سلسلة الفاروق
فى الرياضيات

الفصل الدراسي الأول

الصف الثاني الثانوي

القسم العلمي

إعداد : أ/ عشري فاروق

ت : ٠١١٥٦٢٤٤٤٣١

أولاً : الجبر

١ الدالة ذات المتغير الحقيقي

الدالة :

إذا كانت س، ص مجموعتين غير خاليتين وجزئيتين من مجموعة الأعداد الحقيقية

فإن :

العلاقة من س الى ص تسمى دالة إذا ارتبط كل عنصر من عناصر س بعنصر واحد فقط من عناصر ص

التعرف على العلاقة التي تمثل دالة من خلال :

١ المخطط السهمي الممثل للعلاقة

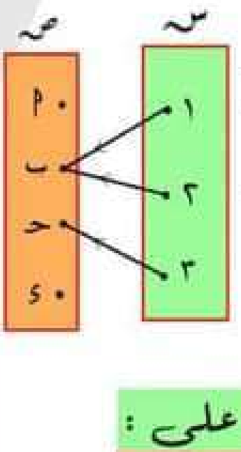
٢ الشكل البياني الممثل للعلاقة

٣ بيان العلاقة

٤ قاعدة العلاقة

أولاً : المخطط السهمي الممثل للعلاقة

الشكل المقابل:



يمثل دالة من س الى ص لأن كل عنصر من عناصر س خرج منه سهم واحد فقط نحو عناصر ص

ومن هذه الدالة نتعرف على :

بيان العلاقة

وهو يساوي مجموعة الأزواج المرتبة الممثلة للعلاقة

∴ بيان ع = {(١، ب)، (٢، ب)، (٣، ح)}

المجال

هو المجموعة س = {١، ٢، ٣}

المجال المقابل

هو المجموعة ص = {أ، ب، ح، ء}

المدى

هو مجموعة صور عناصر المجموعة س وهو مجموعة جزئية من ص

∴ المدى = {ب، ح}

التعبير الرمزي عن الدالة

∵ العلاقة دالة من س إلى ص

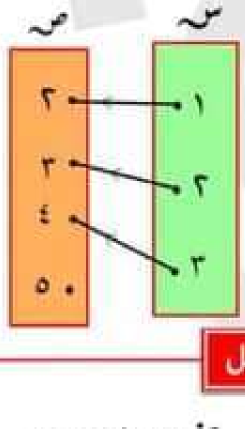
∴ د : س ← ص

د : {١، ٢، ٣} ← {أ، ب، ح، ء}

مثال ①

أي من المخططات السهمية التالية تمثل دالة من س الى ص؟ وفي حالة كونها دالة اكتب المجال والمدى

١



الحل

∵ كل عنصر من عناصر س يخرج منه سهم واحد فقط نحو عناصر ص

∴ العلاقة تمثل دالة من س إلى ص

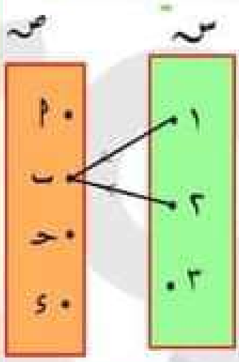
ويكون :

المجال = {١، ٢، ٣}

المجال المقابل = {٢، ٣، ٤، ٥}

المدى = {٢، ٣، ٤}

٢

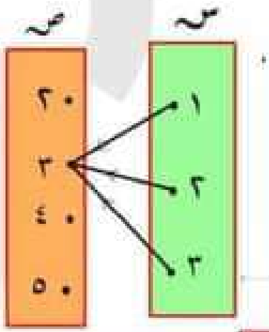


الحل

∵ العنصر ٣ لم يخرج منه أية أسهم نحو عناصر ص

∴ العلاقة لا تمثل دالة

٣



الحل

∵ كل عنصر من عناصر س خرج منه سهم واحد فقط نحو عناصر ص

∴ العلاقة تمثل دالة من س إلى ص

ويكون :

المجال = {١، ٢، ٣}

المجال المقابل = {٢، ٣، ٤، ٥}

المدى = {٣}

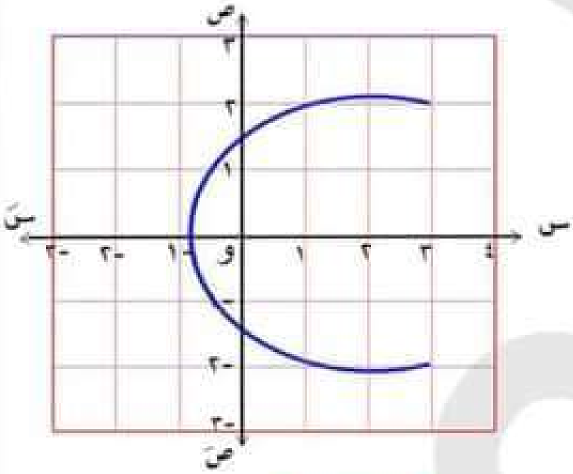
ثانياً : الشكل البياني الممثل للعلاقة

تكون العلاقة الممثلة بيانياً تمثل دالة إذا كان لكل خط رأسي تقع عليه نقطة وحيدة من نقط العلاقة

مثال ②

أي من الأشكال البيانية التالية يمثل دالة وأيها لا يمثل دالة وإذا كانت تمثل دالة عين المجال والمدى

١

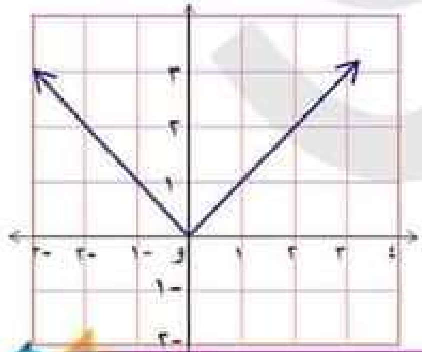


الحل

الشكل البياني لا يمثل منحنى لدالة لأنه يوجد خط رأسي يقطع الدالة في أكثر من نقطة

مثل : محور الصادات هو خط رأسي يقطع المنحنى في نقطتين

٢



الحل

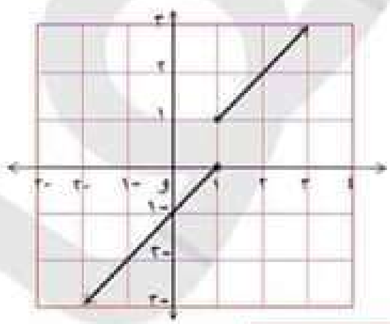
يمثل دالة لأن عند رسم أي خط رأسي يقطع منحنى الدالة في نقطة وحيدة

ويكون :

المجال = ح

المدى = [٠ ، ∞[

٣



الحل

الشكل البياني لا يمثل دالة لأن الخط الرأسي

س = ١ تقع عليه نقطتان من نقط العلاقة

ثالثاً : بيان العلاقة

العلاقة ع تمثل دالة من س إلى ص إذا ظهر كل عنصر من عناصر س مرة واحدة كمسقط أول في بيان العلاقة

مثال (٣)

إذا كانت : س = {١ ، ٢ ، ٣}

، ص = {أ ، ب ، حـ}

فأي من العلاقات الآتية تمثل دالة من س إلى ص وإذا كانت تمثل دالة عين مداها

١ ع١ = {(١ ، أ) ، (١ ، ب) ، (٢ ، حـ)}

الحل

∵ العدد ١ ظهركمسقط أول مرتين في بيان العلاقة

وكذلك العدد ٣ لم يظهر كمسقط أول في بيان العلاقة

∴ ع١ لا تمثل دالة

---

٢ ع٢ = {(١ ، أ) ، (٢ ، ب) ، (٣ ، حـ)}

كل عنصر من عناصر المجموعة س ظهر كمسقط أول مرة واحدة في بيان العلاقة

∴ ع٢ تمثل دالة

ويكون :

∴ المجال = {١ ، ٢ ، ٣}

المدى = {أ ، ب ، حـ}

---

٣ ع٣ = {(٣ ، حـ) ، (١ ، حـ) ، (٢ ، حـ)}

الحل

∵ كل عنصر من عناصر المجموعة س ظهر كمسقط أول مرة واحدة في بيان العلاقة

∴ ع٣ تمثل دالة

ويكون :

المجال = {١ ، ٢ ، ٣}

المدى = {حـ}

رابعاً : من قاعدة العلاقة

نحدد العلاقة التي تمثل دالة من قاعدتها إذا كان :

كل قيمة للمتغير س يناظرها قيمة وحيدة للمتغير ص

مثال ④

هل العلاقة $ص^2 = ٢س + ٤$ تمثل دالة أم لا ؟

الحل

بالتعويض عن المتغير س بأي قيمة يكون عندها

المتغير $ص^2$ له قيمة موجبة

عند $س = ٠$ نجد أن : $ص^2 = ٤$

$\therefore ص = \pm ٢$

$\therefore$ يوجد قيمة للمتغير س يناظرها قيمتان للمتغير ص

$\therefore$ العلاقة لا تمثل دالة

ملحوظة

جميع قواعد العلاقات التى تكون فيها ص ذات أس زوجي ليست قواعد لدوال

مثال ⑤

هل العلاقة $ص^3 = ٧س + ١$ تمثل دالة أم لا ؟

الحل

عند وضع $س = ١$

فإن : $ص^3 = ٧ \times ١ + ١ = ٨$

$\therefore ص = \sqrt[3]{٨}$ $\therefore ص = ٢$

كل قيمة للمتغير س يناظرها قيمة وحيدة للمتغير ص

$\therefore$ العلاقة تمثل دالة

مثال ⑥ حاول بنفسك

أى العلاقات الآتية تمثل دالة وأيها لا يمثل دالة

① $ص = ٣س + ١$ ② $ص^2 = س + ١$

③ $ص^3 = س^2 + ٤$ ④ $س = ٥$

⑤ $ص = ٣$ ⑥ $ص = حاس$

الحل

....

....

....

....

....

....

....

....

مثال ⑦

اذا كانت د دالة حيث

د : $\{١ ، ٢ ، ٣\} \longrightarrow ع$ ، $د(س) = ٣س - ٦$

فإن مدى د هو ....

مثال ⑧

اذا كانت د دالة حيث

د : $\{-٣ ، -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣\} \longrightarrow ع$

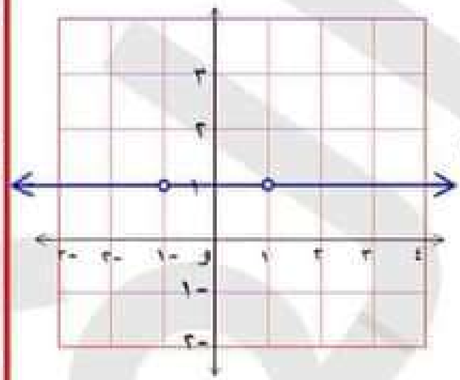
$د(س) = س^2 - ١$

فإن مدى د هو ....

مثال ⑨

في كل من الأشكال البيانية التالية استنتج مجال ومدى كل دالة

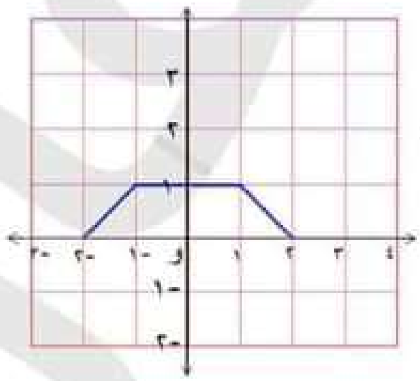
١



المجال = ...

المدى = ...

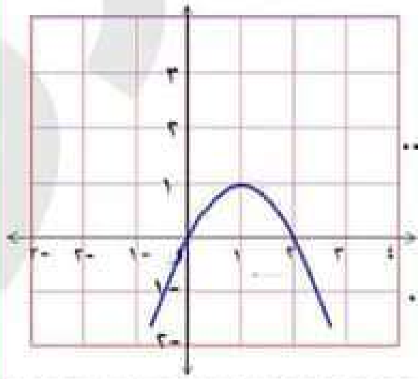
٢



المجال = ...

المدى = ...

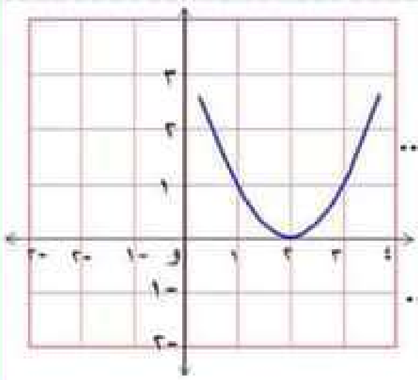
٣



المجال =............

المدى =............

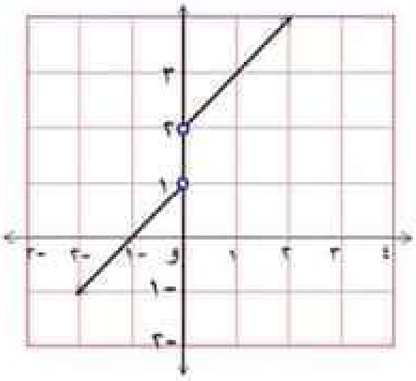
٤



المجال =............

المدى =............

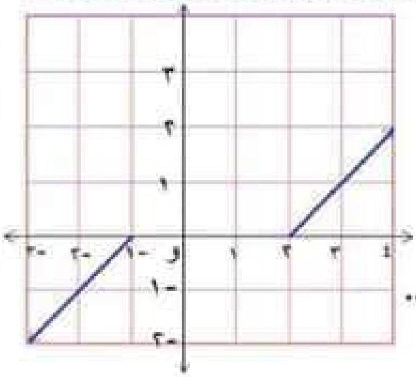
٥



المجال = ...

المدى = ...

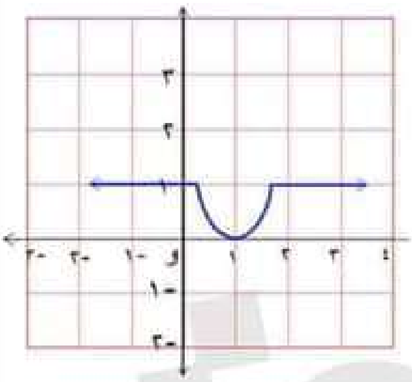
٦



المجال =.............

المدى =.............

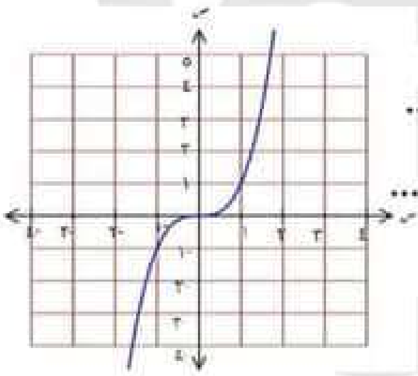
٧



المجال =............

المدى =............

٨



المجال =............

المدى =............

التمثيل البياني للدوال ذات المجال المتقطع

إذا كان مجال الدالة مجموعة منفصلة من الأعداد {.....،.....} فإنها تمثل بمجموعة منفصلة من النقاط

مثال (١٠)

مثل بيانيا الدالة د:

د : {-٣، -١، ١، ٢} ⟵ [-٣، ٧]

، د(س) = ٢س + ٣

ومن الرسم عين المدى

الحل

مجال الدالة = {-٣، -١، ١، ٢}

∵ د(س) = ٢س + ٣

∴ نوجد صور عناصر المجال

∴ د(-٣) = ٢ × (-٣) + ٣ = -٦ + ٣ = -٣

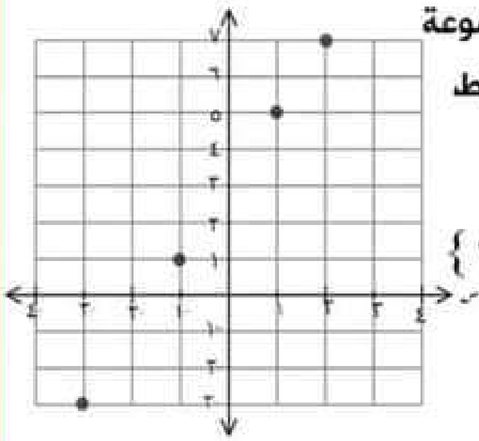
، د(-١) = ٢ × (-١) + ٣ = -٢ + ٣ = ١

، د(١) = ٢ × ١ + ٣ = ٢ + ٣ = ٥

د(٢) = ٢ × ٢ + ٣ = ٤ + ٣ = ٧

س	-٣	-١	١	٢
د(س)	-٣	١	٥	٧

نمثل الدالة بمجموعة منفصلة من النقاط



المدى = {-٣، ١، ٥، ٧}

التمثيل البياني للدوال ذات المجال المتصل

إذا كان مجال الدالة مجموعة متصلة من الأعداد [.....،.....] فإنها تمثل بمجموعة متصلة من النقاط

مثال (١١)

مثل بيانيا الدالة د: [-٣، ٣] ⟵ ح

د(س) = س^{٢} - ٤ ومن الرسم عين المدى

الحل

د(س) = س^{٢} - ٤

∴ مجال الدالة = [-٣، ٣] على صورة فترة

د(-٣) = (-٣)^{٢} - ٤ = ٩ - ٤ = ٥

، د(-٢) = (-٢)^{٢} - ٤ = ٤ - ٤ = ٠

، د(-١) = (-١)^{٢} - ٤ = ١ - ٤ = -٣

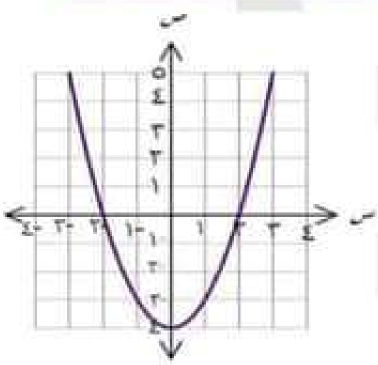
، د(٠) = (٠)^{٢} - ٤ = ٠ - ٤ = -٤

، د(١) = (١)^{٢} - ٤ = ١ - ٤ = -٣

، د(٢) = (٢)^{٢} - ٤ = ٤ - ٤ = ٠

، د(٣) = (٣)^{٢} - ٤ = ٩ - ٤ = ٥

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
د(س)	٥	٠	-٣	-٤	-٣	٠	٥



من الرسم نجد أن

المجال = [-٣، ٣]

