مذكرة

المهندس

في تطبيقات الرياضيات

الصف الثاني الثانوي

إعداد

م / لطفى زهران

01115956226 - 01028089912

تطلب من :-

مكتبة الحوفى - أمام مركز الشرطة

01006537420 - 01008570114

محصلة قوتين متلاقيتين في نقطة

القوة: هو تأثير أحد الاجسام الطبيعية على جسم طبيعي آخر ويكون التأثير بالدفع أو الجذب أو الضغط أو التنافر

أنواع القوى:

① قوى الشد (ش) : مثل القوة التي تظهر في الحبل عند تعليق جسم فيه

② قوى الضغط (ض) : مثل القوة عند ارتكاز جسم على سطح

③ قوة رد الفعل (ر) : كما في حالة رد فعل سطح أملس على جسم مرتكز عليه

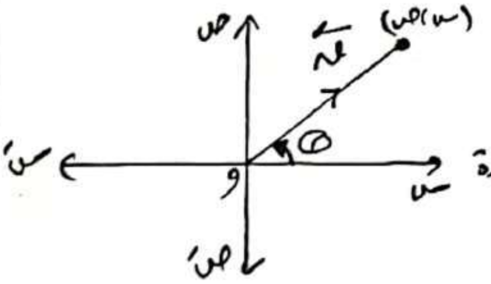
④ قوى الجذب والتنافر : مثل القوى التي تنشأ بين الاقطاب المغناطيسية

التعبير عن القوة:

$\overrightarrow{ق} = (س ، ص)$ ⟸ الصورة الاحداثية

$\overrightarrow{ق} = س\,\hat{س} + ص\,\hat{ص}$ ⟸ بدلالة متجه الوحدة

$\overrightarrow{ق} = (\|\overrightarrow{ق}\| ، \theta)$ ⟸ الصورة القطبية



تعيين القوة: تتعين القوة بمعرفة

① مقدار القوة ② اتجاه القوة ③ نقطة تأثير القوة

وحدات قياس مقدار القوة

① وحدات تثاقلية :- ثقل الجرام (ث. جرام) ، ثقل الكيلوجرام (ث.كجم)

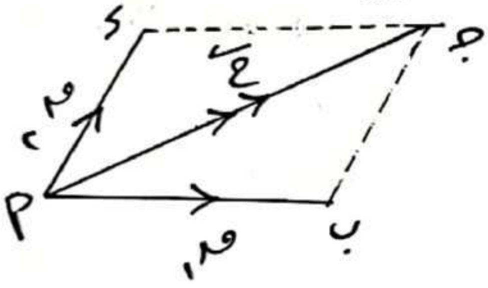
حيث ١ ث كجم = ١٠٠٠ ث. جم = $١٠^٣$ ث. جم

② وحدات مطلقة :- مثل الداين ، النيوتن

النيوتن = ١٠٠٠٠٠ داين = $١٠^٥$ داين

ايجاد محصلة قوتين متلاقيتين في نقطة هندسيا

قاعدة متوازي الأضلاع لجمع قوتين (أولى ثانوي)

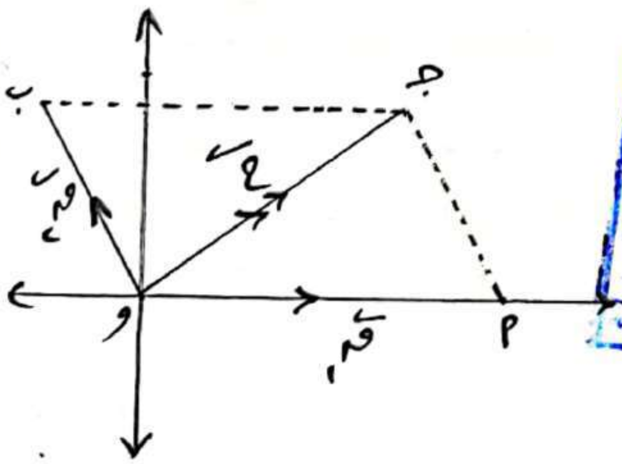


$$\vec{ح} = \vec{ق_١} + \vec{ق_٢}$$

مثال :- ق١ ، ق٢ قوتان متلاقيتان في نقطة (و) من جسم مقدار ق١ = ٥٠٠ نيوتن وتعمل في اتجاه الشرق ، ق٢ = ٣٠٠ نيوتن وتعمل في اتجاه ٦٠° شمال الغرب

أوجد المحصلة بيانيا

الحل



١ سم لكل ١٠٠ نيوتن

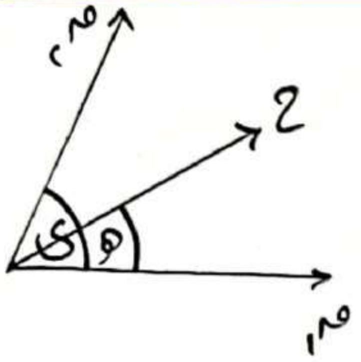
$\overrightarrow{و أ}$ يمثل ق١ حيث $\|\overrightarrow{و أ}\|$ = ٥ سم

$\overrightarrow{و ب}$ يمثل ق٢ حيث $\|\overrightarrow{و ب}\|$ = ٣ سم

نكمل متوازي الأضلاع

$\|\overrightarrow{و جـ}\|$ = ٤,٤ سم ∴ $\vec{ح}$ = ٤,٤ × ١٠٠ = ٤٤٠ نيوتن

إيجاد محصلة قوتين متلاقيتين في نقطة تحليليا



$$\boxed{ح = \sqrt{ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢ جتا ى}}$$

$$\boxed{طا هـ = \frac{ق_٢ جا ى}{ق_١ + ق_٢ جتا ى}}$$

حالات خاصة :-

① اذا كانت القوتان متعامدتين (ى = ٩٠°)

∴ جتا ى = صفر ، جا ى = ١

∴ $\boxed{ح = \sqrt{ق_١^٢ + ق_٢^٢}}$ ، $\boxed{طا هـ = \frac{ق_٢}{ق_١}}$

② اذا كانت القوتان متساويتان في المقدار ($ق_١ = ق_٢ = ق$)

∴ $\boxed{ح = ٢ ق جتا \frac{ى}{٢}}$ $\boxed{هـ = \frac{ى}{٢}}$

لاحظ :- المحصلة تنصف الزاوية بين القوتين

في هذه الحالة :- اذا كانت ى = ١٢٠° فإن ح = ق ← مهمة

③ اذا كانت المحصلة عمودية على القوة الأولى (هـ = ٩٠°)

$\boxed{ح^٢ = ق_٢^٢ - ق_١^٢}$ $\boxed{ق_١ + ق_٢ جتا ى = صفر}$

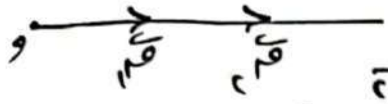
حيث طا هـ = طا ٩٠ = $\frac{١}{٠}$ ∴ ظتا هـ = صفر

∴ $طا هـ = \frac{ق_٢ جا ى}{ق_١ + ق_٢ جتا ى}$ ∴ $ظتا هـ = \frac{ق_١ + ق_٢ جتا ى}{ق_٢ جا ى} = صفر$ (معكوس)

∴ $ق_١ + ق_٢ جتا ى = صفر$

٤ إذا كانت القوتان لهما نفس خط العمل وفي نفس الاتجاه (ى = صفر)

∵ ى = صفر ∴ جتاى = ١



$\therefore \text{ح} = \sqrt{\text{ق}_1^2 + \text{ق}_2^2 + 2\,\text{ق}_1\,\text{ق}_2 \times 1} = \sqrt{(\text{ق}_1 + \text{ق}_2)^2} = \text{ق}_1 + \text{ق}_2$

$$\boxed{\therefore \text{ح} = \text{ق}_1 + \text{ق}_2}$$

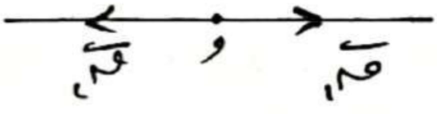
اتجاه المحصلة في نفس اتجاه خط عمل القوتين

ملحوظة: ح في هذه الحالة أكبر محصلة أو القيمة العظمى للمحصلة

---

٥ إذا كانت القوتان لهما نفس خط العمل وفي اتجاهين متضادين (ى = ١٨٠°)

∵ ى = ١٨٠ ∴ جتاى = -١



$\therefore \text{ح} = \sqrt{(\text{ق}_1 - \text{ق}_2)^2} = |\text{ق}_1 - \text{ق}_2|$

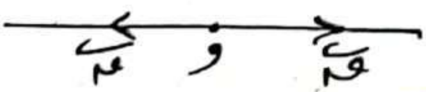
$$\boxed{\therefore \text{ح} = |\text{ق}_1 - \text{ق}_2|}$$

اتجاه المحصلة في اتجاه القوة الأكبر مقداراً

ملحوظة: ح في هذه الحالة أصغر محصلة أو القيمة الصغرى للمحصلة

---

٦ إذا كانت القوتان متساويتين في المقدار ولهما نفس خط العمل وفي اتجاهين متضادين



$$\boxed{\therefore \text{ح} = \text{صفر}}$$

المحصلة هي المحصلة الصغرى

أمثلة :

(١) قوتان مقدارهما ٥ ، ٣ نيوتن تؤثران في نقطة مادية والزاوية بين اتجاهيهما ٦٠° أوجد مقدار واتجاه محصلتهما تحليلياً

الحل

$ح = \sqrt{ق_1^2 + ق_2^2 + 2 ق_1 ق_2 \text{ جتا } ى}$

$ح = \sqrt{25 + 9 + 2 \times 5 \times 3 \text{ جتا } 60} = 7$ نيوتن

$\because \text{ظا } هـ = \dfrac{ق_2 \text{ جا } ى}{ق_1 + ق_2 \text{ جتا } ى} = \dfrac{3 \text{ جا } 60}{5 + 3 \text{ جتا } 60} = \dfrac{3\sqrt{3}}{13}$

$\therefore هـ \simeq 21^\circ \; 47'$

∴ المحصلة مقدارها ٧ نيوتن وتميل على القوة الأولى بزاوية قياسها ٢١° ٤٧′

(٢) قوتان مقدارهما ٣٠ ، ١٦ نيوتن تؤثران في نقطة مادية ، إذا كان مقدار محصلتهما ٢٦ نيوتن أوجد قياس الزاوية بين القوتين

الحل

$ح = \sqrt{ق_1^2 + ق_2^2 + 2 ق_1 ق_2 \text{ جتا } ى}$

$26 = \sqrt{(30)^2 + (16)^2 + 2 \times 30 \times 16 \text{ جتا } ى}$

بتربيع الطرفين

$900 + 256 + 960 \text{ جتا } ى = 676$

$1156 + 960 \text{ جتا } ى = 676$

$960 \text{ جتا } ى = -480 \quad (\div 960)$

$\therefore \text{جتا } ى = -\dfrac{1}{2}$

$\therefore ى = 120^\circ$

(٣) قوتان متعامدتان مقدارهما ٦ ، ٢,٥ نيوتن تؤثران في نقطة مادية أوجد مقدار واتجاه محصلتهما

الحل

$ح = \sqrt{ق_1^2 + ق_2^2} = \sqrt{(6)^2 + (2.5)^2}$

$\therefore ح = 6.5$ نيوتن

$\text{ظا } هـ = \dfrac{ق_2}{ق_1} = \dfrac{2.5}{6} = \dfrac{5}{12}$

$\therefore هـ = 22^\circ \; 37'$

(٤) قوتان مقدارهما ٥٠ ، ١٠٠ نيوتن تؤثران في نقطة مادية ومحصلتهما عمودية على القوة الأولى أوجد قياس الزاوية بينهما ومقدار المحصلة

الحل

$ق_1 + ق_2 \text{ جتا } ى = \text{صفر}$

$50 + 100 \text{ جتا } ى = \text{صفر}$

$\therefore \text{جتا } ى = \dfrac{-50}{100} = \dfrac{-1}{2} \quad \therefore ى = 120^\circ$

$\therefore ح = \sqrt{(50)^2 + (100)^2 + 2 \times 50 \times 100 \text{ جتا } 120}$

$\therefore ح = 50\sqrt{3}$ نيوتن

⑤ قوتان متساويتان في المقدار محصلتهما $٧٠\sqrt{٣}$ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ٦٠° أوجد مقدار كلاً منهما

الحل

∵ القوتين متساويتان

∴ $ح = ٢ ق \text{ جتا } \frac{ى}{٢}$

$٧٠\sqrt{٣} = ٢ ق \text{ جتا } ٣٠$

$٧٠\sqrt{٣} = \sqrt{٣} ق$ $(\div \sqrt{٣})$

∴ ق = ٧٠ نيوتن

⑥ قوتان تؤثران في نقطة مادية أكبر قيمة لمحصلتهما ٣٢ ث.كجم والصغرى لمحصلتهما ١٢ ث.كجم أوجد مقدار كلاً من القوتين ثم أوجد مقدار محصلتهما اذا كان قياس الزاوية بين القوتين = ٦٠°

الحل

الكبرى = جمع القوتين

الصغرى = طرح القوتين

∴ $ق_١ + ق_٢ = ٣٢$ $(ق_١ \leftarrow \text{الكبرى})$

$ق_١ - ق_٢ = ١٢$ $(ق_٢ \leftarrow \text{الصغرى})$

بالجمع

$٢ق_١ = ٤٤$ ∴ $ق_١ = ٢٢$ ث.كجم

$ق_٢ = ٣٢ - ٢٢ = ١٠$ ث.كجم

∴ $ح = \sqrt{(٢٢)^٢ + (١٠)^٢ + ٢ \times ٢٢ \times ١٠ \text{ جتا } ٦٠} = ٢\sqrt{٢٠١}$ ث.كجم

⑦ قوتان مقدارهما ق ، ٦ ث.كجم تؤثران في نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٣٥° أوجد مقدار المحصلة اذا كان خط عمل المحصلة يميل بزاوية قياسها ٤٥° على القوة ق

الحل

$\text{طا}هـ = \frac{ق_٢ \text{ جا } ى}{ق_١ + ق_٢ \text{ جتا } ى}$ لاحظ عكست القانون

$\text{طا}٤٥ = \frac{٦ \text{ جا } ١٣٥}{ق + ٦ \text{ جتا } ١٣٥}$

∴ $١ = \frac{٣\sqrt{٢}}{ق - ٣\sqrt{٢}}$ (مقص)

$ق - ٣\sqrt{٢} = ٣\sqrt{٢}$ ∴ $ق = ٦\sqrt{٢}$ ث.كجم

∴ $ح = \sqrt{(٦)^٢ + (٦\sqrt{٢})^٢ + ٢ \times ٦ \times ٦\sqrt{٢} \text{ جتا } ١٣٥}$

∴ ح = ٦ ث.كجم

⑧ قوتان مقدارهما ٤ق ، ٣ق أوجد قياس الزاوية بينهما اذا كانت محصلتهما $\sqrt{١٣}$ ق

الحل

$\sqrt{١٣} ق = \sqrt{(٤ق)^٢ + (٣ق)^٢ + ٢ \times ٤ق \times ٣ق \text{ جتا } ى}$ بتربيع الطرفين

$١٣ق^٢ = ١٦ق^٢ + ٩ق^٢ + ٢٤ق^٢ \text{ جتا } ى$

∴ $٢٤ق^٢ \text{ جتا } ى = ١٣ق^٢ - ١٦ق^٢ - ٩ق^٢$

$٢٤ق^٢ \text{ جتا } ى = -١٢ق^٢$ $(\div ٢٤ق^٢)$

∴ $\text{جتا } ى = \frac{-١٢ق^٢}{٢٤ق^٢} = \frac{-١}{٢}$ ∴ ى = ١٢٠°

الواجب:

(١) قوتان مقدارهما ٨ ، ٨√٣ نيوتن تؤثران في نقطة مادية وتحصران بينهما زاوية قياسها ١٥٠° أوجد مقدار محصلتهما واتجاهها

(٢) أوجد مقدار واتجاه محصلة قوتين متعامدتين مقدارهما ١٠ ، ٨ ث كجم وتؤثران في نقطة مادية

(٣) قوتان متساويتان في المقدار ، مقدار محصلتهما ٤√٣ ث.كجم وقياس الزاوية بين اتجاه احدى القوتين واتجاه المحصلة ٣٠° فما مقدار كلاً من هاتين القوتين

(٤) قوتان تؤثران في نقطة مادية أكبر قيمة لمحصلتهما = ١٧ ث.كجم وأصغر قيمة لمحصلتهما = ٧ ث.كجم أوجد مقدار كلاً من القوتين

(٥) قوتان متعامدتان تؤثران في نقطة مادية مقدار محصلتهما ٥٠ نيوتن فإذا كانت محصلتهما تميل على القوة الأولى بزاوية قياسها ٣٠° أوجد مقدار كلاً من القوتين

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

(٦) قوتان مقدارهما ٨ ، ١٦ ثقل جرام تؤثران في نقطة مادية أوجد قياس الزاوية بينهما إذا كانت محصلتهما عمودية على القوة الأولى

(٧) قوتان مقدارهما ٩ ، ٦ ث.كجم تؤثران في نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ى أوجد ق(ى) إذا كانت محصلتهما ٣√٧ ث كجم وأوجد قياس الزاوية التي تصنعها المحصلة مع القوة الكبرى

(٨) أثرت قوتان في نقطة مادية فإذا كان مقدار الأولى ١٥ نيوتن في اتجاه الشرق ومقدار الثانية ١٨ نيوتن في اتجاه ٣٠° غرب الشمال احسب مقدار واتجاه المحصلة

(٩) قوتان مقدارهما ١٢ ، ق نيوتن تؤثران في نقطة ، تعمل الأولى في اتجاه الشرق وتعمل الثانية في اتجاه ٦٠° جنوب الغرب أوجد مقدار ق ومقدار المحصلة إذا علم أن خط عمل المحصلة يؤثر في اتجاه ٣٠° جنوب الشرق

(١٠) قوتان مقدارهما ١٢ ، ١٥ نيوتن وجيب تمام الزاوية بينهما −٤/٥ أوجد مقدار محصلتهما وقياس زاوية ميلها مع القوة الأولى

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① قوتان تؤثران فى نقطة مادية مقداراهما ٥ ، ٨ نيوتن فإن أصغر قيمة للمحصلة = ... نيوتن.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٧ (د) ١٣

② قوتان مقداراهما ٢ ق ، ٥ ق نيوتن وقياس الزاوية بينهما ى ومقدار محصلتهما ٣ ق فإن : ى = ...

(أ) صفر° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٨٠°

③ إذا بلغت محصلة قوتين تؤثران فى نقطة قيمتها العظمى فإن قياس الزاوية بينهما = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{\pi}{3}$ (جـ) $\frac{\pi}{2}$ (د) π

④ قوتان مقداراهما ٦ نيوتن ، ٨ نيوتن ومقدار محصلتهما ١٠ نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما يساوى ....

(أ) ٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٨٠°

⑤ قوتان مقداراهما ٣ ق ، ق نيوتن محصلتهما ٤ ق نيوتن يكون قياس الزاوية بينهما ....

(أ) ٦٠° (ب) صفر° (جـ) ١٨٠° (د) ٩٠°

⑥ قوتان مقداراهما ٣ $\sqrt{2}$ ، ٦ نيوتن وقياس الزاوية بينهما = ١٣٥° فإن قياس الزاوية بين محصلتهما والقوة الثانية = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

⑦ قوتان متساويتان متلاقيتان فى نقطة مقدار كل منهما ٦ نيوتن ومقدار محصلتهما ٦ نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

⑧ قوتان متساويتان فى المقدار وقياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{2}$ ومقدار محصلتهما ٨ نيوتن فإن مقدار كل قوة منهما يساوى .... نيوتن.

(أ) ٢ $\sqrt{2}$ (ب) ٤ (جـ) ٤ $\sqrt{2}$ (د) ٨

⑨ قوتان متساويتان فى المقدار محصلتهما = ٧ $\sqrt{3}$ نيوتن وقياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{3}$ فإن مقدار كل منهما يساوى .... نيوتن.

(أ) ٣ (ب) ٥ $\sqrt{3}$ (جـ) ٥ (د) ٧

⑩ قوتان مقداراهما ٨ ، ق ث.جم وقياس الزاوية بينهما ∈]٠ ، π[، محصلتهما تنصف الزاوية بينهما فإن : ق = ... ث.جم.

(أ) ٤ (ب) ١٦ (جـ) ٢ $\sqrt{2}$ (د) ٨

⑪ قوتان مقداراهما ٢ نيوتن ، ق نيوتن وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° ، إذا كانت محصلتهما عمودية على القوة الأولى فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ١,٥ (ب) ٢ (جـ) ٢ $\sqrt{3}$ (د) ٦

⑫ قوتان مقداراهما ٤ ، ٦ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ٩٠° فإن ظل زاوية ميل محصلتهما على القوة الأولى يساوى ....

(أ) $\frac{2}{3}$ (ب) $\frac{3}{2}$ (جـ) ٢ $\sqrt{13}$ (د) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

⑬ قوتان مقداراهما ق ، ق $\sqrt{3}$ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية ، فإذا كان مقدار محصلتهما ٢ ق نيوتن فإن قياس الزاوية بين اتجاهى هاتين القوتين يساوى ....

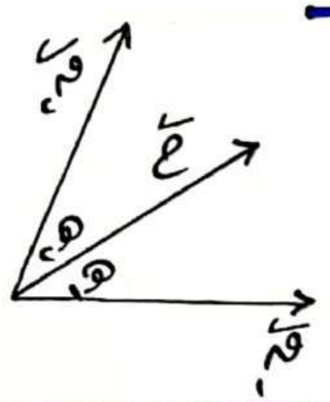
(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٢٠°

⑭ قوتان مقداراهما ق ، ٢ نيوتن وقياس الزاوية بينهما = $\frac{2\pi}{3}$ ومقدار محصلتهما ق نيوتن فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٢ $\sqrt{2}$

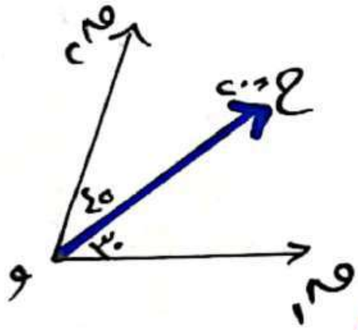
تحليل القوة الى مركبتين

$$\frac{\text{ق}_1}{\text{جا هـ}_2} = \frac{\text{ق}_2}{\text{جا هـ}_1} = \frac{\text{ح}}{\text{جا}(\text{هـ}_1 + \text{هـ}_2)}$$



مثال ١: حلل قوة مقدارها ٢٠ نيوتن إلى مركبتين تميلان مع اتجاه القوة بزاويتين قياساهما ٣٠° ، ٤٥° في اتجاهين مختلفين منها ثم قرب الناتج لأقرب رقم عشري واحد.

الحل



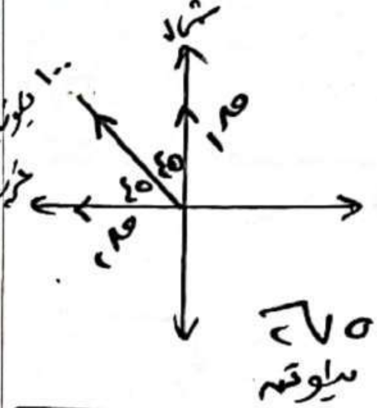
$$\frac{\text{ق}_1}{\text{جا } 45} = \frac{\text{ق}_2}{\text{جا } 30} = \frac{20}{\text{جا } 75}$$

$$\therefore \text{ق}_1 = \frac{20 \times \text{جا } 45}{\text{جا } 75} = 14{,}6 \text{ نيوتن}$$

$$\text{ق}_2 = \frac{20 \times \text{جا } 30}{\text{جا } 75} = 10{,}4 \text{ نيوتن}$$

٢) قوة مقدارها ١٠٠ نيوتن تعمل في اتجاه الشمال الغربي
احسب مركبتيها في اتجاهي الشمال ، الغرب

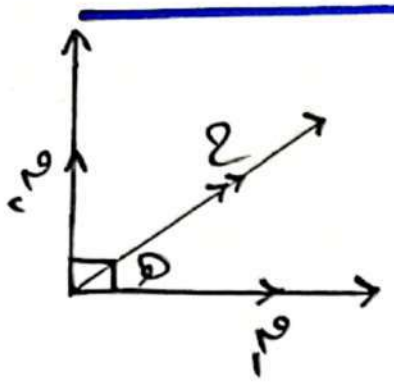
الحل



$$\frac{\text{ق}_1}{\text{جا } 45} = \frac{\text{ق}_2}{\text{جا } 45} = \frac{100}{\text{جا } 90}$$

$$\text{ق}_1 = \frac{100 \times \text{جا } 45}{1} = 50\sqrt{2} \text{ نيوتن} \quad ، \quad \text{ق}_2 = \frac{100 \times \text{جا } 45}{1} = 50\sqrt{2} \text{ نيوتن}$$

تحليل قوة معلومة فى اتجاهين متعامدين



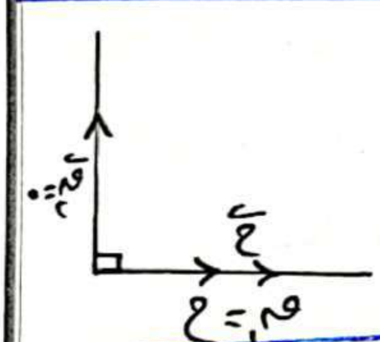
ق١ = ح جتا هـ
ق٢ = ح جا هـ

المركبه اللى جنب الزاوية ← اضرب × جتا

المركبه اللى بعيد عن الزاوية ← اضرب × جا

مطرح ما تنام إضرب فى جيب التمام (هههه)

ملاحظات :-



① المركبه ق١ انطبقت ع المحصله ح

∴ ق١ = ح ، ق٢ = صفر

ليه :- لكاك نشتغل ع الزاويه بين ق١ ، ح

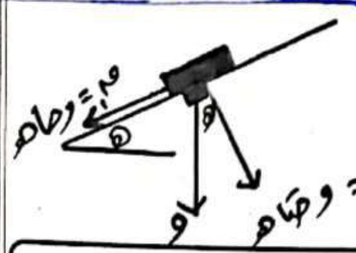
الزاويه دى تساوى (صفر)

∴ ق١ = ح جتا ٠ = ح × ١ = ح ، ق٢ = ح جا ٠ = ح × صفر = صفر

② لو اعطاك صورة قطبية ق = (ق ، هـ°)

∴ س = ق جتا هـ ، ص = ق جا هـ

∴ ق = ق جتا هـ س + ق جا هـ ص



③ جسم وزنه (و) ع مستوى مائل ع الافقى بزاويه (هـ)

فإنه تقدر تحليل الوزن (و) الى مركبتين

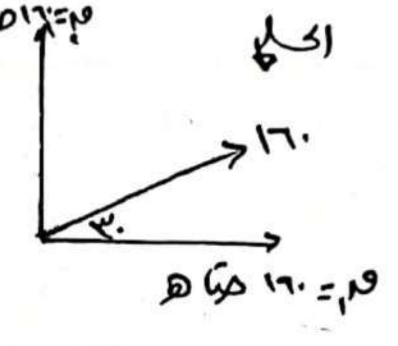
ق١ = و جا هـ

ق٢ = و جتا هـ

أمثلة :

① حلل قوة أفقية مقدارها ١٦٠ ث.جم في اتجاهين متعامدين احدهما يميل على الافقي بزاوية قياسها ٣٠° الى اعلى

الحل

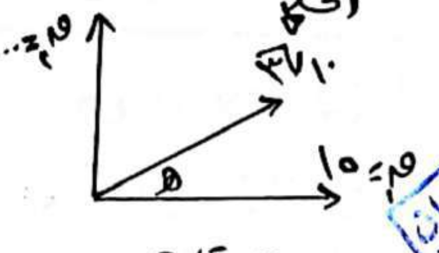


ق١ = ١٦٠ جتا٣٠ = ٨٠√٣ ث.جم

ق٢ = ١٦٠ جا٣٠ = ٨٠ ث.جم

② حللت قوة مقدارها ١٠√٣ ثقل جم الى مركبتين متعامدتين مقدار احدهما ١٥ ثقل كجم أوجد مقدار المركبة الاخرى

الحل



ق١ = ح جتاهـ

∴ ١٠√٣ جتاهـ = ١٥ (÷ ١٠√٣)

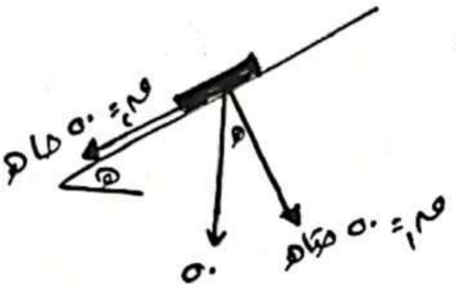
جتاهـ = ١٥ / ١٠√٣ = √٣ / ٢ ∴ هـ = ٣٠°

∴ مقدار المركبة الاخرى = ح جاهـ

= ١٠√٣ جا٣٠ = ٥√٣ ثقل كجم

③ وضع جسم وزنه ٥٠ نيوتن على مستوى مائل على الافقي بزاوية قياسها ٣٠° أوجد مقدار مركبتي وزن الجسم في اتجاه أكبر ميل للمستوى والاتجاه العمودي عليه

الحل



هـ = ٣٠°

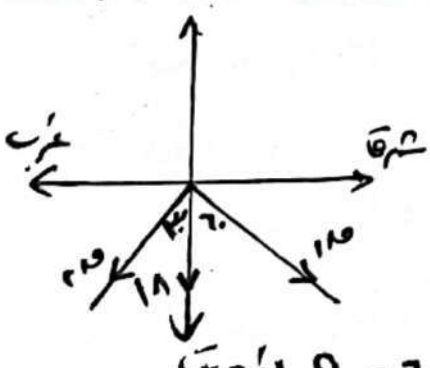
ق١ = ٥٠ جتا٣٠ = ٢٥√٣ نيوتن

ق٢ = ٥٠ جا٣٠ = ٢٥ نيوتن

ق٢ ← اكبر ميل للمستوى

ق١ ← الاتجاه العمودي عليه

④ قوة مقدارها ١٨ نيوتن تعمل في اتجاه الجنوب اوجد مركبتيها في اتجاهي ٦٠° شرق الجنوب ، ٣٠° غرب الجنوب



ق١ = ١٨ جتا٦٠ = ٩ نيوتن

ق٢ = ١٨ جا٦٠ = ٩√٣ نيوتن

الواجب :.

