جروب: تانية ثانوي ٢٠٢٤ ❤

رابط الجروب:

https://t.me/SecondaryTwo_M

للاستفسارات 📩:

@m o m e n 2007

القناة:

https://t.me/SecondaryTwo Channel M

اضغط على الروابط

المالك: @m_o_m_e_n_2007

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مذكرة

المهندس

في الرياضيات البحته

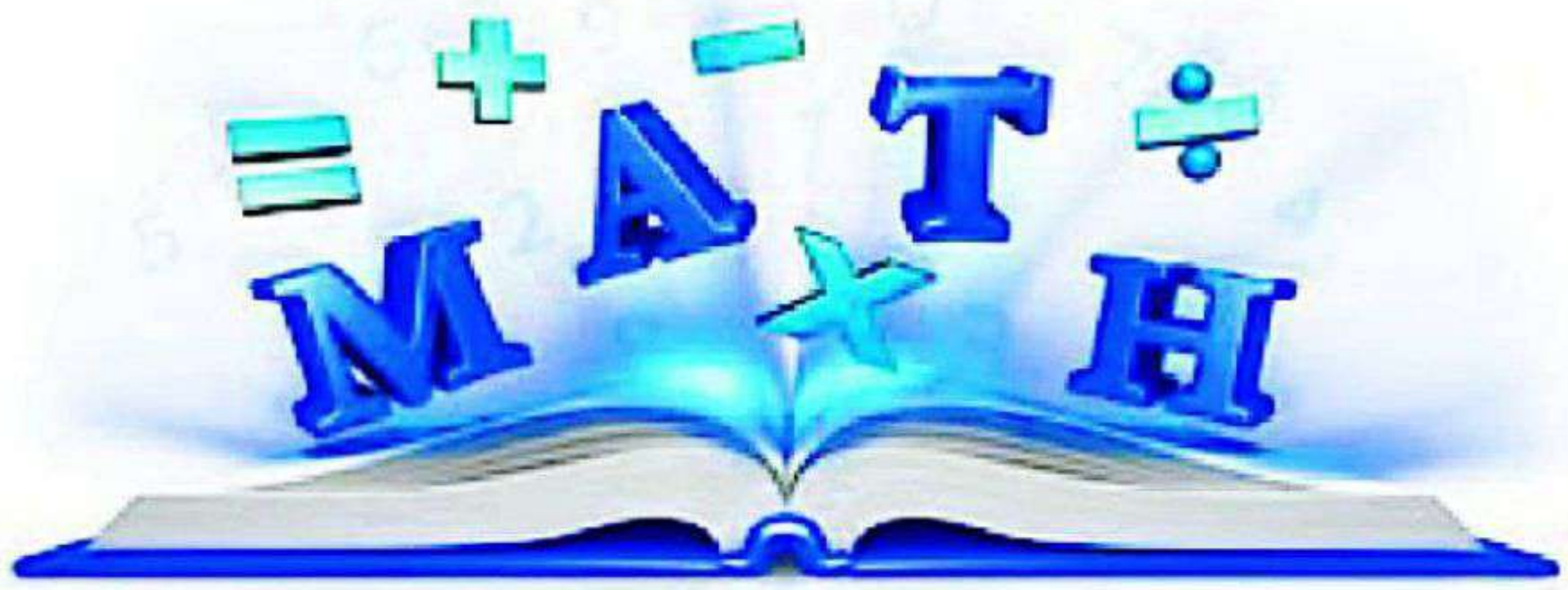
الصف الثاني الثانوي

إعداد

@SecondaryTwo_M

م / لطفى زهران

01115956226 - 01028089912



تطلب من :-

مكتبة الحوفى - أمام مركز الشرطة

01006537420 - 01008570114

Scanned with CamScanner

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

الدوال الحقيقية

(تحديد المجال والمدى - بحث الاطراد)

الدالة :- هى علاقة تربط كل عنصر من عناصر س بعنصر واحد فقط من عناصر ص وتسمى :-

*المجموعة س بـ " مجال الدالة " *المجموعة ص بـ " المجال المقابل للدالة "

مجموعة صور عناصر مجال الدالة س تسمى **" مدى الدالة "** وهى مجموعة جزئية من المقابل ص

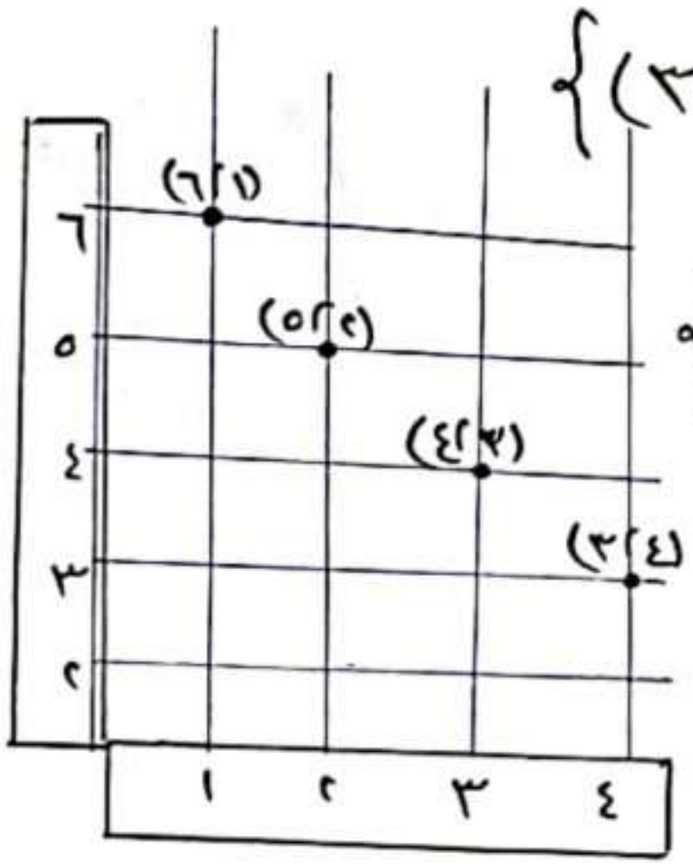
مثال :- اذا كانت س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} ص = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

وكانت الدالة د : س ← ص حيث ص = س + ٢ اكتب بيان الدالة وبين مجالها ومقابلها ومثل بخطوط سهم وآخر بيانى

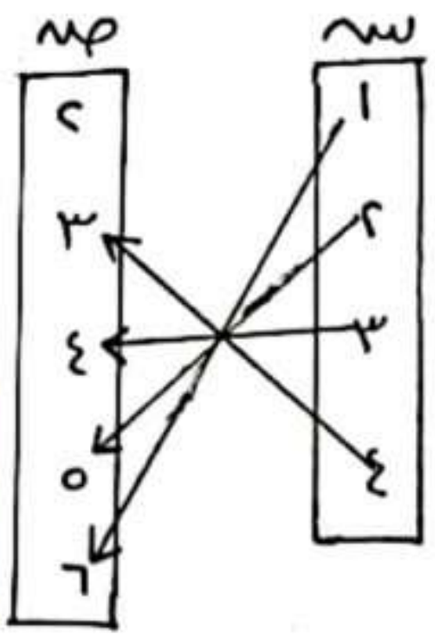
الحل

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

بيان الدالة = {(١ ، ٣) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٥) ، (٤ ، ٦)}



المدى = {٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}



مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠١٨٠٨٩٩١٢

العلاقة دالة لأن كل عنصر من عناصر س خرج منه سهم واحد فقط إلى احد عناصر ص " **فى المخطط السهمى** "

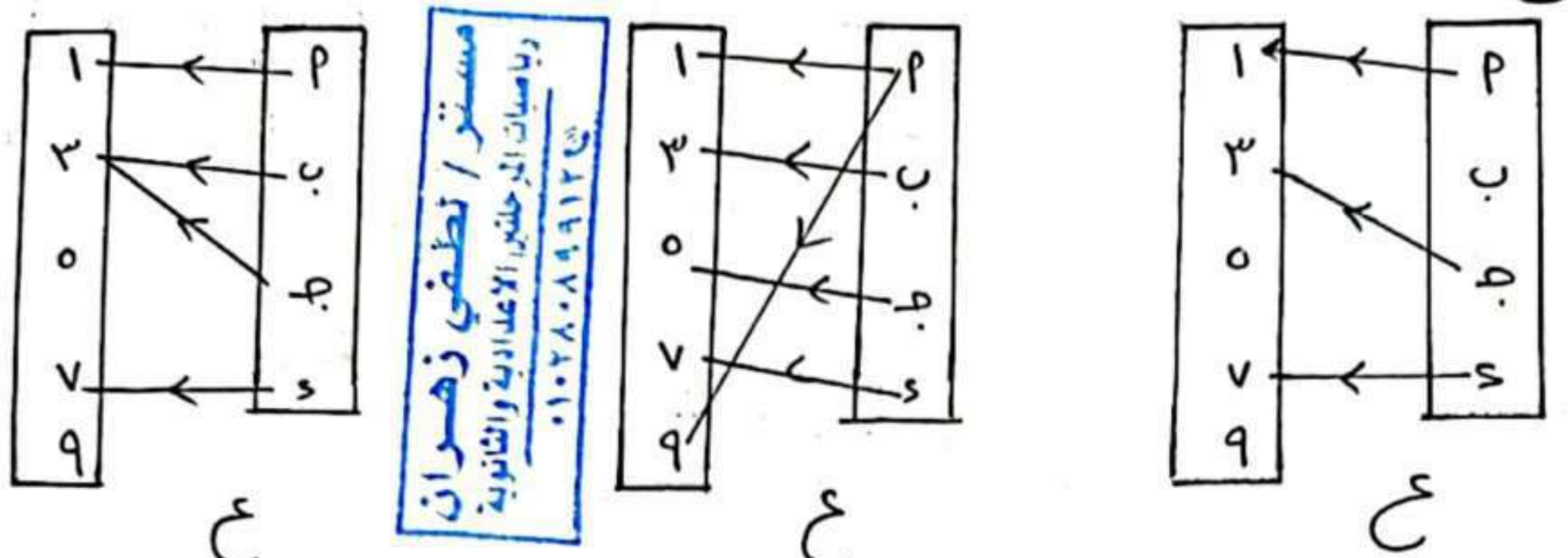
العلاقة دالة لأن كل خط رأسى يمر بنقطة واحدة فقط من النقط التى تمثل العلاقة " **فى المخطط البيانى** "

العلاقة دالة لأن كل عنصر من عناصر س ظهر كنقطة أول مرة واحدة فقط " **فى البيان** "

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

اى من العلاقات الاتيه يمثل دالة وأيها لا تمثل دالة

①



مستر / لطفي زهران
رياضيات الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

ع١ ليست دالة لأن العنصر ب لم يخرج منه اى سهم } لا يوجد مدى

ع٢ ليست دالة لأن العنصر ① خرج منه سهمان

ع٣ دالة لأن كل عنصر من عناصر س خرج منه سهم واحد فقط إلى أحد عناصر ص

المدى = {١، ٣، ٧}

مستر / لطفي زهران
رياضيات الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

مستر / لطفي زهران
رياضيات الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

② ع اذا كانت س = {١، ٣، ٥، ٧}

ع١ = {(أ، ١)، (ب، ٣)، (ج، ٥)، (د، ٧)}

ع٢ = {(أ، ١)، (ب، ٣)، (ج، ٥)، (د، ٧)}

ع٣ = {(أ، ١)، (ب، ٣)، (ج، ٥)، (د، ٧)}

ع١ دالة لأن كل عنصر من عناصر س ظهر كسهم أول مرة واحدة فقط

ع٢ ليست دالة لأن العنصر ② لم يظهر كسهم أول

ع٣ ليست دالة لأن العنصر ② ظهر كسهم أول مرتين

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ملحوظة هامة :- تتساوى الدالتان كثيرتا الحدود د ، ر في مجال المشترك اذا كان د(س) = ر(س)

اى اذا كان لهما نفس الدرجة ومعاملات قوى س المتناظرة فيهما متساويه ..... مش فاهم حاجه ... يلا بينا

مثال :- حدد قيم أ ، ب ، جـ التى تجعل د(س) = ر(س)

حيث د(س) = (أ + ب) س٤ - ٣س - ٤

ر(س) = س٤ + (أ + جـ) س + ب

الحل

∵ د(س) ، ر(س) لهما نفس الدرجة (الثانية)

∴ د(س) = ر(س) عندما تتساوى معاملات قوى س المتناظرة

∴ أ + ب = ١ ← ① ، أ + جـ = -٣ ← ② ، ب = -٤

بالتعويض فى ①

أ + (-٤) = ١ ⇐ أ = ١ + ٤ ∴ أ = ٥ بالتعويض فى ②

٥ + جـ = -٣ ⇐ جـ = -٣ - ٥ ⇐ جـ = -٨

اتعب ← هتلاقى ثمرة تعبك فى الآخر

اجتهد ← هتوصل لهدفك

احلم وحقق حلمك ... أيوة احلم وحقق حلمك

كل الناس اللى حققت حلمها بدأت من الصفر والله ولكن بدأو بعزم وبإصرار وباجتهاد وتحدوا كل الظروف « سنتكم بتضحك »

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ندخل فى الجد بقا :. كل اللى فات كان تالتة اعدادى

إزاى أحدد ان العلاقة دالة ام لا بطرق تانية

① جبريًا :. تكون العلاقة دالة اذا كان كل قيمة للمتغير س بناظرها قيمة واحدة فقط للمتغير ص

مثلاً :. ص = س^{2} + ٣ ← دالة لأن كل قيمة حقيقية للمتغير س بناظرها قيمة وحيدة فقط للمتغير ص

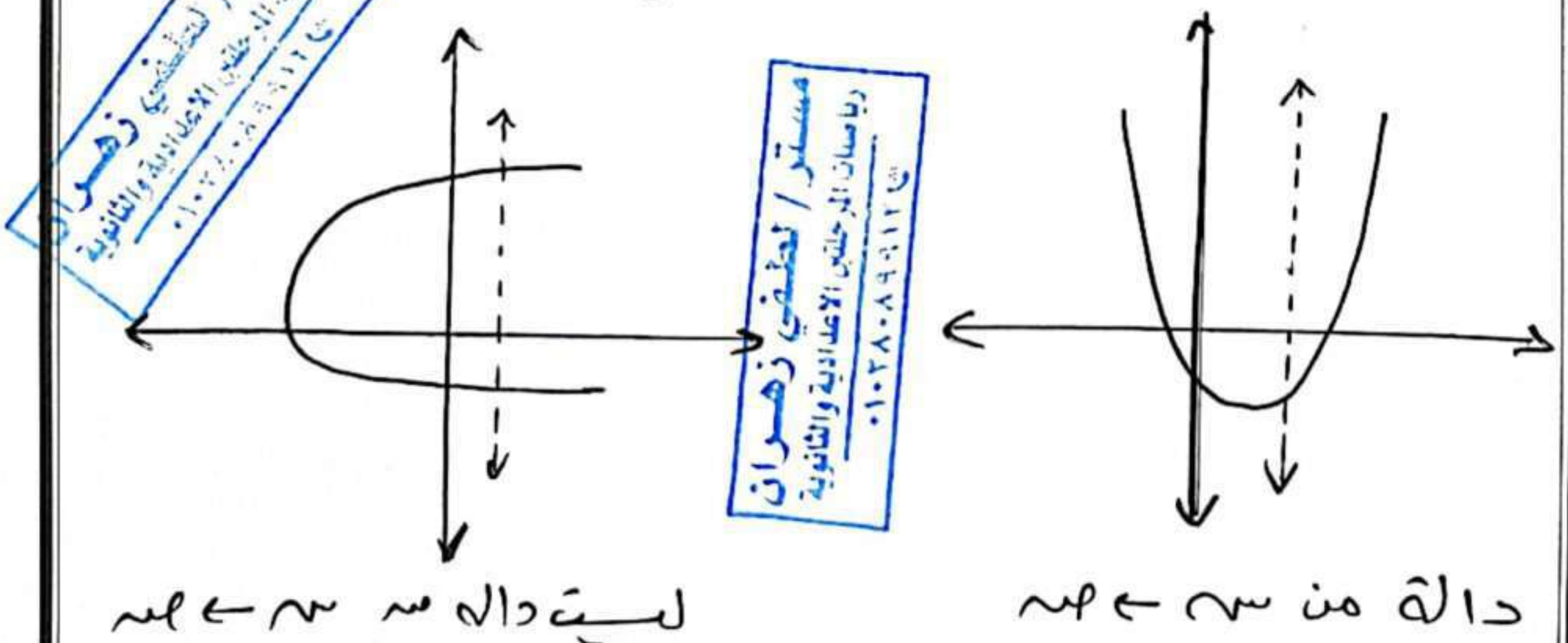
لو (س = ٣) ص = ٣^{2} + ٣ = ١٢

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

مثلاً :. ص^{2} = س^{2} + ٩ ← ليست دالة لأنه توجد قيمة لأكثر من قيمتان مختلفتان للمتغير ص

لو (س = ٤) ص^{2} = ٤^{2} + ٩ = ٢٥ ∴ ص = ± ٥

② بيانيًا (اختبار الخط الرأسى) :. العلاقة لا تمثل دالة اذا وجد خط مستقيم رأسى (يوازى محور الصادات) يقطع الشكل البيانى فى اكثر من نقطة



ليست دالة س ← ص

دالة من س ← ص

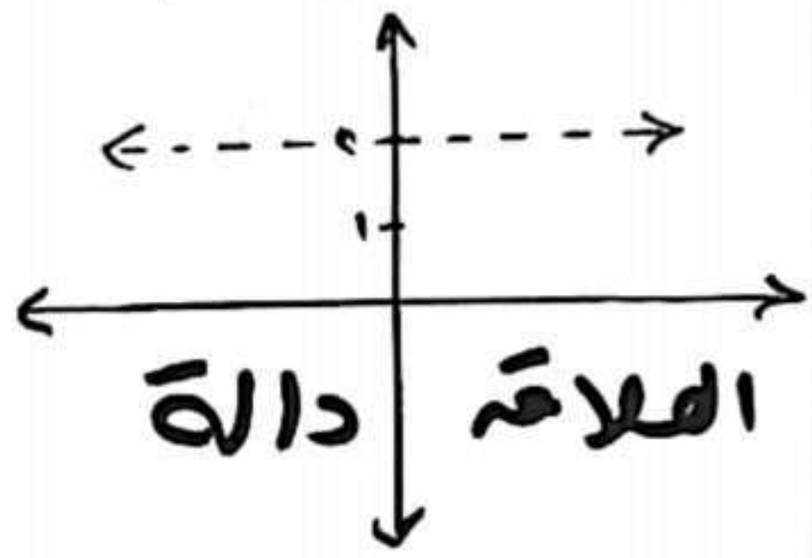
Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ملاحظة خطيرة :-

* اى علاقة تمثل بخط أفقى **يوازى محور السينات** لاتعبر عن دالة من س إلى ص لأن كل عنصر من س يرتبط بعنصر واحد فقط من ص

* اى علاقة تمثل بخط رأسى **يوازى محور الصادات** لاتعبر عن دالة من س إلى ص لأن العنصر س = ٤ ارتبط بعدد لانهائى من ص

مثلاً :-



مستر / لطفى زهران
دبلومات الوطنيه الاعداديه والثانويه
٠١٠٢٨٠٨٩١٢

تحديد مجال الدوال الحقيقية

① الدالة كثيرة الحدود مجالها دائماً ح

هالم تكون معرفه ع مجموعه جزئيه منها

د(س) = ٣ كثيرة حدود ثابت مجالها ح

د(س) = ٢س + ٣ كثيرة حدود من الدرجه الأولى مجالها ح

د(س) = س٢ + ٣س + ٥ كثيرة حدود من الدرجه الثانيه مجالها ح

د(س) = ٢س + ١ ، س ≥ ١

كثيرة حدود من الدرجه الأولى مجالها = [١ ، ∞[

يارب تكون فاهم ايها البطيخه الكبيرة

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المجال هو ح - {أصفار المقام}

الأستاذ / لطفي زهران
رياضيات الإعدادية والثانوية
٠١١١٥٩٥٦٢٢٦ - ٠١٠٢٨٠٨٩١٢

لعين إيه ← يعني خد المقام = ساويه بـ صفر

د(س) = $\frac{١}{س}$ ∴ المجال = ح - {٠}

د(س) = $\frac{٣}{س - ٥}$ ⇐ س - ٥ = ٠ ⇐ ∴ س = ٥

∴ المجال = ح - {٥}

د(س) = $\frac{س - ١}{٢س^{٢} - ٥س}$ ⇐ $٢س^{٢} - ٥س = ٠$

$س(٢س - ٥) = ٠$

س = ٠ | $س = \frac{٥}{٢}$

∴ المجال = ح - {٠ ، $\frac{٥}{٢}$}

د(س) = $\frac{س - ٣}{س^{٢} - ٥س + ٦}$ ⇐ $س^{٢} - ٥س + ٦ = ٠$

$(س - ٢)(س - ٣) = ٠$ ∴

س = ٢ | س = ٣

المجال = ح - {٢ ، ٣}

د(س) = $\frac{س}{س^{٢} + ٢٥}$ ⇐ $س^{٢} + ٢٥ = ٠$ لا يوجد أصفار لهذا المقام

∴ المجال = ح

د(س) = $\frac{س + ٣}{٧}$	المجال = ح

عندك ③ حالات ليس لهم أصفار

① $س^{٢}$ + عدد

② العدد

③ القوس الكبير الناتج من تحليل مجموع وفرق تكعيبين

$س^{٣} + ٨ = (س + ٢)(س^{٢} - ٢س + ٤)$

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

③ دالة الجذر النوني

د(س) = $\sqrt[ن]{هـ(س)}$ حيث ن ∈ ص$^+$ ، ن > ١

هـ(س) كثيرة حدود

أولاً :. عندما ن عدد فردي فإن مجال الدالة هو ح

ثانياً :. عندما ن عدد زوجي فإن مجال الدالة هو مجموعة قيم س التي تحقق **هـ(س) ≥ ٠** حيث ن تسمى دليل الجذر

لمثاله : ① د(س) = $\sqrt{س + ٢}$ ن عدد زوجي

س + ٢ ≥ ٠ ⇐ س ≥ -٢ ∴ م.ج = [-٢ ، ∞[

∴ المجال = [-٢ ، ∞[

---

② د(س) = $\sqrt{-٢س + ٣}$ ن عدد زوجي

-٢س + ٣ ≥ ٠ ⇐ -٢س ≥ -٣ (÷ -٢) ⇐ س ≤ $\frac{٣}{٢}$

∴ م.ج =]-∞ ، $\frac{٣}{٢}$] ∴ المجال هو]-∞ ، $\frac{٣}{٢}$]

---

③ د(س) = $\sqrt{س^٢ + ٥}$ ن عدد زوجي

$س^٢ + ٥ ≥ ٠$ طالما الدالة تربيعية يبقى لازم تبحث الإشارة عشان تعرف مجموعة الحل

$س^٢ + ٥$ موجبة دائماً لـ ح ∴ م.ج = ح ∴ المجال = ح

---

④ $\sqrt[٣]{٩ - س^٢}$ ن عدد فردي ∴ المجال = ح

---

⑤ د(س) = $\sqrt{٤س^٢ - ١٢س + ٩}$ ن عدد زوجي

$٤س^٢ - ١٢س + ٩ ≥ ٠$ $(٢س - ٣)^٢ ≥ ٠$

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بلا نبحث الاشارة عشان نعرف نجيب مجموعة الحل

(٢س - ٣)^{٢} = ٠ ⇐ ٢س - ٣ = ٠ ⇐ ٢س = ٣ ⇐ س = $\frac{٣}{٢}$

د(س) = صفر عندما س = $\frac{٣}{٢}$

د(س) موجبة عندما س ∈ ح - {$\frac{٣}{٢}$}

∵ ٢س - ٣ ≥ ٠ ∴ م.ح = ح ∴ المجال = ح

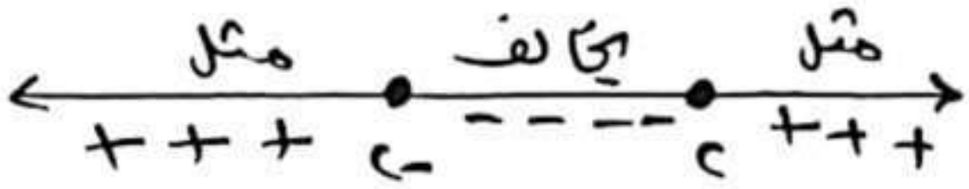
مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

① د(س) = $\sqrt{س^{٢} - ٤}$ ⇐ ن لمجد مجموعة الحل

س^{٢} - ٤ ≥ ٠ بلا نبحث الاشارة عشان نجيب مجموعة الحل

س^{٢} - ٤ = ٠ ⇐ (س - ٢)(س + ٢) = ٠

س = ٢ | س = -٢



د(س) موجبة عندما س ∈ ح -]-٢، ٢[

د(س) سالبة عندما س ∈]-٢، ٢[

د(س) = صفر عندما س ∈ ح - {-٢، ٢}

∴ م.ح = ح -]-٢، ٢[

∴ المجال هو ح -]-٢، ٢[

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

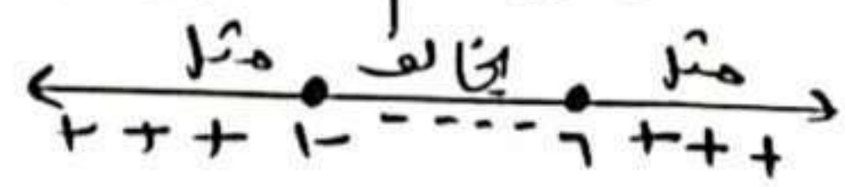
② د(س) = $\frac{١}{\sqrt{س^{٢} - ٥س - ٦}}$ ن لمجد مجموعة الحل

الدالة تكون معرفة بشرط س^{٢} - ٥س - ٦ > ٠ (مقيش ≠)

بلا نبحث الاشارة س^{٢} - ٥س - ٦ = ٠

(س - ٦)(س + ١) = ٠

س = ٦ | س = -١



د(س) موجبة عندما س ∈ ح -]-١، ٦[

د(س) سالبة س ∈]-١، ٦[

د(س) = صفر س ∈ ح - {-١، ٦}

∴ م.ح = ح -]-١، ٦[

∴ المجال ح -]-١، ٦[

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

④ الدالة جزأة المجال « ذات المقاطع »

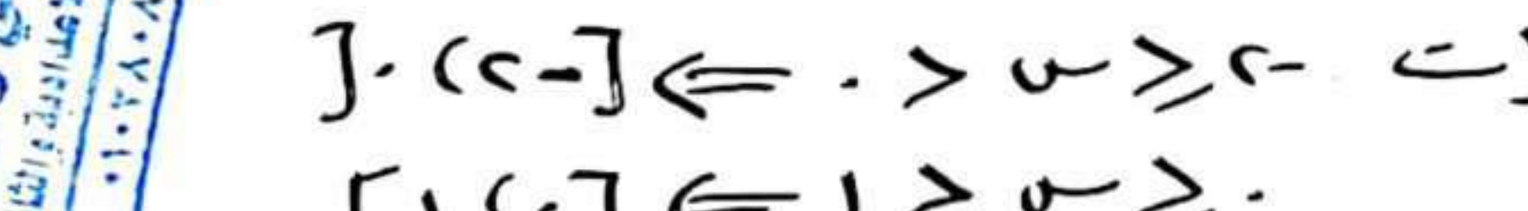
حيث المجال

① د(س) = { ٢ - س ، س < ٠
         { س - ٢ ، س > ٠

الدالة معرفة على فترتين س < ٠ ⇐ س ∈]-∞ ، ٢[

س > ٠ ⇐ س ∈]٠ ، ٢[

∴ مجال الدالة =]-∞ ، ٢[∪]٠ ، ٢[= ح - {٠}



⑤ د(س) = { س² ، -٢ ≤ س < ٠
         { س ، ٠ ≤ س ≤ ١
         { ١/س ، ١ < س

② فترات -٢ ≤ س < ٠ ⇐ س ∈ [-٢ ، ٠[

٠ ≤ س ≤ ١ ⇐ س ∈ [٠ ، ١]

١ < س ⇐ س ∈]١ ، ∞[

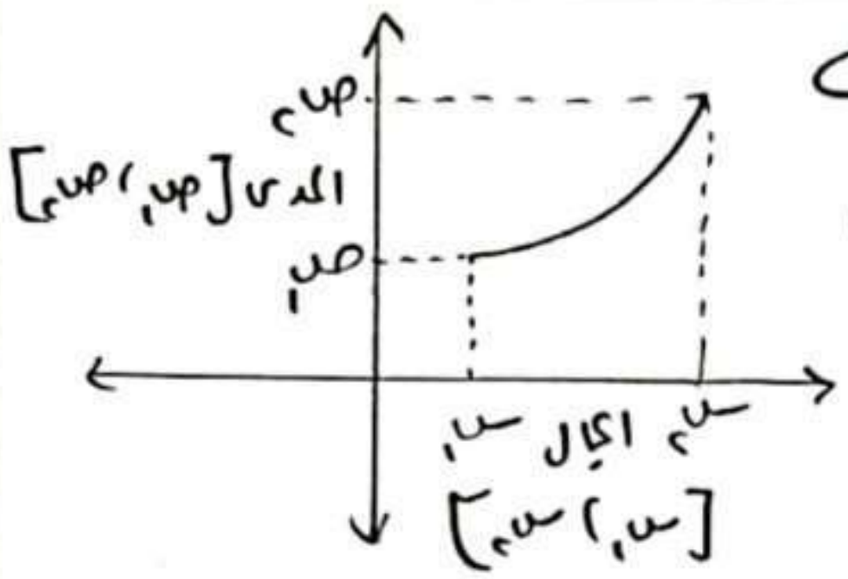
]-٢ ، ٠[∪ [٠ ، ١] ∪]١ ، ∞[=]-٢ ، ∞[

نكته بايخة :- بيقولك مرة واحد رمى قنبلة جوا كليه الألسن كل لسان طار فى حته

(٦٦)

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تعيين المجال والمدى من الشكل البياني

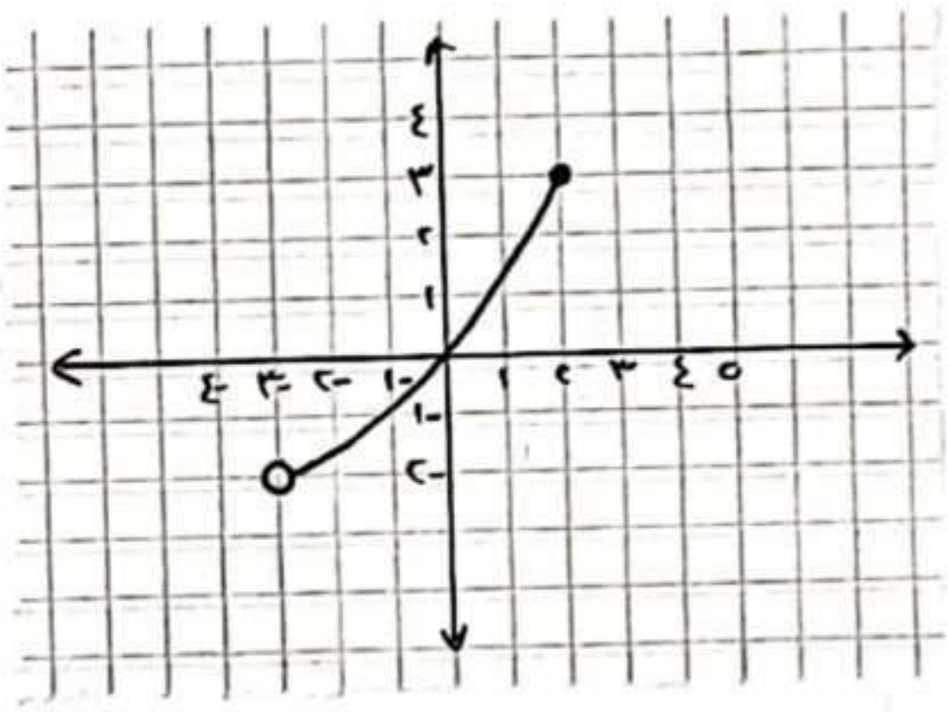


من الشكل البياني الآتي نستنتج الآتي

① مجال الدالة هو مجموعة الإحداثيات السينية لجميع النقط التي تنتمي إلى منحنى الدالة

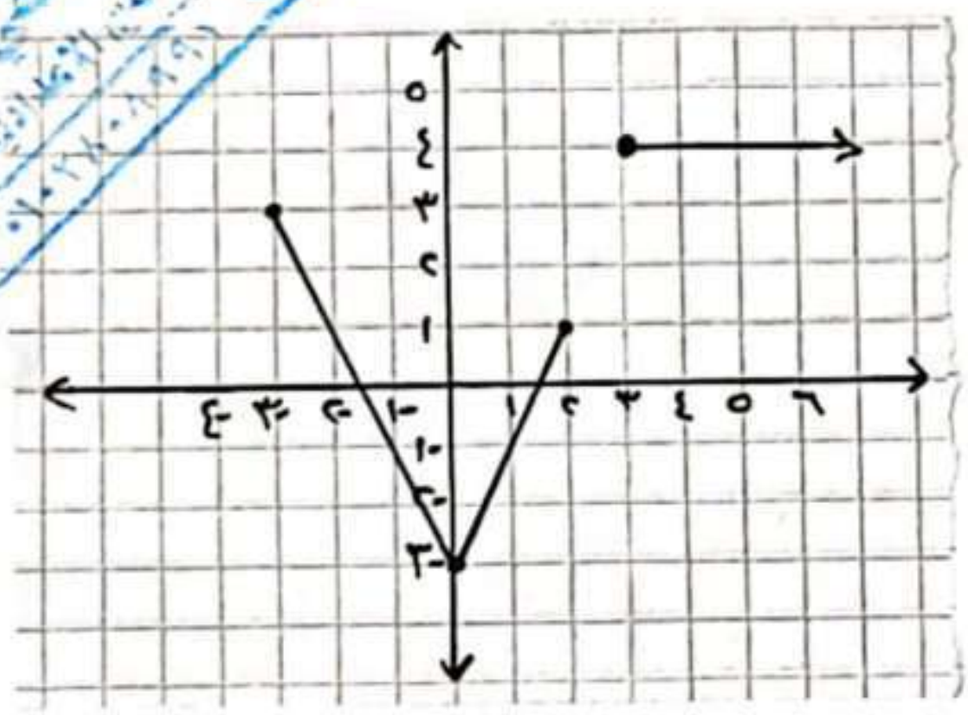
② مدى الدالة هو مجموعة الإحداثيات الصادية لجميع النقط التي تنتمي إلى منحنى الدالة

عين المجال والمدى للدوال الآتية



المجال =]-٣، ٢[

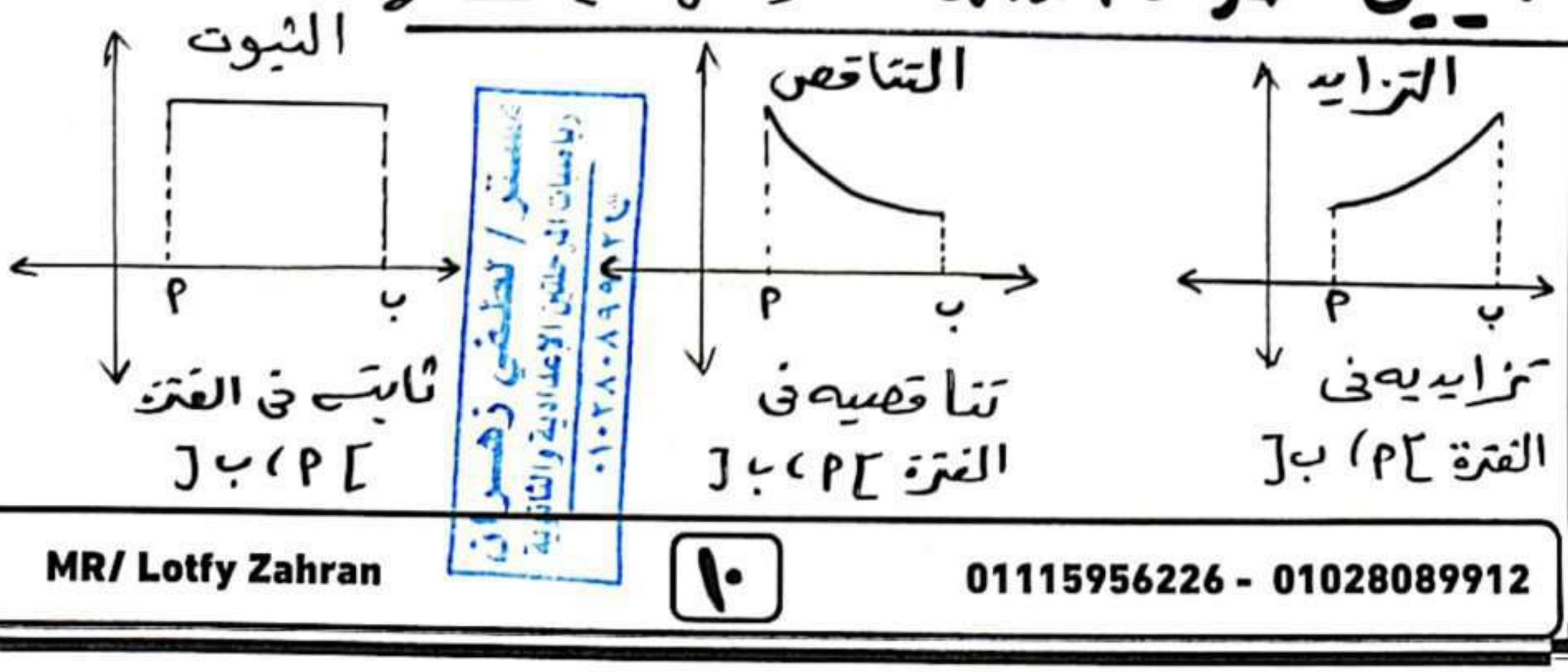
المدى =]-٢، ٣]



المجال = [-٣، ٢[∪ [٢، ٥]

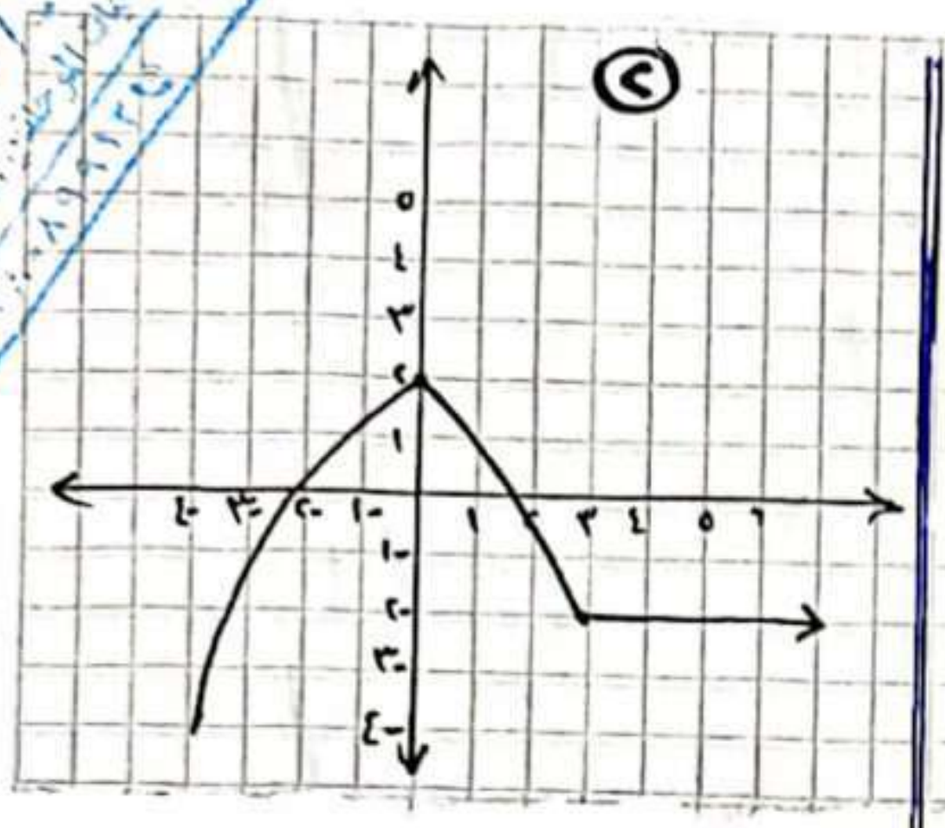
المدى [-٣، ٣] ∪ {٤}

تعيين اطراد الدالة من الشكل البياني لها



Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ابحث اطراد الدوال الآتية



تناقصية في الفترة $]-\infty, 0[$

تزايدية في الفترة $]0, 2[$

ثابتة في الفترة $]2, \infty[$

تزايدية في الفترة $]-\infty, 0[$

تناقصية في الفترة $]0, 3[$

ثابتة في الفترة $]3, \infty[$

الواجب :- أي العلاقات الآتية دالة وأيها لا :-

① $ص = ٢س + ٥$

② $ص = س^{٢} + ٣$

③ $ص^{٢} = س + ٤$

④ $ص = \sqrt{س + ٤}$

⑤ $(س - ص)^{٢} = ٥$

⑥ $ص^{٣} - س^{٢} = ٢$

⑦ $ص^{٤} = س^{٢} - ٤س + ٤$

⑧ $ص = ٢$

⑨ $س = ٣$

⑩ $ص = ٣ جا ٢س + جتا ٢س$

⑪ $س ص + ص = ٢س + ٢$

السؤال الثاني :- عين مجال كل من الدوال الآتية

① $د(س) = \frac{١ + س^{٢}}{١ - س}$

② $د(س) = \frac{٥ + س}{٩ - س^{٢}}$

③ $د(س) = \frac{٥ + س}{٩ + س^{٢}}$

④ $د(س) = \frac{٢ + س}{٦ - س - س^{٢}}$

⑤ $د(س) = \frac{٣ + س^{٢}}{٢ + س - ٣س^{٢}}$

⑥ $د(س) = \frac{١ + س^{٤}}{٤س + س^{٤}}$

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

⑦ $د(س) = \frac{س^4 - 1}{س^3 + 12س}$ ⑧ $د(س) = \frac{5 + 2س}{س^2 + س + 1}$

⑨ $د(س) = \frac{س + 1}{س^3 + 1}$ ⑩ $د(س) = \frac{3 + س}{3س^2 - س - 2}$ ⑪ $د(س) = \frac{7}{س^3 - س}$

السؤال الثالث :- عين مجال الدوال الآتية

① $د(س) = \sqrt{س - 3}$ ② $د(س) = \sqrt{2 - س}$ ③ $د(س) = \sqrt[3]{س - 5}$

④ $د(س) = \sqrt[4]{س^4 + 3}$ ⑤ $\sqrt{س^2 - س - 6}$ ⑥ $د(س) = \frac{3}{\sqrt{س - 3}}$

⑦ $د(س) = \frac{5}{\sqrt{9 - س^2}}$ ⑧ $د(س) = \frac{1}{\sqrt{س^2 - 3س + 3}}$ ⑨ $د(س) = \sqrt{4 - س^2}$

⑩ $د(س) = \sqrt{16 - س^4}$ ⑪ $د(س) = \frac{5}{\sqrt{س} - 1}$ ⑫ $د(س) = \begin{cases} 1 - س^2 & ، س < 2 \\ 3 & ، 2 \leq س < 4 \end{cases}$

⑬ $د(س) = \begin{cases} س & ، 0 < س \leq 1 \\ 2 - س & ، 1 < س \leq 2 \end{cases}$ ⑭ $د(س) = \begin{cases} س^2 - 1 & ، س \geq 2 \\ -5 & ، 2 < س < 4 \end{cases}$

السؤال الرابع :- ① اذا كان مجال الدالة $د(س) = \frac{2}{س^2 - 6س + ك}$ هو $ح - \{3\}$

فإن $ك = ...$ $(0 ، 9 ، \pm 18)$

② اذا كانت $د(س) = \begin{cases} -س^3 & ، 3 < س \leq 8 \\ 3س + 1 & ، س < 8 \end{cases}$ فإن $د(10) = ...$

$(-37 ، 31 ، 43)$

③ جميع العلاقات الآتية تمثل ص دالة في س ما عدا العلاقة

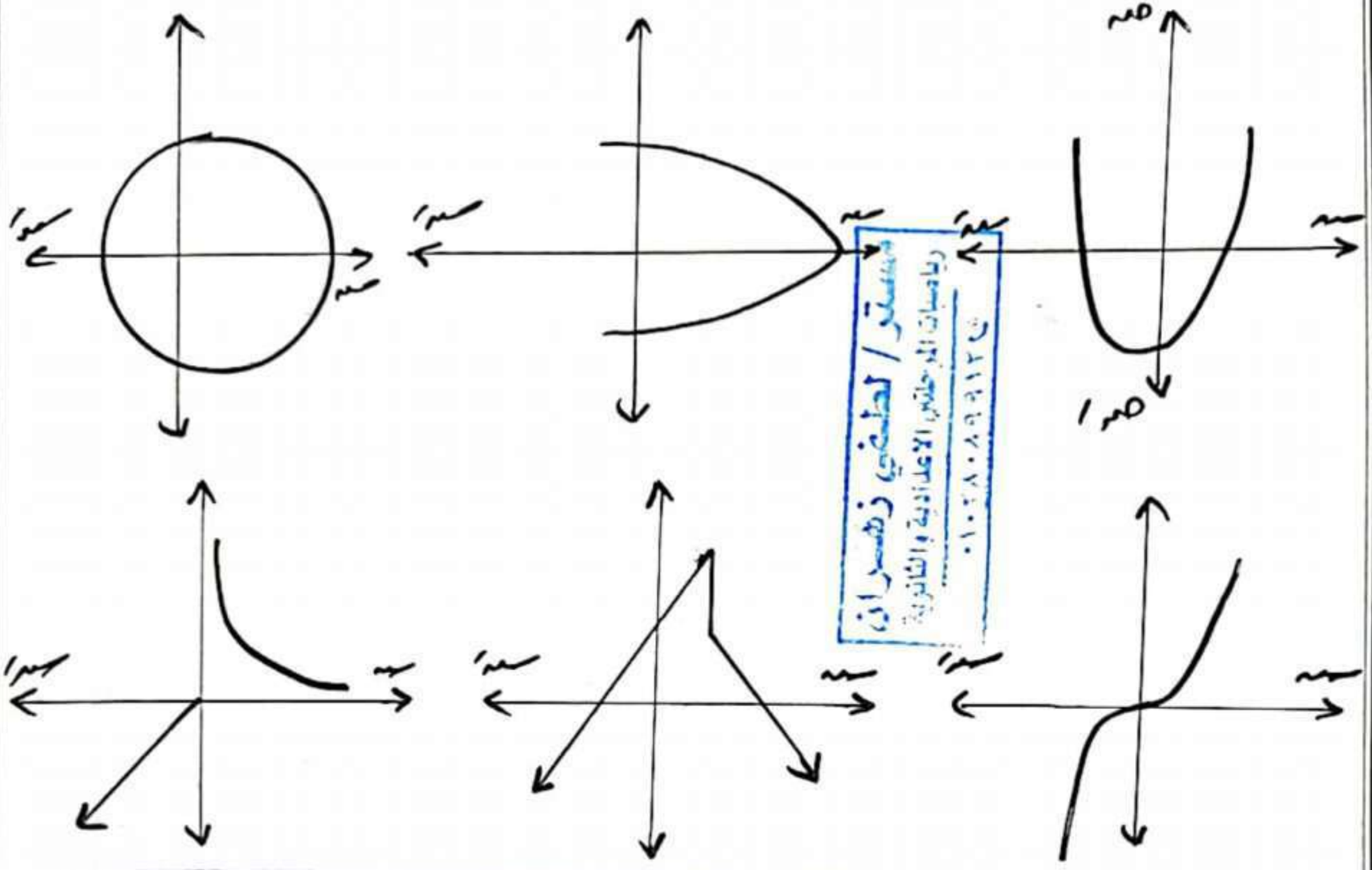
ⓐ $ص = 3س + 1$ ⓑ $ص = س^2 - 4$ ⓒ $س = ص^2 - 2$