، المدى = [-٤، ٥]

الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة

الدالة د :

د(س) = { س ، س < ١
س^٢ + ٤ ، س ≥ ١

هى دالة معرفة بقاعدتين على يمين ويسار العدد ١

مجالها =]-∞ ، ١[∪ [١ ، ∞[

=]-∞ ، ∞[= ح

حيث د(س) = س عندما س < ١

أي أن : د(-١) = -١

، د(س) = س^٢ + ٤ ؛ عندما س ≥ ١

ومن هذه القاعدة نوجد منها صورة العدد ١ وجميع الأعداد الأكبر منه

مثال (١٢)

اذا كانت د : د(س) = { س+٣ ، -٣ ≤ س < -١
٢ ، -١ ≤ س ≤ ١
٣-س ، ١ < س ≤ ٣

مثل بيانياً الدالة ومن الرسم عين المجال والمدى

الحل

عندما س ∈ [-٣ ، -١[
فإن : د(س) = س + ٣

د(-٣) = (-٣) + ٣ = ٠

د(-٢) = (-٢) + ٣ = ١

د(-١) = (-١) + ٣ = ٢

س	-٣	-٢	-١
د(س)	٠	١	٢

لاحظ :

-١ ∉ [-٣ ، -١[(الفترة مفتوحة عند س = -١)

فيتم وضع ثقب عند النقطة (-١ ، ٢)

عندما س ∈ [-١ ، ١] فإن : د(س) = ٢

الدالة تكون ثابتة وتساوى ٢

لجميع قيم س ∈ [-١ ، ١]

س	-١	٠	١
د(س)	٢	٢	٢

عندما س ∈]١ ، ٣] فإن : د(س) = ٣ - س

د(١) = ٣ - ١ = ٢

د(٢) = ٣ - ٢ = ١

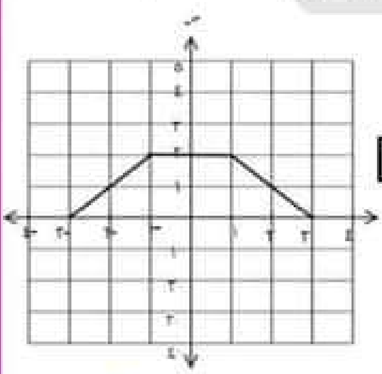
د(٣) = ٣ - ٣ = ٠

س	١	٢	٣
د(س)	٢	١	٠

لاحظ :

١ ∉]١ ، ٣] (الفترة مفتوحة عند ١)

فيتم وضع ثقب عند النقطة (١ ، ٢)



من الرسم نجد أن :

المجال = [-٣ ، ٣]

، المدى = [٠ ، ٢]

إطراد الدوال

يقصد بإطراد الدوال بحث فترات التزايد والتناقص والثبوت للدالة

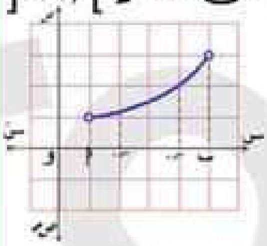
١ تزايد الدالة

يقال للدالة د أنها تزايدية على الفترة]ا، ب[

إذا كان : س٢ > س١

، س٢ ، س١ ∈]ا، ب[

فإن : د(س٢) > د(س١)



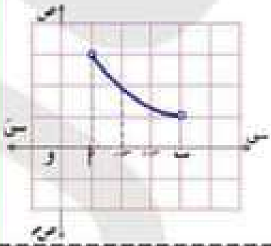
٢ تناقص الدالة

يقال للدالة د أنها **تناقصية** على الفترة]ا، ب[

إذا كان س٢ > س١

، س٢ ، س١ ∈]ا، ب[

فإن : د(س٢) < د(س١)



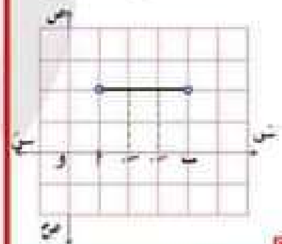
٣ ثبوت الدالة

يقال للدالة د أنها **ثابتة** على الفترة]ا، ب[

إذا كان س٢ > س١

، س٢ ، س١ ∈]ا، ب[

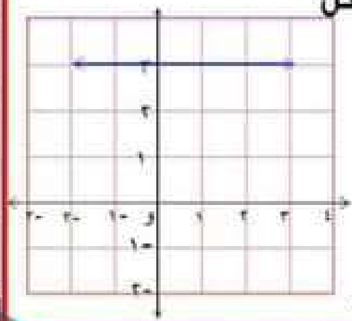
فإن : د(س٢) = د(س١)



مثال ①

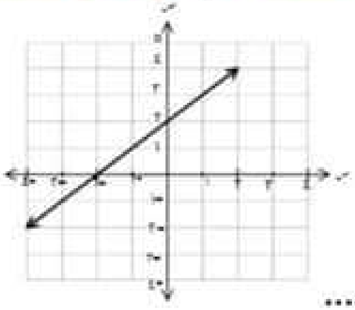
أكمل المطلوب أمام كل شكل

١ في الشكل المقابل



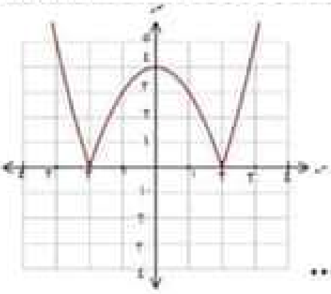
- المجال=..............
- المدى =..............
- الإطراد :..................

٢ في الشكل المقابل



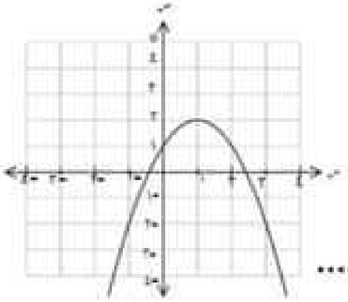
- المجال=..............
- المدى =..............
- الإطراد :..................

٣ في الشكل المقابل



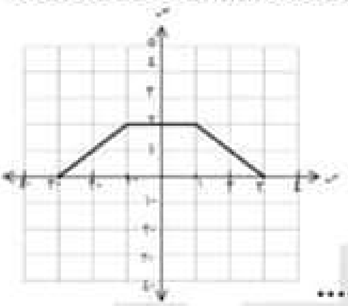
- المجال=..............
- المدى =..............
- الإطراد :..................

٤ في الشكل المقابل



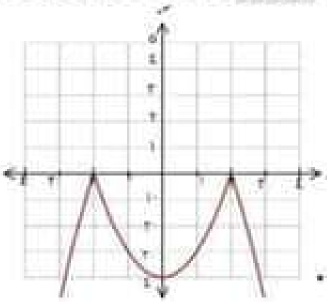
- المجال=..............
- المدى =..............
- الإطراد :..................

٥ في الشكل المقابل



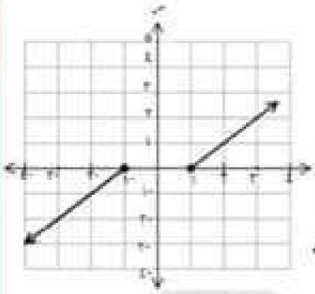
- المجال=..............
- المدى =..............
- الإطراد :..................

٦ في الشكل المقابل



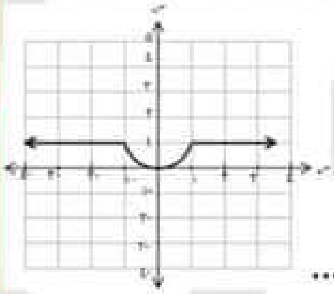
- المجال=..............
- المدى =..............
- الإطراد :..................

٧ في الشكل المقابل



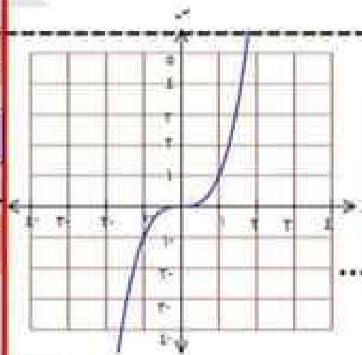
- المجال =...............
- المدى = ...
- الإطراد :.....................

٨ في الشكل المقابل



- المجال =...............
- المدى = ...
- الإطراد :.....................

٩ في الشكل المقابل



- المجال =...............
- المدى = ...
- الإطراد :.....................

تمارين على الدالة ذات المتغير الحقيقي

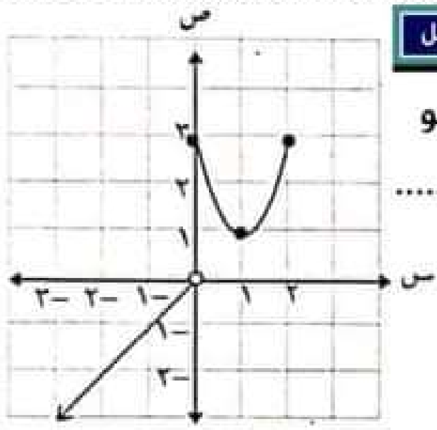
إذا كانت د دالة حيث

$$د(س) = \begin{cases} ٢س & ، \quad س \geq ٣ \\ س^2 & ، \quad س < ٣ \end{cases}$$

فإن : د(٢) + د(١) + د(٤) = ...

(أ) ٥ (ب) ١٨ (ج) ٢٤ (د) ٣٢

٢ في الشكل المقابل



مجال الدالة د هو

....

(أ) ح

(ب) ح − {٠}

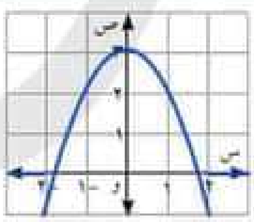
(ج)]−∞ ، ٢]

(د)]−∞ ، ٢] − {٠}

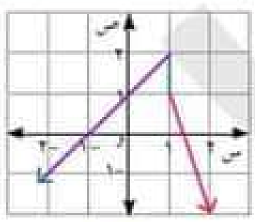
٣ إذا كانت د دالة حيث : د(س) = أس + ب ،
وكان د(٢) + د(٣) − د(٥) = ١٢ فان د(٠) = ...

(أ) ١٢ (ب) صفر (ج) −١ (د) ١٨

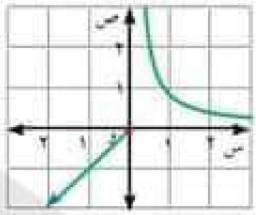
٤ فى كل من الأشكال الآتية بين ما إذا كانت ص دالة فى س أم لا ؟ وإذا كانت دالة عين المجال والمدى



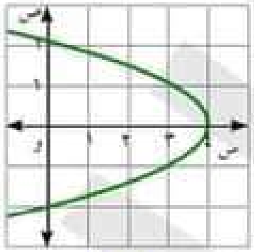
(أ)



(ب)



(ج)



(د)

---

٥ إذا كانت د دالة حيث :

د(س) = { س² + ٥ ، س ≤ ٣
 −س + ٦ ، س > ٣

فإن د(أ + ٣) = ... حيث أ ∈ ح⁻

(أ) أ² + ٦أ + ١٤ (ب) −أ + ٩

(ج) −أ + ٣ (د) أ² + ١٤

---

٦ أي من العلاقات الآتية لا تعبر عن دالة :

(أ) {(−٢ ، ١) ، (−١ ، ٢) ، (١ ، ٢) ، (٣ ، ٤) ، (٢ ، ٣)}

(ب) {(−٢ ، ٠) ، (−١ ، −١) ، (٠ ، ٣) ، (١ ، ٥) ، (٢ ، −٤)}

(ج) {(−١ ، ٤) ، (٠ ، ٤) ، (١ ، ٤) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٤)}

(د) {(−١ ، ١) ، (−١ ، ٢) ، (١ ، ٢) ، (٣ ، ٤) ، (٢ ، ٣)}

---

٧ أرسم الشكل البياني للدالة د حيث :

د(س) = { −س − ١ ، س < ٠
 ٢س − ١ ، ٠ ≤ س ≤ ٣

ومن الرسم حدد مدى الدالة د

---

٨ أرسم الشكل البياني للدالة د حيث :

د(س) = { س² ، س < ٠
 ٢ ، ٠ ≤ س ≤ ٣
 −س + ٦ ، س > ٣

ومن الرسم حدد مدى الدالة د

---

٩ إذا كانت د : [١ ، ∞[⟵ ح حيث

د(س) = ١ − س ارسم الشكل البياني للدالة

، واستنتج من الرسم مدى الدالة.

---

١٠ إذا كانت د(س) = { ٣ − س عندما −٢ ≤ س < ٢
 س عندما ٢ ≤ س ≤ ٥

عين مجال الدالة د ومثلها بيانياً واستنتج من الرسم المدى

---

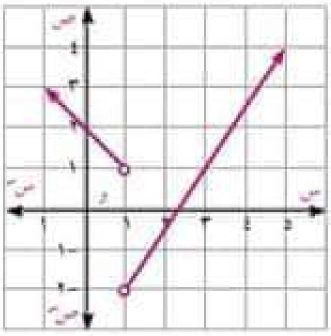
١١ ارسم الشكل البياني للدالة ر حيث

ر :]−∞ ، −١] ⟵ ح ، ر(س) = ١ − س

، واستنتج من الرسم مدى الدالة.

---

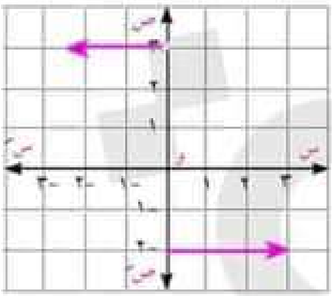
١٢ في الشكل المقابل



- المجال = ...
- المدى = ...
- الإطراد : ....

---

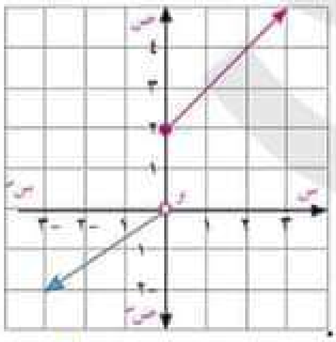
١٣ في الشكل المقابل



- المجال = ...
- المدى = ...
- الإطراد : ....

---

١٤ في الشكل المقابل



- المجال = ...
- المدى = ...
- الإطراد : ....

١٥ إذا كانت :

د : [-٢ ، ٣] ⟵ ع ، د(س) = ٣س + ٢

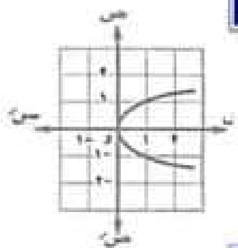
فإن مدى الدالة = ...

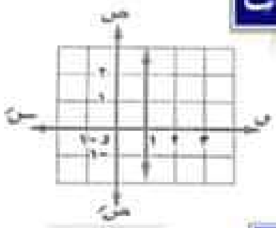
أ [-٤ ، ١١]   ب [-٤ ، ٩]

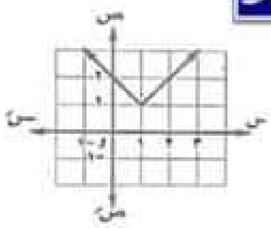
ج [-٣ ، ٧]   د [-٣ ، ٢]

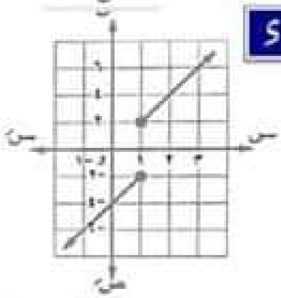
---

١٦ الشكل الذى يمثل دالة فى س من بين الأشكال الآتية هو ....

أ


ب


ج


د


---

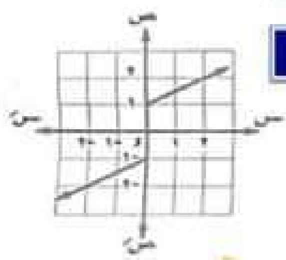
١٧ جميع العلاقات الآتية تكون فيها ص دالة فى س ما عدا العلاقة ....