١) قوة مقدارها ٦٠٠ ث.جم تؤثر في نقطة مادية أوجد مركبتيها في اتجاهين تصنعان معها زاويتين قياسهما ٣٠° ، ٤٥°

٢) قوة مقدارها ١٠٠ ثقل جم تعمل في اتجاه الشمال الغربي احسب مركبتها في اتجاهي الشمال والغرب

٣) حللت قوة مقدارها ١٢ ث.كجم تؤثر في اتجاه الشمال الشرقي إلى مركبتين احداهما نحو الشرق والاخرى نحو الشمال الغربي أوجد هاتين المركبتين

٤) قوة مقدارها ٣٠٠ داين تؤثر في اتجاه الشمال أوجد مقدار مركبتيها المتعامدتين اذا كانت إحدى هاتين المركبتين تعمل في اتجاه شمال الشرق بزاوية قياسها ٣٠°

٥) حلل قوة مقدارها ٩٠ نيوتن الى قوتين متساويتين في المقدار ، وقياس الزاوية بينهما ٦٠°

٦) أوجد مقدار المركبتين المتعامدتين ، لوزن جسم موضوع على مستوى افقي ومقداره ٨٠ نيوتن اذا علم ان احداهما تميل على الافقي بزاوية قياسها ٣٠° إلى اسفل

٧) جسم ما سطح وزنه ٤٢ نيوتن موضوع على مستوى يميل على الافقي بزاوية قياسها ٦٠° أوجد مركبتي وزن هذا الجسم في اتجاه خط اكبر ميل للمستوى والاتجاه العمودي عليه

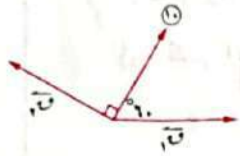
٨) جسم وزنه ٦٠ نيوتن موضوع على مستوى مائل يميل على الافقي بزاوية قياسها هـ حيث ظا هـ = $\frac{٣}{٤}$ أوجد مقدار مركبتي الوزن في اتجاه خط اكبر ميل للمستوى والاتجاه العمودي عليه

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا وضع جسم وزنه (و) على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها (θ) فإن مركبة وزنه فى اتجاه المستوى = ...

(أ) و (ب) و جا θ (جـ) و جتا θ (د) و ظا θ

(٢) فى الشكل المقابل :



بتحليل القوة التى مقدارها ١٠ نيوتن إلى مركبتين $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ اللتين تصنعان معها زاويتين قياساهما ٦٠° ، ٩٠° من جهتيها

فإن : $ق_٢$ = ... نيوتن.

(أ) $٥\sqrt{٣}$ (ب) ١٠ (جـ) $١٠\sqrt{٣}$ (د) ٢٠

(٣) قوة مقدارها $١٠\sqrt{٢}$ ثقل جرام تعمل فى اتجاه الجنوب الشرقى تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مقدار مركبة القوة فى اتجاه الجنوب = ... ثقل جرام.

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) $١٠\sqrt{٢}$ (د) $٥\sqrt{٢}$

(٤) قوة مقدارها ٦ نيوتن تعمل فى اتجاه الشمال تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مركبتها فى اتجاه الشرق تساوى .... نيوتن.

(أ) صفر (ب) ٣ (جـ) $٣\sqrt{٢}$ (د) ٦

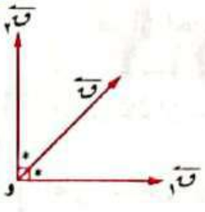
(٥) قوة مقدارها $٤\sqrt{٢}$ نيوتن تعمل فى اتجاه الشرق تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مركبتها فى اتجاه الشمال الشرقى تساوى .... نيوتن.

(أ) صفر (ب) $٤\sqrt{٢}$ (جـ) ٤ (د) ٦

(٦) قوة مقدارها $٥\sqrt{٣}$ نيوتن تعمل فى اتجاه ٣٠° شرق الشمال تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مقدار مركبتها فى اتجاه الشرق يساوى .... نيوتن.

(أ) $\frac{٥\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $\frac{١٥}{٢}$ (جـ) $\frac{١٥\sqrt{٣}}{٢}$ (د) $١٥\sqrt{٣}$

(٧) فى الشكل المقابل :



إذا حللت القوة $\overrightarrow{ق}$ إلى المركبتين المتعامدتين $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$

وكان متجه القوة $\overrightarrow{ق}$ ينصف الزاوية بين اتجاهى $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$

وكان $\|\overrightarrow{ق_١}\| = ٦\sqrt{٢}$ نيوتن فإن : $\|\overrightarrow{ق}\|$ = ... نيوتن.

(أ) ٦ (ب) $٦\sqrt{٢}$ (جـ) ١٢ (د) $١٢\sqrt{٢}$

(٨) أ ب حـ ء هـ و شكل سداسى منتظم أثرت قوة مقدارها ٢٠ نيوتن فى اتجاه $\overrightarrow{أء}$ فإن مركبتى القوة فى اتجاهى $\overrightarrow{أحـ}$ ، $\overrightarrow{أو}$ على الترتيب هما ....

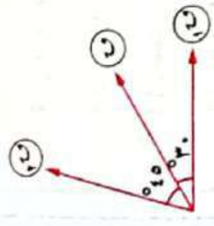
(أ) $١٠\sqrt{٣}$ ، ١٠ (ب) $٥\sqrt{٣}$ ، ١٠

(جـ) ١٠ ، $١٠\sqrt{٣}$ (د) $٢٠\sqrt{٣}$ ، ٢٠

(٩) جسم وزنه (و) نيوتن موضوع على مستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها (هـ) فإذا كانت مركبتا الوزن فى اتجاه خط أكبر ميل المستوى والاتجاه العمودى عليه مقداراهما ٧ ، ٢٤ نيوتن على الترتيب فإن مقدار الوزن (و) = ... نيوتن.

(أ) ٧ (ب) ٢٤ (جـ) ٢٥ (د) ٣١

(١٠) فى الشكل المقابل :



القوة $\overrightarrow{ق}$ هى محصلة القوتين $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$

فإن : $\frac{ق_١ + ق_٢}{ق}$ = ...

(أ) جا ٣٠° + جا ٤٥° (ب) $\frac{جا ٧٥° + جا ٣٠°}{جا ٧٥°}$

(جـ) $\frac{جا ٤٥° + جا ٣٠°}{جا ٧٥°}$ (د) $\frac{جا ٧٥°}{جا ٣٠°} + \frac{جا ٧٥°}{جا ٤٥°}$

(١١) قوة مقدارها ٤٠ نيوتن تؤثر رأسيًا لأعلى تم تحليلها إلى مركبتين إحداهما أفقية مقدارها ٢٠ نيوتن فإن مقدار القوة الأخرى = ... نيوتن.

(أ) ٢٠ (ب) $٢٠\sqrt{٣}$ (جـ) $٢٠\sqrt{٥}$ (د) $١٠\sqrt{٣}$

محصلة عدة قوى متلاقية فى نقطة

إذا أعطاك القوى بصورة موجهه ← أولى ثانوى

$$\text{ق}_1 = ٣\,\overleftarrow{\text{س}} + ٤\,\overleftarrow{\text{ص}}$$

$$\text{ق}_2 = ٥\,\overleftarrow{\text{س}} - ٣\,\overleftarrow{\text{ص}}$$

$$\text{ق}_3 = ٢\,\overleftarrow{\text{س}} + ٥\,\overleftarrow{\text{ص}}$$

فإن المحصلة $\text{ح} = (٣+٥+٢)\,\overleftarrow{\text{س}} + (٤-٣+٥)\,\overleftarrow{\text{ص}}$

$$\text{ح} = ١٠\,\overleftarrow{\text{س}} + ٦\,\overleftarrow{\text{ص}}$$

∴ الصورة العامة للمحصلة $\overleftarrow{\text{ح}} = \text{س}\,\overleftarrow{\text{س}} + \text{ص}\,\overleftarrow{\text{ص}}$

$$\text{ح} = \sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2} \quad ، \quad \text{ظا هـ} = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$$

ملاحظات هامة جداً

[١] لاحظ الفرق بين : س ، $\overleftarrow{\text{س}}$

* س = مجموع المركبات الجبرية للقوى فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$
* $\overleftarrow{\text{س}}$ = متجه الوحدة فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$

[٢] إذا كانت : $\boxed{\text{س} = \text{صفر}}$ فإن : $\boxed{\overleftarrow{\text{ح}} = \text{ص}\,\overleftarrow{\text{ص}}}$

وتكون هـ = ٩٠° إذا كانت : $\overleftarrow{\text{ح}}$ فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}}$

، هـ = ٢٧٠° إذا كانت : $\overleftarrow{\text{ح}}$ فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}'}$

[٣] إذا كانت : $\boxed{\text{ص} = \text{صفر}}$ فإن : $\boxed{\overleftarrow{\text{ح}} = \text{س}\,\overleftarrow{\text{س}}}$

وتكون هـ = صفر° إذا كانت : $\overleftarrow{\text{ح}}$ فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$

، هـ = ١٨٠° إذا كانت : $\overleftarrow{\text{ح}}$ فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}'}$

[٤] إذا كانت : $\boxed{\text{س} = \text{صفر}}$ ، $\boxed{\text{ص} = \text{صفر}}$ فإن : $\boxed{\overleftarrow{\text{ح}} = \overleftarrow{0}}$

وفى هذه الحالة تكون مجموعة القوى متزنة. مهم جداً

مثال: إذا كانت القوى $\overline{ق_1} = 5\,\overline{س} - 4\,\overline{ص}$ ، $\overline{ق_2} = -6\,\overline{س} + أ\,\overline{ص}$ ، $\overline{ق_3} = ب\,\overline{س} + 7\,\overline{ص}$ متلاقية في نقطة ومتزنة أوجد قيمة أ ، ب

الحل

∵ القوى متزنة ∴ $\overline{ح} = صفر$ ∴ س = صفر ، ص = صفر

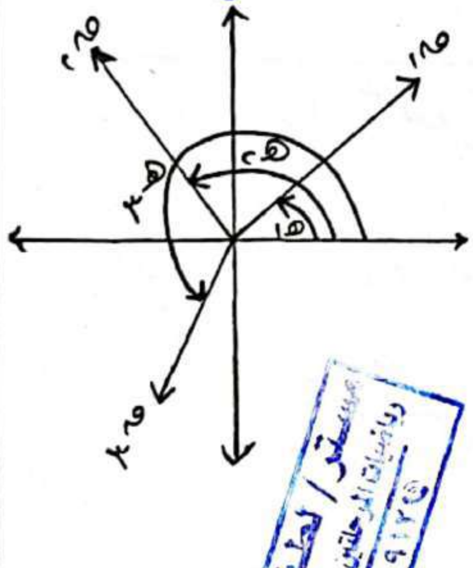
∴ $5 - 6 + ب = صفر$	$-4 + أ + 7 = صفر$
$-1 + ب = 0$	$3 + أ = 0$
$ب = 1$	$أ = -3$

مثال: إذا كان $\overline{ق_1} = 2\,\overline{س} - 2\,\overline{ص}$ ، $\overline{ق_2} = 4\,\overline{س} - 8\,\overline{ص}$ ومحصلتهما $\overline{ح} = 2أ\,\overline{س} - 3ب\,\overline{ص}$ فإن أ + ب = ...

الحل

$\overline{ح} = \overline{ق_1} + \overline{ق_2}$	∴ $\overline{ح} = 6\,\overline{س} - 10\,\overline{ص}$	
∴ $2أ = 6$	$-3ب = -10$	∴ $أ + ب = 3 + \frac{10}{3} = \frac{19}{3}$
$أ = 3$	$ب = \frac{10}{3}$	

تعالى بقا نشوف لو اعطاك صورة قياسية



ق	ق1	ق2	ق3
هـ	هـ1	هـ2	هـ3

$س = ق_1 \text{ جتا } هـ_1 + ق_2 \text{ جتا } هـ_2 + ق_3 \text{ جتا } هـ_3$

$ص = ق_1 \text{ جا } هـ_1 + ق_2 \text{ جا } هـ_2 + ق_3 \text{ جا } هـ_3$

∴ $\overline{ح} = س\,\overline{س} + ص\,\overline{ص}$

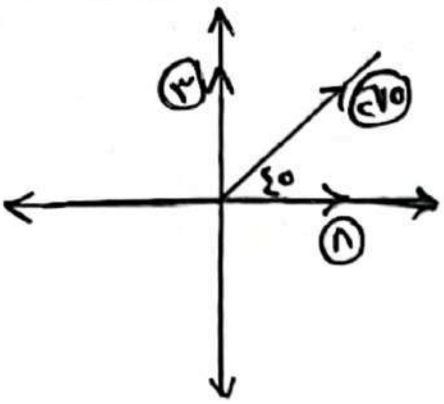
∴ $ح = \sqrt{س^2 + ص^2}$

$\text{ظا } هـ = \frac{ص}{س}$

بلاش الأمثلة

مثال ٣:- القوى مقدره بوحدة النيوتن

عين مقدار واتجاه المحصلة في الشكل المقابل



الحل

ق	٨	٥√٢	٣
ه	صفر°	٤٥	٩٠

س = ٨ جتا ٠ + ٥√٢ جتا ٤٥ + ٣ جتا ٩٠ = ١٣

ص = ٨ جا ٠ + ٥√٢ جا ٤٥ + ٣ جا ٩٠ = ٨

∴ ح = ١٣ س + ٨ ص

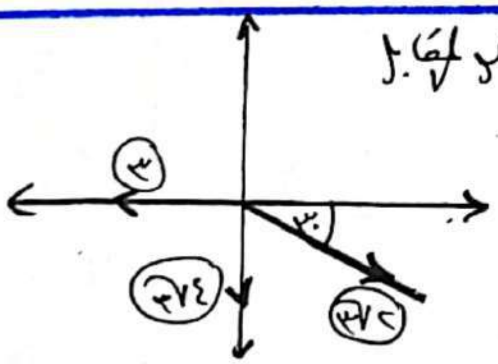
∴ ح = √((١٣)² + (٨)²) = √٢٣٣ ≃ ١٥,٢٦٤ نيوتن

∴ طا ه = ٨/١٣ (+ ، +) ∴ ح تقع في الربع الأول

∴ ق(ه) ≃ ٣١° ٣٦′

---

٤ أوجد مقدار واتجاه المحصلة في الشكل المقابل



الحل

ق	٣	٤√٣	٢√٣
ه	١٨٠	٢٧٠	٣٣٠

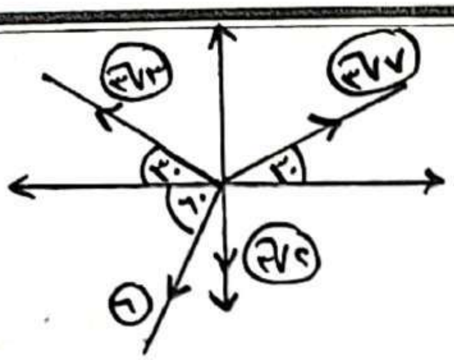
س = ٣ جتا ١٨٠ + ٤√٣ جتا ٢٧٠ + ٢√٣ جتا ٣٣٠ = صفر

ص = ٣ جا ١٨٠ + ٤√٣ جا ٢٧٠ + ٢√٣ جا ٣٣٠ = −٥√٣

∴ ح = −٥√٣ ص ∴ ح = √((−٥√٣)²) = ٥√٣ نيوتن

ه = ٢٧٠° ← لأن المحصلة في الاتجاه السالب لمحور الصادات .

⑤ عين مقدار واتجاه المحصلة من الشكل المقابل



الحل

ق	$7\sqrt{3}$	$3\sqrt{3}$	٦	$2\sqrt{3}$
هـ	٣٠	١٥٠	٢٤٠	٢٧٠

س = $7\sqrt{3}$ جتا ٣٠ + $3\sqrt{3}$ جتا ١٥٠ + ٦ جتا ٢٤٠ + $2\sqrt{3}$ جتا ٢٧٠ = ٣ نيوتن

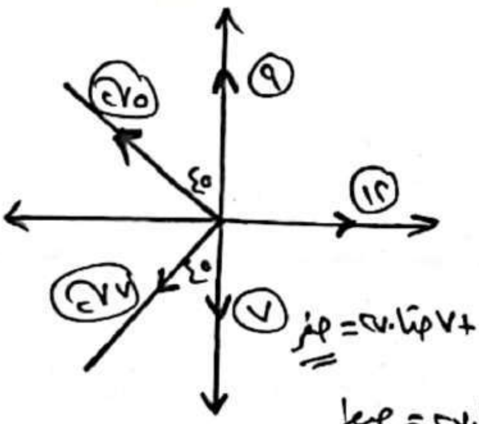
ص = $7\sqrt{3}$ جا ٣٠ + $3\sqrt{3}$ جا ١٥٠ + ٦ جا ٢٤٠ + $2\sqrt{3}$ جا ٢٧٠ = صفر

∴ ح⃗ = ٣ سَ ∴ ح = $\sqrt{3^2}$ = ٣ نيوتن .

هـ = صفر° لأن المحصلة في الاتجاه الموجب لمحور السينات

⑥ خمس قوى مستوية ومتلاقية في نقطة مقاديرها ١٢، ٩، $5\sqrt{2}$، $7\sqrt{2}$، ٧ ث. كجم. تعمل في اتجاهات: الشرق، الشمال، الشمال الغربي، الجنوب الغربي، الجنوب على الترتيب أوجد مقدار المحصلة.

الحل



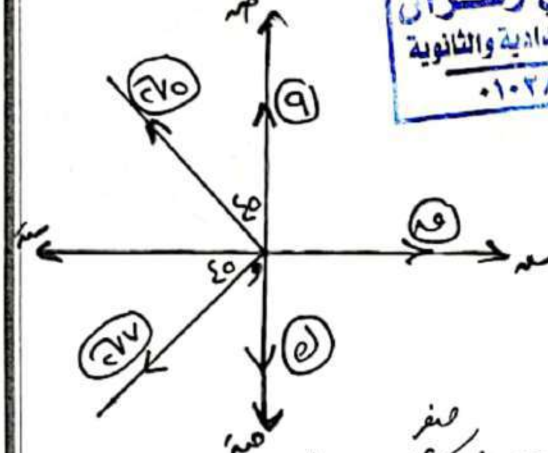
ق	١٢	٩	$5\sqrt{2}$	$7\sqrt{2}$	٧
هـ	٠	٩٠	١٣٥	٢٢٥	٢٧٠

س = ١٢ جتا ٠ + ٩ جتا ٩٠ + $5\sqrt{2}$ جتا ١٣٥ + $7\sqrt{2}$ جتا ٢٢٥ + ٧ جتا ٢٧٠ = صفر

ص = ١٢ جا ٠ + ٩ جا ٩٠ + $5\sqrt{2}$ جا ١٣٥ + $7\sqrt{2}$ جا ٢٢٥ + ٧ جا ٢٧٠ = صفر

∴ ح⃗ = صفر ∴ ح = صفر ∴ المجموعة متزنة

(٧) خمس قوى مستوية ومتلاقية في نقطة مقاديرها ق ، ٩ ، ٥√٢ ، ٧√٢ ، ك ث.كجم وكان قياس الزاوية بين القوة الاولى والثانية ٩٠° وبين القوة الثانية والثالثة ٤٥° وبين الثالثة والرابعة ٩٠° وبين الرابعة والخامسة ٤٥°
فإذا كانت مجموعة القوى متزنة أوجد قيمة كل من ق ، ك



وس ← اتجاه القوة الاولى

ق	ق	٩	٥√٢	٧√٢	ك
θ	٠	٩٠	١٣٥	٢٢٥	٢٧٠

∵ القوى متزنة ∴ س = صفر ، ص = صفر

∴ س = ق جتا ٠ + ٩ جتا ٩٠ + ٥√٢ جتا ١٣٥ + ٧√٢ جتا ٢٢٥ + ك جتا ٢٧٠ = صفر

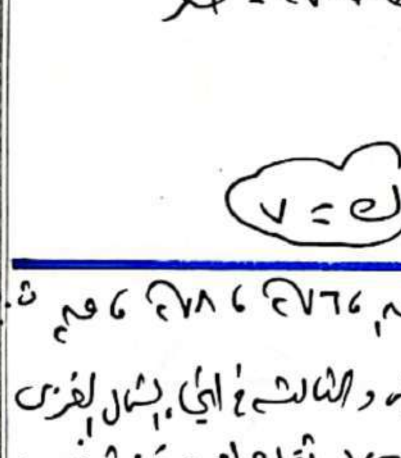
ق + (−٥) + (−٧) = صفر ∴ ق − ١٢ = ٠ ∴ ق = ١٢

∴ ص = ق جا ٠ + ٩ جا ٩٠ + ٥√٢ جا ١٣٥ + ٧√٢ جا ٢٢٥ + ك جا ٢٧٠ = صفر

٩ + ٥ + (−٧) − ك = صفر

∴ ١٤ − ٧ − ك = صفر ∴ ٧ − ك = صفر ∴ ك = ٧

(٨) أربع قوى مستوية ومتلاقية في نقطة مقاديرها ق١ ، ٦√٢ ، ٨√٢ ، ق٢ ث.جم
والقوة الاولى في اتجاه الشرق والثانية في اتجاه الشمال الشرقي والثالثة في اتجاه الشمال الغربي والرابعة تؤثر في اتجاه الجنوب. فإذا كانت محصلة القوى = ٧ ثقل جرام وتؤثر في اتجاه الشرق. اوجد قيمة ق١ ، ق٢



الحل

∵ المحصلة = ٧ وتؤثر في اتجاه الشرق

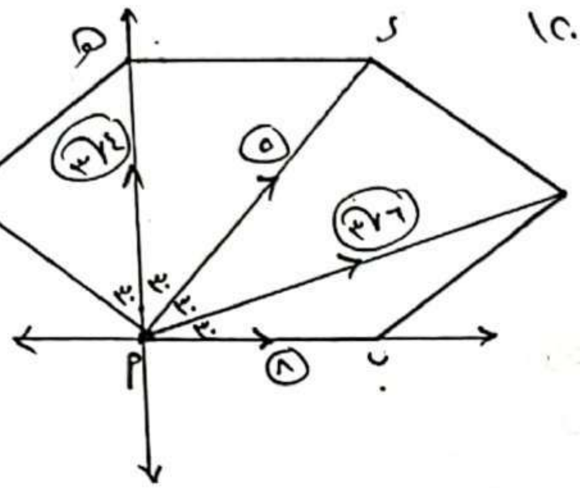
∴ س = ٧ ، ص = صفر

كمل حل يا حبيبي ذي اللي فوق

الناتج ⟸ ق١ = ٩ ثقل جرام ق٢ = ١٤ ثقل جرام

٩ ا ب ج د هـ و شكل سداسي منتظم أثرت قوى مقاديرها ٨ ، $٦\sqrt{٣}$ ، ٥ ، $٤\sqrt{٣}$ نيوتن في $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أج}$ ، $\overleftarrow{أد}$ ، $\overleftarrow{أهـ}$ على الترتيب أوجد مقدار واتجاه المحصلة لهذه القوى

الحل



∵ الشكل سداسي منتظم ∴ ق(∠ب أ و) = ١٢٠°

من القانون $\frac{(ن-٢)\times ١٨٠}{ن} = ١٢٠$

∴ ق(∠ب أ ج) = ق(∠ج أ د) = ق(∠د أ هـ)

= ق(∠هـ أ و) = $\frac{١٢٠}{٤} = ٣٠°$

ق	٨	$٦\sqrt{٣}$	٥	$٤\sqrt{٣}$
هـ	٠	٣٠	٦٠	٩٠

∴ س = ٨ جتا ٠ + $٦\sqrt{٣}$ جتا ٣٠ + ٥ جتا ٦٠ + $٤\sqrt{٣}$ جتا ٩٠ = $\frac{٣٩}{٢}$

ص = ٨ جا ٠ + $٦\sqrt{٣}$ جا ٣٠ + ٥ جا ٦٠ + $٤\sqrt{٣}$ جا ٩٠ = $\frac{١٩\sqrt{٣}}{٢}$

∴ $\overline{ح} = \frac{٣٩}{٢}\,\overline{س} + \frac{١٩\sqrt{٣}}{٢}\,\overline{ص}$

∴ ح = $\sqrt{\left(\frac{٣٩}{٢}\right)^{٢} + \left(\frac{١٩\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢}} = \sqrt{٦٥١}$ نيوتن

ظا هـ = $\frac{\frac{١٩\sqrt{٣}}{٢}}{\frac{٣٩}{٢}} = \frac{١٩\sqrt{٣}}{٣٩}$ ∴ هـ = ٤٠° ٩َ

أي أن المحصلة تصنع زاوية ٩َ ٤٠° مع $\overleftarrow{أب}$

أي الأعمال أحب إلى الله

١ الصلاة على وقتها

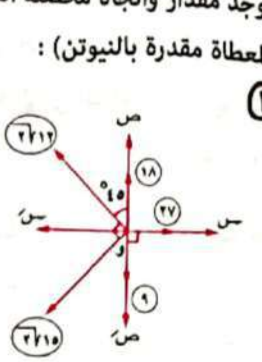
٢ بر الوالدين

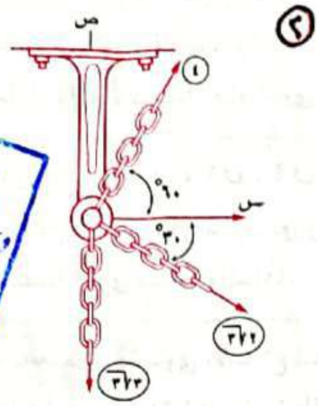
٣ الجهاد في سبيل الله

مستر / لطفي زهران رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية ٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

الواجب:

أوجد مقدار واتجاه محصلة القوى المؤثرة فى كل شكل من الشكلين الآتيين (علماً بأن القوى المعطاة مقدرة بالنيوتن) :

① 

② 

٣ ثلاث قوى مستوية مقاديرها ١ ، ٢ ، $\sqrt{3}$ نيوتن تؤثر فى نقطة م واتجاهاتها هى م أ ، م ب ، م حـ على الترتيب حيث ق (∠ أ م ب) = ٦٠° ، ق (∠ ب م حـ) = ٣٠° ، ق (∠ أ م حـ) = ٩٠° أوجد المحصلة. «٤ نيوتن ، فى اتجاه م ب»

٤ أثرت القوى ٨ ، ٤ $\sqrt{3}$ ، ٦ $\sqrt{3}$ ، ١٤ نيوتن فى نقطة مادية وكان قياس الزاوية بين القوتين الأولى والثانية ٣٠° وبين الثانية والثالثة ١٢٠° وبين الثالثة والرابعة ٩٠° مرتبة فى اتجاه دورى واحد. أوجد محصلة هذه القوى مقدارًا واتجاهًا. «٤ نيوتن ، فى اتجاه القوة الرابعة»

٥ تؤثر القوى المستوية التى مقاديرها ٢ ، ٣ $\sqrt{2}$ ، ٢ $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{3}$ نيوتن فى نقطة مادية فإذا كان قياس الزاوية بين القوة الأولى والقوة الثانية ٤٥° وبين القوة الثانية والقوة الثالثة ١٠٥° وبين القوة الثالثة والقوة الرابعة ١٢٠° مأخوذة فى اتجاه دورى واحد.
أوجد محصلة هذه القوى. «$\sqrt{13}$ نيوتن ، ١١ َ ١٩° مع القوة الثانية»

٦ خمس قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة مقاديرها ٩ ، ٦ ، ٤ $\sqrt{2}$ ، ٥ $\sqrt{2}$ ، ٥ نيوتن وتعمل فى اتجاهات الشرق ، الشمال ، الشمال الغربى ، الجنوب الغربى ، الجنوب على الترتيب.
أثبت أن مجموعة القوى متزنة.

