مذكرة : تطبيقات الرياضيات

الهندسة الفراغية

الصف الثانى الثانوى

القسم العلمى

منتدى توجيه الرياضيات
أ/ علاء ابوراد

الترم الأول ٢٠٢٠

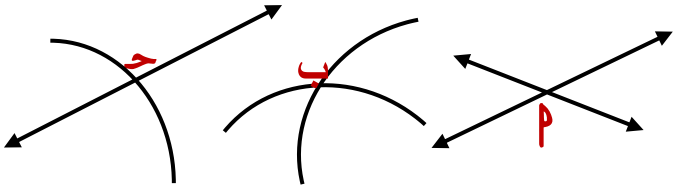
الوحدة الثالثة : الهندسة والقياس

- المستقيمات والمستويات فى الفراغ
- الهرم والمخلوط
- المساحة الجانبية والكلية للهرم المنتظم والمخروط المنتظم
- حجم الهرم المنتظم والمخروط المنتظم
- الدائرة

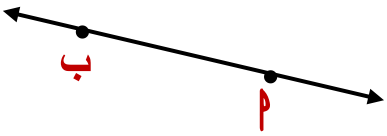
ثانيا : الهندسة والقياس

المستقيمات و المستويات فى الفراغ

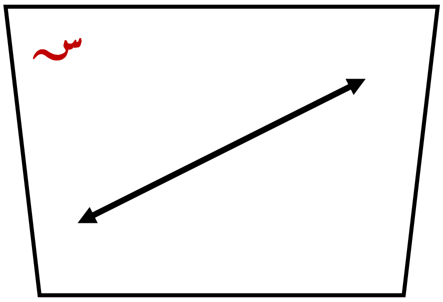
تذكر أن :



١) **النقطة** هى مكان ناتج من تقاطع خطين مستقيمين أو منحنين أو مستقيم و منحنى .



٢) **الخط المستقيم** : مجموعة من النقط غير المنتهية ممتد من جهتية يتعين بنقطتين عليه .
و يقرأ م ب المستقيم $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$



٣) **المستوى** : مجموعة من النقط غير المنتهية ينطبق علية المستقيم فى جميع حالاته و ممتد من جميع جهاته بلا نهاية و يتعين بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة.
و يقرأ بثلاث نقاط عليه على الاقل أو نرمز له بأحد الحروف الكبيرة س ، ص ، .....

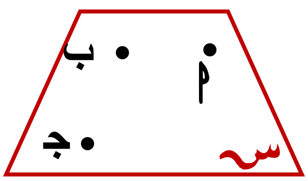
٤) **الفراغ (الفضاء)** : مجموعة من النقط غير المنتهية و يعتبر المجموعة الشاملة التى تحتوى على المستقيمات و المستويات و المجسمات .

مفاهيم و مسلمات :

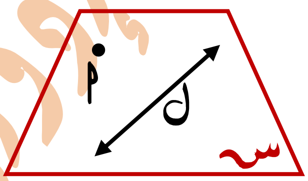
(٣) إذا اشترك مستقيم و مستوى فى أكثر من نقطة فإن المستقيم يقع بأكمله فى المستوى .

تعيين المستوى بأى من الحالات الآتية

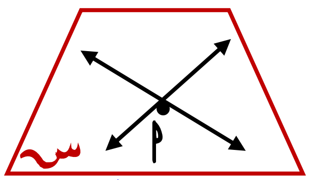
(١) ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة



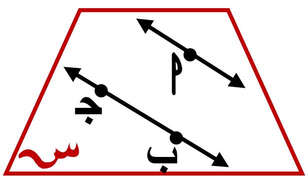
(٢) مستقيم ونقطة خارجه .



(٣) مستقيمين متقاطعين .



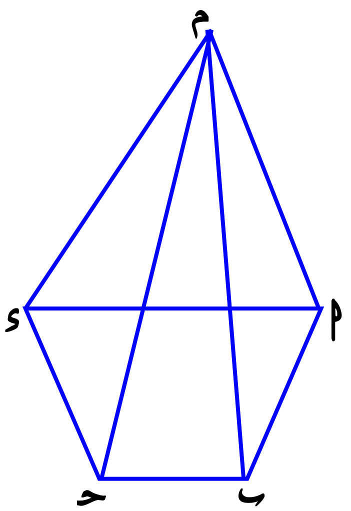
(٤) مستقيمين متوازيين .



ملاحظات :

١ـ أى نقطة فى المستوى يمر بها عدد لا نهائى من المستقيمات .
٢ـ أى نقطة فى الفراغ يمر بها عدد لا نهائى من المستويات .
٣ـ أى مستقيم فى الفراغ يمر بها عدد لا نهائى من المستويات .
٤ـ كل ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة يمر بها مستو واحد و واحد فقط

مثــ١ــال : تأمل الشكل الذى أمامك ثم أجب



١ـ كم عدد المستقيمات بالشكل ؟
٢ـ اذكر المستقيمات التى تمر بنقطة م ، نقطة ب
٣ـ كم عدد المستويات بالشكل ؟
٤ـ اذكر ثلاثة مستويات تمر بالنقطة أ
٥ـ اذكر المستقيمات التى تمر بنقطة أ ، ب معا
٦ـ اذكر المستويات التى تمر بالنقطة أ ، ب معا

الحـــــــــــــل

(١) عدد المستقيمات بالشكل = ٨

(٢) المستقيمات التى تمر بنقطة م هى $\overleftrightarrow{\text{مأ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{مب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{مجـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{مء}}$

المستقيمات التى تمر بنقطة ب هى $\overleftrightarrow{\text{مب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{بجـ}}$

(٣) عدد المستويات بالشكل = ٥

(٤) ثلاثة مستويات تمر بالنقطة أ هى م أ ء ، م أ ب ، أ ب جـ ء

(٥) المستقيمات التى تمر بنقطة أ ، ب معا هى $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

(٦) المستويات تمر بالنقطة أ ، ب معا هى م أ ب ، أ ب جـ ء

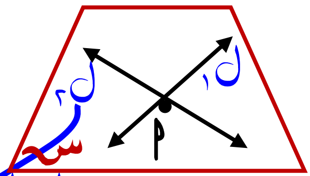
العلاقة بين مستقيمين فى الفراغ :

توجد ثلاث حالات مختلفة للأوضاع النسبية لمستقيمين ل$_1$ ، ل$_2$ فى الفراغ هى :

(١) <u>المستقيمان متقاطعان</u> : و فى هذه الحالة

يمكن أن يحتويهما مستوى واحد .

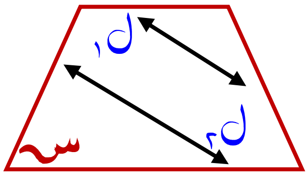
، ل$_1$ ، ل$_2$ يقعان فى مستوى واحد: ل$_1$ $\cap$ ل$_2$ = {أ}



(٢) **المستقيمان متوازيان :** و فى هذه الحالة

يمكن أن يحتويهما مستوى واحد .

: $\text{ل}_1 \cap \text{ل}_2 = \emptyset$ ، ل_1 ، ل_2 يقعان فى مستوى واحد

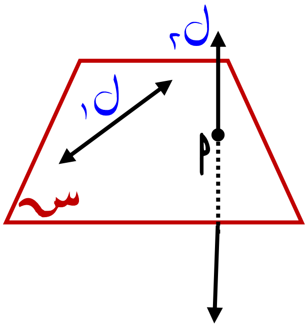


(٣) **المستقيمان متخالفان :** وفى هذه الحالة

لا يمكن أن يحتويهما مستوى واحد .

: $\text{ل}_1 \cap \text{ل}_2 = \emptyset$ ، ل_1 جزء من س

ويقال أنهما متخالفان أو غير مستويين



ملاحظة :

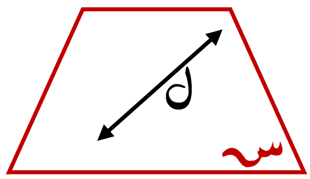
١- إذا كان $\text{ل}_1 \cap \text{ل}_2 = \emptyset$ و يمكن أن يحتويهما مستوى واحد فإن : $\text{ل}_1 \parallel \text{ل}_2$

٢- إذا كان $\text{ل}_1 \cap \text{ل}_2 = \emptyset$ ولا يمكن أن يحتويهما مستوى واحد فإن : ل_1 ، ل_2 متخالفان

٣- المستقيمان المتخالفين غير متوازيان وغير متقاطعين لأنه لا يجمعهما مستوى واحد

العلاقة بين مستقيم و مستوى فى الفراغ :

للمستقيم و المستوى فى الفراغ ثلاث أوضاع هى :

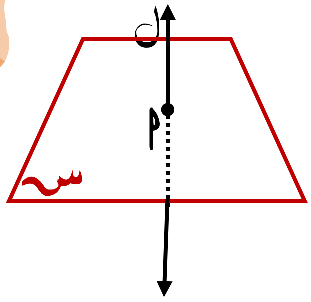


المستقيم يقع بتمامه فى المستوى

أى أن : كل نقطة من نقط المستقيم تنتمى للمستوى

$\text{ل} \cap \text{س} = \text{ل}$

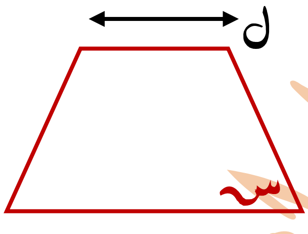
$\text{ل} \subset \text{س}$



المستقيم يقطع المستوى

أى أن : المسستقيم يشترك مع المستوى فى نقطة واحدة

$\text{ل} \cap \text{س} = \{ \text{ا} \}$



المستقيم يوازى المستوى

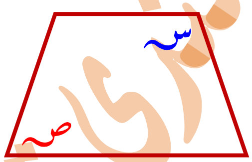
أى أن : المستقيم لا يشترك مع المستوى فى أى نقطة

$\text{ل} \cap \text{س} = \emptyset$

$\text{ل} \parallel \text{س}$

الاوضاع النسبية لمستويين فى الفراغ :

يوجد لمستويين مختلفين ثلاثة أوضاع فى الفراغ هى :

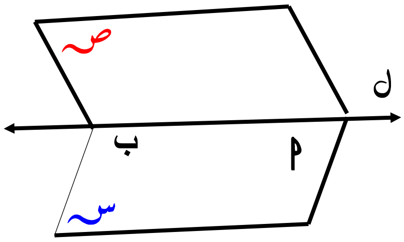


(١) المستويان متطابقان

س = ص

أى يشترك المستويان فى جميع النقط أو

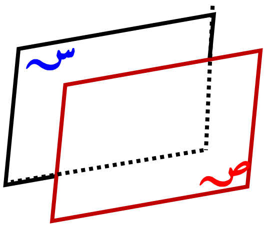
يشترك المستويان فى مستقيم و نقطة لا تنتمى إليه



(٢) المستويان متقاطعان

س ∩ ص = ل = أ ب

لأى يشترك المستويان فى خط مستقيم



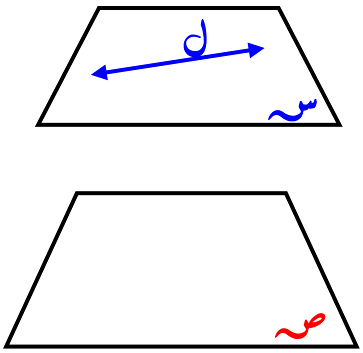
(٣) المستويان متوازيان

س ∩ ص = ∅

أى لا يشترك المستويان فى أى نقطة

س // ص

ملاحظة : المستويان المتقاطعان سواء كان أحدهما مائلاً على الآخر أو عمودياً عليه إذا أشتركا فى نقطة فلابد أن تقع هذه النقطة على خط تقاطعهما



ملاحظة :

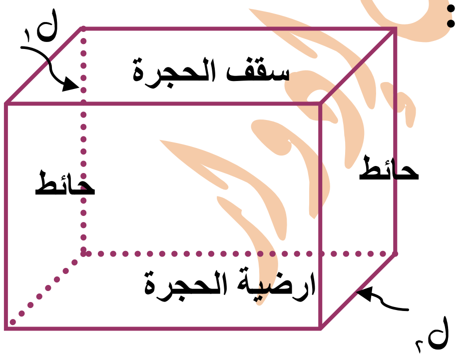
إذا توازى مستويان فإن أى مستقيم فى أحدهما يوازى المستوى الآخر ففى الشكل المقابل :

إذا كان المستوى س // المستوى ص

، و كان : ل ⊂ س

فإن : ل // المستوى ص

بعض الملاحظات الهامة : تأمل حجرة الدراسة ولاحظ الآتى:



(١) جميع المستقيمات الرأسية متوازية فيما بينها

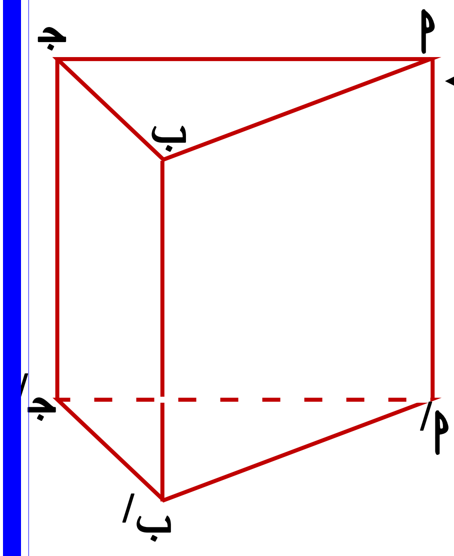
(٢) جميع المستويات الأفقية متوازية فيما بينها