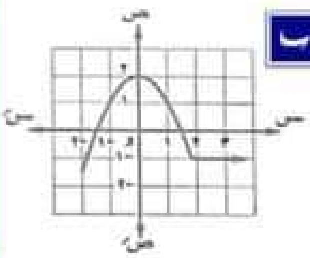
أ ص = ٢س + ١   ب س = ص^{٢} − ٢

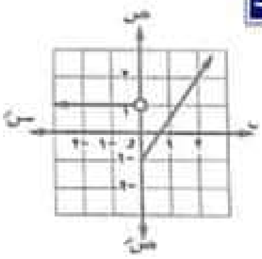
ج ص = س^{٢} − ٤   د ص = جا س

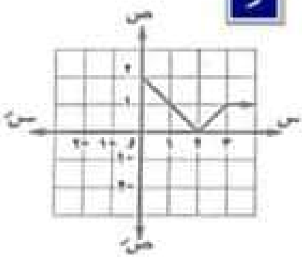
---

١٨ أى الأشكال البيانية الآتية لا يمثل دالة فى س ؟

أ


ب


ج


د


---

١٩ إذا كان س ، ص متغيرين حقيقيين فحدد

أى علاقة مما يأتى تمثل قاعدة دالة فى س وأيها لا :

أ ص = ٢س + ٥

ب س ص + ص = ٢س + ٢

ج ص^{٢} = س + ٤

د (س − ص)^{٢} = ٥

هـ ص = ٢

ز س = ٣

ح ص^{٢} − س^{٢} = ٢

ط ص = $\sqrt{\text{س}^{٢} + ٤}$

ى ص = ٣ جا س + جتا ٢ س

تعيين مجال الدالة من خلال قاعدتها

أولاً : دوال كثيرات الحدود

دوال كثيرات الحدود مجالها ح أو مجموعة جزئية من ح إذا كانت معرفة على فترة من مجموعة الأعداد الحقيقية

فمثلاً :

١ د (س) = ٤

دالة كثيرة الحدود ثابتة مجالها = ح

٢ د (س) = ٢ س - ١

دالة كثيرة حدود من الدرجة الأولى

مجالها = ح

٣ د (س) = س^{٢} - ٢ س + ٣

دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية

مجالها = ح

ثانياً : الدالة الكسرية

الدالة د: د (س) = $\frac{\text{م (س)}}{\text{ن (س)}}$

حيث كلاً من البسط والمقام كثيرتي حدود تسمى دالة كسرية مجالها = ح - {أصفار المقام}

مثال ①

عين مجال كلاً من الدوال الآتية :

١ د (س) = $\frac{١}{٢ س - ٥}$

الحل

∵ د (س) دالة كسرية

∴ مجالها = ح - { أصفار المقام }

نوجد أصفار المقام :

بوضع : ٢ س - ٥ = ٠

∴ س = $\frac{٥}{٢}$

∴ المجال = ح - { $\frac{٥}{٢}$ }

---

٢ د (س) = $\frac{\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٤ \text{س}}$

الحل

∵ د (س) دالة كسرية

∴ مجالها = ح - { أصفار المقام }

نوجد أصفار المقام :

بوضع : س^{٢} - ٤ س = ٠

بأخذ س عامل مشترك

س (س^{٢} - ٤) = ٠

∴ س (س - ٢) (س + ٢) = ٠

إما س = ٠ | أو س - ٢ = ٠ | أو س + ٢ = ٠

∴ س = ٠ | س = ٢ | س = -٢

∴ المجال = ح - { ٠ ، ٢ ، -٢ }

---

٣ د (س) = $\frac{\text{س} - ٥}{\text{س}^{٢} - ٣ \text{س} + ٢}$

الحل

∵ د (س) دالة كسرية

∴ مجالها = ح - { أصفار المقام }

بوضع المقام = ٠

∴ $س^٢ - ٣س + ٢ = ٠$

∴ (س - ٢) (س - ١) = ٠

اما س - ٢ = ٠ ∴ س = ٢ | أو س - ١ = ٠ س = ١

∴ المجال = ح - { ٢ ، ١ }

---

٤ $د (س) = \frac{س - ١}{س^٢ + ٤}$

الحل

∵ د (س) دالة كسرية

∴ مجالها = ح - { أصفار المقام }

بوضع $س^٢ + ٤ = ٠$

∴ $س^٢ = -٤$

∵ (لايوجد عدد حقيقي مربعه = عدد سالب)

∴ مجموعة أصفار المقام = ∅

∴ المجال = ح - ∅
= ح

---

٥ $د (س) = \frac{س^٢ - ٢س + ١}{س^٣ + ٨}$

الحل

∵ د (س) دالة كسرية

∴ مجالها = ح - { أصفار المقام }

بوضع $س^٣ + ٨ = ٠$

(بتحليل مجموع مكعبين)

∴ (س + ٢) ($س^٢ - ٢س + ٤$) = ٠

اما س + ٢ = ٠ ∴ س = -٢ | أو $س^٢ - ٢س + ٤ = ٠$ ليس له أصفار في ح

∴ المجال = ح - { -٢ }

ثالثاً : تعيين مجال الدالة الجذرية على الصورة : $د (س) = \sqrt[م]{ر(س)}$

إذا كانت :
$د (س) = \sqrt[م]{ر(س)}$

١ اذا كانت م عدد فردي فإن :

مجال د = مجال ر

٢ اذا كانت م عدد زوجي فإن :

مجال د هو قيم س التي تجعل

ر (س) ≥ ٠

مثال ②

عين مجال كلاً من الدوال الآتية :

١ $د(س) = \sqrt{س - ٣}$

الحل

∵ دليل الجذر زوجي

∴ نوجد قيم س التي تجعل :

$س - ٣ \ge ٠$ ∴ $س \ge ٣$

∴ المجال = [٣ ، ∞ [

---

٢ $د(س) = \sqrt[٣]{س + ٥}$

الحل

∵ دليل الجذر فردى

∴ مجال د = مجال ر

، ر(س) = س + ٥ دالة كثيرة الحدود من الدرجة الأولى مجالها = ح

∴ مجال الدالة د = ح

---

٣ $د(س) = \sqrt{٣ - س}$

الحل

∵ دليل الجذر زوجي

∴ نوجد قيم س التي تجعل : $٣ - س \ge ٠$

∴ $-س \ge -٣$

بالضرب × (-١) للطرفين

∴ $س \le ٣$

∴ المجال =] -∞ ، ٣]

---

٤ $د(س) = \sqrt{س^٢ - ٥س + ٦}$

الحل

∵ دليل الجذر زوجي

∴ مجال د هو قيم س التي تجعل :

$س^٢ - ٥س + ٦ \ge ٠$

نوجد جذري المعادلة :

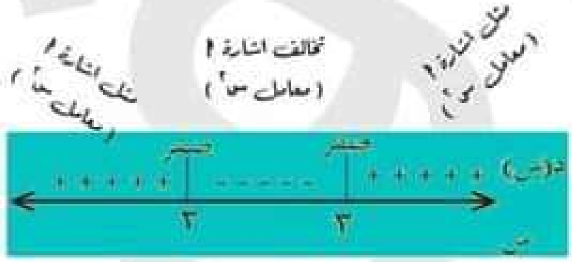
$س^٢ - ٥س + ٦ = ٠$

∴ $(س - ٢)(س - ٣) = ٠$

إما $س - ٢ = ٠$ | أو $س - ٣ = ٠$

∴ $س = ٢$ | $س = ٣$

نبحث اشارة المقدار $(س^٢ - ٥س + ٦)$



∴ المقدار : $س^٢ - ٥س + ٦ \ge ٠$ عندما س ∈ ح -] ٢ ، ٣ [

∴ المجال = ح -] ٢ ، ٣ [

٥ د(س) = $\sqrt[3]{\frac{٣س + ٥}{س - ١}}$

الحل

∵ دليل الجذر فردي = ٣

∴ مجال د = مجال الدالة تحت الجذر

وهي دالة كسر جبري مجاله

= ح - { أصفار المقام }

∴ المجال = ح - {١}

---

٦ ن(س) = $\sqrt[4]{\frac{س^{2} - ٥س + ٦}{٤س - س^{2}}}$

الحل

مجال الدالة هو مجموعة قيم س التي تجعل

كلاً من البسط والمقام موجبين معاً أو سالبين معاً

بفرض أن

دالة البسط : د(س) = س^{2} - ٥س + ٦

دالة المقام : ر(س) = ٤س - س^{2}

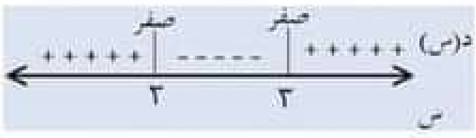
نعين الفترات التي تكون فيها

الدالتين موجبتين معا أو سالبتين معا

نبحث اشارة الدالة د:

جذرا المعادلة الأولى هما : ٢ ، ٣

ويكون :

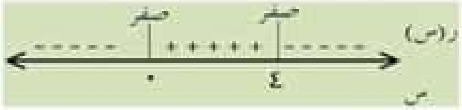


نبحث إشارة الدالة ر (دالة المقام)

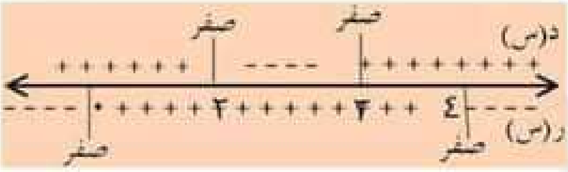
ر(س) = ٤س - س^{2}

∴ جذرا المعادلة هما : ٠ ، ٤

ويكون :



نبحث اشارة الدالتين على خط أعداد واحد كما بالشكل :



نلاحظ أن الدالتين موجبتين معا في

]٠ ، ٢[،]٣ ، ٤[

و كذلك الدالة معرفة عند أصفار البسط

∴ المجال = الفترات التي تكون فيها الدالتين موجبتين معا ∪ مجموعة أصفار البسط

∴ مجال الدالة ن

=]٠ ، ٢[∪]٣ ، ٤[∪ {٢ ، ٣}

=]٠ ، ٢] ∪ [٣ ، ٤[

تدريب : ١

١ عين مجال الدالة د: $\text{د}(\text{س}) = \sqrt[٣]{٢\text{س} + ١}$

الحل

....

٢ عين مجال الدالة د: $\text{د}(\text{س}) = ٢\text{س} + ١$

الحل

....

٣ عين مجال الدالة د: $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{\text{س} - ٥}$

الحل

....

٤ عين مجال الدالة د:

$\text{د}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٤}$

الحل

....

٥ عين مجال الدالة د:

$\text{د}(\text{س}) = \sqrt{٤ - \text{س}^٢}$

الحل

....

٦ عين مجال الدالة د:

$\text{د}(\text{س}) = \sqrt{\dfrac{\text{س}^٢ - ٥\text{س} - ٦}{\text{س}^٢ - ٤}}$

الحل

....

٧ عين مجال الدالة د:

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} -٣ & ، \quad \text{س} < ٣ \\ ٥ - \text{س} & ، \quad \text{س} \geq ٣ \end{cases}$$

....

مثال (٣)

إذا كان مجال الدالة د :

د (س) = $\frac{س + ٥}{س^٢ + س + ٩}$ هو ح فإن : ٩ ∈ ......

الحل

∵ مجال الدالة هو ح

∴ المقام ليس له أصفار

∴ مجموعة حل المعادلة : $س^٢ + س + ٩ = ٠$

في ح هي ∅

∴ المميز < ٠

∴ $ب^٢ - ٤ ٩ حـ < ٠$

∴ $(١)^٢ - ٤ × ١ × ٩ < ٠$

∴ ١ - ٤ ٩ < ٠

∴ ٤ ٩ > ١

∴ ٩ > $\frac{١}{٤}$

∴ ٩ ∈] $\frac{١}{٤}$ ، ∞ [

مثال (٤)

إذا كان مجال الدالة د :

د (س) = $\frac{س + ٥}{س^٢ + ٩ س + ٤}$ هو ح فإن : ٩ ∈ ......

الحل

....

....

....

....

تمارين على تعيين مجال الدالة من خلال قاعدتها

١ إذا كان مجال الدالة د :

د (س) = $\frac{س + ٥}{س^٢ + ٩ س + ب}$ هو ح - {٢، ٣}

فأوجد قيمتي : ٩، ب

---

٢ إذا كان مجال الدالة د :

د (س) = $\sqrt{س^٢ - ٤ س + ٩}$ هو ح

فأوجد الفترة التي ينتمي إليها ٩

---

٣ إذا كانت الدالة د حيث د : ح - {٢} ⟵ ح

د (س) = $\frac{س + ٥}{س^٢ - ٩ + ١}$ فإن : د (٩) = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (حـ) $\frac{١٠}{٢١}$ (د) $\frac{٨}{٢١}$

---

٤ مجال الدالة د (س) = $\frac{٥}{\sqrt{س - ١} - ٣}$ هو ......

(أ)]١ ، ∞[(ب) [١ ، ∞[- {٣}

(حـ) [١ ، ∞[- {١٠} (د) [-٣ ، ∞[

---

٥ مجال الدالة د (س) = $\frac{س}{\sqrt{س} - ٢}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح - {٢}

(حـ) ح - {٠ ، ٢} (د) ح - {٨}

---

٦ إذا كانت العلاقة بين قياسات زوايا المضلع (ص) ، عدد أضلاع المضلع (س) هى

ص = π (س - ٢) فإن مجال الدالة ص = ...

(أ) $ص^+$ - {١ ، ٢} (ب) $ص^+$ (حـ) ح - {٢} (د) $ح^+$

7 عين مجال كلاً من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية

أ) $د(س) = \frac{٢س + ١}{س - ٢}$

ب) $د(س) = \frac{س + ٣}{س^٢ - ٩}$

حـ) $د(س) = \frac{٥ + ٢س}{س^٢ + س + ١}$

ء) $د(س) = \frac{٢س + ٣}{س^٢ - ٣س + ٢}$

هـ) $د(س) = \sqrt{س - ٣}$

و) $د(س) = \begin{cases} س & ، ٠ \leq س \leq ١ \\ ٢ - س & ، ١ < س \leq ٢ \end{cases}$

ز) $د(س) = \sqrt{س^٢ - ١٦}$

ع) $د(س) = \frac{١}{\sqrt{س^٢ - ٥س - ٦}}$

ط) $د(س) = \begin{cases} ٢س & ، س \in [٠ ، ٢] \\ ٦ & ، س \in]٢ ، ٤[\\ س + ٢ & ، س \in [٤ ، ٦] \end{cases}$

ى) $د(س) = \sqrt{٢ - س}$

٢ العمليات على الدوال - تركيب دالتين

أولاً: العمليات على الدوال
[جمع - طرح - ضرب - قسمة] دالتين

إذا كان: $د_١$ ، $د_٢$ دالتين مجالهما $م_١$ ، $م_٢$

حيث: $م_١ \cap م_٢ \neq \varnothing$

فإن:

١ جمع وطرح دالتين

$$(د_١ \pm د_٢)(س) = د_١(س) \pm د_٢(س)$$

$$مجال\ (د_١ \pm د_٢) = م_١ \cap م_٢$$

أي أن جمع دالتين هو دالة جديدة:

قاعدتها = مجموع قاعدتي الدالتين

ومجالها = تقاطع مجالي الدالتين

مثال ١

إذا كانت $د_١(س) = ٣س + ١$ ومجالها $= [١، ٥]$

، $د_٢(س) = س^٢ + س + ٢$ ومجالها $= [٣، ٧]$

فأوجد:

١ $د_١ + د_٢$ ثم أوجد $(د_١ + د_٢)(٣)$ ، $(د_١ + د_٢)(٧)$

٢ $د_١ - د_٢$ إن أمكن

الحل

$\because م_١ = [١، ٥]$ ، $م_٢ = [٣، ٧]$

نوجد تقاطع مجالي الدالتين

$\therefore م_١ \cap م_٢ = [١، ٥] \cap [٣، ٧] = [٣، ٥]$

---

١ $\because (د_١ + د_٢)(س) = د_١(س) + د_٢(س)$

$= (٣س + ١) + (س^٢ + س + ٢)$

$= س^٢ + ٤س + ٣$

ومجال $(د_١ + د_٢) = م_١ \cap م_٢$

$= [١، ٥] \cap [٣، ٧]$

$= [٣، ٥]$

$\therefore (د_١ + د_٢)(س) = س^٢ + ٤س + ٣$

ومجال $(د_١ + د_٢) = [٣، ٥]$

، $\because ٣ \in$ لمجال $(د_١ + د_٢)$

$\therefore (د_١ + د_٢)(٣) = (٣)^٢ + ٤ \times ٣ + ٣$

$= ٩ + ١٢ + ٣ = ٢٤$

، $\because ٧ \notin [٣، ٥]$

$\therefore (د_١ + د_٢)(٧)$ غير معرفة

---

٢ $\because (د_١ - د_٢)(س) = د_١(س) - د_٢(س)$

$= (٣س + ١) - (س^٢ + س + ٢)$

$= ٣س + ١ - س^٢ - س - ٢$

$= - س^٢ + ٢س - ١$

ومجال (د١ - د٢) = م١ ∩ م٢

= [١ ، ٥] ∩ [٣ ، ٧]

= [٣ ، ٥]

∴ (د١ − د٢) (س) = − س² + ٣ س − ١

• ومجال (د١ − د٢) = [٣ ، ٥]

ملحوظة مهمة

الدالة التى تساوى مجموع دالتين مجالها = تقاطع مجالى الدالتين

مثال ②

عين مجال كلاً من الدوال الآتية

١ د(س) = س + $\frac{١}{س}$

الحل

الدالة ر(س) = س مجالها هو م١ = ح

الدالة : ن(س) = $\frac{١}{س}$ مجالها م٢ = ح − {٠}

∴ مجال د = م١ ∩ م٢ = ح − {٠}

---

٢ د(س) = س² + √(س − ١)

الحل

∵ د تتكون من مجموع دالتين

ر(س) = س² هو م١ = ح

الدالة ن(س) = √(س − ١)

∵ دليل الجذر زوجي

∴ الدالة معرفة عندما س − ١ ≥ ٠

∴ س ≥ ١

∴ مجال الدالة ن هو : م٢ = [١ ، ∞[

∴ مجال د = م١ ∩ م٢

= ح ∩ [١ ، ∞[

= [١ ، ∞[

---

٣ د(س) = √(٧ − س) − √(س − ٢)

الحل

الدالة د تتكون من طرح دالتين

الدالة ر : ر(س) = √(٧ − س)

∵ دليل الجذر زوجي

∴ ر تكون معرفة عندما ٧ − س ≥ ٠

∴ − س ≥ − ٧ بالضرب × (−١) للطرفين

∴ س ≤ ٧

∴ مجال الدالة ر هو م١ =]−∞ ، ٧]

الدالة ن : ن(س) = √(س − ٢)

∵ دليل الجذر زوجي

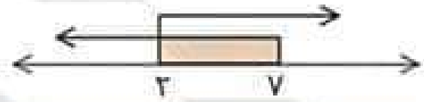
∴ ن تكون معرفة عندما س − ٢ ≥ ٠

∴ س ≥ ٢

∴ مجال الدالة ن هو م٢ = [٢ ، ∞[

∴ مجال د = م١ ∩ م٢

=]-∞، ٧] ∩ [٢، ∞[



∴ مجال د = [٢ ، ٧]

---

٤ د(س) = ∛(س-٣) + √(س^{٢}-٣س-٤)

الحل

∵ د تساوي مجموع دالتين هما :

الدالة : ر(س) = ∛(س-٣)

∴ مجال ر هو م١ = ح

، الدالة ن حيث :

ن(س) = √(س^{٢}-٣س-٤)

∵ دليل الجذر زوجي

∵ الدالة تكون معرفة عندما

س^{٢}-٣س-٤ ≥ ٠

بوضع : س^{٢}-٣س-٤ = ٠

∴ (س - ٤)(س + ١) = ٠

إما

س-٤ = ٠ | أو س + ١ = ٠

∴ س = ٤ | س = -١

الدالة تكون معرفة عندما س ∈ ح -]-١، ٤[

∴ مجال ن هو م٢ = ح -]-١، ٤[

∴ مجال د = م١ ∩ م٢

= ح ∩ (ح -]-١، ٤[)