ⓓ $ص = جا 2س$

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

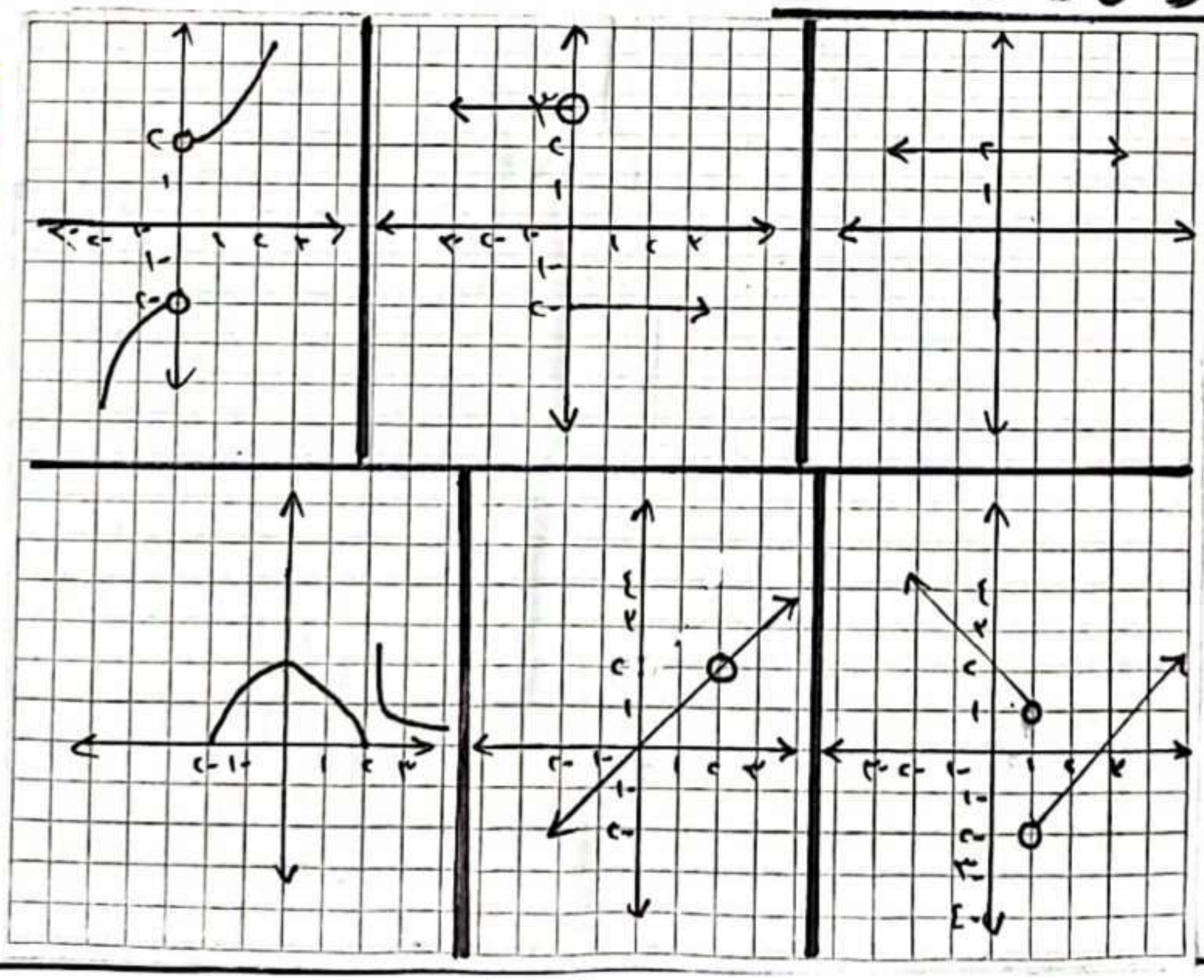
Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

السؤال الخامس : اى من الاشكال الآتية دالة وايلاه



مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١١١٥٩٥٦٢٢٦

السؤال السادس عين مجال ومدى الدوال الآتية ثم ابحث اطرادها



مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١١١٥٩٥٦٢٢٦

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

العمليات على الدوال - تركيب دالتين

اذا كانت $د_1$ ، $د_2$ دالتين مجالاهما $م_1$ ، $م_2$ فإن

① $(د_1 \pm د_2)(س) = د_1(س) \pm د_2(س)$ ، مجال $(د_1 \pm د_2)$ هو $م_1 \cap م_2$

② $(د_1 \times د_2)(س) = د_1(س) \times د_2(س)$ ، مجال $(د_1 \times د_2)$ هو $م_1 \cap م_2$

③ $\left(\frac{د_1}{د_2}\right)(س) = \frac{د_1(س)}{د_2(س)}$ حيث $د_2(س) \neq 0$

مجال $\left(\frac{د_1}{د_2}\right)$ هو $(م_1 \cap م_2) - ص(د_2)$ حيث $ص(د_2)$ اصفار $د_2$

@SecondaryTwo_M

عارف انك مش فاهم حاجه من الهبل ده ... يلا على المثال

مثال: $د(س) = س^2 - س - 12$ ، مجالها هو $[-4, 8]$

$ر(س) = س - 4$ ، مجالها هو $[-7, 4]$ أوجد

① $(د + ر)(س)$ ② $(د - ر)(س)$ ③ $(د \times ر)(س)$ ④ $\left(\frac{د}{ر}\right)(س)$ ⑤ $\left(\frac{ر}{د}\right)(س)$

الحل

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢ ت

$(د + ر)(س) = س^2 - س - 12 + س - 4 = س^2 - 16$

المجال $= [-4, 8] \cap [-7, 4] = [-4, 4]$

$(د - ر)(س) = س^2 - س - 12 - س + 4 = س^2 - 2س - 8$

المجال $= [-4, 4]$

$(د \times ر)(س) = (س^2 - س - 12)(س - 4) = س^3 - 4س^2 - س + 12س + 48$

$= س^3 - 5س^2 - 8س + 48$ المجال $= [-4, 4]$

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\left(\frac{د}{ر}\right)(س) = \frac{س^2 - س - ١٢}{س - ٤} = \frac{(س+٣)(س-٤)}{س-٤} = (س+٣)$$

المجال $= [-٤، ٤] - \{٤\} = [-٤، ٤[$

لاحظ ان اصفار الداله الثانيه $ر(س) =$ صفر $\Leftarrow س - ٤ = ٠$

$س = ٤$

$$\left(\frac{ر}{د}\right)(س) = \frac{س - ٤}{س^2 - س - ١٢} = \frac{س-٤}{(س+٣)(س-٤)} = \frac{١}{س+٣}$$

المجال $= [-٤، ٤] - \{-٣، ٤\} = [-٤، ٤[- \{-٣\}$

$(د + ر)(٣) = س^2 - ١٦ = ٩ - ١٦ = -٧$

$(د + ر)(٥)$ غير معرفه لان ٥ ∉ مجال الداله $[-٤، ٤]$

$\left(\frac{د}{ر}\right)(٢) = س + ٣ = ٢ + ٣ = ٥$

مثال ٢ $د(س) = \frac{س}{س+١}$ $ر(س) = \frac{س+١}{س-٢}$

اوجد ① $(د + ر)(س)$ ② $(د \times ر)(س)$ ③ $\left(\frac{د}{ر}\right)(س)$

ثم اوجد قيمه $(د + ر)(٣)$ ، $(د \times ر)(٣)$ ، $\left(\frac{د}{ر}\right)(-١)$ ، $\left(\frac{د}{ر}\right)(١)$

الحل

$$(د + ر)(س) = \frac{س}{س+١} + \frac{س+١}{س-٢} = \frac{س(س-٢) + (س+١)^2}{(س+١)(س-٢)}$$

$$= \frac{س^2 - ٢س + س^2 + ٢س + ١}{(س+١)(س-٢)} = \frac{٢س^2 + ١}{(س+١)(س-٢)}$$

مجال $د = ح، ح = ح - \{-١، ٢\}$ مجال $ر = ح، ح = ح - \{٢\}$

∴ المجال المشترك للداليتين $ر$ ، $ر = ح ∩ ح = ح - \{-١، ٢\}$

∴ $(د + ر)(٣) = \frac{١ + ٢ \times ٣^2}{(٣-٢)(٣+١)} = \frac{١٩}{٤}$

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$(د \times ر)(س) = \frac{س}{ر-س} \times \frac{س}{س+1} = \frac{س}{ر-س} \times \frac{س+1}{س}$

المجال $= ح - \{-1، ر\}$ ، $(د \times ر)(٣) = \frac{٣}{ر-٣} = ٣$

$(\frac{د}{ر})(س) = \frac{س}{س+1} \div \frac{س}{ر-س} = \frac{س}{س+1} \times \frac{ر-س}{س}$

$= \frac{س(ر-س)}{(س+1)^{٢}}$ ، المجال $= ح - \{-1، ر\}$ ← لاحظ اختصار الدالة الثانية $= ح - \{-1\}$

$(\frac{د}{ر})(1) = \frac{1(ر-1)}{(1+1)^{٢}} = \frac{-1}{٤}$ ، $(\frac{د}{ر})(-1)$ غير معرفة لأن $-1 \notin$ مجال $\frac{د}{ر}$

مثال ٣ $د_1(س) = \sqrt{س-ر}$ ، $د_٢(س) = \sqrt{٥-س}$ ، $د_٣(س) = س-٣$

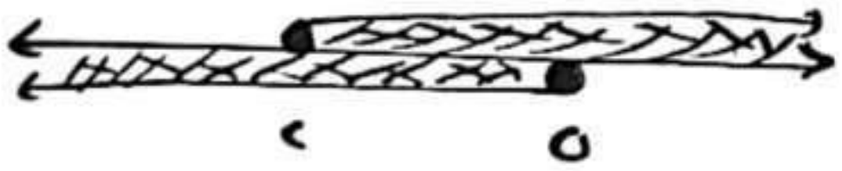
أوجد $(د_1 + د_٢)$ ، $(د_٢ - د_٣)$ ، $(د_1 \times د_٢)$ ، $(\frac{د_٢}{د_٣})$ ، $(\frac{٣د}{د_1})$

الحل

مجال $د_1 = م_1 = [ر، \infty[$ حيث $س - ر \geq ٠ \Leftarrow س \geq ر$

مجال $د_٢ = م_٢ =]-\infty، ٥]$ حيث $٥ - س \geq ٠ \Leftarrow -س \geq -٥ \Leftarrow س \leq ٥$

مجال $د_٣ = م_٣ = ح =]-\infty، \infty[$



$\therefore (د_1 + د_٢)(س) = \sqrt{س-ر} + \sqrt{٥-س}$

$\therefore$ المجال $= [ر، ٥]$

$\therefore (د_٢ - د_٣)(س) = \sqrt{٥-س} - (س-٣) = \sqrt{٥-س} - س + ٣$

$\therefore$ المجال $=]-\infty، ٥]$

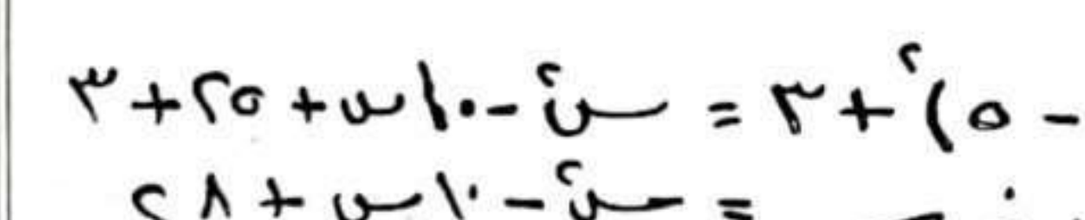
$(د_1 \times د_٢)(س) = \sqrt{س-ر} \times \sqrt{٥-س}$ $\therefore$ المجال $= [ر، ٥]$

$= \sqrt{(س-ر)(٥-س)} = \sqrt{-س^{٢} + ١٠س - ٥س} = \sqrt{-س^{٢} + ٧س - ١٠}$

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$(\frac{د}{د س})(س) = \frac{\sqrt{٥ - س}}{٣ - س}$ ، المجال $=]-\infty ، ٥] - \{٣\}$

$(\frac{د}{د س})(س) = \frac{\sqrt{س - ٢}}{س - ٢}$ ،



المجال $= [٢ ، \infty[- \{٢\} =]٢ ، \infty[$ لاحظ ان اصغر مجال الدالة الثانية هى $\{٢\}$

تركيب الدوال :- مثال

إذا كان $د(س) = س^٢ + ٣$ $ر(س) = س - ٥$

أوجد $(د \circ ر)(س) = (س - ٥)^٢ + ٣ = س^٢ - ١٠ س + ٢٥ + ٣$

$= س^٢ - ١٠ س + ٢٨$ عوض بالقانون فى الاول

$(ر \circ د)(س) = (س^٢ + ٣) - ٥ = س^٢ - ٢$

خلى بالك $(د \circ ر)(س) = د(ر(س))$

$(ر \circ د)(س) = ر(د(س))$

مثال : $د(س) = ٢ س + ١$ ، $ر(س) = س^٢ - ٣$

أوجد $(د \circ ر)(س) = ٢(س^٢ - ٣) + ١ = ٢ س^٢ - ٦ + ١$

$= ٢ س^٢ - ٥$

أوجد $(ر \circ د)(س) = (٢ س + ١)^٢ - ٣ = ٤ س^٢ + ٤ س + ١ - ٣$

$= ٤ س^٢ + ٤ س - ٢$

أوجد $(د \circ د)(س) = ٢(٢ س + ١) + ١ = ٤ س + ٢ + ١ = ٤ س + ٣$

$د(س) = ٢ س + ١$

$د(س) = ٢ س + ١$

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ٣ : د(س) = س^{٣} ، ر(س) = س + ١ أوجد

① (د ○ ر)(١) ⇐ ر(١) = ١ + ١ = ٢ د(٢) = ٢^{٣} = ٨

∴ (د ○ ر)(١) = ٨ هاتطلع من الخلف للامام

عوض فى ر وبعدين فى د

أو بحكمه تركب الدالتين وبعدين تعوض ... أو ١١١ ى ؟

(د ○ ر)(س) = (س + ١)^{٣} = (١ + ١)^{٣} = ٢^{٣} = ٨ ذى بعض

② (ر ○ د)(١) ⇐ د(١) = ١^{٣} = ١ ⇐ ر(١) = ١ + ١ = ٢

∴ (ر ○ د)(١) = ٢

③ (د ○ د)(-١) ⇐ د(-١) = (-١)^{٣} = -١ ⇐ د(-١) = (-١)^{٣} = -١

∴ (د ○ د)(-١) = -١

④ (ر ○ ر)(-١) ⇐ ر(-١) = -١ + ١ = صفر ⇐ ر(٠) = ٠ + ١ = ١

مثال ٤

د(س) = ٥س - ٢ ، ر(س) = { س + ١ ، س ≤ ٣ ؛ ٣س ، س > ٣ }

أوجد (د ○ ر)(٤) ، (ر ○ د)(١)

الحل

(د ○ ر)(٤) ⇐ بس خلى بالك هعوض فى س + ١

ر(٤) = ٤ + ١ = ٥ ⇐ د(٥) = ٥ × ٥ - ٢ = ٢٣

(ر ○ د)(١)

د(١) = ٥ × ١ - ٢ = ٣ ر(٣) ⇐ هعوض فى ٢س

ر(٣) = ٢ × ٣ = ٦

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Scanned with CamScanner

$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 1$ ، $x \in [-1, 4]$ أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة

الحل

$f'(x) = 6x^2 - 12x = 6x(x-2)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, 2$

x	-1	0	2	4
$f(x)$	-7	1	-7	33

القيمة العظمى المطلقة $= 33$ عند $x = 4$

القيمة الصغرى المطلقة $= -7$ عند $x = -1, 2$

أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ ، $x \in [-\frac{1}{2}, 3]$

الحل

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, 2$

x	$-\frac{1}{2}$	0	2	3
$f(x)$	$-\frac{1}{8}$	1	-3	1

القيمة العظمى المطلقة $= 1$ عند $x = 0, 3$

القيمة الصغرى المطلقة $= -3$ عند $x = 2$

أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ ، $x \in [0, 2]$

الحل

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, 2$

x	0	2
$f(x)$	1	-3

القيمة العظمى المطلقة $= 1$ عند $x = 0$

القيمة الصغرى المطلقة $= -3$ عند $x = 2$

أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ ، $x \in [0, 3]$

الحل

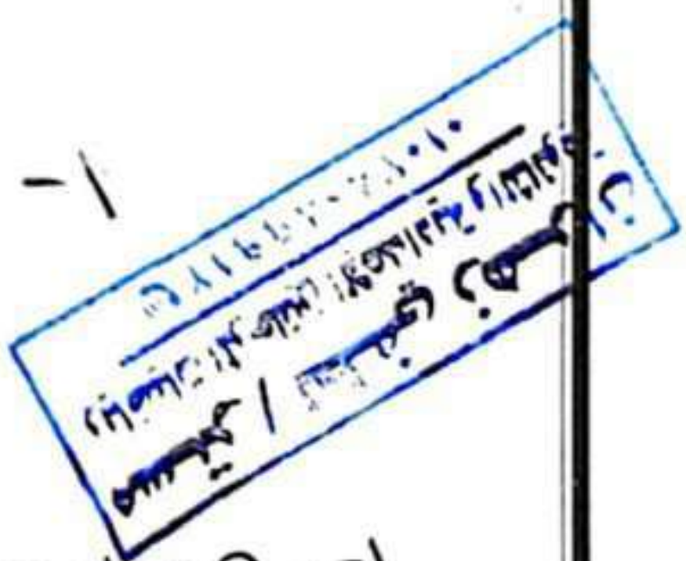
$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, 2$

x	0	2	3
$f(x)$	1	-3	1

القيمة العظمى المطلقة $= 1$ عند $x = 0, 3$

القيمة الصغرى المطلقة $= -3$ عند $x = 2$



⑦ $د(س) = \frac{٣}{س - ٤}$ $\quad$ $ر(س) = \frac{٤}{س + ٢}$

أوجد مجال $(د \circ ر)$ ، ثم اجب مجال المقابلة ∩ مجال التركيب

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١١١٥٩٥٦٢٢٦ - ٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

مجال $ر(س) = م_{١} = ح - \{-٢\} = ح - \{-٢\}$

$(د \circ ر)(س) = \frac{٣}{\frac{٤}{س + ٢} - ٤}$ ⇐ عشان أجيب مجال ساعتها بقام بصفر المقام

$\frac{٤}{س + ٢} - ٤ = ٠ \Leftarrow \frac{٤}{س + ٢} = \frac{٤}{١} \Leftarrow ٤س + ٨ = ٤ \Leftarrow ٤س = -٤$

$٤س = -٤ \Leftarrow س = -١$ ∴ مجال التركيب $= م_{١} = ح - \{-١\}$

∴ مجال $(د \circ ر) = (ح - \{-٢\}) \cap (ح - \{-١\}) = ح - \{-٢، -١\}$

⑧ $د(س) = \sqrt{س - ٢}$ $\quad$ $ر(س) = \sqrt{٦ - س}$

أوجد مجال كل من ① $د \circ ر$ ② $ر \circ د$ ← حل انت

الحل هتطلع [٣٨(ج)]

لايجاد $(د \circ ر) \Leftarrow$ مجال $ر(س) = م_{٢} \Leftarrow ٦ - س \geq ٠$

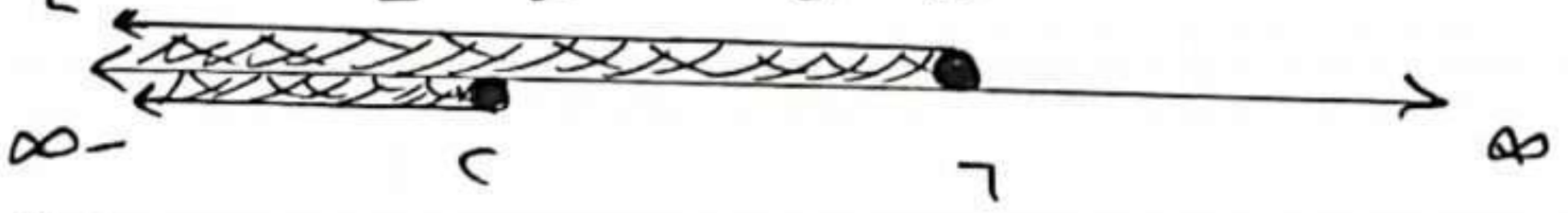
$-س \geq -٦ \Leftarrow س \leq ٦$ ∴ $م_{٢} =]-∞، ٦]$

$(د \circ ر)(س) = \sqrt{٦ - س - ٢}$ $\Leftarrow$ ∴ $\sqrt{٦ - س} - ٢ \geq ٠$

$\sqrt{٦ - س} \geq ٢$ بتربيع الطرفين $\Leftarrow ٦ - س \geq ٤ \Leftarrow -س \geq -٢$

$-س \geq -٢ \Leftarrow س \leq ٢$ ∴ مجال التركيب $=]-∞، ٢]$

∴ مجال $(د \circ ر) =]-∞، ٢] \cap [٦، ∞-[= [٢، ∞-[$



عايزك تجهد معايا ... عيب كدا (ج)

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

⑨ د(س) = $\sqrt{س-1}$ ، ر(س) = س^{2} - ٣

أوجد (د ٥ ر)(س) في أبسط صورة هو ضحاً المجال ثم أوجد (د ٥ ر)(٥)

مستر/ لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩١٢٣

الحل

(د ٥ ر)(س) = $\sqrt{س^{2}-٣-١}$ = $\sqrt{س^{2}-٤}$

لابد أن يكون المقدار تحت الجذر ≥ ٠ ← الحل

س^{2} - ٤ = ٠ ⇐ (س - ٢)(س + ٢) = ٠

س = ٢ | س = -٢

مثل ، يخالف ، مثل

+ + + ٢- - - - - ٢ + + +

د(س) موجبة على]-∞ ، -٢] ∪ [٢ ، ∞[

د(س) سالبة على]-٢ ، ٢[

د(س) = صفر على {-٢ ، ٢}

∴ مجموعة الحل =]-∞ ، -٢] ∪ [٢ ، ∞[∴ المجال = ح -]-٢ ، ٢[

لكي نجد مجال الدالة الثانية ⇐ مجال ر(س) = ح

∴ مجال (د ٥ ر) = ح ∩ (ح -]-٢ ، ٢[) = ح -]-٢ ، ٢[

الواجب: ① د(س) = س^{2} - ٧س + ٥ مجالها ح$^{+}$

ر(س) = س^{2} - ٥ مجالها =]-∞ ، ٤]

أوجد ① (د + ر)(س) ② (د - ر)(س) ③ (د × ر)(س) ④ $(\frac{د}{ر})$(س)

② د(س) = س^{2} - ٤ ، ر(س) = $\sqrt{س-١}$

أوجد ① مجال كل من (د + ر) ، (د - ر) ، $(\frac{د}{ر})$ ، $(\frac{ر}{د})$

② القيمة العددية لكل من إن أمكن

(د + ر)(٥) ، (د ٠ ر)(٣) ، $(\frac{د}{ر})$(٣) ، $(\frac{ر}{د})$(-٢)

③ د(س) = س^{2} - ٤س ، ر(س) = $\sqrt{س+٢}$ ، ع(س) = $\sqrt{٤-س}$

أوجد قاعدة ومجال كلاً من ① (د + ر) ② (ر - ع) ③ (د ٠ ع) ④ $(\frac{ع}{د})$

احسب القيمة العددية لكل منها

(ر - ع)(١) ، (د ٠ ع)(٥) ، $(\frac{ع}{د})$(٣)

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

أ/ لطفي زهران
مدرس الرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢٥

④ عين مجال كل من الدوال الآتية :-

① $د(س) = \frac{1}{س} + \frac{1}{س+٤}$

② $د(س) = \frac{س-١}{س^{٢}-١} + \frac{١}{س+١}$

③ $د(س) = \frac{س}{\sqrt{١٢ - س}}$

④ $د(س) = \frac{٣س}{\sqrt{٢س-١}}$

⑤ $د(س) = \sqrt{س-١} + \sqrt{س+٢}$

⑥ $د(س) = \sqrt[٣]{س-٤} + \sqrt{س-٢}$

⑦ $د(س) = \frac{\sqrt{س-٤}}{س-٦}$

⑧ $= \frac{س+١}{\sqrt[٣]{س-١}}$

⑨ $د(س) = \frac{\sqrt{س-٣}}{\sqrt{٥-س}}$

⑩ $\frac{\sqrt{س-٣}}{س^{٢}-٤}$

⑪ $د(س) = \frac{\sqrt{س-٣}}{\sqrt{٥-س}}$

⑫ $د(س) = \begin{cases} ٢-س & ، س < ٢ \\ س+٢ & ، س > ٢ \end{cases}$ $ر(س) = س$ أوجد كلاً من

① $(د \circ ر)(س)$ ② $(\frac{د}{ر})(س)$ ③ $(\frac{ر}{د})(س)$ مع تعيين المجال لكل منهم

⑬ $د(س) = ٣س+١$ $ر(س) = س^{٢}-٥$ $هـ(س) = س^{٣}$

أوجد ① $(د \circ ر)(٢)$ ② $(ر \circ د)(-٣)$ ③ $(ر \circ هـ)(١)$ ④ $(هـ \circ د)(٠)$

⑭ $د(س) = \frac{١}{س}$ $ر(س) = س+٣$ أوجد $(د \circ ر)(س)$ وحدد مجالها $(ر \circ د)(س)$ مجالها

⑮ $د(س) = س^{٢}-٣$ $ر(س) = \sqrt{س-٢}$ ثم أوجد $(د \circ ر)(٣)$

أوجد $(د \circ ر)(س)$ في أبسط صورة موضحاً المجال

⑯ $د(س) = \sqrt{س-٢}$ $ر(س) = ٤-س$

أوجد ① $د \circ ر$ ② $ر \circ د$ موضحاً مجال كلاً منهم

⑰ $د(س) = ٢س+١$

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الدوال الزوجيه والفرديه - الدوال الاحاديه

عشان نعرف الدالة زوجيه ولا فرديه عندك طريقتين جبريًا وبيانيًا

أولاً:- جبريًا

@SecondaryTwo_M

يقال ان الدالة زوجيه اذا كانت $د(-س) = د(س)$

يقال ان الدالة فرديه اذا كانت $د(-س) = -د(س)$

أمثله:- ابحث نوع الدوال من حيث كونها زوجيه أو فرديه

① $د(س) = س^2$ هجيب $د(-س) = (-س)^2 = س^2$

$\therefore د(س) = د(-س)$ ∴ الدالة زوجيه

② $د(س) = 2س^3$ هجيب $د(-س) = 2(-س)^3 = -2س^3$

$\therefore د(س) = -د(س)$ ∴ الدالة فرديه

③ $د(س) = \sqrt{س - 1}$ هجيب $د(-س) = \sqrt{-س - 1} = \sqrt{-(س+1)}$

$\therefore د(س) \neq د(-س)$ ، $د(س) \neq -د(س)$ ∴ الدالة ليست زوجيه وليست فرديه

④ $د(س) = س^5 - 5$ ، $س \in [-2, 2]$ هنا فيه فكره

الدالة ليست زوجيه وليست فرديه ⇐ ليه يا مستر

لأن اى رقم لازم يكون $\in$ لمجال الدالة بالقيمه السالبه والقيمه الموجبه

$-2 \in [-2, 2]$ ولكن $2 \notin [-2, 2]$ بارب تكون وصلت

⑤ $د(س) = جتاس$ هجيب $د(-س) = جتا(-س) = جتاس$

$\therefore د(س) = د(-س)$ ∴ الدالة زوجيه

لاحظ:-

دوال فرديه:
- $جا(-س) = -جاس$
- $قتا(-س) = -قتاس$
- $ظا(-س) = -ظاس$
- $ظتا(-س) = -ظتاس$

ولكن

دوال زوجيه:
- $جتا(-س) = جتاس$
- $قا(-س) = قاس$

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ملاحظات هامه جداً

١ إذا كانت : د (- س) ≠ د (س) ، د (- س) ≠ - د (س)
فإن الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

٢ عند بحث نوع الدالة د من حيث كونها زوجية أو فردية يجب تحقق شرط انتماء كل من العنصرين س ، - س إلى مجال الدالة وإذا لم يتحقق الشرط كانت الدالة ليست زوجية وليست فردية دون الحاجة لإيجاد د (- س)

٣ إذا كانت الدالة مجالها ح - {أ} ، أ ≠ صفر فإن الدالة ليست زوجية وليست فردية بدون بحثها.

٤ إذا كانت الدالة زوجية ومنحنى الدالة يمر بالنقطة (أ ، ب) فإن منحنى الدالة أيضًا يمر بالنقطة (- أ ، ب)

٥ إذا كانت الدالة فردية ومنحنى الدالة يمر بالنقطة (أ ، ب) فإن منحنى الدالة أيضًا يمر بالنقطة (- أ ، - ب)

٦ الدالة الصفرية د : د (س) = ٠ هى زوجية وفردية فى نفس الوقت.

⑦ د(س) = أ $س^{ن}$
حيث أ ≠ ٠
ن ∈ $ص^{+}$
فإنه تكون الدالة زوجية
اذا كان له عدد زوجى
وتكون الدالة فردية
اذا كان له عدد فردى
د(س) = ٥ $س^{٢}$ زوجية
د(س) = ٥ $س^{٣}$ فردية

خواص هامه :

د١ ، د٢ دالة زوجية فإنه
ر١ ، ر٢ دالة فردية

① زوجية ± زوجية = زوجية
② فردية ± فردية = فردية
③ زوجية ± فردية = ليست زوجية ولا فردية
④ كل من (زوجية × زوجية) أو $\left(\frac{\text{زوجية}}{\text{زوجية}}\right)$ = زوجية
⑤ كل من (فردية × فردية) أو $\left(\frac{\text{فردية}}{\text{فردية}}\right)$ = زوجية
⑥ كل من (زوجية × فردية) أو $\left(\frac{\text{زوجية}}{\text{فردية}}\right)$ = فردية

اكتب نوع الدوال من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك

① د(س) = $س^{٢}$ + جتاس زوجية + زوجية = زوجية
كدا انا بحثت بمجرد النظر ... ممكن تشتغل عادى ذى ص٢٣

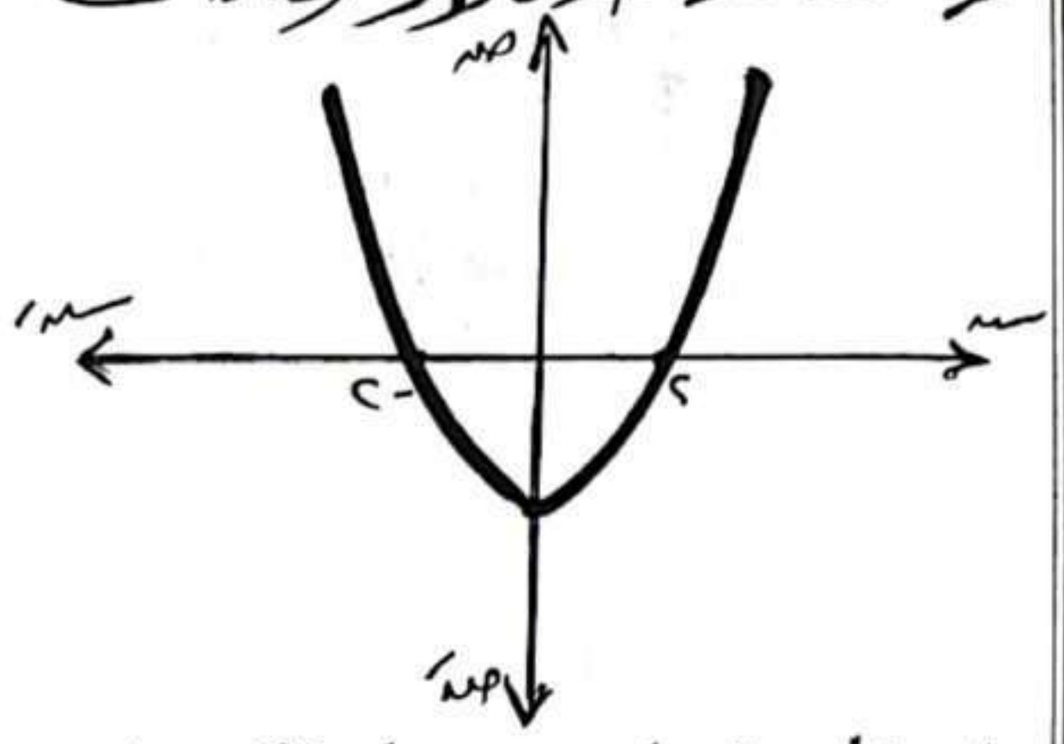
② د(س) = $س^{٣}$ + جاس فردية + فردية = فردية
③ د(س) = ٣ $س^{٤}$ ظاس زوجية × فردية = فردية
④ د(س) = ٤ $س^{٣}$ ظاس فردية × فردية = زوجية

مستر / لطفى زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

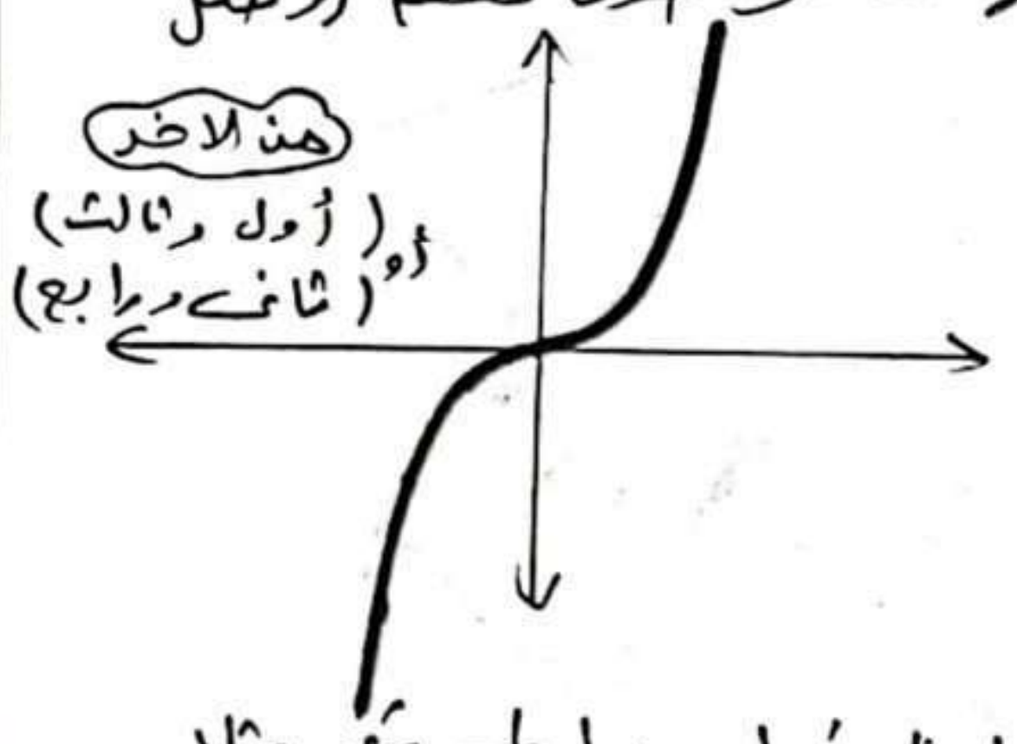
ثانيا :. بيانيا

① الدالة الزوجية يكون الشكل البياني لها متماثلاً حول محور الصادات



ملحوظة خطيرة :. لو المستقيم مثلا
يمر بنقطة (٣، ٥) لازم يمر بـ (-٣، ٥)
(-٢، ١) لازم يمر بـ (٢، ١)
يعني تثبت الصادات وتعكس الإشارات

② الدالة الفردية يكون الشكل البياني لها متماثلاً حول نقطة الأصل



ملحوظة خطيرة :. لو المستقيم مثلا
يمر بنقطة (٣، ٥) لازم يمر بـ (-٣، -٥)
(-٢، ١) لازم يمر بـ (٢، -١)
يعني تعكس الصادات والإشارات

عستور / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٥٩٩١٢

مثال «جامد» إذا كانت د دالة تربيعية حيث د(س) = أ س² + ب س + ٥ وكان منحنى الدالة يمر بالنقطة (١، ٦) فأوجد قيمة كل من أ، ب

الحل

∵ الدالة تربيعية والمنحنى مر بالنقطة (١، ٦) ∴ المنحنى يمر بالنقطة (-١، ٦)

عند النقطة (١، ٦) لاحظ د(س) = ص ∴ أ × (١)² + ب × ١ + ٥ = ٦

∴ أ + ب + ٥ = ٦ ← ①

عند النقطة (-١، ٦) لاحظ د(س) = ص ∴ أ × (-١)² + ب × -١ + ٥ = ٦

∴ أ - ب + ٥ = ٦ ← ② بجمع المعادلتين ① ②

أ + ب + ٥ = ٦
أ - ب + ٥ = ٦
٢أ + ١٠ = ١٢
٢أ = ٢
∴ أ = ١

بالتعويض في معادلة ①

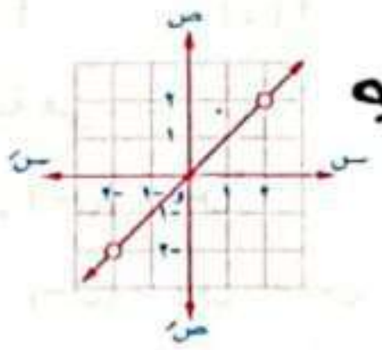
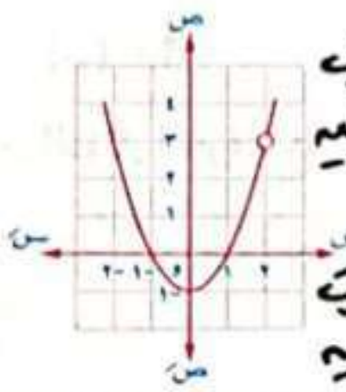
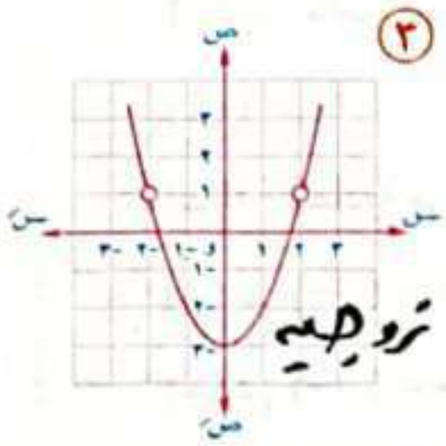
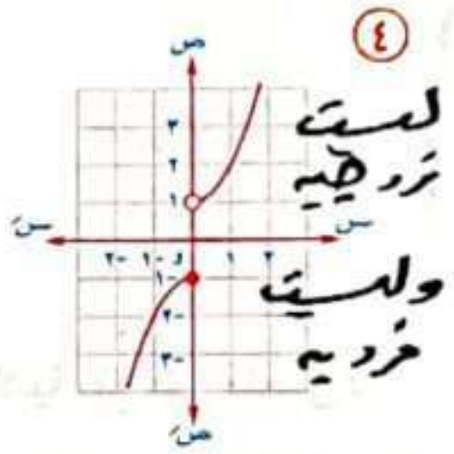
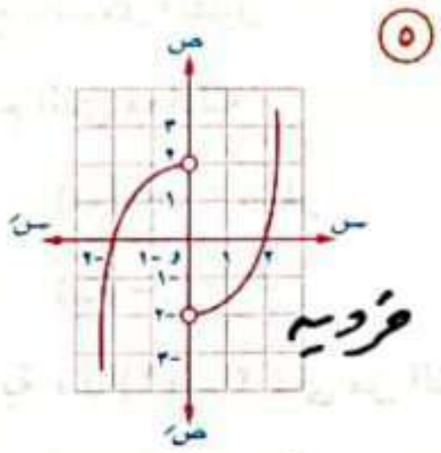
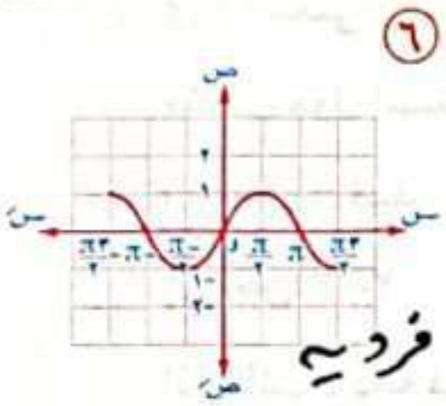
أ + ب + ٥ = ٦ عندما أ = ١
١ + ب + ٥ = ٦
ب + ٦ = ٦
∴ ب = صفر

عستور / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٥٩٩١٢

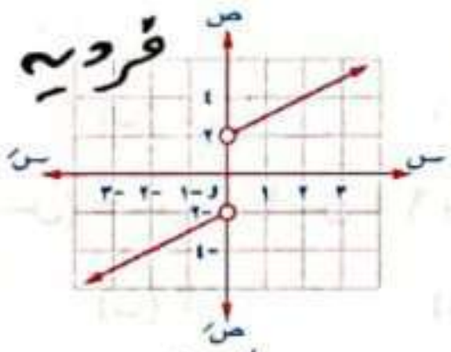
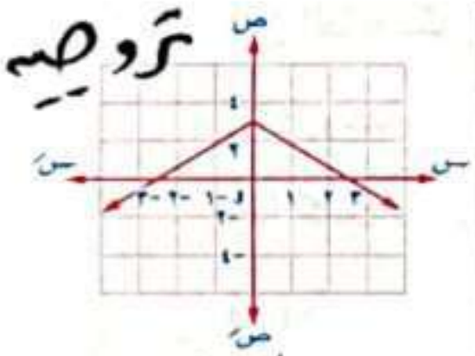
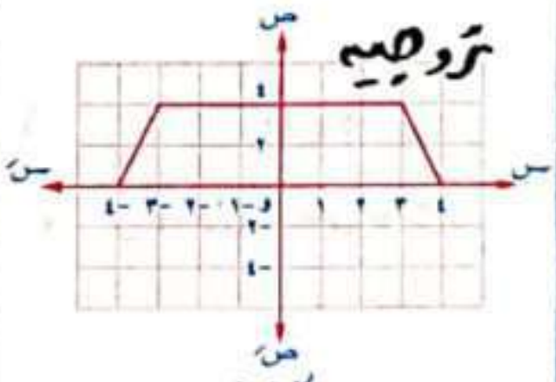
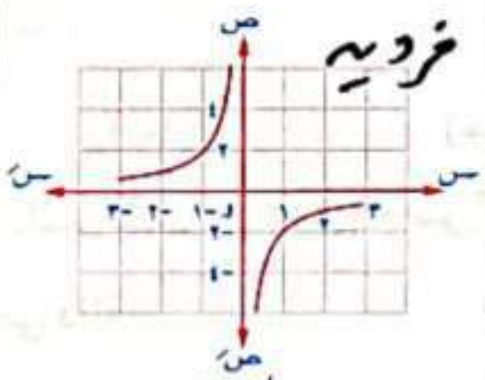
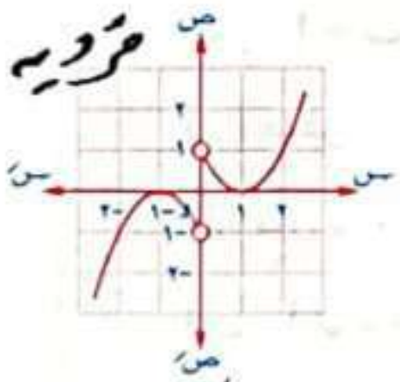
Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢٦

ادكر نوع كل من الدوال الممثلة بالأشكال البيانية الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

(١)  فردية	(٢)  ليست زوجية وليست فردية	(٣)  زوجية
(٤)  ليست زوجية وليست فردية	(٥)  فردية	(٦)  فردية

(٣) أوجد مدى كل دالة وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

ليست زوجية وليست فردية شكل (١)	 فردية شكل (٢)	 زوجية شكل (٣)
 زوجية شكل (٤)	 فردية شكل (٥)	 فردية شكل (٦)

تعاك الجيب المدى ① عكر ① المدى = {-٢، ٢}

② عكر ②]-∞، ∞[∪]-∞، -٢[أو ح - [-٢، ٢]

③ عكر ③]-∞، ٣[④ عكر ④ [٠، ٢]

⑤ عكر ⑤ ح - {٠} ⑥ ح

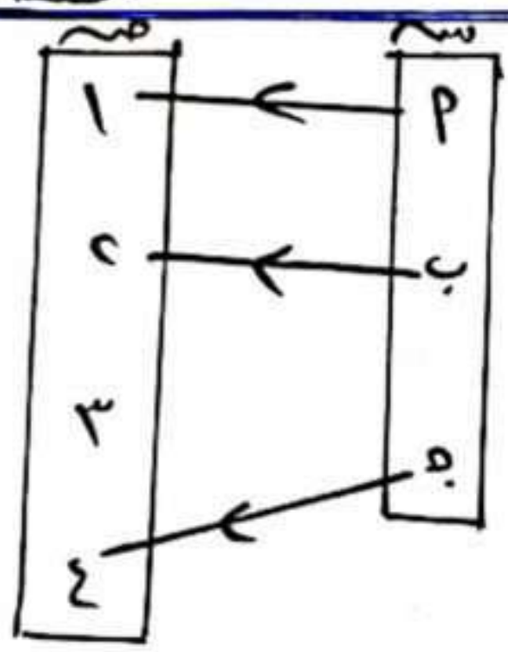
مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

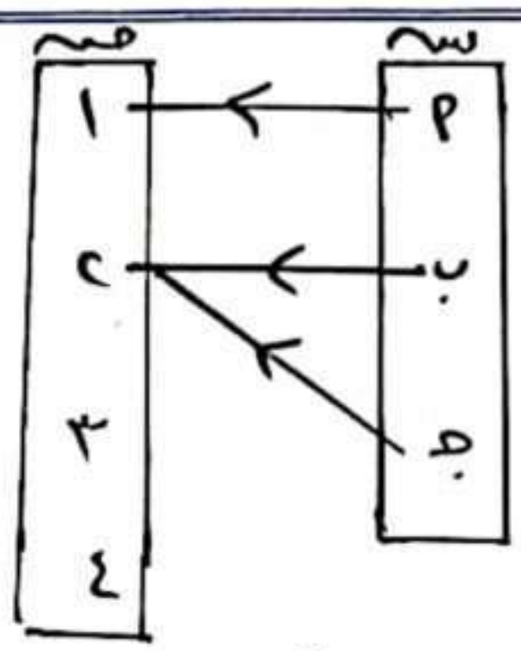
مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

الدالة الأحاديه :-

الدالة د : سـ ← صـ تسمى دالة أحاديه إذا كان
لكل م ، ب ∈ سـ ، د(م) = د(ب) فإن م = ب
أى انه لا يوجد عنصران فى مجال الدالة الاحاديه لهما نفس الصورة



أحاديه



ليست أحاديه

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

إذا أردنا إثبات الدالة احاديه أم لا ⇐ جبرياً وبيانياً يرضى

أولاً :. جبرياً

إثبت أن الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين دالة احاديه :.