(٣) ليس من الضرورى أن تتوازى المستقيمات الأفقية

(٤) ليس من الضرورى أن تتوازى المستويات الرأسية

(٥) المستقيمان المتوازيان أو المتقاطعان يجمعهما مستوى واحد

مثـــ٢ـــال : تأمل الشكل المقابل ثم أكمل ما يأتى :



(أ) المستوى أ ب ب/ أ/ ∩ المستوى ب جـ جـ/ ب/ = $\overleftrightarrow{\text{ب ب}'}$

(ب) المستوى أ ب جـ ∩ المستوى أ/ ب/ جـ/ = ∅

(جـ) $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{أ}'\text{ جـ}'}$ = ∅

(د) $\overleftrightarrow{\text{ب ب}'}$ ∩ المستوى أ ب جـ = { ب }

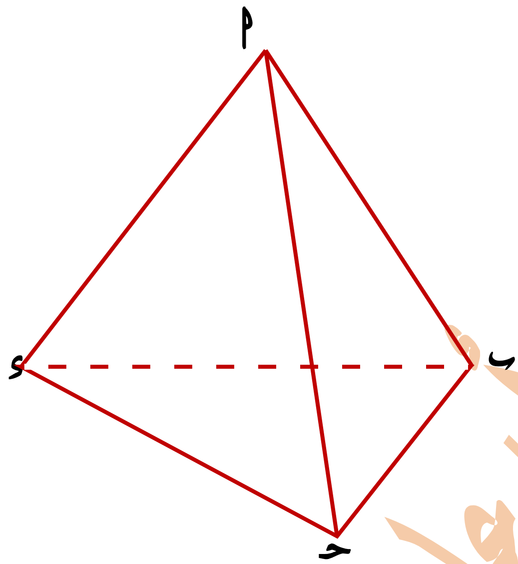
(هـ) $\overleftrightarrow{\text{ب ب}'}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ = ∅

(ط) المستوى أ/ أ ب ب/ ∩ المستوى أ ب جـ = $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

(و) المستوى أ ب جـ ∩ المستوى أ جـ جـ/ أ/ ∩ المستوى أ ب ب/ أ/ = { أ }

مثـــ٣ـــال: فى الشكل المقابل أ ∉ المستوى ب حـ ء

أكمل ما يأتى



(١) $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ∩ المستوى ب حـ ء = { ء }

(٢) $\overleftrightarrow{\text{ء حـ}}$ ∩ المستوى أ ء ب = { ء }

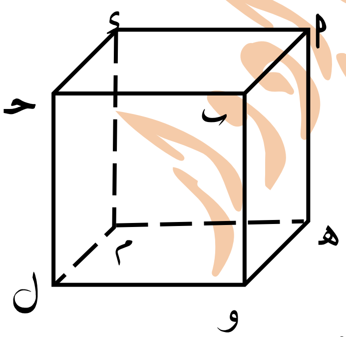
(٣) $\overleftrightarrow{\text{ء ب}}$ ∩ المستوى أ ء حـ = { ء }

(٤) المستوى ب حـ ء ∩ المستوى أ ء ب = $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$

(٥) المستوى ب حـ ء ∩ المستوى أ ء حـ = $\overleftrightarrow{\text{ء حـ}}$

(٦) المستوى ب حـ ء ∩ المستوى أ ء ب = $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$

مثـــ٤ـــال : فى الشكل المقابل : أ ب حـ ء هـ و ل م مكعب أكمل ما يأتى :



(١) $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ = ...

(٢) $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{ب و}}$ = ...

(٣) $\overleftrightarrow{\text{ب و}}$ // .... // .... // ....

(٤) المستوى ب حـ ل و // المستوى ....

(٥) المستوى ب حـ ل و ∩ المستوى ء هـ ل م = ...

(٦) المستقيمان $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، .... متخالفان

تمارين على المستقيمات و المستويات

[١] أكمل ما يأتى :

١) إذا كان المستقيم ل // المستوى س فإن ل ∩ س = ...

٢) إذا كان المستقيم ل ⊂ المستوى س فإن ل ∩ س = ...

٣) إذا كان المستقيم $ل_١$ // المستقيم $ل_٢$ فإن $ل_١ ∩ ل_٢$ = ...

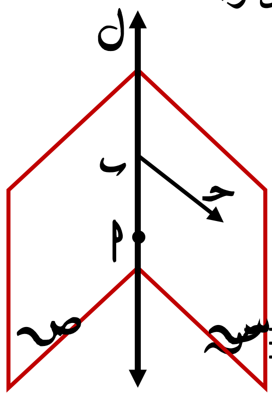
٤) إذا كان س ، ص مستويان حيث س ∩ ص = ∅ فإن س ..... ص

[٢] اذكر عدد المستويات التى تمر بكل من :

أ) نقطة واحدة معلومة　　　　ب) نقطتين مختلفتين .

جـ) ثلاث نقط على استقامة واحدة　　　　د) ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة

هـ) أربع نقط ليست فى مستوى واحد　　　　و) ثلاث نقط ليست فى مستوى واحد



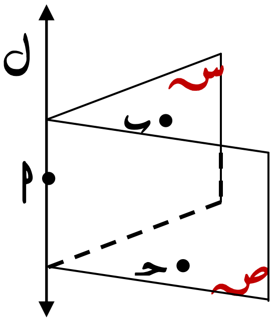
[٣] تأمل الشكل المقابل ثم أكمل باستخدام أحد الرموز (∈ ، ∉ ، ⊂ ، ⊄)

أ) ل .... س　　　　ب) أ .... س

جـ) حـ .... ص　　　　ء) ب حـ .... ص

[٤] فى الشكل المقابل :

س ، ص مستويان متقاطعان فى المستقيم ل ، أ ∈ ل ، ب ∈ س ، ب ∉ ص ، جـ ∈ ص ، جـ ∉ س أكمل ما يأتى :



١) المستوى س ∩ المستوى أب جـ = ...

٢) المستوى ص ∩ المستوى أب جـ = ...

٣) المستوى س ∩ المستوى أب جـ = ...

٤) المستوى س ∩ المستوى ص ∩ المستوى أب جـ = ...

(١) [٥] اختر (١) أى أربع نقط ليست فى مستوى واحد تعين لنا :

Ⓐ مستويان　　Ⓑ ثلاث مستويات　　Ⓒ اربع مستويات　　Ⓓ لا تعين مستو

(٢) يكون المستقيمان متخالفين إذا كانا :

Ⓐ غير متوازيين　　Ⓑ غير منطبقين　　Ⓒ لا يجمعهما مستوى واحد　　Ⓓ يقعان فى مستوى واحد

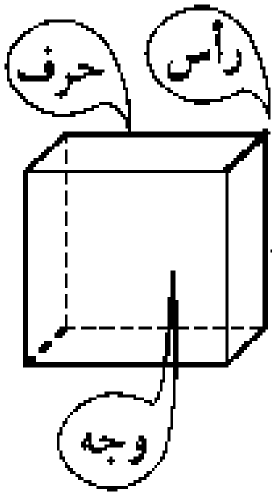
(٣) $\overleftrightarrow{أب}$ توازى المستوى س إذا كان :

Ⓐ أ ب ∩ س = ∅　　Ⓑ أ، ب على بعدين مختلفين من المستوى س

Ⓒ أب ∩ س = ∅　　Ⓓ أ، ب تقعان فى جهتين مختلفتين من س

الهـــــــرم و المخروط

تذكر أن :

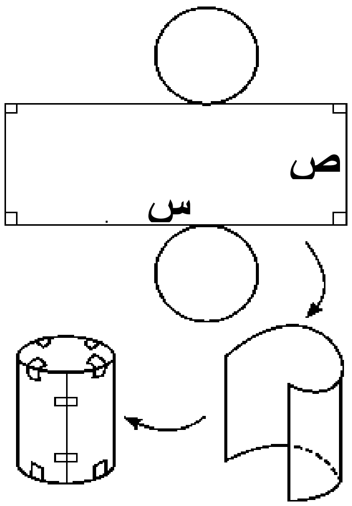


١) **المكعب** : هو متوازى مستطيلات تساوت أبعاده الثلاثة ، طول كل منها ل

* كل وجة من أوجهه السته مربع
* مساحته الجانبية = ٤ $ل^٢$
* مساحته الكلية = ٦ $ل^٢$
* حجمه = $ل^٣$ * طول قطره = $\sqrt{٣}$ ل

٢) **شبكة المجسم** : هو الشكل الذى يمكن طيه لتكوين المجسم .

و يمكن رسم أكثر من شبكة للمجسم .



٣) **الاسطوانة الدائرية القائمة** :

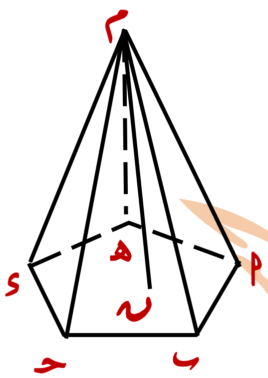
الشكل المقابل شبكة اسطوانة دائرية قائمة .

(أ) قاعدتا الاسطوانة متطابقتين و كل منهما على شكل دائرة

(ب) السطح الجانبى للاسطوانة قبل طيه هو مستطيل بعداه س ، ص ، ارتفاع الاسطوانة ص وحدة طول

الهرم :

هو إتحاد جميع القطع المستقيمة الواصلة من نقطة (تسمى رأس الهرم) " لا تنتمى إلى المستوى الذى يحوى سطح مضلع (يسمى قاعدة الهرم) " إلى نقطة تنتمى لقاعدة الهرم



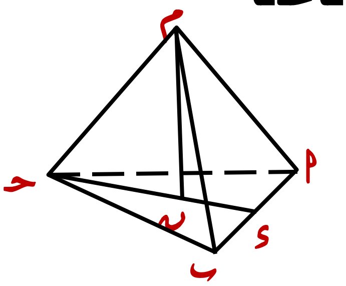
* يسمى الهرم حسب عدد أضلاع مضلع قاعدته
* أحرفه الجانبية هى القطع المستقيمة الواصلة بين رأسه و رؤوس قاعدته
* أوجهه الجانبية هى سطوح المثلثات التى رأسها هى رأس الهرم و قواعدها هى أضلاع قاعدة الهرم و ضلاعها الآخران أحرف جانبية للهرم
* إرتفاع الهرم هو العمود الساقط من رأسه على مستوى قاعدته

الهرم الثلاثى المنتظم :

هو هرم ثلاثى تساوت أحرفه الستة

أو هو هرم أوجهه الأربعة سطوح مثلثات متساوية أضلاع

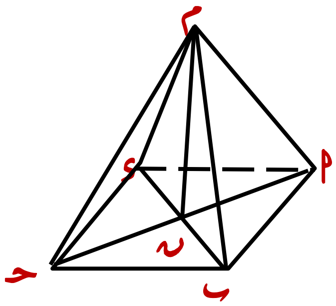
* إرتفاعه هو القطعة الواصلة بين رأسه و نقطة تلاقى متوسطات قاعدته
* من الشكل إذا كان طول حرفه = ل نلاحظ :



جـ ء = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ل ، جـ ن = $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ل ، ء ن = $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ل

، إرتفاعه م ن = $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ل ، ارتفاعه الجانبى ع/ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ل

الهرم القائم المنتظم :

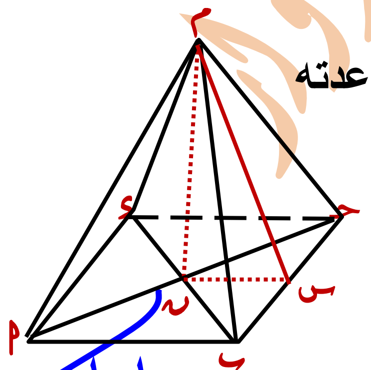


هو هرم قاعدته مضلع منتظم مركزه موقع العمود المرسوم من رأس الهرم عليه أى أن :

* إرتفاع الهرم يلاقى القاعدة عند مركزها
* جميع الأحرف الجانبية له متساوية فى الطول
* قاعدة الهرم مضلع منتظم " مثلث متساوى الأضلاع ، مربع ، ...
* جميع الأوجه الجانبية له سطوح مثلثات متساوية الساقين و متطابقة
* إرتفاعاته الجانبية " إرتفاعات الأوجه الجانبية " متساوية فى الطول
* الهرم الثلاثى القائم قاعدته مثلث متساوى الأضلاع
* الهرم الرباعى القائم قاعدته سطح مربع و إرتفاعه يمر بمركز المربع أى نقطة تقاطع قطرى المربع

مثـــ١ـــال: م ﻫ ب جـ ء هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ﻫ ب جـ ء يساوى ١٠ سم وارتفاعه ١٢ سم أوجد ارتفاعه الجانبي و ارسم إحدى شبكاته.