= ح -]-١، ٤[

---

٥ د(س) = √(س-١) + √(٤-س^{٢})

الحل

الدالة د تتكون من مجموع دالتين

الدالة ر حيث ر(س) = √(س-١)

∵ دليل الجذر زوجي ∴ الدالة تكون معرفة

عندما س-١ ≥ ٠ ∴ س ≥ ١

∴ مجال ر هو م١ = [١، ∞[

، الدالة ن حيث

ن(س) = √(٤-س^{٢}) ∵ دليل الجذر زوجي

∵ الدالة تكون معرفة عندما ٤ - س^{٢} ≥ ٠

بوضع : ٤ - س^{٢} = ٠

∴ (٢ - س)(٢ + س) = ٠

إما ٢ - س = ٠ | أو ٢ + س = ٠

∴ س = ٢ | س = -٢

نبحث إشارة المقدار (٤ - س^{٢})

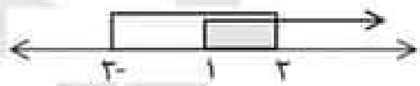
د(س)

الدالة تكون معرفة

عندما س ∈ [-٢، ٢]

∴ مجال ن هو م٢=[-٢، ٢]

∴ مجال د = م١ ∩ م٢



= [١، ∞[∩ [-٢، ٢] = [١، ٢]

∴ مجال د = [١، ٢]

---

٢ ضرب دالتين

(د١.د٢)(س) = د١(س) × د٢(س)

ومجال (د١.د٢) = م١ ∩ م٢

مثال ③

عين مجال كلاً من الدوال الآتية

١ د(س) = س √(س-٣)

الحل

الدالة تتكون من حاصل ضرب دالتين

∴ مجالها = تقاطع مجالي الدالتين

مجال ر : ر(س) = س

هو م١ = ح

، مجال الدالة ن : ن(س) = √(س-٣)

بوضع : س-٣ ≥ ٠ ∴ س ≥ ٣

∴ مجال الدالة ن هو م٢= [٣، ∞[

∴ مجال الدالة د = م١ ∩ م٢

= ح ∩ [٣، ∞[

= [٣، ∞[

---

٢ د(س) = (س٢-٤س) √(٤-س)

الحل

∵ د(س) = حاصل ضرب دالتين

∴ مجال د = تقاطع مجال هاتين الدالتين

الدالة ر : ر(س) = س٢-٤س

دالة كثيرة الحدود مجالها هو م١ = ح

الدالة ن : ن(س) = √(٤-س)

تكون معرفة عندما : ٤-س ≥ ٠

∴ -س ≥ -٤ بالضرب في (-١)

∴ س ≤ ٤

∴ مجال الدالة ن هو

م٢=]-∞، ٤]

∴ مجال الدالة د = م١ ∩ م٢

= ح ∩]-∞، ٤]

=]-∞، ٤]

٣ قسمة دالتين

$$\left(\frac{د}{ر}\right)(س) = \frac{د(س)}{ر(س)}$$

، مجال $\left(\frac{د}{ر}\right)$

= مجال د $\cap$ مجال ر − {أصفار الدالة ر}

∴ مجال دالة القام =]-∞، ٧[

أصفار دالة القام

بوضع : $\sqrt{٧-س} = ٠$ بالتربيع للطرفين

س = ٧

برضع : ٩ − س^٢ = ٠

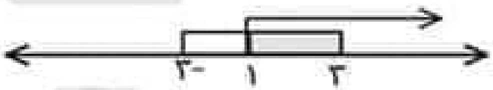
(٣ − س) (٣ + س) = ٠

اما ٣ − س = ٠ | أو ٣ + س = ٠

∴ س = ٣ | س = −٣

∴ مجال دالة المقام = [−٣ ، ٣]

أصفار دالة المقام = {٣ ، −٣}



مجال د

= مجال ق ∩ مجال ر − {أصفار الدالة ر}

= (]١ ، ∞[∩ [−٣ ، ٣]) − {٣ ، −٣}

=]١ ، ٣[

تمارين على العمليات على الدوال

١ إذا كانت د، ر دالتين حقيقيتين؛ حيث د(س) = س^٢ − ١، ر(س) = √(٥ − س)، فأوجد قيمة (د/ر)(١) إن أمكن.

أ غير معرّفة ب صفر ج −٢ د ١/٢

---

٢ إذا كانت د، ر دالتين حقيقيتين، وكانت د(س) = س^٢ − ٥س، ر(س) = √(٣ − س)، فأوجد مجال الدالة (د + ر).

---

٣ إذا كانت:

د١: ح⁺ ⟵ ح ؛ حيث د١(س) = −٥س + ٢

د٢:]−٨، ٧] ⟵ ح حيث د٢(س) = −٥س − ١،

فأوجد قيمة (د١ · د٢)(س)، وحدّد مجالها.

---

٤ إذا كانت د: ح⁻ ← ح حيث د(س) = −س + ٤، ر: [−٤، −١] ← ح؛ حيث ر(س) = −٢س + ٥، فأوجد قيمة (د + ر)(٧) إن أمكن

---

٥ إذا كانت:

د١ : [−٦، ٥] ⟵ ح حيث د١(س) = س + ٥

وكانت:

د٢ :]−∞، −٢] ⟵ ح حيث

د٢(س) = ٤س^٢ − ١٨س + ٢٠.

فأوجد (د٢/د١)(س)، وحدّد مجالها.

---

٦ إذا كانت : د ، ر : ح ⟵ ح حيث د(س) = ٢س + ١ ، وكان (د + ر)(س) = س^٢ + ٢س − ١ فإن : ر(−١) = ...

أ ٢ ب صفر ج −١ د −٢

٧ إذا كان:

د$_١$: [−٨، ٢[← ح ؛ حيث د$_١$(س) = س^٢ + ٢س − ٣

د$_٢$:]−١، ∞[← ح ؛ حيث د$_٢$(س) = ٢س + ٥،

فاكتب مقدارًا يمثّل (د$_١$ + د$_٢$) (س) ووضّح مجالها.

- **أ** س^٢ + ٤س + ٢، س ∈]−٨، ∞[
- **ب** س^٢ + ٤س + ٢، س ∈]−١، ∞[
- **ج** س^٢ + ٤س + ٢، س ∈]−١، ٢[
- **د** س^٢ + ٤س + ٢، س ∈ [−١، ٢]
- **هـ** س^٢ + ٤س + ٢، س ∈ [−٨، ٢]

---

٨ تُعرّف الدالتان د، ر في صورة مجموعات من الأزواج المرتّبة، كما يأتي:

د = {(١، ٢)، (٢، −١)، (٣، ٠)، (٤، ٨)}،

ر = {(٢، −٢)، (٣، −٣)، (٤، −٤)، (٥، −٥)}

فإن : د + ر = ...

- **أ** {(٢، ٣)، (−٣، −٣)، (٢، ٤)}
- **ب** {(١، ٥)، (٣، −١)، (٤، ٢)}
- **ج** {(٢، −٣)، (٣، −٣)، (٤، ٤)}
- **د** {(٨، ٢)، (٥، −٤)، (٧، ١)}
- **هـ** = {(٢، −٣)، (٣، −٣)، (٤، ٤)، (١، ٣)، (٥، −٥)}

---

٩ إذا كانت د : ح$^+$ ← ح حيث د (س) = س − ٥

، ر : [−١، ٥] ← ح

حيث ر (س) = س − ٢ فإن : $\left(\frac{د}{ر}\right)$ (١) = ...

أ ٨ **ب** ٤ **ج** ٢ **د** ١

---

١٠ إذا كان د : ح ← ح حيث د (س) = س^٢ − س ،

ر : ح ← ح حيث ر (س) = ٣س − ٢

فإن : (د ∘ ر − ٦ ر) (٢) = ...

أ −١٦ **ب** ١٦ **ج** ٤٠ **د** ٢٤

---

١١ مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{س + ٢}$ − $\sqrt{٣ − س}$ ، هو ....

أ ح − [−٢، ٣] **ب**]−٢، ٣[**ج** [−٢، ٣] **د** ح

---

١٢ مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{س − ٤}$ − $\sqrt[٣]{س − ٢}$ هو ....

أ]٤، ∞[**ب** [٤، ∞[**ج** [٢، ∞[**د** ح

---

١٣ عين مجال كلا من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية

أ د (س) = $\frac{٥س + ٢}{\sqrt{س − ٢} − ١}$

ب د (س) = $\sqrt{\frac{س − ٣}{س − ٥}}$

ج د (س) = $\frac{\frac{٣}{س − ١}}{\frac{١}{س − ٢} + ٤}$

---

١٤ مجال الدالة د حيث د (س) = $\frac{\sqrt{س − ٣}}{\sqrt{٥ − س}}$ هو ......

أ {−٣، −٥} **ب** [٣، ٥[

ج ح − {٣، ٥} **د**]٣، ٥]

---

١٥ مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{\frac{٣ − س}{٥ − س}}$ هو ....

أ ح − [٣، ٥[**ب** [٣، ٥]

ج ح −]٣، ٥] **د**]٣، ٥]

ثانياً: تركيب دالتين

إذا كانت: د ، ر دالتين

مدى الدالة ر $\cap$ مجال الدالة د $\neq \emptyset$

فإنه يمكن استنتاج دالة جديدة ع

تتركب من الدالتين السابقتين

ع = (د $\circ$ ر) وتقرأ [د تركيب ر]

أو [د بعد ر]

ويكون:

(د $\circ$ ر) (س) = د [ر (س)]

فمثلاً: إذا كانت: د (س) = س^{2} + ١

، ر (س) = س^{2} + ٤

فإن: (د $\circ$ ر) (س) = (س^{2} + ٤)^{2} + ١

بالمثل: (ر $\circ$ د) (س) = (س^{2} + ١)^{2} + ٤

تعيين مجال تركيب دالتين

مجال: (د $\circ$ ر)

= {س : س $\in$ مجال ر ، ر (س) $\in$ مجال د}

لإيجاد مجال (د $\circ$ ر)

١ نوجد م$_{1}$ = مجال الدالة ر

٢ نوجد مجال (د $\circ$ ر) (س) = م$_{2}$

فيكون: مجال: (د $\circ$ ر) = م$_{1}$ $\cap$ م$_{2}$

مثال ⑤

إذا كانت:

د (س) = س^{3} ، ر (س) = س + ١

فأوجد:

١) (د $\circ$ ر) (١) ، (د $\circ$ ر) (-١)

٢) (ر $\circ$ د) (١) ، (ر $\circ$ د) (-١)

الحل

١ نوجد (د $\circ$ ر) (س)

(د $\circ$ ر) (س) = د [ر (س)]

(د $\circ$ ر) (س) = (س + ١)^{3}

مجال (د $\circ$ ر) = ح ∴ عند س = ١

(د $\circ$ ر) (١) = (١ + ١)^{3}

= (٢)^{3}

= ٨

عند س = -١

(د $\circ$ ر) (-١) = (-١ + ١)^{3}

= (٠)^{3}

= ٠

---

٢ نوجد (ر $\circ$ د) (س)

(ر $\circ$ د) (س) = ر [د (س)]

(ر $\circ$ د) (س) = س^{3} + ١

مجال (ر ∘ د) = ح ∴ عند س = ١

(ر ∘ د)(١) = $(١)^{٣}$ + ١

= ١ + ١

= ٢

عند س = -١

(ر ∘ د)(١) = $(-١)^{٣}$ + ١

= -١ + ١

= ٠

مثال ⑥

إذا كان: د(س) = $\sqrt{س-١}$ ، ر(س) = $س^{٢}$ - ٣

أوجد: (د ∘ ر)(س) موضحا المجال

ثم أوجد: (د ∘ ر)(٢)

الحل

(د ∘ ر)(س) = د[ر(س)]

= $\sqrt{ر(س)-١}$

= $\sqrt{س^{٢}-٣-١}$

= $\sqrt{س^{٢}-٤}$

∴ (د ∘ ر)(س) = $\sqrt{س^{٢}-٤}$

نعين مجال (د ∘ ر)

(١) نوجد مجال الدالة ر

حيث ر(س) = $س^{٢}$ - ٣ وهي دالة كثيرة الحدود من الدرجة الثانية مجالها

$م_{١}$ = ح

(٢) نوجد مجال (د ∘ ر)(س)

∵ (د ∘ ر) = $\sqrt{س^{٢}-٤}$

∴ (د ∘ ر) تكون معرفة عندما

$س^{٢}$ - ٤ ≥ ٠

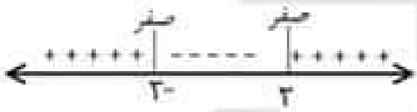
نبحث إشارة المقدار ($س^{٢}$ - ٤ ≥ ٠)

بوضع: $س^{٢}$ - ٤ = ٠

∴ (س - ٢)(س + ٢) = ٠

إما

س - ٢ = ٠ | أو س + ٢ = ٠
س = ٢ | س = -٢



∴ الدالة (د ∘ ر) تكون معرفة عندما س ∈ ح -]-٢، ٢[

∴ $م_{٢}$ = ح -]-٢، ٢[

٣) مجال الدالة: (د ∘ ر)

= $م_{١}$ ∩ $م_{٢}$

= ح ∩ (ح -]-٢، ٢[)

= ح -]-٢، ٢[

∵ ٢ ∈ لمجال الدالة: (د ∘ ر)

(د ∘ ر)(٢) = $\sqrt{(٢)^{٢}-٤}$ = $\sqrt{٤-٤}$ = ٠

مثال ٧

إذا كانت ر(س) = $\sqrt{٥ - س}$ ، د(س) = $\sqrt{س - ٣}$

فأوجد مجال (د ∘ ر)

الحل

(١) نوجد مجال الدالة :

ر(س) = $\sqrt{٥ - س}$

ر(س) تكون معرفة عندما :

٥ - س ≥ ٠

- س ≥ -٥ بالضرب في (-١) للطرفين

∴ س ≤ ٥

∴ م١ =]-∞ ، ٥]

(٢) نوجد : (د ∘ ر)(س)

(د ∘ ر)(س) = $\sqrt{\sqrt{٥ - س} - ٣}$

نوجد قيم س التي تجعل :

$\sqrt{٥ - س}$ - ٣ ≥ ٠

∴ $\sqrt{٥ - س}$ ≥ ٣ بتربيع الطرفين

∴ ٥ - س ≥ ٩

∴ -س ≥ ٩ - ٥

∴ -س ≥ ٤ بالضرب في (-١) للطرفين

∴ س ≤ -٤

∴ س ∈]-∞ ، ٤]

∴ م٢ =]-∞ ، ٤]

(٣) مجال الدالة (د ∘ ر)

= م١ ∩ م٢

=]-∞ ، ٥] ∩]-∞ ، ٤]

=]-∞ ، ٤]

مثال ٨

إذا كانت : د(١) = ٥ ، ر(٧) = ١ فإن :

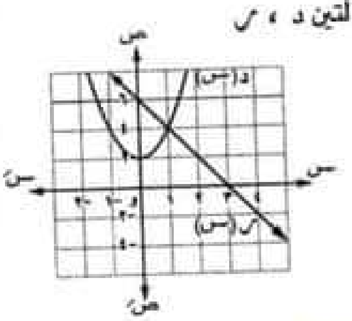
(د ∘ ر)(٧) = ...

أ) ١ ب) ٦ ج) ٧ د) ٥

مثال ٩

الشكل المقابل يوضح منحنى الدالتين د ، ر

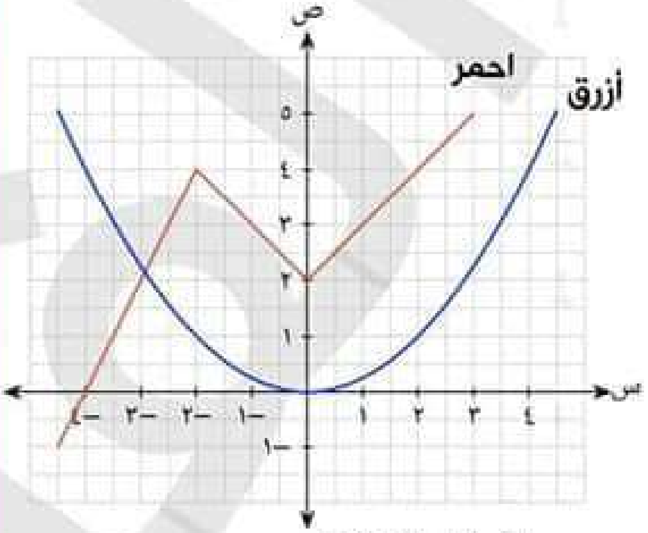
فإن : (ر ∘ د)(١) = ...



أ) ٦ ب) -٤ ج) ٥ د) -٢

تمارين على تركيب دالتين

١ في الشكل الآتي، يمثّل المنحنى الأحمر ص = د(س)، ويمثّل المنحنى الأزرق ص = ر(س).



ما قيمة د(ر(٢))؟

---

٢ إذا كانت الدالة د(س) = $\frac{١١}{س}$؛ حيث س ≠ ٠، والدالة ر(س) = س^{٢} − ٤، فأوجد مجال الدالة (د ∘ ر)(س).

---

٣ : أوجد قيم س التي تجعل (د ∘ ر)(س) = ٨٤٨؛ حيث د(س) = س^{٢} − ٥٢، ر(س) = ١٥س.

---

٤ افترِض أن د$^{(٢)}$ = د ∘ د، د$^{(٣)}$ = د ∘ د ∘ د، وهكذا؛ بحيث تصبح د$^{(٢)}$(س) = د(د(س))، د$^{(٣)}$(س) = د(د(د(س)))، وهكذا. افترِض أن د(س) = ٤س − ٥. أوجد د$^{(٤)}$(٣).

---

٥ إذا كانت د(س) = س − ٤، ر(س) = س^{٢}، ن(س) = ٢س، فاحسب قيمة د(ر(ن(٣))).