① د(س) = س^٣ + ج

بفرض أن م ، ب ∈ مجال الدالة ،
د(م) = م^٣ + ج ، د(ب) = ب^٣ + ج
وبوضع د(م) = د(ب)
∴ م^٣ + ج = ب^٣ + ج
∴ م^٣ = ب^٣ ∴ م = ب
∴ الدالة د دالة أحاديه

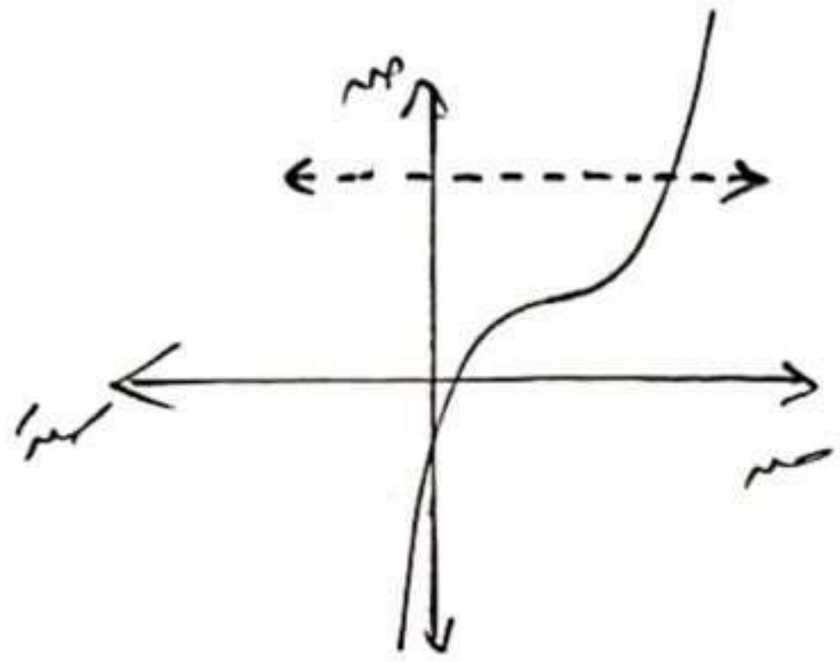
② د(س) = (٢س - ٣) / (٣س + ج)

د(م) = (٢م - ٣) / (٣م + ج) ، د(ب) = (٢ب - ٣) / (٣ب + ج)
وبوضع د(م) = د(ب)
(٢م - ٣) / (٣م + ج) = (٢ب - ٣) / (٣ب + ج)
(٢م - ٣)(٣ب + ج) = (٣م + ج)(٢ب - ٣)
٦م ب + ٤م - ٩ب - ٦ = ٦م ب - ٩م + ٤ب - ٦
٤م - ٩ب + ٩م - ٤ب = ٠
١٣م - ١٣ب = ٠ ⇐ ١٣م = ١٣ب
∴ م = ب ∴ الدالة احاديه

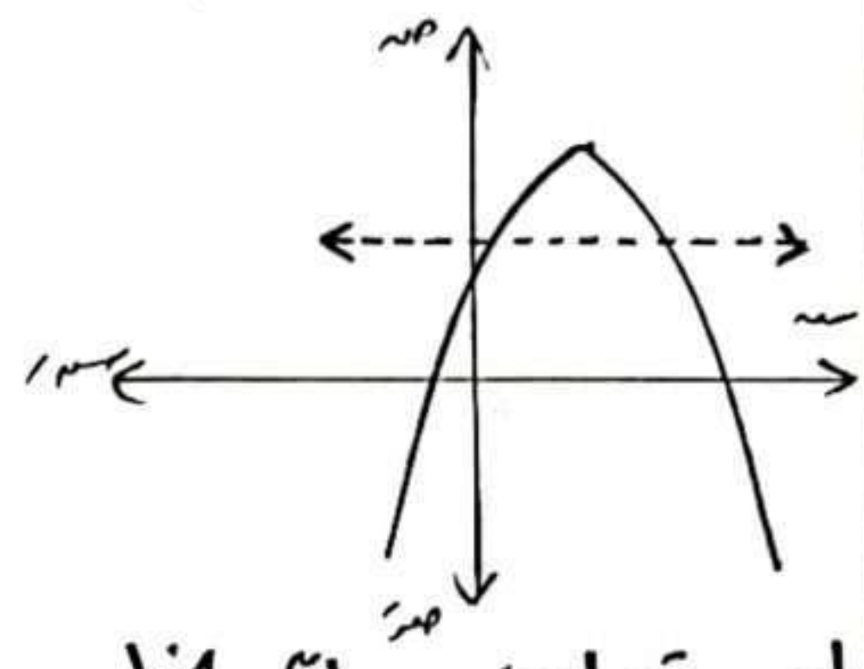
Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ثانيا:. بيانيا (اختبار الخط الافقى)

اذا وجد خط أفقى (يوازى محور السينات) يقطع منحنى الدالة فى اكثر من نقطة فإن المنحنى يمثل دالة ليست أحادية



احادية لانه الخط الافقى يقطع المنحنى فى نقطة واحدة:



ليست احادية لأنه الخط الافقى يقطع المنحنى فى نقطتين

مستشار / لطفى زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١١١٥٩٥٦٢٢٦ - ٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

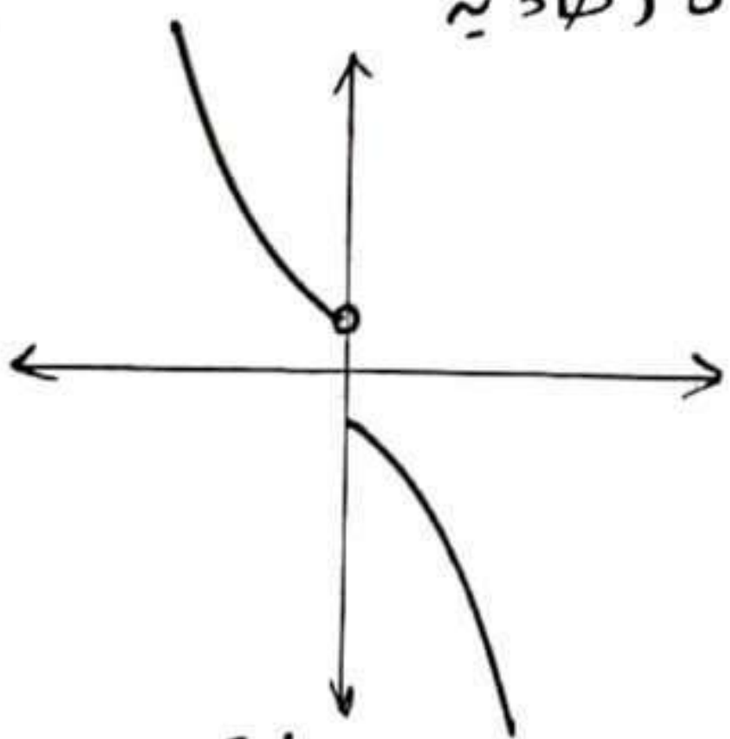
ملحوظة هامة:

الدوال الزوجية بصفة عامة ليست دوال أحادية

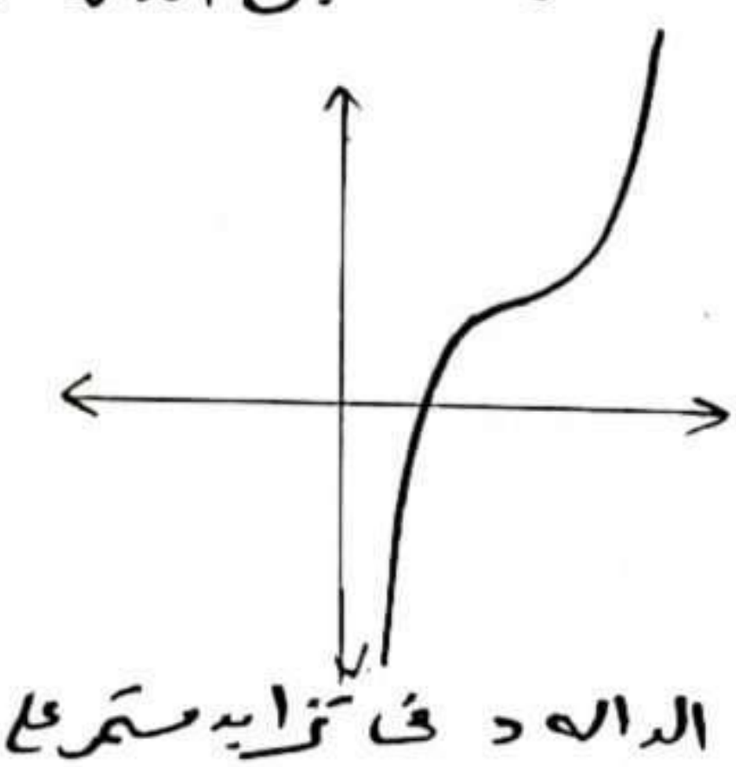
الدوال الفردية قد تكون أحادية أو غير أحادية

ملحوظة خطيرة

اذا كانت الدالة د فى تزايد مستمر أو فى تناقص مستمر لجميع القيم التى تنتمى إلى مجال الدالة فإن الدالة د تكون أحادية



الدالة د فى تناقص مستمر فى مجالها لذلك الدالة د دالة احادية



الدالة د فى تزايد مستمر فى مجالها لذلك د دالة احادية

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الواجب :- ابحث نوع كل من الدوال الاتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو كليهما معاً

① $د(س) = ٣$ ② $د(س) = س^٤ + س^٢ - ١$ ③ $د(س) = ٥ س^٤$

④ $د(س) = ٣س - ٤س^٣$ ⑤ $د(س) = س^٢ - ٣س + ٤$ ⑥ $د(س) = \frac{س^٤}{س + ١}$

⑦ $د(س) = \sqrt{س + ٣}$ ⑧ $د(س) = (س^٤ + ١)^٣$ ⑨ $د(س) = \sqrt{س^٢ + ٦}$

⑩ $د(س) = س جتا س$ ⑪ $د(س) = \frac{٣س}{ظا س}$ ⑫ $د(س) = \frac{س^٣ جا ٣س}{١ + س^٤}$

⑬ $د(س) = س^٤ جا^٣ س$ ⑭ $د(س) = س ظا^٣ س$ ⑮ $د(س) = س^٤ جا س$

اثبت ان الدوال المعرفة بالقواعد الآتية دوال احادية

① $د(س) = ٢س - ٣$ ② $د(س) = \frac{٣س - ٥}{٤س + ٣}$

اى الدوال الآتية احادية ام لا مع ذكر السبب

① $د(س) = س^٣ + ١$ ② $د(س) = ٢س^٤ - س - ٣$

③ $د(س) = س^٤ + ٢س^٢ + ١$ ④ $د(س) = \frac{٢س + ١}{س - ٢}$

اذا كانت $د_١(س) = س^٤$ ، $د_٢(س) = جتا س$

$ر_١(س) = ٢س^٣$ ، $ر_٢(س) = جا س$

اى من الدوال الآتية زوجية وايها فردية

① $د_١ + ر_٢$ ② $د_١ - د_٢$ ③ $ر_١ + ر_٢$ ④ $د_١ ر_٢$

⑤ $ر_١ ر_٢$ ⑥ $\frac{د_١}{د_٢}$

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مستر / لطفي زهران
تأصيلات الوحدتين الإحصائية والتفاضلية
01115956226 - 01028089912

اختر الاجابه الصحيحه

① الدالة الزوجية من الدوال الآتية هي ....
(أ) د(س) = س³ (ب) د(س) = جاس (ج) د(س) = س جاس

② الدالة الفردية من الدوال الآتية هي
(أ) د(س) = س² جاس (ب) د(س) = ظاس (ج) د(س) = جتاس

③ اذا كانت د دالة زوجية ، ٢ ∈ مجال د فإن د(١) + د(-٢) = ...
(أ) صفر (ب) ٤ (ج) ٢ (د) ٢د(٢)

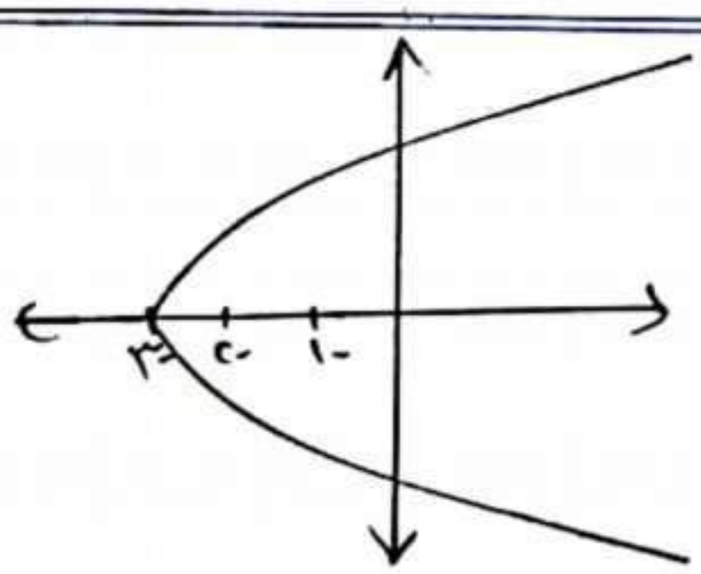
④ اذا كانت د دالة فردية ، ٩ ∈ مجال د فإن د(٩) + د(-٩) = ...
(أ) صفر (ب) ٢د(٩) (ج) ٢٩ (د) د(٩)

⑤ اذا كانت الدالة د زوجية على الفترة [أ ، ب] فإن بيـ....
(٩ ، -٩ ، ٢٩ ، ٩٣)

⑥ الدالة الاحادية من الدوال الآتية هي د(س) = ...
(جتاس ، س² ، س³ ، س⁴ + س²)

⑦ اذا كانت د دالة فردية د(١) = ٢ فإن من النقاط تقع على منحنى د ؟
((-١ ، ٢) ، (-١ ، -٢) ، (١ ، -٢) ، (-١ ، ١٠))

⑧ المنحنى الموضح بالشكل المقابل متماثل حول المستقيم الذي معادلته ....



(س = ٠ ، ص = ٠ ، ص = -٢ ، س = -٢)

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

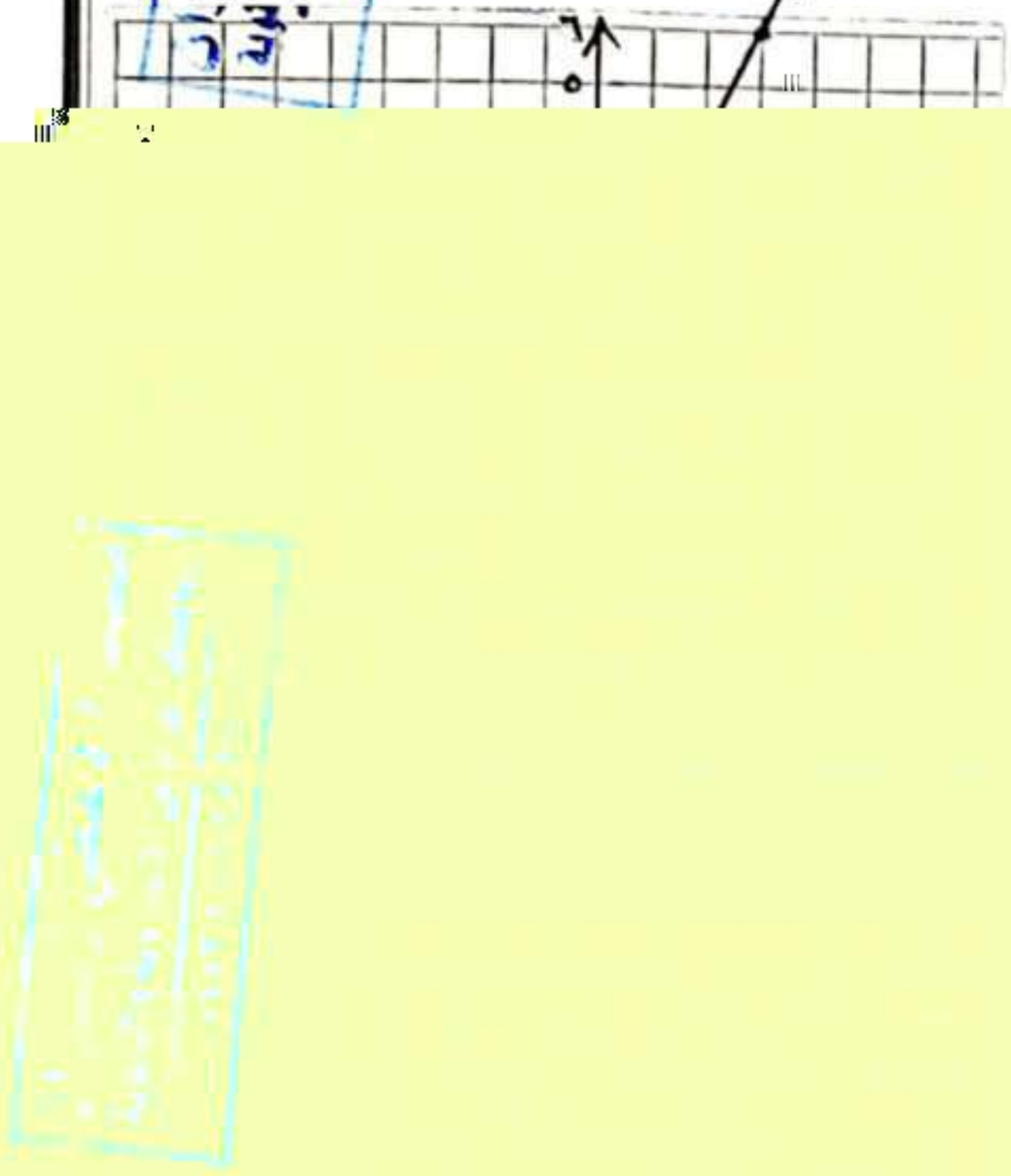
التمثيل البيانى للدوال الاساسيه
ورسم الدالة بمعرفة المجال

مستشفى / المنصفى زهير
والدراسات العليا والبحث العلمي

* تمثيل الدالة الخطية

① مثل بيانيا د : ح ← ح ، د(س) = ٢ س

∵ المجال = ح



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

④ $د_1 :]-\infty ، ٢[\to ح$ حيث $د_1(س) = ٣س - ١$

$د_2 : [-١ ، ٥] \to ح$ حيث $د_2(س) = ٣ - ٢س$

ارسم الدالة $د_1 + د_2$ ومنه برسم استنتج مداها

الحل

مجال $(د_1 + د_2) = م_1 \cap م_2 =]-\infty ، ٢[\cap [-١ ، ٥] = [-١ ، ٢[$

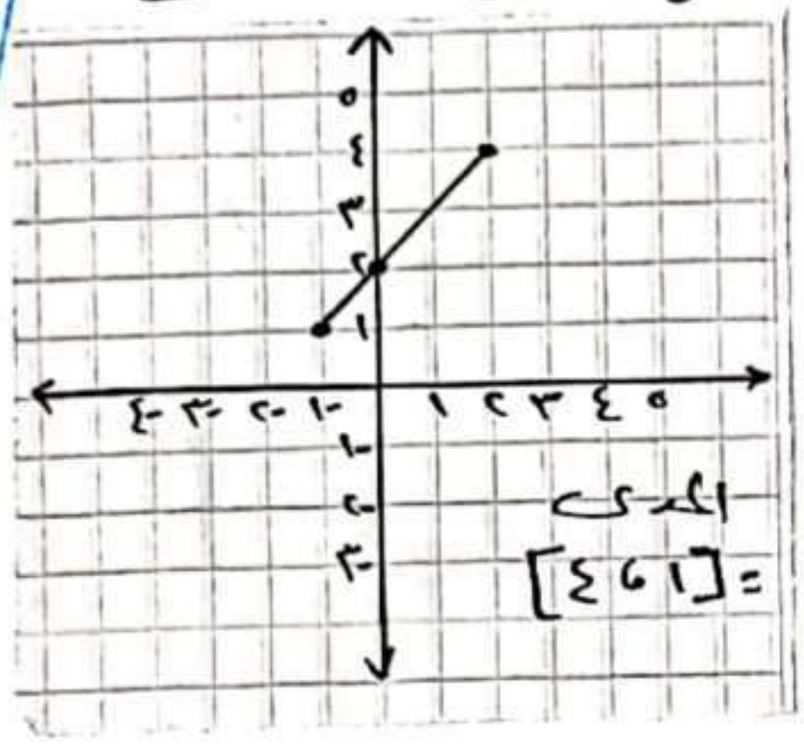
$\therefore (د_1 + د_2)(س) = ٣س - ١ + ٣ - ٢س$

$\therefore (د_1 + د_2)(س) = س + ٢$

$س = -١ ، د(-١) = -١ + ٢ = ١ \quad (-١ ، ١)$

$س = ٠ ، د(٠) = ٠ + ٢ = ٢ \quad (٠ ، ٢)$

$س = ٢ ، د(٢) = ٢ + ٢ = ٤ \quad (٢ ، ٤)$



مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩١٢

تمثيل الدالة التربيعية

مثل بيانيًا $د : د(س) = س^٢ - س$ حيث $س \in]-١ ، ٣[$

الحل

احداثى رأس المنحنى $= \left(\frac{-ب}{٢أ} ، د\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$

$س : \frac{-ب}{٢أ} = \frac{-(-١)}{١ \times ٢} = \frac{١}{٢}$

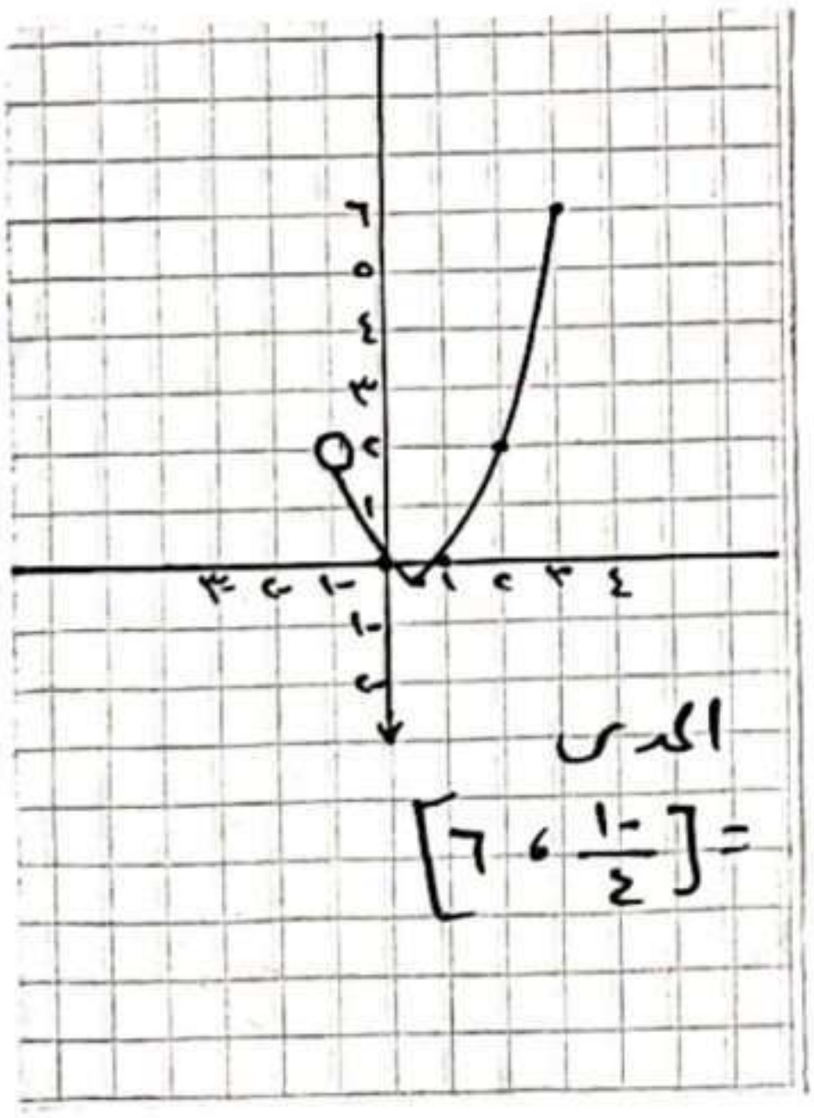
$ص : د\left(\frac{١}{٢}\right) = \left(\frac{١}{٢}\right)^٢ - \frac{١}{٢} = \frac{-١}{٤}$

$\therefore$ الاحداثى $= \left(\frac{١}{٢} ، \frac{-١}{٤}\right)$

س	-١	٠	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٣
د(س)	٢	٠	$\frac{-١}{٤}$	٠	٢	٦

تناقصية $]-١ ، \frac{١}{٢}[$

تزايدية $]\frac{١}{٢} ، ٣[$



Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تمثيل الدالة مبرأة المجال (ذات المتفارع)

تمثل بيانياً د(س) = { ٢-س ، -١ ≤ س < ٢ ; س-٢ ، ٢ ≤ س < ٥ } ومن الرسم اوجد

① مجال ومدى الدالة ② احسب اطراد الدالة ③ زوجية او فردية او لا هذا ولا ذاك

④ احادية ام لا مع ذكر السبب

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

الحل

د(س) = ٢-س ، س ∈]-١ ، ٢[

س = -١ ، د(-١) = ٢-(-١) = ٣ (-١ ، ٣)

س = ٠ د(٠) = ٢-٠ = ٢ (٠ ، ٢)

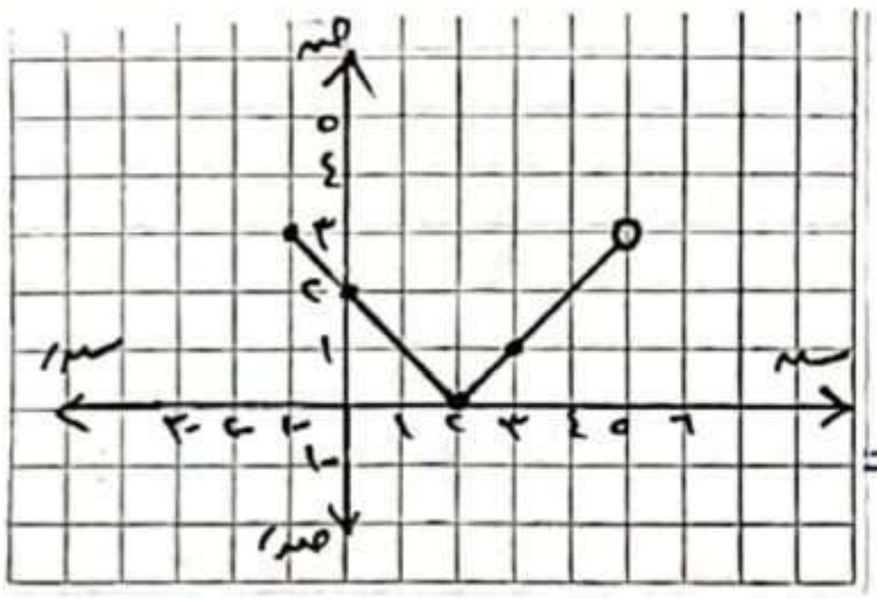
س = ② د(٢) = ٢-٢ = ٠ (٢ ، ٠)

د(س) = س ، س ∈ [٢ ، ٥[

س = ٢ د(٢) = ٢ (٢ ، ٢)

س = ٣ د(٣) = ٣-٢ = ١ (٣ ، ١)

س = ⑤ د(٥) = ٥-٢ = ٣ (٥ ، ٣)



لاحظ حاجه مهمه

٢ ∉]-١ ، ٢[ولكن

٢ ∈]٢ ، ٥[لذلك

لاتضع دائرة مفرغة عند النقطة (٢ ، ٠)

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

المجال =]-١ ، ٢[∪]٢ ، ٥[=]-١ ، ٥[

المدى =]٠ ، ٣[

تناقصية في الفترة]-١ ، ٢[وتزايدية في الفترة]٢ ، ٥[

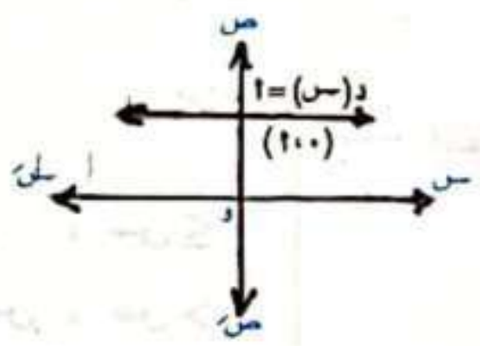
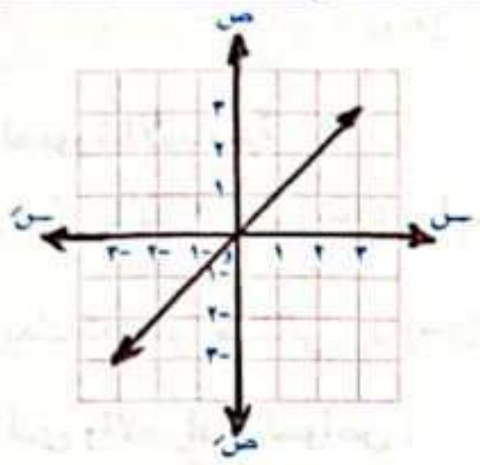
ليست زوجية وليست فردية لانها غير متماثلة حول نقطة الاصل ولا غير متماثلة حول محور الصادات

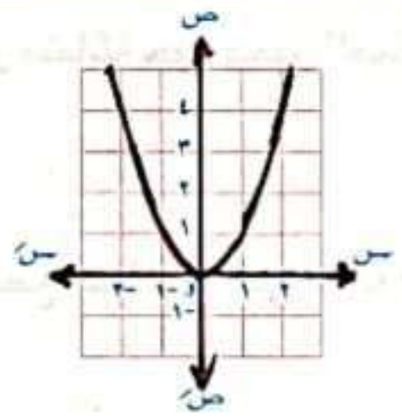
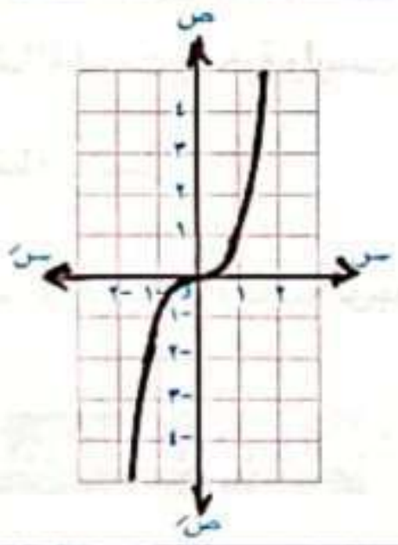
الدالة ليست احادية لانه لو رسمنا خط افقي سيقطع الشكل البياني في نقطتين

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الصور الاساسيه لبعض الدوال

بعض الدوال تحيرات الحدود

	الدالة الثابتة	دالة الدرجة الأولى (الخطية)
الصورة الاساسية	د : ح ← ح ، د (س) = أ حيث أ ∈ ح	د : ح ← ح ، د (س) = س
التمثيل البيانى		
المدى والاطراد والخواص	* مدى الدالة = {أ} * الدالة ثابتة على مجالها. * الدالة زوجية (متماثلة حول محور الصادات). * الدالة ليست أحادية.	* مدى الدالة = ح * الدالة تزايدية على مجالها ح * الدالة فردية (متماثلة حول نقطة الأصل). * الدالة أحادية.

	دالة الدرجة الثانية (التربيعية)	دالة الدرجة الثالثة (التكعيبية)
الصورة الأساسية	د : ح ⟵ ح ، د (س) = س^{٢}	د : ح ⟵ ح ، د (س) = س^{٣}
التمثيل البيانى		
المدى والاطراد والخواص	* مدى الدالة = [٠ ، ∞[* الدالة تناقصية فى]- ∞ ، ٠[، وتزايدية فى]٠ ، ∞[* الدالة زوجية (متماثلة حول محور الصادات). * الدالة ليست أحادية.	* مدى الدالة = ح * الدالة تزايدية على مجالها ح * الدالة فردية (متماثلة حول نقطة الأصل). * الدالة أحادية.

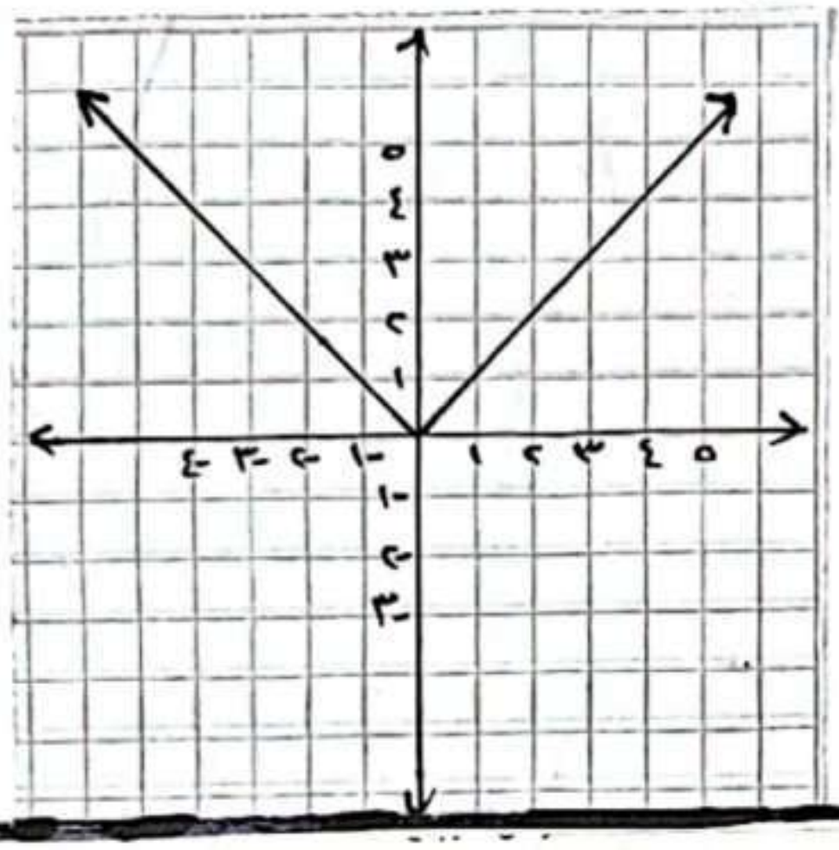
مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

④ الصورة الأساسية لدالة القياس (دالة القيمة المطلقة)

د : ح ← ح ، د(س) = |س|

وتعريفها كالتالى د(س) = { س ، س ≥ ٠ ; −س ، س < ٠ }



مدى الدالة = [٠ ، ∞[

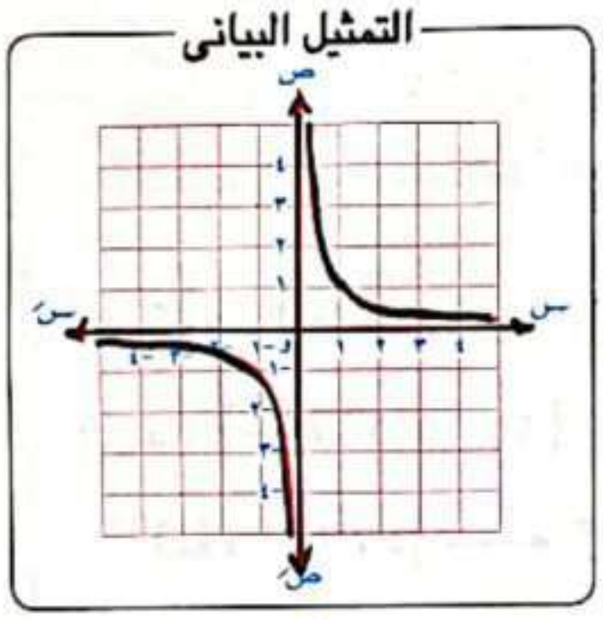
تناقصية فى]-∞ ، ٠]

تزايدية فى [٠ ، ∞[

الدالة زوجية لتماثله حول محور الصادات

الدالة ليست احادية

٣ الصورة الأساسية للدالة الكسرية



• **الصورة الأساسية :**

د : ح − {٠} ← ح ، د (س) = $\frac{١}{س}$

نظرًا لاقتراب كل من جزئى المنحنى من المحورين دون أن يقطعهما يقال إن المحورين

$\overleftrightarrow{س'س}$ ، $\overleftrightarrow{ص'ص}$ هما خطا التقارب للمنحنى.

• **المدى والاطراد والخواص :**

* مدى الدالة = ح − {٠}
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٠[وتناقصية أيضًا فى]٠ ، ∞[
* الدالة فردية (متماثلة حول نقطة الأصل)
* الدالة أحادية.

مستر / لطفى زهير
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٠٢٢

مثالهم

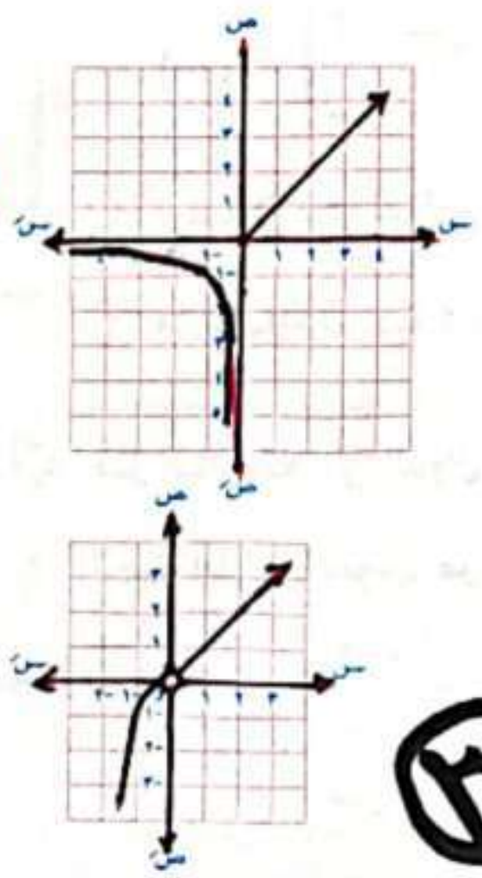
١ د (س) = { $\frac{١}{س}$ ، س > ٠ ; |س| ، س ≤ ٠ }

٢ د (س) = { $س^{٣}$ ، س < ٠ ; س ، س > ٠ }

الحل

١ * المجال = ح
* المدى = ح
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٠[
وتزايدية فى]٠ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.

٢ * المجال = ح − {٠}
* المدى = ح − {٠}
* الدالة تزايدية على مجالها.
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.



مستر / لطفى زهير
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٠٢٢

MR/ Lotfy

Scanned with CamScanner

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الواجب ①: مثل بيانيًا :-

① د : [١ ، ٥[← ح ، د(س) = س + ١

② ر :]-٥ ، -١[← ح ، ر(س) = ١ - س

③ إذا كانت د : [-٦ ، ٦] ← ح

د(س) = { ٤ - س ، عندما ٢ ≥ س > ١ ; س ، ١ ≥ س ≥ ٦ }

②

مثل بيانيًا رسم الرسم أوجه المجال والمدى واتجاه الاطراد ونوعه هل هي رُدجيه أو مُرَدِّيه

① د(س) = { ٤ ، س ≤ -٢ ; س² ، س > -٢ }

② د(س) = { س³ ، س > ١ ; ١ ، س < ١ }

③ د(س) = { ١ - س ، س ≥ ٠ ; س² ، س < ٠ }

④ د(س) = { س³ ، س > ١ ; ٢ - س ، س < ١ }

اختر ③

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : د (س) = ٥ فإن مجال الدالة د هو .....

(أ) ح (ب) ح⁺ (جـ) {٥} (د) ح - {٥}

② إذا كانت : د (س) = ٧ فإن مدى الدالة د هو .....

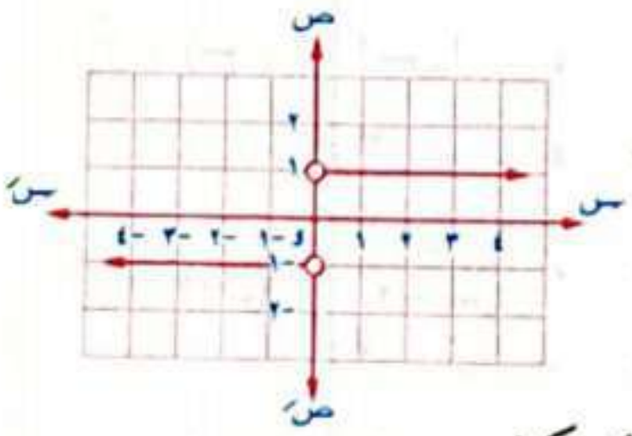
(أ) ح (ب) ح⁺ (جـ) {٧} (د) ح - {٧}

③ مدى الدالة د : د (س) = { ٠ ، س ≥ ٠ ; ١ ، س < ٠ } هو .....

(أ) {١} (ب) {٠} (جـ) ح (د) {٠ ، ١}

④ مدى الدالة الممثلة

بالشكل المقابل هو .....



(أ) {١} (ب) {١ ، -١}

(جـ) {-١} (د) ح

⑤ الدالة د حيث د (س) = { ٢ ، س > ٠ ; -٢ ، س < ٠ } متماثلة بالنسبة للنقطة .....