٧ ثلاث قوى مستوية مقاديرها ٦٠ ، ٨٨ ، ٦٠ ث.جم تؤثر فى نقطة ، الأولى نحو الشمال والثانية فى اتجاه ٣٠° جنوب الغرب والثالثة فى اتجاه ٣٠° جنوب الشرق.
أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى. «٢٨ ث.جم ، ٣٠° جنوب الغرب»

٨ أربع قوى مستوية تؤثر فى نقطة مادية ، الأولى مقدارها ٤ نيوتن وتؤثر فى اتجاه الشرق والثانية مقدارها ٢ نيوتن وتؤثر فى اتجاه ٣٠° شرق الشمال والثالثة مقدارها ٥ نيوتن فى اتجاه ٦٠° شمال الغرب والرابعة مقدارها ٣ $\sqrt{3}$ نيوتن فى اتجاه ٦٠° غرب الجنوب.
أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى. «٤ نيوتن ، ١٢٠°»

١٠ أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع فيه م هى نقطة تلاقى المتوسطات. أثرت القوى التى مقاديرها ١٥ ، ٢٠ ، ٢٥ نيوتن فى نقطة مادية فى الاتجاهات م حـ ، م ب ، م أ
أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى. «٥ $\sqrt{3}$ نيوتن ، ٣٠° مع م أ»

(١) أ ب حـ ء هـ و شكل سداسى منتظم تؤثر القوى التى مقاديرها ٢ ، ٤ $\sqrt{3}$ ، ٨ ، ٢ $\sqrt{3}$ ، ٤ ث.كجم فى نقطة أ فى الاتجاهات أ ب ، أ حـ ، أ ء ، أ هـ ، أ و على الترتيب.
أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى. «٢٠ ث.كجم ، ٦٠° مع أ ب»

(٢) أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ١٢ سم ، هـ ∈ ب حـ بحيث ب هـ = ٥ سم. أثرت قوى مقاديرها ٢ ، ١٣ ، ٤ $\sqrt{2}$ ، ٩ ث.جم فى الاتجاهات أ ب ، أ هـ ، حـ أ ، أ ء على الترتيب.
أوجد محصلة هذه القوى. «١٠ $\sqrt{2}$ ث.جم وتعمل فى اتجاه أ حـ»

اختر

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(حيث س ، ص متجها وحدة أساسيان فى اتجاهين متعامدين)

① إذا كان : ق١ = ٢ س − ٢ ص ، ق٢ = ٤ س − ٨ ص

، محصلتهما ح = ٢ أ س − ٣ ب ص فإن : أ + ب = ...

(أ) ٣ (ب) ٣ $\frac{1}{2}$ (جـ) ٦ $\frac{1}{2}$ (د) ١٢

② إذا كان : ق١ = ٣ س − ٢ ص ، ق٢ = أ س − ص

، ق٣ = ٤ س − ب ص ، محصلتهم ح = ٦ س − ٤ ص

فإن : (أ ، ب) = ...

(أ) (١ ، −١) (ب) (−١ ، ١) (جـ) (−١ ، −١) (د) (١ ، ١)

③ إذا كانت : ق١ ، ق٢ ، ق٣ ثلاث قوى متزنة ومتلاقية فى نقطة واحدة وكانت :

ق١ = ٢ س − ٣ ص ، ق٢ = ٣ س + ٥ ص فإن : ق٣ = ...

(أ) −٥ س − ٢ ص (ب) −٥ س + ٢ ص

(جـ) ٥ س + ٢ ص (د) ٥ س − ٢ ص

④ إذا كان : ق١ = ٥ س ، ق٢ = ٧ س − ٥ ص

فإن : ‖ح‖ = ... وحدة قوة.

(أ) ١٢ (ب) ٥ (جـ) ١٣ (د) $\sqrt{73}$

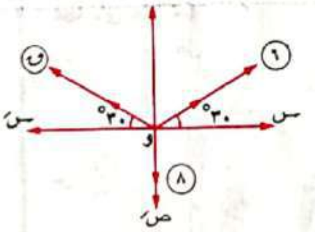
⑤ إذا أثرت القوى : ق١ = ٤ س + ٥ ص ، ق٢ = أ س − ٧ ص

، ق٣ = ٣ س + ب ص فى نقطة مادية وكانت القوى متزنة

فإن : أ + ٢ ب = ...

(أ) −٥ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) −٣

⑥ إذا كانت محصلة القوى الموضحة



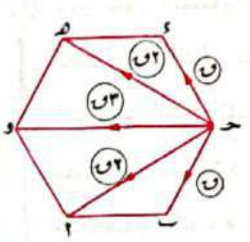
بالشكل المقابل تؤثر فى محور الصادات

فإن : ق = ... وحدة قوة.

(أ) ٢ (ب) ٦

(جـ) ٨ (د) ١٤

⑦ محصلة القوى فى الشكل المقابل



تؤثر فى اتجاه ....

(أ) حـ د (ب) حـ هـ

(جـ) حـ و (د) حـ أ

ربنا معاكم يا وحوش

الاتزان

قاعدة مثلث القوى - قاعدة لامى

أولاً: اتزان جسم جاسئ تحت تأثير قوتين

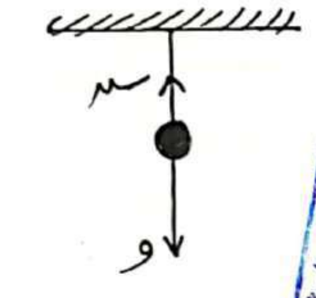
* لكى يتزن الجسم تحت تأثير قوتين لابد من تحقق ③ شروط

① متساويتان فى المقدار ② متضادتين فى الاتجاه

③ خط عملهما على استقامة واحدة

أمثلة على اتزان جسم تحت تأثير قوتين :

جسم معلق بحبل خفيف

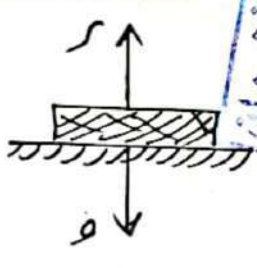


① الجسم متزن تحت تأثير قوتين

① وزنه ويؤثر رأسياً الى اسفل (و)

② الشد ويؤثر رأسياً الى اعلى (ش)

∴ و = ش



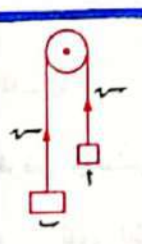
② جسم موضوع على نضد افقى أملس

الجسم متزن تحت تأثير قوتيه

① وزنه ويؤثر رأسياً إلى اسفل

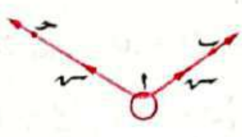
② رد فعل النضد ويؤثر رأسياً إلى أعلى

∴ و = ر



٢ فى الشكل المقابل :

إذا مر خيط على بكرة ملساء وعلق فى طرفى الخيط ا ، ب جسمان بحيث أصبح الخيط مشدودًا فإن الشدين عند طرفى الخيط يكونان متساويين.

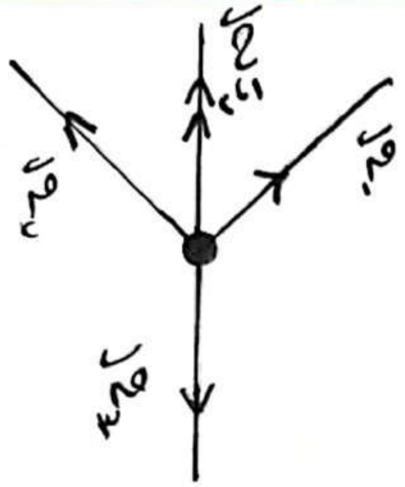


٣ فى الشكل المقابل :

إذا مر خيط فى حلقة ملساء (معلقة فيه تعليقًا حرًا) فإن الشد فى كل من جزأى الخيط $\overline{اب}$ ، $\overline{اح}$ يكونان متساويين فى المقدار.

ثانيا :. اتزان جسم جاسئ تحت تأثير ثلاث قوى مستوية ومتلاقية في نقطة

إذا اتزنت ثلاث قوى مستوية ومتلاقية في نقطة فإن محصلة أي قوتين منها تكون مساوية للقوة الثالثة في المقدار ومضادة لها في الاتجاه ولها نفس خط العمل



بحيث لابد ان تكون $\vec{ح}_{1،2} = \vec{ق}_3$

قاعدة ①

إذا أمكن تمثيل ثلاث قوى مستوية ومتلاقية في نقطة بأضلاع مثلث مأخوذة في اتجاه دوري واحد فإن هذه القوى تكون متزنة

بس خلي بالك :. مش كل القوى مقاديرها تصلح ان تكون أطوال أضلاع مثلث .

في تانية اعدادي لو عندي ③ أطوال لأضلاع مثلث

مثلاً ٢ ، ٥ ، ٨ ← لا يصلحوا أن يكونوا أطوال أضلاع مثلث

لأن ٢ + ٥ = ٧ ، ٨ > ٧ لازم أصغر ضلعين > الثالث

تعالى بقا نطبق ع القوى :. ثلاث قوى ٤ ، ٧ ، ٨

٤ + ٧ = ١١ ، ١١ > ٨ ∴ الثلاث قوى يصلحوا أن يكونوا أطوال أضلاع مثلث

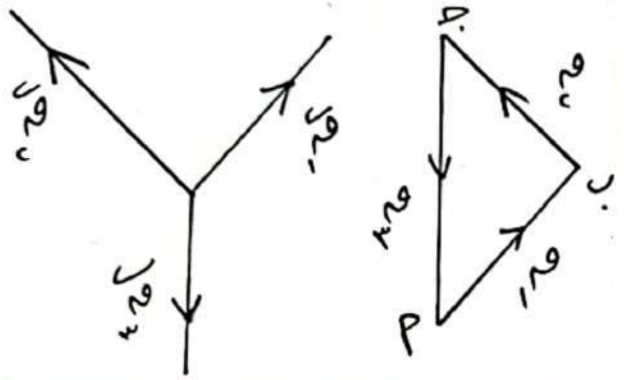
قاعدة مثلث القوى :

قاعدة ٢ قاعدة مثلث القوى:

إذا اتزن جسم جاسئ تحت تأثير ثلاث قوى مستوية متلاقية فى نقطة ورسم مثلث أضلاعه توازى خطوط عمل القوى وفى اتجاه دورى واحد فإن أطوال أضلاع المثلث تكون متناسبة مع مقادير القوى المناظرة.

الجسم متزن ويكون

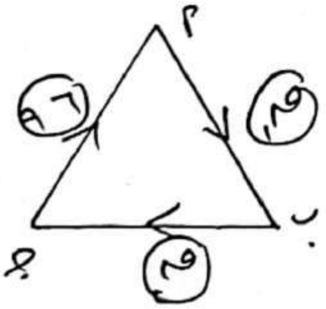
$$\boxed{\frac{ق_1}{أب} = \frac{ق_2}{ب جـ} = \frac{ق_3}{أ جـ}}$$



مثال سهل :

ثلاث قوى متلاقية فى نقطة مقاديرها $ق_1$ ، $ق_2$ ، ٩٦ ث.كجم وأمكن تمثيلها بالقطع المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{ب جـ}$ ، $\overrightarrow{جـ أ}$ على الترتيب فى △ أ ب جـ الذى فيه أب = ٨ سم ، ب جـ = ١٠ سم ، جـ أ = ١٢ سم أوجد فيه $ق_1$ ، $ق_2$

الحل



طالما القوة ممثلة بأضلاع مثلث وفى اتجاه دورى واحد ∴ القوى متزنة

ونقدر نستخدم قاعدة مثلث القوى

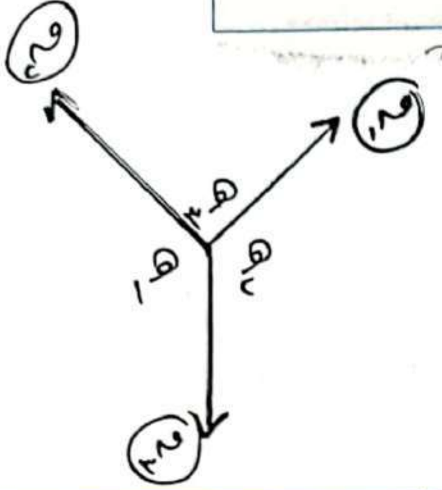
$$\therefore \frac{ق_1}{أب} = \frac{ق_2}{ب جـ} = \frac{96}{جـ أ} \qquad \therefore \frac{ق_1}{8} = \frac{ق_2}{10} = \frac{96}{12}$$

$$\therefore ق_1 = \frac{96 \times 8}{12} = 64 \text{ ث.كجم} \qquad ق_2 = \frac{96 \times 10}{12} = 80 \text{ ث.كجم}$$

قاعدة لامى :.

قاعدة ٣ قاعدة لامى:

إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى مستوية متلاقية فى نقطة فإن مقدار كل قوة يتناسب مع جيب الزاوية المحصورة بين القوتين الأخريين.

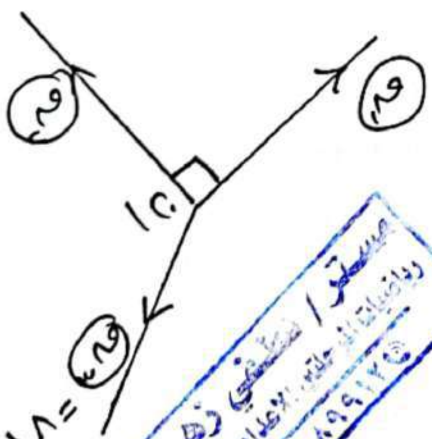


$$\boxed{\frac{ق_1}{جا هـ_1} = \frac{ق_2}{جا هـ_2} = \frac{ق_3}{جا هـ_3}}$$

مثال سهل :.

ثلاث قوى مستوية مقاديرها ق١ ، ق٢ ، ١٨ نيوتن متلاقية فى نقطة ومتزنة فإذا كان قياس الزاوية بين خطى عمل القوتين الأولى والثانية ٩٠° وبين الثانية والثالثة ١٢٠° أوجد ق١ ، ق٢

الحل



∴ الزاوية بين القوة الأولى والثالثة

$= ٣٦٠ - (٩٠ + ١٢٠) = ١٥٠$

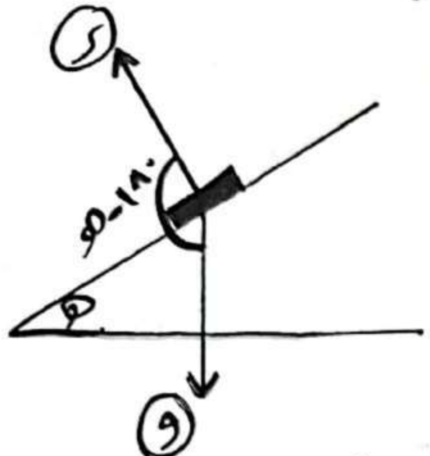
$$∴ \frac{ق_1}{جا ١٢٠} = \frac{ق_2}{جا ١٥٠} = \frac{١٨}{جا ٩٠}$$

$$∴ ق_1 = \frac{١٨ \times جا ١٢٠}{جا ٩٠} = ٩\sqrt{٣} \text{ نيوتن}$$

$$ق_2 = \frac{١٨ \times جا ١٥٠}{جا ٩٠} = ٩ \text{ نيوتن}$$

اتزان جسم على مستوى مائل أملس:

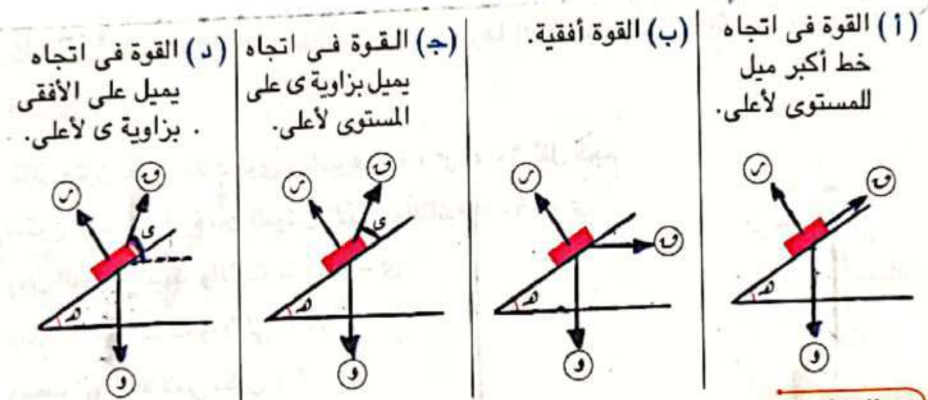
اذا وضع جسم وزنه (و) على مستوى مائل أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها (هـ) فإن الجسم يكون واقعاً تحت تأثير قوتين :



① **قوة الوزن (و)** رأسي لأسفل

② **قوة رد الفعل (ر)** عمودية على المستوى

ولكي يحدث اتزان لا بد من وجود قوة ثالثة تؤثر على الجسم

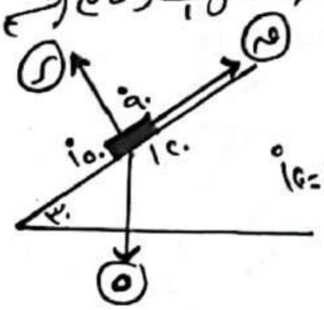


ملاحظة

رد فعل المستوى الأملس ($\overline{ر}$) يكون عموديًا على المستوى.

مثال بسيط: وضع جسم وزنه ٥ ث.كجم على مستوى مائل أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠ ومنع الجسم من الانزلاق بالتأثير عليه بقوة قدرها ق تعمل في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى إلى أعلى. أوجد مقدار ق وكذلك رد فعل المستوى على الجسم

الحل



الزاوية بين ر ، و = ١٨٠ − ٣٠ = ١٥٠

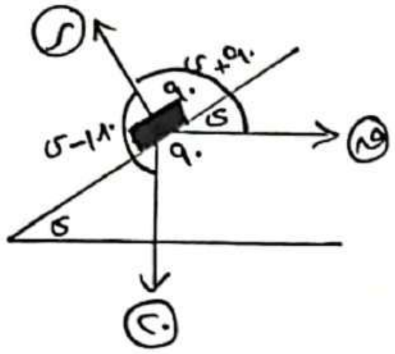
الزاوية بين ق ، ر = ٩٠ ، الزاوية بين ق ، و = ٣٦٠ − (٩٠ + ١٥٠) = ١٢٠

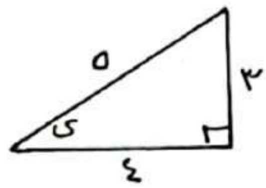
∴ $\frac{٥}{جا ٩٠} = \frac{ق}{جا ١٥٠} = \frac{ر}{جا ١٢٠}$

∴ ق = $\frac{٥ \times جا ١٥٠}{جا ٩٠}$ = ٢,٥ ث.كجم   ر = $\frac{٥ \times جا ١٢٠}{جا ٩٠} = \frac{٥\sqrt{٣}}{٢}$ ث.كجم

مثال ١٠: وضع ثقل قدره ٢٠ ثقل كجم على مستوى مائل أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها ى حيث جتا ى = $\frac{4}{5}$ ومنع من الانزلاق بتأثير قوة أفقية مقدارها (ق) أوجد مقدار (ق) وكذلك رد فعل المستوى

الحل





جتا ى = $\frac{4}{5}$

جا ى = $\frac{3}{5}$

$$\frac{\text{ق}}{\text{جا}(180-\text{ى})} = \frac{20}{\text{جا}(90+\text{ى})} = \frac{\text{ر}}{\text{جا } 90}$$

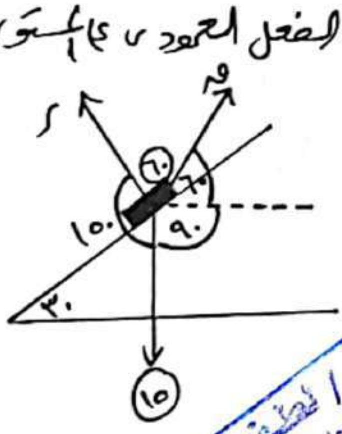
$$\therefore \frac{\text{ق}}{\text{جا ى}} = \frac{20}{\text{جتا ى}} = \frac{\text{ر}}{1} \qquad \therefore \frac{\text{ق}}{\frac{3}{5}} = \frac{20}{\frac{4}{5}} = \text{ر}$$

$\therefore$ ق = ١٥ ث.كجم ، ر = $\frac{20}{\frac{4}{5}}$ = ٢٥ ث.كجم

---

٢) جسم وزنه (١٥) ثقل كجم موضوع على مستوى مائل أملس يميل على الأفقي بزاوية جيبها $\frac{1}{2}$ ، أثرت عليه قوة تميل على الأفقي بزاوية قياسها ٦٠° حفظته في حالة توازن أوجد مقدار القوة ورد الفعل العمودي على المستوى

الحل



نفرض أن الزاوية (هـ) $\therefore$ جا هـ = $\frac{1}{2}$ $\therefore$ هـ = ٣٠°

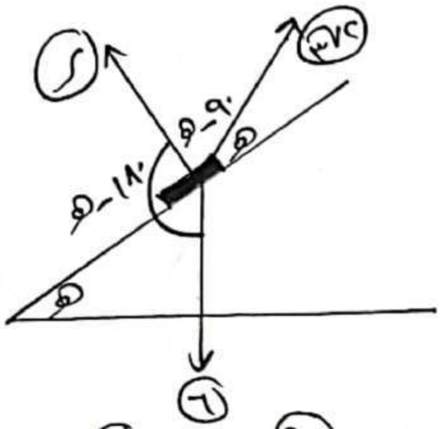
$$\therefore \frac{\text{ق}}{\text{جا } 150} = \frac{\text{ر}}{\text{جا } 150} = \frac{15}{\text{جا } 60}$$

$$\therefore \text{ق} = \frac{15 \times \text{جا } 150}{\text{جا } 60} = 5\sqrt{3} \text{ ثقل.كجم}$$

$$\text{ر} = \frac{15 \times \text{جا } 150}{\text{جا } 60} = 5\sqrt{3} \text{ ثقل كجم}$$

(٣) وضع جسم وزنه ٦ نيوتن على مستوى أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها هـ وحفظ توازنه بواسطة قوة مقدارها $2\sqrt{3}$ نيوتن وتميل على خط أكبر ميل للمستوى بزاوية لها نفس القياس هـ لأعلى . أوجد قيمة هـ ورد فعل المستوى على الجسم

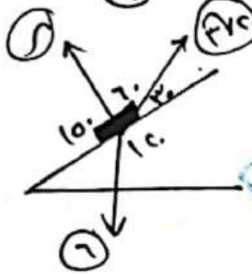
الحل



$$\frac{6}{\text{جا}(90-\text{هـ})} = \frac{2\sqrt{3}}{\text{جا}(180-\text{هـ})} \quad \therefore \frac{6}{\text{جتاهـ}} = \frac{2\sqrt{3}}{\text{جاهـ}}$$

$$\therefore \frac{\text{جاهـ}}{\text{جتاهـ}} = \frac{2\sqrt{3}}{6} \quad \therefore \text{طاهـ} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\therefore$ هـ $= 30^\circ$



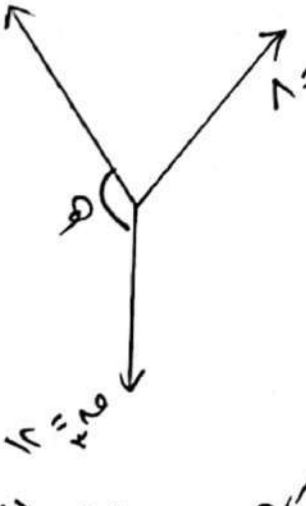
$$\therefore \frac{\text{ر}}{\text{جا}150} = \frac{2\sqrt{3}}{\text{جا}150} = \frac{6}{\text{جا}60}$$

$$\text{ر} = \frac{\text{جا}150 \times 6}{\text{جا}60} = 2\sqrt{3} \text{ نيوتن}$$

---

(٤) ثلاث قوى مستوية مقاديرها ٨ ، ١٠ ، ١٢ نيوتن تؤثر في نقطة مادية ، فإذا كانت القوى متزنة ، فما قياس الزاوية بين القوتين الثانية والثالثة .

الحل



$\because$ القوى متزنة

$\therefore ح_{2,3} = ق_1 = 8$

$$\therefore ح = \sqrt{(10)^2 + (12)^2 + 2\times10\times12 \text{ جتاهـ}} = 8$$

$$\therefore \sqrt{100 + 144 + 240 \text{ جتاهـ}} = 8 \quad \text{بتربيع الطرفين}$$

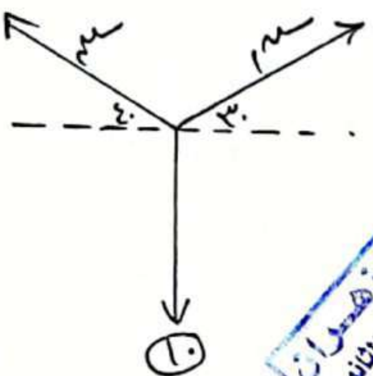
$$100 + 144 + 240 \text{ جتاهـ} = 64$$

$$\therefore 240 \text{ جتاهـ} = 64 - 100 - 144 \qquad \therefore 240 \text{ جتاهـ} = -180 \quad (\div 240)$$

$\therefore$ جتاهـ $= \frac{-3}{4}$ ← سالبة في الربع الثاني والثالث ← الثالث مرفوض

$\therefore$ ق(هـ) $= 180 - 41^\circ\ 24'\ 35'' = 138^\circ\ 35'\ 25''$

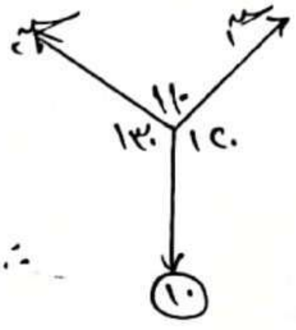
٥ في الشكل المقابل



أوجد مقدار ش١ ، ش٢

في حالة الاتزان

الحل



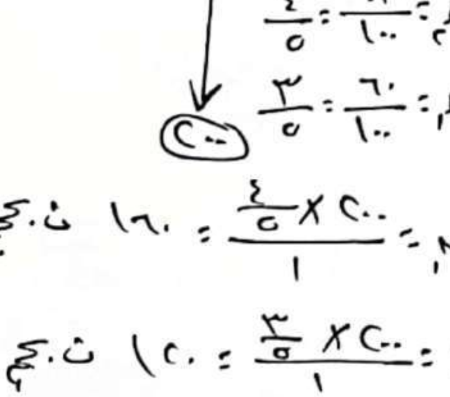
$$\frac{ش_2}{جا ١٢٠} = \frac{ش_1}{جا ١٣٠} = \frac{١٠}{جا ١١٠}$$

$$\therefore ش_1 = \frac{جا ١٣٠ \times ١٠}{جا ١١٠} = ٨,١٥ \text{ نيوتن}$$

$$ش_2 = \frac{جا ١٢٠ \times ١٠}{جا ١١٠} = ٩,٢٢ \text{ نيوتن}$$

٦ علق ثقل مقداره ٢٠٠ ث.جم بخيطين طولاهما ٦٠ سم ، ٨٠ سم ثبت طرفاهما في نقطتين على خط أفقي واحد البعد بينهما ١٠٠ سم أوجد مقدار الشد في كل من الخيطين في وضع الاتزان

الحل



$$\because (٦٠)^2 + (٨٠)^2 = (١٠٠)^2 \quad \therefore ق(\angle أ ب جـ) = ٩٠^\circ$$

$$\therefore \frac{٢٠٠}{جا ٩٠} = \frac{ش_1}{جا(٩٠ + هـ_2)} = \frac{ش_2}{جا(٩٠ + هـ_1)}$$

$$جتا هـ_2 = \frac{٨٠}{١٠٠} = \frac{٤}{٥}$$

$$جتا هـ_1 = \frac{٦٠}{١٠٠} = \frac{٣}{٥}$$

$$\frac{٢٠٠}{جا ٩٠} = \frac{ش_1}{جتا هـ_2} = \frac{ش_2}{جتا هـ_1}$$

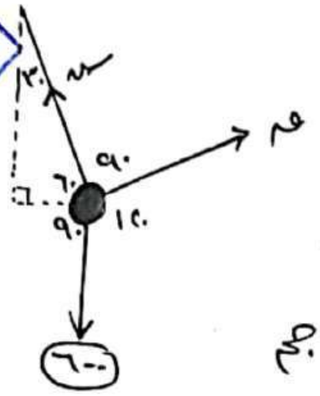
$$\therefore ش_1 = \frac{\frac{٤}{٥} \times ٢٠٠}{١} = ١٦٠ \text{ ث.جم}$$

$$\frac{٢٠٠}{١} = \frac{ش_1}{\frac{٤}{٥}} = \frac{ش_2}{\frac{٣}{٥}}$$

$$ش_2 = \frac{\frac{٣}{٥} \times ٢٠٠}{١} = ١٢٠ \text{ ث.جم}$$

(٧) ازيحت كرة بندول وزنها ٦٠٠ ث جم حتى صار الخيط يصنع زاوية قياسها ٣٠° مع الرأسي تحت تأثير قوة ق على الكرة في اتجاه عمودي على الخيط أوجد مقدار القوة ومقدار الشد في الخيط في وضع الاتزان

الحل



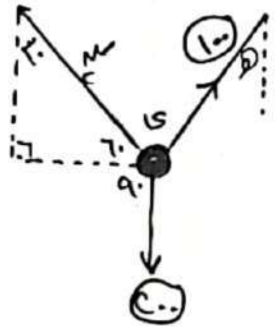
∵ ق / جا ١٥٠ = ٦٠٠ / جا ٩٠ = ش / جا ١٢٠

∴ ق = (جا ١٥٠ × ٦٠٠) / جا ٩٠ = ٣٠٠ ث.جم

ش = (جا ١٢٠ × ٦٠٠) / جا ٩٠ = ٣٠٠ √٣ ث.جم

(٨) علق جسم وزنه ٢٠٠ ث.جم بواسطة خيطين خفيفين يميل أحدهما على الرأسي بزاوية قياسها هـ ويميل الخيط الآخر على الرأسي بزاوية قياسها ٣٠°، فإذا كان مقدار الشد في الخيط الأول يساوى ١٠٠ ث.جم. فأوجد هـ ومقدار الشد في الخيط الثاني.