---

٦ إذا كانت د(س) = اس + ب، ر(س) = جـس + ء، فما معامل س في د(ر(س))؟

---

٧ د(س) = $\frac{اس + ب}{جـس + ء}$، ر(س) = $\frac{ءس − ب}{−جـس + ا}$. أوجد في أبسط صورة د(ر(س))، ر(د(س)).

---

٨ : افترِض أن د$^{(٢)}$ = د ∘ د، د$^{(٣)}$ = د ∘ د ∘ د، وهكذا. بملاحظة أن د$^{(ن)}$ تكون دالة خطية دائمًا عندما تكون د(س) = ٢س + ٣، أوجد د$^{(١٠)}$ دون تركيب فعلي.

---

٩ إذا كانت الدالة ء(س) = $\frac{٦}{س + ٣٢}$، والدالة ر(س) = س^{٢} − ٦٨، فأوجد (ء ∘ ر)(س) في أبسط صورة، وأوجد مجالها.

---

١٠ إذا كانت : د(س) = $\frac{١}{س}$ ، ر(س) = س^{٢} − ١

فإن مجال (د ∘ ر) = ...

أ ح − {١ ، −١}   ب {٠ ، ١ ، −١}

جـ ح − {٠ ، ١ ، −١}   ء [−١ ، ١]

---

١١ مجال الدالة (د ∘ ر) حيث : د(س) = $\sqrt{س − ٢}$ ، ر(س) = $\sqrt{٦ − س}$ هو ....

أ]−∞ ، ٢]   ب ح   جـ [٢ ، ∞[ء]−∞ ، ٢[

---

١٢ إذا كان : د(س) = $\sqrt{س}$ ، ر(س) = س^{٢}

فإن : مجال (د ∘ ر) = ...

أ]−∞ ، ٠]   ب ح   جـ [٠ ، ∞[ء ح$^{+}$

---

١٣ إذا كان : د(س) = $\sqrt{س + ١}$ ، ر(س) = $\frac{٢}{س − ٢}$،

فأوجد مجال (د ∘ ر)

١٤ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} + ١ & ، \text{س} < ٠ \\ ٢\text{س} + ١ & ، \text{س} \geq ٠ \end{cases}$

، ر (س) = $\begin{cases} ٤\text{س} - ٢ & ، \text{س} < ٢ \\ \text{س}^{٢} + ٢ & ، \text{س} \geq ٢ \end{cases}$

فإن : (ر ∘ د) (−١) = ...

أ −١٧   ب ٦   ج ١٠   د ٣٧

---

١٥ إذا كان : د (س) = س^{٢} + ٦ ، ر (س) = ٣ س

أ حدد : قيم س التي تجعل (د ∘ ر) (س) = ٤٢

ب أوجد : (د ∘ ر) (٣)

---

١٦ إذا كانت : د (س) = س^{٢} ، ر (س) = ٢ س + ٣

فإن مجموعة حل المعادلة د (ر (س)) = د (س) هي ....

أ {−١ ، −٣}   ب {١ ، ٣}   ج {−٣ ، ١}   د {−١ ، ٣}

---

١٧ إذا كانت د : ح ← ح وكان : د (س) = ٢ س − ٣

، (ر ∘ د) (س) = س + ٢   فإن : ر (س) = ...

أ $\frac{\text{س} + ٢}{٢\text{س} - ٣}$ ب ٢ س^{٢} + س − ٦

ج $\frac{\text{س} + ٧}{٢}$ د $\frac{\text{س} + ٣}{٢}$

---

١٨ إذا كانت : د (س) = س + ٢ ، ر (س) = $\frac{\text{س} - \text{ك}}{٢\text{س} - ١}$

وكان : (ر ∘ د) (٠) = (د ∘ ر) (١)   فإن : ك = ...

أ $\frac{٧}{٢}$ ب ١   ج ٧   د ٥

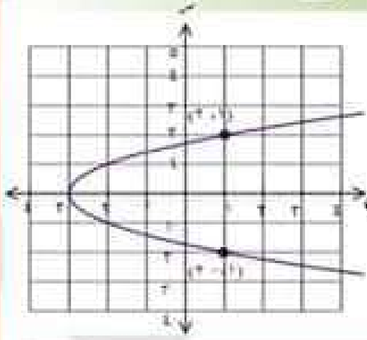
بعض خواص الدوال
الدوال الزوجية والدوال الفردية-الدوال الأحادية

أولاً: التماثل حول محور السينات

إذا كان: لكل نقطة أ (س، ص) تقع على المنحنى توجد نقطة أخرى أَ (س، -ص) تقع على هذا الشكل

الشكل المقابل

متماثل حور محور السينات



هذا النوع من الأشكال البيانية لايمثل دالة لوجود خط رأسي يقطع المنحنى في أكثر من نقطة

مثال ①

إذا كانت النقطة (٣ ، -١) تقع على شكل بياني متماثل حول محور السينات فإن النقطة .... تقع على نفس الشكل البياني

مثال ②

شكل بياني متماثل حول محور السينات ورسم خط رأسي يقطع الشكل في النقطتين أ، ب حيث أ = (٢، ٣) فإن طول أ ب = ...

مثال ③

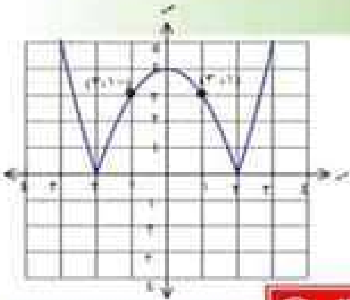
شكل بياني متماثل حول محور السينات ورسم خط رأسي يقطع الشكل في النقطتين أ، ب حيث أ = (س، ٣) وكان منتصف أ ب = (٨، ص) فإن :

س + ص = ...

ثانياً: التماثل حول محور الصادات

يكون الشكل البياني متماثل حول محور الصادات إذا كان لكل نقطة أ (س، ص) تقع على هذا الشكل توجد نقطة أخرى أَ (-س، ص) تقع أيضا على هذا الشكل

الشكل المقابل يمثل منحنى متماثل حول محور الصادات



مثال ④

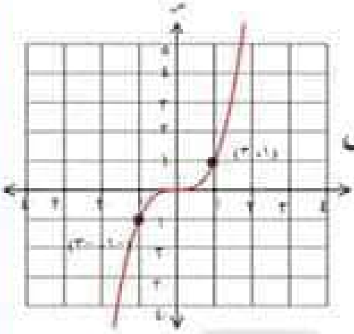
إذا كانت النقطة (-٣ ، -٢) تقع على منحنى بياني متماثل حول محور الصادات فإن النقطة .... تقع على هذا الشكل

ثالثاً: التماثل حول نقطة الأصل

يكون الشكل البياني الممثل لعلاقة متماثل حول نقطة الأصل إذا كانت كل نقطة أ (س، ص) توجد نقطة أَ (-س، -ص) تقع على هذا الشكل

الشكل المقابل:

يمثل منحنى متماثل حول نقطة الأصل



الدوال الزوجية والدوال الفردية

أولاً :الدالة الزوجية

التعرف على الدالة الزوجية يكون جبرياً من قاعدتها أو من خلال شكلها البياني

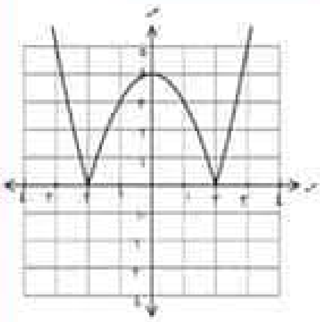
بيانيا

الدالة الممثلة بيانياً : تكون زوجية إذا كان منحناها متماثل حول محور الصادات

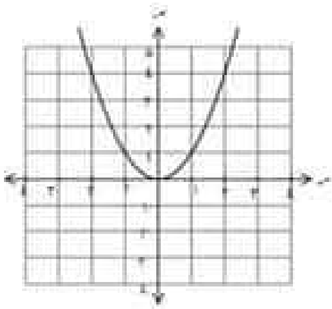
أى أن

- لأى نقطة (س،ص) تقع على منحنى الدالة يكون النقطة (-س،ص) تقع أيضا على منحنى هذه الدالة

الشكلان التاليان يمثلان دالتين زوجيتين



دالة زوجية



دالة زوجية

لأنهما متماثلتين حول محور الصادات

جبرياً :

يقال للدالة د بأنها زوجية اذا كان :

د(-س) = د(س)

لكل س، -س ∋ لمجال د

مثال ①

بين أن كلاً من الدوال الآتية هى دوال زوجية

١ د(س) = $س^2 + 3$

٢ د(س) = $(1 - س)^5 + (1 + س)^5$

٣ د(س) = $\left(\frac{1 - س}{س + 1}\right)^2 + \left(\frac{1 + س}{س - 1}\right)^2$

الحل

١ د(س) = $س^2 + 3$

دالة كثيرة حدود مجالها = ح

∴ لكل س ، -س ∋ مجال د فإن :

د(-س) = $(-س)^2 + 3$

= $س^2 + 3$

= د(س)

∴ الدالة زوجية

---

٢ الدالة د :

د(س) = $(1 - س)^5 + (1 + س)^5$

مجالها = ح

∴ لكل س ، -س ∋ مجال د فإن :

∵ $د(-س) = \left(١-(-س)\right)^{٥} + \left(١+(-س)\right)^{٥}$

$= (١+س)^{٥} + (١-س)^{٥}$

$= (١-س)^{٥} + (١+س)^{٥}$

$= د(س)$ ∴ الدالة زوجية

---

٣ $د(س) = \left(\frac{١-س}{١+س}\right)^{٣} + \left(\frac{١+س}{١-س}\right)^{٣}$

مجال د $= ح - \{-١ ، ١\}$

∴ لكل س ، -س ∈ مجال د فإن :

∴ $د(-س) = \left(\frac{١-(-س)}{١+(-س)}\right)^{٣} + \left(\frac{١+(-س)}{١-(-س)}\right)^{٣}$

$= \left(\frac{١+س}{١-س}\right)^{٣} + \left(\frac{١-س}{١+س}\right)^{٣}$

$= د(س)$ ∴ د دالة زوجية

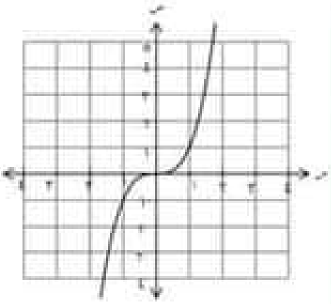
ثانياً : الدالة الفردية

بيانيا

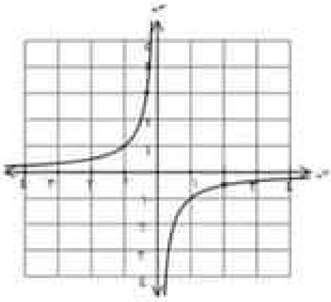
الدالة الممثلة بيانياً : تكون فردية إذا كان منحناها متماثل حول نقطة الأصل

أى أن

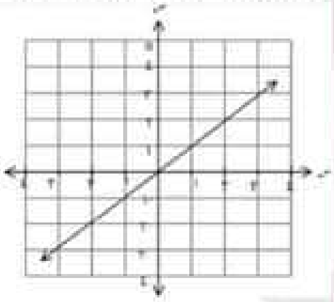
- لأى نقطة (س،ص) تقع على منحنى الدالة فإن النقطة (-س،-ص) تقع أيضا على منحنى هذه الدالة



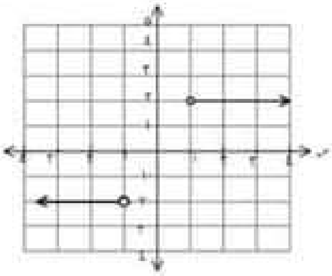
دالة فردية



دالة فردية



دالة فردية



دالة فردية

جبرياً

يقال للدالة د بأنها فردية اذا كان :

$د(-س) = -د(س)$

لكل س، -س ∈ لمجال د

مثال ٦

بين أن كلاً من الدوال الآتية هى دوال فردية

١ $د(س) = س^{٣} + س$

٢ $د(س) = \left(\frac{١-س}{١+س}\right)^{٣} - \left(\frac{١+س}{١-س}\right)^{٣}$

٣ $د(س) = \left(س + \frac{١}{س}\right)^{٥}$

الحل

١ مجال د $= ح$

لكل س ، -س $\in$ مجال د فإن :

$$\text{د}(-\text{س}) = (-\text{س})^{٣} + (-\text{س})$$

$$= -\text{س}^{٣} - \text{س}$$

$$= -(\text{س}^{٣} + \text{س})$$

$$= -\text{د}(\text{س})$$

∴ الدالة فردية

---

٢ $\text{د}(\text{س}) = \left(\frac{١-\text{س}}{١+\text{س}}\right)^{٣} - \left(\frac{١+\text{س}}{١-\text{س}}\right)^{٣}$

∵ مجال د = ح - {-١ ، ١}

∴ لكل س ، -س $\in$ مجال د فإن :

$$\text{د}(-\text{س}) = \left(\frac{١-(-\text{س})}{١+(-\text{س})}\right)^{٣} - \left(\frac{١+(-\text{س})}{١-(-\text{س})}\right)^{٣}$$

$$= \left(\frac{١+\text{س}}{١-\text{س}}\right)^{٣} - \left(\frac{١-\text{س}}{١+\text{س}}\right)^{٣}$$

$$= -\left[\left(\frac{١-\text{س}}{١+\text{س}}\right)^{٣} - \left(\frac{١+\text{س}}{١-\text{س}}\right)^{٣}\right]$$

$= -\text{د}(\text{س})$ ∴ الدالة فردية

---

٣ $\text{د}(\text{س}) = \left(\text{س} + \frac{١}{\text{س}}\right)^{٥}$

مجال د = ح - {٠}

∴ لكل س ، -س $\in$ مجال د فإن :

$$\text{د}(-\text{س}) = \left(-\text{س} + \frac{١}{-\text{س}}\right)^{٥}$$

$= \left(-\text{س} - \frac{١}{\text{س}}\right)^{٥}$ بأخذ -١ عامل مشترك

$$= \left(-\left(\text{س} + \frac{١}{\text{س}}\right)\right)^{٥}$$

$$= -\left(\text{س} + \frac{١}{\text{س}}\right)^{٥}$$

$$= -\text{د}(\text{س})$$

∴ الدالة فردية

ملاحظات

١ إذا كانت : $\text{د}(-\text{س}) \neq \text{د}(\text{س})$

، $\text{د}(-\text{س}) \neq -\text{د}(\text{س})$

في هذه الحالة تكون الدالة
ليست زوجية و لا فردية

مثال ⑦

ابحث نوع الدالة د :
$\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٢$ من حيث
كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك

الحل

∵ مجال د = ح

∴ لكل س ، -س $\in$ مجال د فإن :

$$\text{د}(-\text{س}) = (-\text{س})^{٢} - ٣(-\text{س}) + ٢$$

$$= \text{س}^{٢} + ٣\text{س} + ٢$$

$$\neq \text{د}(\text{س})$$

$$\neq -\text{د}(\text{س})$$

الدالة الناتجة ليست الدالة الأصلية و لا معكوس جمعي لها

∴ الدالة ليست زوجية و لا فردية

لكل س ، -س $\in$ مجال د فإن :

$د(-س) = (-س)^{3} + (-س)$

$= -س^{3} - س$

$= -(س^{3} + س)$

$= -د(س)$

$\therefore$ الدالة فردية

---

2 $د(س) = \left(\frac{1-س}{1+س}\right)^{3} - \left(\frac{1+س}{1-س}\right)^{3}$

$\because$ مجال د $=$ ح $- \{-1 ، 1\}$

$\therefore$ لكل س ، -س $\in$ مجال د فإن :

$د(-س) = \left(\frac{1-(-س)}{1+(-س)}\right)^{3} - \left(\frac{1+(-س)}{1-(-س)}\right)^{3}$

$= \left(\frac{1+س}{1-س}\right)^{3} - \left(\frac{1-س}{1+س}\right)^{3}$

$= -\left[\left(\frac{1-س}{1+س}\right)^{3} - \left(\frac{1+س}{1-س}\right)^{3}\right]$

$= -د(س)$ $\therefore$ الدالة فردية

---

3 $د(س) = \left(س + \frac{1}{س}\right)^{5}$

مجال د $=$ ح $- \{0\}$

$\therefore$ لكل س ، -س $\in$ مجال د فإن :

$د(-س) = \left(-س + \frac{1}{-س}\right)^{5}$

$= \left(-س - \frac{1}{س}\right)^{5}$ بأخذ -1 عامل مشترك

$= \left(-\left(س + \frac{1}{س}\right)\right)^{5}$

$= -\left(س + \frac{1}{س}\right)^{5}$

$= -د(س)$

$\therefore$ الدالة فردية

ملاحظات

1 إذا كانت : $د(-س) \neq د(س)$

، $د(-س) \neq -د(س)$

في هذه الحالة تكون الدالة

ليست زوجية و لا فردية

مثال 7

ابحث نوع الدالة د :

$د(س) = س^{2} - 3س + 2$ من حيث

كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك

الحل

$\because$ مجال د $=$ ح

$\therefore$ لكل س ، -س $\in$ مجال د فإن :

$د(-س) = (-س)^{2} - 3(-س) + 2$

$= س^{2} + 3س + 2$

$\neq د(س)$

$\neq -د(س)$

الدالة الناتجة ليست الدالة الأصلية و لا معكوس جمعي لها

$\therefore$ الدالة ليست زوجية لا فردية

الحل

مجال د = ح

لأن د تساوى حاصل ضرب دالتين مجال كلاً منهما يساوى ح

، د (-س) = (-س)^2 حا(-س)

= س^2 (-حا(س))

= - س^2 حا س

∴ الدالة فردية

---

٢ د (س) = (حاس + حتاس)^2 - ١

الحل

د(س) = حا^{2}س + ٢ حاس حتاس + حتا^{2}س - ١

∵ حا^{2}س + حتا^{2}س = ١

∴ د (س) = ~~١~~ + ٢حاس حتاس - ~~١~~

∴ د (س) = ٢حاس حتاس

∴ د (-س) = ٢حا (-س) حتا (-س)

∴ د (-س) = ٢ (- حاس) حتاس

∴ د (-س) = -٢حاس حتاس

= - د (س)

∴ الدالة فردية

---

٤ **الدالة التى تساوى :**

- مجموع دالتين زوجيتين
- حاصل ضرب دالتين فرديتين أو زوجيتين
- خارج قسمة دالتين زوجيتين معاً أو فرديتين معا

تكون دالة زوجية

---

٥ **الدالة التى تساوى :**

- مجموع دالتين فرديتين
- حاصل ضرب دالتين إحدهما فردية والأخرى زوجية
- خارج قسمة دالتين إحدهما فردية والأخرى زوجية

تكون دالة فردية

---

٦ اذا كانت د: معرفة على الفترة [٢ ، ب]
وكانت د دالة زوجية أو فردية فإن
أ = - ب أى أ + ب = ٠

مثال (١٣)

اذا كانت الدالة د: د: [-٣ ، ب] ⟵ ح
،د دالة زوجية فإن ب = ...