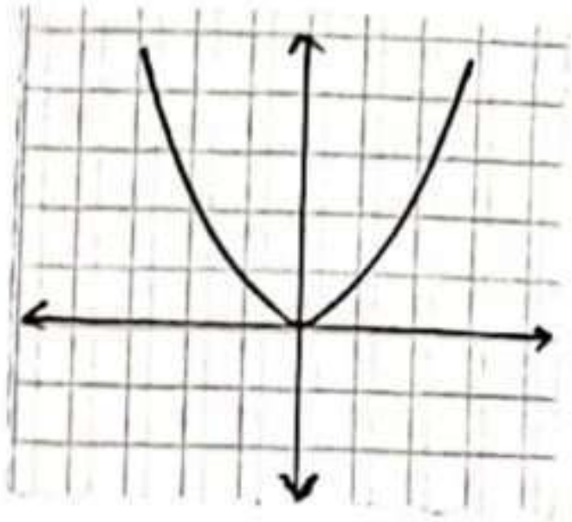
مستر / لطفي زهران
رياضيات الرحاب الإضافية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢٦

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

التحويلات الاساسيه لمنحنيات الدوال الاساسيه

① الدالة التربيعية

الصورة الاساسيه لها هى : د(س) = س² ولكنه عند التحويل هنستخدم



الصورة العامه للدالة $د(س) = (س - ا)^2 + ب$ لايجاد رأس المنحنى للدالة وبالتالى امرفا رسم الحركة الحديدة

حيث $د(س) = (س - ا)^2 + ب$

∴ رأس المنحنى هو (ا ، ب)

يعنى مثلاً د(س) = س² ⇐ رأس المنحنى هو (٠ ، ٠)

جت ازاى د(س) = (س + ٠)² + ٠ وبالتالى رأس المنحنى هو (٠ ، ٠)

مستر / لطفي زهران
الاضواء الرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

تعالى نشوف أمثله ازاى اجيب رأس المنحنى

د(س) = س² + ٢ ⇐ د(س) = (س + ٠)² + ٢ ⇐ (٠ ، ٢)

د(س) = س² - ٣ ⇐ د(س) = (س + ٠)² - ٣ ⇐ (٠ ، -٣)

د(س) = (س + ٢)² - ٥ ⇐ (-٢ ، -٥) | د(س) = (س - ٣)² ⇐ (٣ ، ٠)

د(س) = (٢ - س)² + ٢ ⇐ (س - ٢)² + ٢ ⇐ (٢ ، ٢)

مستر / لطفي زهران
الاضواء الرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

د(س) = (س + $\frac{٣}{٢}$)² - $\frac{١}{٢}$ ⇐ ($\frac{-٣}{٢}$ ، $\frac{-١}{٢}$)

د(س) = س² + ٤س + ٤ ⇐ (س + ٢)² ⇐ (-٢ ، ٠)

د(س) = -س² + ٤س - ٣ ⇐ مش هينفع تتحلل ← ($\frac{-ب}{٢ا}$ ، د($\frac{-ب}{٢ا}$))

س = $\frac{-ب}{٢ا}$ = $\frac{-٤}{-١ \times ٢}$ = ٢ ص = د(٢) = -(٢)² + ٤ × ٢ - ٣ = ١

∴ إحداثى رأس المنحنى هو (٢ ، ١)

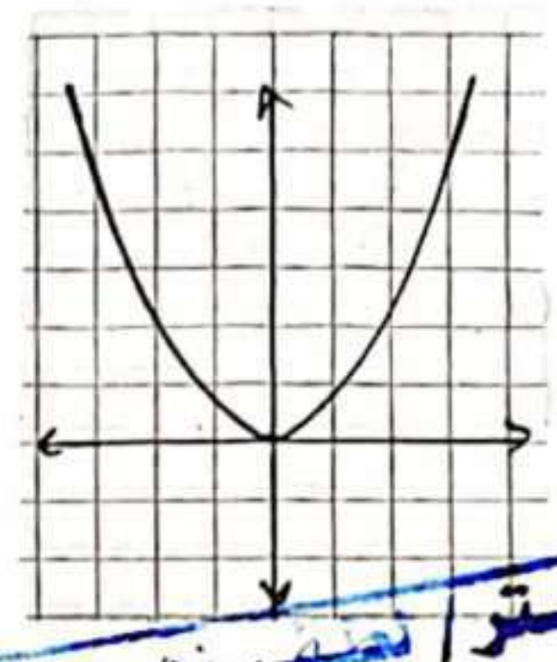
مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
MR/ Lotfy Zahran

01115956226 - 01028089912

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

أمثلة:

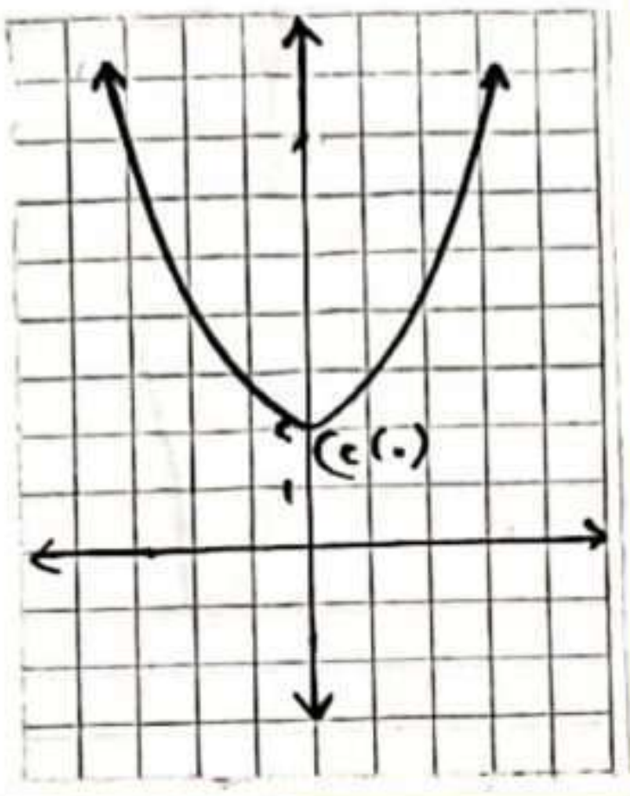
① $د(س) = س^{2}$



مستر/ لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢٥

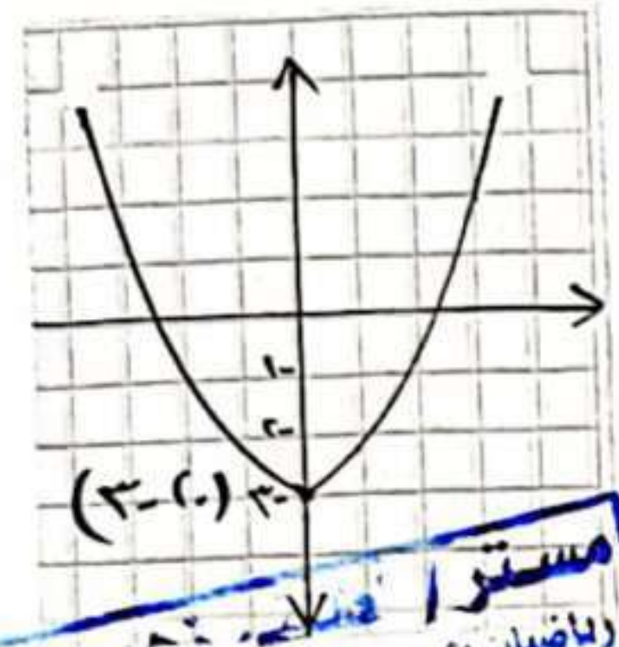
② $د(س) = س^{2} + ٢$

رأس المنحنى هو (٠، ٢)



③ $د(س) = س^{2} - ٣$

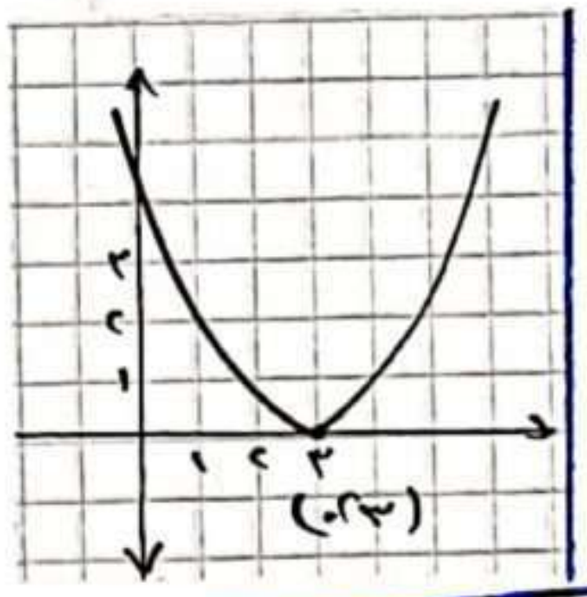
رأس المنحنى (٠، -٣)



مستر/ لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية

④ $د(س) = (س - ٣)^{2}$

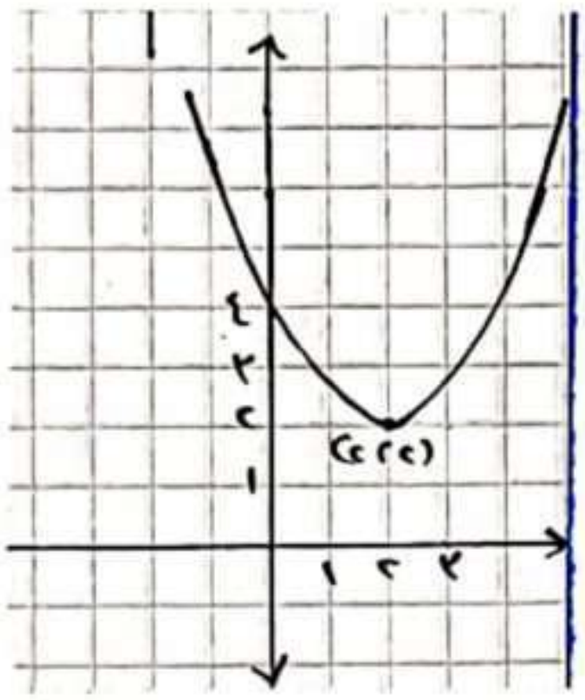
رأس المنحنى (٣، ٠)



مستر/ لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢٥

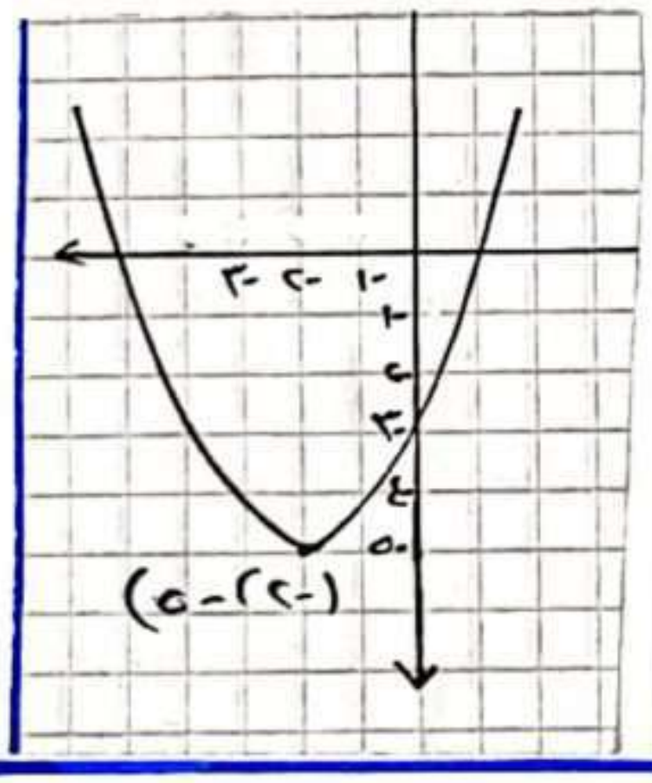
⑤ $د(س) = (٢ - س)^{2} + ٢$

رأس المنحنى (٢، ٢)



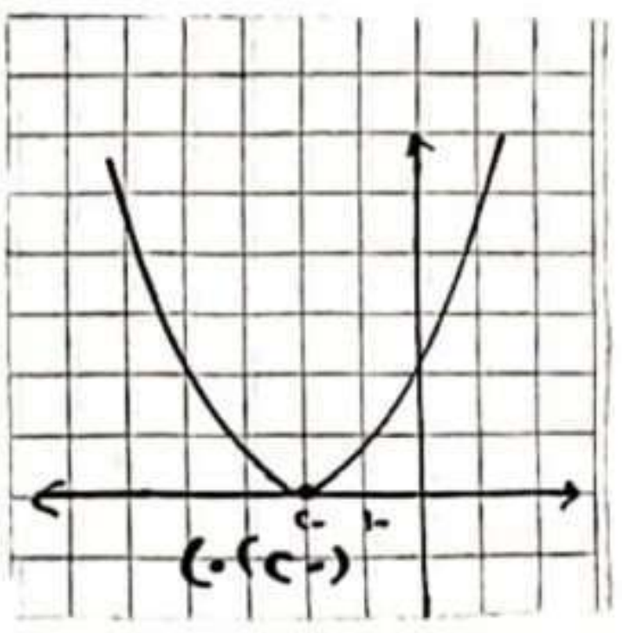
⑥ $د(س) = (س + ٢)^{2} - ٥$

رأس المنحنى (-٢، -٥)



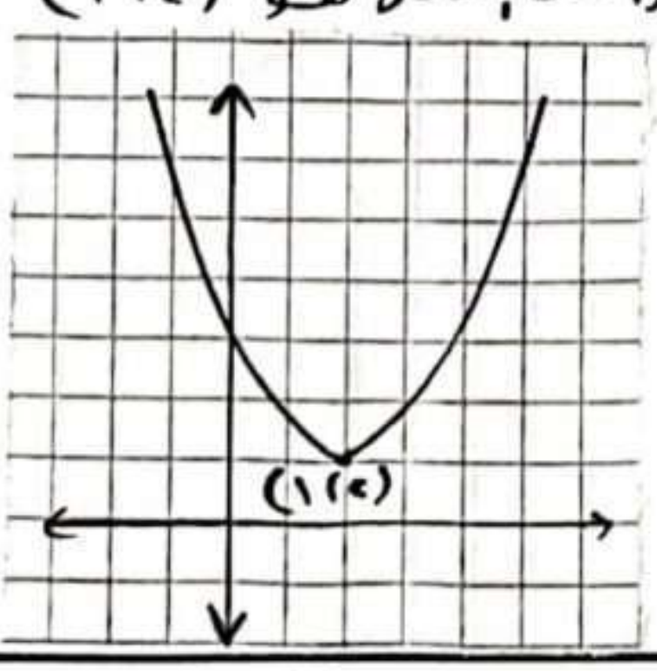
⑦ $د(س) = س^{2} + ٤س + ٤$

$د(س) = (س + ٢)^{2}$ ⇐ (-٢، ٠)



⑧ $د(س) = س^{2} + ٤س - ٣$

رأس المنحنى هو (-٢، -٧)



مسألة رقم ⑧

حيث رأس المنحنى بالقانون $\left(\frac{-ب}{٢ج}، د\left(\frac{-ب}{٢ج}\right)\right)$

في الصفحة السابقة لتوضيح ايجاد رأس المنحنى لكل السائل

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢ت

⑤ الدالة التكعيبية

الصورة الاساسية لها هى : د(س) = س^{3} ولكن عند التحويل هستخدم

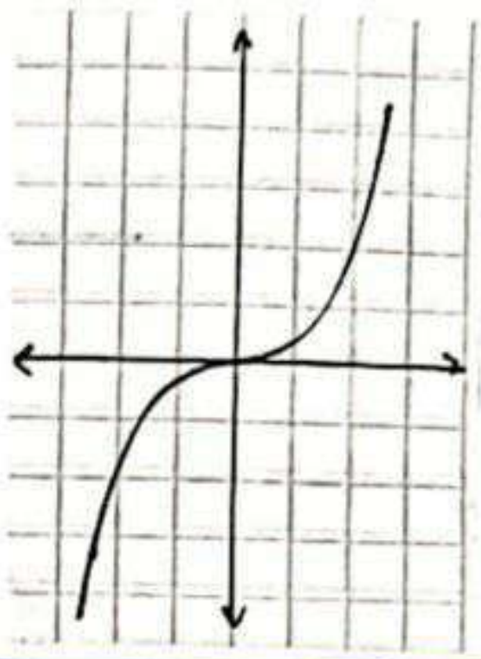
العلاقة $\boxed{د(س) = (س - ا)^{3} + ب}$ لإيجاد

نقطة التماثل وبالتالى اعرف امر الدالة كبيرة

حيث د(س) = (س - ا)^{3} + ب

∴

∴ نقطة التماثل هى (ا ، ب)



مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢ت

نقطة التماثل

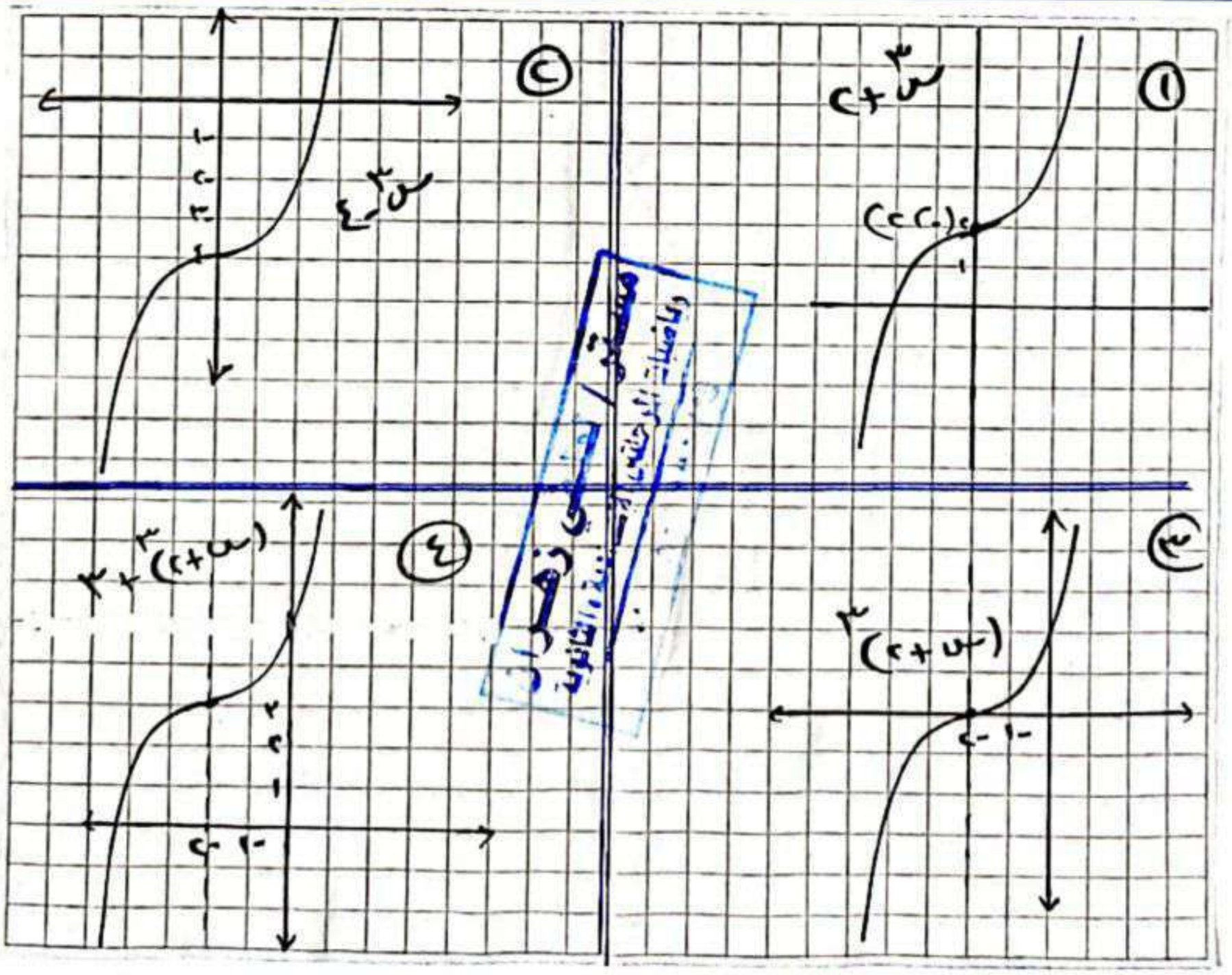
تكلم نشوف (مثله اللى اجيب

① د(س) = س^{3} + ٢ ⇐ د(س) = (س + ٠)^{3} + ٢ ⇐ (٠ ، ٢)

② د(س) = س^{3} - ٤ ⇐ د(س) = (س + ٠)^{3} - ٤ ⇐ (٠ ، -٤)

③ د(س) = (س + ٢)^{3} ⇐ د(س) = (س + ٢)^{3} + ٠ ⇐ (-٢ ، ٠)

④ د(س) = (س + ٢)^{3} + ٣ ⇐ رأس المنحنى هو (-٢ ، ٣)



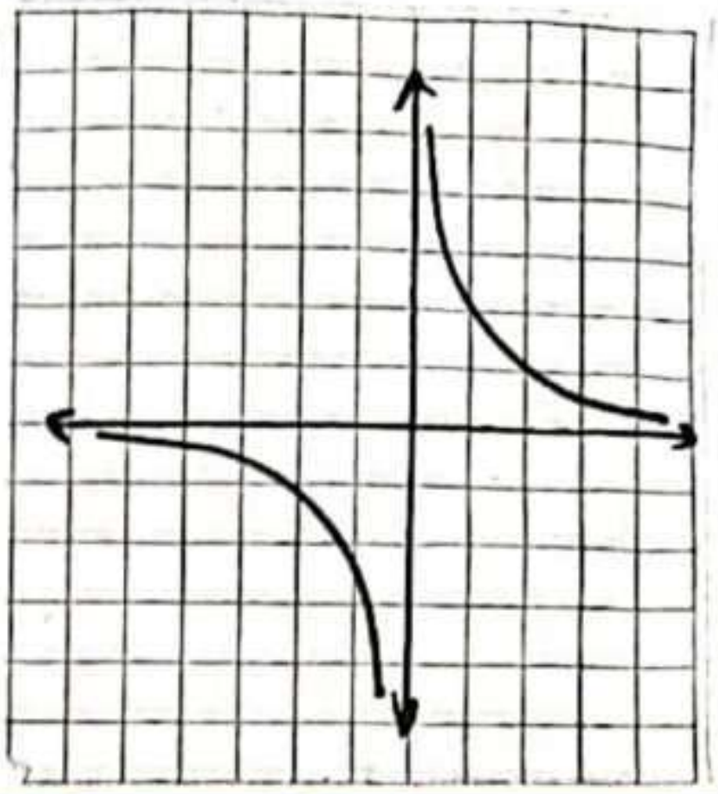
مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢ت

@SecondaryTwo_M
Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

④ الدالة الكسريه :-

الصورة الاساسية لها هى :- د(س) = $\frac{1}{س}$ ولكن عند التحويل هنستخدم

العلاقة $\boxed{د(س) = \frac{1}{س - أ} + ب}$ لايجاد



نقطة التماثل وبالتالى اعرف ارسم الدالة الجذرية

حيث د(س) = $\frac{1}{س - أ} + ب$

∴ نقطة التماثل هى (أ ، ب)

مستر / لطفى زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١١١٥٩٥٦٢٢٦ - ٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

تاكد نشوف أمثله ازاى اجيب نقطة التماثل

① د(س) = $\frac{1}{س}$ + ٣ ← (٠ ، ٣)

② د(س) = $\frac{1}{س - ٢}$ + ١ ← (٢ ، ١)

③ د(س) = $\frac{1}{س + ٢}$ ← (-٢ ، ٠)

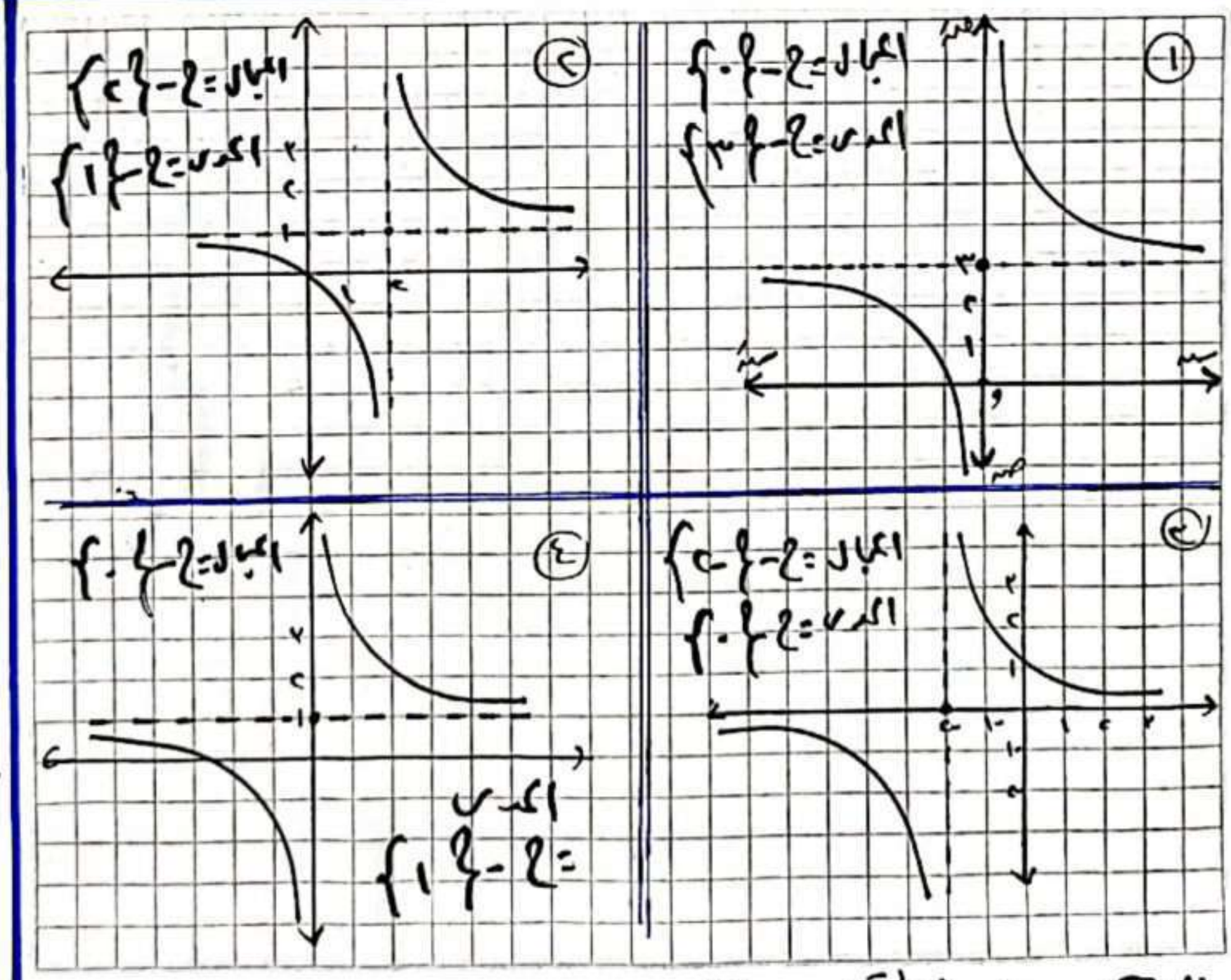
④ د(س) = $\frac{س + ١}{س} = \frac{س}{س} + \frac{١}{س} = ١ + \frac{١}{س}$ ← (٠ ، ١)

ملحوظة هامة

من خلال نقطة التماثل نقدر أجيب المجال والمدى من غير الرسم

مثلا مسألة ①
نقطة التماثل هى (٠ ، ٣)
↓ ↓
مدى مجال

∴ المجال = ح - {٠}
المدى = ح - {٣}



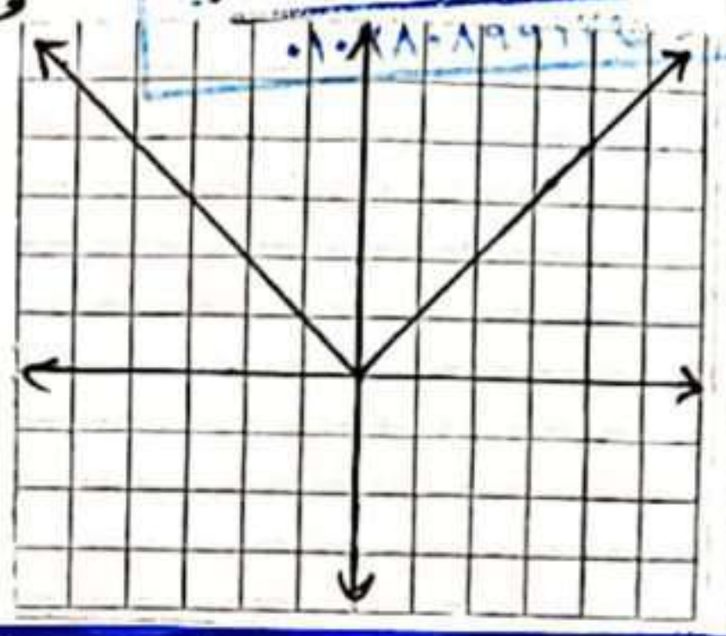
الدالة دى حالة خاصة من دى جاى

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

④ دالة المقياس (دالة القيمة المطلقة)

الصورة الأساسية لها :- د(س) = |س| ⇐ { س ، س ≥ ٠ ، -س ، س < ٠

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢



ولكي نرسم التحويل هنستخدم العلاقة

د(س) = |س - أ| + ب ⇐ لإيجاد نقطة التماثل وبالتالي اعرف اسم الدالة الجديدة

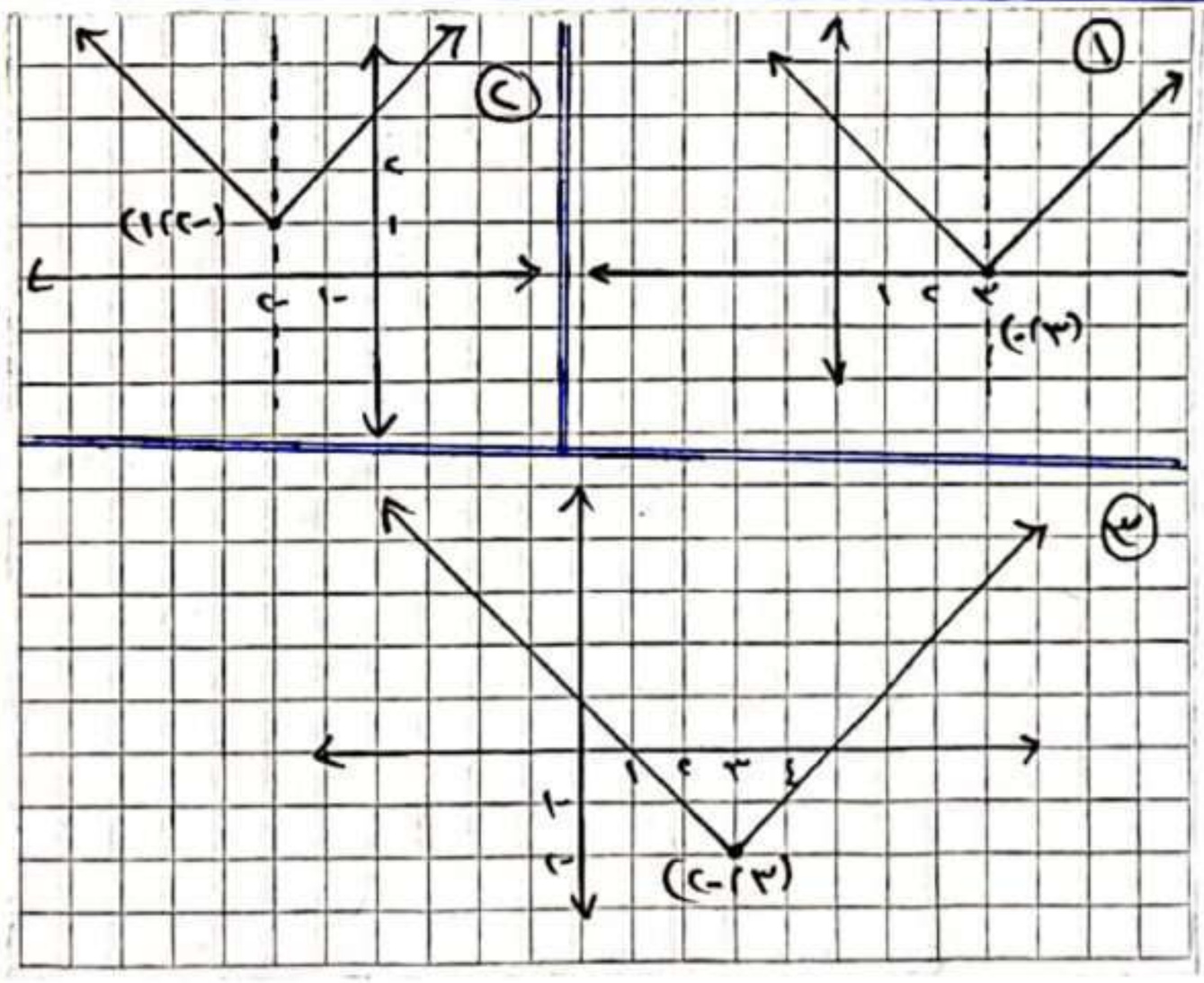
حيث د(س) = |س - أ| + ب

∴ نقطة التماثل هي (أ ، ب)

تعالى نشوف أمثلة إزاي نجيب نقطة التماثل

① د(س) = |س - ٣| ⇐ |س - ٣| + صفر ⇐ (٣ ، ٠)

② د(س) = |س + ٢| + ١ ⇐ (-٢ ، ١) ③ د(س) = -٢ + |س - ٣| ⇐ (٣ ، -٢)



أكثر من حالة ①

المدى =]-∞ ، ٠]

المجال = ح

تناقصية في الفترة]-∞ ، ٣]

تزايدية في الفترة [٣ ، ∞[

ليست زوجية وليست فردية

حالة ② المدى =]-∞ ، -٢]

المجال = ح

تزايدية في الفترة]-∞ ، ٣]

تناقصية في الفترة [٣ ، ∞[

حالة ③

المدى = [١ ، ∞[

المجال = ح

تناقصية في الفترة]-∞ ، -٢]

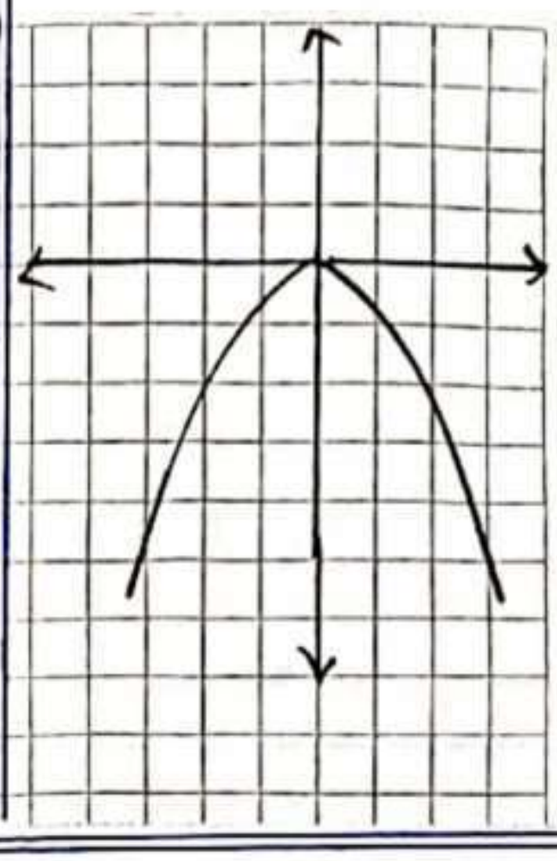
تزايدية في الفترة [-٢ ، ∞[

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

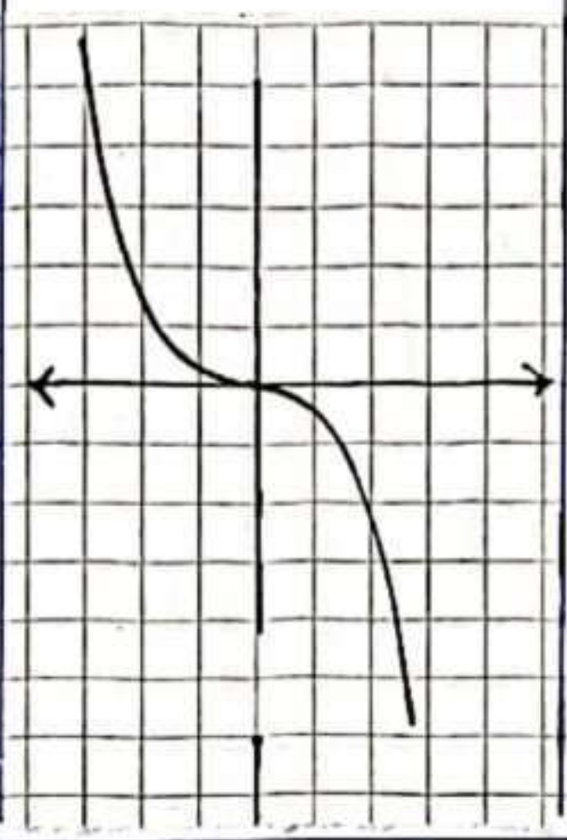
Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

انعكاس منحنى الدالة فى محور السينات

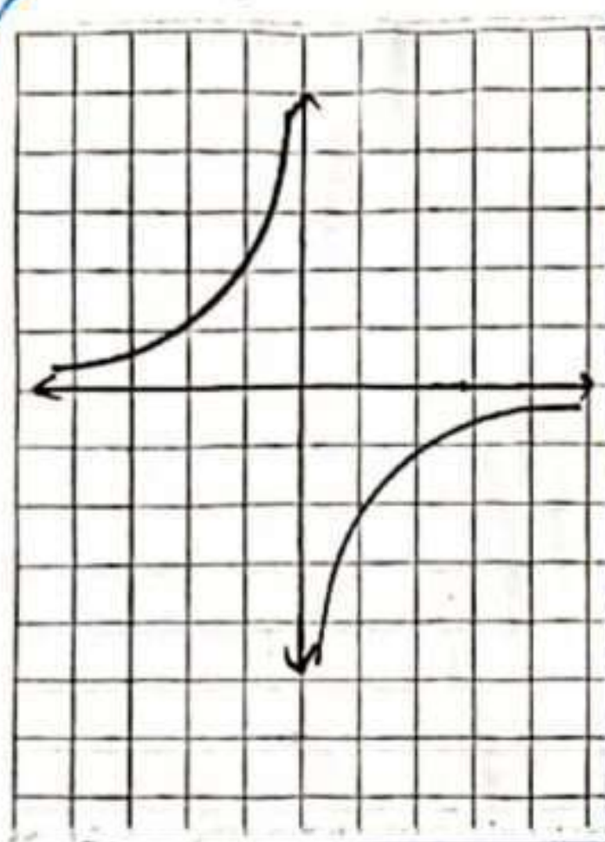
① د(س) = − س²



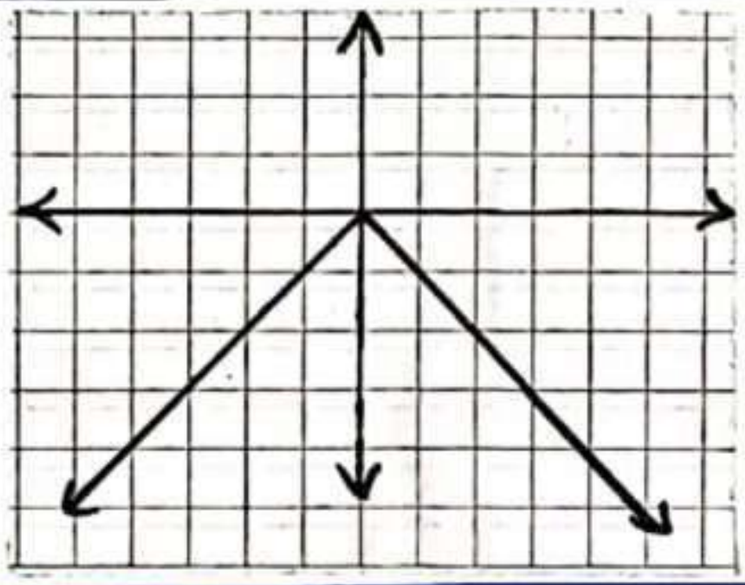
د(س) = − س³



د(س) = $\frac{-١}{س}$



④ د(س) = − |س| + ١

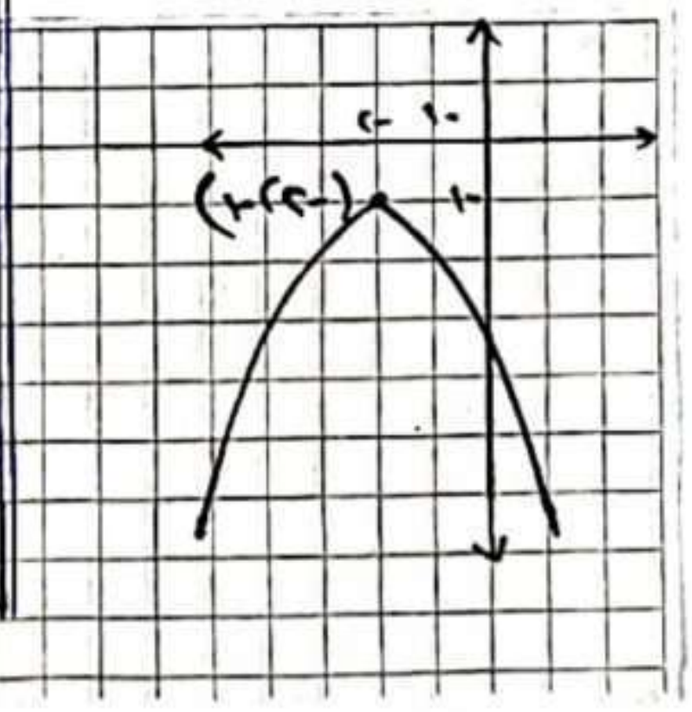


يارب تكون دى حلمتى
يا بطيخة
الفكرة كلها فى (−)

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

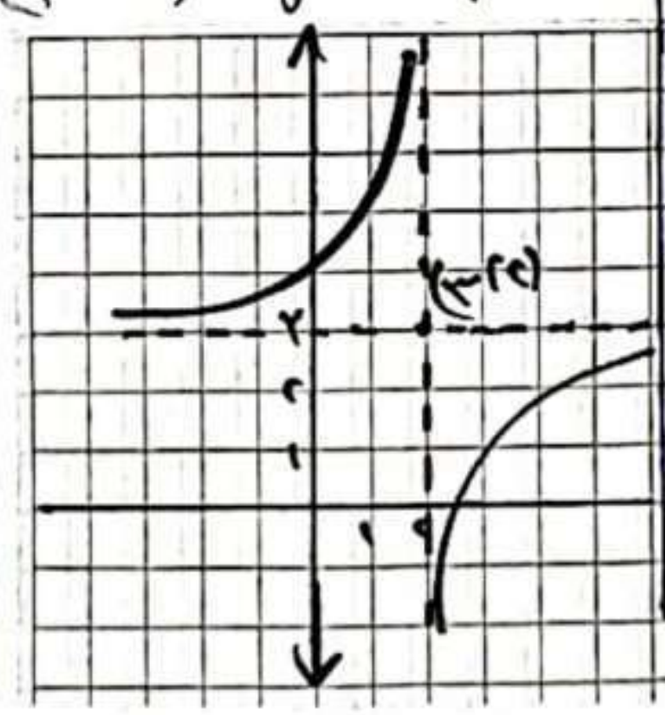
⑤ د(س) = − (س + ٢)² − ١

رأس المنحنى هو (−٢ ، −١)



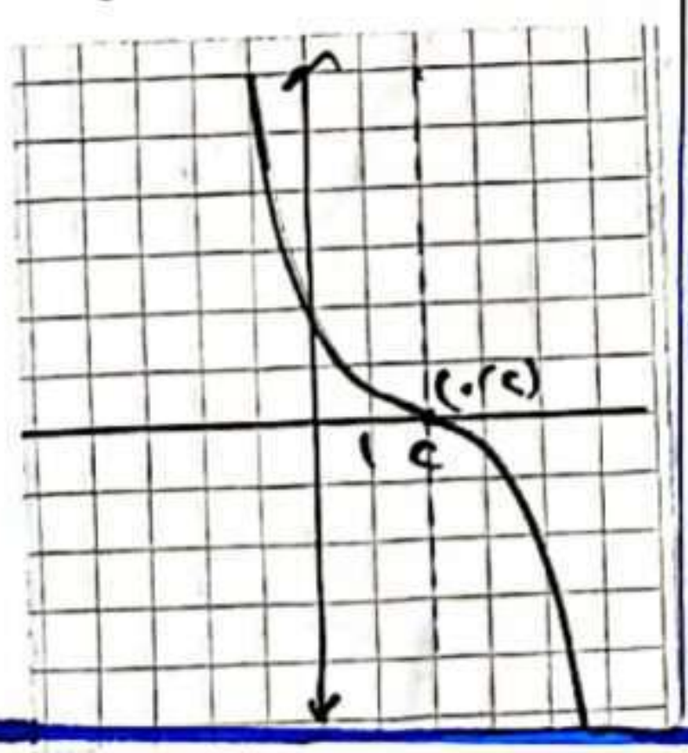
⑥ د(س) = $\frac{-١}{س-٢}$ + ٣

نقطة التماثل هى (٢، ٣)



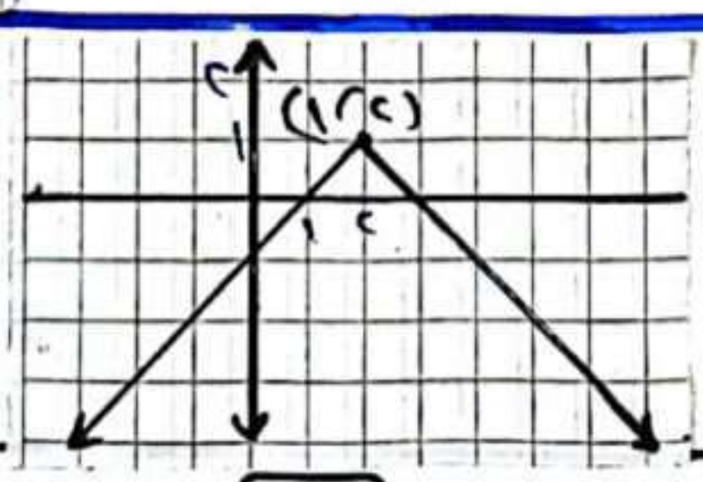
⑦ د(س) = − (س − ٢)³

نقطة التماثل هى (٢، ٠)



د(س) = − |س − ١| + ٤

نقطة التماثل هى (١، ٤)



المدى =]−∞، ٤]

المجال = ح

تزايدية فى الفترة]−∞، ١]

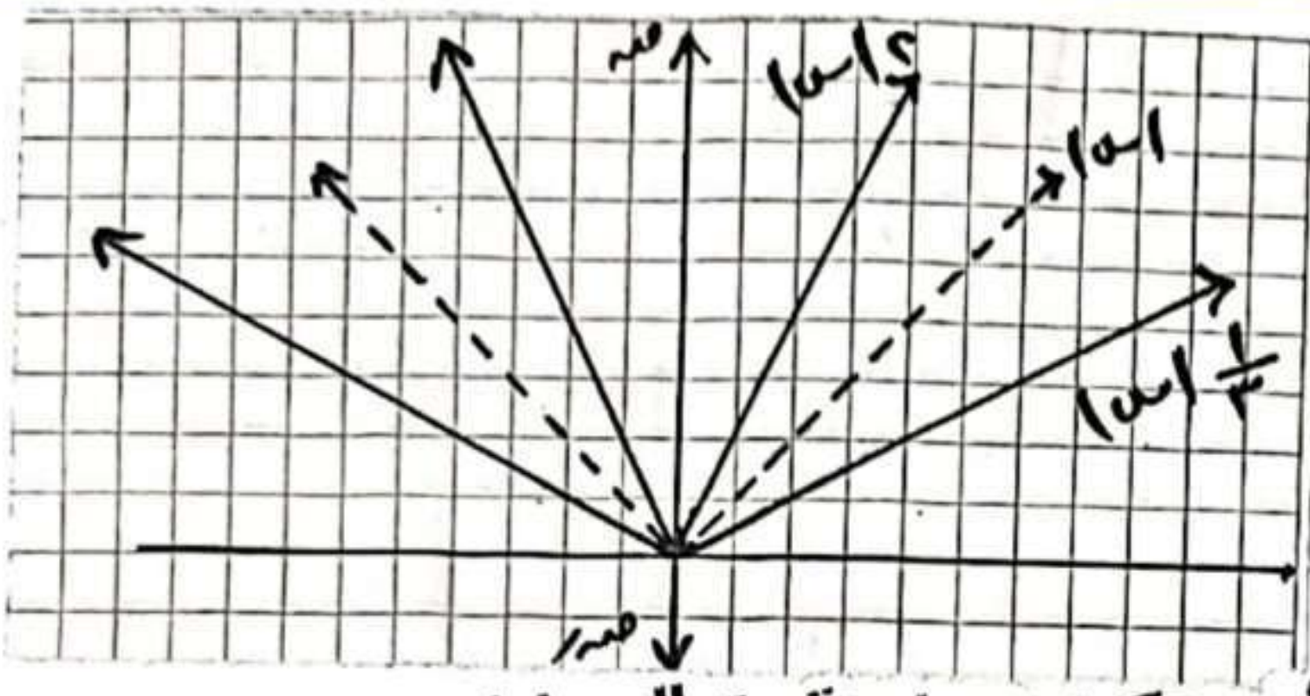
تناقصية فى الفترة [١، ∞[

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تعدد منحنى الدالة

لأى دالة د يكون المنحنى ص = ق د(س) حيث ق ∈ ح*

* تعدد رأسى للمنحنى ص = د(س) اذا كان ق > ١
* انكماش رأسى للمنحنى ص = د(س) اذا كان ٠ < ق < ١



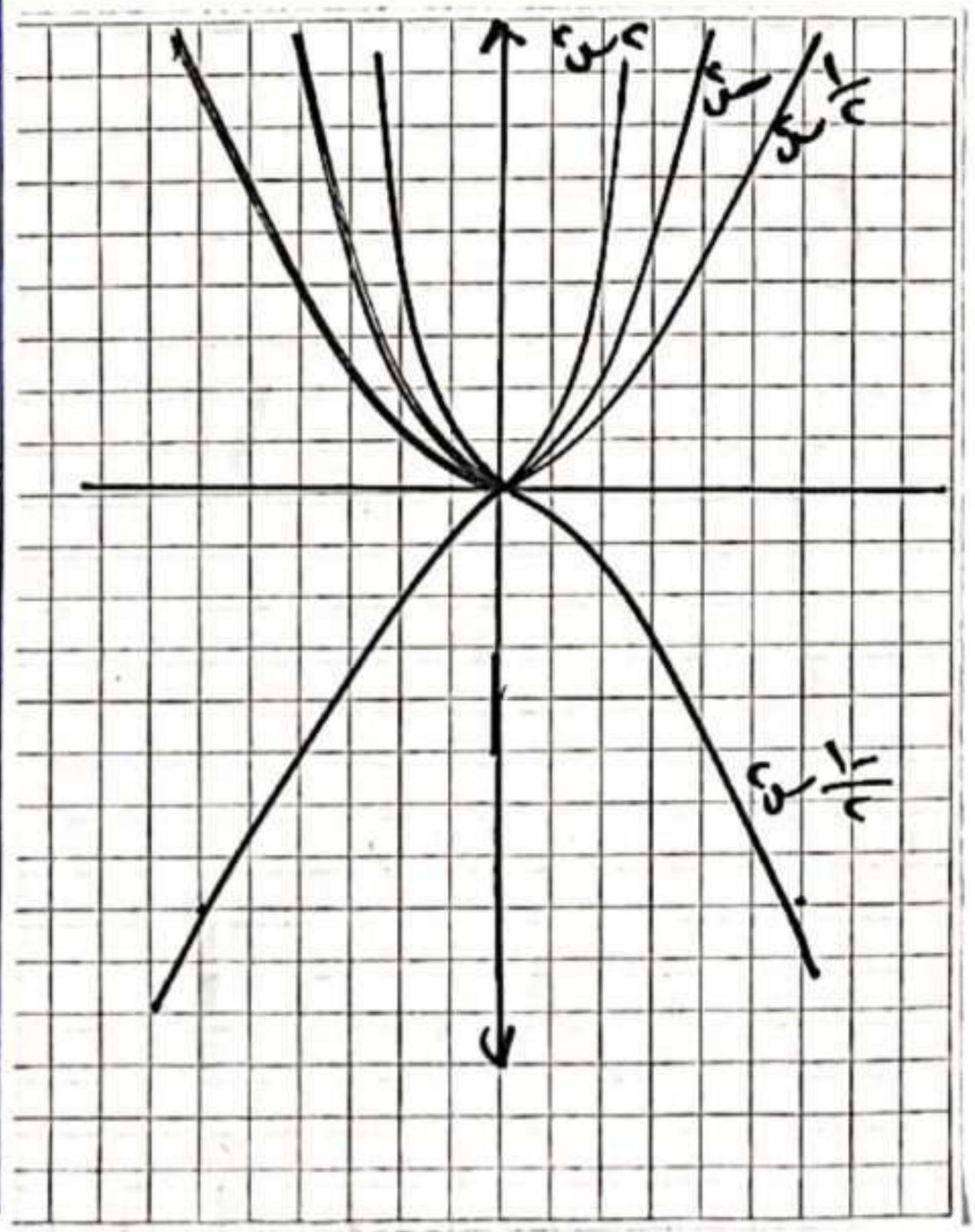
مثلاً :- د(س) = |س|

د(س) = ٢|س|

د(س) = ١/٣ |س|

لو الرقم اللى قدام الدالة
اكبر من ① يقرب من محور الصادات
اصغر من ① يبعد عن محور الصادات

وهكذا فى بقية الدوال



ملحوظة خارج جزء التعدد

د(س) = √(س٢ - ٦س + ٩) الكل

د(س) = |س - ٣|

دخل عادى خالص

حالات مربع كامل

مستر / لطفى زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

إذا أردت ان تكون فخورًا بنفسك
فلا تتعامل معها برفق (ابن القيم)

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

اكتب قاعدة الدوال الآتيه

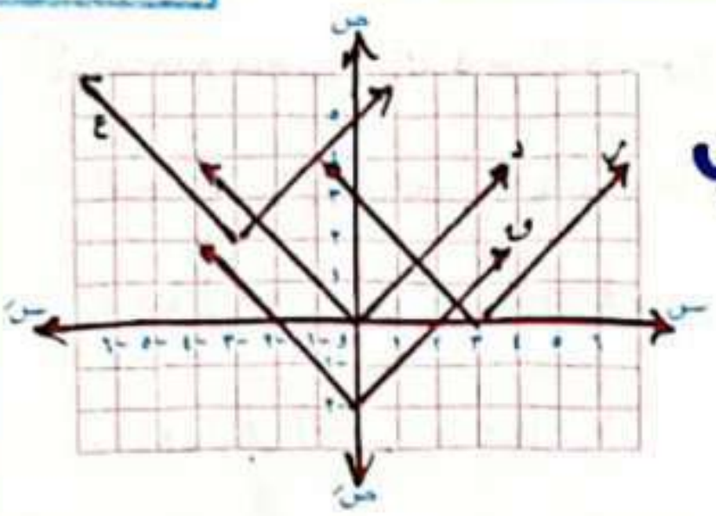
📖 رسم منحنى الدالة د

حيث د (س) = | س | ثم أزيح فى

اتجاه محورى الإحداثيات

كما فى الشكل المقابل.

