}$ = $\frac{٤٥ ظا \frac{\pi}{٤}}{\frac{\pi}{٤}}$ = $\frac{١}{\frac{\pi}{٤}}$ = $\frac{٤}{\pi}$ ، س ← $\frac{\pi}{٤}$

خد بالك من تعديل الزوايا

① جا س = جتا ($\frac{\pi}{٢}$ - س)

② ظا س = ظتا ($\frac{\pi}{٢}$ - س)

③ جا (π - س) = جا س

④ ظا (π - س) = -ظا س

امثلة

نها $\frac{ظا س}{س - \pi}$ ، س ← π = نها $\frac{-ظا(\pi - س)}{س - \pi}$ = -١ ، π - س ← ٠

نها $\frac{جا س}{س - \pi}$ ، س ← π = نها $\frac{جا(\pi - س)}{\pi - س}$ = ١ ، π - س ← ٠

نهايات خطيرة

نها $\sqrt{س - ٣}$ = ؟ ، س ← ٣ ليس لها نهايه

نها $\sqrt{س - ٣}$ = صفر ، س ← ٣+

نها لو س = -∞ ، س ← ٠+

علمى فقط

بحث وجود نهاية للدالة المعرفة باكثر من قاعدة

ازا كانت د (أ)+ = د (أ)- النهايه موجودة

ازا كانت د (أ)+ ≠ د (أ)- النهاية غير موجودة

 # بس كدا ونطبق كل قوانين النهايات

بكرر تانى

نها $\sqrt{س - ٥}$ = غير موجودة ، س ← ٥

الاتصال

تكون الدالة متصلة لو

① الدالة معرفة
② النهاية موجودة
③ قمة الدالة = قمة النهاية

يعنى : د (أ) = د (أ)+ = د (أ)-

الفكرة الأولى

لو النهاية موجودة يمكن إعادة تعريف الدالة
لو النهاية غير موجودة لا يمكن إعادة تعريف الدالة

د (س) = $\frac{٢س^{٢} - ٧س - ٤}{س - ٤}$ عند س = ٤

نها $\frac{٢س^{٢} - ٧س - ٤}{س - ٤}$ = نها $\frac{(س - ٤)(٢س + ١)}{س - ٤}$ = ٩ ، س = ٤

النهاية موجودة يمكن إعادة تعريفها د (س) = $\frac{٢س^{٢} - ٧س - ٤}{س - ٤}$ ، ٩ ؛ س ≠ ٤ ، س = ٤

الفكرة الثانية

① الدالة كثيرة الحدود متصلة على مجالها " ح "
② الدالة الكسرية متصلة على ح - { الصفار المقام }
③ جا س متصلة على ح
④ جتا س متصلة على ح
⑤ طا س متصلة على ح - { س : س = $\frac{\pi}{٢}$ ، ن ∈ ص }

سبحانه ده عاوز المجال بالظبط

د (س) = $\sqrt{٥ - س^{٢}}$ ∵ المجال = ح ∴ متصلة على ح

د (س) = $\sqrt{س + ٢}$ ∵ المجال = [-٢،∞[∴ متصلة على [-٢،∞[

هانس

حساب مثلثات تانية ثانوى

تـــــرم أول

01558319227
الإستاذ
محمـــد جابـــر

تركات مهمة جووى يبو عمو

جـا (مجموع الزاويتان) = جـا (الثالثه)

جتـا (مجموع الزاويتان) = - جتـا (الثالثه)

جـا (ب + جـ) = جا أ

جـا (أ + جـ) = جا ب

جـا (أ + ب) = جا جـ

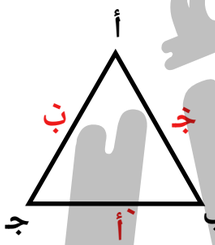
جتـا (ب + جـ) = - جتـا أ

جتـا (أ + جـ) = - جتـا ب

جتـا (أ + ب) = - جتـا جـ

قانون الجيب

قاعدة ال جا



- فى اى مثلث أ ب جـ

$$\frac{أ`}{جا أ}=\frac{ب`}{جا ب}=\frac{جـ`}{جا جـ}=\frac{أ`+ب`+جـ`}{جا أ+جا ب+جا جـ}=\frac{محيط\ أ ب جـ}{جا أ+جا ب+جا جـ}$$