مثال (١٤)

١ احدى الدوال المعرفة بالقواعد الآتية زوجية

أ د(س) = س حتا س
ب د (س) = س^٣
جـ د (س) = س حا س
د د (س) = حا س

---

٢ احدى الدوال المعرفة بالقواعد الآتية فردية

أ س^٣ حا س
ب ظا^{2}س
جـ س حتا س
د ١

ابحث نوع كلاً من الدوال الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك

1) د(س) = س² + جتا س

---

2) د(س) = جا س + طا س

---

3) د(س) = قتا س + س²

---

4) د(س) = س² جا س

---

5) د(س) = $\frac{\text{جتا س}}{\text{س}^2}$

---

6) د(س) = $\frac{\text{س}^2 - \text{س}}{\text{س}^2 - 4}$

---

7) د(س) = س جتا س

---

8) د(س) = س⁴ جا س

مثال (15)

ابحث نوع الدالة الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \frac{1}{\text{س}} & \text{عندما س} < 0 \\ -\frac{1}{\text{س}} & \text{عندما س} > 0 \end{cases}$$

الحل

مجال د = ح - {0}

$$\text{د(-س)} = \begin{cases} -\frac{1}{\text{س}} & \text{عندما -س} < 0 \\ \frac{1}{\text{س}} & \text{عندما - س} > 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{\text{س}} & \text{عندما س} > 0 \\ \frac{1}{\text{س}} & \text{عندما س} < 0 \end{cases}$$

= د(س)   ∴ الدالة زوجية

تدريب (2)

1) اذا كانت: د دالة فردية

فإن: $\frac{\text{د(أ)} + 3\text{د(-أ)}}{\text{د(-أ)}}$ = ...

(أ) 2   (ب) -2

(ج) 4   (د) -2د(أ)

---

2) اذا كانت د دالة زوجية حيث

د(س) = $\frac{8}{\text{س}^2 + \text{أس} + 9}$ ، س ≠ 0

فإن: أ = ...

(أ) صفر   (ب) 6

(ج) 2   (د) -6

٣ اذا كانت د دالة زوجية، $٢ \in$ لمجال د

فإن :

د (٢) + د (−٢) = ...

ⓐ صفر ⓑ ٤

ⓒ ٢ ⓓ ٢ د (٢)

---

٤ اذا كانت د دالة زوجية، على الفترة

[−٢، ب] فإن : ب = ...

ⓐ صفر ⓑ ٤

ⓒ ٢ ⓓ −٢

---

٥ اذا كانت د دالة فردية، $أ \in$ لمجال د

فإن :

د (أ) + د (−أ) = ...

ⓐ صفر ⓑ ٢ د (أ)

ⓒ أ ⓓ د (أ)

---

٦ اذا كانت د دالة فردية، د (١) = ٢

فأى من النقط الآتية تقع على منحنى

الدالة د

ⓐ (−١، ٢) ⓑ (−١، −٢)

ⓒ (−١، ٢) ⓓ (−١، ٠)

تمارين على **الدوال الزوجية والدوال الفردية**

١ أي من النقاط التالية تكوِّن دالة فردية؟

أ (−٨، ٨)، (−٥، ٦)، (٠، ٠)، (٥، −٦)، (٨، −٨)

ب (−٨، ٨)، (−٥، ٦)، (٠، ٤)، (٥، −٦)، (٨، −٨)

ج (−٨، ٨)، (−٥، ٦)، (٠، ٤)، (٥، ٦)، (٨، ٨)

د (−٨، ٨)، (−٥، ٦)، (٠، ٠)، (٥، ٦)، (٨، ٨)

---

٢ هل الدالة $د(س) = \frac{\text{جتا }٧س \text{ ظا }٨س}{\text{ظتا }٤س}$

زوجية أم فردية أم ليست زوجية ولا فردية؟

أ فردية ب ليست زوجية ولا فردية ج زوجية

---

٣ أوجد قيمة ا إذا كانت د دالة زوجية؛ حيث

$د(س) = -\frac{٧}{٤س^{٢} + اس - ١}$ ، س ≠ ٠.

---

٤ أي من النقاط التالية تكون منحنًى يمثِّل دالة زوجية

أ (−٩، ٦)، (−٨، ٥)، (٠، ٠)، (٨، −٥)، (٩، −٦)

ب (−٩، ٦)، (−٨، ٥)، (٠، ٤)، (٨، ٦)، (٩، ٥)

ج (−٩، −٦)، (−٨، −٥)، (٠، ٤)، (٨، ٥)، (٩، ٦)

د (−٩، ٦)، (−٨، ٥)، (٠، ٤)، (٨، ٥)، (٩، ٦)

---

٥ هل الدالة $د(س) = \left(\frac{١ + ٨س}{١ + ٢س}\right)^{٢} + \left(\frac{١ - ٨س}{١ - ٢س}\right)^{٢}$

زوجية أم فردية أم ليست زوجية ولا فردية؟

---

٦ إذا كانت $د_١$، $د_٢$، $د_٣$، $د_٤$ دوال حقيقية؛ حيث

$د_١(س) = ٩س^{٣}$ ، $د_٢(س) = \text{جتا}^{٢} س$

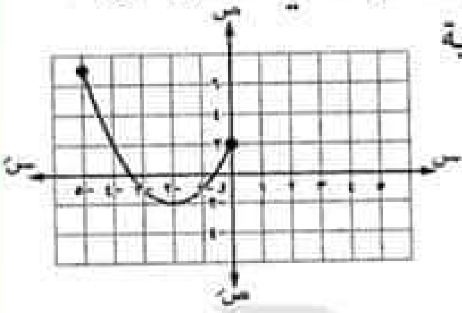
$د_٣(س) = ٥س^{٢}$ ، $د_٤(س) = \text{ظا}^{٢} س$. فحدِّد أيّ

من الدوال التالية فردية.

أ $د_١ \times د_٤$ ب $د_١ - د_٣$ ج $د_٣ - د_٤$

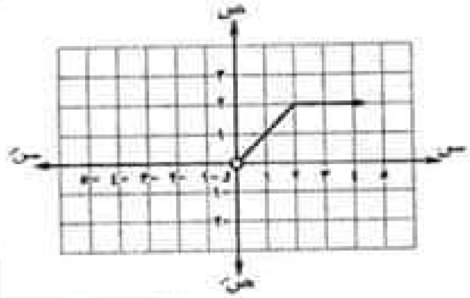
د $د_٢ \times د_٤$ هـ $د_٢ + د_٤$

٧ أكمل رسم الشكل التالي لتحصل على دالة زوجية



---

٨ أكمل رسم الشكل التالي لتحصل على دالة فردية



---

٩ ابحث نوع كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

أ) $د(س) = س^{٤} + س^{٢} - ١$

ب) $د(س) = س^{٢} - \frac{١}{س}$

جـ) $د(س) = (س^{٣} + ١)^{٢}$

د) $د(س) = (س^{٢} + ١)^{٣}$

هـ) $د(س) = \begin{cases} ٢س + س^{٢} & ، س \leq ٠ \\ ٢س - س^{٢} & ، س > ٠ \end{cases}$

و) $د(س) = \frac{جا ٢س \ جتا ٢س}{قا س}$

ز) $د(س) = \left(\frac{٢ - س}{٢ + س}\right)^{٢} + \left(\frac{٢ + س}{٢ - س}\right)^{٢}$

ح) $د(س) = \left(\frac{س - ١}{س + ١}\right)^{٥} + \left(\frac{س + ١}{س - ١}\right)^{٥}$

---

١٠ إذا كانت د دالة مجالها ح أوجد قيمة : $\frac{٧ د(-٥) + ٣ د(٥)}{٢ د(-٥)}$ إذا كان :

أ) د دالة فردية.   ب) د دالة زوجية.

---

١١ إذا كانت الدالة د دالة زوجية في الفترة [أ ، ب]

فإن : ب = ...

أ) $-أ$ ب) $٢أ$ جـ) $أ$ د) $أ^{٢}$

---

١٢ إذا كانت د دالة زوجية ، ٢ ∈ مجال د

فإن : د(٢) + د(−٢) = ...

أ) ٤   ب) صفر   جـ) ٢ د(٢)   د) ٢

---

١٣ نوع الدالة د : $د(س) = \frac{جا س}{س}$ هي .....

أ) فردية.   ب) زوجية.   جـ) لا زوجية ولا فردية.

---

١٤ كل الدوال الآتية زوجية ماعدا ....

أ) د(س) = جا س   ب) $د(س) = س^{٢} - ١$ جـ) د(س) = ١   د) د(س) = جتا س

---

١٥ إذا كانت د دالة فردية ، أ ∈ مجال د

فإن : د(أ) + د(−أ) = ...

أ) د(أ)   ب) صفر   جـ) ٢ د(أ)   د) ٢أ

الدالة الأحادية

علمي فقط

الدالة د : س ← ص تسمى دالة أحادية اذا كان لكل :
أ ، ب ∈ س ، د(أ) = د(ب)
فإن : أ = ب

بمعنى :

- أن كل عنصر من عناصر المدى يناظره قيمة وحيدة من عناصر المجال
- لا يوجد عنصران في مجال الدالة الأحادية يكون لهما نفس الصورة

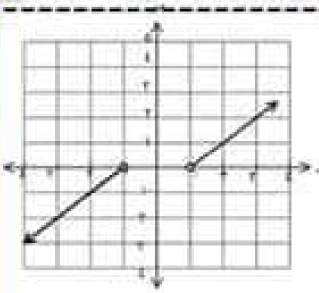
وتحدد الدالة الأحادية :

أولاً : بيانياً

اختبار الخط الأفقي :

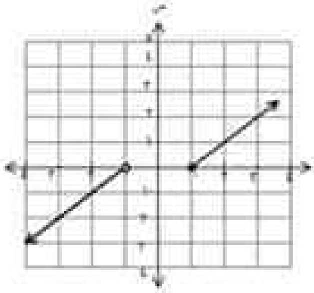
اذا كان لكل خط أفقي (يوازي محور السينات) يقطع الدالة في نقطة وحيدة فإن الدالة تكون أحادية

في الشكل المقابل



- يمثل دالة أحادية لأن كل خط أفقي يقطع الدالة في نقطة وحيدة وهي دالة فردية لأنها متماثلة حول نقطة الأصل

في الشكل المقابل



يمثل دالة أحادية ولكنها ليست فردية ولا زوجية

∴ ليس كل دالة أحادية تكون فردية

ثانياً : جبرياً

لإثبات أن الدالة د أحادية نفرض أن :

أ ، ب ∈ لمجال د وأن :

د(أ) = د(ب) اذا تحقق أن :

أ) أ لها قيمة وحيدة فإن الدالة تكون أحادية
فمثلا : أ = ب فقط فإنها أحادية

ب) أ لها أكثر من قيمة فإنها تكون ليست أحادية
إذا كانت : أ = ب ، أ = -ب تكون ليست أحادية

مثال ①

أثبت أن الدالة :
د(س) = ٣س + ١ دالة أحادية

الحل

نفرض أن : أ ، ب ∈ لمجال د

وأن : د(أ) = د(ب)

٣أ + ١ = ٣ب + ١

∴ ٣أ = ٣ب بالقسمة على ٣ للطرفين

∴ أ = ب

∴ الدالة أحادية

مثال ②

في كل من الدوال الآتية : حدد ما إذا كانت الدالة أحادية أم لا

① د(س) = س^2 - ١

الحل

نفرض أن : أ ، ب ∈ لمجال د

وأن : د(أ) = د(ب)

∴ أ^2 - ١ = ب^2 - ١

أ^2 = ب^2

∴ أ = ± ب

∴ أ = ب أو أ = - ب

∴ أ لها قيمتان

∴ الدالة ليست أحادية

---

② د(س) = (٣س + ٥) / (٤س + ١)

الحل

نفرض أن : أ ، ب ∈ لمجال د

وأن : د(أ) = د(ب)

∴ (٣أ + ٥) / (٤أ + ١) = (٣ب + ٥) / (٤ب + ١)

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

(٣أ + ٥)(٤ب + ١) = (٣ب + ٥)(٤أ + ١)

~~١٢~~أب + ٣أ + ٢٠ب + ~~٥~~

= ~~١٢~~أب + ٣ب + ٢٠أ + ~~٥~~

٣أ + ٢٠ب = ٣ب + ٢٠أ

٢٠ب - ٣ب = ٢٠أ - ٣أ

١٧ب = ١٧أ بالقسمة على ١٧

ب = أ

∴ أ لها قيمة وحيدة

∴ الدالة أحادية

---

③ د(س) = ٢س^2 - س - ٣

الحل

نفرض أن : أ ، ب ∈ لمجال د

وأن : د(أ) = د(ب)

٢أ^2 - أ - ~~٣~~ = ٢ب^2 - ب - ~~٣~~

$$٢\text{أ}^2 - \text{أ} = ٢\text{ب}^2 - \text{ب}$$

$$٢\text{أ}^2 - ٢\text{ب}^2 - \text{أ} + \text{ب} = ٠$$

$$\therefore ٢(\text{أ}^2 - \text{ب}^2) - (\text{أ} - \text{ب}) = ٠$$

$$٢(\text{أ} - \text{ب})(\text{أ} + \text{ب}) - (\text{أ} - \text{ب}) = ٠$$

بأخذ (أ − ب) عامل مشترك

$$(\text{أ} - \text{ب})\left[٢(\text{أ} + \text{ب}) - ١\right] = ٠$$

إما $(\text{أ} - \text{ب}) = ٠$ أو $٢(\text{أ} + \text{ب}) - ١ = ٠$

$\therefore \boxed{\text{أ} = \text{ب}}$ | $٢\text{أ} + ٢\text{ب} - ١ = ٠$

$$٢\text{أ} = ١ - ٢\text{ب}$$

$$\therefore \boxed{\text{أ} = \frac{١ - ٢\text{ب}}{٢}}$$

∴ أ لها قيمتان

∴ الدالة ليست أحادية

تمارين على الدالة الأحادية

١ في كل من الدوال المعرفة كما يلى حدد ما إذا كانت الدالة المعطاة أحادية أم لا ، مع توضيح السبب.

أ) $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^3 + ١$

ب) $\text{د}(\text{س}) = ٣\text{س} + ١$

ج) $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^4 + ٢\text{س}^2 + ١$

د) $\text{د}(\text{س}) = \frac{٢\text{س} + ١}{\text{س} - ٢}$

---

٢ الدالة الأحادية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هى ....

أ) $\text{س}^4 + \text{س}^2$ ب) جتا س

ج) س^3 د) س^2

---

٣ كل الدوال المعرفة بالقواعد التالية أحادية ما عدا الدالة التى قاعدتها ......

أ) $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^3$ ب) $\text{د}(\text{س}) = (\text{س} - ٢)^3$

ج) $\text{د}(\text{س}) = \text{س} + ٦$ د) $\text{د}(\text{س}) = \text{س}$

---

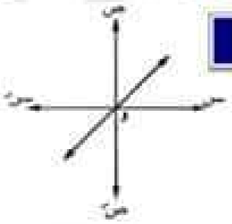
٤ إذا كانت الدالة فى تناقص مستمر لجميع قيم س ∈ مجال الدالة فإن الدالة تكون ...

أ) ليست أحادية. ب) أحادية. ج) فردية. د) زوجية.

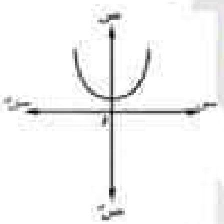
---

٥ أى من الأشكال الآتية يعبر عن دالة أحادية ؟

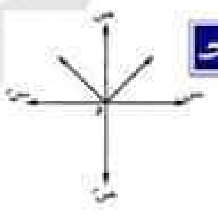
أ)



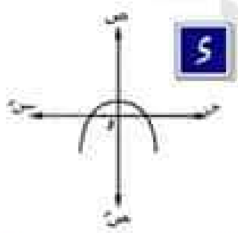
ب)



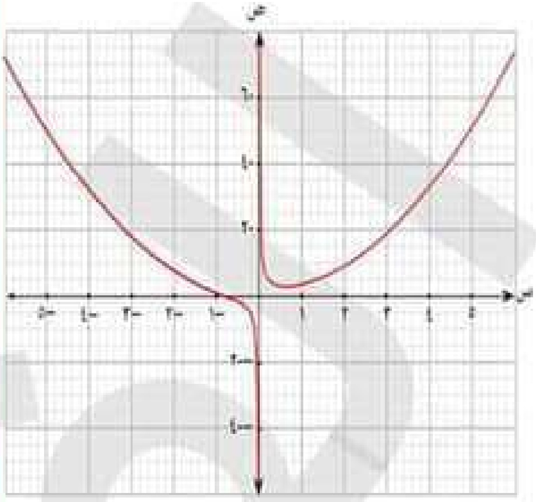
ج)



د)



٦ هل الدالة الموضحة في التمثيل البياني التالي دالة أحادية؟



---

٧ هل د(س) = ٢ جتا (س) دالة أحادية عند $[\cdot, \pi]$؟

أ نعم   ب لا

---

٨ هل الدالة د(س) = $\frac{١}{س^٢ - ٩}$ دالة أحادية

على ح / {-٣،٣}؟

أ نعم   ب لا

---

٩ الدالة د(س) = ٢$\sqrt{س^٤ - ١}$. هل هي دالة أحادية

عندما يكون س ∈ ح -]-٢،٢[

---

١٠ أي الدوال الآتية ليست دالة أحادية

أ د(س) = ٢س + ٤   ب د(س) = $\frac{١}{س + ١}$

ج د(س) = $س^٣$ د د(س) = ١٠

---

١١ صواب أم خطأ: إذا كانت د، ر دالتين أحاديتين

، فإن د + ر يجب أن تكون دالة أحادية؟

أ خطأ   ب صواب

---

١٢ أيٌ ممّا يلي دالة أحادية؟

أ د(س) = جتا س   ب د(س) = $س^٣$

ج د(س) = $س^٢$ د د(س) = $س^٤ + س^٢$

---

١٣ إذا كانت د دالة أحادية وكانت النقطة (٢ ، ٣)

تنتمى لبيان الدالة د   فأى النقط الآتية يمكن أن تنتمى لبيان د ؟

أ (٣ ، ٢)   ب (٥ ، ٣)   ج (٢ ، -١)   د كل ما سبق.