واجب

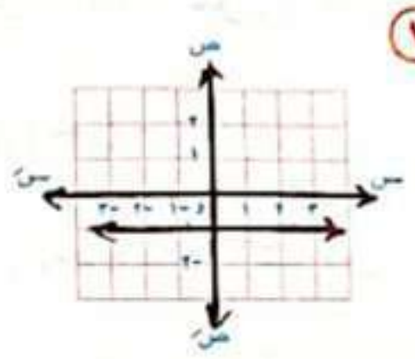


اكتب قاعدة لكل من الدوال الآتية :

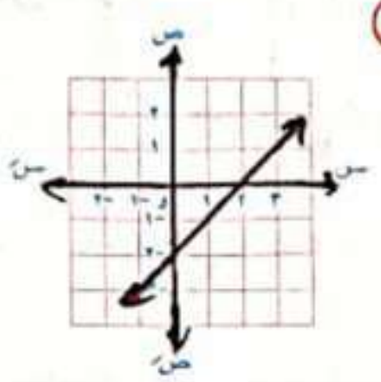
ر ، ق ، ع

📖 اكتب قاعدة الدالة د الممثلة بيانيًا بكل من الأشكال الآتية :

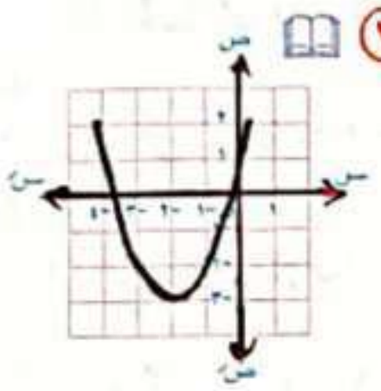
(١)



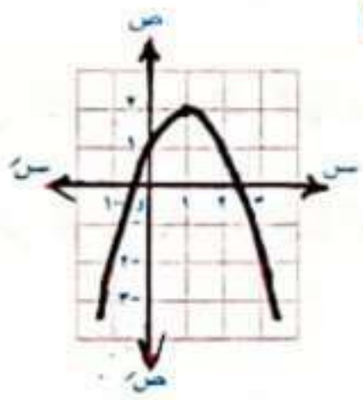
(٢)



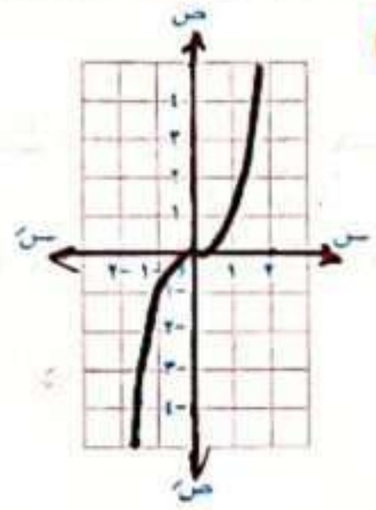
(٣) 📖



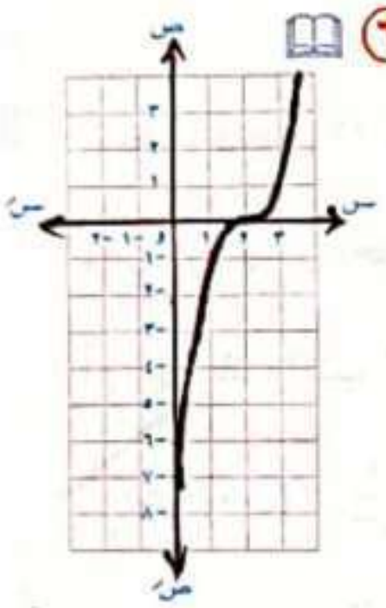
(٤)



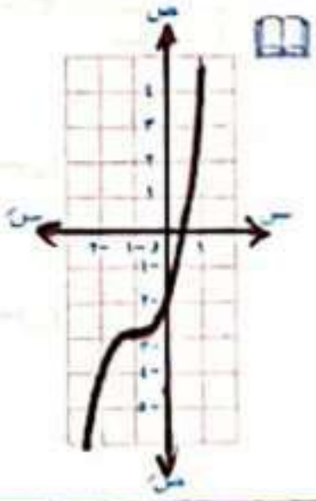
(٥)



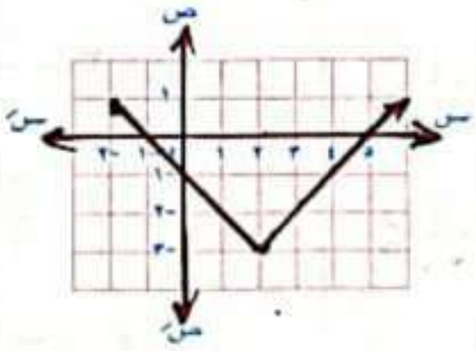
(٦) 📖



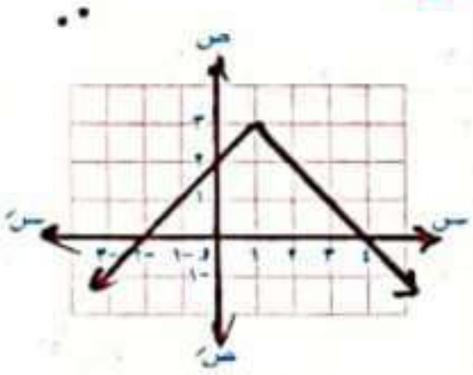
(٧) 📖



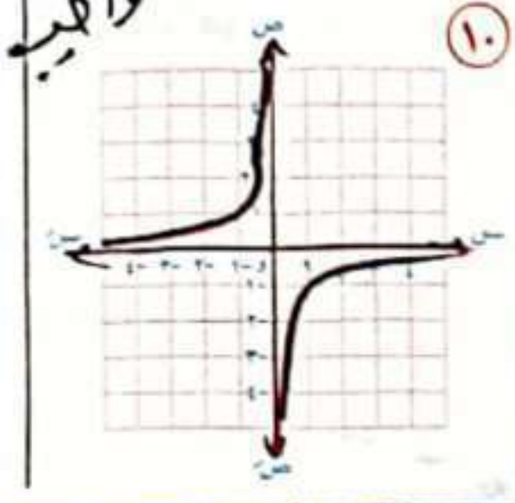
(٨) 📖



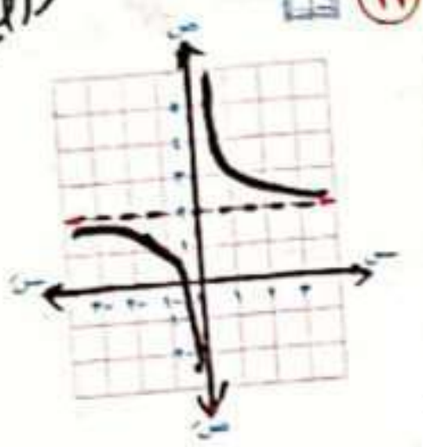
(٩) واجب



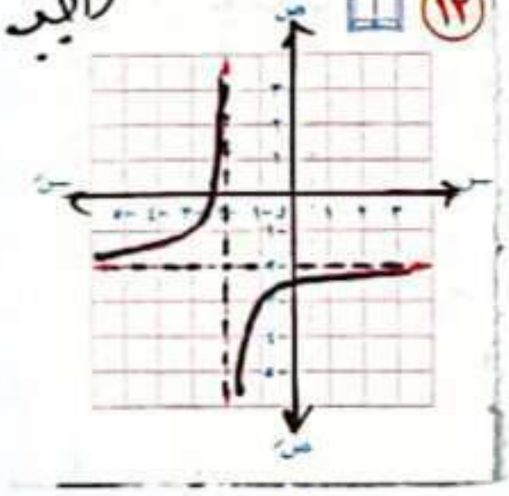
(١٠) واجب



(١١) 📖 واجب



(١٢) 📖 واجب



الحل

① د(س) = -١

② دالة خطية

د(س) = أ س + جـ

د(س) = أ س - جـ

وبتعويض بنقطة (٠،٢جـ) ⇐ ٠ = ٠ - أ جـ ⇐ جـ = أ جـ ⇐ أ = ١ ∴ د(س) = س - جـ

③ د(س) = (س - أ)^٢ + ب ⇐ رأس المنحنى = (٠،٢جـ - ٣) ، ∴ د(س) = (س + ٢)^٢ - ٣

④ رأس المنحنى (١،٢جـ) ، ∴ د(س) = - (س - ١)^٢ + جـ ⇐ خلى بالك (منعكس)

⑤ د(س) = س^٣ ⑥ د(س) = (س - أ)^٣ + ب ⇐ د(س) = (س - جـ)^٣

⑦ د(س) = (س - أ)^٣ + ب ⇐ د(س) = (س + ١)^٣ - ٣ حيث نقطة التماثل هى (-١،-٣)

⑧ د(س) = | س - أ | + ب ⇐ نقطة التماثل هى (جـ،-٣) ∴ د(س) = | س - جـ | - ٣

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الواجب :

(١) استخدم منحنى الدالة د(س) = س² لتمثيل الدوال الآتية ومثل الرسم أوجه المماثل والمختلف واذكر الاطراد ونوعها زوجية أم فردية أم غير ذلك واكتب معادلة محور تماثلها

① د(س) = س² + ١ ② د(س) = س² - ٣ ③ د(س) = ٢ - س²

④ د(س) = (س - ٢)² ⑤ د(س) = -(س - ٣)² ⑥ د(س) = -[(س + ٢)² - ٤]

⑦ د(س) = ٢ - (س + ٣)² ⑧ د(س) = (٣ - س)² - ١ ⑨ د(س) = ٢س²

⑩ د(س) = س² + ٤س + ٤ ⑪ د(س) = س² + ٤س ⑫ د(س) = ½ س²

(٢) استخدم منحنى الدالة د(س) = س³ في نفس المطالب ولكن اذكر مطلوب اسمه واكتب نقط تماثله

① د(س) = س³ + ٤ ② د(س) = (س - ٣)³ ③ د(س) = ٤ - س³

④ د(س) = (س - ٢)³ + ١ ⑤ د(س) = ٢ - (س - ١)³ ⑥ د(س) = (٣ - س)³ + ١

(٣) استخدم منحنى الدالة د(س) = |س| في نفس المطالب

① د(س) = |س| + ١ ② د(س) = |س| - ٣ ③ د(س) = ٣ - |س|

④ د(س) = -|س| + ١٥ ⑤ د(س) = ٢|س| - ١٧ ≤ ٤

⑥ د(س) = √(س² - ٨س + ١٦)

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

(٤) استخدم منحنى الدالة د(س) = ١/س في نفس المطالب

① د(س) = ١/س + ٢ ② د(س) = ١/(٢ - س) + ٣ ③ د(س) = -١/(٢ + س)

④ د(س) = ٣ - ١/(٢ + س) ⑤ د(س) = (١ + س)/س ⑥ د(س) = (٢ - س)/(١ + س)

⑦ د(س) = (٥ - س³)/(٢ - س) ⑧ د(س) = (١ - س)/(١ - ٢س)

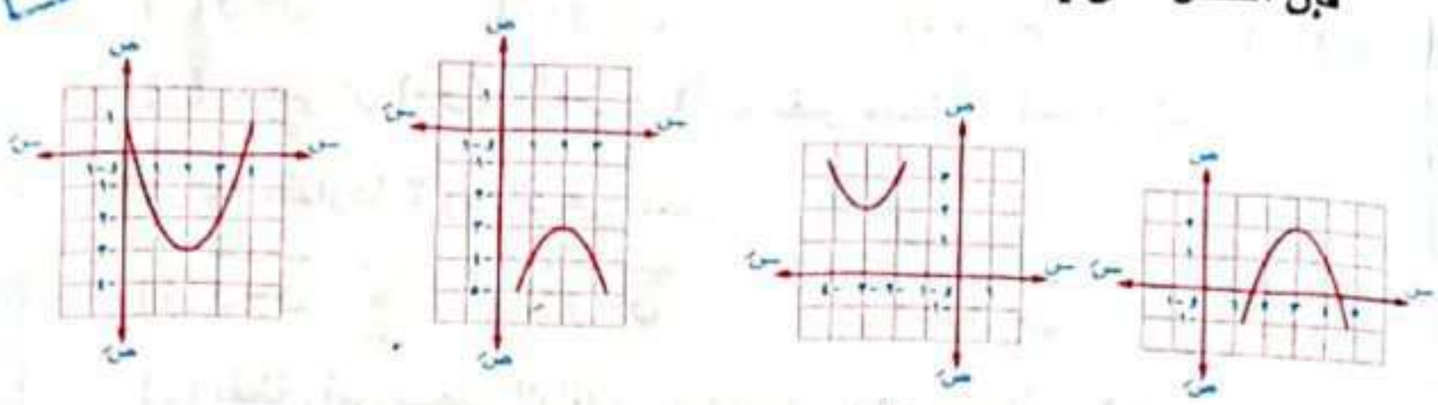
Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

أ / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : د (س) = − (س − ٣)^{٢} + ٢

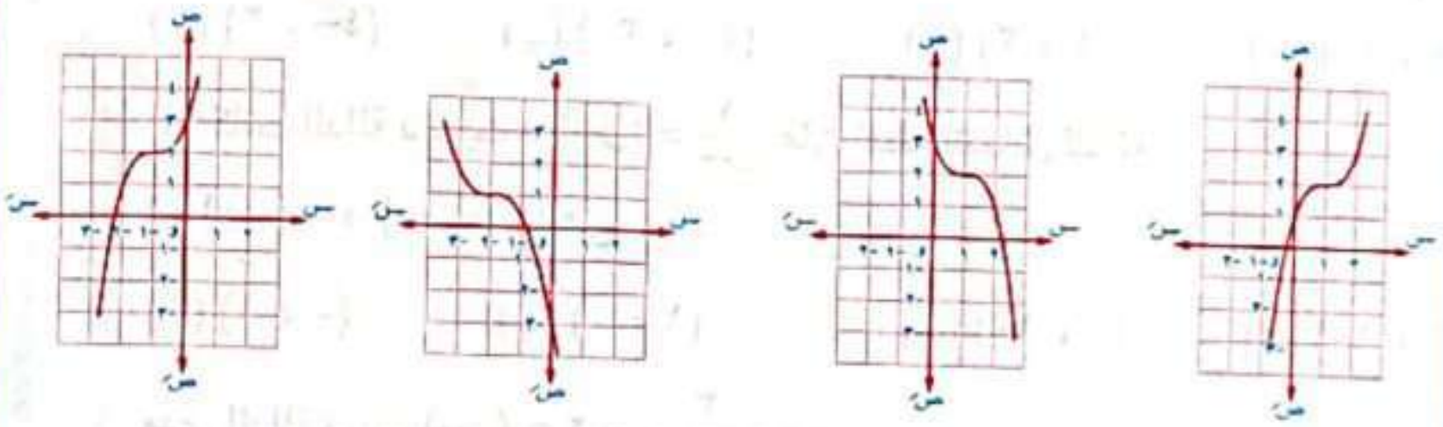
فإن الشكل الذى يمثل الدالة د هو .....



(أ) (ب) (جـ) (د)

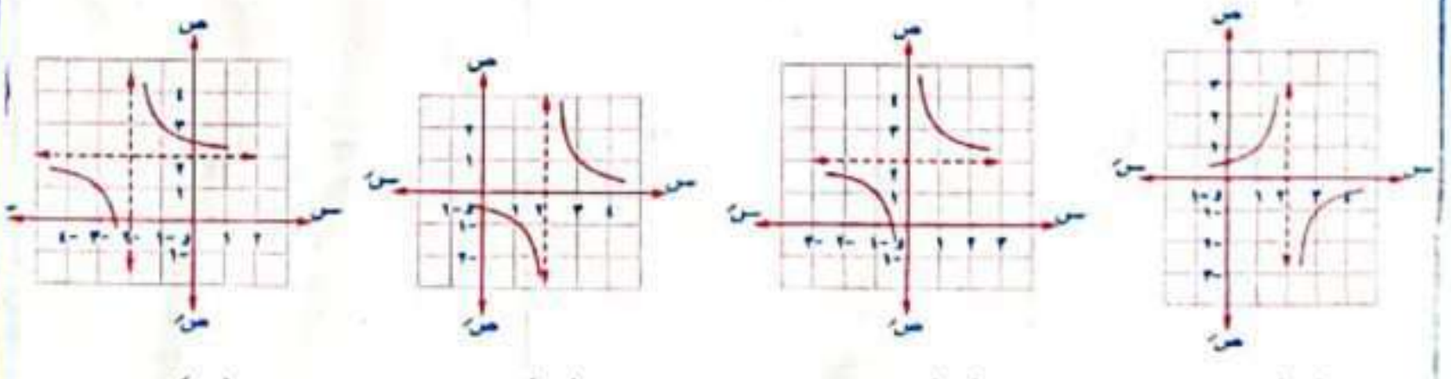
② إذا كانت : د (س) = ٢ − (س − ١)^{٣}

فإن الشكل الذى يمثل الدالة د هو .....



(أ) (ب) (جـ) (د)

③ إذا كانت : د (س) = $\frac{١}{س - ٢}$ فإن الشكل الذى يمثل الدالة د هو .....



(أ) (ب) (جـ) (د)

④ منحنى ر (س) = س^{٢} + ٤ هو نفس منحنى د (س) = س^{٢}

بإزاحة مقدارها ٤ وحدات فى اتجاه .....

(أ) وس← (ب) وس↓ (جـ) وص← (د) وص→

⑤ منحنى ر (س) = |س + ٣| هو نفس منحنى د (س) = |س|

بإزاحة مقدارها ٣ وحدات فى اتجاه .....

(أ) وس← (ب) وس↓ (جـ) وص← (د) وص→

⑥ نقطة رأس منحنى الدالة د : د (س) = (٢ − س)^{٢} + ٣ هى .....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٢ ، −٣)

(جـ) (−٢ ، ٣) (د) (−٢ ، −٣)

⑦ نقطة تماثل منحنى الدالة د حيث د (س) = $\frac{١}{س - ٣}$ + ٤ هى .....

(أ) (٣ ، −٤) (ب) (−٣ ، −٤)

⑧ إذا كانت الدالة د حيث د (س) = $\frac{١}{س}$ فإن نقطة التماثل للدالة ر (س) = د (س + ١) هى .....

(أ) (١ ، ٠) (ب) (٠ ، ١)

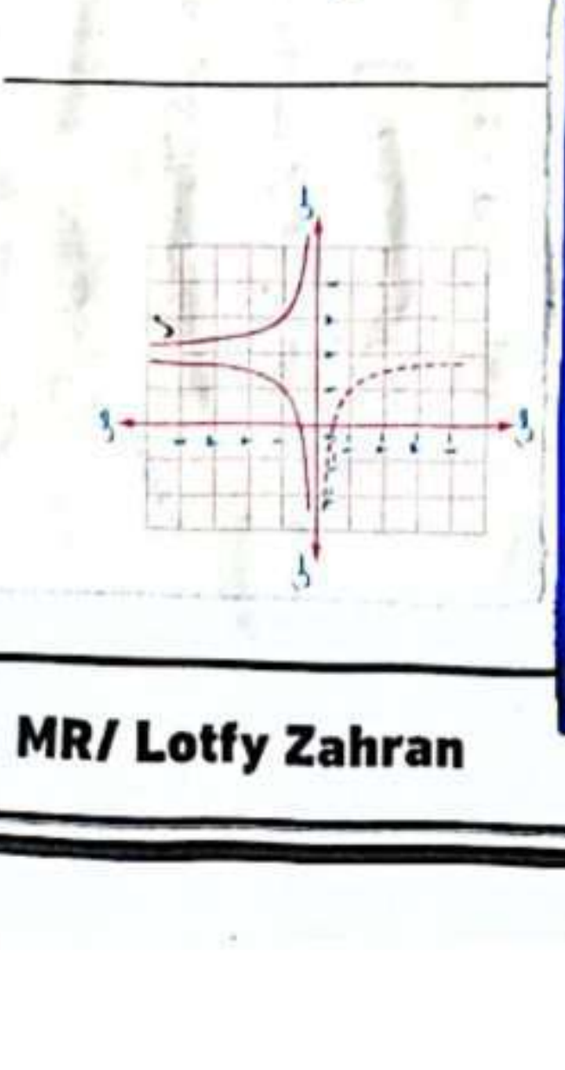
(جـ) (−١ ، ٠) (د) (٠ ، −١)

⑨ مدى الدالة د : د (س) = $\frac{٣}{١ - س}$ − ٢ هو .....

(أ) ح − {٢} (ب) ح − {٣}

(جـ) ح − {١} (د) ح

٢ تبين الأشكال التالية منحنيات الدوال د ، و ، ر على الترتيب. اكتب قاعدة الدالة فى كل شكل :



MR/ Lotfy Zahran
01115956226 - 01028089912

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حل معادلات معتبا بنات القيمة المطلقه

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

اولاً: الطريقه الجبريه

* تعريف المقياس $|س| = \begin{cases} س & ، س \geq ٠ \\ -س & ، س < ٠ \end{cases}$

$|س - ٢| = \begin{cases} س - ٢ & ، س \geq ٢ \\ -(س - ٢) & ، س < ٢ \end{cases}$ $\Rightarrow |س + ٥| = \begin{cases} س + ٥ & ، س \geq -٥ \\ -(س + ٥) & ، س < -٥ \end{cases}$

$|٢س + ٣| = \begin{cases} ٢س + ٣ & ، س \geq -\frac{٣}{٢} \\ -(٢س + ٣) & ، س < -\frac{٣}{٢} \end{cases}$

يارب تكون فهمت تعريف المقياس

مثال: $|س - ٢| = ٣$ ← كده حلين

الحل الاول من خلال تعريف المقياس ويعدين نعوض مرتين للمقياس مرة بالموجب ومرة بالسالب

التعويض بالموجب

$س - ٢ = ٣$

$\therefore س = ٥$ ← لازم يكون $س \geq ٢$

التعويض بالسالب

$-(س - ٢) = ٣ \Leftarrow -س + ٢ = ٣ \Leftarrow -س = ١ \Leftarrow س = -١$

لازم يكون $س < ٢$

$\therefore م.ح = \{٥ ، -١\}$

الحل الثاني باستخدام خواص المقياس وهو: ما بداخل المقياس = ± العدد

$س - ٢ = \pm ٣$

$\therefore س - ٢ = ٣$	$س - ٢ = -٣$
$س = ٥$	$س = -١$

$\therefore م.ح = \{٥ ، -١\}$

بص يا معلم

فيه مسائل أسهل الحل الاول
وفيه مسائل أسهل الحل الثاني
هتلاقي الشرح فيه كدا وفيه كدا
عشان مش عايز لخبطة

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

خواص وملاحظات هامة

خواص مقياس العدد الحقيقى

١ $|أ| \geq 0$

٢ $|أ ب| = |أ| \times |ب|$

٣ $|أ + ب| \leq |أ| + |ب|$

أى أن مقياس مجموع عددين أصغر من أو يساوى مجموع مقياسيهما ويحدث التساوى إذا كان أ ، ب سالبين معًا أو موجبين معًا أو كليهما يساوى الصفر

فمثلًا : $|٤ + (-٧)| < |٤| + |-٧|$ ، $|-٤ + (-٧)| = |-٤| + |-٧|$

ملاحظات

١ لأى عدد حقيقى أ يكون $|أ| = |-أ|$ **فمثلًا :** $|٣| = |-٣|$

٢ $|أ - س| = |س - أ|$ **فمثلًا :** $|٢ - س| = |س - ٢|$

٣ $|س| = ح ، ح > ٠ \Leftrightarrow س = \pm ح$

فمثلًا : إذا كان : $|س| = ٣$ فإن : $س = \pm ٣$

وإذا كان : $أ = \pm ٥$ فإن : $|أ| = ٥$

٤ إذا كان : أ ، ب عددين حقيقيين فإن : $|أ| = |ب| \Leftrightarrow أ = \pm ب$

٥ لأى عدد حقيقى أ يكون $(|أ|)^٢ = أ^٢$ التربيع بيطير المقياس

فمثلًا : $(|-٢|)^٢ = ٤$ ، $(|-\frac{١}{٢}|)^٢ = \frac{١}{٤}$

٦ لأى عدد حقيقى أ يكون $\sqrt{أ^٢} = |أ|$

فمثلًا : $\sqrt{(٥)^٢} = |٥| = ٥$ ، $\sqrt{(-٣)^٢} = |-٣| = ٣$

٧ إذا كان : $|س| = س$ فإن : $س \in [٠ ، \infty[$

٨ إذا كان : $|س| = -س$ فإن : $س \in]-\infty ، ٠]$

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

مثال ١

$|٣س - ٢| = ٧$

الحل

$٣س - ٢ = \pm ٧$

$\therefore ٣س - ٢ = ٧$

$٣س = ٩$

$س = ٣$

$\therefore ٣س - ٢ = -٧$

$٣س = -٥$

$س = -\frac{٥}{٣}$

$\therefore م(ع) = \{٣ ، -\frac{٥}{٣}\}$

مثال ٢

$|س - ٤| = ١$ ← نتذكر حلين ← تربيع الطرفين ← أحدهم = ± الآخر

تربيع الطرفين $(س - ٤)^٢ = (١)^٢$

$س^٢ - ٨س + ١٦ = ١$

$\therefore س^٢ - ٨س + ١٥ = ٠$

$(س - ٣)(س - ٥) = ٠$

$س = ٣$ | $س = ٥$

$\therefore م(ع) = \{٣ ، ٥\}$

مثال ٣

$|٤س - ١٠| = ٠$

$|٤س - ١٠| = ٠$ (÷ ٤)

$|س - ٥| = ٠$

$س = \pm ٥$

$\therefore م(ع) = \{\pm ٥\}$

مثال ٤

$|٢س - ١٦| = -٥$

$\therefore م(ع) = \phi$

مثال ٥

$|٣س^٢ + ١٢س - ٩| = ٠$ (÷ -١)

$\therefore -٣س^٢ - ١٢س + ٩ = ٠$

$\therefore ٣س^٢ + ١٢س - ٩ = ٠$

$(س - ٣)(س - ١) = ٠$

$س = ٣$ | $س = ١$

$\therefore م(ع) = \{١ ، ٣\}$

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١١١٥٩٥٦٢٢٦

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ٦ :- $|س^2 - 16| = |س - 3|$ بتربيع الطرفين

$(س^2 - 6)^2 = (س - 3)^2 \Leftarrow س^4 - 12س^2 + 36 = س^2 - 6س + 9$

$س^4 - 12س^2 + 36 - س^2 + 6س - 9 = 0$

$س^4 - 13س^2 + 6س + 27 = 0$ (÷ 3)

$س^3 - 18س + 27 = 0$

$س^2 - 6س + 9 = 0$

$(س - 3)(س - 3) = 0$

$س = 3$ | $س = 3$ ∴ م.ح = {3}

حل آخر

$|س^2 - 3| = |س - 3|$

$|س^2 - 3| - |س - 3| = 0$

$|س - 3|(|س + 3| - 1) = 0$

$س - 3 = 0$

$س = 3$ ∴ م.ح = {3}

مثال ٧ :- $|س - 1| - |س - 2| = 0$ ← نظبط المعادلة الأول

$|س - 1| - |س - 2| = 0 \Leftarrow |س - 1| = |س - 2|$ بتربيع الطرفين

$(س - 1)^2 = (-(س - 2))^2$

$س^2 - 2س + 1 = 4 \Leftarrow (س^2 - 4س + 4)$

$س^2 - 2س + 1 - س^2 + 8س - 16 = 0 \Leftarrow 6س - 15 = 0$ (÷ 3)

$2س - 5 = 0 \Leftarrow (س - 3)(2س - 5) = 0$

$س = 3$ | $س = \frac{5}{2}$ ∴ م.ح = $\{3, \frac{5}{2}\}$

حل آخر لرقم ⑦ $|س - 1| = \pm$ الآخر

$س - 1 = \pm 2(س - 2)$

$س - 1 = 2(س - 2)$

$س - 1 = 2س - 4$

$-س = -3$

$س = 3$

$س - 1 = -2(س - 2)$

$س - 1 = -2س + 4$

$3س = 5$

$س = \frac{5}{3}$

∴ م.ح = $\{3, \frac{5}{3}\}$

خلي بالك
مثال ٥ ، مثال ٦
ينفع فيهم الحل ده برضه
مينفعش تستخدم تعريف المقياس

مستر / لطفي زهران
رياضيات الإعدادية والثانوية
01115956226 - 01028089912

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ٨

$|س - ٢| = س + ٤$ هنا هنستخدم تعريف القيمة المطلقة بأسهل

$$|س-٢| = \begin{cases} س-٢ & ، س \geq ٢ \\ -(س-٢) & ، س < ٢ \end{cases}$$

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

$س - ٢ = س + ٤$	$-(س-٢) = س + ٤$
$س - س - ٢ - ٤ = ٠$	$-س + ٢ = س + ٤$
مرفوض	$-س + ٢ - س - ٤ = ٠$
	$-٢س - ٢ = ٠ \Leftarrow -٢س = ٢ \Leftarrow س = -١$
	لازم $<$

$\therefore م.ح = \{-١\}$

مثال ٩

$|س + ٣| - \frac{١}{٢} س = ٣$ ← هنستخدم تعريف القيمة المطلقة

$$|س+٣| = \begin{cases} س+٣ & ، س \geq -٣ \\ -(س+٣) & ، س < -٣ \end{cases}$$

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

$س + ٣ - \frac{١}{٢} س = ٣$	$-(س+٣) - \frac{١}{٢} س = ٣$
$\frac{١}{٢} س = ٣ - ٣$	$-س - ٣ - \frac{١}{٢} س = ٣$
$\frac{١}{٢} س = ٠$	$-\frac{٣}{٢} س = ٣ + ٣$
$\therefore س = ٠$	$\frac{-٣}{٢} س = ٦ \left(\frac{-٢}{٣}\right)$
	$س = -٤$

$\therefore م.ح = \{-٤، ٠\}$

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢٦

(١٠) $|س^2| = |س| - ٣$

الحل

$|س^2| = |س| + ٣$

$|س|^2 - |س| - ٣ = ٠$

$(|س| - ٣)(|س| + ١) = ٠$

$|س| = ٣$ (÷٣) $\quad |س| = ١$

$\therefore س = \pm ١ \quad \therefore م.ح = \{\pm ١\}$

(١١) $س^4 - ٥|س| + ٦ = ٠$

$|س| = \begin{cases} س & ، س \geq ٠ \\ -س & ، س < ٠ \end{cases}$

$س^2 - ٥س + ٦ = ٠$ | $س^2 - ٥(-س) + ٦ = ٠$

$(س - ٢)(س - ٣) = ٠$ | $س^2 + ٥س + ٦ = ٠$

$س = ٢ \ | \ س = ٣$ مقبول | $(س + ٢)(س + ٣) = ٠$

$س = -٢ \ | \ س = -٣$ مقبول

$\therefore م.ح = \{-٣، -٢، ٢، ٣\}$

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢٦

ثانيا :- الطريقة البيانية

أوجد مجموعة الحل بيانيا

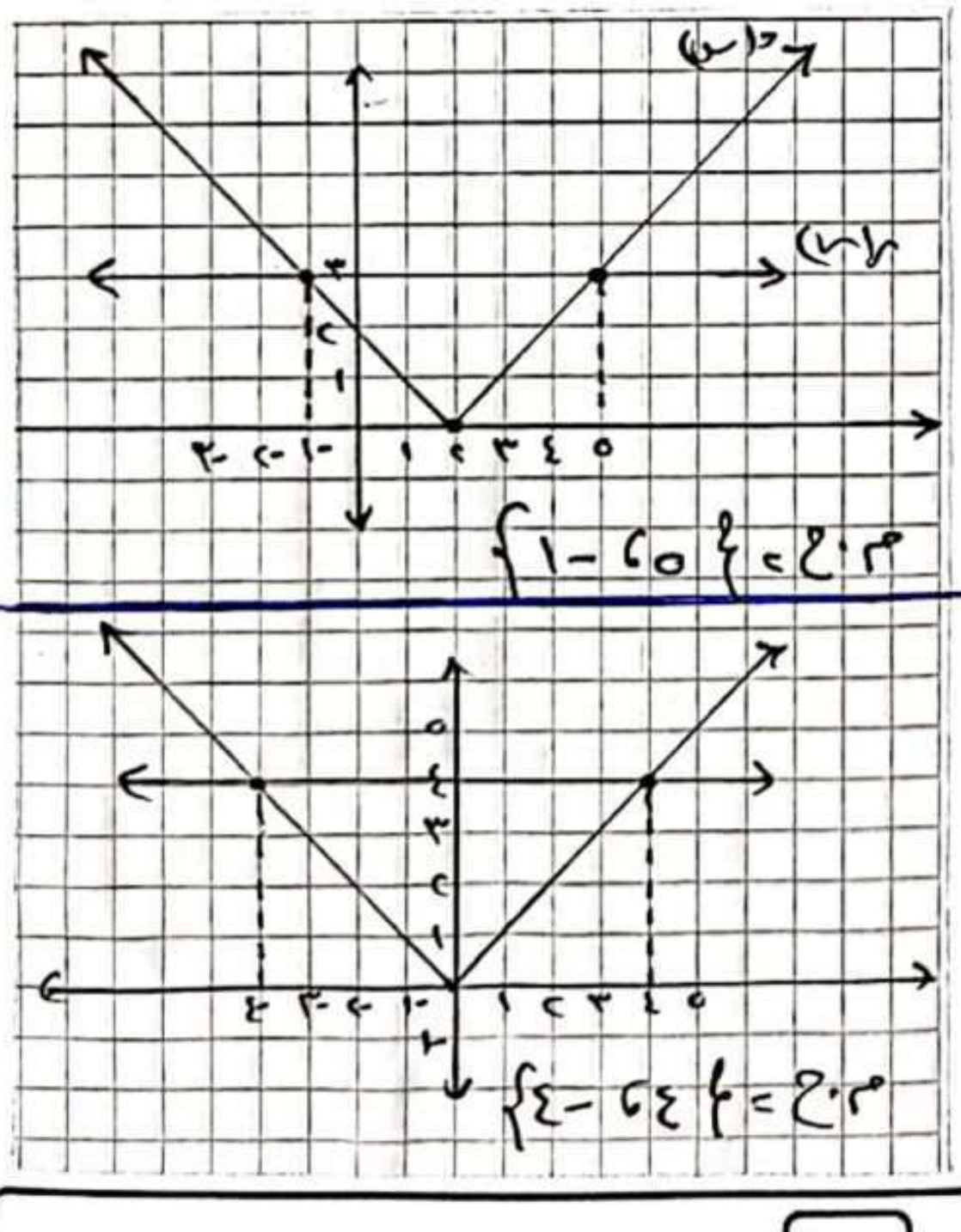
(١) $|س| - ١٢ = ٣$

الحل

نقط التقاطع

$د(س) = |س| - ٢ \Leftarrow (٠، ٢)$

$ر(س) = ٣$



$م.ح = \{-٥، ٥\}$

(٢) $|س| - ٤ = ٠$

$|س| = ٤$

الحل

نقط التقاطع

$د(س) = |س| \Leftarrow (٠، ٠)$

$ر(س) = ٤$

$م.ح = \{-٤، ٤\}$

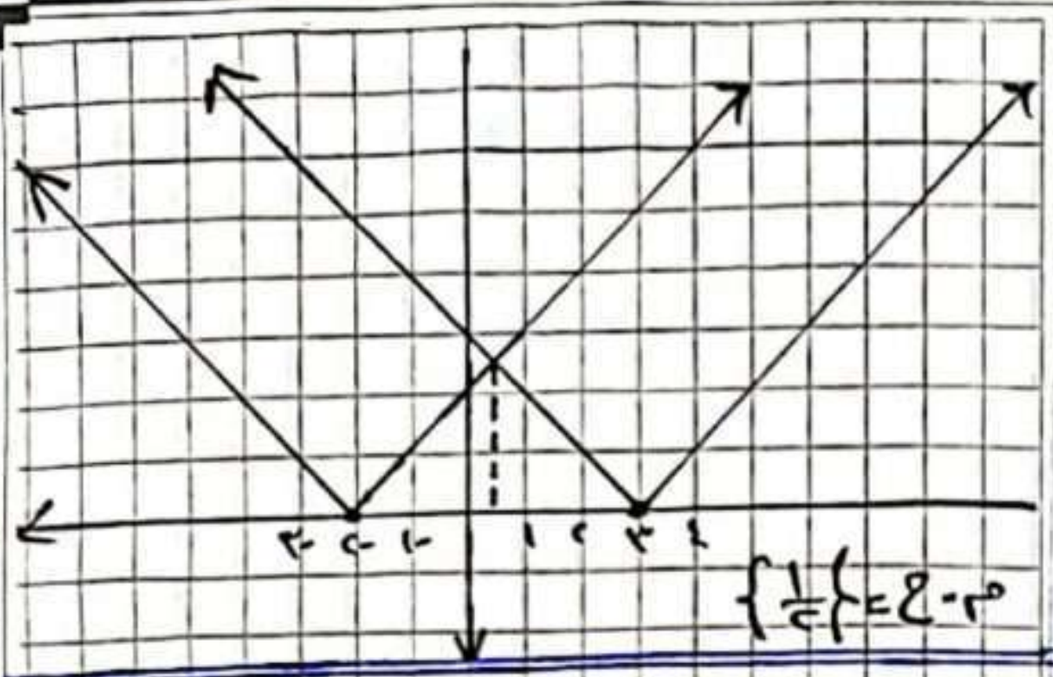
Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

③ $|س+٥| = |س-٣|$

الحل

$د(س) = |س+٥| \Leftarrow (-٥,٠)$

$ر(س) = |س-٣| \Leftarrow (٣,٠)$



④ $|٢س+٥| = س-٤$

$د(س) = |٢س+٥| \Leftarrow |٢س+٥|$

هحوض بقيم عشان فيه عدد مرأس $\Leftarrow (-٥,٠)$

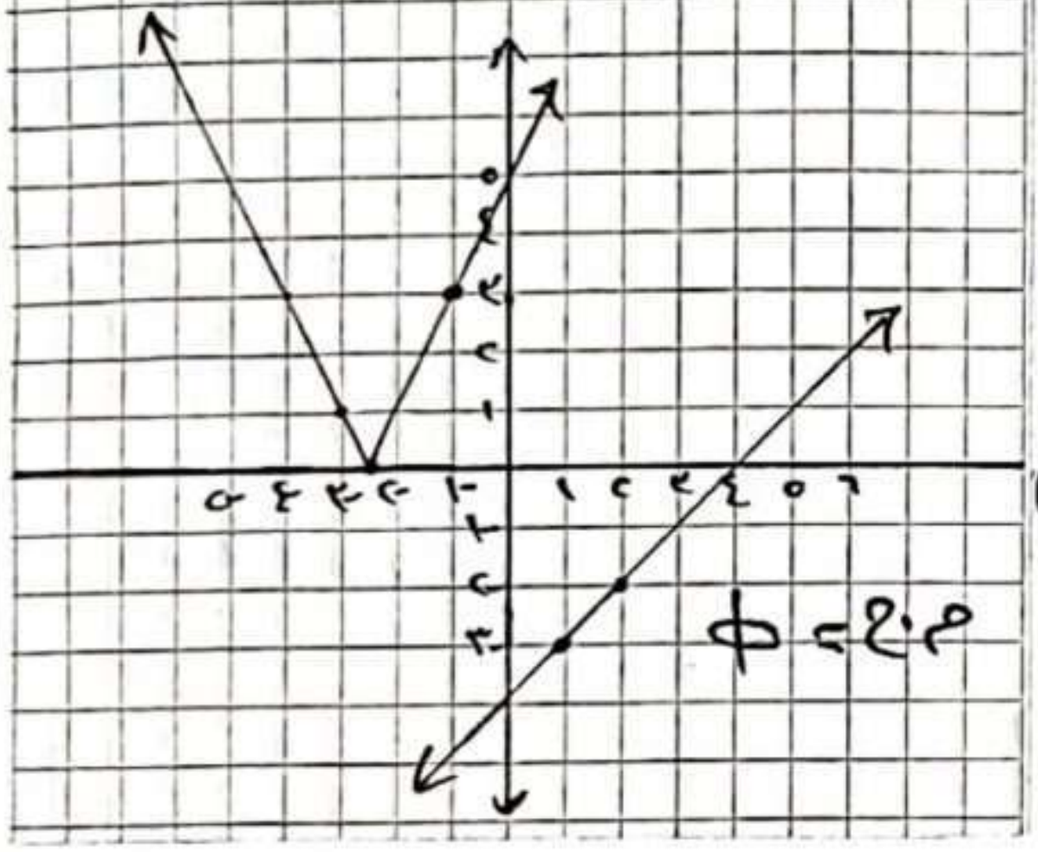
حس = -١ $د(-١) = |٢(-١)+٥| = ٣ \Leftarrow (-١,٣)$