الحـــــــــل

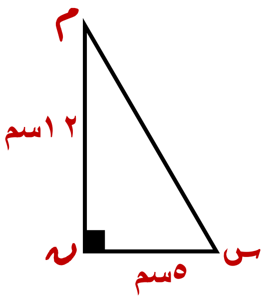


م ن = ١٢ سم ارتفاع الهرم ، ﻫ ب = ١٠ سم أحد أضلاع قاعدته

، ن نقطة تقاطع قطرى المربع ﻫ ب جـ ء

∵ الهرم رباعى منتظم ∴ $\overline{\text{م ن}}$ ⊥ المستوى ﻫ ب جـ ء

بفرض س منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ∴ $\overline{\text{م س}}$ ⊥ ب جـ



و يكون م س ارتفاع جانبى للهرم المنتظم .

فى Δ ء ب حـ : ن منتصف ء ب ، س منتصف ب حـ

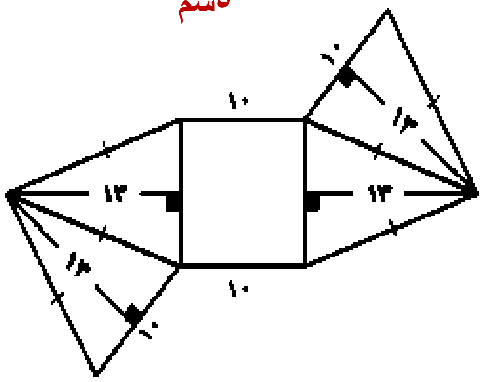
∵ م ن ⊥ المستوى أ ب جـ ء

∴ Δ م ن س قائم الزاوية فى ن

∴ (م س)^{٢} = (م ن)^{٢} + (ن س)^{٢}

= (١٢)^{٢} + (٥)^{٢} = ١٦٩

∴ الارتفاع الجانبى للهرم = ١٣ سم



و الشكل المقابل يوضح إحدى شبكات الهرم م أ ب

مثـــ٢ـــال : م أ ب جـ هرم ثلاثى منتظم قائم الزاوية طول ضلعه ١٢ سم ، وارتفاع الهرم ٨ سم . أوجد طول حرفه الجانبى

الحـــــــــل

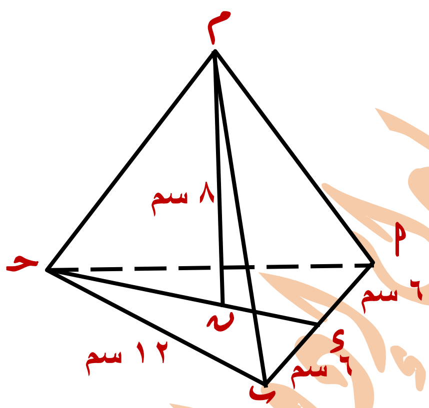
نفرض ء منتصف أ ب

∵ Δ أ ب حـ متساوى الأضلاع ∴ حـ ء ⊥ أ ب

∵ Δ ء ب حـ قائم الزوية فى ء

∴ (حـ ء)^{٢} = (حـ ب)^{٢} - (ب ء)^{٢}

حـ ء = $\sqrt{(١٢)^{٢} - (٦)^{٢}}$ = $\sqrt{١٠٨}$ = ٦$\sqrt{٣}$ سم



∵ ن نقطة تلاقى متوسطات Δ أ ب حـ

∴ ن حـ = $\frac{٢}{٣}$ حـ ء = $\frac{٢}{٣}$ × ٦$\sqrt{٣}$ = ٤$\sqrt{٣}$ سم

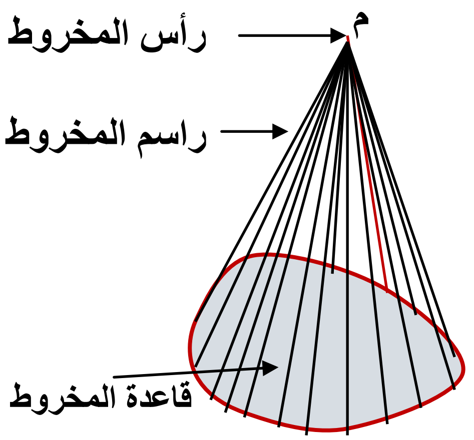
∴ Δ م ن حـ قائم الزوية فى ن

∴ (م حـ)^{٢} = (م ن)^{٢} + (ن حـ)^{٢}

م حـ = $\sqrt{(٨)^{٢} + (٤\sqrt{٣})^{٢}}$ = $\sqrt{٦٤ + ٤٨}$ = $\sqrt{١١٢}$ = ٤$\sqrt{٧}$ سم

المخــــروط

هو مجسم له قاعدة واحدة على شكل منحنى مغلق و رأس واحدة و يتكون سطحه الجانبى من جميع نقط القطع المستقيمة المرسومة من رأسه إلى منحنى قاعدته و التى يعرف كل منها براسم المخروط .



المخروط الدائرى القائم

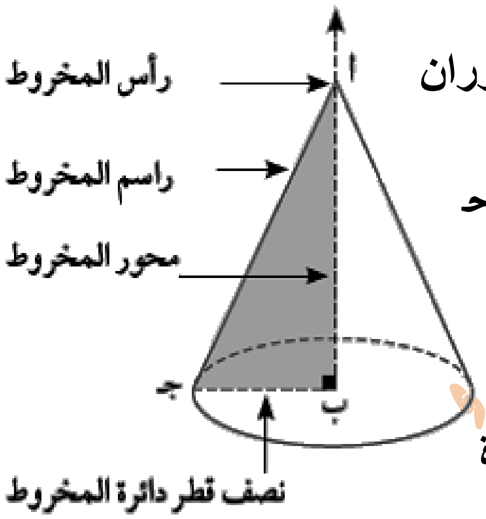
هو الجسم الذى ينشأ من دوران مثلث قائم الزاوية دورة كاملة حول أحد ضلعى القائمة كمحور

* **خواص المخروط الدائرى القائم :**

يوضح الشكل المقابل مخروط دائرى قائم ناشئ من دوران مثلث قائم الزاوية فى ب دورة كاملة حول $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ كمحور

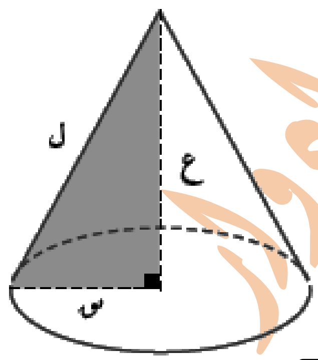
(١) أ حـ راسم للمخروط ، أ رأس المخروط ،النقطة حـ ترسم أثناء الدوران دائرة مركزها النقطة ب وطول نصف قطرها يساوى طول ب حـ وسطح الدائرة هو قاعدة المخروط

(٢) أ ب محور المخروط عمودى على مستوى القاعدة أرتفاع المخروط يساوى طول $\overline{\text{أب}}$



مثــ١ــال : أوجد بدلالة π محيط و مساحة قاعدة مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٢٤ سم وطول راسمه ٢٦ سم .

الحــــــــــل



بفرض طول الراسم = ل ، ارتفاع المخروط = ع ،

طول نصف قطر دائرة المخروط = نق

∵ نق^2 = ل^2 – ع^2 ∴ نق^2 = (٢٦)^2 – (٢٤)^2 = ١٠٠

∴ نق = ١٠ سم

محيط قاعدة المخروط القائم = ٢ π نق = ٢ π × ١٠ = ٢٠ π

مساحة القاعدة = π نق^2 = π × (٢٤)^2 = ٥٧٦ π سم^2

* **شبكة المخروط القائم :** يمكن طى شبكة المخروط القائم لتكوين عبوات مخروطية الشكل .

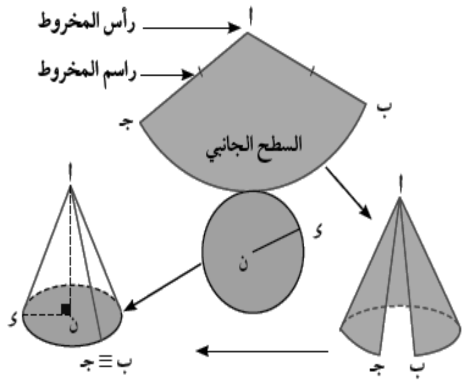
١- ؟ب = ؟جـ = ل (طول راسم المخروط)

٢- القطاع ؟ب جـ يمثل السطح الجانبي للمخروط

، طول $\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$ = ٢ π نق

حيث نق طول نصف قطر قاعدة المخروط

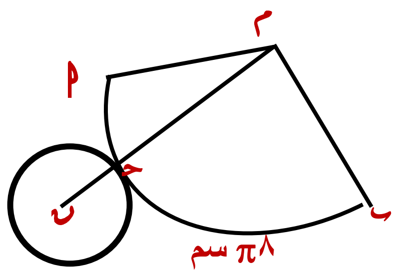
٣- ارتفاع المخروط = طول $\overline{\text{؟ن}}$



تذكر أن : مساحة القطاع الدائرى = $\frac{1}{2}$ ل نق حيث ل طول قوسه ، نق نصف قطر دائرته

مثـــ٤ـــال : الشكل المقابل يوضح شبكة مخروط قائم مكون من قطاع دائرى مساحته ٢٠ π سم. وطول قوسه ؟ حـ ب = ٨ π سم . أوجد إرتفاع المخروط .

الحـــــــــــل



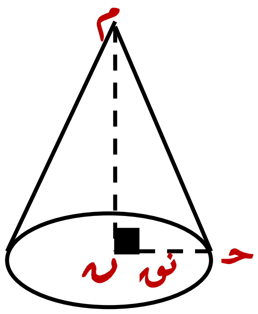
من شبكة المخروط نلاحظ أن :

∵ مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ ل نق

٢٠ π = $\frac{1}{2}$ × ٨π نق

∴ نق = ٥ سم وهو يمثل راسم المخروط م حـ

عند طى شبكة المخروط نحصل على الشكل المقابل



فيكون ارتفاع المخروط = طول $\overline{\text{م ن}}$

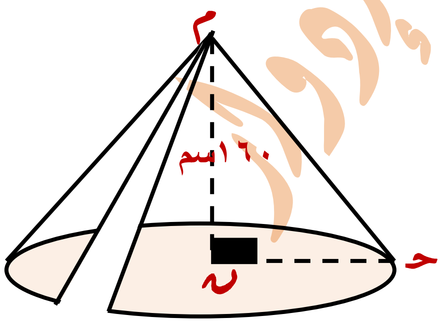
∴ Δ م ن حـ قائم الزاوية فى ن

∴ (م ن)^2 = (م حـ)^2 ـ (ن حـ)^2

م ن = $\sqrt{(٥)^2 - (٤)^2}$ = $\sqrt{٢٥ - ١٦}$ = ٣ سم

مثـــ٥ـــال : خيمة على شكل مخروط دائرى قائم ارتفاعة ٩٦ سم ومحيط قاعدتها ٤٥٢,١٦ سم . أحسب طول راسم مخروط الخيمة .

الحـــــــــــل



من شبكة المخروط نلاحظ أن :

∵ محيط القاعدة = ٢πنق = ٢ × ٣,١٤نق = ٤٥٢,١٦

∴ نق = ٧٢ سم وهو يمثل راسم المخروط ن حـ

Δ م ن حـ ∴ (م حـ)^2 = (م ن)^2 + (ن حـ)^2

م ن = $\sqrt{(٩٦)^2 + (٧٢)^2}$ = ١٢٠ سم

تمارين على مفهوم الهرم والمخروط

(١) فى الهرم الخماسى المنتظم:

أ ما عدد أوجهه الجانبية. ب ما عدد الأوجه.

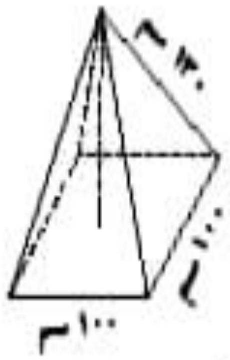
جـ ما عدد أحرف الجانبية. د ما عدد أحرفه

هـ للهرم رأس واحدة خلاف رؤوس القاعدة. ما عدد جميع رؤوس الهرم الخماسى؟ هل تحقق إجابتك علاقة أويلر لأى مجسم قاعدته منطقة مضلعة. "عدد الأوجه + عدد الرؤوس = عدد الأحرف + ٢"

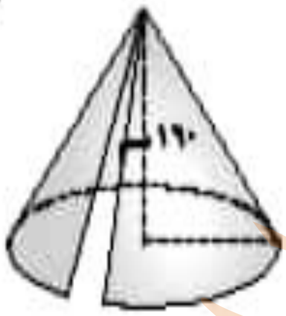
(٢) فى الهرم المنتظم، رتب الأطوال التالية من الأصغر إلى الأكبر

أ طول الحرف الجانبي ب ارتفاع الهرم

جـ الارتفاع الجانبي

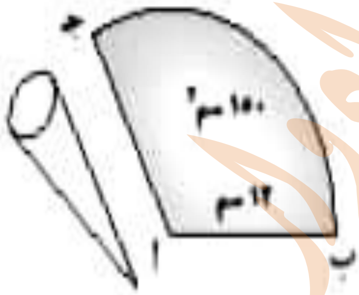


(٣) هندسة مدنية: يوضح الشكل المقابل خزان مياه على شكل هرم رباعى منتظم مستعينًا بالبيانات المعطاة أوجد كلًا من ارتفاع الوجه الجانبي وارتفاع الخزان.