الحل



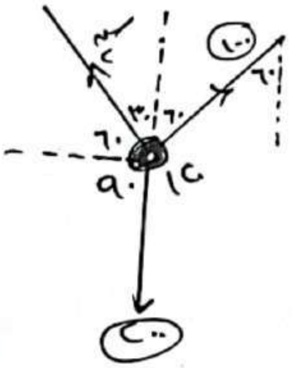
∵ ١٠٠ / جا ١٥٠ = ٢٠٠ / جا ى ∴ جا ى = (جا ١٥٠ × ٢٠٠) / ١٠٠ = ١

∴ ى = ٩٠°

∴ هـ = ٦٠°

∴ ١٠٠ / جا ١٥٠ = ش / جا ١٢٠

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢



ش = (جا ١٢٠ × ١٠٠) / جا ١٥٠ = ١٠٠ √٣ ث.جم

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

الواجب :

١ ثلاث قوى متلاقية فى نقطة مقاديرها $ق_١$ ، $ق_٢$ ، ٣٠ نيوتن وأمكن تمثيلها بالقطع $\overline{أب}$ ، $\overline{بحـ}$ ، $\overline{حـأ}$ على الترتيب من Δ أبحـ الذى فيه :

أب = ٣ سم ، بحـ = ٤ سم ، حـأ = ٥ سم

أوجد قيمة كل من : $ق_١$ ، $ق_٢$ «٤٥ ، ٦٠ نيوتن»

٢ ثلاث قوى مقاديرها ٦٠ ، ق ، ك نيوتن متزنة ومتلاقية فى نقطة فإذا كان قياس الزاوية بين القوتين الأولى والثانية ١٢٠° وبين الثانية والثالثة ٩٠°.

فأوجد مقدار كل من : ق ، ك «٣٠ ، ٣٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن»

٣ وضع جسم وزنه ١٢ ثقل.كجم على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ توازن الجسم بواسطة قوة أفقية. أوجد مقدار القوة ورد فعل المستوى.

«٤ $\sqrt{٣}$ ، ٨ $\sqrt{٣}$ ث.كجم»

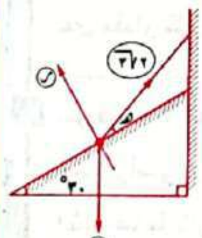
٤ وضع جسم وزنه (و) نيوتن على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ الجسم فى حالة توازن بتأثير قوة مقدارها ٣٦ نيوتن تعمل فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى. احسب مقدار وزن الجسم ومقدار رد فعل المستوى. «٧٢ ، ٣٦ $\sqrt{٣}$ نيوتن»

١٢ علق جسم وزنه ٦,٥ نيوتن بواسطة خيطين طول أحدهما ٠,٥ متر وطول الآخر ١,٢ متر وربط الخيطان فى نقطتين من مستقيم أفقى بحيث كانا متعامدين.

أوجد مقدار الشد فى كل من الخيطين فى وضع الاتزان. «٦ ، ٢,٥ نيوتن»

علق ثقل قدره ٥٠ ثقل جرام بواسطة خيطين متعامدين فإذا كان الشد فى الخيطين هما ٢٥ $\sqrt{٣}$ ، ٢٥ ثقل جرام. فأوجد قياس الزاوية التى يميل بها كل من الخيطين على الرأسى فى وضع الاتزان. «٣٠° ، ٦٠°»

فى الشكل المقابل :



جسم وزنه ٦ ث.كجم موضوع على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ توازنه بواسطة قوة شد ش مقدارها ٢ $\sqrt{٣}$ ث.كجم تعمل فى خيط مثبت أحد طرفيه بالجسم والطرف الآخر فى حائط رأسى. أوجد قياس الزاوية التى يصنعها الخيط مع المستوى ومقدار رد فعل المستوى على الجسم. «٣٠° ، ٢ $\sqrt{٣}$ ث.كجم»

وضع جسم وزنه (و) ثقل كجم على مستوٍ أملس يميل على الأفقى بزاوية جيب تمامها $\frac{١}{٢}$ وحفظ فى حالة توازن بقوة تميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° إلى أعلى.

أوجد مقدار القوة وكذلك رد فعل المستوى بدلالة (و). «ق = ر = و»

وضع جسم وزنـه ٣٠٠ ثقل جرام على مستوٍ مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ومنع من الانزلاق بواسطة قوة تصنع مع اتجاه خط أكبر ميل للمستوى زاوية قياسها ٣٠° إلى أعلى. أوجد مقدار هذه القوة ومقدار رد فعل المستوى. «١٠٠ $\sqrt{٣}$ ، ١٠٠ $\sqrt{٣}$ ث.جم»

وضع جسم وزنه ٨٠٠ ث.جم على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ حيث جا هـ = ٠,٦ ، وحفظ الجسم فى حالة توازن بواسطة قوة أفقية.

أوجد مقدار هذه القوة ورد فعل المستوى على الجسم. «٦٠٠ ، ١٠٠٠ ث.جم»

١٨ علق ثقل مقداره ١٦ نيوتن فى أحد طرفى خيط خفيف مثبت طرفه الآخر فى نقطة من حائط رأسى ، أزيح الثقل بقوة فى اتجاه عمودى على الخيط حتى أصبح الخيط فى وضع التوازن يميل على الحائط بزاوية قياسها ٣٠° أوجد مقدار القوة والشد فى الخيط.

«٨ ، ٨ $\sqrt{٣}$ نيوتن»

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية فى نقطة فإن مقدار كل قوة يتناسب مع .... الزاوية المحصورة بين القوتين الأخريين.

(أ) جيب تمام (ب) جيب (جـ) ظل (د) ظل تمام

(٢) إذا كانت : $\overrightarrow{ق}_1$ ، $\overrightarrow{ق}_2$ ، $\overrightarrow{ق}_3$ ثلاث قوى متلاقية فى نقطة ومتزنة فإن مقدار محصلة $\overrightarrow{ق}_1$ ، $\overrightarrow{ق}_2$ يساوى ....

(أ) $ق_1$ (ب) $ق_1 + ق_2$ (جـ) $ق_3$ (د) صفر

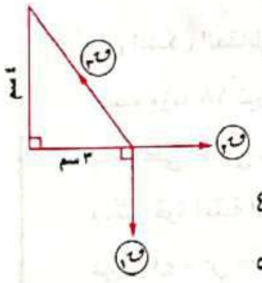
(٣) ثلاث قوى متساوية فى المقدار ومتلاقية فى نقطة ومتزنة فإن قياس الزاوية بين أى قوتين = ...

(أ) ٦٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

(٤) إذا كانت $\overrightarrow{ق}$ تتزن مع قوتين متعامدتين مقداراهما ٨ نيوتن ، ١٥ نيوتن فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٧ (ب) ١٧ (جـ) ٢٣ (د) ٧ $\sqrt{٢}$

(٥) إذا كان الشكل المقابل يوضح اتزان جسم تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية فى نقطة مقاديرها $ق_1$ ، $ق_2$ ، $ق_3$ نيوتن وأضلاع المثلث القائم توازى خطوط عمل هذه القوى وفى ترتيب دورى واحد فإن : $ق_1 : ق_2 : ق_3$ = ...



(أ) ٣ : ٤ : ٥ (ب) ٣ : ٥ : ٤

(جـ) ٤ : ٥ : ٣ (د) ٤ : ٣ : ٥

(٦) ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة متزنة فإذا كان ٧ ، ٣ نيوتن مقدارى قوتين منهم فإن مقدار القوة الثالثة يمكن أن يساوى .... نيوتن.

(أ) ١١ (ب) ٢ (جـ) ٥ (د) ٣

(٧) إذا اتزن جسم تحت تأثير قوتين $\overrightarrow{ق}_1$ ، $\overrightarrow{ق}_2$ فإن : ....

(أ) $\overrightarrow{ق}_1 = \overrightarrow{ق}_2$ (ب) $ق_1 = ق_2$

(جـ) $\overrightarrow{ق}_1 + \overrightarrow{ق}_2 \neq \vec{0}$ (د) $\overrightarrow{ق}_1$ ، $\overrightarrow{ق}_2$ ليسا على استقامة واحدة.

(٨) إذا كانت القوة التى مقدارها ق تتزن مع قوتين مقداراهما ٥ ، ٣ نيوتن واللتان تحصران بينهما زاوية قياسها ٦٠° فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) $\sqrt{١٩}$ (ب) $\sqrt{٣٤}$ (جـ) ٧ (د) ١٥

(٩) جسم وزنه ٢٨ ث.كجم معلق بواسطة خيطين مثبت طرفاهما الآخران ، فإذا كان الخيطان متعامدين وقياس الزاوية بين أحدهما وخط عمل وزن الجسم ١٢٠° فإن مقدار الشد فى هذا الخيط = ...

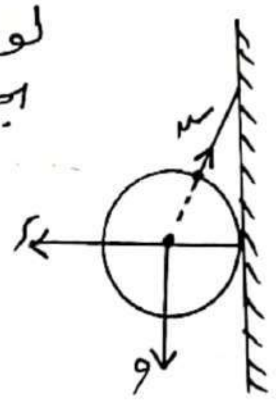
(أ) ١٤ (ب) ٢٨ (جـ) ١٤ $\sqrt{٣}$ (د) ٢٨ $\sqrt{٣}$

تابع الاتزان (تلاقى خطوط عمل ثلاث قوى متزنه)

قاعدة ④

إذا اتزن جسم جاسئ تحت تأثير ثلاث قوى غير متوازية ومستوية فإن خطوط عمل هذه القوى تتلاقى فى نقطة واحدة

تعالى الأول نشوف فكرة الكرة



لوعندك كرة مستندة على حائط ومربوطه بحبل من أحد طرفيها وأصبحت الكرة متزنه

فينتج ③ قوى :-

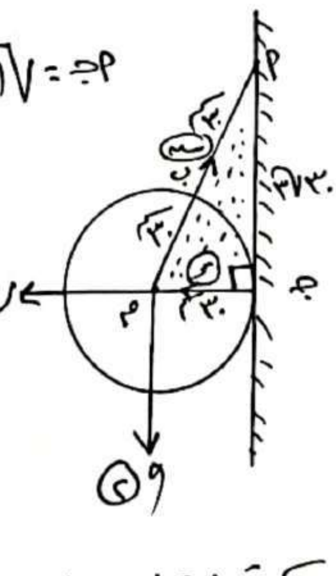
① وزن الكرة لأسفل خارج من المركز

② رد فعل الحائط عمودى على الحائط مار بالمركز

③ الشد فى الخيط مار بالمركز أيضاً

مثال ١: كرة معدنية وزنها ٢ ثقل كجم وطول نصف قطرها ٣٠ سم ربطت من نقطة ب على سطحها بخيط طوله ٣٠ سم ومربوط طرفه الأخر أ من نقطة فى حائط رأسى أملس فاتزنت الكرة وهى مستندة على الحائط . أوجد مقدار الشد فى الخيط ومقدار رد فعل الحائط

الحل



$أج = \sqrt{(٦٠)^2 - (٣٠)^2} = ٣٠\sqrt{٣}$ ، المثلث المنقط ده هو مثلث القوى هعتبر الوزن أج لانه يوازيه

وهشتغل بقاعدة مثلث القوى عشان الاطوال معطاه

$$\frac{ر}{٣٠} = \frac{ش}{٦٠} = \frac{٢}{٣٠\sqrt{٣}}$$

$ش = \frac{٦٠ \times ٢}{٣٠\sqrt{٣}} = \frac{٤\sqrt{٣}}{٣}$ ث.كجم ، $ر = \frac{٣٠ \times ٢}{٣٠\sqrt{٣}} = \frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$ ث.كجم

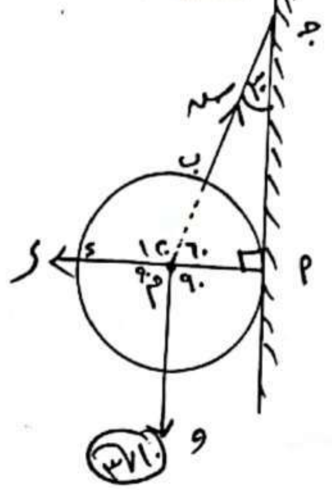
ممكن تشتغل بقاعدة لامى عادى

٢

كرة ملساء وزنها $10\sqrt{3}$ ثقل جم تستند على حائط رأسي أملس ومعلقة من إحدى نقط سطحها بخيط مثبت طرفه الآخر في نقطة من الحائط تقع رأسيًا فوق نقطة التماس وكان الخيط يصنع مع الرأسي زاوية قياسها °٣٠

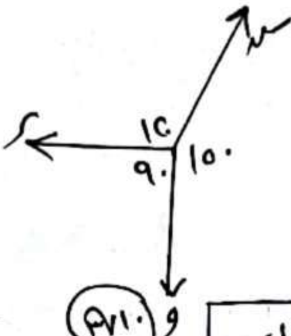
أوجد الشد في الخيط ورد فعل الحائط في وضع الاتزان. «٢٠ ، ١٠ ثقل جم»

الحل



ق(∠أمب) = ١٨٠ − (٩٠ + ٣٠) = ٦٠

ق(∠بمد) = ٣٦٠ − (٦٠ + ٩٠ + ٩٠) = ١٢٠

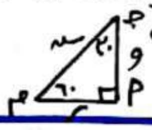


∴ $\frac{ش}{جا ٩٠} = \frac{١٠\sqrt{٣}}{جا ١٢٠} = \frac{ر}{جا ١٥٠}$

$ش = \frac{١٠\sqrt{٣} \times جا ٩٠}{جا ١٢٠} = ٢٠$ ثقل جم

$ر = \frac{١٠\sqrt{٣} \times جا ١٥٠}{جا ١٢٠} = ١٠$ ثقل جم

ممكن تشتغل بقاعدة لامي من خلال مثلث القوى



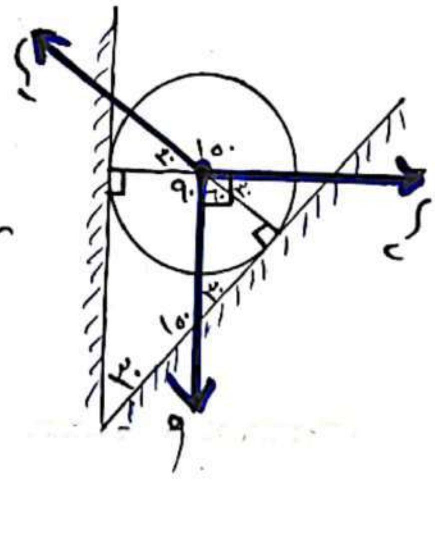
$\frac{و}{جا ٦٠} = \frac{ش}{جا ٩٠} = \frac{ر}{جا ٣٠}$ ← نفس الحل والناتج

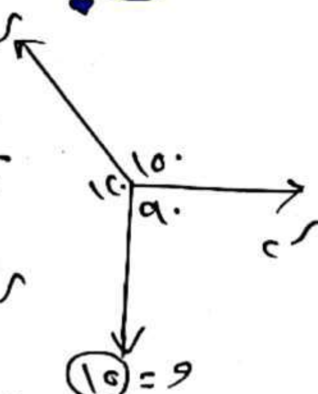
٣

كرة معدنية وزنها ١٥ ثقل كجم موضوعة بحيث تمس مستويين أملسين أحدهما رأسي والآخر يميل على الرأسي بزاوية قياسها °٣٠

أوجد رد فعل كل من المستويين. «$15\sqrt{3}$ ، ٣٠ ثقل كجم»

الحل





$\frac{ر_١}{جا ٩٠} = \frac{١٥}{جا ١٥٠} = \frac{ر_٢}{جا ١٢٠}$

$ر_١ = \frac{جا ٩٠ \times ١٥}{جا ١٥٠} = ٣٠$ ثقل كجم

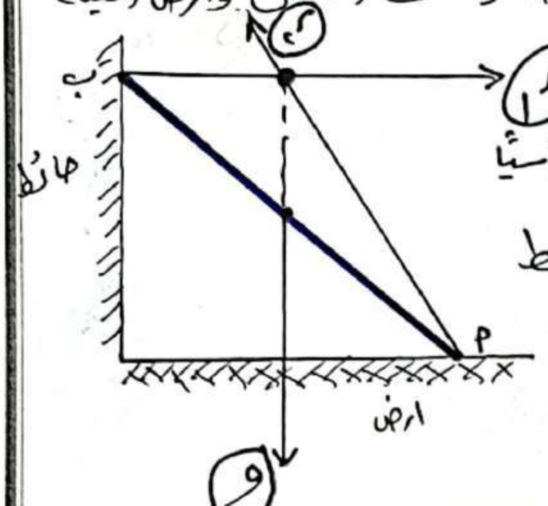
$ر_٢ = \frac{جا ١٢٠ \times ١٥}{جا ١٥٠} = ١٥\sqrt{٣}$ ثقل كجم

عشان تعرف جبت الزوايا إزاي ← لازم تسمع شرحها

افتح الفيديو ع القناة MR/lotfy zahran واسمعها

يلا نشوف فكرة القضيب

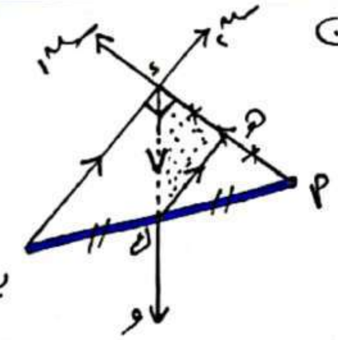
الحالة الاولى :. اذا تزن القضيب على حائط رأسى أملس وارض افقيه خشنه فإن :.



① وزن القضيب يؤثر فى منتصفه لاسفل رأسيًا
② رد فعل الحائط الاملس يكون عمودى على الحائط
③ رد فعل الارض لازم يمر بنقطة تلاقى الوزن مع رد فعل الحائط الاملس

لاحظ :. لازم القضيب يكون قضيب منتظم

الحالة الثانيه :. ان القضيب يكون مربوط بحبلين



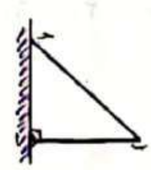
فإن : ① الوزن يؤثر رأسيًا لاسفل
② يوجد شد فى كل حبل
③ لابد ان يتلاقى كل من الوزن و الشدين فى نقطة واحدة والزاويه بين الحبلين ٩٠°

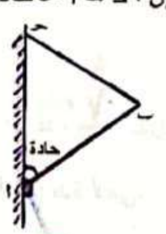
هعمل ل هـ // د ب لكى يعبر عن شد وبالتالى استخدم قاعدة مثلث القوى فى المثلث د هـ ل

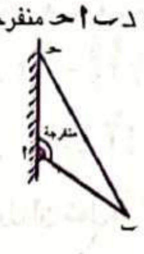
الحالة الثالثه :.

① إذا كان أ ب قضيبًا يتصل طرفه أ بمفصل فى حائط وربط الطرف ب بواسطة خيط ثبت فى النقطة حـ التى تقع أعلى أ تمامًا وكان :

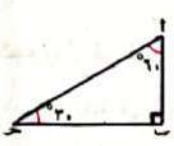
(ب حـ)^2 = (أ ب)^2 + (أ حـ)^2 فإن : ∠ ب أ حـ قائمة.	(ب حـ)^2 < (أ ب)^2 + (أ حـ)^2 فإن : ∠ ب أ حـ حادة.	(ب حـ)^2 > (أ ب)^2 + (أ حـ)^2 فإن : ∠ ب أ حـ منفرجة.



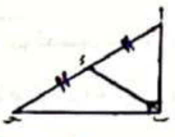




② إذا كان : Δ أ ب حـ ثلاثينى ستينى
∴ أ ب = $\frac{1}{2}$ أ حـ
، ب حـ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ أ حـ

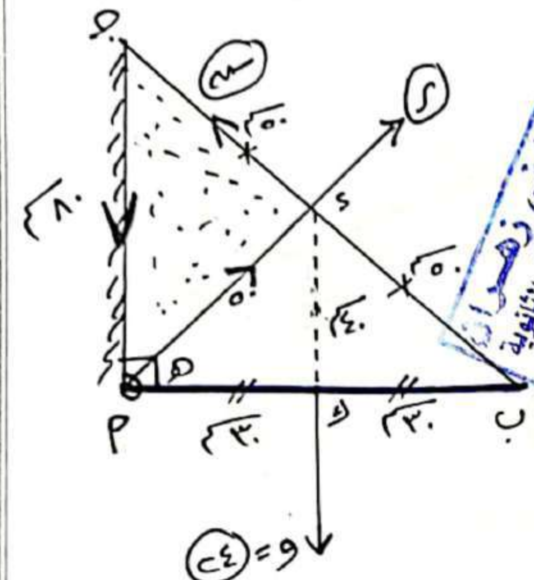


④ إذا كان : Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب ، ب د متوسطًا.
∴ ب د = $\frac{1}{2}$ أ حـ



مثال :

$\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٦٠ سم ووزنه ٢٤ ثقل كجم يؤثر في نقطة (ء) منتصف $\overline{أب}$ ، والقضيب متصل طرفه (أ) بمفصل في حائط رأسي وطرفه ب مربوط في إحدى نهايتي خيط خفيف مثبت نهايته الأخرى في نقطة (حـ) على الحائط تقع فوق أ تمامًا وعلى بُعد ٨٠ سم من أ فإذا اتزن القضيب في وضع أفقي. فأوجد مقدار الشد في الخيط ومقدار واتجاه رد فعل المفصل عند أ ؟



حـ ب $= \sqrt{(٦٠)^٢ + (٨٠)^٢} = ١٠٠$

أ ء $= \frac{١}{٢}$ حـ ب (نظرية)

أ ء $= ٥٠$ سم

كدا نقدر نطبق قاعدة مثلث القوى

هعتبر △ أ ء هـ الوزن (و)

$\frac{س}{٥٠} = \frac{٢٤}{٨٠} = \frac{ر}{٥٠}$

$\therefore$ س = ر $= \frac{٢٤ \times ٥٠}{٨٠} = ١٥$ ث. كجم

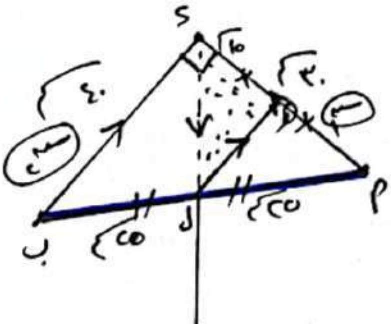
جتا هـ $= \frac{٣٠}{٥٠} = \frac{٣}{٥}$

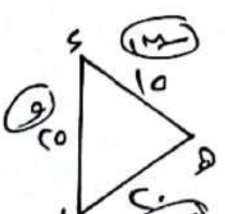
عشان اجيب اتجاه رد فعل المفصل ∠ ء أ ب لـ هـ

$\therefore$ ق(∠هـ) $= ٥٣° \; ٧' \; ٤٩''$

مثال :

قضيب منتظم طوله ٥٠ سم ووزنه ١٢٠ ث.جم علق من طرفيه تعليقًا خالصاً بواسطة خيطين ثبت طرفاهما في نقطة واحدة فإذا كان طولا الخيطين ٣٠ سم ، ٤٠ سم على الترتيب.
فأوجد مقدار الشد في كل منهما.





$\because (٣٠)^٢ + (٤٠)^٢ = (٥٠)^٢ \quad \therefore$ ق(∠ء) $= ٩٠°$

ء ل $= \frac{١}{٢}$ أ ب $\quad \therefore$ ء ل $= ٢٥$ سم

ل هـ $= \frac{١}{٢}$ ء ب $\quad \therefore$ ل هـ $= ٢٠$ سم

$\therefore \frac{س_١}{١٥} = \frac{١٢٠}{٢٥} = \frac{س_٢}{٢٠}$

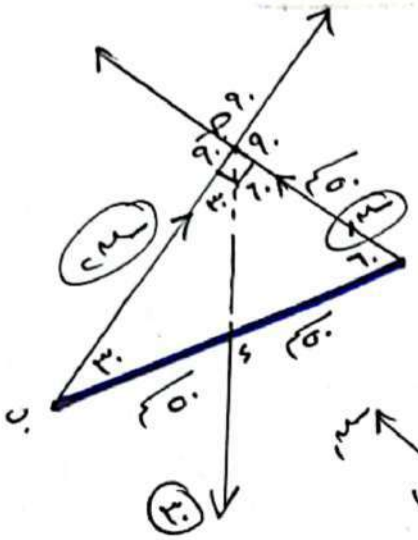
$س_١ = \frac{١٢٠ \times ١٥}{٢٥} = ٧٢$ ث.جم

$س_٢ = \frac{١٢٠ \times ٢٠}{٢٥} = ٩٦$ ث.جم

٣

علق قضيب منتظم $\overline{أب}$ طوله ١٠٠ سم ووزنه ٣٠ ثقل كجم من طرفيه أ ، ب بحبلين ثبت طرفاهما في مسمار في السقف في نقطة حـ فإذا كان الحبلان متعامدين وطول أحـ = ٥٠ سم فأوجد في وضع التوازن الشد في كل من الحبلين. «١٥ ، ١٥ $\sqrt{3}$ ثقل كجم»

هنشتغل بقاعدة لامي.