س = -٣ $د(-٣) = |٢(-٣)+٥| = ١ \Leftarrow (-٣,١)$

$ر(س) = س - ٤$

$ر(١) = ١ - ٤ = -٣ \Leftarrow (١,-٣)$

$ر(٠) = ٠ - ٤ = -٤ \Leftarrow (٠,-٤)$



⑤ $|س-٤| = ٤ - س$

$د(س) = |س-٤|$

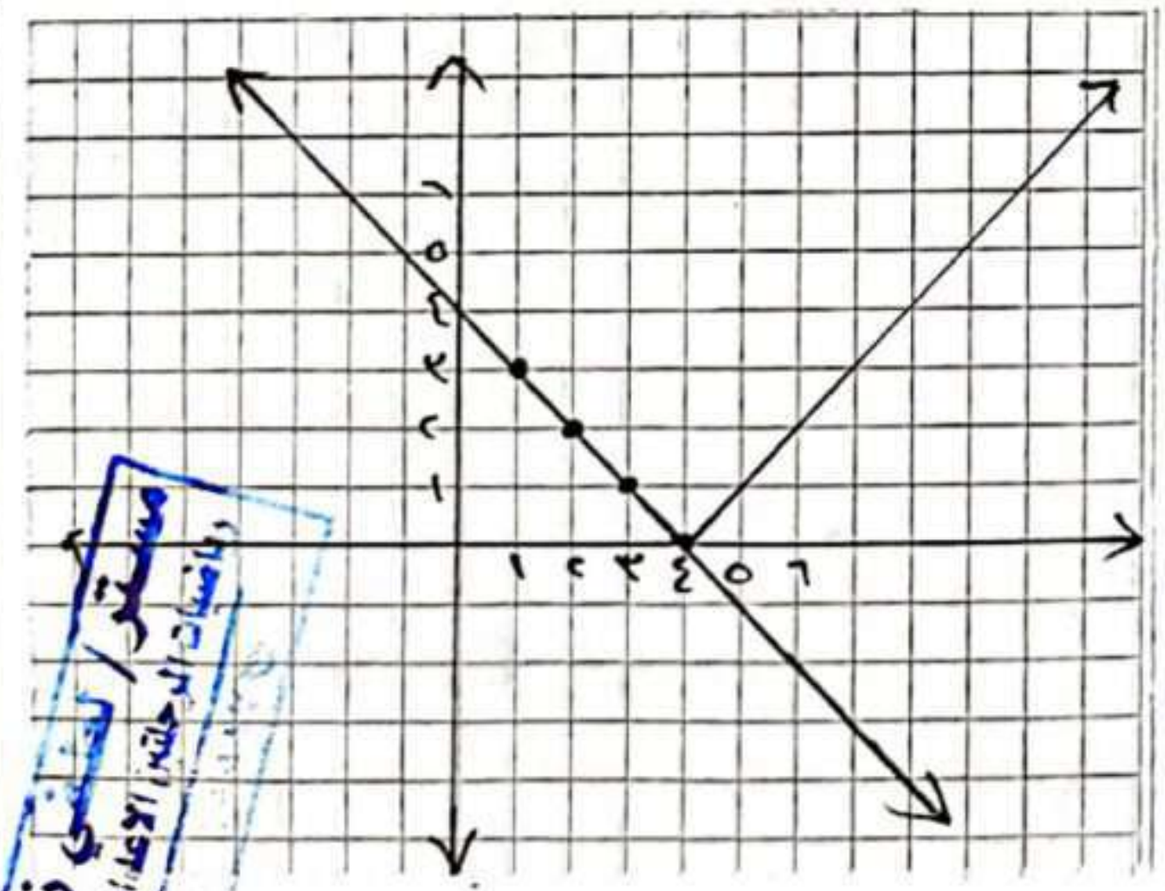
نقط التقاطع هى $(٤,٠)$

$ر(س) = ٤ - س$

$ر(١) = ٤ - ١ = ٣ \Leftarrow (١,٣)$

$ر(٠) = ٤ - ٠ = ٤ \Leftarrow (٠,٤)$

$ر(٣) = ٤ - ٣ = ١ \Leftarrow (٣,١)$



$م = [-\infty, ٤] \quad ل = [٤, \infty]$

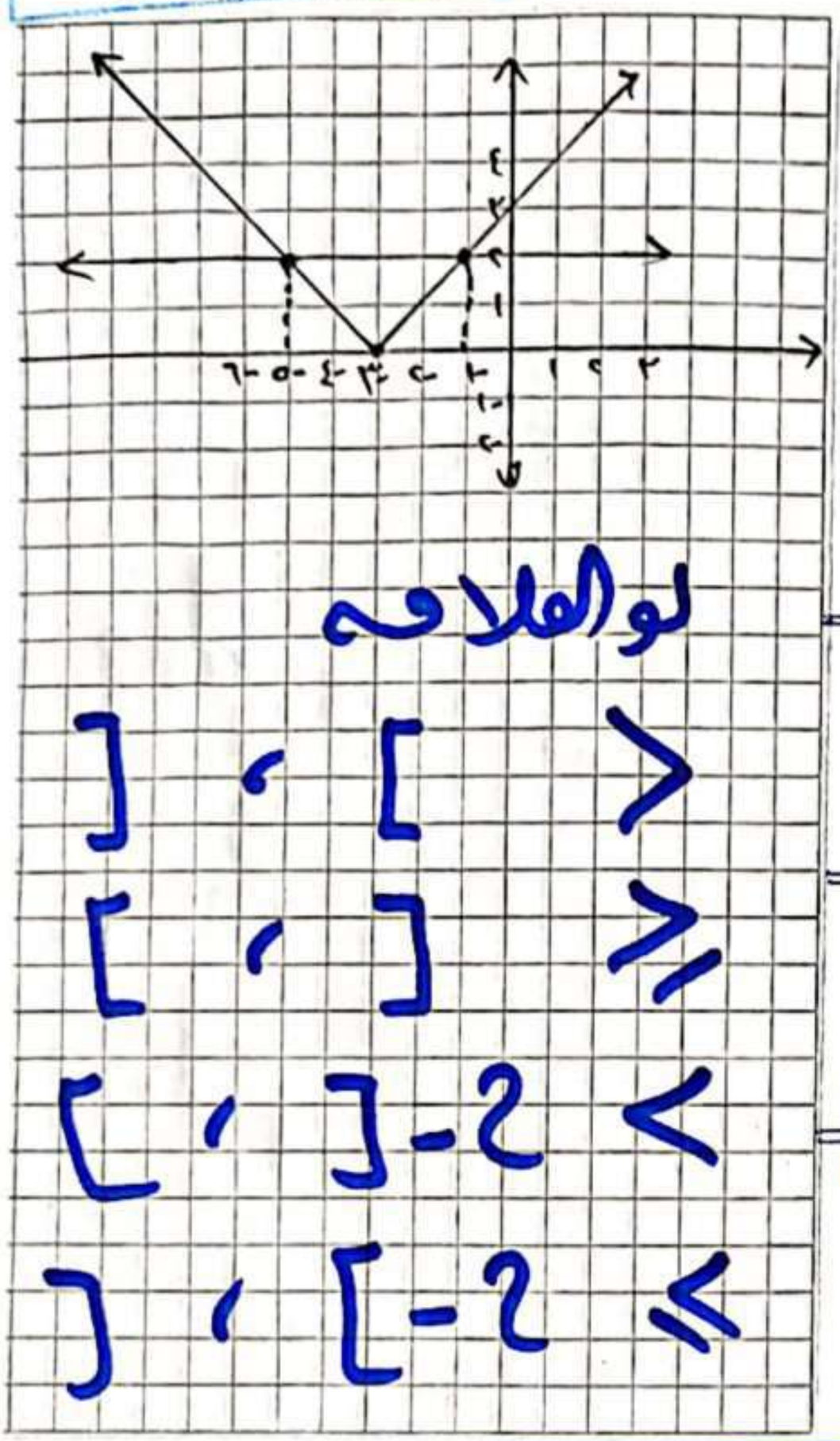
مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢
01115956226 - 01028089912

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حل متباينات القيمة المطلقة

أولاً: الحل البياني

مستر/ لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩١٢



لو الفلاقه

$> \quad [\ ,\ ] \quad <$

$\geq \quad [\ ,\ ] \quad \leq$

$[\ ,\ ]-2 <$

$\geq 2-[\ ,\ ]$

$]\ ,\ [-2 \leq$

① $|س+٣| > ٢$

الحل

$د(س) = |س+٣| \Leftarrow (-٣،٠)$

$ر(س) = ٢$

$\therefore م =]-٥،٢-[$

② $|س+٣| \geq ٢$

$م = [-٥،-١]$

③ $|س+٣| < ٢$

$م = ٢ - [-٥،-١]$

④ $|س+٣| \leq ٢$

$م =]-٥،-٢[- \{-٢\}$

⑤ $|٢س-٨| \geq ٦$

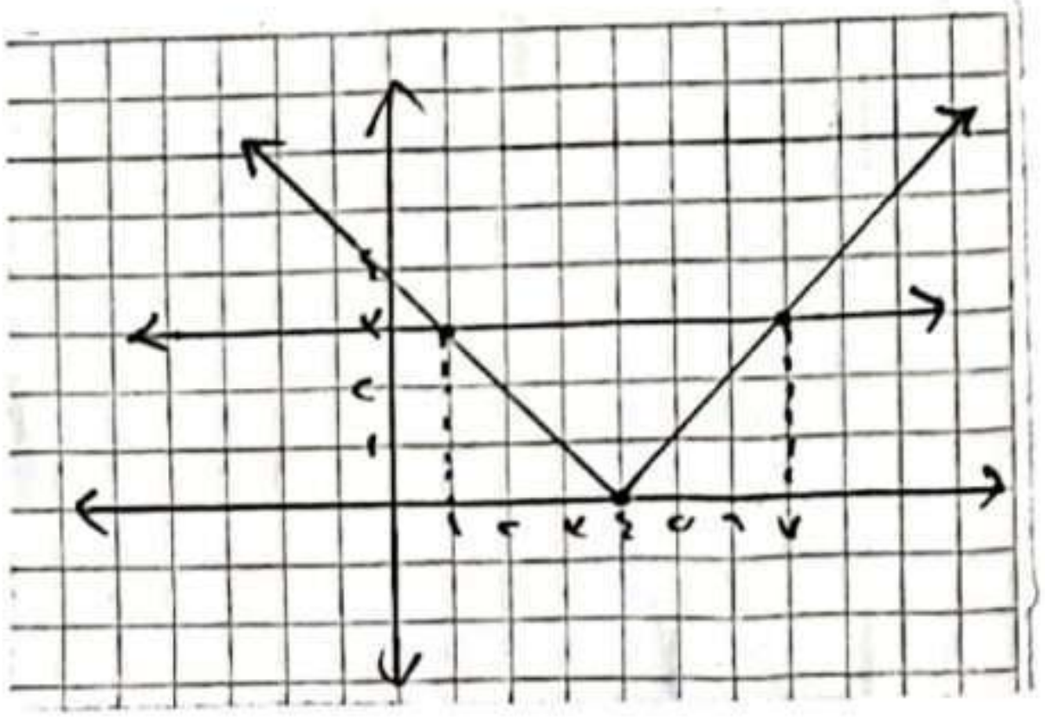
$|٢س-٨| \geq ٦$ (÷ ٢)

$|س-٤| \geq ٣$

$د(س) = |س-٤| \Leftarrow (٠،٤)$

$ر(س) = ٣$

$م =]-\infty،١] \cup [٧،\infty[$



Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

⑥ |س-٢| ≥ ٣-|س-١٣|

د(س) = |س-٢|

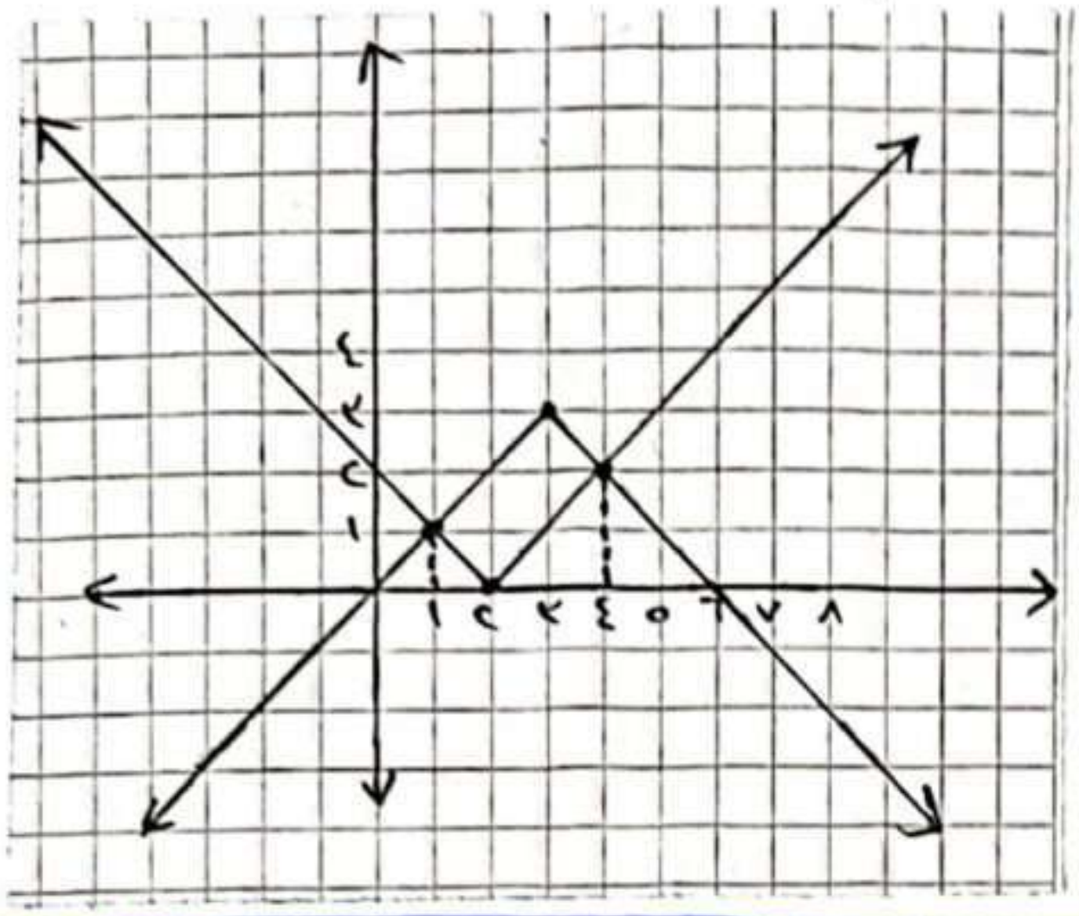
نقطة التقاطع (٢،٠)

ر(س) = ٣-|س-١٣|

نقطة التقاطع (٣،٣)

ولكن عليه انعكاس

م =]-∞، ٤] ∪ [١، ∞[



ثانيا: الحل الجبرى

① |٢س-٥| > ١

الحل

-١ > ٢س-٥ > ١

-١+٥ > ٢س > ١+٥

٤ > ٢س > ٦ (÷٢)

٣ > س > ٢

∴ م =]٢، ٣[← العلاقة ⊂

② |س+٢| < ٣

الحل

-٣ < س+٢ < ٣

-٣-٢ < س < ٣-٢

-٥ < س < ١

م =]-٥، ١[

③ |٣-س| < ٧

الحل

بدل الاول ≡ |س-١٣| < ٧

-٧ < س-٣ < ٧

-٧+٣ < س < ٧+٣

-٤ < س < ١٠

م =]-٤، ١٠[

④ |س+٢| < ٣

الحل

-٣ < س+٢ < ٣

-٣-٢ < س < ٣-٢

-٥ < س < ١

م =]-٥، ١[

⑤ |س-٣| ≥ ٥

الحل

-٥ ≥ س-٣ ≥ ٥

-٢ ≥ س ≥ ٥+٣

-٢ ≥ س ≥ ٨

م =]-∞، -٢] ∪ [٨، ∞[

وقل رب زدنى علما .

اللهم إنى أسألك التوفيق والسداد .

مستر / لطفى زهران
رياضيات المرحلة الإعدادية والثانوية
٠١١١٥٩٥٦٢٢٦

مستر / لطفى زهران
رياضيات المرحلة الإعدادية والثانوية
٠١١١٥٩٥٦٢٢٦

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

⑤ $\sqrt{٤س^{٢}+١٢س+٩} \geq ١$

الكل

$\sqrt{(٢س+٣)^{٢}} \geq ١$

$|٢س+٣| \geq ١$

$١- \leq ٢س+٣ \leq ١$

$٤- \leq ٢س \leq ٢-$

$٢- \leq س \leq ١-$

م.ح = $[-٢، -١]$

هطلب كل حاجة

$|٢س-٥| \geq \frac{١}{٢}$

$\frac{-١}{٢} \leq ٢س-٥ \leq \frac{١}{٢}$

$\frac{-١}{٢}+٥ \leq ٢س \leq \frac{١}{٢}+٥$

$\frac{٤}{٣} \leq س \leq \frac{٦}{٣}$ (÷٢)

$\frac{٧}{٣} \leq س \leq ٣$

م.ح = $[\frac{٧}{٣}، \frac{٨}{٣}] - \{\frac{٥}{٢}\}$

$\frac{٧}{٣} = ٢,٣$ ، $\frac{٨}{٣} = ٢,٧$ ، $\frac{٥}{٢} = ٢,٥$

معنى كدا ان ٢,٥ محصورة بين ٢,٣ ، ٢,٧

ملحوظة خطيرة

اذا كانت $\notin$ ح

يبقى حل الباقيين

$|س| > ٩$ أو $|س| \geq ٩$ هـ $\notin$

يبقى عدد حل الباقيين

ح هـ $|س| < ٩$ ، $|س| \leq ٩$

مثلا : $|س| > -٣$ ∴ م.ح = ϕ

$|س| < -٤$ ∴ م.ح = ح

مرة واحد حب يمشى

لكن تلشى محبهوش

(☺)

① $|٢س-١٥| + |٥-٢س| < ١٤$

الكل

$|٢س-١٥| + |١٥-٢س| < ١٤$

٢ $|٢س-١٥| < ١٤$ (÷٢)

$|٢س-١٥| < ٧$

$-٧ < ٢س-١٥ < ٧$

$٨ < ٢س < ٢٢$ (÷٢)

$٤ < س < ١١$

م.ح = $]٤، ١١[$

⑦ $\frac{١}{|٢س-١٥|} \geq ٣$

الحال = ح - $\{\frac{٥}{٢}\}$ حيث الحال ك ≠ دالة كسرية

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

عين مجال الدوال الآتية:

① $د(س) = \frac{٢س}{|س| - ٣}$

الحل

المقام أصفار

$|س| - ٣ = ٠ \Leftarrow |س| = ٣$

$\therefore س = \pm ٣$ $\therefore$ مجال $د = ح - \{\pm ٣\}$

② $د(س) = \frac{س}{|س - ١١| + ٢}$

$|س - ١١| + ٢ = ٠ \Leftarrow |س - ١١| = -٢$

مرفوض

$\therefore$ لا يوجد أصفار للمقام $\therefore$ مجال $د = ح$

الواجب:

أوجد جبرياً في ح مجموعة حل المعادلات

① $|٤س - ١| - ٥ = ٠$

② $|٣ - ٢س| = ٧$

③ $|س + ٥| - ٣ = ٢$

④ $|س - ٥| = ٣س - ٤$

⑤ $|س + ٤| + س - ٥ = ٠$

⑥ $|٢س - ٦| = |س - ٣|$

⑦ $|س + ١٥| = |س - ٣|$

⑧ $\sqrt{س^٢ - ٥} = ٦$

⑨ $\sqrt{س^٢ + ٤س + ٤} = ٢$

المسوحة ضوئيا بـ CamScanner

① $|س-٢| = ٣س-٤$

⑦ $|٢س+٤| = ١-س$

⑧ $|س+٥| = |س-٣|$

⑨ $|س-٢| + |س-١| =$ صفر

⑩ $|س-٣| = |٢س+١|$

المتباينات

أوجد جبرياً مجموعة الحل للمتباينات

① $|س-١٢| \geq ٥$

③ $|س-١٣| \leq ٥$

④ $|٢س+١٥| > ٣$

⑥ $|٣-٣| > ٧$

⑤ $|٣س+٢| < ٤ + ٥$

⑦ $\left|\frac{س-٣}{٤}\right| \leq ١٧$

⑧ $\frac{١}{|٢س-١٥|} \geq ٢$

⑨ $\frac{١}{|٣-٣|} \geq ٥$

⑩ $\sqrt{س^{٢}-٣س+١} \geq ٦$

أوجد بيانياً

① $|س-١| < ٢$

③ $|٢س-٥| \leq ٢$

② $|س+٣| > -س$

④ $\sqrt{٤س^{٢}-١٢س+٩} > ٥$

⑤ $|س-٣| + |س-٤| > ٥$

أوجد مجال الدوال الآتية

① $د(س) = \frac{٢}{|س|-١}$

② $د(س) = \frac{٣}{|س|+١}$

③ $د(س) = \frac{س٣}{|س|-٥}$

④ $د(س) = \sqrt{|س|-٥}$

⑤ $د(س) = \sqrt{٥-|س|}$

⑥ $د(س) = \frac{١}{\sqrt{٥-|س|}}$

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الأسس الكسرية والمعادلات الأسية

الجذر النونى : المعادلة $س^{ن} = ب$ حيث $ب \in ح$ ، $ن \in ط^{+}$ ، $ن \neq ١$
لها $ن$ من الجذور

مستر / لطفى زهران
رياضيات الصف الثانى الثانوى
٠١٠٢٠٠٠٠٠٠

تعالى نفهم :. لو كان الاس زوجى ، $ب > ٠$

$س^{٢} = ٩$ ∴ المعادلة لها جذران هما ± ٣

$س^{٤} = ١٦$ ∴ المعادلة لها اربعة جذور هم ± ٢ و الجذران الأخران مركبان

$س^{٨} = ٥٦$ ∴ المعادلة لها ثمانية جذور هم ± ٢ والباقى جذور مركبه

@SecondaryTwo_M

تعالى نفهم :. لو كان الاس زوجى ، $ب < ٠$

$س^{٤} = -٩$ ∴ المعادلة لها جذران مركبان فقط هما $\pm ٣ت$

تعالى نفهم :. لو كان الاس فردى ، $ب \in ح - \{٠\}$

$س^{٣} = -٢٧$ ∴ المعادلة لها جذر حقيقى واحد هو -٣ وجذران مركبان

$س^{٥} = ٣٢$ ∴ المعادلة لها خمس جذور هم ⑤ والباقى جذور مركبه

تعالى نفهم :. $ن \in ط^{+}$ ، $ب = ٠$ = صفر

$س^{٣} = ٠$ لها ثلاثة جذور حقيقية متساوية وكل منها يساوى صفر

ملاحظات خطيره :.

① $\sqrt{س^{٢}} = |س|$ ← لازم فيه مطلق

② $\sqrt{س^{٤}} = س$ ← مش لازم فيه مطلق لأن الربيع هيطلع موجب

③ $\sqrt{س^{٤}} = |س|$ لازم فيه مطلق عشان (س) ممكن تطلع بس

④ $\sqrt[٤]{(-٤)^{٤}} = |-٤| = ٤$

⑤ $\sqrt[ن]{س^{ن}} = س$ } لو الرتبه فردى مفيش قيمة مطلق (⑤ ⑦)

⑥ $\sqrt[ن]{س^{ن}} = س$

⑦ $\sqrt[٣]{(-٣)^{٣}} = -٣$

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

خواص الجذور النونية

① $\sqrt[ن]{ا ب} = \sqrt[ن]{ا} \times \sqrt[ن]{ب}$ ⇐ $\sqrt{٢٥ \times ٢٧} = \sqrt{٢٥} \times \sqrt{٢٧}$

② $\sqrt[ن]{\frac{ا}{ب}} = \frac{\sqrt[ن]{ا}}{\sqrt[ن]{ب}}$ حيث $ب \neq ٠$ ⇐ $\sqrt[٣]{\frac{٥}{٢}} = \frac{\sqrt[٣]{٥}}{\sqrt[٣]{٢}}$

③ $\sqrt[ن]{ا \pm ب} \neq \sqrt[ن]{ا} \pm \sqrt[ن]{ب}$ ⇐ $\sqrt{٢٥ + ٢} \neq \sqrt{٢٥} + \sqrt{٢}$

مثلاً :- $\sqrt[٣]{٢٧ س^{١٥}} = ٣ س^{٥}$ ، $\sqrt[٤]{٨١ س^{٤} ص^{٨}} = ٣ |س| ص^{٢}$

تعريف هام

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

① $\sqrt{٥} = ٥^{\frac{١}{٢}}$

② $\sqrt[٣]{\frac{١}{٧}} = (\frac{١}{٧})^{\frac{١}{٣}}$

③ $\sqrt[٣]{٢^{٢}} = ٢^{\frac{٢}{٣}}$

④ $\sqrt[٤]{٣^{٣}} = ٣^{\frac{٣}{٤}} = ٣^{٠,٧٥} = ٣^{\frac{٣}{٤}} = ٩$

⑤ $\sqrt[٤]{-٥} \neq ٤$

⑥ $\sqrt{٩} = ٩^{\frac{١}{٢}}$

⑦ $\sqrt[٥]{٣^{٢}} = ٣^{\frac{٢}{٥}}$

⑧ $\sqrt[٣]{٨} = ٨^{\frac{١}{٣}}$

⑨ $\sqrt[٣]{٤^{٥}} = ٤^{\frac{٥}{٣}}$

⑩ $\sqrt[٥]{٣^{٢}} = ٣^{\frac{٢}{٥}}$

قوانين الأسس :

① $ا^{صفر} = ١$

② $ا^{-ن} = \frac{١}{ا^{ن}}$ ⇐ $٩^{-٢} = \frac{١}{٩^{٢}}$ ، $ا^{ن-م} = \frac{ا^{ن}}{ا^{م}}$ ⇐ $٥^{-٢} = \frac{١}{٥^{٢}}$

③ $ا^{م} \times ا^{ن} = ا^{م+ن}$ ⇐ $٥^{٢} \times ٥^{٣} = ٥^{٥}$ ، $س^{٣} \times س^{٤} = س^{٧}$

④ $\frac{ا^{م}}{ا^{ن}} = ا^{م-ن}$ ⇐ $\frac{س^{٥}}{س^{٣}} = س^{٢}$ ، $\frac{٧^{٤}}{٧^{٢}} = ٧^{٢} = ٤٩$

⑤ $(ا^{م})^{ن} = ا^{م ن}$ ⇐ $(س^{٢})^{٣} = س^{٦}$ ، $(٥^{٢})^{٦} = ٥^{١٢}$

⑥ $(\frac{ا}{ب})^{-ن} = (\frac{ب}{ا})^{ن}$ ⇐ $(\frac{٥}{٣})^{-٢} = (\frac{٣}{٥})^{٢} = \frac{٩}{٢٥}$

⑦ $(ا ب)^{ن} = ا^{ن} ب^{ن}$ ⇐ $(س ص)^{٣} = س^{٣} ص^{٣}$

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢٦

ملحوظة خطيرة :-

اذا كان : $س^{\frac{م}{ن}} = ع$ فإن $س = ع^{\frac{ن}{م}}$ حيث م عدد فردي

اذا كان : $س^{\frac{م}{ن}} = ع$ فإن $س = \pm ع^{\frac{ن}{م}}$ حيث م عدد زوجي

مثلاً :- $س^{\frac{٣}{٤}} = ٥$ فإن $س = \pm ٥^{\frac{٤}{٣}}$ لأن الأس زوجي

$س^{\frac{٣}{٤}} = ٥$ فإن $س = ٥^{\frac{٤}{٣}}$ لأن الأس فردي

خلي بالك : $(-٣٢)^{\frac{٤}{١٠}} = \sqrt[١٠]{(-٣٢)^{٤}} = ٢$ (خطأ)

لأن لازم الأس يكون في أبسط صورة

$(-٣٢)^{\frac{٤}{١٠}} = (-٣٢)^{\frac{١}{٥}} = \sqrt[٥]{-٣٢} = -٢$ ← كدا صح ✓

أمثلة :- اختصر لأبسط صورة

① $\sqrt[٥]{ع^{٣}} \times \sqrt{ع^{٣}}$

$= ع^{\frac{٣}{٥}} \times ع^{\frac{٣}{٢}} = ع^{\frac{٦+١٥}{١٠}} = ع^{\frac{٢١}{١٠}}$

② $(\sqrt{س})^{٤} \times \sqrt[٣]{س^{٤}}$

③ $\frac{(٢٧)^{-\frac{٢}{٣}} \times (١٢)^{٥}}{١٦ \times (١٨)^{-٥}}$

$= \frac{(٣^{٣})^{-\frac{٢}{٣}} \times (٤ \times ٣)^{٥}}{٤^{٢} \times ٣^{-٥}} = \frac{٣^{-٩} \times ٤^{٥} \times ٣^{٥}}{٤^{٢} \times ٣^{-٥}}$

$= \frac{٣^{-٩+٥+٥} \times ٤^{٥-٢}}{٣^{٩} \times ٤^{٢}} = ٣^{-٩+٥+٥-٩} = ٣^{-٨} = \frac{١}{٣^{٨}} = \frac{١}{٦٥٦١}$

④ $\frac{٤^{س+١} \times ٢^{-س-١}}{٨^{س+٢}} = \frac{(٢^{٢})^{س+١} \times ٢^{-س-١}}{(٢^{٣})^{س+٢}}$

$= \frac{٢^{٢س+٢} \times ٢^{-س-١}}{٢^{٣س+٦}} = \frac{٢^{س+١}}{٢^{٣س+٦}} = ٢^{س+١-٣س-٦} = ٢^{-٢س-٥} = \frac{١}{٢^{٢س+٥}}$

⑤ $(\frac{١}{٨})^{\frac{٢}{٣}} \times (\frac{١}{١٢})^{\frac{٢}{٣}} \times \frac{١}{(\frac{٤}{٣})^{\frac{١}{٢}}}$

$= (\frac{١}{٢ \times ٣})^{\frac{٢}{٣}} \times (\frac{١}{٤ \times ٣})^{\frac{٢}{٣}} \times \frac{١}{(\frac{٤}{٣ \times ٢})^{\frac{١}{٢}}}$

$= \frac{\cancel{٢^{\frac{١}{٢}}} \times ٣^{\frac{١}{٢}} \times ٤^{\frac{١}{٢}} \times ٣^{\frac{١}{٢}}}{\cancel{٢^{\frac{١}{٢}}} \times ٣^{\frac{١}{٢}}} = \frac{٣ \times ٤^{\frac{٢}{٣}}}{٤^{\frac{١}{٢}}}$

$= ٣ \times ٤^{\frac{٢}{٣}-\frac{١}{٢}} = ٣ \times ٤^{\frac{١}{٦}} = ٣ \times \sqrt[٦]{٤}$

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(٦) $\frac{\sqrt{٣٦} \times ٢٥^{-\frac{٣}{٢}} \times ٢٧^{\frac{٢}{٣}}}{\sqrt{٢٤} \times ٣^{-٣} \times ٢٥^{\frac{٣}{٢}}}$

$= \frac{٦ \times ٥^{-٣} \times (٥ \times ٣)^{\frac{١}{٣}}}{٢^{٣} \times ٥ \times ٣^{٣}}$

$= \frac{٢^{-١} \times ٥^{-\frac{١}{٢}} \times ٣^{\frac{٢}{٣}}}{٢^{٣} \times ٥ \times ٣^{٣}}$

$= ٢^{-٤} \times ٥^{-\frac{١١}{٢}} \times ٣^{-\frac{٧}{٣}}$

$= ٥^{-٥} = ٥^{-٥}$

(٧) $\frac{٣ \times ٢^{س+٣} + ٨ \times ٢^{س+٣}}{٣ \times ٢^{س+٢} - ٦ \times ٢^{س}}$

$= \frac{٣ \times ٢^{س+٣} + ٢^{٣} \times ٢^{س+٣}}{٣ \times ٢^{س+٢} - ٦ \times ٢^{س}}$

$= \frac{٣ \times ٢^{س+٣} + (٢^{٣})^{\frac{س+٣}{٢}}}{٣ \times ٢^{س+٢} - ٦ \times ٢^{س}}$

$= \frac{٣ \times ٢^{س+٣} + ٢^{س+٣}}{٣ \times ٢^{س+٢} - ٦ \times ٢^{س}}$

$= \frac{٢^{س+٣}(٣+١)}{٢^{س}(٣ \times ٢^{٢} - ٦)} = \frac{٢^{س+٣}(٤)}{٢^{س}(١٢-٦)}$

$= \frac{٢^{س+٣}}{٢^{س}} = ٢^{س+٣-س} = ٢^{٣} = ٨$

المعادلة الأسية :

لكل $م ، ن \in ص$ ، $أ ، ب \in ح - \{-١ ، ٠ ، ١\}$ أجد أن

أستاذ مستر/ لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

① اذا كان $أ^{ن} = ١$ فإن $ن =$ صفر

② اذا كان $أ^{م} = أ^{ن}$ فإن $م = ن$

③ اذا كان $أ^{ن} = ب^{ن}$

- وكان $ن$ عدد فردي فإن $أ = ب$
- وكان $ن$ عدد زوجي فإن $أ = \pm ب$
- $أ \neq ب$ فإن $ن =$ صفر

أمثلة :

① $٢^{س+٣} = ٤^{٥}$

$\therefore ٢^{س+٣} = ٢^{٢ \times ٥}$

$\therefore ٢^{س+٣} = ٢^{١٠}$

$\therefore$ الأس = الأس

$\therefore س + ٣ = ١٠$

$\Leftarrow س = ١٠ - ٣$

$س = ٧$

② $٣^{س+٢} = ٣^{س+٣}$

$\therefore$ الأس = الأس

$\therefore س + ٢ = س + ٣$

$\therefore$ الأساس = الأساس

$\therefore$ الأس = صفر

$س = ٢$

③ $س + ٣ = ٠$

$\therefore س = -٣$

لأن الأس فردي ± مقبول

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Scanned with CamScanner

① $(\frac{16}{81})^{-\frac{1}{4}} \times 3^{x+2} = 27^{x}$

$(\frac{81}{16})^{\frac{1}{4}} \times 3^{x+2} = 3^{3x}$

$(\frac{3}{2})^{1} \times 3^{x+2} = 3^{3x}$

$3^{1-x} \times 3^{x+2} = 3^{3x}$

$3^{3} = 3^{3x}$

$\therefore 3x = 3$

$\therefore x = 1$

② $\sqrt[x-3]{3^{x+1}} = 1$

$3^{\frac{x+1}{x-3}} = 3^{0}$

$\frac{x+1}{x-3} = 0$

$\therefore x + 1 = 0$

$\therefore x = -1$

③ $\sqrt[x-2]{(\frac{1}{5})^{x-2}} = 25$

$(\frac{1}{5})^{\frac{x-2}{x-2}} = 5^{2}$

$5^{-1} = 5^{2}$

$\therefore -1 = 2$

$\therefore x - 2 = 0$

$\therefore x = 2$

④ $\sqrt[x-2]{(x-1)^{x-2}} = 1$

$(x-1)^{x-2} = 1^{x-2}$

$\Rightarrow (x-1)^{x-2} - 1^{x-2} = 0$

$\therefore x - 2 = 0$

$\therefore x = 2$

⑤ $\sqrt[x-1]{(\frac{5}{3})^{x-1}} = (\frac{3}{5})^{-2}$

$(\frac{5}{3})^{x-1} = (\frac{5}{3})^{2}$

$\therefore x - 1 = 2$

$\therefore x = 3$

⑥ $\sqrt[x-1]{(\frac{3}{4})^{x-1}} = (\frac{4}{3})^{x-3}$

$(\frac{3}{4})^{x-1} = (\frac{3}{4})^{3-x}$

$\therefore x - 1 = 3 - x$

$\therefore 2x = 4$

$\therefore x = 2$

⑦ $\sqrt[x-1]{(\frac{1}{2})^{x-1}} = 1$

$(\frac{1}{2})^{\frac{x-1}{x-1}} = (\frac{1}{2})^{0}$

$\therefore \frac{x-1}{x-1} = 0$

$\therefore x - 1 = 0$

$\therefore x = 1$

⑧ $\sqrt[x-1]{(\frac{2}{3})^{x-1}} = (\frac{3}{2})^{x-5}$

$(\frac{2}{3})^{x-1} = (\frac{2}{3})^{5-x}$

$\therefore x - 1 = 5 - x$

$\therefore 2x = 6$

$\therefore x = 3$

⑨ $\sqrt[x-1]{(\frac{3}{5})^{x-1}} = (\frac{5}{3})^{x-3}$

$(\frac{3}{5})^{x-1} = (\frac{3}{5})^{3-x}$

$\therefore x - 1 = 3 - x$

$\therefore 2x = 4$

$\therefore x = 2$

⑩ $\sqrt[x-1]{(\frac{2}{3})^{x-1}} = (\frac{3}{2})^{x-3}$

$(\frac{2}{3})^{x-1} = (\frac{2}{3})^{3-x}$

$\therefore x - 1 = 3 - x$

$\therefore 2x = 4$

$\therefore x = 2$

⑪ $\sqrt[x-1]{(\frac{2}{3})^{x-1}} = (\frac{3}{2})^{x-5}$

$(\frac{2}{3})^{x-1} = (\frac{2}{3})^{5-x}$

$\therefore x - 1 = 5 - x$

$\therefore 2x = 6$

$\therefore x = 3$

⑫ $\sqrt[x-1]{(\frac{3}{5})^{x-1}} = (\frac{5}{3})^{x-3}$

$(\frac{3}{5})^{x-1} = (\frac{3}{5})^{3-x}$

$\therefore x - 1 = 3 - x$

$\therefore 2x = 4$

$\therefore x = 2$

⑬ $\sqrt[x-1]{(\frac{2}{3})^{x-1}} = (\frac{3}{2})^{x-5}$

$(\frac{2}{3})^{x-1} = (\frac{2}{3})^{5-x}$

$\therefore x - 1 = 5 - x$

$\therefore 2x = 6$

$\therefore x = 3$

⑭ $\sqrt[x-1]{(\frac{3}{5})^{x-1}} = (\frac{5}{3})^{x-3}$

$(\frac{3}{5})^{x-1} = (\frac{3}{5})^{3-x}$

$\therefore x - 1 = 3 - x$

$\therefore 2x = 4$

$\therefore x = 2$

CamScanner ـ الممسوحة ضوئيا بـ

مستر / لطفي زهران
رياضيات الاعدادية والثانوية

(١) $س^{-\frac{٤}{٣}} = ٨$

بالرفع أس $-\frac{٣}{٤}$

$(س^{-\frac{٤}{٣}})^{-\frac{٣}{٤}} = (٨)^{-\frac{٣}{٤}}$

$س^{ص} = ٢^{-٣}$

$س^{ص} = \frac{١}{٨}$

$\therefore س = \frac{١}{٨}$

(٢) $س^{٢ص} + ٢س^{ص} - ٣ = ٠$

$(س^{ص} + ٣)(س^{ص} - ١) = ٠$

$س^{ص} = -٣$ | $س^{ص} = ١$

$\therefore س = -٣$ | $س = ١$

(٣) $س^{ص+١} + س^{ص-١} = ٥$

بالقسمة على $س^{ص-١}$

$س^{٢ص} \times س^{١} + س^{ص} \times س^{-١} = ٥$

$س^{ص}(س^{ص} + ٢ + س^{-١}) = ٥$

$س^{ص}(٢ + \frac{١}{س}) = ٥$

$س^{ص} \times \frac{٥}{٢} = ٥$ (×$\frac{٢}{٥}$)

$س^{ص} = ٢$ $\therefore س = ١$

(٤) $٢^{س+٥} + ٣٢ = ٣^{س+٢}$

$٢^{س} \times ٢^{٥} + ٣٢ = ٣^{س} \times ٣^{٢}$

$٣٢ \times ٢^{س} + ٣٢ = ٩ \times ٣^{س}$

$٣٢(٢^{س} + ١) = ٩ \times ٣^{س}$

$٣٢(٢^{س} + ١) = ٩ \times ٣^{س}$ (×$\frac{١}{٣٢}$)

$٢^{س} + ١ = \frac{٩}{٣٢} \times ٣^{س}$

$٢^{س} + ١ = \frac{٩}{٣٢} \times ٣^{س}$ (×$\frac{٣٢}{٩}$)

$\frac{٣٢}{٩} \times ٢^{س} + \frac{٣٢}{٩} = ٣^{س}$

$\frac{٣٢}{٩} \times ٢^{س} + \frac{٣٢}{٩} = ٣^{س}$ (×$\frac{٩}{٣٢}$)

$٣^{س} - \frac{٣٢}{٩} \times ٢^{س} - \frac{٣٢}{٩} = ٠$

$(٣^{س} - \frac{٣٢}{٩})(٣^{س} + ١) = ٠$

$٣^{س} = \frac{٣٢}{٩}$ | $٣^{س} = -١$

(٥) $٢^{س} + ٢^{-س} = ٢$

$٢^{س} + \frac{١}{٢^{س}} = ٢$

$٢^{س} + \frac{١}{٢^{س}} = ٢$ (×$٢^{س}$)

$(٢^{س})^{٢} + ١ = ٢ \times ٢^{س}$

$(٢^{س})^{٢} - ٢ \times ٢^{س} + ١ = ٠$

$(٢^{س} - ١)(٢^{س} - ١) = ٠$

$٢^{س} = ١$ | $٢^{س} = ١$

$س = ٠$ | $س = ٠$

$\therefore س = ٠$

(٦) $٣^{س+٢} - ٣^{س-١} = ٢٦$

$٣^{س} \times ٣^{٢} - ٣^{س} \times ٣^{-١} = ٢٦$

$٣^{س} \times ٩ - ٣^{س} \times \frac{١}{٣} = ٢٦$

$٣^{س}(٩ - \frac{١}{٣}) = ٢٦$

$٣^{س}(٩ - \frac{١}{٣}) = ٢٦$ (×$\frac{٣}{٢٦}$)

$٣^{س} \times \frac{٢٦}{٣} = ٢٦$

$٣^{س} = ٣$ $\therefore س = ١$

(٧) $٢^{س+٢} + ٢^{س-٥} = ٢١$

$٢^{س} \times ٢^{٢} + ٢^{س} \times ٢^{-٥} = ٢١$

$٢^{س}(٤ + \frac{١}{٣٢}) = ٢١$

$٢^{س}(٤ + \frac{١}{٣٢}) = ٢١$ (×$\frac{٣٢}{١٢٩}$)

$٢^{س} \times \frac{١٢٩}{٣٢} = ٢١$

$٢^{س} \times ٤ = ٢١ \times ٣٢$

$٢^{س+٢} = ٢١ \times ٣٢$

$٢^{س+٢} - ٢١ \times ٣٢ = ٠$

$(٢^{س} - ٧)(٢^{س} + ٣) = ٠$

$٢^{س} = ٧ = ٢^{ص}$ | $٢^{س} = -٣ = ٢^{ص}$

$س = ٣$ | $ص = ٢$

$\therefore س = ٣$

(٨) $٣^{س+٢} = (\frac{١}{٣})^{س-٤٢}$

بالرفع أس $-س$

$٣^{س+٢} = ٣^{-س+٤٢}$

$س + ٢ = -س + ٤٢$

$٢س = ٤٠$

$س = ٢٠$

(٩) $٣^{س} + \frac{٥}{٣^{س}} = ٣٠$ (×$٣^{س}$)

$(٣^{س})^{٢} + ١٢٥ = ٣٠ \times ٣^{س}$

$(٣^{س})^{٢} - ٣٠ \times ٣^{س} + ١٢٥ = ٠$

$(٣^{س} - ٥)(٣^{س} - ٢٥) = ٠$

$٣^{س} = ٥$ | $٣^{س} = ٢٥$

$س = ١$ | $س = ٢$

(١٠) $٢^{س} \times ٥^{ص} = ١٠$

$٢^{س} \times ٥^{ص} = ١٠$ (×$٢^{ص}$)

$٢^{س} \times ٢^{ص} \times ٥^{ص} = ١٠ \times ٢^{ص}$

$٢^{س+ص} \times ٥^{ص} = ١٠ \times ٢^{ص}$

$٢^{س+ص} \times ٥^{ص} = ١٠ \times ٢^{ص}$ (×$\frac{١}{٥^{ص}}$)

$٢^{س+ص} = ١٠ \times ٢^{ص} \times ٥^{-ص}$

$٢^{س+ص} = ١٠ \times ٢^{ص} \times ٥^{-ص}$ (×$\frac{١}{٢^{ص}}$)

$٢^{س} = ١٠ \times ٥^{-ص}$

$٢^{س} = ١٠ \times ٥^{-ص}$ (×$٥^{ص}$)

$٢^{س} \times ٥^{ص} = ١٠$

$٢^{س} \times ٥^{ص} - ١٠ = ٠$

$(٢^{س} - ٢)(٥^{ص} - ٥) = ٠$

$٢^{س} = ٢ = ٢^{١}$ | $٥^{ص} = ٥ = ٥^{١}$

$س = ١$ | $ص = ١$

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الواجب: اختصر لابسط صورة

① $\frac{(٧)^{-٣} \times (١٢)^{٤}}{١٦ \times (٨١)^{-٢}}$

② $\frac{٤^{س+١} \times ٢^{١-س}}{٨^{س+٢}}$

③ $\frac{٩^{س+١} \times ٤^{٢-٢س}}{٣^{٩س+١} \times ٨^{-١-س}}$

④ $\frac{٣^{\frac{١}{٢}} \times (١٤٧)^{\frac{١}{٢}}}{(٦٣)^{\frac{١}{٢}}}$

⑤ $(١٨)^{\frac{١}{٢}} \times (١٢)^{\frac{٣}{٢}} \times \frac{١}{(٢٤)^{\frac{١}{٢}}}$

⑥ $\frac{(٤٣٢)^{٣س} \times ٤}{(١٩٦)^{٣س} \times ٤}$

⑦ أوجد مجموعة الحل في ح

① $٥^{س^٢+٥س} = ١$ ② $س^{٢-٩} = ١$

③ $س^{٢-٥} = ٣^{س^٢-٥}$ ④ $(٣٧٣)^{١٣١} = ٢٧$

⑤ $٣^{١٣١-١٢س} = ٩^{س^٢-٣س}$

⑥ $٥^{١-س} \times ٨^{١-س} = \frac{٤٩}{٥}$

⑦ $(٨٦)^{١٢+٣س} = ٤٩$

⑧ $٥^{س^٤} = ٥^{٤+٣س}$

⑨ $٥^{١٢س} + ٥^{س+٢} = ٢٦$ ← حاول تحلله

⑩ $٣^{س+٣} - ٣^{٢+س} = ١٦٢$ ← حاول تحلله

⑪ $٥^{٢س} + ٥^{س} = ٢٦ \times ٥^{س}$ ← التحليل

⑫ $(\frac{١}{٢})^{٣+س} + (\frac{١}{٢})^{١+٣س} = ٣٨$ مرفوض

⑬ $٨^{س} + ٢^{١+س} = ٨$

⑭ $٥^{٢س-٤} - ٦ \times ٥^{٢س} + ٥ = ٠$

⑮ $٩^{س-١} - ٣ \times ٣^{٣-س} + ٣ = ٠$

⑯ اذا كان $س^{\frac{٣}{٤}} = ٣٧$ فأوجد قيمة $س + ٨$

---

⑦ أوجد مجموعة الحل في ح

① $س^{\frac{٧}{٤}} = ١٢٨$ ② $س^{\frac{٥}{٤}} = \frac{١}{٣٢}$

③ $\sqrt[٣]{(س+١)^{٥}} = ٣٢$

④ $(س^{٢} + ٣س)^{\frac{٤}{٣}} = ١٨١$

⑤ $(س^{٤} - ٥س + ٩)^{\frac{٥}{٤}} = ٣٢$

⑥ $س^{\frac{٤}{٣}} - ١٠س^{\frac{٢}{٣}} + ٩ = ٠$

⑦ $س + ١٥ = ٨\sqrt{س}$

⑧ $\sqrt[٣]{س^{٤}} - ٥\sqrt[٣]{٢س} - ٤٥ = ٠$

مستشار / لطفي زهران
رياضيات التعليم الثانوي
01115956226

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $أ^{٢} \times أ^{٢}$ = ...

(أ) $أ^{٢ أ^{٢}}$ (ب) $أ^{٢ أ^{٢}}$ (جـ) $٢ أ^{٢}$ (د) $م أ^{٢}$

② إذا كان : $٢^{س+١} = ٨$ فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

③ إذا كان : $٥^{س-١} = ٤^{س-١}$ فإن : س = ...

(أ) ٥ (ب) ١ (جـ) -١ (د) صفر

④ إذا كان : $(\frac{١}{٢})^{أ^{٢}-أ-٢} = ١$ حيث أ > صفر فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) -٣ (جـ) ٢ (د) ٣

⑤ إذا كان : $٣^{س} = ٢$ ، $٢^{ص} = ٩$ فإن : س ص = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٨ (د) ١٨

⑥ إذا كان : $٥^{س} = ٢$ فإن : $٢٥^{س}$ = ...

(أ) ١٠ (ب) ٦٢٥ (جـ) ٤ (د) ٢

⑦ إذا كان : $٢^{س} = ٥$ فإن : $٢^{س+٢}$ = ...

(أ) ١٥ (ب) ٤ (جـ) ١٠ (د) ٢٠

⑧ إذا كان : $س^{\frac{٢}{٣}} = ٦٤$ فإن : س = ...

(أ) ٥١٢ (ب) ١٦ (جـ) ٤ (د) ٢

⑨ إذا كان : $٤ س^{٥} = ١٢٨$ فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) ± ٢ (جـ) ٢ (د) -٢

⑩ $(١٢٨)^{\frac{-٢}{٧}}$ = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) ٤

⑪ $\sqrt[٤]{(١٦)^{-٣}}$ = ...

(أ) ٨ (ب) -٨ (جـ) $\frac{١}{٨}$ (د) $-\frac{١}{٨}$

⑫ المعادلة : $س^{٣} = ٤$ عدد جذورها يساوى .....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

⑬ عدد الجذور الحقيقية للمعادلة : $س^{٤} = -١٦$ هو .....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

④ مجموعة الجذور الحقيقية للمعادلة $(س-٢)^{٤} = ١٦$ هى ...

({-٢} ، {٤} ، {٠} ، {٢} ، {٨})

⑮ $\sqrt[٤]{١٦ س^{٤} ص^{٨}}$ = ...

⑯ أى مما يأتى لا يساوى

(أ) $(\sqrt[٣]{٧ س})^{٤}$

(ب) $\sqrt[٤]{٧ س^{٥}}$

(جـ) $(س^{\frac{١}{٥}})^{٤}$

(د) $س^{\frac{٤}{٥}}$

⑰ إذا كان $أ^{٣} = ب^{٤}$ فإن $\frac{أ^{٩}}{ب^{٧}} + ١٦^{\frac{ب}{أ}}$ = ...