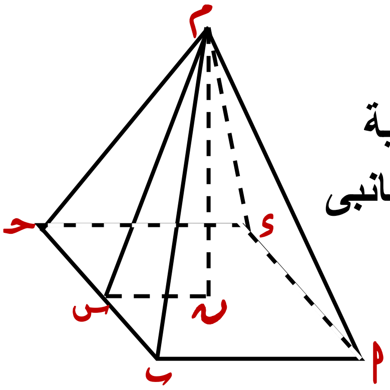
(٤) الربط بالجوالة: خيمة على شكل مخروط دائرى قائم ارتفاعها ١٦٠سم ومحيط قاعدتها ٧٥٣,٦سم احسب طول راسم مخروط الخيمة.

(٥) الربط بالسياحة: هرم الجيزة الأكبر (هرم خوفو) طول ضلع قاعدته ٢٣٢ مترًا، وارتفاعه الجانبي ١٨٦ مترًا، أوجد ارتفاع الهرم.



(٦) الربط بالصناعة: تغلف الألبان المثلجة فى مخروط دائرى قائم بطى قطعة من الورق العازل للحرارة على شكل قطاع دائرى طول نصف قطر دائرته ١٢سم ومساحته ١٥٠سم٢ بحيث يتلاصق نصفا قطرى دائرته $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ أوجد ارتفاع المخروط. [تذكر: مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ طول قوسه × طول نصف قطر دائرته].

المساحة الجانبية و الكلية للهرم المنتظم القائم والمخروط القائم



المساحة الجانبية للهرم القائم = مجموع مساحات أوجهه الجانبية

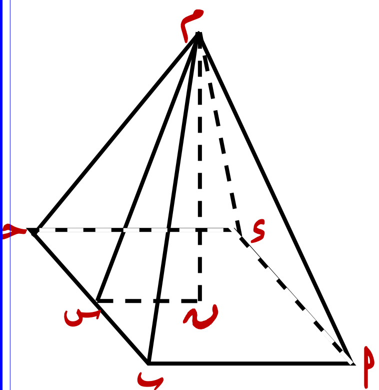
المساحة الجانبية للهرم المنتظم= $\frac{1}{2}$ محيط قاعدته × ارتفاعه الجانبى

المساحة الكلية للهرم = مساحته الجانبية + مساحة قاعدته

حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الأرتفاع

مثـــ١ـــال: م أ ب حـ ء هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته = ١٨سم ،طول حرفه الجانبى = ١٥ سم . (أ) الأرتفاع الجانبى للهرم (ب) ارتفاع الهرم (حـ) المساحة الكلية للهرم

الحـــــــــــل



المجسم هرم رباعى منتظم قائم

طول حرفه الجانبى م ب = ل = ١٥سم ، ب س = ٩سم

∴ △ م ب س قائم الزاوية فى س

(أ) ارتفاعه الجانبى م س = $\sqrt{(\text{م ب})^{2} - (\text{ب س})^{2}}$

= $\sqrt{(١٥)^{2} - (٩)^{2}}$ = ١٢ سم

∴ △ م ن س قائم الزاوية فى ن

∴ $(\text{م ن})^{2}$ = $\sqrt{(\text{م س})^{2} - (\text{ن س})^{2}}$

م ن = $\sqrt{(١٢)^{2} - (٩)^{2}}$ = $\sqrt{١٤٤ - ٨١}$ = $\sqrt{٦٣}$ = ٣$\sqrt{٧}$ سم

محيط قاعدته (مربع) = ٤ × ١٨ = ٧٢ سم

مساحة قاعدته = مربع طول ضلعه = $(١٨)^{2}$ = ٣٢٤ سم^{2}

مساحة الهرم الجانبية = $\frac{1}{2}$ محيط قاعدته × الارتفاع الجانبي

= $\frac{1}{2}$ × ٧٢ × ١٢ = ٤٣٢ سم^{2}

مساحته الكلية = مساحته الجانبية + مساحة قاعدته

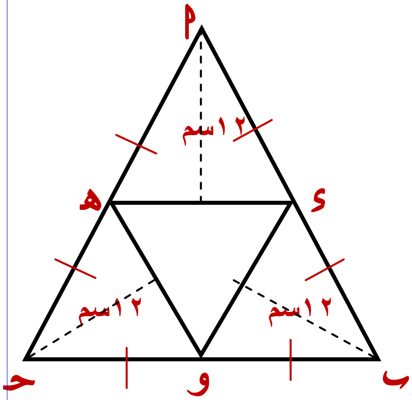
= ٤٣٢ + ٣٢٤ = ٧٥٦ سم^{2}

مثـــ٢ـــال: بإستخدام الشبكة التى أمامك صف المجسم وأوجد مساحتة الكلية

الحـــــــــــل

بفرض: ب و = ل

ء و = و هـ = ء هـ = $\frac{1}{2}$ أ حـ = ل سم



∆ ء هـ و (مثلث متساوى الاضلاع) طول ضلعه = ل

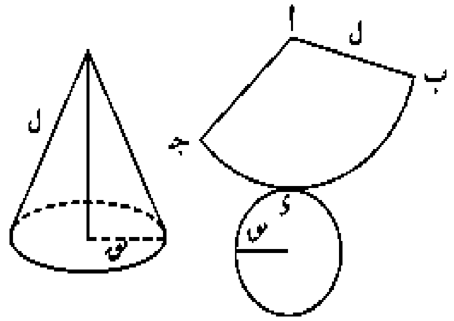
∴ الشبكة لهرم ثلاثى منتظم الوجوه

فيكون جا ٦٠ = $\frac{١٢}{ل}$ ∴ ل = ٨ $\sqrt{٣}$ سم

مساحته الكلية = ٤ × مساحة الوجه الواحد

= ٤ × $\frac{١}{٢}$ × ٨ $\sqrt{٣}$ × ١٢ = ١٩٢ $\sqrt{٣}$ سم^٢

المخروط القائم



بفرض ل طول راسمه ، نق طول نصف قطر دائرته.

المساحة الجانبية للمخروط القائم = π ل نق

المساحة الكلية للمخروط القائم = π ل نق + π نق^٢

= π نق (ل + نق)

تذكر أن : فى القطاع الدائرى هـ^ء = $\frac{ل}{نق}$

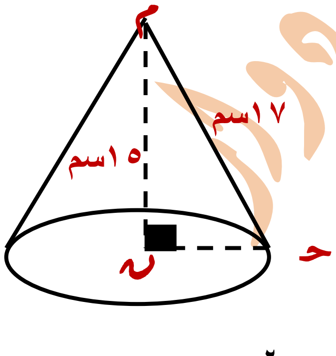
حيث هـ^ء زاوية القطاع بالدائرى ، ل طول قوسه ، نق طول نصف قطر دائرته

مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ ل نق = $\frac{١}{٢}$ هـ^ء نق^٢

محيط القطاع = ٢ نق + ل

مثـــ٣ـــال: أوجد المساحة الكلية لمخروط قائم طول راسمه ١٧ سم وارتفاعه ١٥ سم.

الحــــــــل



∵ ∆ م ن حـ قائم الزوية فى ن

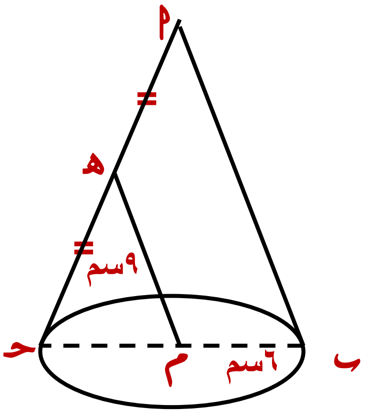
∴ (ن حـ)^٢ = (م حـ)^٢ – (م ن)^٢

ن حـ = نق = $\sqrt{(١٧)^٢ - (١٥)^٢}$ = $\sqrt{٦٤}$ = ٨ سم

المساحة الكلية للمخروط القائم = π ل نق + π نق^٢

= π نق (ل + نق) = π × ٨ (١٧ + ٨) = ٢٠٠ π سم^٢

مثـــ٤ـــال: فى الشكل المقابل: أوجد المساحة الجانبية والكلية لمخروط الدائرى القائم



الحـــــــــــل

∵ م، هـ منتصفى ب حـ ، أ حـ فى Δ أ ب حـ

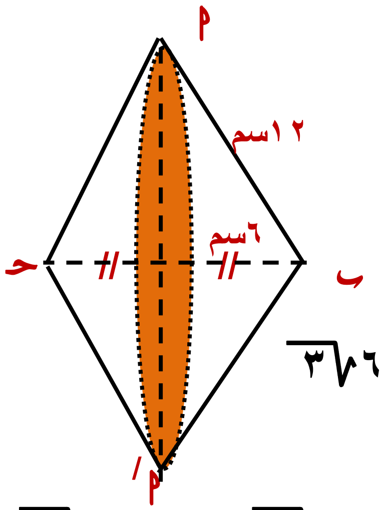
∴ أ ب = ٢ × ٩ = ١٨ سم (طو راسم المخروط)

∴ المساحة الجانبية = π نو ل = ٦ × ١٨ π = ١٠٨π

المساحة الكلية للمخروط القائم = π نو ل + π نو^2

= π نو(ل + نو) = π × ٦ (١٨ + ٦) = ١٤٤ π سم^2

مثـــ٥ـــال: أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه = ١٢سم دار دورة كاملة حول أحد أضلاعه أوجد المساحة الجانبية للجسم الناشئ



الحـــــــــــل

الجسم الناشئ من الدوران مخروطان متطابقان

ولهما قاعدة مشتركة

(دائرة مركزها م ونصف قطرها = $\sqrt{(١٢)^2 - (٦)^2}$ = ٦$\sqrt{٣}$

∴ وأرتفاع كل منهما = ٦ سم

∴ المساحة الجانبية للمجسم = ٢ × π نو ل = ٢× ١٢× ٦$\sqrt{٣}$ π = ١٤٤$\sqrt{٣}$ π

مثـــ٦ـــال: غطاء مصباح على شكل مخروط قائم محيط قاعدته ٨٨ سم وارتفاعه ٢٠ سم احسب مساحته لأقرب سنتيمتر مربع.

الحـــــــــــل

بفرض نو نصف قطر دائرته ، ل طول الحرف الجانبى ،

ع الارتفاع ، ∵ محيط دائرته = ٨٨

∴ ٢ π نو = ٨٨ ∴ نو = ١٤ سم

∵ ل^2 = (٢٠)^2 + (١٤)^2 = ٥٩٦ ∴ ل = ٢٤,٤ سم

مساحة غطاء المصباح = π ل نو = π × ٢٤,٤ × ١٤ =١٠٧٣,٢ سم^2

تمارين على المساحات للهرم و المخروط

(١) الشكل المقابل يمثل هرم ثلاثى ، س ، ص ، ع ثلاث مستويات أكمل مايأتى

أ) س ∩ ص = ... ب) س ∩ ع = ...

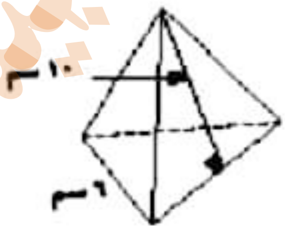
ج) ص ∩ ع = ... د) $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ∩ س = ...

هـ) $\overleftrightarrow{\text{بج}}$ .... س ، $\overleftrightarrow{\text{بج}}$ .... ع

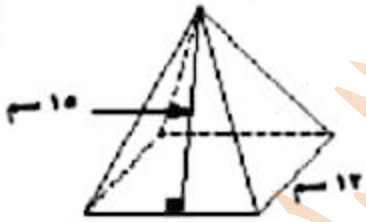
و) س ∩ ص ∩ ع = ...

(٢) أوجد المساحة الجانبية والمساحة الكلية لكل هرم منتظم حسب البيانات المعطاة.

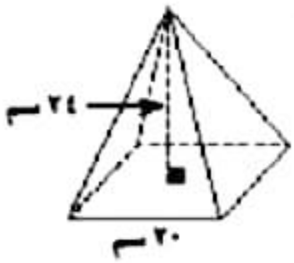
أ)



ب)



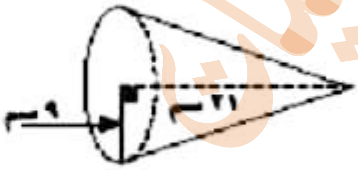
ج)



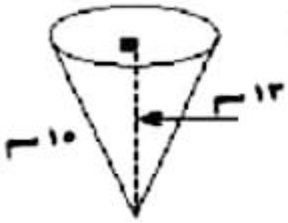
(٣) أوجد المساحة الجانبية والمساحة الكلية لكل مخروط قائم حسب البيانات المعطاة.

أ)

ب)

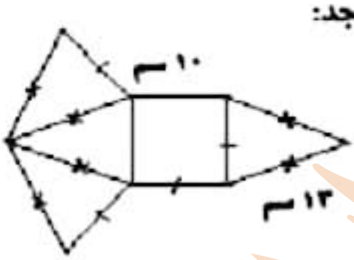


ج)



(٤) هرم سداسى منتظم طول ضلع قاعدته ١٢سم وارتفاعه الجانبى ١٠ $\sqrt{٣}$ سم. أوجد:

أ) مساحته الجانبية ب) مساحته الكلية



(٥) الربط بالصناعة. تصنع عبوات منتجات أحد المصانع من الورق المقوى بطى شبكة المجسم المقابلة.