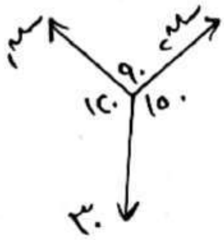


∵ أحـ = $\frac{1}{2}$ أب ، ق(أحـ ب) = ٩٠

∴ ق(ب) = ٣٠° ∴ ق(أ) = ٦٠

∵ أحـ = أء ∴ ق(أحـ ء) = ق(أ ء حـ)

= $\frac{180 - 60}{2}$ = ٦٠°



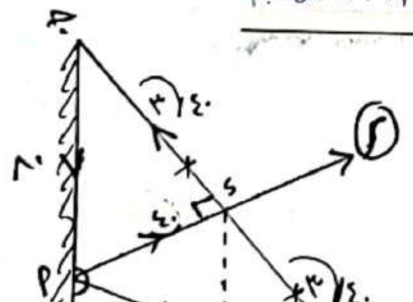
∴ $\frac{ش_2}{جا 120} = \frac{30}{جا 90} = \frac{ش_1}{جا 150}$

∴ $ش_2 = \frac{30 \times جا 120}{جا 90} = 15\sqrt{3}$ ثقل كجم

∴ $ش_1 = \frac{30 \times جا 150}{جا 90} = 15$ ثقل كجم

٤

$\overline{أب}$ ساق منتظمة طولها ٨٠ سم ووزنها ٢٤ ثقل كجم والطرف أ مثبت في مفصل مثبت في حائط رأسي والطرف ب مربوط بخيط خفيف طوله ٨٠ $\sqrt{3}$ سم مثبت طرفه الآخر في نقطة حـ على الحائط تقع رأسيًا فوق أ وعلى بُعد من أ يساوي ٨٠ سم فإذا اتزنت الساق فأوجد مقدار الشد في الخيط ورد فعل المفصل. «١٢ $\sqrt{3}$ ، ١٢ ثقل كجم»



عندك ٣ الأطوال (٨٠) ($80\sqrt{3}$) (٨٠)

$(80\sqrt{3})^2 = 19200$ ∵ $19200 > 12800$

$(80)^2 = 6400$ ∴ △ منفرج

$(80)^2 = 6400$ ∵ △ أبحـ متساوي الساقين

$\overline{أء}$ متوسط

∴ $\overline{أء} \perp \overline{بحـ}$

∴ أء = $\sqrt{(80)^2 - (40\sqrt{3})^2} = 40$

∴ $\frac{ر}{40} = \frac{24}{80} = \frac{ش}{40\sqrt{3}}$

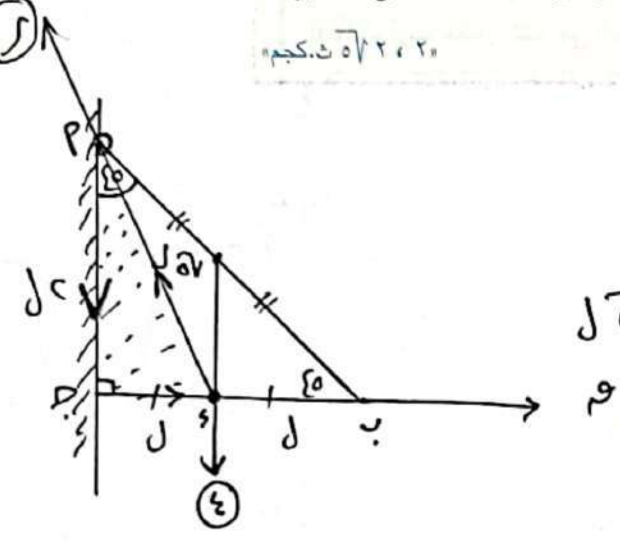
∴ $ر = \frac{24 \times 40}{80} = 12$ ثقل كجم

$ش = \frac{24 \times 40\sqrt{3}}{80} = 12\sqrt{3}$ ثقل كجم

٥

قضيب منتظم $\overline{أب}$ يتصل طرفه أ بمفصل مثبت فى حائط رأسى. أثرت فى الطرف ب قوة أفقية فاتزن القضيب عندما كان يميل على الحائط بزاوية قياسها ٤٥° فإذا كان وزن القضيب ٤ ث.كجم ويؤثر فى منتصفه أوجد مقدار القوة ورد فعل المفصل على القضيب.

«٢ ، ٢√٥ ث.كجم»



م (∠ أ ب ح) = ١٨٠ − (٩٠ + ٤٥) = ٤٥

∴ ح ب = ح أ = ٢ل

∴ أ ء = $\sqrt{(ل)^2 + (٢ل)^2}$ = $\sqrt{٥ل^2}$ = $\sqrt{٥}$ ل

∴ $\frac{ر}{\sqrt{٥}\,ل} = \frac{٤}{٢ل} = \frac{ق}{ل}$

∴ ر = $\frac{٤ \times \sqrt{٥}\,ل}{٢ل}$ = ٢$\sqrt{٥}$ ، ق = $\frac{٤ \times ل}{٢ل}$ = ٢

الواجب :

١

كرة ملساء طول نصف قطرها ٣٠ سم ووزنها ٢٠٠ ثقل جرام تستند على حائط رأسى أملس ومعلقة بخيط طوله ٢٠ سم مثبت أحد طرفيه على سطح الكرة ومثبت طرفه الآخر فى نقطة من الحائط تقع رأسيًا فوق نقطة تماس الكرة بالحائط.
أوجد مقدار الشد فى الخيط ورد فعل الحائط فى وضع الاتزان. «٢٥٠ ، ١٥٠ ثقل جم»

٢

كرة ملساء وزنها ١٥ نيوتن تستند على حائط أملس ومعلقة بخيط مثبت أحد طرفيه فى نقطة على سطحها وطرفه الآخر مربوط فى الحائط فى نقطة أعلى نقطة تماس الكرة تمامًا. فإذا كان طول الخيط يساوى طول نصف قطر الكرة.
أوجد الضغط على الحائط والشد فى الخيط فى وضع الاتزان. «٥√٣ ، ١٠√٣ نيوتن»

٣

علق قضيب منتظم طوله ١٣٠ سم ووزنه ٢٦ نيوتن من طرفيه تعليقًا مطلقًا فى خيطين مربوطين فى نقطة واحدة وكان طول أحدهما ٥٠ سم وطول الآخر ١٢٠ سم. ما هو الوضع الذى يكون فيه القضيب متزنًا ؟ وما هو مقدار الشد فى كل من الخيطين ؟ «٢٤ ، ١٠ نيوتن»

٤

$\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٦٠ سم ووزنه ٤٠ نيوتن متصل بمفصل فى حائط رأسى عند أ ، حفظ القضيب فى وضع أفقى بواسطة خيط خفيف يتصل بطرف القضيب عند ب ، وبنقطة ح على الحائط تعلو أ رأسيًا بمسافة ٦٠ سم. أوجد كلاً من الشد فى الخيط ورد فعل المفصل عند أ «٢٠√٢ ، ٢٠√٢ نيوتن»

(٥) كرة منتظمة ترتكز على قضيبين متوازيين يقعان فى مستوى أفقى واحد البعد بينهما يساوى طول نصف قطر الكرة. أوجد الضغط على كل من القضيبين إذا كان وزن الكرة يساوى ٦٠ نيوتن فى وضع الاتزان. «$٢٠\sqrt{٣}$ ، $٢٠\sqrt{٣}$ نيوتن»

(٦) قضيب منتظم طوله ٨٠ سم ووزنه ١٢ نيوتن علق من طرفيه بحبلين ثبت طرفاهما فى مسمار فى السقف فإذا كان الحبلان متعامدين وطول أحدهما ٤٨ سم
فما مقدار الشد فى كل من الحبلين عندما يكون القضيب معلقًا تعليقًا مطلقًا وفى حالة توازن ؟
«٧,٢ ، ٩,٦ نيوتن»

(٧) $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٢ ل سم ووزنه ٨ ثقل كجم يؤثر فى منتصفه ويتصل طرفه أ بمفصل مثبت فى حائط رأسى وطرفه ب مربوط فى إحدى نهايتى خيط خفيف والنهاية الأخرى للخيط مثبتة فى نقطة حـ على الحائط وتقع رأسيًا أعلى أ
فإذا كان أب = أحـ = ب حـ فى وضع الاتزان.
فأوجد مقدار الشد فى الخيط ورد فعل المفصل عند أ «٤ ، $٤\sqrt{٣}$ ثقل كجم»

(٨) $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٦٠ سم ووزنه (و) ثقل كجم. ثبت طرفه أ فى مفصل مثبت فى حائط رأسى والطرف ب مربوط بخيط طوله ٨٠ سم مثبت نهايته فى نقطة على الحائط رأسيًا فوق أ وعلى بُعد ١٠٠ سم منها فاتزن القضيب. أوجد الشد فى الخيط ، رد فعل المفصل وكذلك قياس زاوية ميل رد فعل المفصل على القضيب. «$\frac{٢}{٥}$ و ، $\frac{\sqrt{١٣}}{٥}$ و ثقل كجم ، $٣٣^\circ\ ٤١'$»

(٩) قضيب منتظم $\overline{أب}$ طوله ٩٠ سم ووزنه (و) ثقل كجم. ثبت طرفه (أ) فى حائط رأسى بواسطة مفصل وحفظ القضيب فى حالة توازن وهو فى وضع أفقى بواسطة خيط طوله ٥٠ سم ربط أحد طرفيه بنقطة (حـ) على القضيب تبعد عن أ بمقدار ٣٠ سم وثبت الطرف الثانى للخيط فى نقطة (ء) على الحائط تقع رأسيًا فوق أ
احسب الشد فى الخيط ورد فعل المفصل على القضيب. «$\frac{١٥}{٨}$ و ، $\frac{\sqrt{٩٧}}{٨}$ و ثقل كجم»

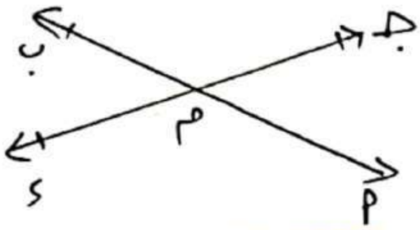
(١٠) $\overline{أب}$ سلم منتظم وزنه ٣٦ ثقل كجم يرتكز بأحد طرفيه (أ) على حائط رأسى أملس وبطرفه الآخر (ب) على أرض أفقية خشنة فإذا كان السلم فى وضع التوازن عندما يكون طرفه (أ) على بُعد ٣ أمتار من الأرض وطرفه (ب) على بُعد ٢,٥ متر من الحائط.
أوجد رد فعل كل من الأرض والحائط على السلم. «١٥ ، ٣٩ ثقل كجم»

(١١) $\overline{أب}$ قضيب غير منتظم طوله ٦٠ سم ووزنه ١٦ ثقل كجم يؤثر عند نقطة ء من القضيب حيث أء = ٢٠ سم ثبت القضيب فى مفصل عند أ والمفصل مثبت فى حائط رأسى وربط الطرف ب للقضيب بخيط خفيف مثبت نهايته فى نقطة حـ على الحائط تقع رأسيًا فوق أ وعلى بُعد ٨٠ سم من أ فاتزن القضيب بحيث كان عموديًا على الحائط.
أوجد الشد فى الخيط ورد فعل المفصل. «$٦\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٤\sqrt{٧٣}}{٣}$ ثقل كجم»

الهندسة والقياس

المستقيمات والمستويات فى الفراغ

① الخط المستقيم :- هو مجموعة غير منتهية من النقط ويتحدد تحديداً تاماً إذا علم أى نقطتين مختلفتين عليه



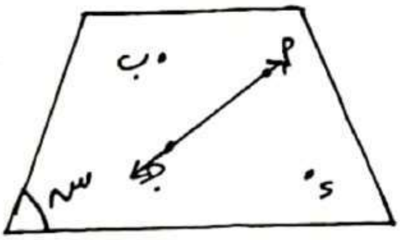
النقطتان أ ، ب يمر بهم مستقيم واحد فقط

النقطتان جـ ، د يمر بهم مستقيم واحد فقط

أى أن المستقيم يتعين بنقطتين مختلفتين عليه .

ملحوظة : $\overline{أب} \subset \overrightarrow{أب} \subset \overleftrightarrow{أب}$

② المستوى :- هو مجموعة غير منتهية من النقط تمثل سطحاً لا حدود له بحيث إن المستقيم المار بأى نقطتين عليه يقع بأكمله فى ذلك السطح .



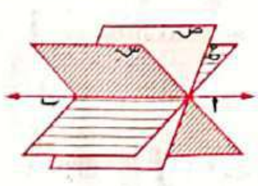
ويرمز للمستوى بالحروف الكبيرة س أو ص

أى أن المستوى يتعين بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة

٣ الفــــراغ (الفضاء)

هو مجموعة غير منتهية من النقط وهو الذى يحتوى جميع المستقيمات والمستويات والمجسمات محل الدراسة.
فالمجسمات مثل الكرة والأسطوانة والمكعب ، ... هى مجموعات غير منتهية من النقط ولكنها ليست محتواة فى مستوى واحد ولكن محتواة فى الفراغ الكبير المحيط بنا وسطوح هذه المجسمات تتكون من عدة أجزاء مستوية كما فى المكعب أو غير مستوية كما فى الكرة.

ملاحظات



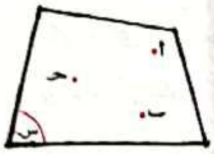
- أى نقطة فى الفراغ يمر بها عدد لا نهائى من المستقيمات.
- أى نقطة فى الفراغ يمر بها عدد لا نهائى من المستويات.
- أى نقطتين فى الفراغ يمر بها مستقيم واحد فقط.
- أى نقطتين فى الفراغ يمر بهما عدد لا نهائى من المستويات.

مرحة ⟸

تعيين المستوى فى الفراغ

يتحدد المستوى تحديدًا تامًا فى الفراغ بإحدى الحالات الآتية :

١ ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة



ففى الشكل المقابل :

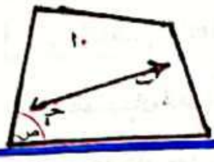
النقط أ ، ب ، حـ ليست على استقامة واحدة

لذلك يتعين المستوى س أو أ ب حـ

ومن ذلك يمكن استنتاج أن :

أى ثلاثة نقط ليست على استقامة واحدة فى الفراغ يمر بها مستوى واحد فقط.

٢ مستقيم ونقطة لا تنتمى إليه

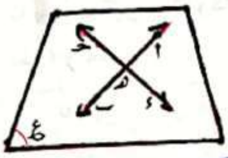


فى الشكل المقابل :

$أ \notin \overleftrightarrow{ب حـ}$ ولذلك النقطة أ

والمستقيم $\overleftrightarrow{ب حـ}$ يعينان المستوى ص أو أ ب حـ

٣ مستقيمان متقاطعان

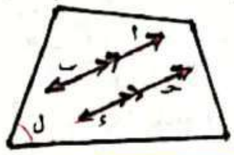


فى الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{أ ب} \cap \overleftrightarrow{حـ ء} = \{هـ\}$

لذلك $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{حـ ء}$ يعينان المستوى ع

٤ مستقيمان متوازيان غير منطبقين



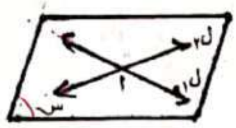
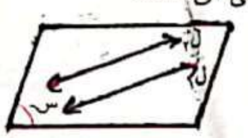
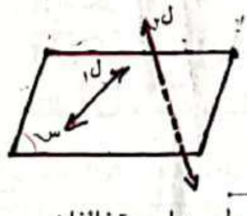
فى الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{أ ب} // \overleftrightarrow{حـ ء}$ ، $\overleftrightarrow{أ ب} \cap \overleftrightarrow{حـ ء} = \varnothing$

لذلك $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{حـ ء}$ يعينان المستوى ل

الأوضاع النسبية للمستقيمات والمستويات فى الفراغ

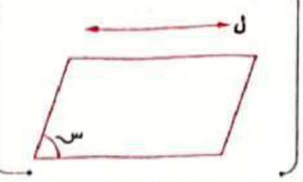
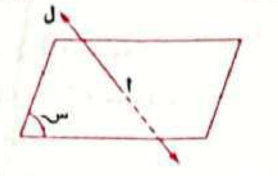
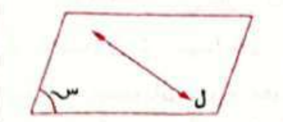
١ الأوضاع النسبية لمستقيمين مختلفين فى الفراغ

المستقيمان المتقاطعان	المستقيمان المتوازيان	المستقيمان المتخالفان
هما مستقيمان يقعان فى نفس المستوى ويشتركان فى نقطة واحدة.	هما مستقيمان يقعان فى نفس المستوى ولا يشتركان فى أى نقطة.	هما مستقيمان لا يمكن أن يحتويهما مستوى واحد.
		
• $ل_1$ ، $ل_2$ متقاطعان	• $ل_1 // ل_2$	• $ل_1$ ، $ل_2$ متخالفان
• $ل_1 \cap ل_2 = \{أ\}$	• $ل_1 \cap ل_2 = \varnothing$	• $ل_1 \cap ل_2 = \varnothing$
• يجمعهما مستو واحد.	• يجمعهما مستو واحد.	• لا يجمعهما مستو واحد.

لاحظ أن

المستقيمان المتخالفان غير متوازيين وغير متقاطعين لأنه لا يجمعهما مستوى واحد.

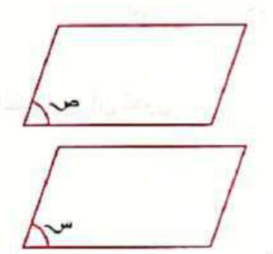
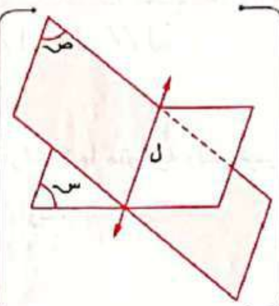
٢ الأوضاع النسبية لمستقيم ومستوٍ فى الفراغ

المستقيم يوازى المستوى	المستقيم قاطع للمستوى	المستقيم محتوى فى المستوى
		
المستقيم ل // المستوى س أى : ل $\cap$ س = $\emptyset$	المستقيم ل يقطع المستوى س فى نقطة واحدة أى : ل $\cap$ س = {أ}	المستقيم ل يقع بأكمله فى المستوى س (ل $\subset$ س) أى : ل $\cap$ س = ل

لاحظ أنه

إذا اشترك مستقيم ومستوى فى أكثر من نقطة واحدة فإن المستقيم يقع بتمامه داخل المستوى.

٣ الأوضاع النسبية لمستويين فى الفراغ

المستويان المتوازيان	المستويان المتقاطعان	المستويان المنطبقان
		
المستوى س // المستوى ص أى : س $\cap$ ص = $\emptyset$	المستويان س ، ص متقاطعان فى خط مستقيم ل أى : س $\cap$ ص = ل	المستويان س ، ص يشتركان فى جميع النقط (منطبقان) أى : س $\cap$ ص = س = ص

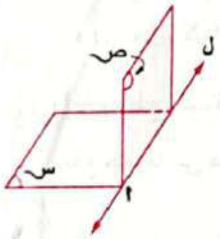
ملاحظات

١ إذا اشترك مستويان مختلفان فى نقطة فإنهما يشتركان فى مستقيم يمر بهذه النقطة.

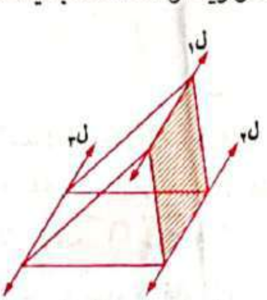
فى الشكل المقابل : المستويان س ، ص يشتركان فى نقطة أ

$\therefore$ المستويان س ، ص يشتركان فى المستقيم ل

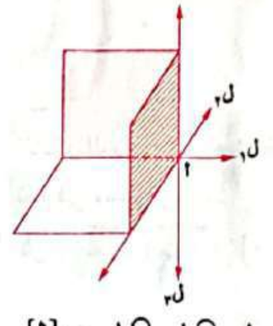
أى أن : س $\cap$ ص = ل حيث أ $\in$ ل



٢ إذا تقاطعت ثلاثة مستويات مثنى مثنى فإن مستقيمات تقاطعها إما أن تكون متوازية أو متقاطعة جميعًا فى نقطة واحدة.



$ل_1$ // $ل_2$ // $ل_3$



$ل_1 \cap ل_2 \cap ل_3$ = {أ}

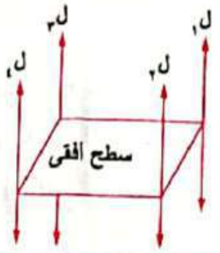
٣ المستقيمان الموازيان لثالث فى الفراغ متوازيان

أى أن : لأى ثلاثة مستقيمات $ل_١$ ، $ل_٢$ ، $ل_٣$ فى الفراغ

إذا كان : $ل_١ // ل_٣$ ، $ل_٢ // ل_٣$

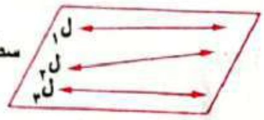
فإن : $ل_١ // ل_٢$

٤ المستقيمات الرأسية فى الفراغ كلها متوازية ولكن ليس بالضرورة أن تكون المستقيمات الأفقية كلها متوازية.



ل١، ل٢، ل٣، ل٤
كلها متوازية

سطح أفقى



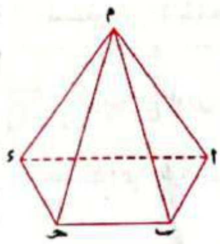
أمثلة :-

مثال ١

فى الشكل المقابل :

إذا كانت م $\notin$ المستوى أ ب جـ د

فاذكر ما يأتى :



١ أربع مستقيمات تمر بالنقطة أ

٢ ثلاث مستويات تمر بالنقطة أ

٣ المستقيمات التى تمر بالنقطتين أ ، ب معًا.

٤ مستويين كل منهما يمر بالنقطتين أ ، ب معًا.

٥ أربع مستويات تمر بالنقطة م

٦ عدد المستويات التى تحدد سطح المجسم فى الشكل.

الحـــل

١ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أجـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أد}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أم}}$

٢ أ ب جـ د ، أ ب م ، أ د م

٣ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

٤ أ ب جـ د ، أ ب م

٥ م أ ب ، م ب جـ ، م جـ د ، م د أ

٦ خمسة مستويات.

ملاحظتان

١ الأشكال الهندسية مثل المثلث والمربع والدائرة و ... هى مجموعات غير منتهية من النقط ومثل هذه الأشكال تسمى أشكالًا هندسية مستوية لأن كلًا منها مجموعة جزئية من مستواها.

٢ حيث إن المستوى ممتد من جميع جهاته بلا حدود لذلك سنكتفى عند تمثيله بتمثيل جزء منه بشكل هندسى مستوى مثل المربع أو الدائرة أو متوازى الأضلاع .. وهكذا

تمارين : ①

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① جميع الحالات الآتية تعين مستوى ماعدا ....

(أ) مستقيم ونقطة لا تنتمى إليه. (ب) مستقيمين متوازيين وغير منطبقين.

(جـ) مستقيمين متقاطعين. (د) مستقيمين متخالفين.

② عدد المستقيمات التى تمر بنقطة معلومة هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) عدد لا نهائى.

③ عدد المستقيمات التى تمر بنقطتين معلومتين هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) عدد لا نهائى.

④ عدد المستويات التى تمر بنقطتين معلومتين هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) عدد لا نهائى.

⑤ عدد المستويات التى تمر بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) عدد لا نهائى.

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

⑥ إذا كان المستقيم ل // المستوى س ، أ $\in$ س فإن : ل $\cap$ س = ...

(أ) $\emptyset$ (ب) ل (جـ) س (د) {أ}

⑦ إذا كان المستقيم ل $\subset$ المستوى س ، أ $\in$ س فإن : ل $\cap$ س = ...

(أ) $\emptyset$ (ب) ل (جـ) س (د) {أ}

⑧ إذا كان المستقيمان ل$_{1}$ ، ل$_{2}$ متخالفين فإن : ل$_{1}$ $\cap$ ل$_{2}$ = ...

(أ) $\emptyset$ (ب) ل$_{1}$

(جـ) ل$_{2}$ (د) المستوى الذى يجمع ل$_{1}$ ، ل$_{2}$

⑨ أى الجمل الآتية غير صحيحة ؟

(أ) أى نقطتين فى الفراغ يمر بهما مستوى واحد فقط.

(ب) أى ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة فى الفراغ تعين مستوى.

(جـ) رؤوس المثلث تعين مستوى.

(د) كل مستقيمين متقاطعين يحتويهما مستوى واحد فقط.

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

⑩ أى الجمل الآتية غير صحيحة ؟

(أ) أى مستقيمين مختلفين ومتوازيين يعينان مستويًا.

(ب) كل مستقيمين مختلفين متقاطعين يشتركان فى نقطة واحدة.

(جـ) المستقيمان المتخالفان لا يجمعهما مستوى واحد.

(د) أى ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة يمر بها مستوى واحد على الأقل.

⑪ أى الجمل الآتية غير صحيحة ؟ حيث ل$_{1}$ ، ل$_{2}$ مستقيمان ، س ، ص مستويان

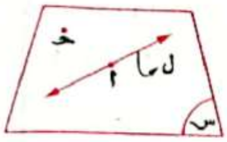
(أ) إذا كان : ل$_{1}$ $\cap$ ل$_{2}$ = $\emptyset$ فإن : ل$_{1}$ // ل$_{2}$ أو ل$_{1}$ ، ل$_{2}$ متخالفان.

(ب) إذا كان : ل$_{1}$ $\cap$ س = $\emptyset$ فإن : ل$_{1}$ // س

(جـ) إذا كان : ل$_{2}$ $\cap$ س = ل$_{2}$ فإن : ل$_{2}$ $\subset$ س

(د) إذا كان : ل$_{2}$ $\subset$ ص فإن : ل$_{2}$ $\cap$ ص = $\emptyset$

١٢ باستخدام الشكل المقابل :



أى الجمل الآتية غير صحيحة ؟

(أ) ل $\subset$ س　　　(ب) أ $\in$ ل ، أ $\notin$ س

(جـ) حـ $\in$ س ، حـ $\notin$ ل　　　(د) $\overline{\text{أحـ}}$ $\cap$ ل = {أ}

١٣ ينطبق المستويان إذا اشتركا فى ....

(أ) نقطة واحدة.　　　(ب) نقطتين.

(جـ) ثلاث نقاط على استقامة واحدة.　　　(د) ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة.

١٤ المستقيمات الرأسية المختلفة فى الفراغ تكون ....

(أ) متوازية.　　　(ب) متخالفة.

(جـ) يجمعها مستو واحد.　　　(د) متقاطعة.

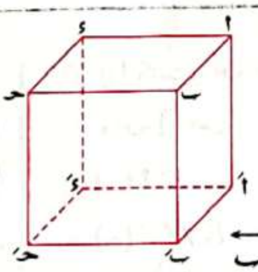
١٥ إذا اشترك المستقيم والمستوى فى نقطتين فإن المستقيم ....

(أ) يوازى المستوى.　　　(ب) يقطع المستوى فى نقطة وحيدة.

(جـ) يقع بأكمله داخل المستوى.　　　(د) يقطع المستوى فى نقطتين فقط.

٢

فى الشكل الموضح الذى يمثل حجرة الدراسة أوجد :



١ المستقيمات التى تحمل أحرف وكل منها يتقاطع مع $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

٢ المستقيمات التى تحمل أحرف وتوازى $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

٣ المستقيمات التى تحمل أحرف وكل منها يكون متخالفًا مع $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

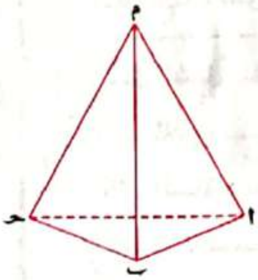
اذكر عدد المستويات التى تمر بكل من :

١ نقطة واحدة معلومة.　　　٢ نقطتين مختلفتين.

٣ ثلاث نقط على استقامة واحدة.　　　٤ ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة.

٣

تأمل الشكل المقابل ، ثم أكمل ما يأتى :



١ المستوى م أ ب $\cap$ المستوى م ب حـ = ...

٢ المستوى م ب حـ $\cap$ المستوى أ ب حـ = ...

٣ $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$ $\cap$ المستوى أ ب حـ = ...

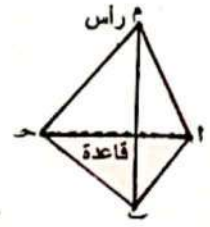
٤ المستوى م أ ب $\cap$ المستوى م ب حـ

$\cap$ المستوى م أ حـ = ...

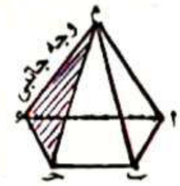
الهرم

تعريف الهرم

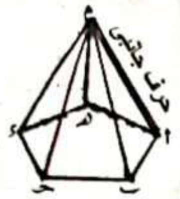
هو مجسم له قاعدة واحدة على شكل مضلع وجميع أوجهه الأخرى مثلثات تشترك فى رأس واحدة ويسمى الهرم ثلاثيًا أو رباعيًا أو خماسيًا أو .... وفقًا لعدد أضلاع قاعدته.