(٧ ، ١٢٩ ، ٦٥٥٣٦)

اجمد يا قلبى لمسه لشوار طويل (فيه)

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الدالة الأسية و تطبيقاتها

اذا كان $p \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

فإن الدالة $د : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ حيث $د(س) = p^{س}$ تسمى دالة أسية أساسها p

مثلاً :- $د(س) = 3^{س}$ دالة اسية أساسها 3 وأسها س

$د(س) = (\frac{1}{2})^{س+1}$ دالة أسية أساسها $\frac{1}{2}$ وأسها س+1

ملاحظة

لاحظ الفرق بين الدالة الجبرية والدالة الأسية :

- فى الدالة الجبرية يكون المتغير المستقل س موجود كأساس فى قاعدة الدالة أما الأس فهو عدد حقيقى.

مثل : د : د (س) = $س^2 - 3س + 1$ أو د : د (س) = $(س - 3)^2$ أو ...

- فى الدالة الأسية يكون المتغير المستقل س موجود كأس فى قاعدة الدالة أما الأساس فهو عدد حقيقى موجب لا يساوى الواحد.

فمثلاً : د : د (س) = $3^{س}$ أو د : د (س) = $3^{س-1} + 2$ دوال أسية

أما د : د (س) = $(-3)^{س}$ أو د : د (س) = $(1)^{س}$ ليست دوال أسية

$د(س) = -(3)^{س}$

دالة أسية

مستر / لطفي زهران
رياضيات الوحلتين الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

لمثله بسيطه :-

① $د(س) = 4^{س-1}$ فإن $د(س+1) = ...$

$د(س+1) = 4^{س+1-1} = 4^{س}$

② $د(س) = 2^{س}$ فإن $د(-س) = ...$ $2^{-س} = (\frac{1}{2})^{س}$

③ $د(س) = p^{س}$ فإن $د(س+1) \times د(س-1) = د(2س)$ حيث

$(2س+1 ، p^{2س} ، 2 = س ، 2)$

$د(س+1) = p^{س+1}$ ، $د(س-1) = p^{س-1}$ ∴ $p \times p = p^{س+1} \times p^{س-1} = p^{2س}$

④ $د(س+1) = 2^{س}$ ، $د(p) = 8$ فإن $p = ...$

∵ $س+1 = p$ ∴ $د(p) = 2^{p-1} = 8$ ∴ $2^{p-1} = 2^3$ ∴ $p - 1 = 3$ ∴ $p = 4$

∴ $س = p - 1$

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

⑥ اذا كانت $د(س) = ٥^{س}$

اوجد فيه $\frac{د(س+٤) - د(س+٣)}{د(س+٥) - د(س+٤)}$

الحل

$$= \frac{٥^{س+٤} - ٥^{س+٣}}{٥^{س+٥} - ٥^{س+٤}}$$

$$= \frac{٥^{٣} \times ٥^{س} - ٥^{٤} \times ٥^{س}}{٥^{٥} \times ٥^{س} - ٥^{٥} \times ٥^{س}}$$

$$= \frac{(٥^{٣} - ٥^{٤}) ٥^{س}}{(٥^{٥} - ٥^{٤}) ٥^{س}} = \frac{١٢٥ - ٦٢٥}{٣١٢٥ - ٦٢٥} = \frac{١}{٥}$$

---

⑦ $د_{١}(س) = ٣^{س}$ ، $د_{٢}(س) = ٩^{س}$

اوجد فيه $س$ التى تحقق

$د_{١}(٢س - ١) + د_{٢}(س+١) = ٧٥٦$

الحل

$٣^{٢س-١} + ٩^{س+١} = ٧٥٦$

$٣^{٢س-١} + ٣^{٢(س+١)} = ٧٥٦$

$٣^{٢س-١} + ٣^{٢س+٢} = ٧٥٦$

$٣^{٢س-١} + ٣^{٢} \times ٣^{٢س} = ٧٥٦$

$٣^{٢س-١} (١ + ٣^{٣}) = ٧٥٦$

$٣^{٢س-١} \times \frac{٢٨}{٢} = ٧٥٦ \quad (\times \frac{٢}{٢٨})$

$٣^{٢س-١} = ٨١ \therefore ٣^{٢س-١} = ٣^{٤}$

$\therefore ٢س - ١ = ٤ \therefore س = ٢$

---

⑧ $د(س) = ٧^{س+١}$

اوجد فيه س التى تحقق

$د(٢س-١) - د(س-٢) = ٥٠$

الحل

$٧^{٢س-١+١} - ٧^{س-٢+١} = ٥٠$

$٧^{٢س} - ٧^{س-١} = ٥٠$

$٧^{٢س} - ٧^{س} \times ٧^{-١} = ٥٠ \Leftarrow ٧^{٢س} - \frac{١}{٧} ٧^{س} = ٥٠$

$٧^{٢س} - \frac{١}{٧} ٧^{س} = ٥٠ \quad (\times ٧)$

$٧ \times ٧^{٢س} - ٧^{س} = ٣٥٠$

$٧ \times ٧^{٢س} - ٧^{س} - ٣٥٠ = ٠$

بفرض ان $٧^{س} = ص$

$٧ ص^{٢} - ص - ٣٥٠ = ٠$

$(ص - ٧)(٧ ص + ٥٠) = ٠$

$ص = ٧$ | $ص = -٥٠$

$٧^{س} = ٧$ | $٧ \times ٧^{س} = -٥٠$

$س = ١$ | مرفوض

---

⑨ $د(س) = ٦^{س}$

اوجد مجموعة الحل

$د(٢س) - ٦ د(س) + د(٣) = ٠$

الحل

$٦^{٢س} - ٦ \times ٦^{س} + ٨ = ٠$

$(٦^{س} - ٤)(٦^{س} - ٢) = ٠$

$٦^{س} = ٤$ | $٦^{س} = ٢$

$٢^{س} = ٢^{٢}$ | $س = ١$

$س = ٢$

$\therefore ح = \{١ ، ٢\}$

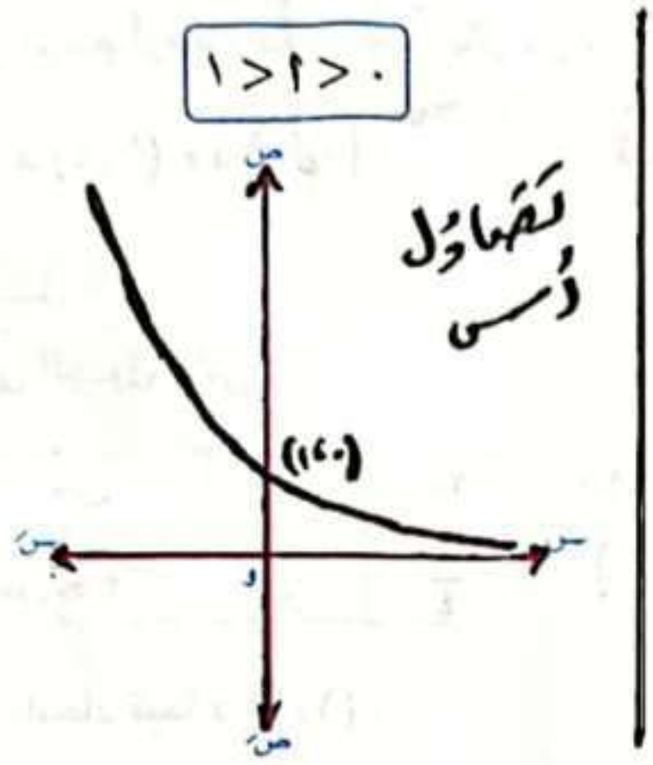
طيب والله لسائل سهله بس لو سمحت شغل القلقاسه اللى فوق شويه

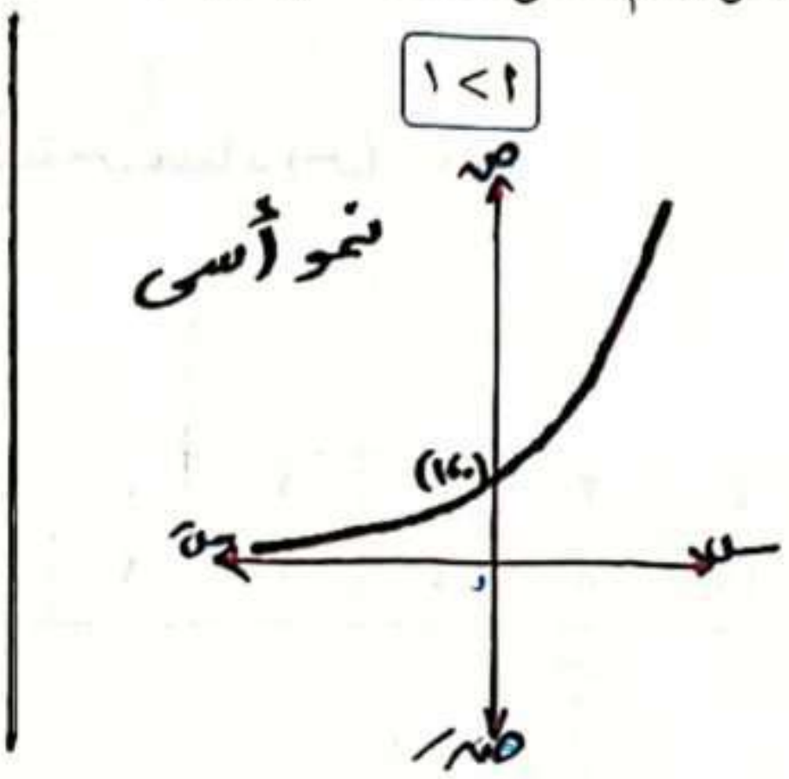
Scanned with CamScanner

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

التمثيل البيانى للدالة الأسية

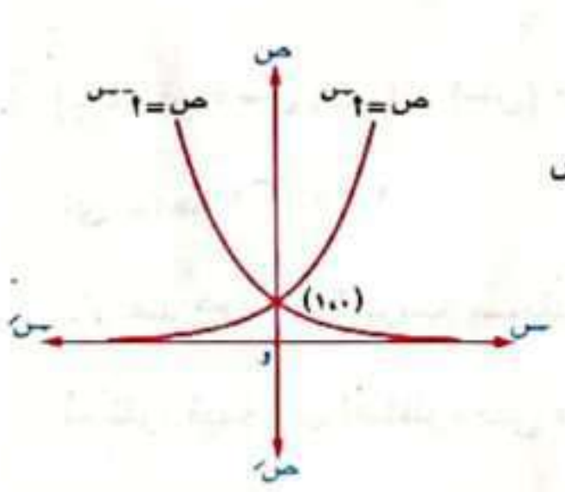
الشكل العام لمنحنى الدالة د : د (س) = $أ^{س}$ كما هو موضح بالشكلين التاليين :





بعض خواص الدالة الأسية د : د (س) = $أ^{س}$

- مجالها ح
- مداها $ح^{+}$ ويقع منحناها بأكمله فوق محور السينات.
- الدالة تزايدية على مجالها ح إذا كان أ > ١ وتسمى دالة نمو أسى معامله أ ومنحنى الدالة يقترب من محور السينات كلما قلت قيمة س
- الدالة تناقصية على مجالها ح إذا كان ٠ < أ < ١ وتسمى دالة تضاؤل أسى معامله أ ومنحنى الدالة يقترب من محور السينات كلما زادت قيمة س
- منحنى الدالة الأسية يمر بالنقطة (٠ ، ١)
- د : د (س) = $أ^{س}$ هى دالة أحادية
- إذا كانت : د (س) = $أ^{س}$



فإن : د (-س) = $أ^{-س} = (\frac{١}{أ})^{س}$

ويكون المنحنى ص = $(\frac{١}{أ})^{س}$ صورة المنحنى ص = $أ^{س}$ بالانعكاس فى محور الصادات

- $أ^{س}$ ← ∞ عندما س ← ∞ حيث أ > ١
- $أ^{س}$ ← ٠ عندما س ← ∞ حيث ٠ < أ < ١

خلى بالك

د (س) = $ج^{س}$ فإن د (-س) = $ج^{-س} = (\frac{١}{ج})^{س}$

ويكون المنحنى ص = $(\frac{١}{ج})^{س}$ صورة المنحنى ص = $ب^{س}$ بالانعكاس فى محور الصادات

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

✱ الإزاحة الرأسية

د (س) = $ج^{س}$

فإن د (س) = $ج^{س} + ٣$

فإن المنحنى سيحدث له إزاحة رأسية مقدارها ٣ وحدات لأعلى

د (س) = $ج^{س} - ٣$

إزاحة رأسية لأسفل مقدارها ٣ وحدات

✱ الإزاحة الأفقية

د (س) = $ج^{س}$

فإن د (س) = $ج^{س-٣}$

فإن المنحنى سيحدث له إزاحة أفقية مقدارها ٣ وحدات فى اتجاه ← وسمى (تعيين)

د (س) = $ج^{س+٣}$

إزاحة أفقية مقدارها ٣ وحدات فى اتجاه → وسمى (شمال)

✱ انعكاس المنحنى فى محور السينات

د (س) = $ج^{س}$

فإن د (س) = $-(ج)^{س}$

سيحدث للمنحنى انعكاس فى محور السينات

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

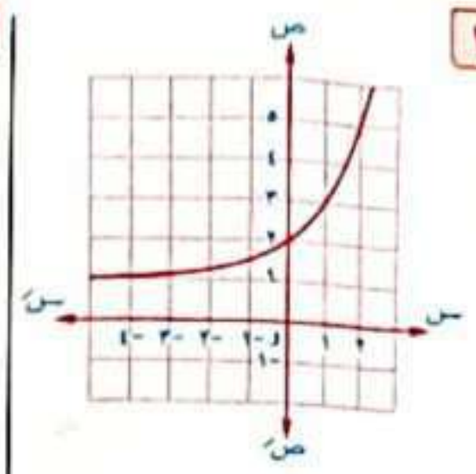
أمثلة :-

مثل الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ثم أوجد المجال والمدى لكل منهم وبين أيًا منهم تزايدية وأيًا منهم تناقصية :

[١] ص = $٢^{س} + ١$ [٢] ص = $٢^{-س} - ١$ [٣] ص = $-\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$

الحل

[١]

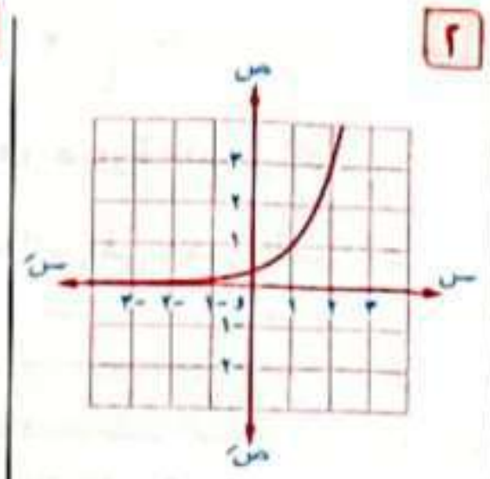


مجال الدالة = ح

، مدى الدالة =]١ ، ∞[

، الدالة تزايدية على مجالها

[٢]

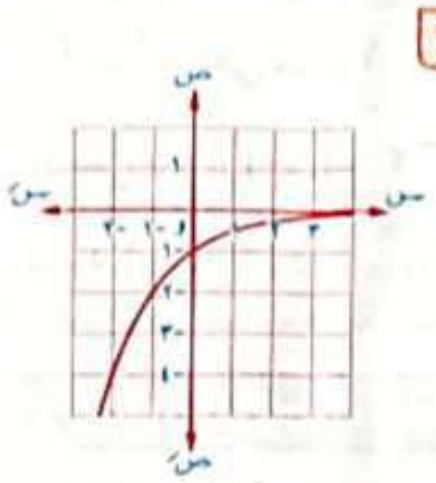


مجال الدالة = ح

، مدى الدالة =]٠ ، ∞[

، الدالة تزايدية على مجالها

[٣]



مجال الدالة = ح

، مدى الدالة =]- ∞ ، ٠[

، الدالة تزايدية على مجالها.

مثال ١

ارسم رأسيًا لأسفل حتى أول صفر لها وحدة طول

مثال ٢

ارسم أفقيًا لليمين حتى أول صفر لها وحدة طول

مثال ٣

انعكاس للدالة في محور السينات (قاعدة السالب)

مثال أ) ارسم منحنى الدالة د : ح ← ح$^{+}$ ، د (س) = $٢^{س}$ متخذًا س ∈ [-٣ ، ٤]

ومن الرسم أوجد قيمة تقريبية لكل من :

[١] د (١,٥) ، د $\left(-\frac{١}{٢}\right)$ [٢] قيمة س عندما د (س) = ١٠

الحل

نكون الجدول الآتى :

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣	٤
ص = $٢^{س}$	$\frac{١}{٨}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٤	٨	١٦

[١] إيجاد قيمة د (١,٥) :

عند س = ١,٥ نرسم مستقيمًا يوازى محور الصادات ليقابل المنحنى فى نقطة ثم نقرأ قيمة ص المناظرة على محور الصادات فنجدها ٢,٨ تقريبًا.

∴ د (١,٥) ≃ ٢,٨

وبالمثل د $\left(-\frac{١}{٢}\right)$ ≃ ٠,٧

[٢] إيجاد قيمة س عندما د (س) = ١٠

أى عندما $٢^{س}$ = ١٠ نرسم مستقيمًا يوازى محور الصادات ليقابل المنحنى فى نقطة ثم نقرأ قيمة س المناظرة على محور السينات فنجدها ٣,٣ تقريبًا.

∴ عندما $٢^{س}$ = ١٠ تكون س ≃ ٣,٣

لاحظ أن

د (س) = $٢^{س}$ دالة نمو أسى حيث أ > ١

أستاذ / لطفى زهران
للتربية والتعليم
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢
٠١١١٥٩٥٦٢٢٦

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

⑤ أوجد بيانيًا فى ح مجموعة حل المعادلة : $٢^{س+١} = ٤$

الحـــل

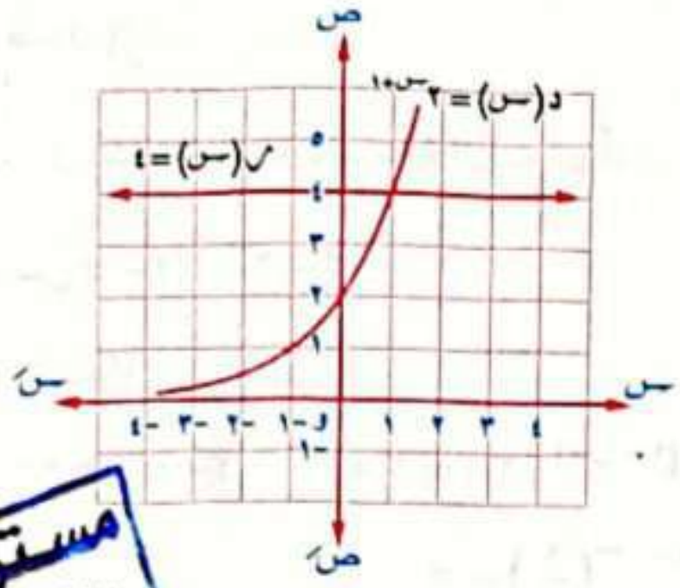
نفرض أن الطرف الأيمن للمعادلة

هو قاعدة الدالة د : د (س) = $٢^{س+١}$

والطرف الأيسر هو قاعدة الدالة

ر : ر (س) = ٤

ويرسم الشكل البيانى للدالتين فى شكل واحد



ومن الرسم :

∴ نقطة التقاطع هى (١ ، ٤) ∴ س = ١ ∴ مجموعة الحل = {١}

د(س) = $٢^{س+١}$

س = ٠ ⇒ ص = ٢

س = ١ ⇒ ص = ٤

س = -١ ⇒ ص = ١

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية

مثال ٦

أوجد بيانيًا فى ح مجموعة حل المعادلة : $٣^{س} = ٢س + ١$

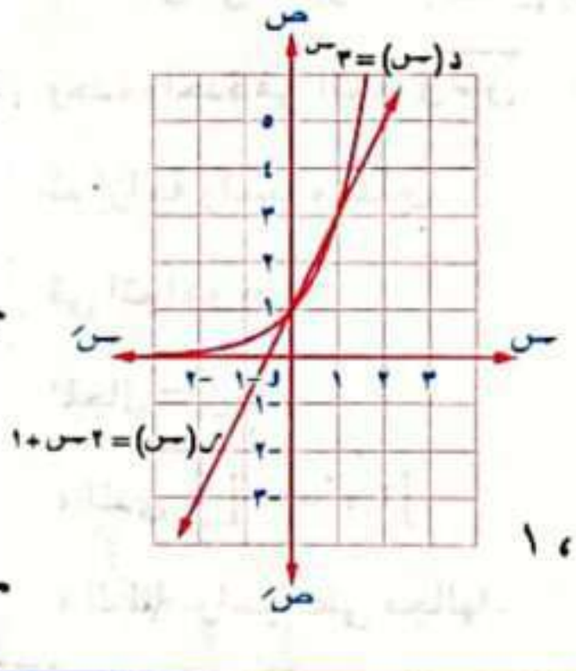
الحـــل

نفرض أن الطرف الأيمن للمعادلة هو قاعدة الدالة

د : د (س) = $٣^{س}$ والطرف الأيسر هو قاعدة الدالة

ر : ر (س) = ٢ س + ١

ويرسم الشكل البيانى للدالتين فى شكل واحد



ومن الرسم : الإحداثيان السينيان لنقطتى التقاطع هما ٠ ، ١

∴ مجموعة الحل = {٠ ، ١}

د(س) = $٣^{س}$

س = ١ ⇒ ص = ٣

س = ٢ ⇒ ص = ٩

س = -١ ⇒ ص = $\frac{١}{٣}$

س = ٠ ⇒ ص = ١

ر(س) = ٢س + ١

س = ١ ⇒ ص = ٣

س = ٢ ⇒ ص = ٥

س = ٣ ⇒ ص = ٧

تطبيقات حياتيه على النمو والتضاؤل الأسى

النمو الأسى :- $د(ن) = أ(١ + ر)^{ن}$

التضاؤل الأسى :- $د(ن) = أ(١ - ر)^{ن}$

الرابح المركب :- $ح = أ(١ + \frac{ر}{ن})^{ن س}$

(أ) أصل القيمة الابتدائية

(ر) النسبة المئوية

(ن) الفترة الزمنية

(س) فترات تقييم العائد السنوى

خلى بالك من س

لو العائد سنوى ∴ س = ١

لو العائد ربع سنوى ∴ س = ٤

لو العائد شهرى ∴ س = ١٢

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

① اشترى رائل مبلغ ١٣٥٠٠٠٠ جنيه منزلاً فإذا كان سعر المنزل يزداد بمعدل ٥,٢ ٪ كل سنه ، فقدر لأقرب جنيه سعر المنزل بعد مرور ٦ سنوات من شرائه ، اكتب دالة أسية تعبر عن سعر المنزل

الحل

$P = 1350000$ ، $r = \frac{5,2}{100} = 0,052$ ، $n = 6$

الدالة هى $d(n) = P(1+r)^n = 1350000(1+0,052)^n$

بعد ٦ سنوات $\therefore d(6) = 1350000(1+0,052)^6 = 1565586$ جنيها

---

② يتناقص انتاج منجم ذهب سنويا بمقدار ٥ ٪ فإذا كان انتاجه خلال السنة الأولى ٤٥٠ كجم ، فقدر انتاجه خلال السنة التاسعة لأقرب كجم

$d(n) = P(1-r)^n = 450(1-\frac{5}{100})^9 = 160$ كجم

---

③ أودع رجل مبلغ ١٠٠٠٠ فى أحد البنوك التى تعطى فائدة سنوية مركبة قدرها ٧ ٪ أوجد جملة هذا المبلغ بعد مرور ١ سنوات فى كل من الحالات الآتية ① العائد سنوى ② العائد ربع سنوى ③ العائد شهرى

الحل

$جـ = (1+\frac{ر}{س})^{س ن}$

① $جـ = (1+\frac{0,07}{1})^{1\times 10} \simeq 19672,07$ جنيه (سنوى $\therefore$ س=١)

② $جـ = (1+\frac{0,07}{4})^{4\times 10} = 20096,43$ جنيه (ربع سنوى $\therefore$ س=٤)

③ $جـ = (1+\frac{0,07}{12})^{12\times 10} = 20144,93$ جنيه (شهرى $\therefore$ س=١٢)

مستر / لطفي زهران
رياضيات الوحدتين الإعدادية والثانوية
٠١٠

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① 📖 تكون الدالة الأسية التى أساسها أ تزايدية إذا كانت .....

(أ) أ > ٠ (ب) أ > ١

(جـ) ٠ < أ < ١ (د) أ = ١

② 📖 تكون الدالة الأسية التى أساسها أ تناقصية إذا كانت .....

(أ) أ < ٠ (ب) أ > ٠

(جـ) ٠ < أ < ١ (د) -١ < أ < ٠

③ مدى الدالة د : د (س) = $(\frac{١}{٢})^{س}$ هو .....

(أ)]-∞ ، ∞[(ب)]-∞ ، ٠[

(جـ) [٠ ، ∞[(د) [١ ، ∞[

④ إذا تحرك منحنى الدالة د : د (س) = $٢^{س}$ وحدة واحدة لليسار

فإن الدالة الجديدة هى ر : ر (س) = ...

(أ) $٢^{س+١}$ (ب) $٢^{س-١}$ (جـ) $-٢^{س}$ (د) $-٢^{١-س}$

⑤ منحنى الدالة د : د (س) = $٣^{س}$ هو صورة منحنى الدالة ر : ر (س) = $-٣^{-س}$ بالانعكاس فى .....

(أ) ص = ٠ (ب) س = ٠ (جـ) ص = س (د) ص = - س

⑥ 📖 معادلة محور التماثل لمنحنى الدالتين د ، ر حيث د (س) = $٣^{س}$ ، ر (س) = $(\frac{١}{٣})^{س}$ هى .....

(أ) ص = ٠ (ب) س = ٠ (جـ) ص = س (د) ص = - س

مستر / لطفى زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

الواجب ①

① اذا كانت د(س) = ٥ س

فرجد فيه $\frac{د(س+٥) - د(س+٣)}{د(س+٤) - د(س+٣)}$

② اذا كانت د(س) = $٣^{س}$

فرجد فيه $\frac{د(٣س+٤) + د(٢س-١)}{٥ د(٢س) - ٧ د(٣س-١)}$

③ اذا كانت د(س) = $٢^{س}$

(لبيان ان) $\frac{د(س+١)}{د(س-١)} + \frac{د(س-١)}{د(س+١)} = \frac{١٧}{٤}$

④ اذا كان د(س) = $٣^{س}$

فرجد صحيح $\frac{د(٢س+١)}{د(س-١)} = ٧٢٩$

⑤ اذا كانت د(س) = $٣^{س-١}$

فرجد قيمة س التى تجعل

د(س+٤) + د(٤-س) = ٢٠

⑥ اذا كانت د(س) = $٢^{س}$

فرجد صحيح المعادلة

د(س) + د($\frac{س}{٢}$) = ١٢

⑦ د(س-٤) = $٢^{س}$

اوجد قيمة س : د(٣س+١) - د(٣س-١) = ٤٣

مستر / لطفى زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(٧) منحنى الدالة د : د (س) = ٥^س يقطع محور الصادات فى النقطة .....

(أ) (١ ، ٠) (ب) (٠ ، ١) (جـ) (٥ ، ١) (د) (١ ، ٥)

(٨) منحنى الدالة د : د (س) = ٣^(س+١) يقطع محور الصادات فى النقطة .....

(أ) (٠ ، ١) (ب) (١ ، ٠) (جـ) (٠ ، ٣) (د) (٣ ، ٠)

(٩) المستقيم ص = ٩ يقطع منحنى الدالة د : د (س) = ٣^س فى النقطة .....

(أ) (٠ ، ١) (ب) (٢ ، ٠) (جـ) (٢ ، ٩) (د) (١ ، ٩)

(١٠) إذا كانت النقطة (أ ، ب) حيث أ ≠ ٠ تقع على منحنى الدالة ص = ٢^س فأى من النقط الآتية تقع على منحنى الدالة ص = (١/٢)^س ؟

(أ) (أ ، ب) (ب) (-أ ، ب) (جـ) (أ ، -ب) (د) (أ ، ١/٢ ب)

(١١) الدالة الأسية د حيث د (س) = أ^س ، أ > ١ يقترب خطها البيانى من .....

(أ) محور السينات (الاتجاه الموجب) (ب) محور السينات (الاتجاه السالب)

(جـ) محور الصادات (الاتجاه الموجب) (د) محور الصادات (الاتجاه السالب)

(١٢) فى الدالة الأسية د : د (س) = أ^س ، أ > ١ تكون د (س) > ١

عندما س ∈ .....

(أ) ح (ب) ح^+ (جـ) ح^- (د) ص

(١٣) أى من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية تمثل دالة نماء أسى ؟

(أ) د (س) = ٢^-س (ب) د (س) = (١/٣)^س

(جـ) د (س) = ٣^س (د) د (س) = (٢/٣)^س

(١٤) أى من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية تمثل دالة تضاؤل أسى ؟

(أ) د (س) = ٢^س (ب) د (س) = (١/٣)^-س

(جـ) د (س) = ٣^س (د) د (س) = (٢/٣)^س

(١٥) فى الدالة الأسية ر حيث ر (س) = أ^س ، ٠ < أ < ١ تكون ٠ < أ^س < ١

عندما س ∈ .....

(أ)]٠ ، ∞[(ب)]-∞ ، ٠[(جـ)]١ ، ∞[(د)]-∞ ، ١[

(١٦) الدالة د حيث د (س) = ٢^س يمثلها الشكل البيانى .....

(أ) (ب) (جـ) (د)

(١٧) الشكل المقابل يمثل الدالة د حيث .....

(أ) د (س) = ٢^(س+١)

(ب) د (س) = ٢^-س

(جـ) د (س) = ٣^-س

(د) د (س) = ٢^س

اختر الشكل البيانى المناسب لكل من قواعد الدوال الآتية :

(١) ص = ٣^س (٢) ص = ٣^-س

(٣) ص = -٣^س (٤) ص = -٣^-س

(٥) ص = ٣^س - ١ (٦) ص = ٣^-س - ١

(٧) ص = ١٢^-س (٨) ص = ٣^س - ١

شكل (١) شكل (٢) شكل (٣) شكل (٤) شكل (٥) شكل (٦) شكل (٧) شكل (٨)

Scanned with CamScanner

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الدالة العكسية

اذا كانت د دالة أحادية تجال س ومداها هـ فإن كل عنصر ص في المدى يناظره عنصر وحيد س في المجال ولذلك يمكن تعيين دالة عكسية من هـ الى س ويرمز لها بـ د$^{-1}$

أي أنه :- اذا كان لكل (س ، ص) ∈ بيان د

فإن (ص ، س) ∈ بيان د$^{-1}$

* ص هي مدى د وتجال د$^{-1}$ ، س هي تجال د ومدى د$^{-1}$

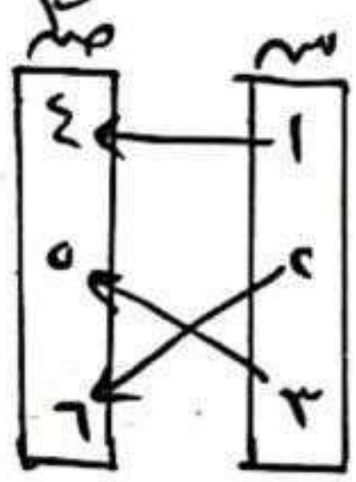
تعالى نفهم :

① ع دالة لأن كل عنصر من عناصر س خرج منه سهم واحد فقط

المجال = س = {١ ، ٢ ، ٣}

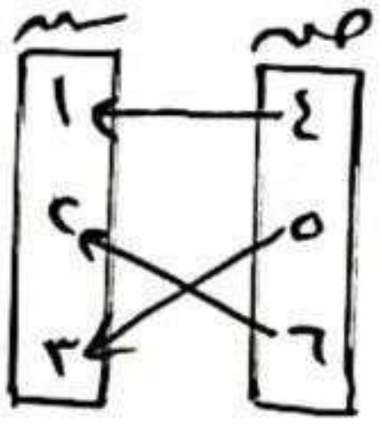
المدى = صـ = {٤ ، ٥ ، ٦}

بيان ع = {(١ ، ٤) ، (٢ ، ٦) ، (٣ ، ٥)}



العلاقة دالة

تعالى نشوف هنعرف الجيب ليها دالة عكسية أم لا



العلاقة دالة

المجال = {٤ ، ٥ ، ٦}

المدى = {١ ، ٢ ، ٣}

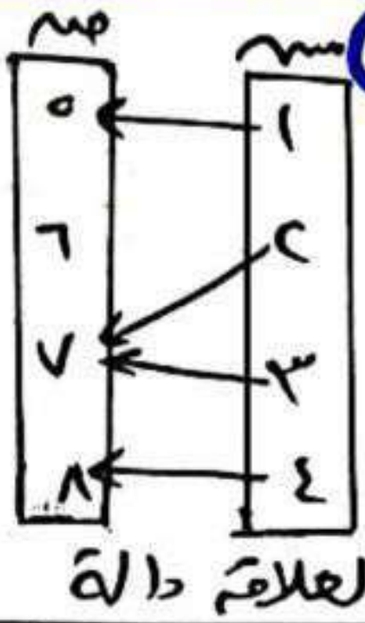
بيان ل = {(١ ، ٤) ، (٣ ، ٥) ، (٢ ، ٦)}

∴ ينفع تكون دالة عكسية للدالة العظاه

لاحظ ان مجال د هو مدى د$^{-1}$ ، مدى د هو مجال د$^{-1}$

---

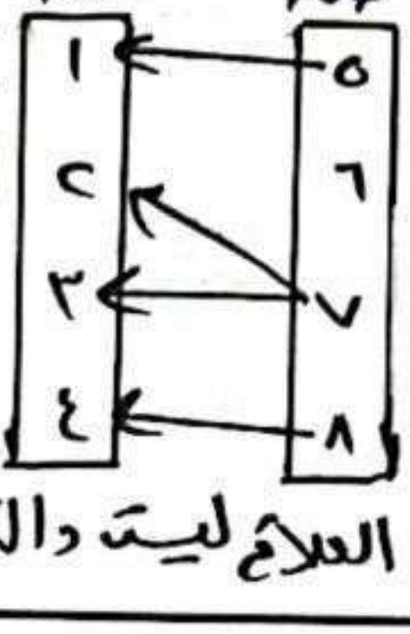
② هل لهذه العلاقة دالة عكسية ام لا ؟؟



العلاقة دالة

لا يوجد لها دالة عكسية تعالى نعرف ليه

ع ليست دالة لأنه العنصر ⑦ خرج منه سهمان لذلك الدالة (اسم) ليس لها دالة عكسية



العلاقة ليست دالة

@SecondaryTwo_M
مستر / لطفي زهران رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية ٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢
Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

⑬ بيان د = {(-١، ١) (٠، ٠) (١، ١) (٢، ٢)} هل يمكن ايجاد دالة عكسية أم لا

الحل

اطلب الازواج المرتبة وانت تعرف

البيان = {(-١، -١) (٠، ٠) (١، ١) (٢، ٢)} لاحظ ان العنصر ① ظهر كمتقدم اول مرة

∴ العلاقة ليست دالة ∴ لا يمكن ايجاد دالة عكسية

⑭ بيان د = {(-١، ١) (٠، ٠) (١، ٣) (٢، ٤)} هل يمكن ايجاد دالة عكسية أم لا

البيان = {(١، -١) (٠، ٠) (٣، ١) (٤، ٢)} نعم يمكن ايجاد دالة عكسية لأنه كل عنصر من عناصر س ظهر كمتقدم اول مرة واحدة فقط

∴ بيان د$^{-١}$ = {(١، -١) (٠، ٠) (١، ٣) (٢، ٤)}

---

⑮ اذا كانت الدالة د معرفة من المجموعة س = {٠، ٢، ٣، ٤، ٥}

الى المجموعة صـ = {٢، ٤، ٥، ٦، ٧} وكانت د(س) = س + ٢

أوجد ① بيان د$^{-١}$ ② قاعدة الدالة د$^{-١}$

الحل

بيان د ⇐ ص = س + ٢

عندما س = ٠	ص = ٠ + ٢ = ٢	بيان د = {(٠، ٢) (١، ٣) (٣، ٥) (٤، ٦) (٥، ٧)}
س = ١	ص = ١ + ٢ = ٣	المجال = {٠، ١، ٣، ٤، ٥}
س = ٣	ص = ٣ + ٢ = ٥	المدى = {٢، ٣، ٥، ٦، ٧}
س = ٤	ص = ٤ + ٢ = ٦	
س = ٥	ص = ٥ + ٢ = ٧	

∴ بيان د$^{-١}$ = {(٢، ٠) (٣، ١) (٥، ٣) (٦، ٤) (٧، ٥)}

لايجاد قاعدة د$^{-١}$ ⇐ د(س) = س + ٢ ⇐ ص = س + ٢

بدل مكان الـ ص بـ س ومكان الـ س بـ ص

∴ س = ص + ٢ ∴ ص = س - ٢ ∴ د$^{-١}$(س) = س - ٢

مستر / لطفي زهران
رياضيات الاعدادية والثانوية

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ٢

أوجد الدالة العكسية للدالة د : د (س) = ٣ س − ٢ ومثل الدالة ومعكوسها بيانيًا فى شكل واحد.

الحل

• لإيجاد الدالة العكسية نقوم بتبديل المتغيرين ثم نوجد ص بدلالة س

∵ ص = ٣ س − ٢

وبتبديل المتغيرين نوجد ص بدلالة س

∴ س = ٣ ص − ٢

∴ ٣ ص = س + ٢

∴ ص = $\frac{1}{3}$ (س + ٢)

∴ د$^{-1}$ (س) = $\frac{1}{3}$ (س + ٢)

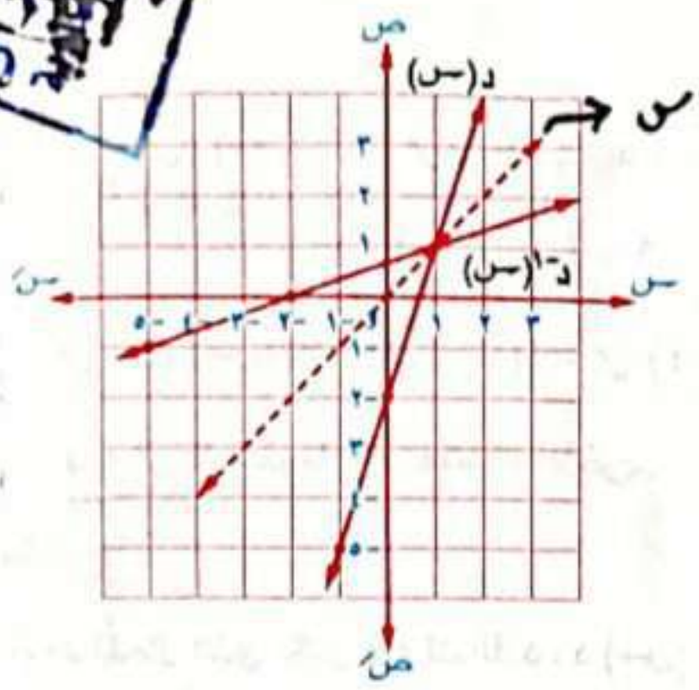
التمثيل البيانى :

• د (س) = ٣ س − ٢

س	١	٠	١−
د (س)	١	٢−	٥−

• د$^{-1}$ (س) = $\frac{1}{3}$ (س + ٢)

س	١	٢−	٥−
د$^{-1}$ (س)	١	٠	١−



لدينا الرسمين يتماثلوا حول المستقيم ص = س

ملاحظتان

١ لاحظ أن : د$^{-1}$ (س) ≠ $\frac{1}{\text{د (س)}}$ ففى المثال السابق

د$^{-1}$ (س) = $\frac{1}{3}$ (س + ٢) بينما $\frac{1}{\text{د (س)}}$ = $\frac{1}{٣ س - ٢}$

٢ فى المثال السابق نلاحظ أن الدالة د والدالة العكسية لها د$^{-1}$ متماثلتان بالنسبة للمستقيم ص = س وبصفة عامة لأى دالة د إذا أمكن إيجاد دالتها العكسية د$^{-1}$

فإن الدالتين د ، د$^{-1}$ تكونان متماثلتين بالنسبة للمستقيم ص = س

أى أن : د ، د$^{-1}$ كل منهما صورة للأخرى بالانعكاس فى المستقيم ص = س

أوجد الدالة العكسية للدوال الآتية

① د (س) = ٢ س + ٥

الحل

ص = ٢ س + ٥

٢ ص = س − ٥

ص = $\frac{\text{س} - ٥}{٢}$

د$^{-1}$ (س) = $\frac{1}{2}$ (س − ٥)

د$^{-1}$ (س) = $\frac{1}{2}$ (س − ٥)

② د (س) = ٨ س^{٣} − ١

ص = ٨ س^{٣} − ١

∴ س = ٨ ص^{٣} − ١

٨ ص^{٣} = س + ١ (÷ ٨)

ص^{٣} = $\frac{1}{8}$ (س + ١)

∴ ص = $\frac{1}{2}\sqrt[3]{\text{س} + ١}$

د$^{-1}$ (س) = $\frac{1}{2}\sqrt[3]{\text{س} + ١}$

③ د (س) = $\sqrt[3]{\text{س} + ١}$

ص = $\sqrt[3]{\text{س} + ١}$

بتكعيب الطرفين

س = $\sqrt[3]{\text{ص} + ١}$

س^{٣} = ص + ١

ص = س^{٣} − ١

د$^{-1}$ (س) = س^{٣} − ١

④ د (س) = ٢ + $\sqrt{٣ - \text{س}}$

ص = ٢ + $\sqrt{٣ - \text{س}}$

س = ٢ + $\sqrt{٣ - \text{ص}}$

س − ٢ = $\sqrt{٣ - \text{ص}}$ بتربيع الطرفين

(س − ٢)^{٢} = ٣ − ص

ص = ٣ − (٢ − س)^{٢} (÷ −١)

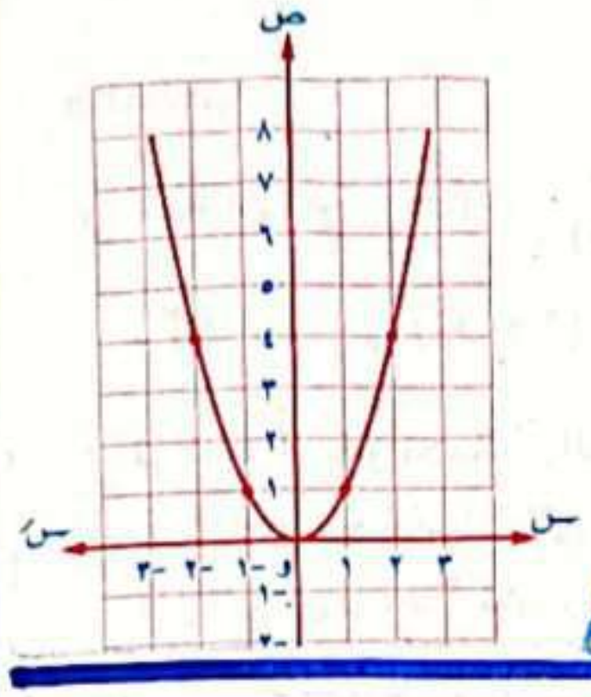
− ص = (٢ − س)^{٢} − ٣

∴ د$^{-1}$ (س) = − (٢ − س)^{٢} + ٣

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

أوجد المجال الذى يكون فيه للدالة د : د (س) = س^{2} دالة عكسية ، وأوجد هذه الدالة العكسية.

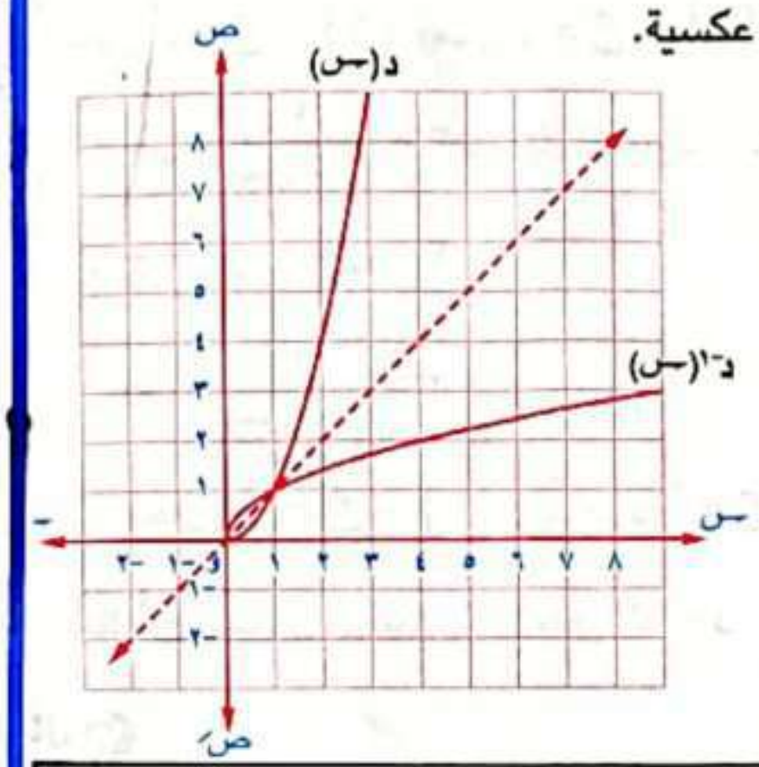
الحـــل



مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

- إذا كانت س ∈ ح
فإن الدالة د : د (س) = س^{2}
ليست أحادية (لا تحقق شرط الخط الأفقى) لذلك ليس لها دالة عكسية فى المجال ح

- إذا كانت س ∈ [٠ ، ∞[فإن الدالة د : د (س) = س^{2} س ≥ ٠
تكون أحادية ويكون لها فى هذه الحالة دالة عكسية.



∵ ص = س^{2} حيث س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

وبتبديل المتغيرين

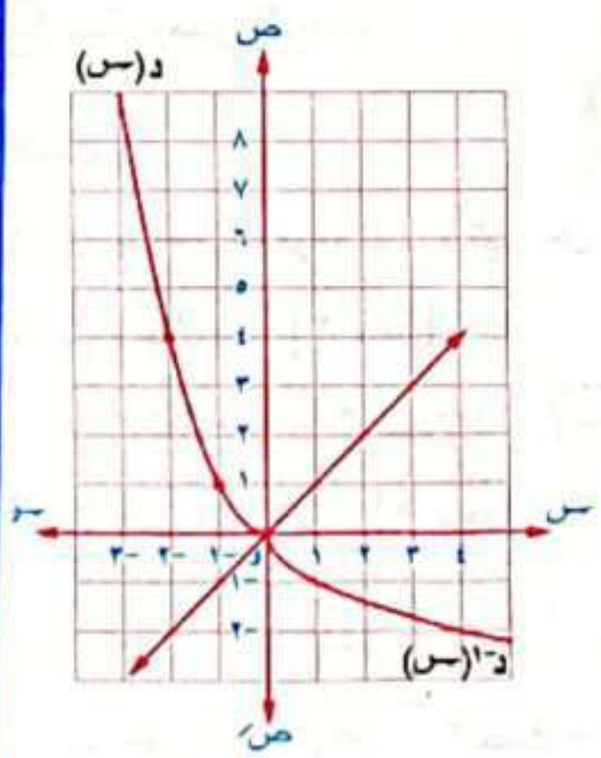
∴ س = ص^{2}

∴ ص = $\sqrt{\text{س}}$

حيث : ص ≥ ٠ ، س ≥ ٠

∴ د$^{-١}$ (س) = $\sqrt{\text{س}}$

- إذا كانت : س ∈]-∞ ، ٠] فإن الدالة د : د (س) = س^{2} س ≤ ٠
تكون أحادية ويكون لها فى هذه الحالة دالة عكسية.