أ) أوجد مساحة الورق المقوى المستخدم لإنتاج ١٠٠٠ عبوة.

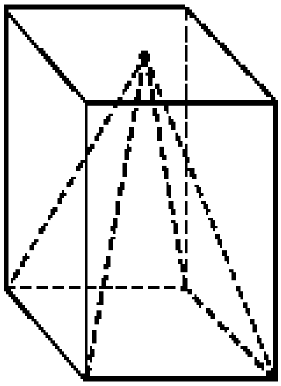
ب) احسب تكاليف الورق المقوى المستخدم إذا كان تكلفة المتر المربع الواحد منه ١٥ جنيهًا.

(٦) طويت قطعة من الورق المقوى على شكل قطاع دائرى طول نصف قطر دائرته ٣٦سم وقياس زاويته ٢١٠° لتصنع مخروطًا دائريًا قائمًا. أوجد ارتفاع المخروط.

(مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} هـ^{د} ، نق طول نصف قطر دائرة القطاع ، هـ^{د} قياس زاويته المركزية بالراديان).

(٧) أوجد طول نصف قطر دائرة مخروط قائم، إذا كان طول راسمه ١٥سم، ومساحته الكلية ١٥٤π سم^{٢}.

حجم الهرم المخروط القائم



تذكر أن : ١ـ حجم المنشورالقائم = مساحة القاعدة × الارتفاع
قاعدته مثلث أو مربع أو شكل رباعى أو ....

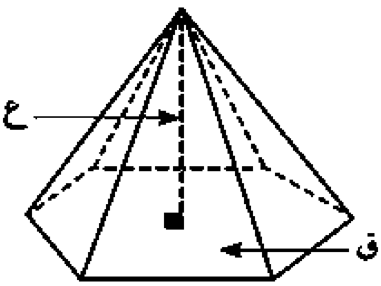
٢ـ حجم الاسطوانة القائمة = مساحة القاعدة × الارتفاع
قاعدتها دائرة طول نصف قطرها نق

٣ـ مساحة سطح المضلع المنتظم = $\frac{ن}{٤}$ س^٢ ظتا $\frac{\pi}{ن}$

حيث ن عدد اضلاعه ، س طول ضلعه ، π = ١٨٠°

العلاقة بين حجم الهرم و المنشور المشتركتان فى نفس القاعدة و الارتفاع :

حجم الهرم =$\frac{١}{٣}$ حجم المنشور = $\frac{١}{٣}$ مساحة قاعدته × ارتفاعه



* **حجم الهـــرم :**

حجم الهرم = ثلث مساحة قاعدته × ارتفاعه = $\frac{١}{٣}$ ق × ع

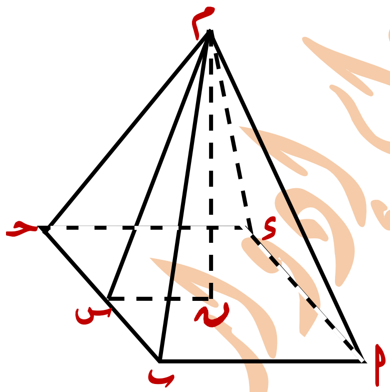
حيث (ق) مساحة القاعدة ، (ع) ارتفاع الهرم

مثـــ١ـــال: م ا ب حـ ء هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته = ١٨سم ،طول ارتفاعه الجانبى = ١٥ سم . أوجد ⓐ ارتفاع الهرم ⓑ حجم للهرم

الحـــــــــــل

هرم رباعى منتظم قائم طول قاعدته = ١٨ سم

طول ارتفاعه الجانبى م س = ١٥سم ، ن س = ٩سم



ⓐ ∴ Δ م ن س قائم الزاوية فى ن

∴ (م ن)^٢ = $\sqrt{(م س)^٢ - (ن س)^٢}$

ارتفاع الهرم م ن =$\sqrt{(١٥)^٢ - (٩)^٢}$

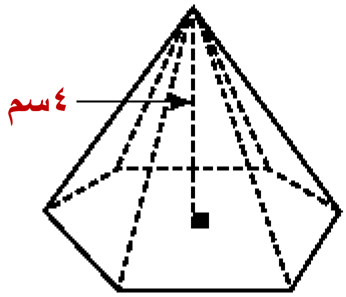
= $\sqrt{٢٢٥ - ٨١}$ = $\sqrt{١٤٤}$ = ١٢ سم

مساحة قاعدته (مربع) = (١٨)^٢ = ٣٢٤ سم^٢

ⓑ حجم الهرم =$\frac{١}{٣}$ مساحة قاعدته × ع = $\frac{١}{٣}$ × ٣٢٤ × ١٢ = ١٢٩٦سم^٣

مثـــ٢ـــال : هرم سداسى منتظم حجمه $٨\sqrt{٣}$ سم^{٣} وأرتفاعه ٤ سم أوجد محيط قاعدته.

الحـــــــــل



∵ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة قاعدته × ع

∴ $٨\sqrt{٣}$ = $\frac{١}{٣}$ × مساحة سداسى × ٤

∴ مساحة السداسى المنتظم = $٦\sqrt{٣}$ سم^{٢}

$\frac{٦}{٤}$ × س^{٢} × ظتا $\frac{\pi}{٦}$ = $٦\sqrt{٣}$

⟸ س^{٢} = $٦\sqrt{٣}$ × $\frac{٤}{٦}$ × $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ = ٤ ⟸ س = ٢ ∴ المحيط ٢ × ٦ = ١٢سم

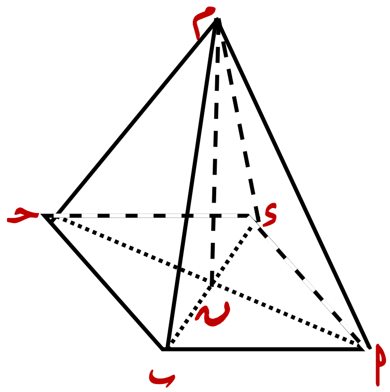
مثـــ٣ـــال:هرم رباعى منتظم مساحة قاعدته ٩سم^{٢} وطول حرفه الجانبى ٥ سم أوجد حجمه

الحـــــــــل

مساحة المربع(القاعدة) = ٩ سم^{٢} ∴ طول ضلعه = ٣ سم

أ حـ = $٣\sqrt{٢}$ سم ⟸ ن حـ = $\frac{٣}{٢}\sqrt{٢}$ سم

∴ Δ م ن حـ قائم الزاوية فى ن



ارتفاع الهرم م ن = $\sqrt{(\text{م حـ})^{٢} - (\text{ن حـ})^{٢}}$

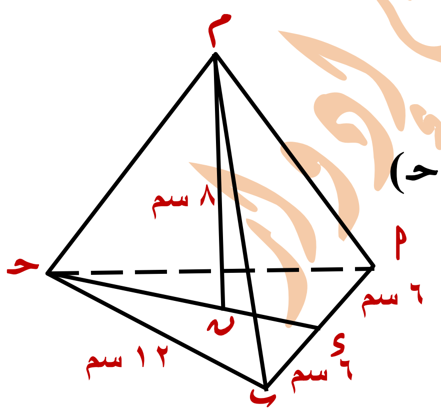
= $\sqrt{(٥)^{٢} - (\frac{٣}{٢}\sqrt{٢})^{٢}}$ = $\frac{١}{٢}\sqrt{٨٢}$ سم

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة قاعدته × ع

= $\frac{١}{٣}$ × ٩ × $\frac{١}{٢}\sqrt{٨٢}$ = ١٣,٦ سم^{٣}

مثـــ٤ـــال : م أ ب جـ هرم ثلاثى رأسه على بعد ١٥ سم من قاعدته وأطوال أضلاع قاعدته هى ٥ ، ٦ ، ٧ سم . أوجد حجمه

الحـــــــــل



محيط القاعدة = ٥ + ٦ + ٧ = ١٨ سم

∵ مساحة Δ أ ب حـ = $\sqrt{\text{ع}(\text{ع}-\text{أ ب})(\text{ع}-\text{ب حـ})(\text{ع}-\text{أ حـ})}$

= $\sqrt{٩(٩-٥)(٩-٦)(٩-٧)}$ = $\sqrt{٢١٦}$ = $٦\sqrt{٦}$

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة قاعدته × ع

= $\frac{١}{٣}$ × $٦\sqrt{٦}$ × ١٥ = $٣٠\sqrt{٦}$ سم^{٣}

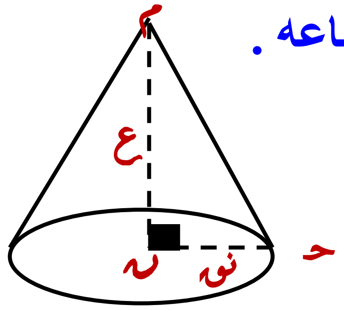
حجم المخروط القائم:

حجم المخروط = ثلث حاصل ضرب مساحة قاعدته فى ارتفاعه .

$= \frac{1}{3}\pi$ نق^2 ع

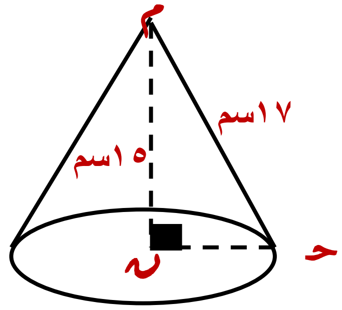
حيث (نق) طول نصف قطر دائرة المخروط ،

(ع) ارتفاع المخروط



مثــ٥ــال: أوجد حجم المخروط القائم. طول راسمه ١٧ سم وارتفاعه ١٥ سم.

الحـــــــــــــل



∵ Δ م ن حـ قائم الزاوية فى ن

∴ (ن حـ)^2 = نق^2 = (م حـ)^2 − (م ن)^2

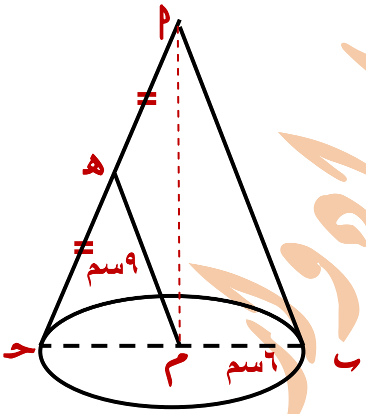
ن حـ = نق = $\sqrt{(١٧)^2 - (١٥)^2}$ = $\sqrt{٦٤}$ = ٨ سم

∴ حجم المخروط القائم = $\frac{1}{3}\pi$ نق^2 ع

= $\frac{1}{3}\pi$ × (٨)^2 × ١٥ = ٣٢٠ π سم^3

مثــ٦ــال: فى الشكل المقابل: أوجد حجم والمساحة الجانبية لمخروط الدائرى القائم

الحـــــــــــــل



∵ م، هـ منتصفى ب حـ ، ا حـ فى Δ ا ب حـ

∴ ا ب = ٢ × ٩ = ١٨ سم (طو راسم المخروط)

∴ المساحة الجانبية = π نق ل = ٦ × ١٨ π = ١٠٨π

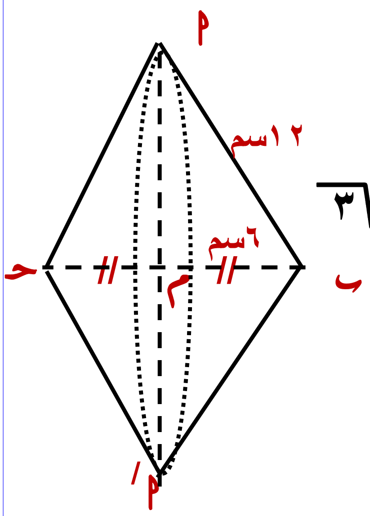
ع = $\sqrt{(١٨)^2 - (٦)^2}$ = ١٢$\sqrt{٢}$ سم

حجم المخروط = $\frac{1}{3}\pi$ نق^2 × ع

= $\frac{1}{3}$ × π × (٦)^2 × ١٢$\sqrt{٢}$ = ١٤٤$\sqrt{٢}$ π سم^3

مثــ٧ــال: ٢ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه = ١٢سم دار دورة كاملة حول أحد أضلاعه أوجد حجم للجسم الناشئ

الحــــــــــــل



الجسم الناشئ من الدوران مخروطان متطابقان

ولهما قاعدة مشتركة

(دائرة مركزها م ونصف قطرها = $\sqrt{(١٢)^٢ - (٦)^٢}$ = ٦$\sqrt{٣}$

∴ وأرتفاع كل منهما = ٦ سم

∴ حجم الجسم الناتج = ٢ × $\frac{١}{٣}$ π نق^٢ × ع

= ٢ × $\frac{١}{٣}$ π × (٦$\sqrt{٣}$)^٢ × ٦ = ٤٣٢ π سم^٣

مثــ٨ــال : قطعة من الشيكولاته على هيئة مخروط قائم حجمه ٢٧ π سم^٣ ومحيط قاعدته ٦ π سم أوجد ارتفاعه .