---

١٤ إذا كانت د دالة أحادية وكانت النقطتان (٢ ، أ)

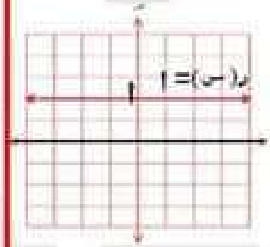
، (٣ ، ب) تنتميان للدالة د   فأى مما يأتى صحيح دائمًا ؟

أ أ > ب   ب أ + ب = ٥   ج أ ≠ ب   د أ = ب

التمثيل البياني للدوال والتحويلات الهندسية

أولاً : دوال كثيرات الحدود

١ الدالة الثابتة



تسمى الدالة د:
د : ح ← ح ، د (س) = أ
حيث أ ∈ ح دالة ثابتة

وهى دالة تربط جميع الأعداد الحقيقية بالعدد أ
ويمثلها مستقيم يمر بالنقطة (٠ ، أ)

المجال = ح ، المدى = {أ}

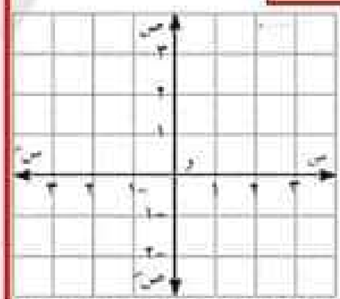
• الإطراد : ثابتة فى ح ، النوع زوجية

• ليست أحادية

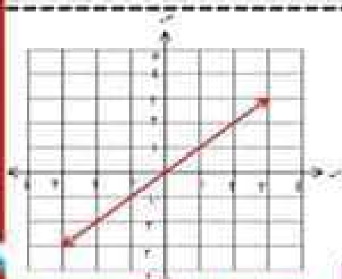
مثال ①

مثل بيانياً الدالة د :
د : ح ← ح ، د (س) = ٣
ومن الرسم عين المجال والمدى
والنوع من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك

الحل



٢ الدالة الخطية



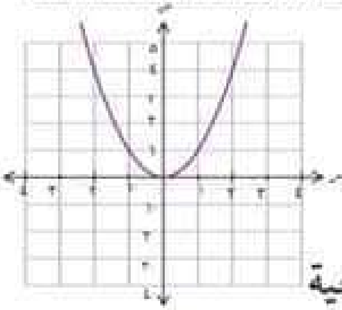
تسمى الدالة د:
د : ح ← ح
، د(س) = س دالة خطية

وهى دالة تربط كل عدد حقيقى بنفسه

- المجال = ح - المدى = ح
- النوع فردية - والدالة أحادية

ويمثلها مستقيم يمر بالنقطة (٠ ، ٠)

٣ الدالة التربيعية



تسمى الدالة د:
د : ح ← ح
، د (س) = س^{٢} دالة تربيعية

المجال = ح ، المدى = ح

الإطراد : تزايدية في]٠ ، ∞[
وتناقصية فى]-∞ ، ٠[

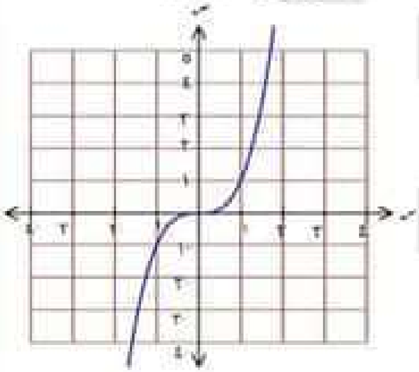
النوع : زوجية والدالة ليست أحادية

ونقطة رأس المنحنى (٠ ، ٠)

٤ الدالة التكعيبية

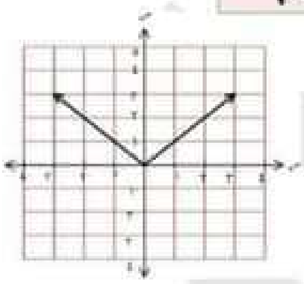
تسمى الدالة د:
د: ح ← ح ، د(س) = س^{٣} تكعيبية

وهى دالة تربط كل عدد حقيقى بمكعبه



- المجال = ح
- المدى = ح
- الإطراد :
تزايدية على ح
- النوع : فردية
- والدالة : أحادية

ثانيا :دالة المقياس
(دالة القيمة المطلقة)



تسمى الدالة د:

د: ح ⟵ ح

، د(س) = |س|

بدالة المقياس

- المجال = ح - المدى = [٠، ∞ [

- الإطراد :

تزايدية فى :] ٠، ∞ [

، تناقصية فى :] -∞، ٠]

- النوع : زوجية

- والدالة ليست أحادية

- ونقطة رأس المنحنى (٠ ، ٠)

إعادة تعريف دالة المقياس

• |س| = { س عندما س ≥ ٠ ، -س عندما س < ٠ }

• |س - ٢| = { س - ٢ عندما س ≥ ٢ ، -(س - ٢) عندما س < ٢ }

= { س - ٢ عندما س ≥ ٢ ، ٢ - س عندما س < ٢ }

تذكر أن

• |-٥| = ٥ ، |٥| = ٥

• اذا كان : |س| = م فإن س = ± م

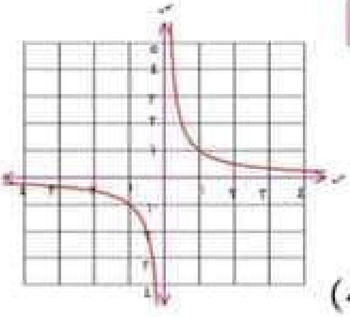
∴ مجموعة حل المعادلة : |س - ١| = ٣

إما س - ١ = ٣	أو س - ١ = -٣
∴ س = ٣ + ١	∴ س = -٣ + ١
س = ٤	س = -٢

∴ م . ح = { ٤ ، -٢ }

---

٥ ثالثاً : الدالة الكسرية



تسمى الدالة د:

د : ح - {٠} ⟵ ح

، د(س) = $\frac{١}{س}$

(ابسط صورة للدالة الكسرية)

وهى دالة تربط كل عدد بمعكوسه الضربي

الدالة متماثلة حول النقطة (٠ ، ٠)

المجال = ح - {٠} المدى = ح - {٠}

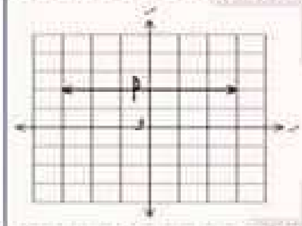
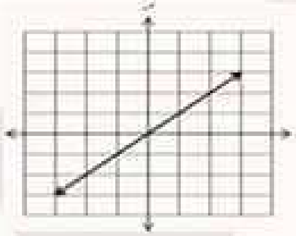
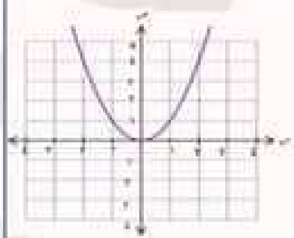
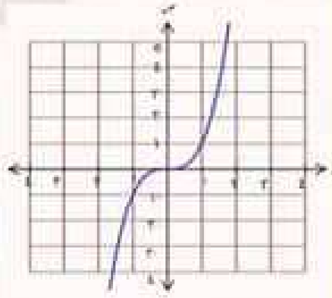
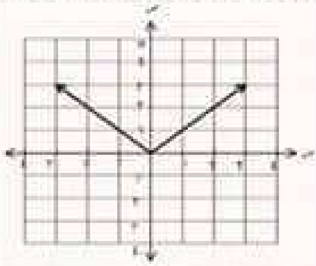
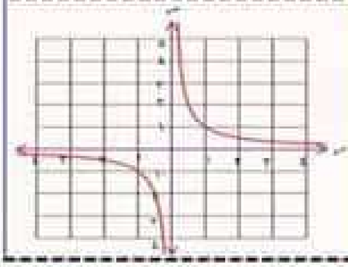
الدالة : أحادية

الدالة : فردية لأنها متماثلة حول نقطة الأصل

الإطراد :

الدالة تناقصية على

] -∞، ٠ [،] ٠، ∞ [

الدالة	شكلها البياني في أبسط صورة لها
الدالة الثابتة $د(س) = أ$	
الدالة الخطية $د(س) = س$	
الدالة التربيعية $د(س) = س^2$	
الدالة التكعيبية $د(س) = س^3$	
دالة المقياس $د(س) = \|س\|$	
الدالة الكسرية $د(س) = \frac{1}{س}$	

مثال ②

ارسم الشكل البياني لكل من الدوال الآتية :

ومن الرسم عين المجال والمدى وابحث الاطراد

① $د(س) = \begin{cases} س & عندما\ س \geq 0 \\ س^2 & عندما\ س < 0 \end{cases}$

الحل

∵ $د(س) = س$ عندما $س \geq 0$

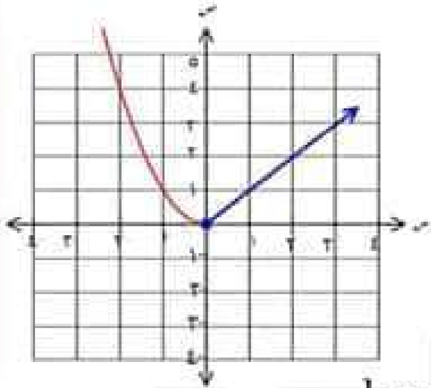
∴ نرسم الدالة $د(س) = س$

لكل $س \in [0 ، \infty[$

∵ $د(س) = س^2$ عندما $س < 0$

∴ نرسم الدالة $د(س) = س^2$

لكل $س \in]-\infty ، 0[$



- المجال = ح
- المدى = $[0 ، \infty[$
- الاطراد :
- تزايدية في : $]0 ، \infty[$
- وتناقصية في : $]-\infty ، 0[$
- النوع : ليست زوجية ولا فردية
- ليست أحادية

② $د(س) = \begin{cases} |س| & عندما\ س \geq 0 \\ س^3 & عندما\ س < 0 \end{cases}$

الحل

• ∵ د(س) = |س| عندما س ≥ ٠

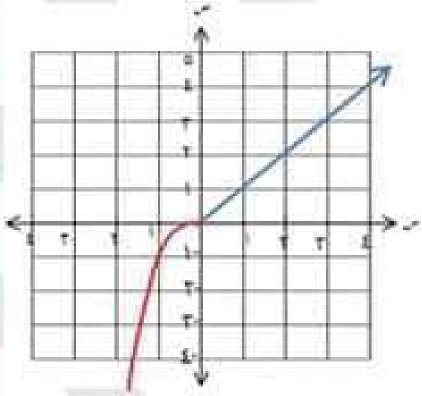
∴ نرسم الدالة د(س) = |س|

لكل س ∈ [٠ ، ∞[

• ∵ د(س) = $س^٣$ عندما س < ٠

∴ نرسم الدالة د(س) = $س^٣$

لكل س ∈]-∞ ، ٠]



- المجال = ح
- المدى = ح
- الإطراد: تزايدية في ح

---

٣ د(س) = { $س^٢$ عندما س < ٢ ، ٤ عندما س > ٢ }

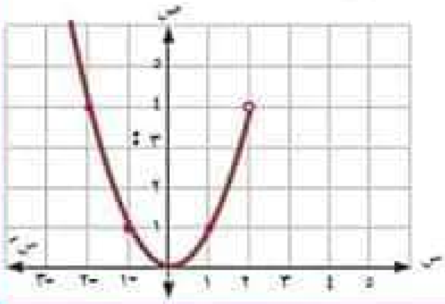
الحل

∵ د(س) = $س^٢$ عندما س < ٢

∴ نرسم د(س) = $س^٢$

لكل س ∈]-∞ ، ٢[

كما بالشكل

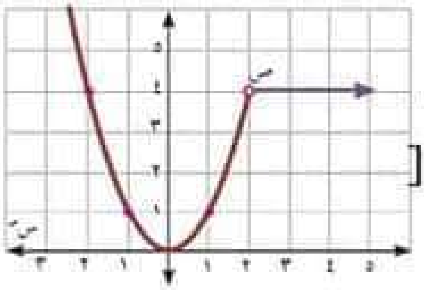


، د(س) = ٤ عندما س > ٢

نرسم د(س) = ٤ وهي دالة ثابتة

لكل س ∈]٢ ، ∞[

كما بالشكل



- المجال = ح - {٢}
- المدى = [٠ ، ∞[
- الإطراد:
- تناقصية في]-∞ ، ٠[
- تزايدية في]٠ ، ٢[
- ثابتة في]٢ ، ∞[

النوع: ليست زوجية ولا فردية

والدالة ليست أحادية

مثال ③

مثل بيانياً الدالة د:

د(س) = { ٣ عندما س > ١ ، ٢ عندما -١ ≤ س ≤ ١ ، ٣ عندما س < -١ }

ومن الرسم عين المدى والإطراد والنوع

الحل

د(س) = ٣ عندما س > ١

وهي دالة ثابتة وتساوي ٣ لجميع قيم س الأكبر من ١

، د(س) = ٢ عندما -١ ≤ س ≤ ١

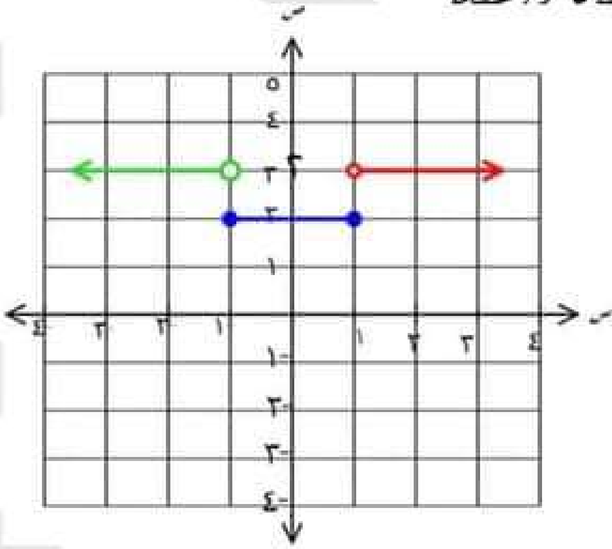
(أي أن الدالة تربط كل الأعداد الأكبر من أو تساوي -١ وأقل من أو يساوي ١ بالعدد ٢

د(س) = ٣ عندما س < -١

(أى أن الدالة تربط كل الأعداد الأقل من -١ بالعدد ٣)

المدى = {٢ ، ٣}

النوع زوجية



الإطراد ثابتة فى :

]١ ، ∞[،]-١ ، ١[،]-∞ ، -١[

والدالة ليست أحادية

مثال ٤

مثل بيانيا الدالة د : $د(س) = \frac{٣س - ٣}{س - ١}$

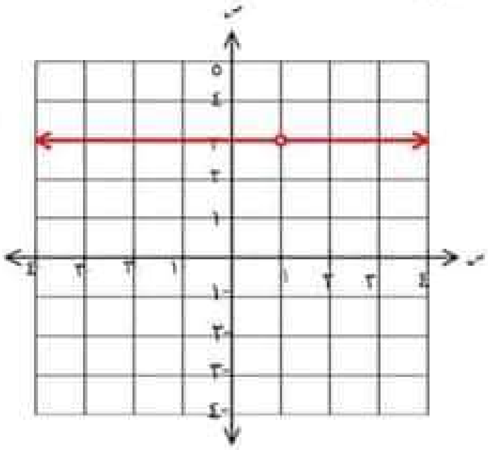
الحل

مجال الدالة = ح - {١}

$د(س) = \frac{٣(\cancel{س-١})}{\cancel{س-١}} = ٣$

المجال = ح - {١} ، المدى = {٣}

النوع ليست زوجية ولافردية



الإطراد ثابتة فى : ح - {١}

والدالة ليست أحادية

مثال ٥

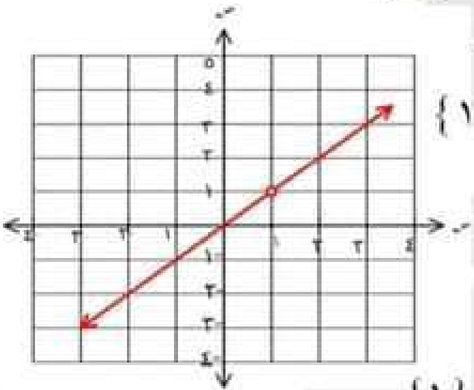
مثل بيانيا الدالة د : $د(س) = \frac{س^٢ - س}{س - ١}$

الحل

$\because د(س) = \frac{س(\cancel{س-١})}{\cancel{س-١}} = س$

$\therefore د(س) = س$

المجال = ح - {١}



المدى = ح - {١}

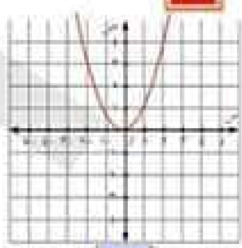
الدالة : تزايدية فى : ح - {١}

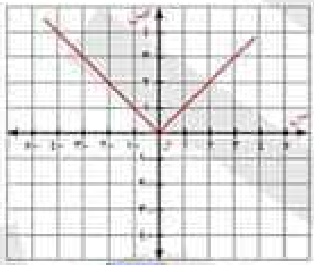
الدالة : أحادية

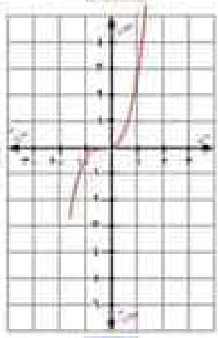
الدالة ليست زوجية ولافردية

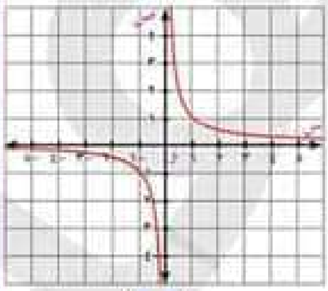
تمارين على | التمثيل البياني للدوال

١ أكتب قاعدة الدالة الممثلة بيانياً بالأشكال الآتية


أ


ب


جـ


د

---

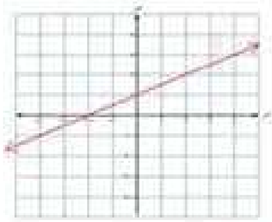
٢ أكتب المعادلة $٢ص = \frac{٦س + ٣}{٢}$ على الصورة $ص = مس + جـ$

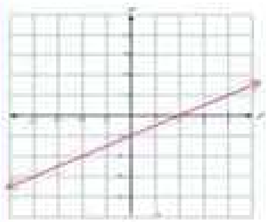
أ $ص = س - \frac{١}{٢}$ ب $ص = ٢س + ١$

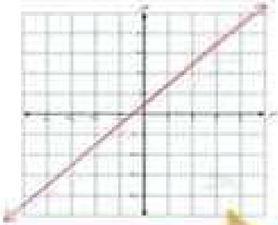
جـ $ص = ٢س - ١$ د $ص = س + \frac{١}{٢}$

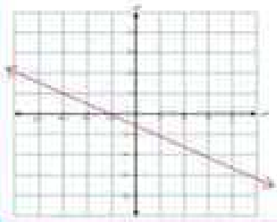
---

٣ أي من الأشكال البيانية التالية هو تمثيل للمعادلة $ص = \frac{١}{٢}س + ١$.