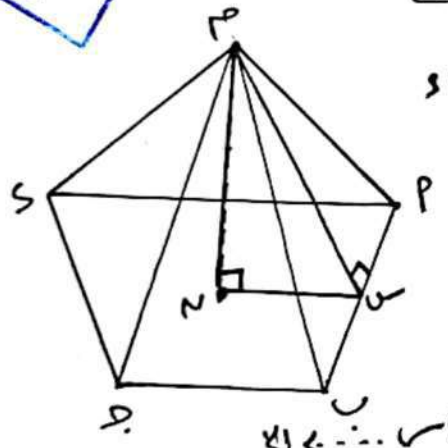
هرم ثلاثي قاعدته على شكل مثلث



هرم رباعي قاعدته على شكل مضلع رباعي



هرم خماسي قاعدته على شكل مضلع خماسي



① م ا ب جـ د هرم رباعي أوجهه الجانبية سطوح مثلثات م ا ب ، م ب جـ ، م جـ د ، م ا د وقاعدته سطح المضلع ا ب جـ د

② الأوجه الجانبية للهرم

هي دائماً سطوح مثلثات بينما القاعدة قد تكون سطح مثلث أو مضلع رباعي أو خماسي ... الخ

③ رأس الهرم :- هي النقطة المشتركة بين جميع أوجهه كما في الشكل (م)

④ الحرف الجانبي للهرم :- هو القطعة المستقيمة الواصلة بين رأس الهرم وأي رأس من رؤوس قاعدته مثل ($\overline{م ا}$ ، $\overline{م ب}$ ، $\overline{م جـ}$ ، $\overline{م د}$)

⑤ ارتفاع الهرم :- هو طول العمود الساقط من رأسه على مركزه الهندسي ($\overline{م ن}$)

⑥ الارتفاع الجانبي للهرم :- طول العمود الساقط من رأسه على ضلع من أضلاع قاعدته ($\overline{م س}$)

خلي بالك :- $\overline{م س} \perp \overline{ا ب}$ ، $\overline{ن س} \perp \overline{م ن}$

ملاحظات هامة جداً

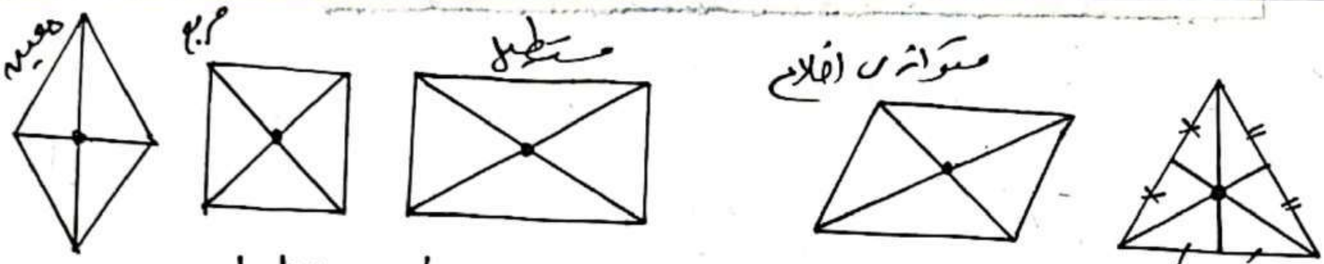
① • المستقيم العمودى على مستوى يكون عموديًا على أى مستقيم فى هذا المستوى ومنها فإن المستقيم العمودى على قاعدة الهرم يكون عموديًا على أى مستقيم فيها.

② • المضلع المنتظم هو مضلع أضلاعه متساوية فى الطول وزواياه متساوية فى القياس.

③ • المركز الهندسى لمضلع منتظم هو مركز الدائرة الداخلة أو الخارجة له.

④ • المركز الهندسى لمتوازى الأضلاع وحالاته الخاصة هو نقطة تقاطع القطرين.

⑤ • المركز الهندسى للمثلث هو نقطة تقاطع متوسطاته.



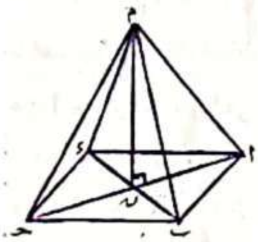
دي أمثلة عشان تعرف المركز الهندسي فين بالظبط

حالات خاصة من الهرم

١ الهرم القائم

يكون الهرم قائمًا إذا كان موقع العمود المرسوم من رأس الهرم على قاعدته يمر بمركزها الهندسى.

فمثلًا : فى الهرم م أ ب جـ د الموضح بالشكل :



إذا كانت ن هى المركز الهندسى للقاعدة أ ب جـ د

وكان : $\overline{\text{م ن}}$ $\perp$ مستوى القاعدة أ ب جـ د

فإن : الهرم م أ ب جـ د يسمى هرمًا قائمًا.

٢ الهرم المنتظم

هو الهرم الذى قاعدته مضلع منتظم مركزه هو موقع العمود المرسوم من رأس الهرم عليها.

أى أنه هرم قائم قاعدته مضلع منتظم.

خواص الهرم المنتظم :-

① أحرف الجانبية متساوية الطول

② ارتفاعات الجانبية متساوية الطول

③ أوجه الجانبية سطوح مثلثات متساوية الساقين

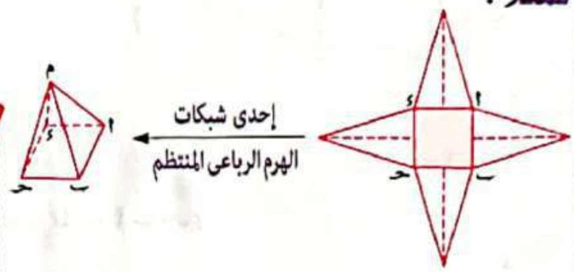
ملاحظات هامة :-

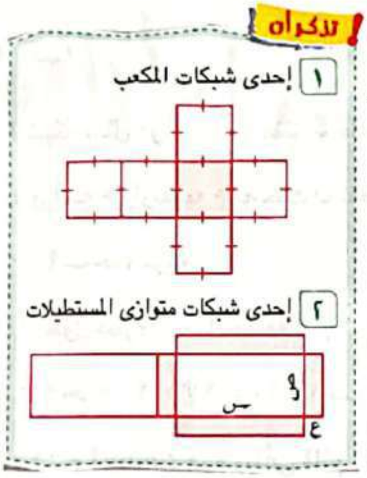
- كل هرم منتظم هو هرم قائم ولكن ليس كل هرم قائم يكون هرمًا منتظمًا.
- ليس بالضرورة أن تكون الأحرف الجانبية للهرم القائم متساوية الطول.
- ليس بالضرورة أن تكون الارتفاعات الجانبية للهرم القائم متساوية الطول.
- يسمى الهرم الثلاثى المنتظم هرمًا ثلاثيًا منتظم الوجوه إذا كانت جميع أوجهه مثلثات متساوية الأضلاع ويكون أى منها قاعدة له.

شبكة الهرم

تستخدم شبكة المجسمات فى تصنيع المجسم وذلك بتخطيط شكل المجسم على سطح مستوى ثم طى هذا السطح لتكوين المجسم المطلوب.

فمثلًا :





ونلاحظ من شبكة الهرم الرباعى المنتظم أن

١ عدد الأوجه = ٥ أوجه منهم أربعة جانبية ووجه واحد للقاعدة.

٢ عدد الأحرف = ٨ منهم ٤ أحرف جانبية.

٣ عدد الرؤوس = ٥ ومنهم رأس واحدة م تسمى رأس الهرم.

معلومة إثرائية

علاقة أويلر : لأى مجسم قاعدته منطقة مضلعة يكون :

(عدد الأوجه + عدد الرؤوس = عدد الأحرف + ٢)

فمثلًا فى الهرم الخماسى :

عدد الأوجه = ٦ أوجه ، عدد الرؤوس = ٦ رؤوس

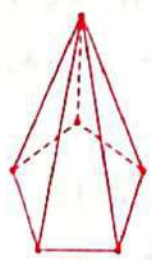
، عدد الأحرف = ١٠ أحرف

اى ان عدد الأوجه + عدد الرؤوس = ٦ + ٦ = ١٢

، عدد الأحرف + ٢ = ١٠ + ٢ = ١٢

∴ عدد الأوجه + عدد الرؤوس = عدد الأحرف + ٢

مهمة



القوانين

* المساحة الجانبية للهرم = مجموع مساحات الأوجه الجانبية.
* المساحة الجانبية للهرم المنتظم = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى.
* المساحة الكلية للهرم = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة.
* حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع.

ملاحظة هامة فى الهرم الثلاثى المنتظم الوجوه :-

١ فى الهرم الثلاثى المنتظم الوجوه يكون ضعف مربع طول حرفه = ٣ أمثال مربع ارتفاعه

أى أن $\boxed{٢ ل^{٢} = ٣ ع^{٢}}$ حيث ل = طول الحرف ، ع = الارتفاع

٢ المساحة الكلية للهرم الثلاثى المنتظم الوجوه = ل^{٢} $\sqrt{٣}$ حيث ل طول الحرف.

٣ حجم الهرم الثلاثى المنتظم الوجوه = $\frac{\sqrt{٢}}{١٢}$ ل^{٣} حيث ل طول حرفه.

مساحة المضلع المنتظم

$= \frac{١}{٤}$ ن س^{٢} ظتا $\frac{ط}{ن}$

$\boxed{ن}$ عدد الأضلاع

$\boxed{س}$ طول ضلع

م Δ أ ب جـ

$= \sqrt{ع (ع - أ ب)(ع - ب جـ)(ع - أ جـ)}$

ع = نصف المحيط

Scanned with CamScanner

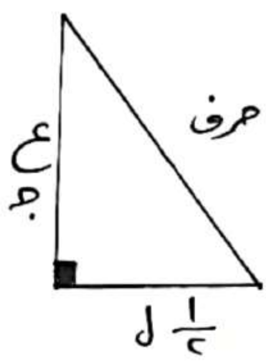
يلا بينا نشوف الزتونه

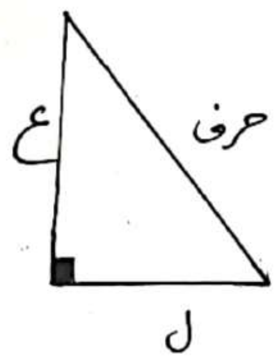
ركز معايا يا صاحب

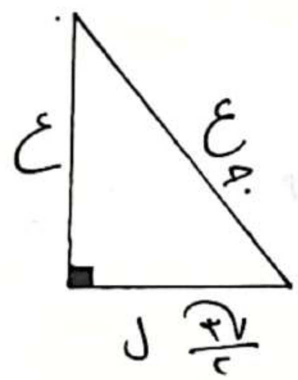
اختصارات الهرم السداسي المنتظم

① مساحة القاعدة = $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ل^2 حيث ل طول حرف الشكل السداسي

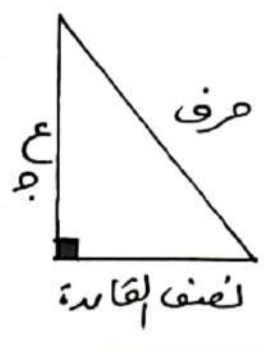
② محيط القاعدة = 6 ل يعني ل ← طول ضلع القاعدة في الهرم

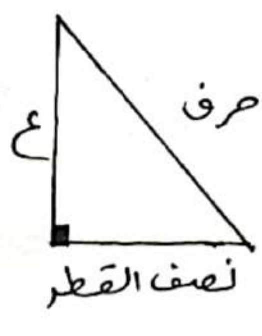


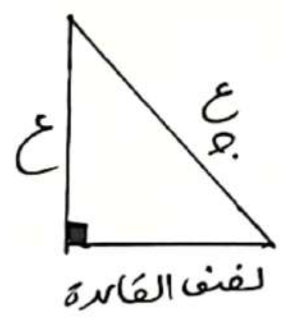




اختصارات الهرم الرباعي تاني (المنتظم)





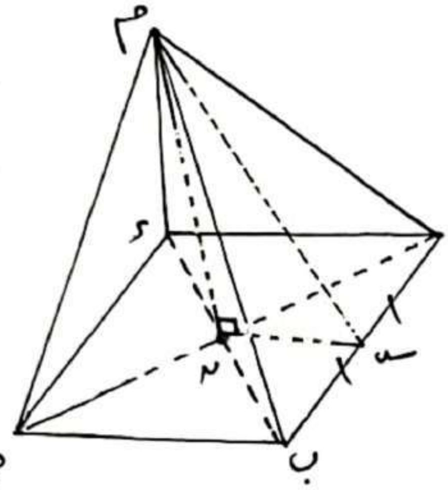


ع جـ ← ارتفاع جانبي

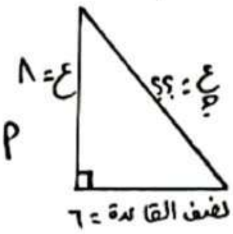
ع ← ارتفاع الهرم

مثال ①:

م أ ب جـ د هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ١٢ سم وارتفاعه ٨ سم أوجد ارتفاعه الجانبي



الحل



م س ← الارتفاع الجانبي

م ن ← ارتفاع الهرم

ن س = $\frac{1}{2}$ القاعدة

ن س = $\frac{1}{2}$ ب جـ ∴ ن س = ٦

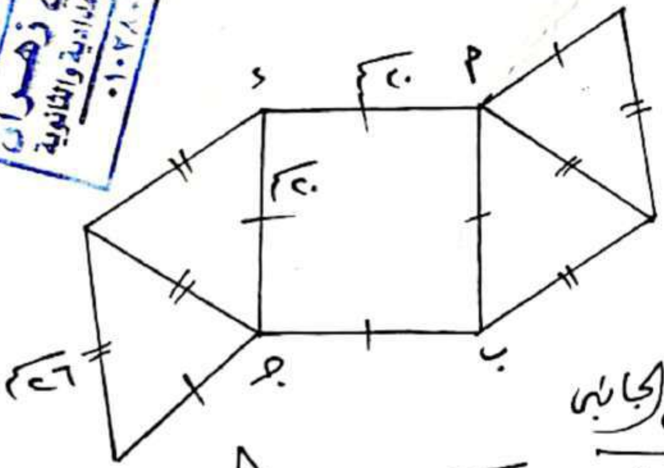
في Δ م س ن نطبق فيثاغورث

م س = $\sqrt{(\text{م ن})^2 + (\text{ن س})^2}$ = $\sqrt{64 + 36}$ = $\sqrt{100}$ = ١٠ سم

② الشبكة في الشكل المقابل تمثل شبكة لهرم رباعي منتظم

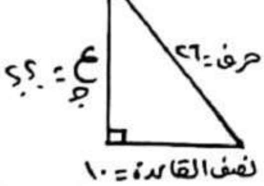
أوجد ① ارتفاع الهرم

② الارتفاع الجانبي للهرم



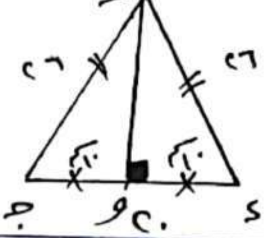
الحل

أي مثلث تقدر تجيب منه الارتفاع الجانبي



هـ و = $\sqrt{(26)^2 - (10)^2}$ = ٢٤ سم

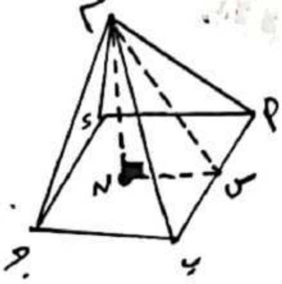
∴ الارتفاع الجانبي = ٢٤ سم

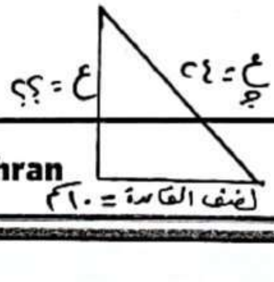


لإيجاد ارتفاع الهرم ⇐ م س = ٢٤ سم

ن س = $\frac{1}{2}$ ب جـ = ١٠ سم

∴ م ن = $\sqrt{(\text{م س})^2 - (\text{ن س})^2}$ = $\sqrt{(24)^2 - (10)^2}$ = $2\sqrt{119}$ سم



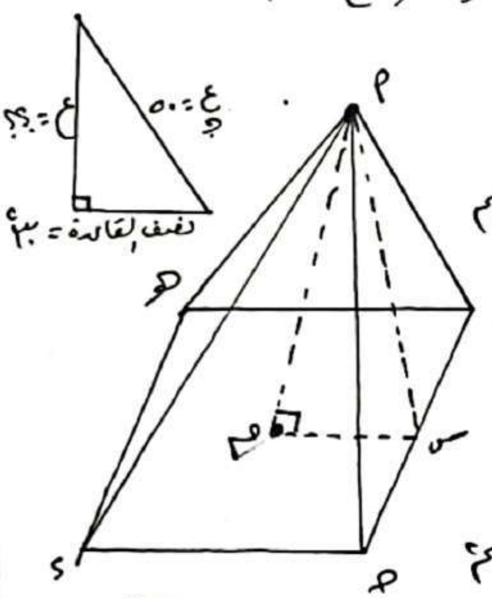


③ هرم رباعي منتظم طول قطر قاعدته $٦٠\sqrt{٢}$ سم وارتفاعه الجانبي ٥٠ سم أوجد ① ارتفاع الهرم ② المساحة الجانبية والكلية للهرم ③ حجمه

الحل

∵ الهرم رباعي منتظم ∴ القاعدة على شكل مربع ∴ طول قطره = طول ضلعه × $\sqrt{٢}$

∴ $٦٠\sqrt{٢}$ = طول ضلعه × $\sqrt{٢}$ (÷ $\sqrt{٢}$) ∴ طول الضلع = ٦٠ سم



س م = $\frac{١}{٢}$ جـ د = $\frac{٦٠}{٢}$ = ٣٠ سم

م س = ٥٠ سم

∴ م م = $\sqrt{(٥٠)^٢ - (٣٠)^٢}$ = ٤٠ سم

∴ الارتفاع = ٤٠ سم

المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي

محيط القاعدة = ٦٠ × ٤ = ٢٤٠ سم

∴ المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ × ٢٤٠ × ٥٠ = ٦٠٠٠ سم^٢

المساحة الكلية للهرم = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

∵ مساحة القاعدة = ٦٠ × ٦٠ = ٣٦٠٠

∴ المساحة الكلية = ٦٠٠٠ + ٣٦٠٠ = ٩٦٠٠ سم^٢

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ × ٣٦٠٠ × ٤٠ = ٤٨٠٠٠ سم^٣

من طلب العلا .... سهر الليالي

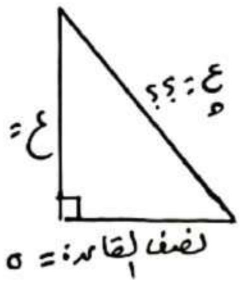
م/ لطفي

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

④ م أ ب جـ د هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته = ١٠ سم وارتفاعه ١٢ أوجد ارتفاعه الجانبي

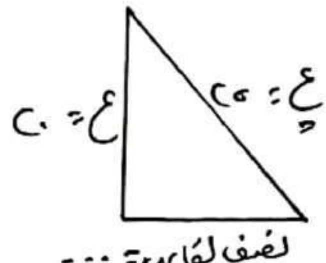
الحل

الارتفاع الجانبي = $\sqrt{(١٢)^٢ + (٥)^٢} = ١٣$ سم



⑤ م أ ب جـ د هرم رباعي منتظم ارتفاعه ٢٠ سم وارتفاعه الجانبي ٢٥ سم أوجد طول ضلع قاعدة الهرم

الحل



نصف القاعدة = $\sqrt{(٢٥)^٢ - (٢٠)^٢} = ١٥$ سم

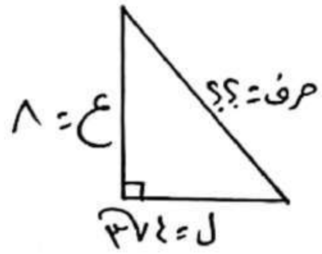
∴ القاعدة = ١٥ × ٢ = ٣٠ سم

⑥ هرم سداسي منتظم ارتفاعه ٨ سم وقاعدته سدس منتظم محيطه $٢٤\sqrt{٣}$ احسب طول حرفه وارتفاعه الجانبي

الحل

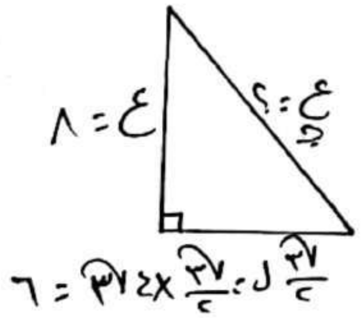
ل ← طول قاعدة الهرم = $\frac{٢٤\sqrt{٣}}{٦} = ٤\sqrt{٣}$

طول حرفه = $\sqrt{(٤\sqrt{٣})^٢ + (٨)^٢} = ٤\sqrt{٧}$ سم



يلا نجيب ارتفاعه الجانبي

ارتفاعه الجانبي = $\sqrt{(٨)^٢ + (٦)^٢} = ١٠$ سم



٧ هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ٢٠سم وارتفاعه $١٠\sqrt{٣}$

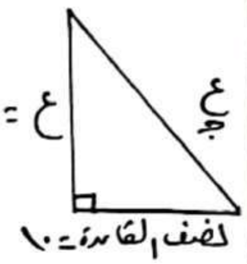
أوجد ١) المساحة الجانبية ٢) حجم الهرم

الحل

المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي

∴ محيط القاعدة = ٢٠ × ٤ = ٨٠ سم

يلا نجيب الارتفاع الجانبي



ل = $\sqrt{(١٠)^٢ + (١٠\sqrt{٣})^٢}$ = ٢٠ سم

∴ المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ × ٨٠ × ٢٠ = ٨٠٠ سم^٢

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

$\frac{١}{٣}$ (٢٠ × ٢٠) × $١٠\sqrt{٣}$ = $\frac{٤٠٠٠}{٣}\sqrt{٣}$ سم^٣

٨ احسب لأقرب رقم عشري واحد حجم هرم خماسي منتظم، طول ضلع قاعدته = ١٦ سم وارتفاعه ١٢سم

الحل

الحجم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

مساحة القاعدة = مساحة الشكل الخماسي = $\frac{١}{٤}$ ن س^٢ ظتا $\frac{π}{ن}$

= $\frac{١}{٤}$ × ٥ × ١٦^٢ × ظتا $\frac{١٨٠}{٥}$ = ٤٤٠,٤٤٢٢ ≈ ٤٤٠,٤٤ سم^٢

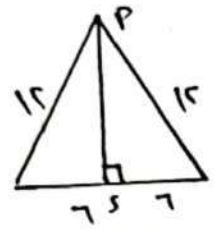
∴ الحجم = $\frac{١}{٣}$ × ٤٤٠,٤٤٢٢ × ١٢ = ١٧٦١,٨ سم^٣

(٩) م أ ب جـ هرم ثلاثي منتظم الوجوه طول حرفه ١٢ سم احسب ارتفاعه وارتفاعه الجانبي ؟؟

الحل

∵ الهرم منتظم الوجوه ∴ $٢ ل^٢ = ٣ ع^٢$

∴ $٢ \times ١٤٤ = ٣ ع^٢$ (÷٣) ∴ $ع^٢ = ٩٦$ ∴ $ع = ٤\sqrt{٦}$ سم

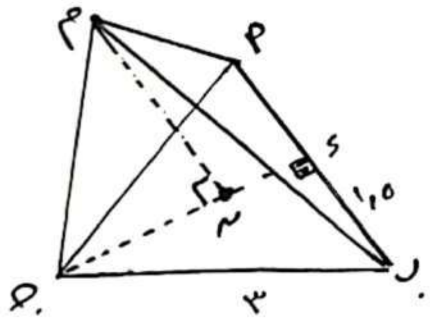


لإيجاد الارتفاع الجانبي خذ أي مثلث وطبق فيثاغورث

∴ $أء = \sqrt{(١٢)^٢ - (٦)^٢} = ٦\sqrt{٣}$

(١٠) م أ ب جـ هرم ثلاثي منتظم قاعدته أ ب جـ △ متساوي الأضلاع طول ضلعه ٣ سم فإذا كان طول حرفه الجانبي = $\sqrt{٧}$ سم أوجد ارتفاع الهرم

الحل



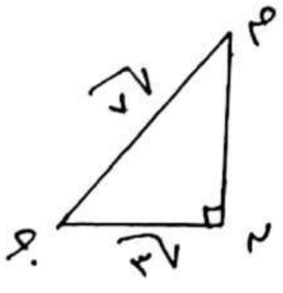
$جـء = \sqrt{(٣)^٢ - (١,٥)^٢} = \frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ سم

∵ ن نقطة تقاطع متوسطات المثلث

∴ ن تقسم $\overline{جـء}$ بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس

∴ $جـن = \frac{٢}{٣} جـء$ ، $ءن = \frac{١}{٣} جـء$

∴ $جـن = \frac{٢}{٣} \times \frac{٣\sqrt{٣}}{٢} = \sqrt{٣}$ سم



∴ $من = \sqrt{(\sqrt{٧})^٢ - (\sqrt{٣})^٢} = \sqrt{٤} = ٢$

∴ ارتفاع الهرم = ٢ سم

الواجب:- ① م أ ب جـ د هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته = ١٠ سم وارتفاعه = ١٢ سم أوجد ارتفاعه الجانبي

---

② م أ ب جـ د هرم رباعي منتظم قاعدته المربع أ ب جـ د فإذا كان ارتفاعه = ١٤ سم وطول حرفه الجانبي م أ = ٤√٥٢ سم ، احسب طول ضلع قاعدته

---

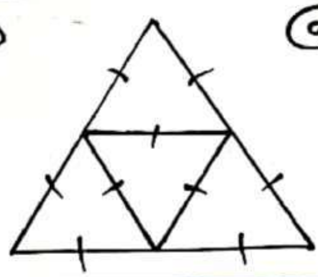
③ م أ ب جـ هرم ثلاثي منتظم قاعدته △ أ ب جـ المتساوي الأضلاع الذي طول ضلعه ١٢ سم فإذا كان ارتفاع الهرم يساوي ٦ سم أوجد طول حرفه الجانبي

---

④ هرم الجيزة الأكبر هو هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ٢٣٢ مترًا وارتفاعه الجانبي ١٨٦ متر أوجد ارتفاع الهرم

---

⑤ صف المجسم واحسب ارتفاعه



⑥ هرم ثلاثي منتظم ارتفاعه ١٢ سم طول ضلع قاعدته ١٨ سم أوجد حجم الهرم

---

⑦ م أ ب جـ هرم ثلاثي رأسه م يبعد ٤√٥ سم عن قاعدته أ ب جـ حيث أ ب = ٧ سم ، ب جـ = ٨ سم ، أ جـ = ٩ سم أوجد حجم الهرم

---

⑧ م أ ب جـ د هرم رباعي منتظم قاعدته أ ب جـ د حيث أ ب = ١٠ سم وارتفاع الهرم = ١٢ سم أوجد ① طول الارتفاع الجانبي ② المساحة الكلية ③ حجمه

---

⑨ هرم رباعي منتظم طول قطر قاعدته ٢٤√٢ وارتفاعه الجانبي ٢٠ سم أوجد مساحته الكلية وحجمه

---

⑩ م أ ب جـ د هرم رباعي قائم قاعدته أ ب جـ د مربع طول ضلعه ٨√٢ وطول حرفه الجانبي ٤√٦ أوجد ① المساحة الجانبية للهرم ② حجم الهرم

---

⑪ هرم ثلاثي منتظم الأوجه طول حرفه ١٢ سم أوجد ارتفاعه ثم أوجد حجم الهرم ومساحته

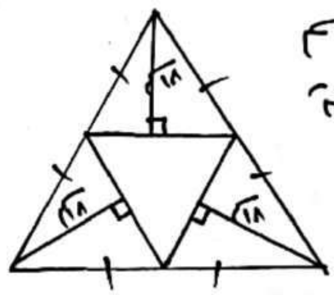
(١٢) هرم سداسي منتظم طول ضلع قاعدته ١٢ سم وارتفاعه الجانبي ١٠ سم
أوجد ① مساحته الجانبية ② مساحته الكلية

(١٣) هرم رباعي منتظم مساحة قاعدته ٧٠٠ سم² وارتفاعه الجانبي ٢٠ سم
أوجد حجمه.

(١٤) هرم رباعي منتظم حجمه ٤٠٠ سم³ وارتفاعه ١٢ سم احسب مساحته الجانبية

(١٥) هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ١٨ سم، حجمه ١٢٩٦ سم³
أوجد ارتفاعه الجانبي ومساحته الجانبية

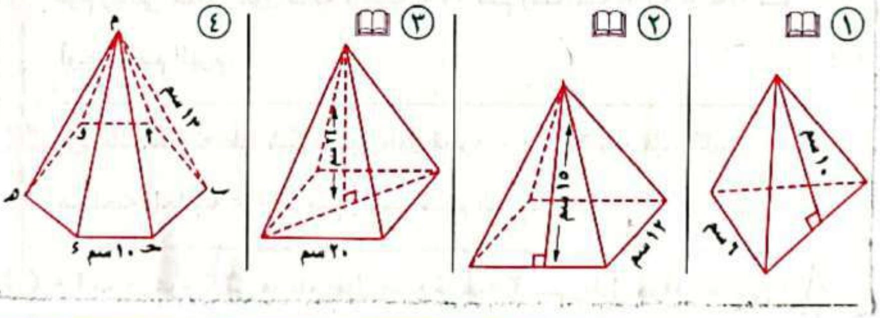
(١٦) صف المجسم وأوجد المساحة الكلية له



(١٧) هرم سداسي منتظم حجمه ٧٨√٣ سم³ وارتفاعه ٤ سم أوجد محيط قاعدته.