الحــــــــــــل

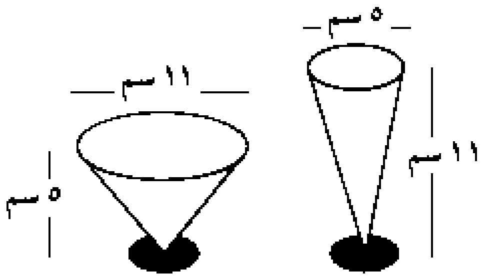
∵ محيط قاعدته = ٦ π سم ∴ ٢ π نق = ٦ π ∴ نق = ٣ سم

∵ حجم المخروط = ٢٧ π سم^٣ ∴ $\frac{١}{٣}$ π نق^٢ ع = ٢٧ π

∴ $\frac{١}{٣}$ π × (٣)^٢ × ع = ٢٧ π ∴ ع = ٩ سم ∴ الارتفاع = ٩ سم

مثــ٩ــال : ٢ ، ب كأسان للشراب . ايهما سعته أكبر ؟ أوجد الفرق بين سعتيهما .

الحــــــــــــل



الكأس الأول : نق= ٢,٥ سم ، ع = ١١ سم

حجم الكأس الاول = $\frac{١}{٣}$ π نق^٢ ع

= $\frac{١}{٣}$ π × (٢,٥)^٢ × ١١ = ٧٢ سم^٣

الكأس الثانى : نق = ٥,٥ سم ، ع = ٥ سم

حجم الكأس الثانى = $\frac{١}{٣}$ π نق^٢ × ع = $\frac{١}{٣}$ π × (٥,٥)^٢ × ٥ = ٥٠,٤ سم٣

الفرق بين سعتيهما = ٧٢ – ٥٠,٤ = ٢١,٦ سم^٣ [تذكر أن : الحجم = السعة]

تمارين على حجم المخروط والهرم

(١) أوجد حجم هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ٢٠سم وارتفاعه ٣٦سم.

(٢) احسب لأقرب رقم عشرى واحد، حجم هرم خماسى منتظم طول ضلع قاعدته ٤٠سم وارتفاعه ١٠سم.

(٣) هرم رباعى منتظم ارتفاعه ٩سم، وحجمه ٣٠٠سم^3. أوجد طول ضلع قاعدته.

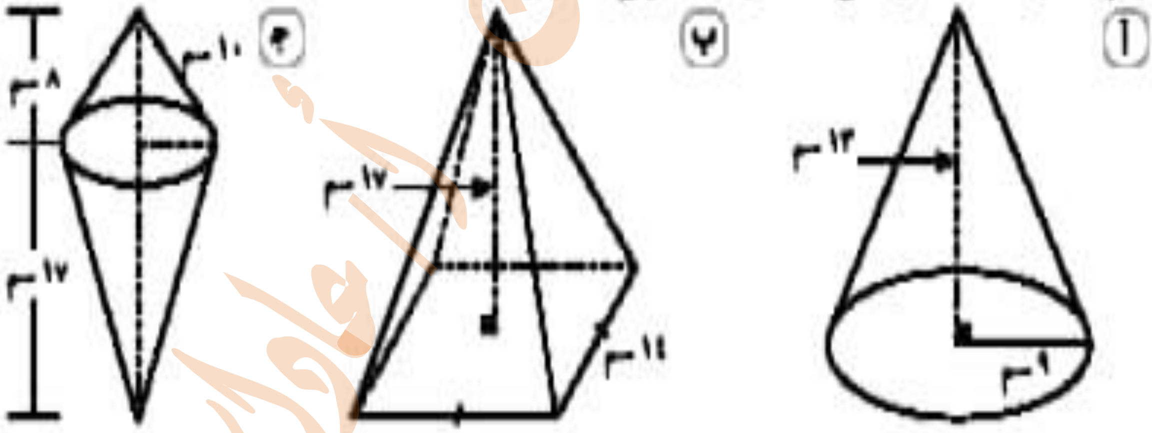
(٤) هرم رباعى منتظم مساحة قاعدته ٧٠٠سم^2، وارتفاعه الجانبى ٢٠سم أوجد حجمه.

(٥) أيهما أكبر حجمًا؛ مخروط دائرى قائم طول نصف قطر قاعدته ١٥سم وارتفاعه ٢٠سم، أم هرم رباعى منتظم ارتفاعه ٤٠سم ومحيط قاعدته ٤٨سم.

(٦) أوجد حجم مخروط دائرى قائم، محيط قاعدته ٤٤سم وارتفاعه ٢٥سم.

(٧) أوجد حجم مخروط دائرى قائم، مساحته الجانبية ٢٢٠سم^2 وطول راسمه ١٤سم.

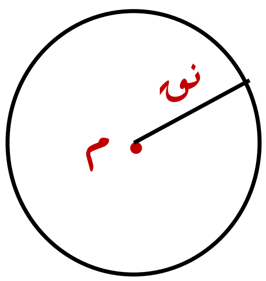
(٨) رتب المجسمات التالية من الأصغر حجمًا إلى الأكبر حجمًا.



(٩) الربط بالسياحة: صنع نموذج للهرم الأكبر من سبيكة معدنية كثافتها ٣,٢جم/سم^3. إذا كان طول ضلع قاعدة النموذج ١١,٥سم وارتفاعه ٧سم، فاحسب كتلته لأقرب رقم عشرى واحد.

(١٠) الربط بالفيزياء: إناء أسطوانى الشكل به ماء، غمر فيه جسم معدنى على شكل مخروط قائم، ارتفاعه ١٢سم وطول نصف قطر قاعدته ٢سم غمرًا كاملاً، فارتفع سطح الماء فى الإناء بمقدار ١سم. أوجد طول قطر قاعدة الإناء.

معادلة الدائرة



*** تذكر أن :**

١ـ الدائرة : هى مجموعة نقط المستوى التى تكون على نفس البعد الثابت من نقطة ثابتة فى المستوى. حيث تسمى م النقطة الثابتة مركز الدائرة و نصف قطرها نق و نرمز للدائرة بـ د

٢ـ البعد بين النقطتين (س$_1$ ، ص$_1$) ، (س$_2$ ، ص$_2$)

$$= \sqrt{(\text{س}_2 - \text{س}_1)^2 + (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)^2}$$

٣ـ صورة النقطة (س$_1$ ، ص$_1$) بالانتقال (م ، ن) هى النقطة (س$_1$ + م ، ص$_1$ + ن)

صورة النقطة (ـ ٢ ، ٤) بالانتقال (٤ ، ١) هى النقطة (٢ ، ٥)

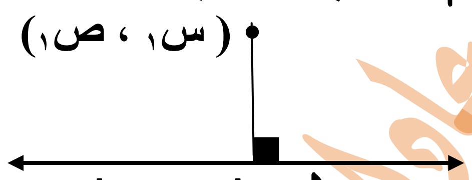
٤ـ إحداثى منتصف المسافة بين النقطتين (س$_1$ ، ص$_1$) ، (س$_2$ ، ص$_2$)

$$= \left(\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{٢} ، \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{٢} \right)$$

٥ـ مساحة اى مضلع منتظم $= \frac{\text{ن}}{٢}$ نق^2 حا $\frac{٣٦٠}{\text{ن}}$

حيث نق نصف قطر الدائرة المار برؤوسه ، ن عدد أضلاع المضلع .

٦ـ طول العمود من نقطة (س$_1$ ، ص$_1$) لا تنتمى لمستقيم ا س + ب ص + جـ = ٠



ا س + ب ص + جـ = ٠

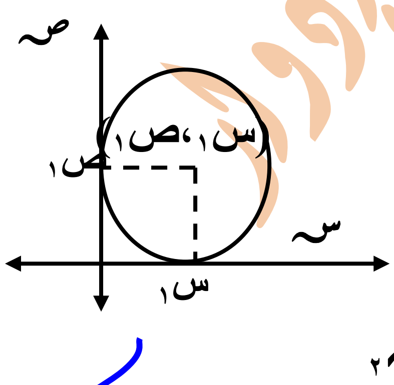
$$\text{طول العمود ل} = \frac{|\text{ا س}_1 + \text{ب ص}_1 + \text{جـ}|}{\sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}}$$

ملحوظة : البعد بين النقطة (س$_1$ ، ص$_1$)

، المستقيم س = ٠ (محور الصادات) = | س$_1$ |

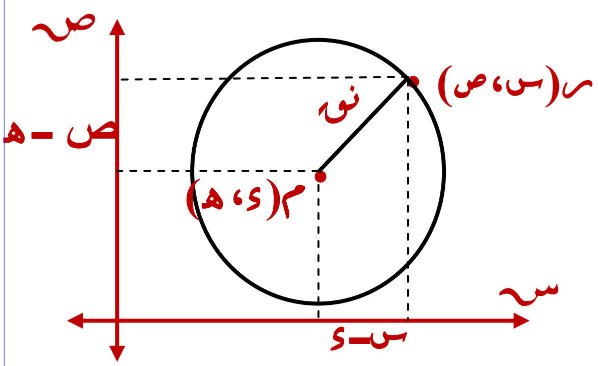
، البعد بين (س$_1$ ، ص$_1$)

و المستقيم ص = ٠ (محور السينات) = | ص$_1$ |



٧ـ تتطابق دائرتان إذا تساوى طولا نصفى قطريهما نق$_1$ = نق$_2$

معادلة الدائرة



بدلالة إحداثى مركزها وطول نصف قطرها

إذا كانت النقطة ر (س ، ص) ∈ الدائرة م(ء، هـ)

وطول نصف قطرها = نق فإن معادلة الدائرة ء

$$\boxed{(\text{س} - \text{ء})^{٢} + (\text{ص} - \text{هـ})^{٢} = \text{نق}^{٢}}$$

حيث م (ء، هـ) مركز الدائرة ، نق نصف قطر الدائرة

مثـــ١ـــال : اكتب معادلة الدائرة إذا كان مركزها م (٤ ، ـ ٣) و طول نصف قطرها يساوى ٥ وحدات

الحـــــــــــل

بفرض أن النقطة ر (س ، ص)∈ الدائرة ء

∵ مركز الدائرة (٤ ، ـ ٣) ، طول نصف قطر الدائرة = ٥ وحدات

∴ ء = ٤ ، هـ = -٣ ، نق = ٥ وحدات

∴ تكون المعادلة هى (س − ٤)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = (٥)^{٢}

اى : (س − ٤)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ٢٥

مثـــ٢ـــال : اكتب معادلة الدائرة إذا كان مركزها م (٢ ، ٠) و طول قطرها $\sqrt{٢٨}$ وحدات

الحـــــــــــل

م (٢ ، ٠) ، القطر = $\sqrt{٢٨}$ = ٢$\sqrt{٧}$ ∴ نق = $\sqrt{٧}$ وحدة

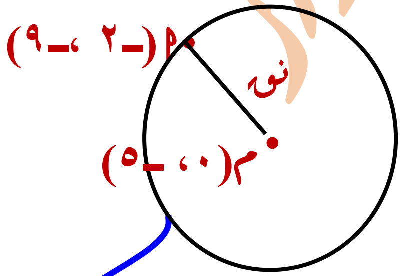
∵ (س − ء)^{٢} + (ص − هـ)^{٢} = نق^{٢}

∴ المعادلة (س − ٢)^{٢} + (ص − ٠)^{٢} = ($\sqrt{٧}$)^{٢}

∴ معادلة الدائرة هى (س − ٢)^{٢} + ص^{٢} = ٧

مثـــ٣ـــال : اكتب معادلة الدائرة إذا كان مركزها (٠ ، -٥) و تمر بالنقطة أ (-٢ ، - ٩)

الحـــــــــــل



نق^{٢} = (−٢ − ٠)^{٢} + (− ٩ + ٥)^{٢} = ٢٠

∴ معادلة الدائرة هى (س − ء)^{٢} + (ص − هـ)^{٢} = نق^{٢}

∴ المعادلة هى (س − ٠)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = ٢٠

اى : $س^٢ + (ص + ٥)^٢ = ٢٠$

حالة خاصة: معادلة الدائرة مركزها نقطة الاصل و طول نصف قطرها = نق

∴ معادلة الدائرة هى $(س - ٠)^٢ + (ص - ٠)^٢ = نق^٢$

$\boxed{\text{هى: } س^٢ + ص^٢ = نق^٢}$

مثـــ٤ـــال : اكتب معادلة الدائرة التى قطرها $\overline{أب}$ حيث أ(٢ ، -٧) ، ب (٦ ، ٥)

الحـــــــــــل

بفرض النقطة م (ى ، هـ) مركز للدائرة التى قطرها $\overline{أب}$

و هى منتصف $\overline{أب}$

$∴ م (ى ، هـ) = (\frac{٢ + ٦}{٢} ، \frac{-٧ + ٥}{٢}) = (٤ ، -١)$

$نق^٢ = (م أ)^٢ = (٢ - ٤)^٢ + (-٧ + ١)^٢ = ٤ + ٣٦ = ٤٠$

تكون معادلة الدائرة : $(س - ٤)^٢ + (ص + ١)^٢ = ٤٠$

ملاحظة هامة : بفرض النقطة ($س_١$، $ص_١$) فى مستوى الدائرة د التى معادلتها

$(س - ى)^٢ + (ص - هـ)^٢ = نق^٢$ فإنه :