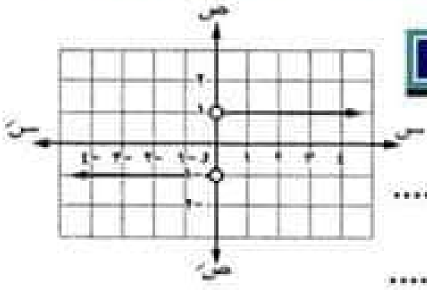






---

٤ في الشكل المقابل



- المجال =..............
- المدى =..............
- الإطراد :......................
- نوع الدالة من حيث كونها زوجية أو فردية هو ....
- قاعدة الدالة هي ٠

---

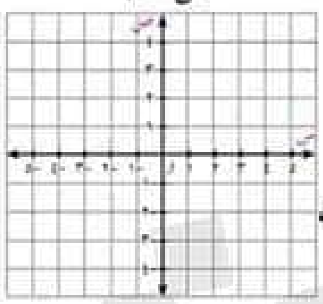
٥ مجال الدالة د: د(س) = $\frac{٢س^٢ - ٢س}{س^٢ - ١}$ هو........

أ ح − {١، −١} ب $ح^+$

جـ $ح^+$ − {٢} د ح − {٢، −٢}

---

٦ مثل بيانياً الدالة د : د(س) = $\frac{٢س^٢ - ٢}{س^٢ - ١}$ ومن الرسم عين المجال والمدى والإطراد والنوع من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك



---

٧ مدى الدالة د:د(س) = $\frac{٢س^٢ - ٢س}{س^٢ - ١}$ هو........

أ $ح^+$ − {٢} ب ح − {١، −١}

جـ ح − {٢، −٢} د $ح^+$

٨ مثل بيانياً كلاً من الدوال الآتية ومن الرسم عين المجال والمدى والإطراد والنوع من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك

أ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} |\text{س}| & ، \text{س} \le ٠ \\ \frac{١}{\text{س}} & ، \text{س} > ٠ \end{cases}$

ب $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} & ، \text{س} < ٠ \\ \text{س} & ، \text{س} \ge ٠ \end{cases}$

ج $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} |\text{س}| & ، \text{س} \le ٠ \\ \text{س}^{٢} & ، \text{س} > ٠ \end{cases}$

د $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} ٣ & ، \text{س} \le -٣ \\ |\text{س}| & ، -٣ < \text{س} < ٣ \\ ٣ & ، \text{س} \ge ٣ \end{cases}$

هـ $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٤} - \text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢} - ١}$

---

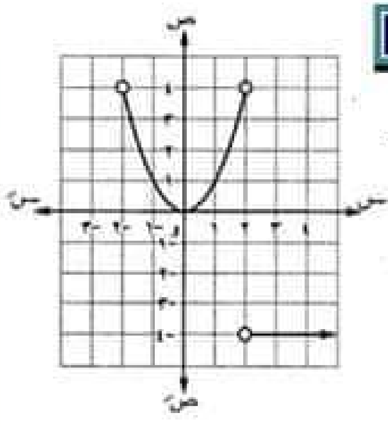
٩ محور تماثل الدالة د : $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٢}$ هو المستقيم ....

أ س = صفر **ب** ص = − س **ج** ص = صفر **د** ص = س

---

١٠ في الشكل المقابل

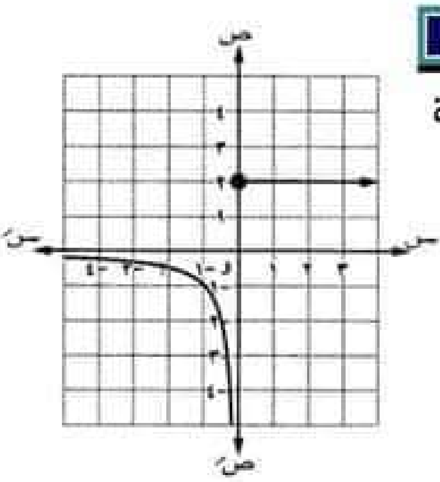
أكتب منحنى قاعدة تعريف الدالة د الممثلة بالشكل



---

١١ في الشكل المقابل

أكتب منحنى قاعدة تعريف الدالة د الممثلة بالشكل

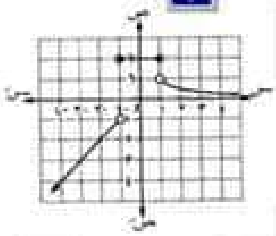


---

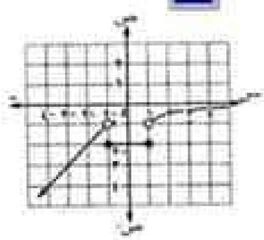
١٢ إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} & ، \text{س} < -١ \\ ٢ & ، -١ \le \text{س} \le ١ \\ \frac{١}{\text{س}} & ، \text{س} > ١ \end{cases}$

فإن الشكل الذي يمثلها بيانيا هو ....

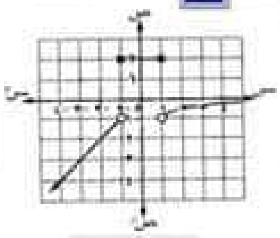
أ



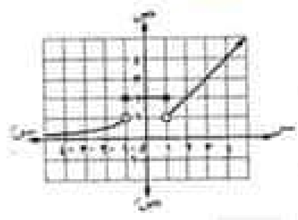
ب



ج



د



---

١٣ إذا كانت $\text{د} : [-٢ ، ٦] \longrightarrow \text{ح}$ ، $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} ٤ - \text{س} & \text{عندما } -٢ \le \text{س} < ١ \\ \text{س} & \text{عندما } ١ \le \text{س} \le ٦ \end{cases}$

مثل الدالة بيانياً ومن الرسم عين المجال والمدى والإطراد والنوع من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك

التحويلات الهندسية

أولاً : الإزاحة الرأسية

لأي دالة يكون المنحنى

ص = د(س) + أ ، أ ∈ ح - {٠} هو

نفس المنحنى : ص = د(س)

بإزاحة قدرها = |أ| وحدة

وتكون :

- في اتجاه $\overrightarrow{\text{وص}}$ إذا كان : أ > ٠
- في اتجاه $\overleftarrow{\text{وص}'}$ إذا كان : أ < ٠

مثال ①

ارسم الشكل البياني لكل من الدوال الآتية

١ د(س) = س + ١

الحل

منحنى الدالة د: د(س) = س + ١

هو نفس منحنى الدالة :

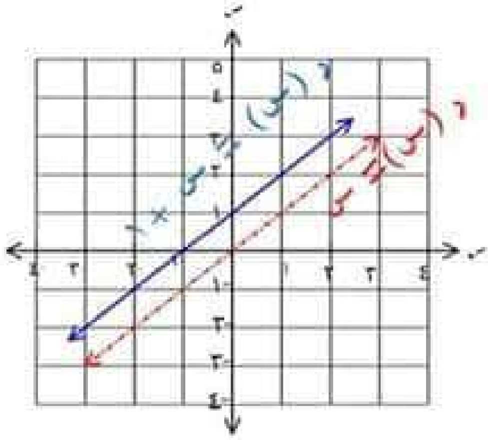
د(س) = س بإزاحة قدرها وحدة

واحدة في اتجاه $\overleftarrow{\text{وص}}$

(رأسيا لأعلى وحدة واحدة)

المجال = ح ، المدى = ح

والاطراد : تزايدية في ح



- النوع: ليست زوجية ولا فردية
- الدالة أحادية

---

٢ د(س) = س^2 + ١

الحل

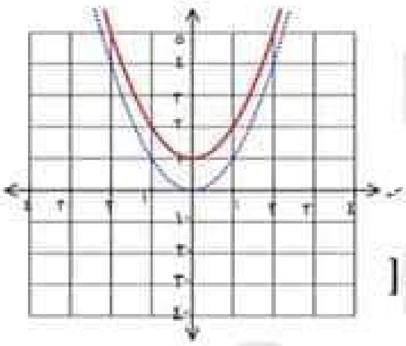
هو نفس منحنى الدالة :

د(س) = س^2 بإزاحة قدرها

وحدة في اتجاه $\overleftarrow{\text{وص}}$

(رأسيا لأعلى بمقدار وحدة واحدة)

المجال = ح



، المدى = [١ ، ∞[

والاطراد : - تزايدية في]٠ ، ∞[

- تناقصية في]-∞ ، ٠[

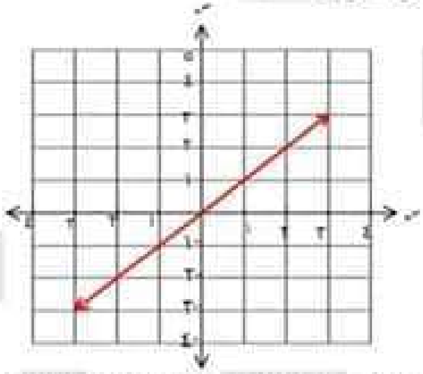
النوع: زوجية

(لأن الدالة متماثلة حول محور الصادات)

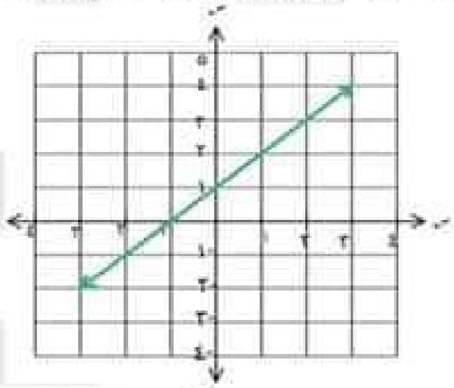
مثال ②

في كل من الأشكال الآتية اكتب قاعدة الدالة مبيناً مجال ومدى كل منها

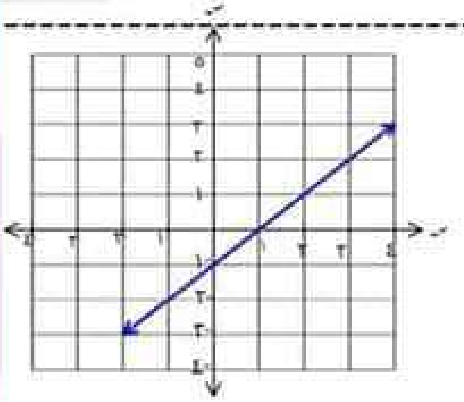
١



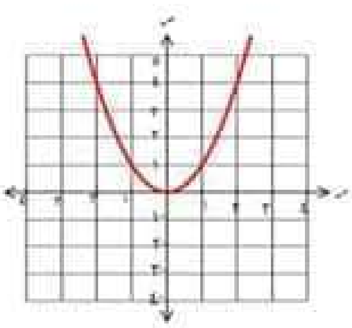
٢



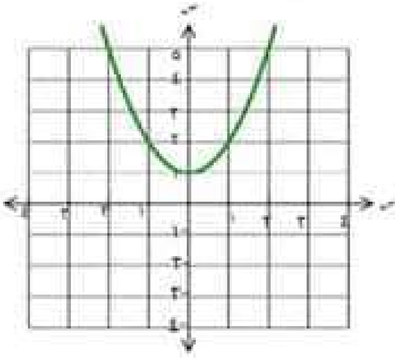
٣



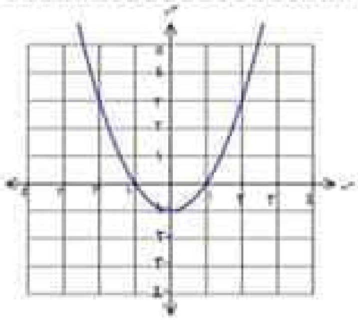
٤



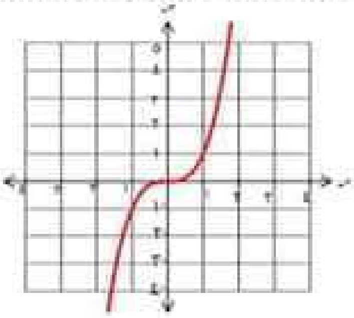
٥



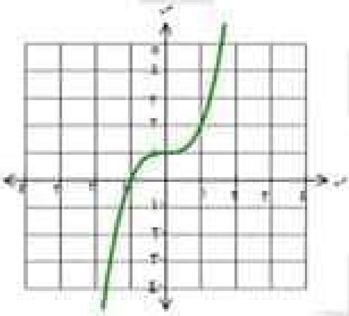
٦



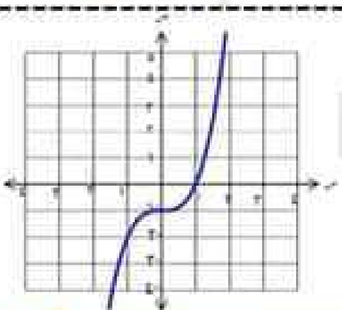
٧



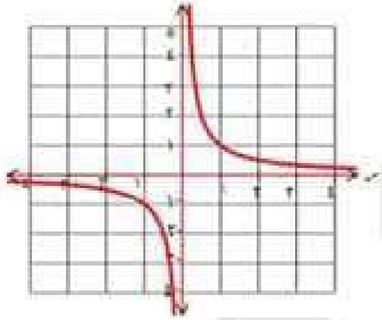
٨



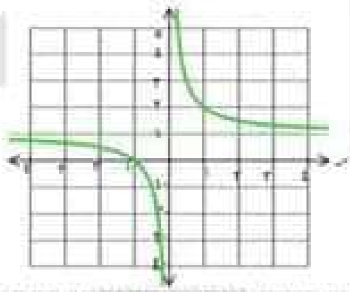
٩



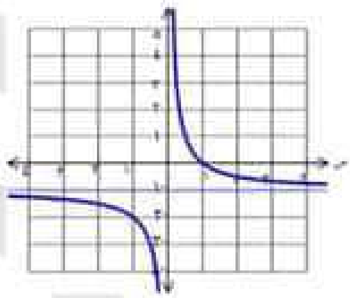
١٠



١١



١٢



ثانيا: الإزاحة الأفقية

لأى دالة د يكون المنحنى :

ص=د(س + أ) هو نفس المنحنى

ص=د(س) بإزاحة أفقية

قدرها = |أ| وحدة طول

وتكون

- في اتجاه $\overleftarrow{\text{وس}}$ اذا كان أ > ٠
- في اتجاه $\overleftarrow{\text{وس}}$ اذا كان أ < ٠

وهذا النوع من الإزاحات تكون فيه الدوال ليست زوجية ولا فردية

تدريب

مثل بيانيا الدالة د :د(س)=(س-٣)²

ومن الرسم عين المجال والمدى والإطراد والنوع من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك

مثال ③

ارسم الشكل البياني لكل من الدوال الآتية

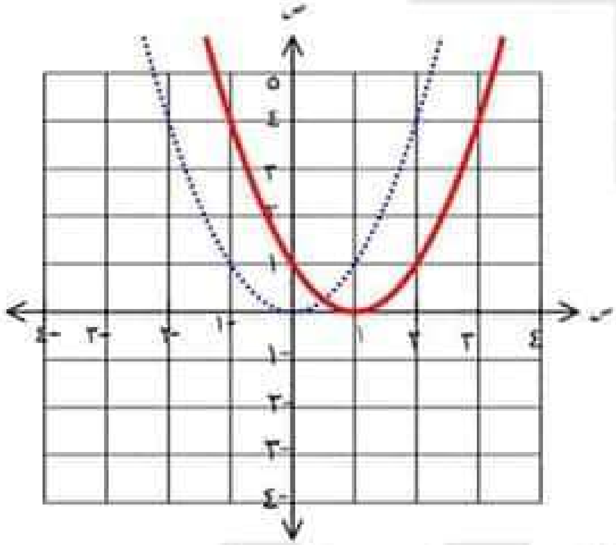
١ د(س) = (س-١)²

الحل

منحنى د هو نفس منحنى الدالة :

ص = س² بإزاحة قدرها وحدة واحدة

في اتجاه $\overleftarrow{\text{وس}}$



المجال = ح

المدى = [٠ ، ∞ [