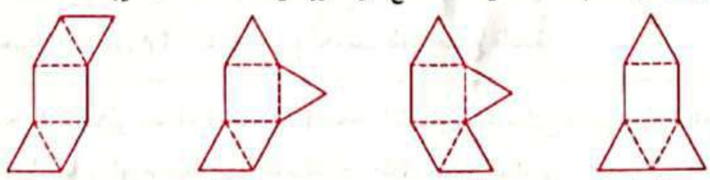
(١٨) أوجد المساحة الجانبية والمساحة الكلية لكل هرم منتظم حسب البيانات المعطاة :

① ② ③ ④



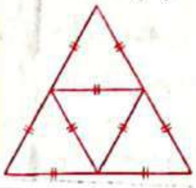
اختبر

① أى الشبكات التالية لا تصنع هرمًا رباعيًا منتظمًا عند طيها ؟



(أ) (ب) (جـ) (د)

② أى المجسمات يعبر عن الشبكة المقابلة ؟



(أ) هرم رباعى.

(ب) هرم رباعى منتظم.

(جـ) هرم ثلاثى منتظم الوجوه.

③ النسبة بين طول حرف الهرم الثلاثى المنتظم الوجوه : ارتفاعه = ...

(أ) $\sqrt{2} : \sqrt{3}$ (ب) $\sqrt{3} : 2$ (جـ) $\sqrt{6} : 2$ (د) $\sqrt{3} : 2$

④ إذا قطعنا هرمًا رباعيًا منتظمًا بمستوى يوازى قاعدته فإن القطع الحادث يكون ....

(أ) مثلثًا. (ب) مربعًا. (جـ) مستطيلاً. (د) دائرة.

⑤ هرم رباعى قائم قاعدته معين طولا قطريه ١٢ سم ، ٨ سم وارتفاعه ١٠ سم

فإن حجمه = ... $سم^٣$

(أ) ٤٠ (ب) ٨٠ (جـ) ١٦٠ (د) ٢٠٠

⑥ هرم منتظم حجمه ١٢ $سم^٣$ ومساحة قاعدته ٤ $سم^٢$ فإن ارتفاعه = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ٢

⑦ هرم رباعى منتظم حجمه ٦٤ $سم^٣$ وارتفاعه = ٦ سم فإن محيط القاعدة = ... سم

(أ) ٨ (ب) $٨\sqrt{٢}$ (جـ) ١٦ (د) $١٦\sqrt{٢}$

⑧ هرم رباعى منتظم مساحته الجانبية = ٣٠ $سم^٢$ ، ارتفاعه الجانبى = ٥ سم

فإن محيط قاعدته = ... سم

(أ) ٦ (ب) ١٢ (جـ) ٢٤ (د) ٣٦

⑨ هرم رباعى منتظم محيط قاعدته ٣٦ سم ، وارتفاعه ١٠ سم

فإن حجمه يساوى .... $سم^٣$

(أ) ٨١٠ (ب) ١٨٠ (جـ) ٣٦٠ (د) ٢٧٠

⑩ إذا كان مجموع أطوال أحرف هرم ثلاثى منتظم الوجوه يساوى ١٨ سم

فإن مساحته الكلية = ... $سم^٢$

(أ) $\frac{٢٧\sqrt{٢}}{٤}$ (ب) $\frac{٢٧\sqrt{٣}}{٤}$ (جـ) $٩\sqrt{٣}$ (د) $\frac{٢٧\sqrt{٣}}{٢}$

⑪ هرم رباعى قائم قاعدته على شكل معين طول ضلعه يساوي طول أحد قطرى المعين يساوى ٦ سم فإذا كان ارتفاع الهرم = ١٢ سم فإن حجم الهرم = ... $سم^٣$

(أ) $٧٢\sqrt{٣}$ (ب) $١٦\sqrt{٣}$ (جـ) ١٤٤ (د) ٧٢

⑫ هرم ثلاثى منتظم الوجوه طول حرفه ٦ سم يكون حجمه = ... $سم^٣$

(أ) $٢٧\sqrt{٣}$ (ب) $٣٦\sqrt{٣}$ (جـ) $٥٤\sqrt{٢}$ (د) $١٨\sqrt{٢}$

⑬ إذا كان الارتفاع الجانبى لهرم ثلاثى منتظم الوجوه يساوى $٥\sqrt{٣}$ سم

فإن مجموع مساحات أوجهه = ... $سم^٢$

(أ) $\frac{٥٠\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $٢٥\sqrt{٣}$ (جـ) $١٠٠\sqrt{٣}$ (د) $٥٠\sqrt{٣}$

⑭ أ ب حـ ء أَ بَ حَ ءَ مكعب طول حرفه = ٦ سم

فإن حجم الهرم بَ أ ب حـ = ... $سم^٣$

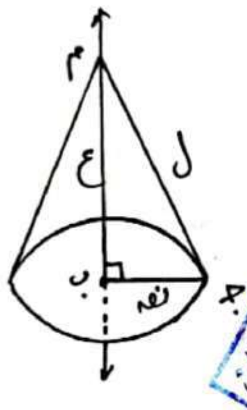
(أ) ٣٦ (ب) ٧٢ (جـ) $٣٦\sqrt{٣}$ (د) $١٨\sqrt{٣}$

المخروط

هو مجسم له قاعدة واحدة على شكل منحنى مغلق ورأس واحدة وتتكون سطحه الجانبي من جميع القطع المستقيمة المرسومة من رأسه الى منحنى قاعدته والتي يعرف كل منها براسم المخروط

المخروط الدائري القائم

هو الجسم الذي ينشأ من دوران مثلث قائم الزاوية دورة كاملة حول أحد ضلعي القائمة كمحور



م ← رأس المخروط

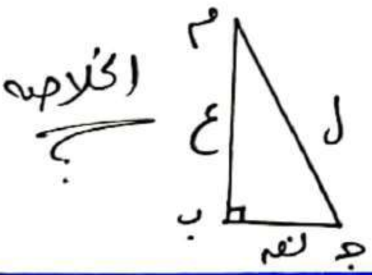
م جـ ← راسم المخروط

$\overleftrightarrow{\text{م ب}}$ ← محور المخروط

سطح الدائرة ب هي قاعدة المخروط

لاحظ ان $\overleftrightarrow{\text{م ب}} \perp$ مستوى الدائرة ب

∴ $\overline{\text{م ب}}$ هو ارتفاع المخروط

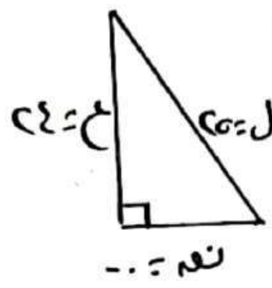


ملحوظة :. من الممكن ان ينشأ المخروط الدائري القائم من دوران مثلث متساوي الساقين حول محور تماثله نصف دورة كاملة

مثال بسيط: مخروط دائري قائم طول راسمه ٢٥ سم وارتفاعه ٢٤ سم، أوجد محيط ومساحة قاعدة المخروط ($\pi \simeq \frac{22}{7}$)

الحل

تعالى نستخدم مثلث الخلاصة

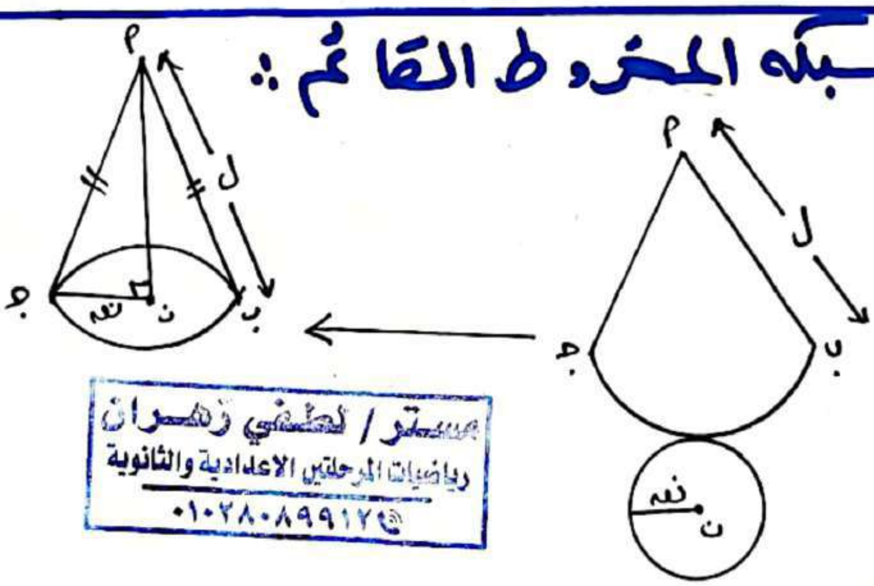


نق = $\sqrt{(25)^2 - (24)^2} = 7$ سم

∴ محيط القاعدة = ٢ π نق = $2 \times \frac{22}{7} \times 7 = 44$ سم

∴ مساحة القاعدة = π نق² = $\frac{22}{7} \times 49 = 154$ سم²

شبكة المخروط القائم:



ركز: ① أ ب = أ جـ = ل ← طول راسم المخروط

② القطاع الدائري أ ب جـ يمثل السطح الجانبي للمخروط

لاحظ: طول $\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$ = محيط الدائرة ن = ٢π نق

③ سطح الدائرة ن تمثل قاعدة المخروط

ركز: مساحة القطاع الدائري = $\frac{1}{2}$ × ل × نق أو $\frac{1}{2}$ × هـ × نق²

ولكن ل هنا التي هيا طول القوس يساوي القطاع ← ٢π نق لدائرة المخروط

ولكن نق هنا التي هيا طول الراسم للمخروط ← يعني نق = ل

∴ مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ × طول القوس × ل حيث ل طول الراسم

ملاحظات هامة

١ إذا كان : ل > ٢ نق تكون شبكة المخروط

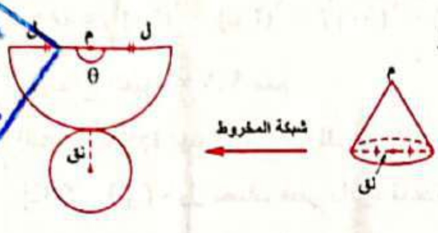
كما هو موضح بالشكل

وتكون ٠° < θ < ١٨٠°

٢ إذا كان : ل = ٢ نق تكون شبكة المخروط

كما هو موضح بالشكل

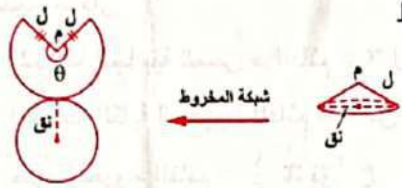
وتكون θ = ١٨٠°



٣ إذا كان : ل < ٢ نق تكون شبكة المخروط

كما هو موضح بالشكل

وتكون ١٨٠° < θ < ٣٦٠°



القوانين

المساحة الجانبية للمخروط = π ل نق	نق ← نصف قطر دائرة قاعدة المخروط
المساحة الكلية للمخروط = π نق (ل + نق)	ل ← طول الراسم
حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ π نق^2 ع	ع ← ارتفاع المخروط

ملحوظة خطيرة :

لو أعطاك قطاع دائري م أ ب مثلاً

(نق) في القطاع الدائري هي طول الراسم (ل) في المخروط

طول القوس $\overset{\frown}{أب}$ في القطاع الدائري هي محيط الدائرة ٢π نق في المخروط

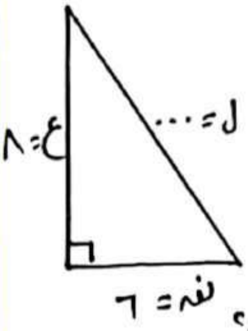
من الآخر:

نق (قطاع) = ل (مخروط)
ل (قطاع) = ٢π نق (مخروط)

مسائل:

① مخروط دائري قائم طول قطر قاعدته ١٢ سم وارتفاعه ٨ سم أوجد
Ⓐ مساحته الجانبية والكلية Ⓑ حجمه

الحل



ل = $\sqrt{(٦)^٢ + (٨)^٢}$ = ١٠ سم

طول الراسم = ١٠ سم

المساحة الجانبية = ط ل نق

= ط × ١٠ × ٦ = ٦٠ ط سم²

المساحة الكلية = ط نق (ل + نق)

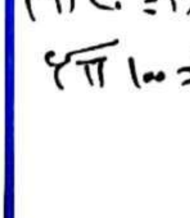
= ط × ٦ (١٠ + ٦) = ٩٦ ط سم²

حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ ط نق² ع

= $\frac{1}{3}$ × ط × ٦² × ٨ = ٩٦ ط سم³

② أوجد بدلالة ط محيط ومساحة قاعدة مخروط دائري قائم ارتفاعه ٢٤ سم وطول راسمه ٢٦ سم

الحل



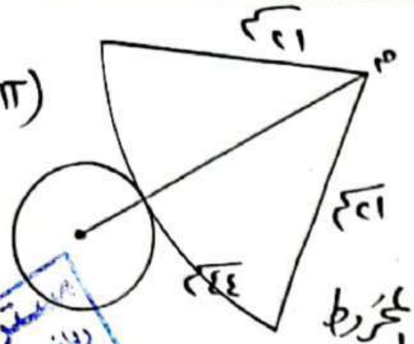
نق = $\sqrt{(٢٦)^٢ - (٢٤)^٢}$ = ١٠ سم

محيط القاعدة = ٢ ط نق = ٢ × ط × ١٠ = ٢٠ ط سم

مساحة القاعدة = ط نق² = ط × (١٠)² = ١٠٠ ط سم²

(ط = $\frac{٢٢}{٧}$)

③ من الشكل المقابل أوجد ارتفاع المخروط



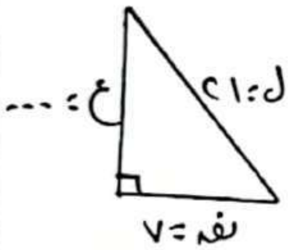
الحل

طول الراسم (ل) = ٢١ سم

محيط القاعدة = ٤٤

∵ ٢ ط نق = ٤٤ ∴ ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × نق = ٤٤

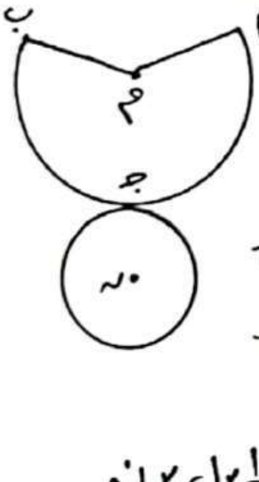
∴ $\frac{٤٤}{٧}$ نق = ٤٤ (× $\frac{٧}{٤٤}$) ∴ نق = ٧ سم



ع = $\sqrt{(٢١)^٢ - (٧)^٢}$

∴ ع = ١٤ $\sqrt{٢}$ سم

④ الشكل مثل مخروط قائم مكون من قطاع دائري مساحته ٢٠ ط سم² وطول قوسه أ ج ب = ٨ ط أوجد ارتفاع المخروط



الحل

مساحة القطاع الدائري = $\frac{1}{2}$ × ل × نق

وعملت تعديل للقانون وقولت

مساحة القطاع الدائري = $\frac{1}{2}$ × طول القوس × طول الراسم

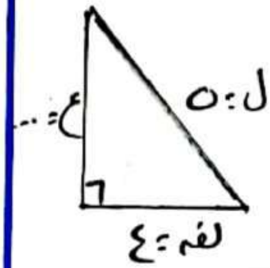
= $\frac{1}{2}$ × $\cancel{٨}$ ط × ل = ٢٠ $\cancel{ط}$

٤ ل = ٢٠ ∴ ل = ٥ سم

وقولنا كمان ان طول القوس = محيط القاعدة

$\therefore$ ٨ $\cancel{\pi}$ = ٢ $\cancel{\pi}$ نق

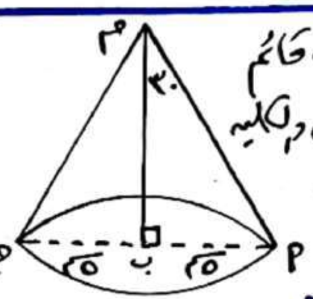
$\therefore$ نق = ٤ سم



ع = $\sqrt{(٥)^٢ - (٤)^٢}$

ع = ٣ سم

٥ مخروط دائري قائم احسب م جانبية والكلية



الحل

جا ٣٠ = $\frac{٥}{أم}$ $\therefore$ $\frac{١}{٢}$ = $\frac{٥}{أم}$

$\therefore$ أم = ١٠ سم $\therefore$ ل = ١٠ سم

$\therefore$ م ب = $\sqrt{(١٠)^٢ - (٥)^٢}$ = ٥$\sqrt{٣}$ سم

$\therefore$ ع = ٥$\sqrt{٣}$

$\therefore$ المساحة الجانبية = π ل نق = π × ١٠ × ٥

$\therefore$ المساحة الجانبية = ٥٠ π سم²

المساحة الكلية = π نق (ل + نق)

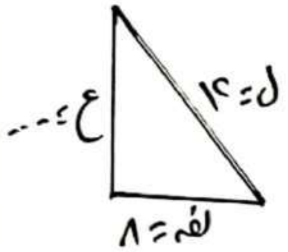
π × ٥ (١٠ + ٥) = ٧٥ π سم²

٦ مخروط دائري قائم طول نصف قطر دائرته ٨ سم ومساحته الجانبية ٩٦ π سم² أوجد حجمه لأقرب رقم عشري

الحل

المساحة الجانبية = $\cancel{\pi}$ ل نق = ٩٦ $\cancel{\pi}$

$\therefore$ ٨ ل = ٩٦ $\therefore$ ل = ١٢ سم



ع = $\sqrt{(١٢)^٢ - (٨)^٢}$

ع = ٤$\sqrt{٥}$

$\therefore$ الحجم = $\frac{١}{٣}$ π نق² ع

= $\frac{١}{٣}$ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٦٤ × ٤$\sqrt{٥}$ = ٥٩٩,٧ سم³

٧ أوجد طول نصف قطر قاعدة مخروط دائري مساحته الكلية ٦١٦ π سم² وطول راسمه ٣٠ سم

الحل

المساحة الكلية = $\cancel{\pi}$ نق (ل + نق) = ٦١٦ $\cancel{\pi}$

نق (٣٠ + نق) = ٦١٦

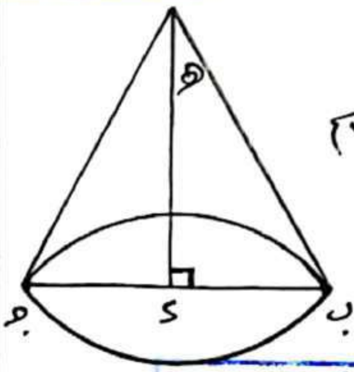
نق² + ٣٠ نق − ٦١٦ = ٠ التحليل بالآلة

$\boxed{نق = ١٤}$ نق = −٤٤ مرفوض

٨ جا هـ = $\frac{٣}{٥}$

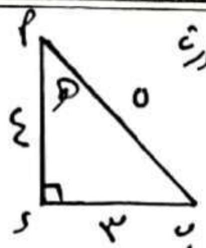
ارتفاع المخروط = ١٢ سم

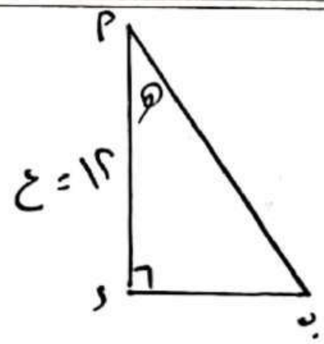
أوجد المساحة الكلية للمخروط



تشابه المثلثين ينتج: أد = ٤ فيثاغورث

عـ٨ = احسب الاطوال الحقيقية





$$\frac{٤}{١٢} = \frac{٣}{ب د} = \frac{٥}{أ ب}$$

$ب د = \frac{١٢ \times ٣}{٤} = ٩$ سم ، $أ ب = \frac{١٢ \times ٥}{٤} = ١٥$ سم

نق = ٩ سم   ل = ١٥ سم

المساحة الكلية = π نق (ل + نق) = $\pi \times ٩(١٥+٩) = ٢١٦ \pi$ سم^2

---

٩ قطاع دائري م أ ب طول نصف قطر دائرته = ١٨سم وقياس زاويته المركزية ٦٠° ، طوي ولصق نصفا قطره ليكونا أكبر مساحة جانبية لمخروط ثم أوجد حجم هذا المخروط

الحل

$\theta^{د} = ٦٠ \times \frac{\pi}{١٨٠} = \frac{\pi}{٣}$ مساحة القطاع = $\frac{1}{2} \times \theta \times$ نق^2

$= \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{٣} \times (١٨)^2 = ٥٤ \pi$ سم^2

$\because$ مساحة القطاع = $\frac{1}{2} \times$ ل $\times$ نق = ٥٤π

$\therefore \frac{1}{2} \times$ ل $\times ١٨ = ٥٤ \pi$ $\therefore ٩$ ل $= ٥٤ \pi$ $\therefore$ ل $= ٦ \pi$

يلا على المخروط هنلاقي ان نق(قطاع) = ل (مخروط)

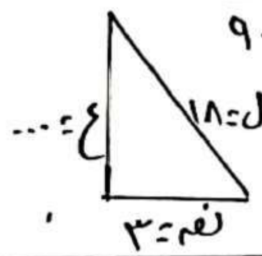
$\therefore$ ل = ١٨سم

هنلاقي برضه أن ل(قطاع) = ٢ π نق (مخروط)

$٦ \cancel{\pi} = ٢ \cancel{\pi}$ نق $\therefore$ نق = ٣سم

ع = $\sqrt{(١٨)^2 - ٩}$

ع = $٣\sqrt{٣٥}$ سم



$\therefore$ الحجم = $\frac{1}{٣} \pi$ نق^2 ع = $\frac{1}{٣} \times \frac{٢٢}{٧} \times ٣^2 \times ٣\sqrt{٣٥}$

$= ١٦٧,٣$ سم^3

الواجب :

① مخروط دائري قائم طول راسمه ١٧ سم وارتفاعه ١٥ سم أوجد
① مساحته الجانبية والكلية
② حجمه

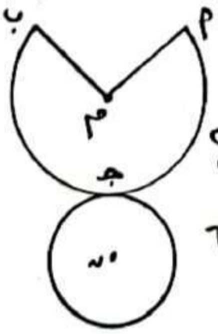
② أوجد لأقرب رقم عشري واحد المساحة الكلية لمخروط قائم طول قطر قاعدته ١٠ سم وارتفاعه ١٢ سم

③ أوجد حجم مخروط دائري قائم محيط قاعدته ٤٤ سم وارتفاعه ٢٥ سم

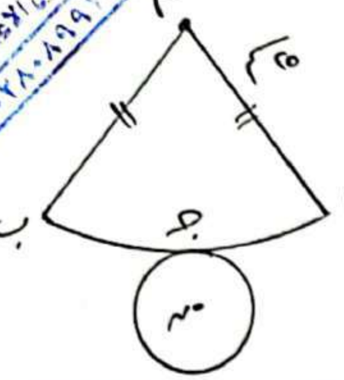
④ مخروط دائري قائم طول راسمه ٢٥ سم ومساحته الجانبية ٥٥٠ سم² أوجد حجم المخروط ($\pi = \frac{22}{7}$)

⑤ قطعة من الشيكولاتة على هيئة مخروط قائم حجمه ٢٧π سم³ ومحيط قاعدته ٦π أوجد ارتفاعه

⑥ شبكة الجسم مخروط قائم مكونة من قطاع دائري مساحته ٣٠π سم² وطول قوس أ ج ب = ٨π أوجد ارتفاع المخروط



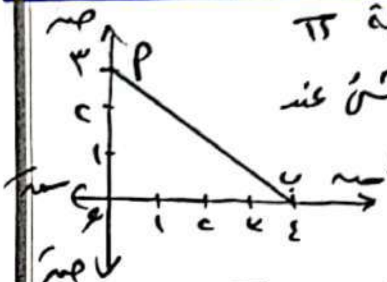
⑦ مساحة الدائرة ن = ٤٩π سم²
احسب ارتفاع المخروط



⑧ أيهما أكبر حجماً ؟
مخروط قائم طول نصف قطر قاعدته ١٥ سم وارتفاعه ٢٥ سم أم هرم رباعي منتظم ارتفاعه ٤٠ سم ومحيط قاعدته ٤٨ سم

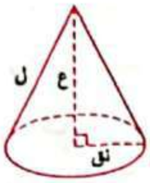
⑨ قطعة من الورق على شكل قطاع دائري مساحته ٢٥π سم² وقياس زاويته المركزية ٩٠° طويت بحيث تلامس م أ ، م ب وتحولت إلى عبوة ورقية على شكل مخروط فأوجد ارتفاع العبوة لأقرب جزء من عشرة

⑩ احسب بدلالة π حجم الجسم الناشئ عند دوران المثلث أ و ب دورة كاملة حول ① محور السينات ② محور الصادات



اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① المساحة الكلية (السطحية) للمخروط القائم تساوى ....



(أ) π نق ل (ب) $\frac{\pi}{3}$ نق^2 ع

(جـ) π نق (نق + ل) (د) $\frac{\pi}{3}$ نق (نق ع + ٣ ل)

② مخروط دائرى قائم طول نصف قطر قاعدته ٦ سم وطول راسمه ١٠ سم

فإن حجمه = ... سم^3

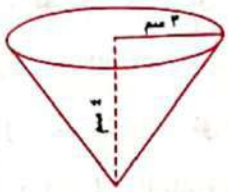
(أ) ٣٢ π (ب) ٦٤ π (جـ) ٩٦ π (د) ٢٨٨ π

③ مخروط دائرى قائم طول نصف قطر قاعدته ١٥ سم وارتفاعه ٢٠ سم

فإن مساحته الجانبية = ... سم^2

(أ) ٣٧٥ π (ب) ٦٠٠ π (جـ) ١٥٠٠ π (د) ١٨٧٥ π

④ فى الشكل المقابل :

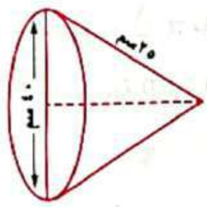


طول راسم المخروط = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٣

(جـ) ٤ (د) ٥

⑤ فى الشكل المقابل :

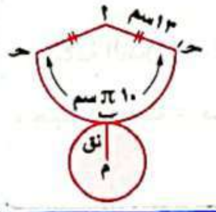


ارتفاع المخروط = ... سم

(أ) ١٥ (ب) ٢٠

(جـ) ٢٥ (د) ٤٠

⑥ الشبكة التى أمامك تصف مجسمًا



حجمه = ... سم^3

(أ) ٢٥ π (ب) ٥٠ π

(جـ) ٧٥ π (د) ١٠٠ π

⑦ الشبكة التى أمامك تصف

مجسمًا حجمه ٩٦ π سم^3

فإن مساحته الكلية = ... سم^2

(أ) ١٦ π (ب) ٣٢ π

(جـ) ٤٨ π (د) ٩٦ π

⑧ فى الشكل المقابل :

دائرة تم تقسيمها إلى قطاعين دائريين

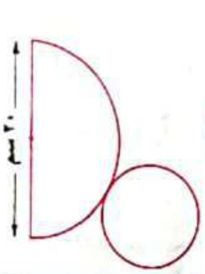
بحيث تكون شبكتى مخروطين قائمين

فإن : $\frac{\text{المساحة الجانبية للمخروط الأصغر}}{\text{المساحة الجانبية للمخروط الأكبر}}$ = ...

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{1}{4}$ (جـ) $\frac{1}{8}$ (د) $\frac{1}{16}$

⑨ إذا طوينا هذه الشبكة لتصبح مخروطًا

فإن طول نصف قطر قاعدته = ...

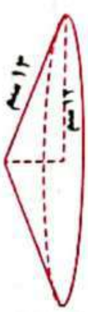


(أ) ١٠ سم (ب) ٨ سم

(جـ) ٥ سم (د) ٢,٥ سم

⑩ الزاوية المركزية للقطاع الذى إذا طويناه

أصبح المخروط الموضح تكون ....



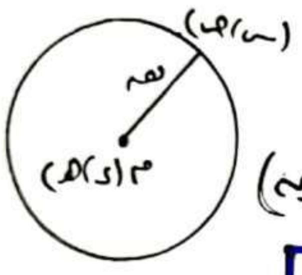
(أ) حادة. (ب) منفرجة. (جـ) مستقيمة. (د) منعكسة.