١- إذا كان $(س - ى)^٢ + (ص - هـ)^٢ > نق^٢$ فإن النقطة تقع خارج الدائرة

٢- إذا كان $(س - ى)^٢ + (ص - هـ)^٢ < نق^٢$ فإن النقطة تقع داخل الدائرة

٣- إذا كان $(س - ى)^٢ + (ص - هـ)^٢ = نق^٢$ فإن النقطة تقع الدائرة

مثـــ٥ـــال : حدد موضع النقط التالية تنتمى الى الدائرة د التى معادلتها

$(س - ٦)^٢ + (ص + ١)^٢ = ٢٥$ حيث النقط أ(٩ ، ٣) ، ب(٧ ، ٥) ، جـ (٢ ، -٣)

الحـــــــــــل

بالتعويض عن أ فى المعادلة المعطاه نجد :

الطرف الايمن = $(٩ - ٦)^٢ + (٣ + ١)^٢ = ٩ + ١٦ = ٢٥$ = الطرف الايسر

∴ النقطة أ(٩ ، ٣) ∈ الدائرة د

بالتعويض عن ب فى المعادلة المعطاه نجد :

الطرف الايمن = (٧ – ٦)^{٢} + (٥ + ١)^{٢} = ١ + ٣٦ = ٣٧ > الطرف الايسر

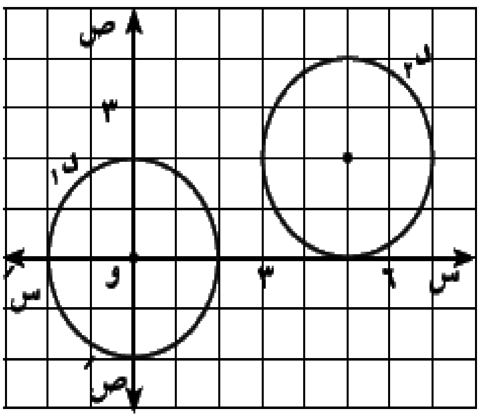
∴ النقطة ب تقع خارج الدائرة

بالتعويض عن جـ فى المعادلة المعطاه :

الطرف الايمن = (٢ – ٦)^{٢} + (- ٣ + ١)^{٢} = ١٤ + ٤ = ١٨ > الطرف الايسر

∴ النقطة جـ تقع داخل الدائرة .

مثـــ٦ـــال : الشكل المقابل فيه د$_{١}$ ، د$_{٢}$ دائرتان أثبت أن الدائرتان متطابقتان ثم أوجد معادلة كل منهما



الحـــــــــــل

تتطابق الدائرتان إذا تساوى طولا نصفى قطريهما

∵ نق$_{١}$ = نق$_{٢}$ = ٢ وحدة

∴ الدائرتان متطابقتان

∵ الدائرة د$_{١}$: مركزها (٠ ، ٠) ، نق$_{١}$ = ٢ وحدة

∴ معادلة الدائرة د$_{١}$: س^{٢} + ص^{٢} = ٤

e الدائرة د$_{٢}$: مركزها (٥ ، ٢) ، نق$_{٢}$ = ٢ وحدة

∴ معادلة الدائرة د$_{٢}$: (س – ٥)^{٢} + (ص – ٢)^{٢} = ٤

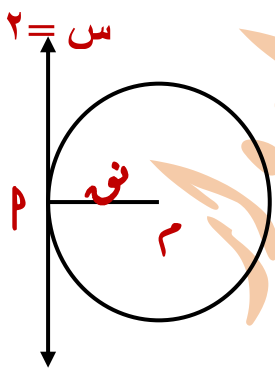
و يلاحظ من الرسم أن الدائرة د$_{٢}$ هى صورة الدائرة د$_{١}$ بالانتقال (٥ ، ٢)

مثـــ٧ـــال : اكتب معادلة الدائرة التى مركزها النقطة (٥ ، ٤) و تمس المستقيم س = ٢

الحـــــــــــل

∵ مركز الدائرة م(٥ ، ٤) ، نق طول نصف قطرها

و من قانون طول العمود من نقطة م الى المستقيم   س ـ ٢ = ٠



حيث أ = ١ ، ب = ٠ ، جـ = - ٢

∴ نق = م أ = $\dfrac{|أس_{١} + ب ص_{١} + جـ|}{\sqrt{أ^{٢} + ب^{٢}}}$

= |٥ – ٢ | = |٣| = ٣

∴ معادلة الدائرة هى (س – ى)^{٢} + (ص – هـ)^{٢} = نق^{٢}

∴ المعادلة هى (س – ٥)^{٢} + (ص – ٤)^{٢} = (٣)^{٢} = ٩

مثـــ٨ـــال : أوجد إحداثيا المركز و طول نصف قطر كل من الدوائر الآتية :

(أ) (س – ٢)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ١٧ (ب) (س + ١)^{٢} = ١٦ ـ ص^{٢}

الحـــــــــل

(أ) ∵ معادلة الدائرة هى : (س – ء)^{٢} + (ص – هـ)^{٢} = نق^{٢}

∴ س – ء = س – ٢ ∴ ء = ٢

، ص – هـ = ص + ٣ ∴ هـ = - ٣

∵ نق^{٢} = ١٧ ∴ نق = $\sqrt{١٧}$

فيكون مركز الدائرة النقطة (٢ ، - ٣) و طول نصف قطرها يساوى $\sqrt{١٧}$ وحدة

(ب) المعادلة المعطاه (س+١)^{٢} + ص^{٢} = ١٦ و نظيره فى المعادلة

∴ س – ء = س + ١ ∴ ء = - ١

، ص – هـ = ص ∴ هـ = صفر

∵ نق^{٢} = ١٦ ∴ نق = ٤

فيكون مركز الدائرة النقطة (-١ ، ٠) و طول نصف قطرها يساوى ٤ وحدة

الصورة العامة لمعادلة الدائرة

∵ معادلة الدائرة التى مركزها (ء ، هـ) وطول نصف قطرها يساوى نق من الوحدات

هى (س – ء)^{٢} + (ص – هـ)^{٢} = نق^{٢} بفك الاقواس

∴ س^{٢} + ص^{٢} ـ ٢ ءس ـ ٢ هـ ص + ء^{٢} + هـ^{٢} ـ نق^{٢} = ٠

∵ ء ، هـ ، نق ثوابت ∴ المقدار ء^{٢} + هـ^{٢} ـ نق^{٢} = مقدارا ثابتا

وبوضع ل = ـ ء ، ك = ـ هـ ، جـ = ء^{٢} + هـ^{٢} ـ نق^{٢} تصبح المعادلة على الصورة

الصورة العامة لمعادلة دائرة : س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص + جـ = ٠

مركزها (ـ ل ، ـ ك) و طول نصف قطرها يساوى نق حيث

نق = $\sqrt{\text{ل}^{٢} + \text{ك}^{٢} - \text{جـ}}$ ، ل^{٢} + ك^{٢} ـ جـ > ٠

مثـــ٩ـــال : اكتب الصورة العامة لمعادلة الدائرة إذا كان مركزها النقطة م (٦، ـ ٣) و طول نصف قطرها يساوى ٥ وحدات .

الحـــــــــل

∵ مركز الدائرة (ـ ل ، ـ ك) فى الصورة العامة لمعادلة الدائرة

، مركز الدائرة (٦ ، ـ٣) معطى ∴ ل = ـ ٦ ، ك = ٣

∵ نق = ٥ ، جـ = ل^{٢} + ك^{٢} ـ نق^{٢}

∴ جـ = (ـ ٦)^{٢} + (٣)^{٢} ـ (٥)^{٢} = ٢٠ وتكون الصورة العامة لمعادلة الدائرة

هى: س^{٢} + ص^{٢} ـ ١٢ س + ٦ ص + ٢٠ = ٠

مثـــ١٠ـــال : اكتب الصورة العامة لمعادلة الدائرة إذا كان مركزها النقطة ن (٥ ، ـ ٣) و تمر بالنقطة ب (٢ ، ١) .

الحـــــــــل

نفرض نق نصف قطر الدائرة المعطاه ،مركزها ن(٥ ، ـ ٣)

نق = (ب ن) = $\sqrt{(٢ - ٥)^{٢} + (١ + ٣)^{٢}}$ = ٥ وحدة

∴ مركز الدائرة (ـ ل ، ـ ك) فى الصورة العامة

∴ ل = ـ ٥ ، ك = ٣ ، نق = ٥

∴ جـ = ل^{٢} + ك^{٢} ـ نق^{٢} = (ـ٥)^{٢} + (٣)^{٢} ـ (٥)^{٢} = ٩

وتكون الصورة العامة لمعادلة الدائرة : س٢ + ص٢ + ٢ ل س + ٢ ك ص + جـ = ٠

∴ س^{٢} + ص^{٢} ـ ١٠ س + ٦ ص + ٩ = ٠

مثـــ١١ـــال : اكتب الصورة العامة لمعادلة الدائرة التى قطرها $\overline{أب}$ حيث أ (٢ ، ـ ٧) ، ب (٦ ، ٥)

الحـــــــــل

∴ م (ء ، هـ) منتصف $\overline{أب}$ = ($\frac{٢ + ٦}{٢}$ ، $\frac{-٧ + ٥}{٢}$) = (٤ ، ـ ١)

∴ مركز الدائرة (ـ ل ، ـ ك) فى الصورة العامة ∴ ل = ـ ٤ ، ك = ١

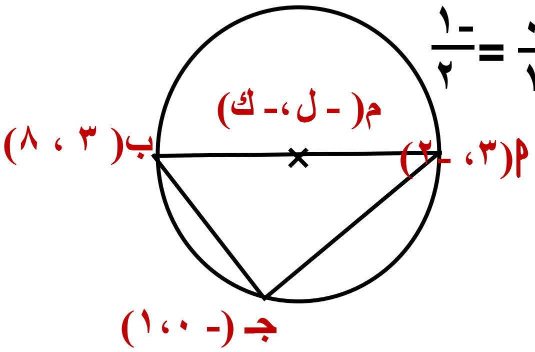
∵ نق^{٢} = (م أ)^{٢} = (٢ ـ ٤)^{٢} + (ـ٧ + ١)^{٢} = ٤ + ٣٦ = ٤٠ ∴ نق = ٢$\sqrt{١٠}$

، جـ = ل^{٢} + ك^{٢} ـ نق^{٢} = (ـ ٤)^{٢} + (١)^{٢} ـ ٤٠ = ـ ٢٣

و تكون الصورة العامة لمعادلة الدائرة : س^{٢} + ص^{٢} ـ ٨ س + ٢ ص ـ ٢٣ =٠

مثـــ١٢ــال : إذا كانت النقط ﻫ (٣ ، ــ ٢) ، ب(٣ ، ٨) ، جـ (ــ١، ٠) تنتمى الى دائرة واحدة فأثبت أن $\overline{\text{ﻫ ب}}$ قطر فيها ثم اكتب الصورة العامة لمعادلتها .

الحـــــــــل



الميل = $\frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$ ∴ ميل $\overleftrightarrow{\text{ﻫ جـ}}$ = $\frac{-٢ - ٠}{٣ + ١}$ = $\frac{-١}{٢}$

، ميل $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ = $\frac{٨ - ٠}{٣ + ١}$ = ٢

∴ ميل $\overleftrightarrow{\text{ﻫ جـ}}$ × ميل $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ = $\frac{-١}{٢}$ × ٢ = - ١

∴ $\overleftrightarrow{\text{ﻫ جـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ∴ ق (∠ جـ) = ٩٠° محيطية مرسومة فى نصف دائرة

∴ ﻫ ب قطر فى الدائرة .