= ٢نق

نصف قطر الدائرة الخارجية او نصف قطر الدائرة الماره برؤوس المثلث

يستخدم لو معاك

1. زاويتان + ضلع
2. زاويتان + محيط
3. زاويتان + نق
4. الحالة المبهمة

شفـرات فاخـر مـن الاخـر

1. أ` = ٢نق جا أ
2. ب` = ٢نق جا ب
3. جـ` = ٢نق جا جـ
4. محيط أ ب جـ = ٢نق (جا أ + جا ب + جا جـ)

او ، أ` + ب` + جـ`

المساحة =

كل قوانين مساحة المثلث أ ب جـ

- $\frac{1}{2}$ أ`ب` جا جـ = $\frac{1}{2}$ ب`جـ` جا أ = $\frac{1}{2}$ أ`جـ` جا ب
  معطى ضلعان + زاوية محصورة
- $\sqrt{ع(ع-أ`)(ع-ب`)(ع-جـ`)}$ ، ع = $\frac{المحيط}{2}$
  معطى ال ٣ أضلاع
- ٢نق جا أ جا ب جا جـ
  معطى نق + زاويا
- $\frac{أ`ب`جـ`}{٤ نق}$
  معطى نق + أضلاع

أنت مدين لنفسك بأن تصبح عظيماً

قانون جيب التمام (قاعدة الجتا)

فى اى مثلث أ ب جـ

الحاله الاولى
معاك ٣ أضلاع
ومحتاج تشترى زاوية

الحاله الثانية
معاك ضلعان + زاويه
محصورة ومحتاج
تشترى الضلع الثالث

جتـا أ = $\frac{ب`^2+جـ`^2-أ`^2}{2ب`جـ`}$

جتـا ب = $\frac{أ`^2+جـ`^2-ب`^2}{2أ`جـ`}$

جتـا جـ = $\frac{أ`^2+ب`^2-جـ`^2}{2أ`ب`}$

أ`^2 = ب`^2 + جـ`^2 - ٢ب`جـ` جتا أ

ب`^2 = أ`^2 + جـ`^2 - ٢أ`جـ` جتا ب

جـ`^2 = أ`^2 + ب`^2 - ٢أ`ب` جتا جـ

علشان تجيب الزاويه ← (الناتج) shift cos ← ومتنساش √ الناتج

شفرة ال ٣ تربيع (هتخلص معاك اى مسأله)

إشارة الاثنين/ ٢ / خدهم من غير تربيع / جتا الفردية

أ`^2 + ب`^2 - جـ`^2 = +٢أ`ب` جتا جـ

أ`^2 + جـ`^2 - ب`^2 = +٢أ`جـ` جتا ب

ب`^2 + جـ`^2 - أ`^2 = +٢ب`جـ` جتا أ

أ`^2 - ب`^2 - جـ`^2 = -٢ب`جـ` جتا أ

ب`^2 - أ`^2 - جـ`^2 = -٢أ`جـ` جتا ب

جـ`^2 - ب`^2 - أ`^2 = -٢ب`أ` جتا جـ

هانس

خلى بالك

جتا (الزاوية) = - جتا (المكملة)

جتا (الزاوية) + جتا (المكملة) = ٠

هعلل أ + ب = ١٨٠ جتا أ = -جتا ب أو جتا أ + جتا ب = ٠

تركيب فى اى شكل رباعى دائرى مجموع اى زاويتان متقابلتان =١٨٠

حل المثلث

المقصود ب حل المثلث هو
إيجاد أضلاعه الثلاثة [ق] وزواياه الثلاثة

ليس هناك تحدٍ أكبر من تحسين ذاتك وتطويرها.