الدائرة

الدائرة: هي مجموعة نقط المستوى التي تكون على بعد ثابت من نقطة ثابتة في المستوى

تسمى النقطة الثابتة مركز الدائرة (م)
ويسمى البعد الثابت نصف قطر الدائرة (نق)

معادلة الدائرة (بدلالة احداثي مركزها وطول نصف قطرها)



باستخدام قانون البعد بين نقطتين

$\sqrt{(س-د)^2+(ص-هـ)^2} = نق$ (بتربيع الطرفين)

$$\boxed{(س-د)^2+(ص-هـ)^2 = نق^2}$$ معادلة الدائرة

اذا كان مركز الدائرة هي نقطة الاصل (٠، ٠)

المعادلة هي $\boxed{س^2 + ص^2 = نق^2}$

لو عندك نقطة وعايز تعرف النقطة دي خارج الدائرة ام داخل الدائرة أم على الدائرة هتعمل ايه ... هنفترض ان النقطة (أ) مثلاً
وهجيب طول م أ ← عندك (٣) احتمالات

م أ > نق ∴ أ خارج الدائرة

م أ = نق ∴ أ على الدائرة

م أ < نق ∴ أ داخل الدائرة

ملحوظة :- تتطابق الدائرتان اذا تساوى نصفا قطريهما

* صورة النقطة (س، ص) بالانتقال (أ، ب) هى (س + أ ، ص + ب)

الصورة العامة لمعادلة الدائرة هى :

$$\boxed{س^2 + ص^2 + 2ل س + 2ك ص + جـ = صفر}$$

حيث المركز (م) = (−ل ، −ك) = $\left(\frac{-\text{معامل س}}{2} ، \frac{-\text{معامل ص}}{2}\right)$

نق = $\sqrt{ل^2 + ك^2 - جـ}$ ، $ل^2 + ك^2 - جـ > صفر$

ملاحظات هامه ع معادلة الدائرة :-

1 الصورة العامة لمعادلة الدائرة : $س^2 + ص^2 + 2 ل س + 2 ك ص + جـ = 0$.

تتصف بالآتى :

* معادلة من الدرجة الثانية فى س ، ص
* خالية من الحد المشتمل على س ص أى أن معامل س ص = 0 .
* معامل $س^2$ = معامل $ص^2$ = 1

2 لكى تمثل معادلة الدرجة الثانية فى س ، ص دائرة حقيقية يلزم تحقق الشروط الثلاثة السابقة وأن يكون : $ل^2 + ك^2 - جـ > 0$.

3 عند تعيين مركز أو طول نصف قطر دائرة من معادلتها العامة يجب أن يكون معامل $س^2$ = معامل $ص^2$ = 1 لذلك يلزم أولاً القسمة على هذا المعامل إذا كان خلاف الوحدة.

حالات خاصة :-

① معادلة الدائرة المارة بنقطة الأصل هى :-

$$\boxed{س^2 + ص^2 + 2ل س + 2ك ص = صفر}$$ (جـ = صفر)

② معادلة الدائرة التى مركزها يقع ع محور السينات هى :-

$$\boxed{س^2 + ص^2 + 2ل س + جـ = صفر}$$ (ك = صفر)

③ معادلة الدائرة التي مركزها يقع على محور الصادات هي:

$$\boxed{س^2 + ص^2 + ٢ك ص + ج = صفر}$$ (ل = صفر)

④ معادلة الدائرة التي تمس محور السينات

مركزها (-ل ، -ك) ∴ نقطة التماس هي (-ل ، صفر)

نق = |ك| ، ج = $ل^2$

⑤ معادلة الدائرة التي تمس محور الصادات

مركزها (-ل ، -ك) ∴ نقطة التماس هي (٠ ، -ك)

نق = |ل| ، ج = $ك^2$

⑥ معادلة الدائرة التي تمس المحورين

مركزها (-ل ، -ك) ∴ نقطتا التماس (-ل ، ٠) و (٠ ، -ك)

نق = |ل| = |ك|

أوعى تنسى

[١] وضع مستقيم ل بالنسبة للدائرة د والتي مركزها (م) وبفرض أن $\overleftrightarrow{م ح} \perp$ ل ويقطعه في ح

* إذا كان : م ح < نق فإن : ل قاطع للدائرة في نقطتين مختلفتين.
* إذا كان : م ح = نق فإن : ل مماس للدائرة.
* إذا كان : م ح > نق فإن : ل خارج الدائرة ولا يقطعها في أي نقطة.

[٢] إذا كانت م ، ن دائرتين طولا نصفي قطريهما $نق_1$ ، $نق_2$ على الترتيب (حيث $نق_1 > نق_2$)

إذا كانت الدائرتان م ، ن	فإن
(١) متباعدتين	م ن > $نق_1 + نق_2$
(٢) متماستين من الخارج	م ن = $نق_1 + نق_2$
(٣) متقاطعتين	$نق_1 - نق_2$ < م ن < $نق_1 + نق_2$
(٤) متماستين من الداخل	م ن = $نق_1 - نق_2$
(٥) متداخلتين	م ن < $نق_1 - نق_2$
(٦) متحدتي المركز	م ن = صفر

٣ المماس للدائرة يكون عموديًا على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس.

٤ المماسان لدائرة المرسومان من نهايتى قطر فيها متوازيان.

٥ القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج دائرة متساويتان فى الطول.

٦ إذا كانت : أ = (سـ$_١$ ، ص$_١$) ، ب = (سـ$_٢$ ، ص$_٢$)

فإن : نقطة منتصف $\overline{أب}$ = $\left(\frac{سـ_١ + سـ_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} \right)$

٧ معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (سـ$_١$ ، ص$_١$) وميله = م هى : $\boxed{\frac{ص - ص_١}{سـ - سـ_١} = م}$

٨ طول العمود المرسوم من النقطة (سـ$_١$ ، ص$_١$) على المستقيم الذى معادلته :

أسـ + ب ص + حـ = . يساوى $\frac{|أ سـ_١ + ب ص_١ + حـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$

أمثلة : ① أوجد الصورة العامة لمعادلة الدائرة التى مركزها النقطة (-٢ ، ٣) و طول نصف قطرها ٥ سم وحدات طولية

الحل

$(سـ - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = نق^٢$

$(سـ + ٢)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ٢٥$

$سـ^٢ + ٤سـ + ٤ + ص^٢ - ٦ص + ٩ - ٢٥ =$ صفر

$سـ^٢ + ص^٢ + ٤سـ - ٦ص - ١٢ =$ صفر

② أوجد معادلة الدائرة التى مركزها نقطة الأصل وطول قطرها $٦\sqrt{٢}$

الحل

$سـ^٢ + ص^٢ = نق^٢$ حيث نق = $٣\sqrt{٢}$

$سـ^٢ + ص^٢ = (٣\sqrt{٢})^٢$

$سـ^٢ + ص^٢ = ١٨$

٣) أوجد معادلة الدائرة التي مركزها م = (٣ ، -٢) وتمر بالنقطة ا = (-١ ، ١)

الحل

نق = $\sqrt{(٣ - -١)^٢ + (-٢ - ١)^٢}$ = ٥ وحدة طول

∴ المعادلة هي

$(س - ٣)^٢ + (ص + ٢)^٢ = ٢٥$

$س^٢ - ٦س + ٩ + ص^٢ + ٤ص + ٤ - ٢٥ = ٠$

$س^٢ + ص^٢ - ٦س + ٤ص - ١٢ =$ صفر

٤) أوجد معادلة الدائرة التي قطرها $\overline{اب}$ حيث ا = (٤ ، -١) ، ب = (-٢ ، ١)

الحل

محتاج المركز ونق

مركزها = $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$

$= \left(\frac{٤ - ٢}{٢} ، \frac{-١ + ١}{٢}\right) = (١ ، ٠)$

عشان أجيب نق ← هات القطر واقسم ÷ ٢

اب = $\sqrt{(٤ + ٢)^٢ + (-١ - ١)^٢}$ = $٢\sqrt{١٠}$ وحدة طول

∴ نق = $\sqrt{١٠}$

∴ المعادلة هي:

$(س - ١)^٢ + (ص - ٠)^٢ = ١٠$

$(س - ١)^٢ + ص^٢ = ١٠$

٥) أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٣ ، -٤) وتمس محور السينات

الحل

تمس محور السينات ∴ نق = |-٤| = ٤

∴ المعادلة هي:

$(س - ٣)^٢ + (ص + ٤)^٢ = ١٦$

$س^٢ - ٦س + ٩ + ص^٢ + ٨ص + ١٦ - ١٦ = ٠$

$س^٢ + ص^٢ - ٦س + ٨ص + ٩ =$ صفر

٦) أوجد معادلة الدائرة التي طول نصف قطرها ٥ وحدات وتمس محور الصادات عند النقطة (٠ ، ٣)

الحل

تمس محور الصادات ∴ نق = |ل|

∴ |ل| = ٥ ∴ ل = ±٥

∴ مركز الدائرة هو (٥ ، ٣)

أو (-٥ ، ٣)

وهيطلع معادلتين

$(س - ٥)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ٢٥$ فكهم انت

$(س + ٥)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ٢٥$

٧) أوجد معادلة الدائرة التي تمس المحورين ومركزها (-٤ ، ٤)

الحل

تمس المحورين ∴ نق = |ل| = |ك| = ٤

$(س + ٤)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ١٦$

٨) أوجد المركز وطول نصف القطر

س² + ص² − ٢س + ٤ص − ٤ = صفر

الحل

المركز = (−معامل س / ٢ ، −معامل ص / ٢)

= (−(−٢) / ٢ ، −٤ / ٢) = (١ ، −٢)

نق = √(ل² + ك² − جـ) = √(١ + ٤ + ٤)

= √٩ = ٣ وحدة طول

---

٩) أوجد المركز ونصف القطر

س² + ص² − ٤ص − ٩ = ٠

الحل

المركز = (صفر ، ٤ / ٢) = (٠ ، ٢)

نق = √(ل² + ك² − جـ) = √(٠ + ٤ + ٩) = √١٣ وحدة طول

---

١٠) أوجد المركز ونصف القطر

٧س² + ٧ص² + ٤٢س − ١٤ص + ٢٨ = ٠

الحل (÷ ٧)

س² + ص² + ٦س − ٢ص + ٤ = ٠

المركز = (−٦ / ٢ ، ٢ / ٢) = (−٣ ، ١)

نق = √(٩ + ١ − ٤) = √٦ وحدة طول

---

١١) دائرة مركزها م = (−٢ ، ٧) وطول نصف قطرها نق = ٥ وحدات بين أي النقط الآتية تقع خارج أم داخل أم على الدائرة

أ = (−١ ، ٣) ، ب = (٠ ، −٥) ، جـ = (٢ ، ٤)

الحل

م أ = √((−٢ + ١)² + (٧ − ٣)²) = √١٧

√١٧ = ٤,١٢ < ٥

∴ أ داخل الدائرة

م ب = √((−٢ − ٠)² + (٧ + ٥)²) = ٢√٣٧

٢√٣٧ = ١٢,١٦ > ٥

∴ ب خارج الدائرة

م جـ = √((−٢ − ٢)² + (٧ − ٤)²)

= √(١٦ + ٩) = ٥

٥ = ٥

∴ جـ على الدائرة

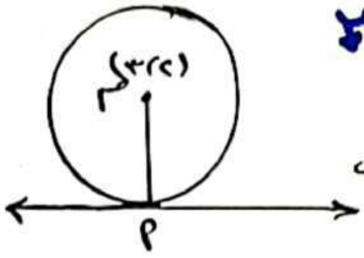
إطلع من تحت بطانيتك وخد قلمك وحارب عشان حلمك

(١٢) أوجد معادلة الدائرة التي مركزها م = (٢ ، ٣) والمستقيم ٣س + ٤ص + ٢ = ٠ مماس لها عند أ

الحل

م أ = نق

ارجع لأولى ثانوي



$$م أ = \frac{|٣س + ٤ص + ٢|}{\sqrt{أ^2 + ب^2}}$$

$$م أ = \frac{|٣ \times ٢ + ٤ \times ٣ + ٢|}{\sqrt{٩ + ١٦}} = \frac{|٢٠|}{٥} = ٤$$

∴ نق = ٤ وحدة طول

∴ $(س - ٢)^2 + (ص - ٣)^2 = ١٦$

(١٣) أوجد إحداثي المركز ونصف القطر:

$س^2 + (ص + ٧)^2 = ٢٤$

الحل

$س^2 + ص^2 + ١٤ص + ٤٩ - ٢٤ = ٠$

$س^2 + ص^2 + ١٤ص + ٢٥ = ٠$

∴ إحداثي المركز = $\left(٠ ، \frac{-\text{معامل ص}}{٢}\right)$

= (٠ ، −٧)

نق = $\sqrt{ل^2 + ك^2 - ج} = \sqrt{٠ + ٤٩ - ٢٥}$

= $\sqrt{٢٤} = ٢\sqrt{٦}$ وحدة طول

(١٤) أوجد إحداثي المركز ونصف القطر

$س^2 + ص^2 - ٨س = ١٢$

الحل

$س^2 + ص^2 - ٨س - ١٢ = ٠$

إحداثي المركز = $\left(\frac{-\text{معامل س}}{٢} ، ٠\right)$

= (٤ ، ٠)

نق = $\sqrt{١٦ + ٠ + ١٢} = ٢\sqrt{٧}$ وحدة طول

(١٥) أوجد معادلة الدائرة التي هي صورة الدائرة

$س^2 + ص^2 - ١٢س + ٦ص + ٢٠ = ٠$

بالانتقال (س + ٢ ، ص − ٢)

الحل

إحداثي المركز = $\left(\frac{١٢}{٢} ، \frac{-٦}{٢}\right)$ = (٦ ، −٣)

نق = $\sqrt{٣٦ + ٩ - ٢٠}$ = ٥ وحدة طول

مركز الدائرة المطلوبة هو

(٦ + ٢ ، −٣ − ٢) = (٨ ، −٥)

∴ $(س - ٨)^2 + (ص + ٥)^2 = ٢٥$

فكها انت يا صاحبي (سهلة/لطف)

(١٦) بين مع ذكر السبب أياً من المعادلات تمثل دائرة أم لا

(أ) $س^2 + س ص + ص^2 = 25$

الحل

ليست معادلة دائرة لأنها تشتمل على حد س ص

(ب) $س^2 + ص^2 + 8س - 16ص - 1 = 0$

الحل

معامل $س^2 = 1$ ، معامل $ص^2 = 1$

المعادلة لا تشتمل على س ص

$نق = \sqrt{16 + 64 + 1} = \sqrt{81} = 9 > 0$

∴ هي معادلة دائرة

(ج) $س^2 + 2ص^2 + 6س - 5ص = 0$

الحل

معامل $س^2 \neq$ معامل $ص^2$

∴ لا تعبر عن معادلة دائرة

(د) $س^2 + ص^2 + س + 2ص + 7 = 0$

الحل

معامل $س^2$ = معامل $ص^2$

المعادلة لا تشتمل على س ص

$نق = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 - 7} = \sqrt{\frac{-23}{4}}$

$\frac{-23}{4} <$ صفر

∴ المعادلة لا تعبر عن دائرة

(١٧) حدد وضع المستقيم

ل : $5س - 12ص + 13 = 0$ بالنسبة للدائرة $س^2 + ص^2 - 6س + 4ص - 12 = 0$

الحل

احداثيا المركز للدائرة $= \left(\frac{+6}{2} ، \frac{-4}{2}\right) = (3 ، -2)$

$نق = \sqrt{9 + 4 + 12} = \sqrt{25} = \boxed{5}$

البعد بين المستقيم والمركز

$= \frac{|5س - 12ص + 13|}{\sqrt{أ^2 + ب^2}} = \frac{|5 \times 3 - 12 \times -2 + 13|}{\sqrt{25 + 144}}$

$= \frac{52}{13} = 4$

∴ $4 <$ نق ∴ المستقيم قاطع للدائرة

(١٨) حدد وضع الدائرتان بالنسبة لبعضهما البعض

$د_1 : س^2 + ص^2 - 10س - 8ص + 16 = 0$

$د_2 : س^2 + ص^2 + 14س + 10ص - 26 = 0$

الحل

بالنسبة ل $د_1$

احداثيا المركز $م_1 = \left(\frac{10}{2} ، \frac{8}{2}\right) = (5 ، 4)$

$نق_1 = \sqrt{25 + 16 - 16} = 5$

بالنسبة ل $د_2$

احداثيا المركز $م_2 = \left(\frac{-14}{2} ، \frac{-10}{2}\right) = (-7 ، -5)$

$نق_2 = \sqrt{49 + 25 + 26} = 10$

م١م٢ = √((−٧ − ٥)² + (−٥ − ٤)²) = ١٥ وحدة طول

(٤ ، ٥)

(−٧ ، −٥)

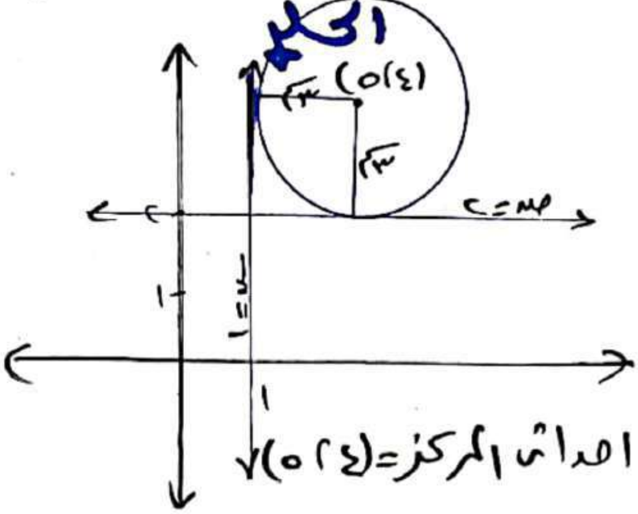
نق١ + نق٢ = ١٥ ، نق١ − نق٢ = ٥

∴ م١م٢ = نق١ + نق٢

∴ الدائرتان متماستان من الخارج

١٩) أوجد الصورة العامة لمعادلة الدائرة التي مركزها م تقع في الربع الأول ، نق = ٣ وحدات ومستقيمان س = ١ ، ص = ٢ مماسان لها

الحل



احداثي المركز = (٤ ، ٥)

المعادلة هي:

(س − ٤)² + (ص − ٥)² = ٩

س² − ٨س + ١٦ + ص² − ١٠ص + ٢٥ − ٩ = ٠

س² + ص² − ٨س − ١٠ص + ٣٢ = ٠

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

٢٠) أوجد لأقرب سم² مساحة شكل خماسي منتظم تقع رؤوسه على الدائرة س² + ص² + ٦س − ١٢ص + ٥ = ٠ علماً بأن كل وحدة في المستوى الإحداثي تمثل ٥ سم

الحل

احداثي المركز = (−٣ ، ٦)

نق = √(٩ + ٣٦ − ٥) = √٤٠

م الشكل الخماسي المنتظم

= ن/٢ نق² جا (٣٦٠/ن)

= ٥/٢ × ٤٠ × جا (٣٦٠/٥) = ٩٥,١ وحدة مربعة

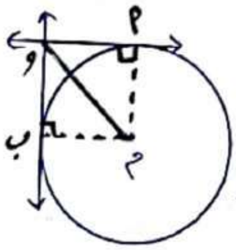
∵ الوحدة المربعة تمثل ٥ سم

∴ م الوحدة المربعة = ٥ × ٥ = ٢٥ سم²

∴ م الشكل الخماسي

= ٩٥,١ × ٢٥ = ٢٣٧٧,٥ سم²

٢١) م و = ٢√٢ ، أوجد المعادلة العامة للدائرة



الحل

م أ ⊥ أ و ، م ب ⊥ ب و

و أ = و ب ، م أ = م ب ∴ الشكل مربع

∴ طول القطر = طول الضلع × √٢

٢√٢ = س × √٢ (÷ √٢)

∴ طول الضلع = ٢ ∴ م أ = ٢ ∴ نق = ٢

احداثي المركز = (٢ ، −٢) ← ربع رابع

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

الواجب:

(١) أوجد معادلة الدائرة التي مركزها

(أ) م = (٢، ٣)، نق = ٥

(ب) م = (٠، -١)، نق = $٢\sqrt{٣}$

(ج) م = (٠، ٠)، نق = ٣

(٢) أوجد الصورة العامة لمعادلة الدائرة إذا كان

(أ) مركزها م(-٢، ٣) وطول قطرها ٨ وحدات

(ب) مركزها (٧، ٥) وتمر بالنقطة أ = (٣، ٢)

(ج) مركزها (-٣، -٢) وتمس محور السينات

(د) مركزها (٥، -٥) وتمس محوري الإحداثيات

(هـ) طول نصف قطرها ٦ سم وتمس المحورين وتقع في الربع الرابع

(٣) أوجد

إحداثي المركز وطول نصف القطر

(أ) $س^2 + ص^2 - ٤س + ٦ص - ١٢ = ٠$

(ب) $س^2 + ص^2 - ٨ = ٠$

(ج) $س^2 + ص^2 + ٤ص = ٨$

(د) $(س + ٣)^2 + (ص - ٥)^2 = ٤٩$

(هـ) $ص^2 + ص^2 + ١٤ص = ١$

(٤) أي المعادلات تمثل دائرة وأيها لا تمثل دائرة

(أ) $٢س^2 + ٢ص^2 + ٣ص - ٨ = ٠$

(ب) $(س + ص)^2 - ٣س + ٦ص - ٤ = ٠$

(ج) $س^2 + ص^2 + ٢س - ٤ص + ٥ = ٠$

(د) $\frac{١}{٤}س^2 + \frac{١}{٤}ص^2 + س - ٨ = ٠$

(٥) بين أي النقط التالية تنتمي إلى الدائرة التي معادلتها
$(س - ٦)^2 + (ص + ١)^2 = ٢٥$
ثم حدد موضع النقط الأخرى بالنسبة إلى الدائرة

(٦) حدد وضع المستقيم ل بالنسبة للدائرة $(س + ٣)^2 + (ص - ٤)^2 = ٩$
إذا كانت معادلة المستقيم هي

(١) $٣س - ٤ص + ٥ = صفر$

(٢) $٣س - ٤ص + ١٠ = صفر$

(٣) $٦س - ٨ص + ٢٣ = صفر$

(٧) $د_١ : (س + ٢)^2 = ١ - ص^2$

$د_٢ : س^2 + ص^2 - ٢س - ٨ص - ١٩ = ٠$

بين نوع الدائرتين بالنسبة لبعضهما البعض

⑧ أوجد قيم هـ الحقيقية التى تجعل كلاً مما يأتى يعبر عن معادلة دائرة

① $س^2 + ص^2 - 2س - 4ص - هـ + 2 = 0$

② $س^2 + ص^2 + 4س - 6ص - هـ - هـ^2 + 4 = 0$

③ $س^2 + ص^2 + 6س + 8ص + هـ^2 - 3هـ + 15 = 0$

⑨ أوجد قيم (أ) فى المعادلة

$س^2 + ص^2 - 2س + 4ص + 2أ - 3 = 0$

فى الحالات الآتية

① المعادلة تمثل دائرة

② المعادلة تمثل دائرة تمر بنقطة الأصل

③ المعادلة تمثل دائرة تمس محور السينات

④ ~ ~ ~ ~ تمس محور الصادات

⑩ اكتب الصورة العامة لمعادلة الدائرة

① مركزها م(٥ ، ٤) وتمس المستقيم س = ٢

② مركزها م(٥ ، ٣) وتمس المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٧) ، (-١ ، ٣)

③ طول نصف قطرها = ٥ وحدات وتمس محور السينات عند النقطة (٤ ، ٠)

④ تمر بنقطة الأصل وتقطع من الجزئين الموجبين لمحورى الإحداثيات السينى والصادى جزءين طولهما ١٢ ، ١٦ وحدة طولية على الترتيب

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① طول قطر الدائرة : $4س^2 + 4ص^2 + 16س - 8ص - 16 = 0$

يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ١٢ (د) ٢٤

② مساحة الدائرة التى معادلتها : $(س - 5)^2 + (ص + 4)^2 = 7$

تساوى .... وحدة مربعة.

(أ) 2.5π (ب) 7π (جـ) 12.25π (د) 49π

③ إذا كانت المعادلة : $2س^2 + أص^2 + ب س ص - 5 = 0$ تمثل دائرة

فإن مساحتها = ... وحدة مربعة.

(أ) 5π (ب) $\sqrt{5}\pi$ (جـ) $\frac{5}{2}\pi$ (د) $5\sqrt{2}\pi$

④ معادلة الدائرة التى مركزها (١ ، ٢) وتمس المستقيم : $3س + 4ص + 9 = 0$

هى ....

(أ) $س^2 + ص^2 - 2س - 4ص = 16$

(ب) $س^2 + ص^2 + 2س + 4ص - 11 = 0$

(جـ) $س^2 + ص^2 + 2س + 4ص - 16 = 0$

(د) $س^2 + ص^2 - 2س - 4ص = 11$

(جـ) المستقيم : ص = ٢ س (د) الدائرة : $س^2 + ص^2 = 9$

③ النقطة (٢ ، ٠) تقع على ....

(أ) محور السينات. (ب) محور الصادات.

(جـ) تمس محورى الإحداثيات. (د) لا تمس أيا من المحورين.

(أ) تمس محور السينات. (ب) تمس محور الصادات.

⑤ الدائرة التى معادلتها : $(س - أ)^2 + (ص - ب)^2 = أ^2$ حيث $(أ \neq ب)$ ......

(٧) النقطة التى تقع على الدائرة : (س − ٢)^{٢} + ص^{٢} = ١٣ هى ....

(أ) (٢ ، ٣)　　(ب) (٣ ، −٢)　　(جـ) (٢ ، ٥)　　(د) (٤ ، ٣)

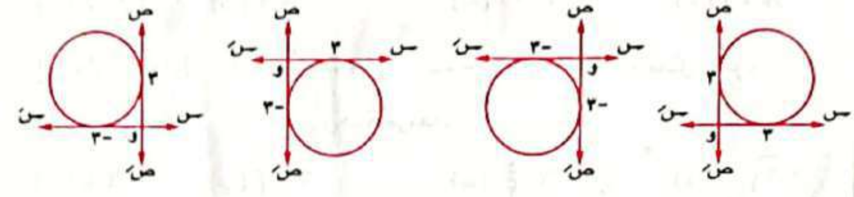
(٨) الدائرة (س + ٢)^{٢} + ص^{٢} + ٢ ص = ٠ مركزها النقطة ....

(أ) (٢ ، ٢)　　(ب) (−٢ ، −١)　　(جـ) (٢ ، −١)　　(د) (−٢ ، ٠)

(٩) محيط الدائرة التى معادلتها : س^{٢} + ص^{٢} = ٨ هو .... وحدة طول.

(أ) ٨ π　　(ب) ٦٤ π　　(جـ) ٢ √٢ π　　(د) ٤ √٢ π

(١٠) الدائرة د : (س + ٣)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ٩ يمثلها الشكل ....



(أ)　　(ب)　　(جـ)　　(د)

(١١) إذا كان المستقيم : ٣س − ٤ ص − ١٢ = ٠ يمس الدائرة (س + ٣)^{٢} + (ص − ١)^{٢} = نق^{٢}

فإن محيط الدائرة = ... وحدة طول (بدلالة π)

(أ) ٥ π　　(ب) ١٠ π　　(جـ) ١٥ π　　(د) ٢٠ π

(١٢) إذا كان المستقيمان : ص = −٦ ، ص = ٨ يمسان دائرة م

فإن طول نصف قطرها = ... وحدة طول.

(أ) ١　　(ب) ٢　　(جـ) ٧　　(د) ١٤

(١٣) إذا كان المستقيم : ص = ٢ يمس الدائرة م التى مركزها (٦ ، ٩)

فإن طول قطرها = ... وحدة طول.

(أ) ٦　　(ب) ٧　　(جـ) ١٤　　(د) ١٥

(١٤) إذا كان محور الصادات مماسًا للدائرة : س^{٢} + ص^{٢} + ٤ س + م ص + ٤ = ٠

فإن : م = ...

(أ) ٤　　(ب) −٤　　(جـ) صفر　　(د) ± ٤

(١٥) إذا كان محور السينات مماسًا للدائرة : س^{٢} + ص^{٢} + م س + ٤ ص + ٧ − ٣ م = ٠

فإن : م = ...

(أ) ٢ أ، ١٤　　(ب) −٢ أ، −١٤　　(جـ) ٢ أ، −١٤　　(د) −٢ أ، ١٤

(١٦) طول نصف قطر الدائرة :

(ن + ٣) س^{٢} + ص^{٢} − ٤ ص + (م − ٢) س ص + (م − ن) س − ٨ = ٠

هو .... وحدة طول.

(أ) ٢　　(ب) ٤　　(جـ) ٦　　(د) ٢ √٢

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