∵ م (ــ ل ، ــ ك) = ($\frac{٣ + ٣}{٢}$ ، $\frac{-٢ + ٨}{٢}$) = (٣ ، ٣) ∴ ل = ــ٣ ، ك = ــ٣

، نق^٢ = (ﻫ م)^٢ = (٣ ــ ٣)^٢ + (- ٢ ــ ٣)^٢ = ٠ + ٢٥ = ٢٥

، جـ = ل^٢ + ك^٢ ـ نق^٢ = (ــ ٣)^٢ + (ــ ٣)^٢ ــ ٢٥ = ــ ٧

∴ الصورة العامة لمعادلة الدائرة : س^٢ + ص^٢ ــ ٦ س ــ ٦ ص ــ ٧ = ٠

الشروط اللازمة لتصبح معادلة الدائرة فى الصورة العامة :

س^٢ + ص^٢ + ٢ ل س + ٢ ك ص + جـ = ٠ يجب تحقق الشروط الثلاثة الأتية معا :

(١) المعادلة من الدرجة الثانية فى س ، ص (٢) معامل س^٢ = معامل ص^٢ = الوحدة

(٣) خالية من الحد الذى يحتوى س ص أى معامل س ص = ٠ ، ل^٢ + ك^٢ ــ جـ > ٠

لتعيين إحداثى مركز دائرة و طول نصف قطرها من الصورة العامة لمعادلتها

❖ تحقق أولا من وضع المعادلة فى الصورة العامة حيث : معامل س^٢ معامل ص^٢ = ١

إحداثيا المركز (ــ ل ، ــ ك) أى ($\frac{\text{ـ معامل س}}{٢}$ ، $\frac{\text{ـ معامل ص}}{٢}$)

❖ طول نصف قطر الدائرة يتعين من العلاقة : نق= $\sqrt{\text{ل}^٢ + \text{ك}^٢ - \text{جـ}}$

❖ حيث ل^٢ + ك^٢ ــ جـ > ٠

مثـــ١٣ـــال: أى المعادلات الآتية تمثل دائرة وإذا كانت معادلة دائرة .
أوجد مركزها و طول نصف قطرها:

١) س^٢ + ص^٢ – ٦ س + ٤ ص + ١٧ = ٠   ٢) ٤ س^٢ + ٤ ص^٢ = ٤٩

٣) س^٢ + ص^٢ + ٤ س – ٢ ص = ٠   ٤) س^٢ + ص^٢ + ٢ س ص + ٣ = ٠

٥) س^٢ + ص^٢ + ٤ س + ٢٥ = ٠   ٦) ٣ س^٢ + ٢ ص^٢ + ٦ س – ٨ ص = ٠

الحـــــــــــل

١) س^٢ + ص^٢ – ٦ س + ٤ ص + ١٧ = ٠ ⟸ معامل س^٢ = معامل ص^٢ = الوحدة
، خالية من الحد المحتوى على س ص ، ل = ـ ٣ ، ك = ٢ ، جـ = ١٧
∵ ل^٢ + ك^٢ – جـ = ٩ + ٤ – ١٧ = ـ ٤ < ٠ ∴ المعادلة ليست دائرة

٢) ٤ س^٢ + ٤ ص^٢ = ٤٩ بالقسمة على ٤
∴ س^٢ + ص^٢ ـ $\frac{٤٩}{٤}$ = ٠ ⟸ معامل س^٢ = معامل ص^٢ = الوحدة
، المعادلة خالية من الحد المحتوى على س ص ، ل = ٠ ، ك = ٠ ، جـ = ـ $\frac{٤٩}{٤}$
، ل^٢ + ك^٢ – جـ = ٠ + ٠ – (ـ$\frac{٤٩}{٤}$) > ٠ ∴ نق = $\frac{٧}{٢}$ دائرة مركزها (٠،٠)

٣) س^٢ + ص^٢ + ٤ س – ٢ ص = ٠ ⟸ معامل س^٢ = معامل ص^٢ = الوحدة
، المعادلة خالية من الحد المحتوى على س ص ، ل = ٢ ، ك = ـ١ ، جـ = ٠
، ل^٢ + ك^٢ – جـ = ٤ + ١ – ٠ = ٥ > ٠ ∴ نق = $\sqrt{٥}$
∴ المعادلة تمثل دائرة مركزها (ـ ٢ ، ١) ، طول نصف قطرها = $\sqrt{٥}$

٤) س^٢ + ص^٢ + ٢ س ص + ٣ = ٠ ⟸ معامل س^٢ = معامل ص^٢ = الوحدة
و المعادلة تحتوى على س ص ∴ المعادلة ليست دائرة

٥) س^٢ + ٢ ص^٢ + ٤ س + ٢٥ = ٠ ⟸ معامل س^٢ = معامل ص^٢ = ١
، المعادلة خالية من الحد المحتوى على س ص ، ل = ٢ ، ك = ٠ ، جـ = ٢٥
، ل^٢ + ك^٢ – جـ = ٤ + ٠ – ٢٥ = ـ ٢٤ < ٠ ∴ المعادلة ليست دائرة

٦) ٣ س^٢ + ٢ ص^٢ + ٦ س – ٨ ص = ٠ ⟸ ∵ معامل س^٢ ≠ معامل ص^٢
∴ المعادلة ليست دائرة

مثـــ١٤ـــال : هل الدائرتين د ١ : س٢ + ص٢ – ١٠ س – ٨ ص + ١٦ = ٠
، د ٢ : س٢ + ص٢ + ١٤ س + ١٠ ص – ٢٦ = ٠
متماسَتان من الخارج ؟ فسر إجابتك .

الحـــــــــــل

بفرض نق١ ، نق٢ طولا نصفى قطري د١ ، د٢ على الترتيب .

م١ (-ل١ ، - ك١) مركز الدائرة د١ ، م٢ (- ل٢ ، - ك ٢) مركز الدائرة د٢

∵ د١ : س٢ + ص٢ – ١٠ س – ٨ ص + ١٦ = ٠

∴ ل١ = - ٥ ، ك١ = - ٤ ، جـ = ١٦ ∴ ل١٢ + ك١٢ – جـ = ٢٥ + ١٦ – ١٦ = ٢٥

∴ نق١ = ٥ وحدة ، مركز الدائرة د١ هو م١(٥ ، ٤) .... [١]

∵ د ٢ : س٢ + ص٢ + ١٤ س + ١٠ ص – ٢٦ = ٠

∴ ل٢ = ٧ ، ك٢ = ٥ ، جـ = - ٢٦ ∴ ل٢٢ + ك٢٢ – جـ = ٤٩ + ٢٥ + ٢٦ = ١٠٠ > ٠

∴ نق٢ = ١٠ وحدة ، مركز الدائرة د٢ هو م٢ (- ٧ ، - ٥) .... [٢]

من ١ ، ٢ نجد : نق١ + نق٢ = ٥ + ١٠ = ١٥

طول خط المركزين = م١ م٢ = $\sqrt{(-٧ - ٥)^{٢} + (-٥ - ٤)^{٢}}$ = ١٥

∵ م١ م٢ = نق١ + نق٢ ∴ الدائرتان متماستان من الخارج

مثـــ١٥ـــال : يوضح الشكل المقابل مقطعا رأسيا فى أحد الانفاق الدائرية لمرور السيارات
معادلة دائرته : س٢ + ص٢ – ٤ س – ٦ ص – ١٢ = ٠ ، $\overline{أب}$ قطر فيها . أوجد
أقصى ارتفاع للنفق إذا كانت وحدة الأطوال فى المستوى الاحداثى تمثل ٧٠ سم

الحـــــــــــل

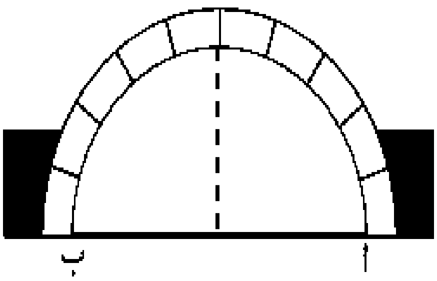
∵ معادلة الدائرة س٢ + ص٢ – ٤ س – ٦ ص – ١٢ = ٠

∴ ل = – ٢ ، ك = – ٣ ، جـ = – ١٢

∴ ل٢ + ك٢ – جـ = ٤ + ٩ + ١٢ = ٢٥ > ٠

∴ نق = ٥ وحدة

∴ أقصى ارتفاع للنفق = نق = ٥ × ٧٠ = ٣٥٠ سم



تمارين على معادلة الدائرة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) النقطة (٢ ، ٠) تقع على

أ) محور السينات ب) محور الصادات ج) المستقيم ص = ٢س د) الدائرة س^2 + ص^2 = ٩

(٢) إذا كانت أ(٣ ، -٧) ، ب(-٣ ، ٥) فإن إحداثى النقطة التى تنصف $\overline{\text{أب}}$ هما

أ) (٠ ، ١) ب) (١ ، ٠) ج) (٠ ، -١) د) (-١ ، ٠)

(٣) المسافة بين النقطتين (٢ ، ٤) ، (١٠ ، -٢) تساوى

أ) ٩ ب) ١٠ ج) ٢$\sqrt{٣٠}$ د) ٦

(٤) الدائرة س^2 + ص^2 = ٢٥ مركزها (٠ ، ٠) وتمر بالنقطة

أ) (١ ، ٤) ب) (٥ ، ٠) ج) (٢٥ ، ٠) د) (٥ ، ١)

(٥) معادلة الدائرة التى مركزها (٣ ، -٥) وطول نصف قطرها يساوى ٧ وحدات هى:-

أ) (س - ٣)^2 + (ص - ٥)^2 = ٤٩ ب) (س + ٣)^2 + (ص + ٥)^2 = ٤٩

ج) (س + ٣)^2 + (ص - ٥)^2 = ٤٩ د) (س - ٣)^2 + (ص + ٥)^2 = ٤٩

(٦) محيط الدائرة التى معادلتها س^2 + ص^2 = ٨

أ) ٨ π ب) ٦٤ π ج) ٢$\sqrt{٢}$ π د) ٤$\sqrt{٢}$ π

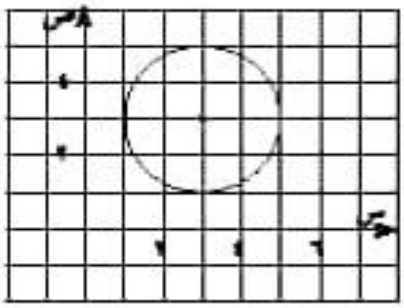
(٧) اكتب معادلة الدائرة التى مركزها م وطول نصف قطرها س إذا كان:

أ) م (٢،٣) ، س = ٥ ب) م(٠ ، ٠) ، س = ٤

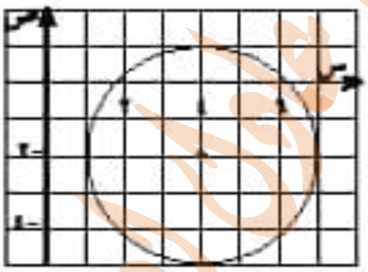
ج) م (٣،٠) ، س = ٦ د) م(٤ ، -٥) ، س = $\sqrt{٧}$

(٨) اكتب معادلة الدائرة التى يمثلها الرسم المعطى

أ)



ب)



(٩) أوجد معادلة الدائرة إذا كان:

أ) مركزها النقطة م (٧ ، -٥)، وتمر بالنقطة أ(٣ ، ٢).

ب) $\overline{\text{أب}}$ قطر فى الدائرة حيث أ(٦ ، -٤) ، ب(٠ ، ٢).

(١٠) أوجد إحداثيى المركز، وطول نصف القطر لكل من الدوائر الآتية:

أ) س^2 + ص^2 = ٣٧ ب) (س + ٣)^2 + (ص - ٥)^2 = ٤٩

(١١) اكتب الصورة العامة لمعادلة الدائرة فى الحالات الآتية:

أ) مركزها م(٢ ، ١)، وطول قطرها يساوى ٨.
ب) مركزها م (٠ ، ٠)، وتمر بالنقطة أ (-١ ، ٣)
جـ) مركزها م (-٥ ، ٠)، وتمر بالنقطة ب (٣ ، ٤)
د) $\overline{أب}$ قطر فيها حيث أ(٣ ، -٧) ، ب(٥ ، ١)

(١٢) أوجد إحداثى المركز، وطول نصف القطر لكل من الدوائر الآتية

أ) $س^{٢}+ص^{٢}-٤س+٦ص-١٢=٠$
ب) $س^{٢}+ص^{٢}+٢س=٨$
جـ) $س^{٢}+ص^{٢}-٦س+١٠ص=٠$
د) $س^{٢}+ص^{٢}-٨ص=١٢$

(١٣) بين أى دائرتين مما يلى متطابقتان

أ) $س^{٢}+ص^{٢}-٢س+٤ص-٣=٠$ ، $س^{٢}+ص^{٢}+٦س-١١=٠$
ب) $س^{٢}+ص^{٢}-١٤س+٣٧=٠$ ، $س^{٢}+ص^{٢}+١٠س+١٣=٠$

(١٤) بين أى المعادلات الآتية تمثل دائرة، ثم أوجد مركزها وطول نصف قطرها:

أ) $س^{٢}+ص^{٢}+٨س-١٦ص-١=٠$
ب) $س^{٢}+٢ص^{٢}+٦س-٥ص=٠$
جـ) $\frac{١}{٤}س^{٢}+\frac{١}{٤}ص^{٢}+س-٨=٠$
د) $س^{٢}+ص^{٢}+٢س ص-١٢=٠$
هـ) $س^{٢}+ص^{٢}-٢س+٤ص+٧=٠$
و) $٢س^{٢}+٢ص^{٢}+٣ص-٨=٠$

(١٥) **الملاحة البحرية** يقع رادار عند الموقع أ(٧ ، -٩) ويغطى منطقة دائرية طول نصف قطرها يساوى ٣٠ وحدة طول. اكتب معادلة الدائرة التى تحدد مجال عمل الرادار فى المستوى الإحداثى. هل يمكن للرادار رصد سفينة فى الموقع ب (٢٥ ، -٣٠)؟ فسر إجابتك.

(١٦) **التصميم المعمارى** صمم مهندس معمارى مبنى قاعدته على شكل ثمانى منتظم، تمر رؤوسه بالدائرة $س^{٢}+ص^{٢}-٤س+١٢ص-٦٠=٠$ احسب مساحة قاعدة المبنى لأقرب وحدة مربعة

(١٧) **الصناعة** يبين الشكل المقابل ترسين فى آلة مركزيهما يقعا على مستقيم يوازى محور الصادات وأقصى بعد بين حافتيهما ١٠ وحدات. أوجد معادلة الترس الأصغر علمًا بأن معادلة الترس الأكبر هى: $س^{٢}+ص^{٢}-١٠س-٨ص+٣٢=٠$