∵ ص = س^{2} حيث س ≤ ٠ ، ص ≥ ٠

وبتبديل المتغيرين

∴ س = ص^{2} حيث س ≤ ٠ ، ص ≥ ٠

∴ ص = - $\sqrt{\text{س}}$ حيث س ≤ ٠ ، ص ≥ ٠

∴ د$^{-١}$ (س) = - $\sqrt{\text{س}}$

∴ المجال الذى يكون فيه للدالة د دالة عكسية

=]٠ ، ∞[أ،]-∞ ، ٠]

مثال

د(س) = $\frac{١}{\text{س}-٢}$ + ٣

أوجد ① مجال ومدى الدالة د

② د$^{-١}$(س) وبين مجالها ومداها

الحل

مجال = ح - {٢} =]-∞ ، ٢[∪]٢ ، ∞[

لأن اجيب المدى بتاع الدالة الاصلية

المدى = ح - {٣}

ص = $\frac{١}{\text{س}-٢}$ + ٣

س = $\frac{١}{\text{ص}-٢}$ + ٣

$\frac{١}{\text{ص}-٢}$ = س - ٣

$\frac{١}{\text{ص}-٢}$ = $\frac{١}{\text{س}-٣}$

ص - ٢ = $\frac{١}{\text{س}-٣}$

ص = $\frac{١}{\text{س}-٣}$ + ٢

∴ مجال د$^{-١}$ = ح - {٣}

مدى د$^{-١}$ = ح - {٢}

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

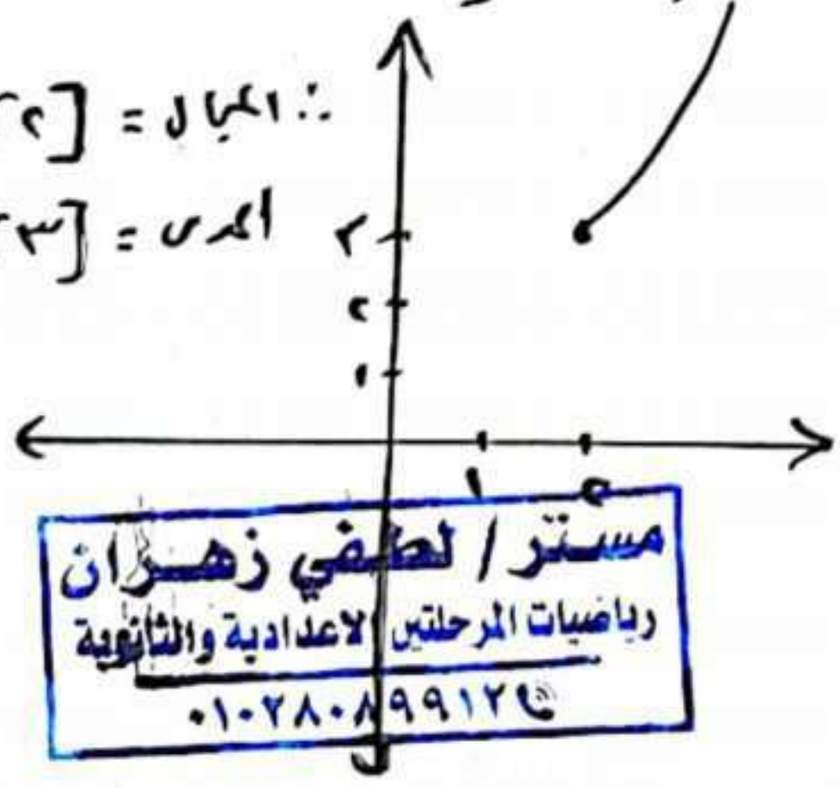
Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

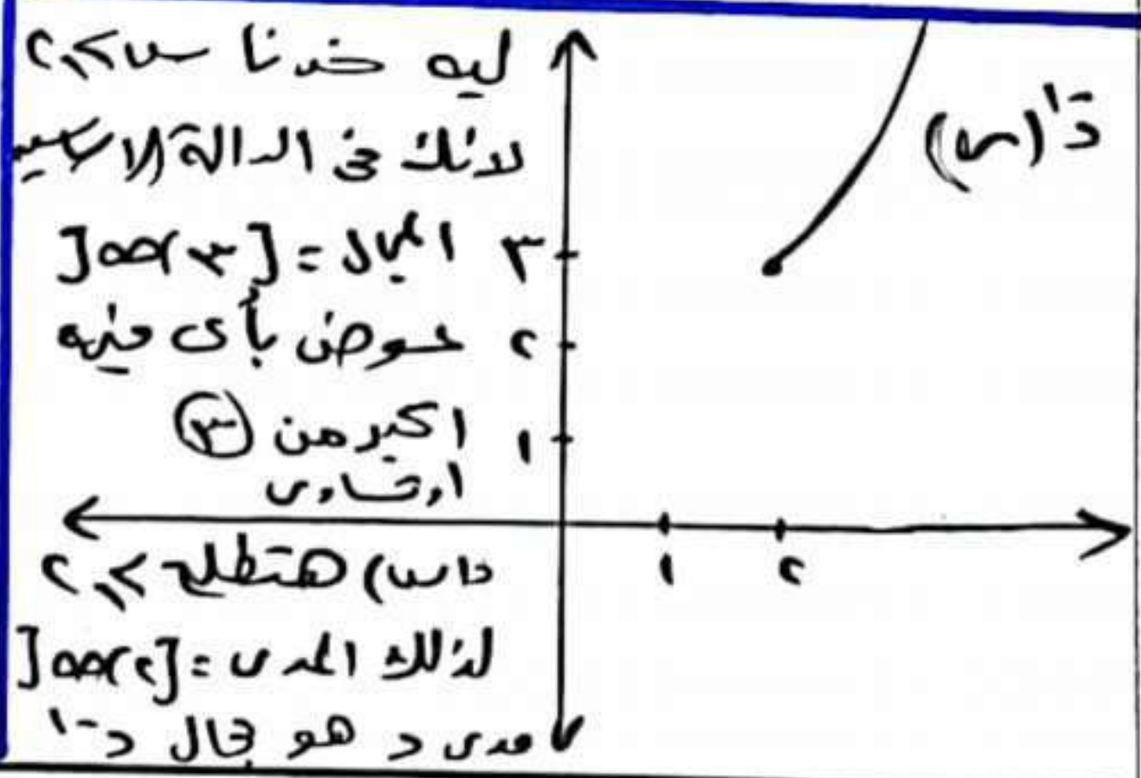
⑥ $د(س) = ٢ + \sqrt{س - ٣}$ أوجد
① مجال ومدى الدالة د ② $د^{-١}(س)$ ومجالها ومداها
الحل
لإيجاد مجال د : $س - ٣ \geq ٠$
$\therefore س \geq ٣$ ∴ المجال $= [٣ ، \infty[$
∴ المدى $= [٢ ، \infty[$
لإيجاد $د^{-١}(س)$:
$ص = ٢ + \sqrt{س - ٣}$
$س = ٢ + \sqrt{ص - ٣}$
$\sqrt{ص - ٣} = س - ٢$ بتربيع الطرفين
$ص - ٣ = (س - ٢)^{٢}$
$\therefore ص = (س - ٢)^{٢} + ٣$
$\therefore د^{-١}(س) = (س - ٢)^{٢} + ٣$
تكاكى الجيب نقلم رأسن لليمين
المفروض $(٣ ، ٢)$ ذى ما إحنا مفوضين

∴ مجال $د^{-١} = [٢ ، \infty[$ بس $ص \geq ٢$
مدى $د^{-١} = [٣ ، \infty[$

⑦ أوجد الدالة العكسية موضحاً مجالها
$د(س) = (س - ٢)^{٢} + ٣$ ، $س \geq ٢$
الحل
لاحظ عندما $س \geq ٢$ ∴ $ص \geq ٣$
عوض وانت تعرف ؛ الدالة الأساسية
بلاقى الجيب الدالة العكسية
$\therefore ص = (س - ٢)^{٢} + ٣$
$ص \geq ٢$
$س = (ص - ٢)^{٢} + ٣$ $س \geq ٣$
$\therefore (ص - ٢)^{٢} = س - ٣$ بأخذ الجذر التربيعى
$ص - ٢ = \pm \sqrt{س - ٣}$
$ص - ٢ = - \sqrt{س - ٣}$ لأن $ص \geq ٢$
$ص = - \sqrt{س - ٣} + ٢$ حيث $س \geq ٣$
$د^{-١}(س) = - \sqrt{س - ٣} + ٢$
مجال $د^{-١} = [٣ ، \infty[$

جبت مجال $د^{-١}$ من مدى د
لكاى نشوف ازاى
الدالة الأساسية براسن لليمين $(٣ ، ٢)$





مدى د هو مجال $د^{-١}$

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

Scanned with CamScanner
المسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ملحوظة هامة:.

يقال إن د ، ر كل منهما دالة عكسية للأخرى إذا كان

$(د \circ ر)(س) = س$

$(ر \circ د)(س) = س$

مثال ٨

حقق أن كلاً من د ، ر دالة عكسية للأخرى

$د(س) = س + ٩$ ، $ر(س) = س - ٩$

الحل

$(د \circ ر)(س) = س - ٩ + ٩ = س$

$(ر \circ د)(س) = س + ٩ - ٩ = س$

∴ د ، ر كلاً منهما عكسية للأخرى

٩ حقق أن كلاً من د ، ر دالة عكسية للأخرى

$د(س) = ٤س + ٩$ $\quad ر(س) = \frac{س - ٩}{٤}$

الحل

$(د \circ ر)(س) = ٤(\frac{س - ٩}{٤}) + ٩$

$= س - ٩ + ٩ = س$

$(ر \circ د)(س) = \frac{٤س + ٩ - ٩}{٤} = \frac{٤س}{٤}$

$= س$

∴ كلاً من د ، ر دالة عكسية للأخرى

الواجب ① أوجد الدالة العكسية لكل من الدوال الآتية:

① $د = \{(١ ، ٤)(٢ ، ٣)(٣ ، ٢)(٤ ، ١)\}$

② $د(س) = ٢س + ٥$

③ $د(س) = \frac{١}{٢}س + ٤$

④ $د(س) = \sqrt[٣]{س + ١}$

⑤ $د(س) = ٥ + \frac{٤}{س}$

⑥ $د(س) = \sqrt[٣]{٤ - س}$

⑦ $د(س) = (س - ١)^٢ + ٥$ ، $س \geq ١$

⑧ $د(س) = \sqrt{٩ - س^٢}$ $\quad ٠ \leq س \leq ٣$

⑨ $د(س) = \sqrt{٩ - س^٢}$ $\quad ٠ \leq س \leq ٣$

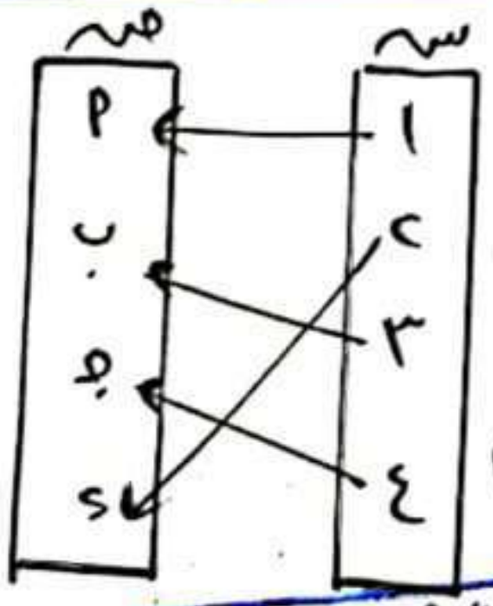
⑩ $د(س) = ٢ + \sqrt{٣ - س}$

② إذا كانت د ، ر حيث

$د(س) = ٢س + p$ ، $ر(س) = ب س + ٣$

دالة عكسية للأخرى أوجد قيمة p ، ب

③ الشكل يمثل دالة من س ← ص



أوجد فيه

$د^{-١}(ب) + ٢د^{-١}(ا)$

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت د دالة أحادية وكانت ر دالة حيث منحنى ر هو صورة منحنى د بالانعكاس
فى المستقيم ص = س فإن : .....
(أ) ر (س) = د (س) (ب) ر (س) = $\frac{١}{د(س)}$
(جـ) ر (س) = د$^{-١}$ (س) (د) ر (س) = (د ○ د) (س)

(٢) أى مما يأتى ليس له دالة عكسية ؟
(أ) ص = $\sqrt{س}$ (ب) ص = ٣ س (جـ) ص = س^{٣} (د) ص = س^{٢}

(٣) إذا كانت الدالة د = {(١ ، ٤) ، (٢ ، -٣) ، (٣ ، ١) ، (٤ ، ٠)}
فإن : د$^{-١}$ (١) + د (٢) = ...
(أ) -١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٣

(٤) إذا كانت الدالة د$^{-١}$ حيث د$^{-١}$ = {(٢ ، ٣) ، (٥ ، ب)} هى الدالة العكسية للدالة د
حيث د = {(٤ ، ٥) ، (أ ، ٢)} فإن : أ - ب = ...
(أ) صفر (ب) ١ (جـ) -١ (د) ٢

(٥) إذا قطع المستقيم ص = س الدالة الأحادية د فى النقطة (٢ ، ٢) فإنه يقطع
الدالة د$^{-١}$ فى النقطة .....
(أ) (-٢ ، ٢) (ب) (٢ ، ٢) (جـ) (-٢ ، -٢) (د) (٢ ، -٢)

(٦) إذا كانت د دالة حيث د (س) = س + ٢ فإن : د$^{-١}$ (س) = ...
(أ) س + ٢ (ب) - س + ٢ (جـ) س - ٢ (د) $\frac{س}{٢}$

(٧) إذا كانت د دالة حيث د (س) = ٧ س فإن : د$^{-١}$ (س) = ...
(أ) ٧ س (ب) $\frac{س}{٧}$ (جـ) $\frac{٧}{س}$ (د) ٧ - س

(٨) صورة النقطة (٣ ، -١) بالانعكاس فى المستقيم ص = س هى .....
(أ) (٣ ، -١) (ب) (-١ ، -٣) (جـ) (-١ ، ٣) (د) (٣ ، ١)

(٩) إذا تقاطع منحنى الدالة د مع منحنى الدالة د$^{-١}$ فى نقطة (ك ، ٢ ك - ٣)
فإن : ك = ...
(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(١٠) إذا تقاطع منحنى الدالة د مع منحنى الدالة د$^{-١}$ فى نقطة (أ ، $\frac{٤}{أ}$)
فإن : أ = ...
(أ) ٢ (ب) ± ٢ (جـ) ٤ (د) ± ٤

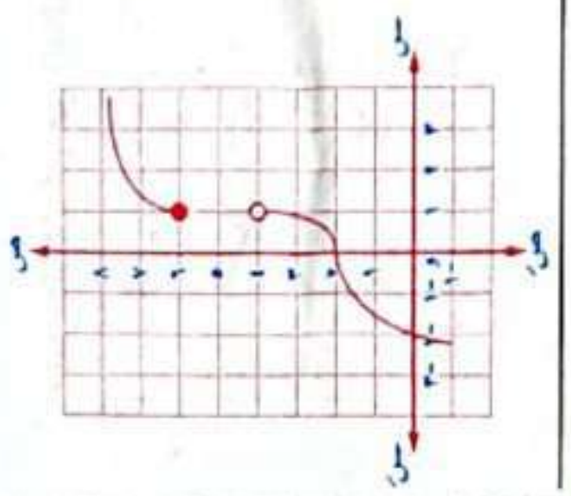
(١١) إذا كانت د$^{-١}$ هى الدالة العكسية للدالة د فإن : .....
(أ) مجال د$^{-١}$ = مجال د (ب) مجال د$^{-١}$ = مدى د
(جـ) مدى د$^{-١}$ = مدى د (د) مدى د$^{-١}$ = مجال د$^{-١}$

(١٢) إذا كانت : ص = $\sqrt{س}$ فإن الدالة العكسية لها ص = ...
(أ) $\frac{١}{٣}$ س^{٣} (ب) س^{٣} (جـ) س^{٣} - ١ (د) ٣ س^{٣}

(١٣) إذا كانت د : ح - {٢} ← ح - {١} حيث د (س) = $\frac{س + ١}{س - ٢}$
فإن : د$^{-١}$ (٤) = ...
(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(١٤) إذا كانت : د (س) = $\frac{٢ س + ٣}{٥ + س}$ فإن مجال الدالة العكسية د$^{-١}$ (س)
هو .....
(أ) ح - $\{\frac{٢}{٣}\}$ (ب) ح - $\{\frac{٥}{٢}\}$
(جـ) ح - $\{\frac{٥-}{٢}\}$ (د) ح - $\{\frac{٢}{٣}، \frac{٥-}{٢}\}$

(١٦) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د
فإن : د$^{-١}$ (صفر) + د$^{-١}$ (٦) = ...
(أ) -١ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٨



أستاذ / لطفى زهران
رياضيات الرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الدالة اللوغاريتمية

$$ص = لو_{م} س \quad م^{ص} = س$$

$$م \in ح^{+} - \{1\}$$

$$س \in ح^{+}$$

$$ص \in ح$$

$$لو_{٢} ٨ = ٣ \Leftrightarrow ٢^{٣} = ٨$$

$$لو_{٤} ١٦ = ٢ \Leftrightarrow ٤^{٢} = ١٦$$

من الآخر $لو_{(ب)} (ج) = (أ)$

(أ) الأس (ب) الناتج (م) الأساس

$$لو_{\frac{١}{٨}} = -٣ \Leftrightarrow ٢^{-٣} = \frac{١}{٨}$$

لو$_{-٣}$ ٢ ⇐ ليس له معنى

لو$_{٨}$ ٢ ⇐ ليس له معنى

لو$_{٤}$ ٠ ⇐ ليس له معنى

اللوغاريتم العشري هو لوغاريتم أساسه ١٠ ⇐ لا تكتب

مثلاً لو ٣ تكتب لو٣

عبر عن مما يأتي بالصورة اللوغاريتمية :-

① $٢^{٦} = ٦٤$ ⇐ الحل $لو_{٢} ٦٤ = ٦$

② $٢^{\frac{٧}{٢}} = ٨\sqrt{٢}$ ⇐ الحل $لو_{٢} ٨\sqrt{٢} = \frac{٧}{٢}$

③ $١٠^{-٢} = ٠,٠١$ ⇐ الحل $لو_{١٠} ٠,٠١ = -٢$

اكتب الصورة اللوغاريتمية

① $٣^{٣} = ٢٧ \Leftarrow لو_{٣} ٢٧ = ٣$

② $٢^{٥} = ٣٢ \Leftarrow لو_{٢} ٣٢ = ٥$

③ $(\frac{١}{٣})^{١٠} = ٢٤٣ \Leftarrow لو_{\frac{١}{٣}} ٢٤٣ = ١٠$

اوجد قيمة س :-

① $لو_{٢} ٦٤ = س$ ⇐ الحل

$٢^{س} = ٦٤ \Leftarrow ٢^{س} = ٢^{٦}$

∴ س = ٦

② $لو_{٦} ١ = س$

$٦^{س} = ١$ ∴ س = صفر

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

أوجد مجموعة الحل:

① لو ١٠٠٠ = س

الحل

$١٠^{س} = ١٠٠٠ \Leftarrow ١٠^{س} = \frac{١}{١٠٠٠}$

$١٠^{س} = \frac{١}{١٠^{٤}} \Leftarrow ١٠^{س} = ١٠^{-٤}$ ∴ س = -٤

② لو$_{٢}$ س = -٤

الحل

$٢^{-٤} = س$ ∴ $س = \frac{١}{١٦}$

③ لو$_{٩}$ $\sqrt[٤]{٨١}$ = س

الحل

$٩^{س} = \sqrt[٤]{٨١} \Leftarrow ٩^{س} = ٣^{\frac{١}{٤} \times ٤}$

$٣^{٢س} = ٣^{\frac{٩}{٤}}$ ∴ $٢س = \frac{٩}{٤}$ (÷٢)

$س = \frac{٩}{٤} \div ٢ = \frac{٩}{٨}$

④ لو$_{٣}$ $(٢س^{٢} - ٥) = ٠$

الحل

$٣^{٠} = ٢س^{٢} - ٥$

∴ $٢س^{٢} - ٥ = ١$

∴ $٢س^{٢} = ٦$ (÷٢)

$س = ٣$ ∴ $مج = \{٣\}$

⑤ لو$_{\frac{١}{٢}}$ س = -٣

الحل

$(\frac{١}{٢})^{-٣} = س$ ∴ $س = ٢^{٣} = ٨$

⑥ لو$_{٩}$ $\sqrt[٤]{٨١}$ = س

الحل

$٩^{س} = \sqrt[٤]{٨١} \Leftarrow ٩^{س} = ٣^{\frac{١}{٤} \times ٤}$

$٣^{٢س} = ٣^{\frac{٩}{٤}}$ ∴ $٢س = \frac{٩}{٤}$ (÷٢)

$س = \frac{٩}{٤} \div ٢ = \frac{٩}{٨}$

⑦ لو$_{س}$ ٨ = ٦

الحل

$س^{٦} = ٨$ ∴ $س = \pm \sqrt[٦]{٨}$

ولكن الأساس موجب

∴ $س = \sqrt[٦]{٨}$

⑧ لو$_{٣}$ $س^{٢}$ = ع

الحل

$٣^{ع} = س^{٢}$ ∴ $س^{٢} = ٨١$

∴ $س = \pm ٩$

مرفوض لأن الأساس لا يساوى ١

⑨ لو$_{٣}$ $(٢س^{٢} - ٥) = ٠$

الحل

$٣^{٠} = ٢س^{٢} - ٥$

∴ $٢س^{٢} - ٥ = ١$

∴ $٢س^{٢} = ٦$ (÷٢)

∴ $س^{٢} = ٣$ $مج = \{٣\}$

⑩ لو$_{٧}$ $س^{٢}$ = ٢س

الحل

$٧^{٢س} = س^{٢}$

∴ $س^{٢} - ٢س = ٠$

∴ $س(س - ٢) = ٠$

∴ $س = ٠$ ، $س = ٢$

مرفوض $مج = \{٢\}$

⑪ لو$_{٢}$ س = ٤

الحل

$٢^{٤} = س$ ∴ $س = ١٦$

⑫ لو$_{٥}$ س = ٢

الحل

$٥^{٢} = س$ ∴ $س = ٢٥$

$مج = \{١٢٥\}$

أستاذ / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

MR/ Lotfy Zahran
01115956226 - 01028089912

مستند / لطفي زهران
متخصص في الرياضيات والفيزياء
٠١١١٥٩٥٦٢٢٦

④ $ص = (ن+1)ن^{2}$

$ن = 0 \Rightarrow ص = 0$

$ن = -1 \Rightarrow ص = 0$

$ن = -2 \Rightarrow ص = -4$

$ن = -3 \Rightarrow ص = -6$

$ن = -4 \Rightarrow ص = -4$

$ن = -5 \Rightarrow ص = -1$

$ن = -6 \Rightarrow ص = 0$

⑤ $ص = ن^{3} + 6ن^{2} + 9ن$

$ن = 0 \Rightarrow ص = 0$

$ن = -1 \Rightarrow ص = -4$

$ن = -2 \Rightarrow ص = 0$

$ن = -3 \Rightarrow ص = 0$

$ن = -4 \Rightarrow ص = -4$

$ن = -5 \Rightarrow ص = -25$

$ن = -6 \Rightarrow ص = -54$

⑥ $ص = ن^{3} + 3ن^{2} + 3ن + 1$

$ن = 0 \Rightarrow ص = 1$

$ن = -1 \Rightarrow ص = 0$

$ن = -2 \Rightarrow ص = -1$

$ن = -3 \Rightarrow ص = -8$

$ن = -4 \Rightarrow ص = -27$

$ن = -5 \Rightarrow ص = -64$

$ن = -6 \Rightarrow ص = -125$

⑦ $ص = ن^{3} + 3ن^{2} - 4$

$ن = 0 \Rightarrow ص = -4$

$ن = -1 \Rightarrow ص = -6$

$ن = -2 \Rightarrow ص = -4$

$ن = -3 \Rightarrow ص = 0$

$ن = -4 \Rightarrow ص = 16$

$ن = -5 \Rightarrow ص = 46$

$ن = -6 \Rightarrow ص = 104$

⑧ $ص = ن^{3} - 3ن^{2} + 4$

$ن = 0 \Rightarrow ص = 4$

$ن = -1 \Rightarrow ص = 0$

$ن = -2 \Rightarrow ص = -16$

$ن = -3 \Rightarrow ص = -50$

$ن = -4 \Rightarrow ص = -112$

$ن = -5 \Rightarrow ص = -214$

$ن = -6 \Rightarrow ص = -364$

⑨ $ص = ن^{3} + 3ن^{2} + 3ن$

$ن = 0 \Rightarrow ص = 0$

$ن = -1 \Rightarrow ص = -1$

$ن = -2 \Rightarrow ص = -2$

$ن = -3 \Rightarrow ص = 0$

$ن = -4 \Rightarrow ص = 4$

$ن = -5 \Rightarrow ص = 10$

$ن = -6 \Rightarrow ص = 18$

⑩ $ص = ن^{3} + 6ن^{2} + 12ن + 8$

$ن = 0 \Rightarrow ص = 8$

$ن = -1 \Rightarrow ص = 1$

$ن = -2 \Rightarrow ص = 0$

$ن = -3 \Rightarrow ص = 1$

$ن = -4 \Rightarrow ص = 8$

$ن = -5 \Rightarrow ص = 27$

$ن = -6 \Rightarrow ص = 64$

⑪ $ص = ن^{3} + 3ن^{2} - 9ن - 5$

$ن = 0 \Rightarrow ص = -5$

$ن = -1 \Rightarrow ص = 0$

$ن = -2 \Rightarrow ص = 3$

$ن = -3 \Rightarrow ص = 4$

$ن = -4 \Rightarrow ص = 3$

$ن = -5 \Rightarrow ص = 0$

$ن = -6 \Rightarrow ص = -5$

⑫ $ص = ن^{3} + 3ن^{2} - 4$

$ن = 0 \Rightarrow ص = -4$

$ن = -1 \Rightarrow ص = -6$

$ن = -2 \Rightarrow ص = -4$

$ن = -3 \Rightarrow ص = 0$

$ن = -4 \Rightarrow ص = 16$

$ن = -5 \Rightarrow ص = 46$

$ن = -6 \Rightarrow ص = 104$

⑬ $ص = ن^{3} + 3ن^{2} + 3ن + 1$

$ن = 0 \Rightarrow ص = 1$

$ن = -1 \Rightarrow ص = 0$

$ن = -2 \Rightarrow ص = -1$

$ن = -3 \Rightarrow ص = -8$

$ن = -4 \Rightarrow ص = -27$

$ن = -5 \Rightarrow ص = -64$

$ن = -6 \Rightarrow ص = -125$

⑭ $ص = ن^{3} + 6ن^{2} + 12ن + 8$

$ن = 0 \Rightarrow ص = 8$

$ن = -1 \Rightarrow ص = 1$

$ن = -2 \Rightarrow ص = 0$

$ن = -3 \Rightarrow ص = 1$

$ن = -4 \Rightarrow ص = 8$

$ن = -5 \Rightarrow ص = 27$

$ن = -6 \Rightarrow ص = 64$

⑮ $ص = ن^{3} - 3ن^{2} + 4$

$ن = 0 \Rightarrow ص = 4$

$ن = -1 \Rightarrow ص = 0$

$ن = -2 \Rightarrow ص = -16$

$ن = -3 \Rightarrow ص = -50$

$ن = -4 \Rightarrow ص = -112$

$ن = -5 \Rightarrow ص = -214$

$ن = -6 \Rightarrow ص = -364$

⑯ $ص = ن^{3} + 3ن^{2} + 3ن$

$ن = 0 \Rightarrow ص = 0$

$ن = -1 \Rightarrow ص = -1$

$ن = -2 \Rightarrow ص = -2$

$ن = -3 \Rightarrow ص = 0$

$ن = -4 \Rightarrow ص = 4$

$ن = -5 \Rightarrow ص = 10$

$ن = -6 \Rightarrow ص = 18$

⑰ $ص = ن^{3} + 3ن^{2} - 9ن - 5$

$ن = 0 \Rightarrow ص = -5$

$ن = -1 \Rightarrow ص = 0$

$ن = -2 \Rightarrow ص = 3$

$ن = -3 \Rightarrow ص = 4$

$ن = -4 \Rightarrow ص = 3$

$ن = -5 \Rightarrow ص = 0$

$ن = -6 \Rightarrow ص = -5$

⑱ $ص = ن^{3} + 3ن^{2} - 4$

$ن = 0 \Rightarrow ص = -4$

$ن = -1 \Rightarrow ص = -6$

$ن = -2 \Rightarrow ص = -4$

$ن = -3 \Rightarrow ص = 0$

$ن = -4 \Rightarrow ص = 16$

$ن = -5 \Rightarrow ص = 46$

$ن = -6 \Rightarrow ص = 104$

⑲ $ص = ن^{3} + 3ن^{2} + 3ن + 1$

$ن = 0 \Rightarrow ص = 1$

$ن = -1 \Rightarrow ص = 0$

$ن = -2 \Rightarrow ص = -1$

$ن = -3 \Rightarrow ص = -8$

$ن = -4 \Rightarrow ص = -27$

$ن = -5 \Rightarrow ص = -64$

$ن = -6 \Rightarrow ص = -125$

⑳ $ص = ن^{3} + 6ن^{2} + 12ن + 8$

$ن = 0 \Rightarrow ص = 8$

$ن = -1 \Rightarrow ص = 1$

$ن = -2 \Rightarrow ص = 0$

$ن = -3 \Rightarrow ص = 1$

$ن = -4 \Rightarrow ص = 8$

$ن = -5 \Rightarrow ص = 27$

$ن = -6 \Rightarrow ص = 64$

عين مجال الدوال الآتية

① د(س) = لو٣ (س٢ + ١)

الحل

س٢ + ١ > ٠ ⇐ س٢ > -١

∴ س > -١/٢ ∴ المجال =]-١/٢ ، ∞[

② د(س) = ٢ لو س

الحل

س > ٠ ∴ المجال =]٠ ، ∞[

③ د(س) = لو س

الحل

س > ٠ ، س ≠ ١ ، ٦

المجال =]٠ ، ∞[- {١}

④ د(س) = لو٤ (٣ - س)(س + ١)

(٣ - س)(س + ١) > ٠

س = ٣ ، س = -١

مثل	مخالف	مثل
----	-١ ++++ ٣	----

د(س) موجبة]-١ ، ٣[

∴ مجال الدالة =]-١ ، ٣[

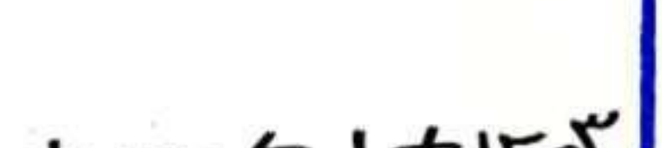
⑤ د(س) = لو س / لو (٣ - س)

الحل

س > ٠ ←]٠ ، ∞[

٣ - س > ٠ ← ٣ > س ←]-∞ ، ٣[

س ≠ ١ ← ٣ - س ≠ ١ ← س ≠ ٢



المجال =]-∞ ، ٣[- {٢}

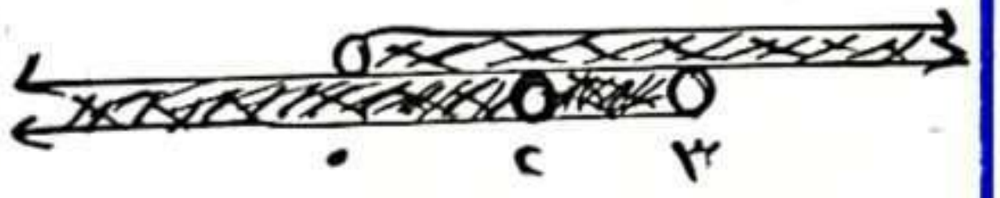
⑥ د(س) = لو س / لو (س - ٣)

الحل

س > ٠ ←]٠ ، ∞[

س - ٣ > ٠ ← س > ٣ ←]٣ ، ∞[

س - ٣ ≠ ١ ← س ≠ ٤



المجال =]٣ ، ∞[- {٤}

⑦ د(س) = لو٤ (س - ٣)(س + ١)

(س - ٣)(س + ١) > ٠

س = ٣ ، س = -١

مثل	مخالف	مثل
----	-١ ++++ ٣	----

د(س) موجبة]-١ ، ٣[

∴ مجال الدالة =]-١ ، ٣[

⑧ لو س / لو (س - ٢)

الحل

س > ٠ ←]٠ ، ∞[

س - ٢ > ٠ ⇐ س > ٢ ⇐]٢ ، ∞[

س - ٢ ≠ ١ ⇐ س ≠ ٣

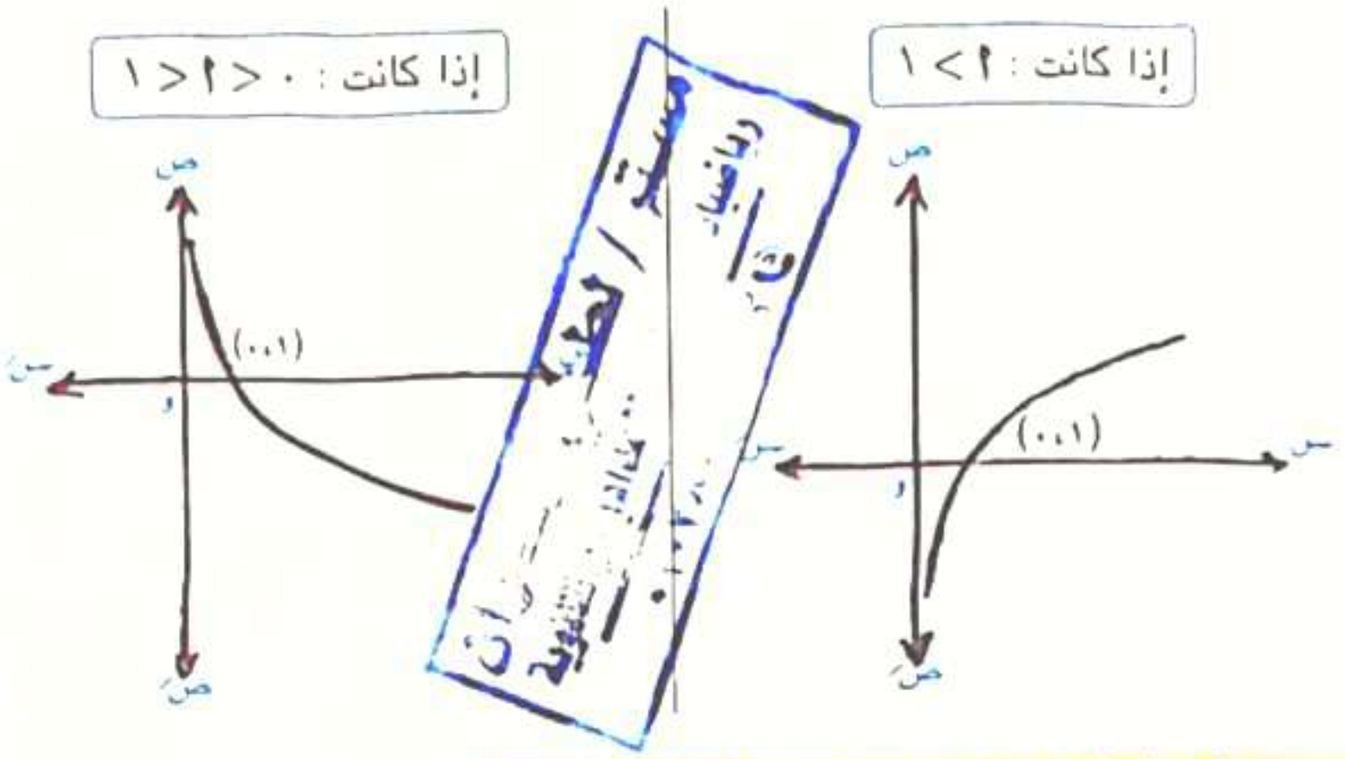
المجال =]٢ ، ∞[- {٣}

مستر / لطفي زهران
رياضيات الثانوية العامة والتكنولوجيا
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

التمثيل البيانى للدالة اللوغاريتمية د : د(س) = لو$_{أ}$ س

• الشكل البيانى للدالة اللوغاريتمية يأخذ أحد الشكلين الآتيين حسب قيمة الأساس أ :



بعض خواص الدالة اللوغاريتمية د : د (س) = لو$_{أ}$ س

١ مجال الدالة اللوغاريتمية = ح$^{+}$

٢ مدى الدالة اللوغاريتمية = ح

٣ الدالة اللوغاريتمية تزايدية عندما أ > ١ وتناقصية عندما ٠ < أ < ١

٤ جميع منحنيات الدوال اللوغاريتمية لأى أساس موجب ≠ ١ تمر بالنقطة (١ ، ٠)

٥ الدالة اللوغاريتمية هى دالة أحادية أى أنه إذا كان لو$_{أ}$ س = لو$_{أ}$ ص فإن س = ص

مثال هام :

إذا كان منحنى الدالة د(س) = لو$_{أ}$ س يمر بالنقطة (٣٢٧ ، ٣) أوجد أ

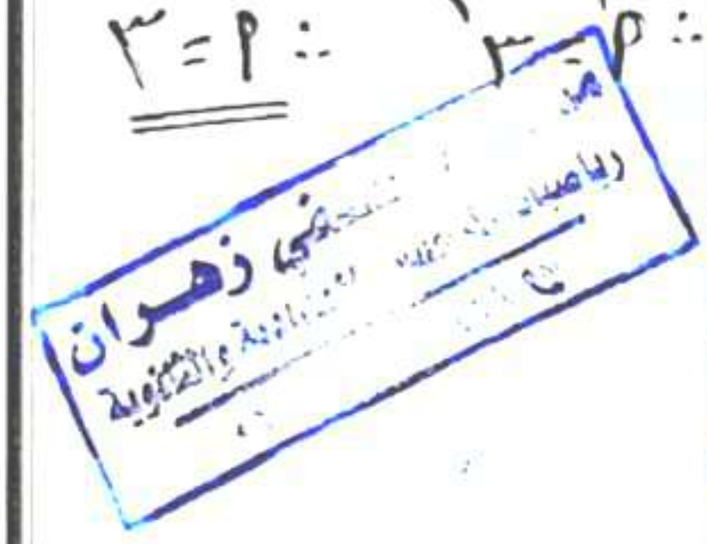
الحل

منحنى الدالة ∈ (٣٢٧ ، ٣)

∴ ص = لو$_{أ}$ س

٣ = لو$_{أ}$ ٢٧ ∴ أ^{٣} = ٢٧

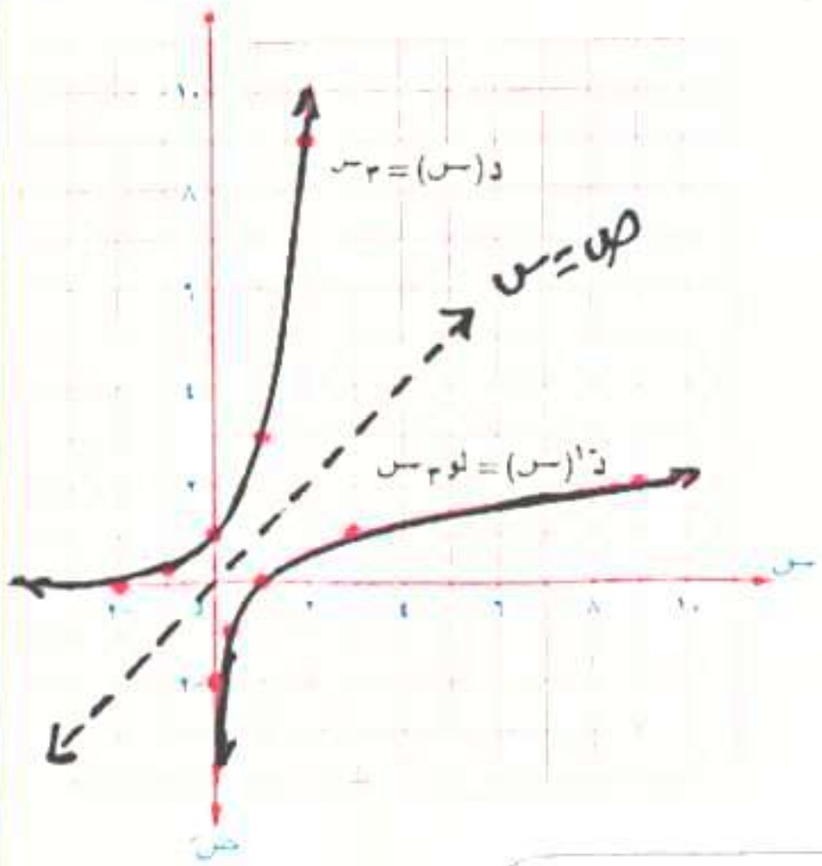
∴ أ^{٣} = ٣^{٣} ∴ أ = ٣



العلاقة بين الدالة الاسية والدالة اللوغاريتمية

لو عندك دالة أسية : د(س) = ٣^{س} وبتبديل المتغيرين تحصل على الدالة العكسية س = ٣^{ص} وهى تكافئ الدالة اللوغاريتمية ص = لو$_{٣}$ س

∴ د$^{-١}$(س) = لو$_{٣}$ س ∴ الدالة الاسية هى الدالة العكسية للدالة اللوغاريتمية



* من خواص الدالة العكسية والشكل المقابل نلاحظ أن : منحنيى الدالتين متماثلان حول المستقيم ص = س ، مجال الدالة الأسية هو ح والمدى =]٠ ، ∞[، مجال الدالة اللوغاريتمية هو]٠ ، ∞[والمدى = ح

أى أن

الدالة اللوغاريتمية هى الدالة العكسية للدالة الأسية.

منحنى الدالة د(س) = لو$_{أ}$ س يمر بالنقطة (٤٦ $\frac{١}{١٦}$) أوجد أ

الحل

٤ = لو$_{أ}$ $\frac{١}{١٦}$

∴ أ^{٤} = $\frac{١}{١٦}$

أ^{٤} = ± $\frac{١}{٢}$ (أكل أ لا يمكن أن تكون سالبة)

∴ أ = $\frac{١}{٢}$

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

استخدم منحنى الدالة : د(س) = لو٣ س لتمثيل كل من الدوال الآتية بيانيا ثم عين من الرسم حدد مجال ومدى واطراد كل دالة

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

الرسم حدد مجال ومدى واطراد كل دالة :

١ ر (س) = لو٣ س + ٢

٢ ق (س) = لو٣ (س - ١)

٣ ك (س) = - لو٣ س

٤ ت (س) = لو٣ (- س)

• الحل

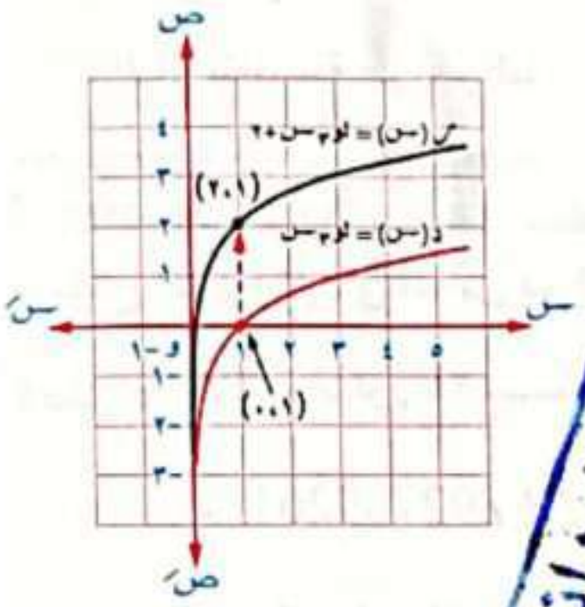
١ منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة رأسية قدرها ٢ وحدة فى اتجاه $\overleftarrow{وص}$

، المجال =]٠ ، ∞[

، المدى = ح

، الدالة تزايدية على مجالها.

لو٣ س + ٢
هتطلع لفوق وحدة



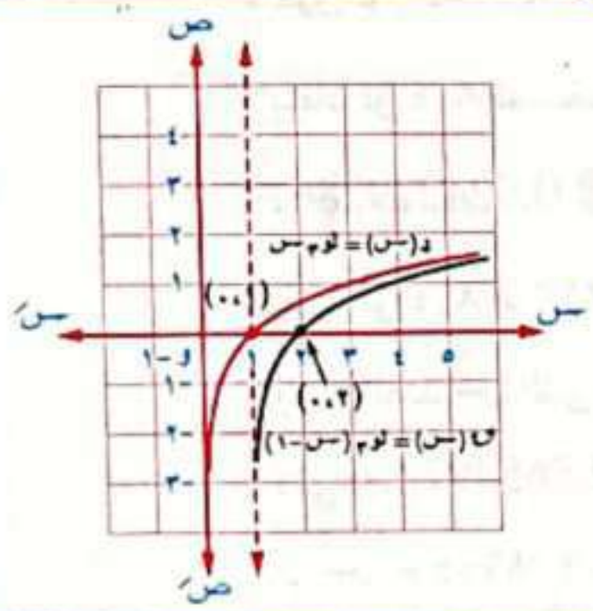
٢ منحنى الدالة ق هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة أفقية قدرها وحدة واحدة فى اتجاه $\overleftarrow{وس}$

، المجال =]١ ، ∞[

، المدى = ح

، الدالة تزايدية على مجالها.

لو٣ (س - ١)
هتروح تعين وحدة
(هنا عكس الإشارة)



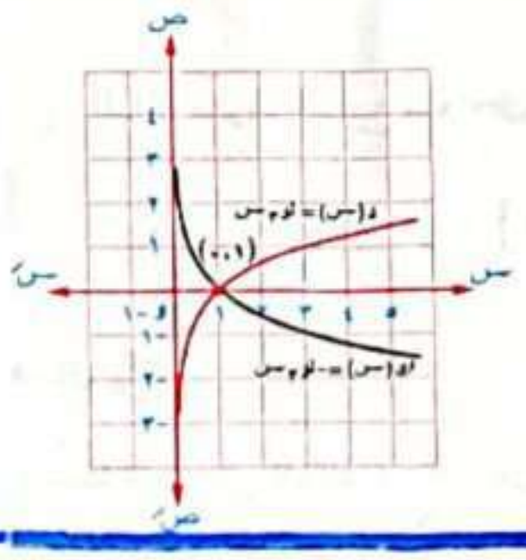
٣ منحنى الدالة ك هو نفس منحنى الدالة د بالانعكاس فى محور السينات

، المجال =]٠ ، ∞[

، المدى = ح

، الدالة تناقصية على مجالها.

- لو٣ س
انعكاس فى محور السينات
لاحظ الفرق بين
- لو٣ س ، لو٣ (- س)



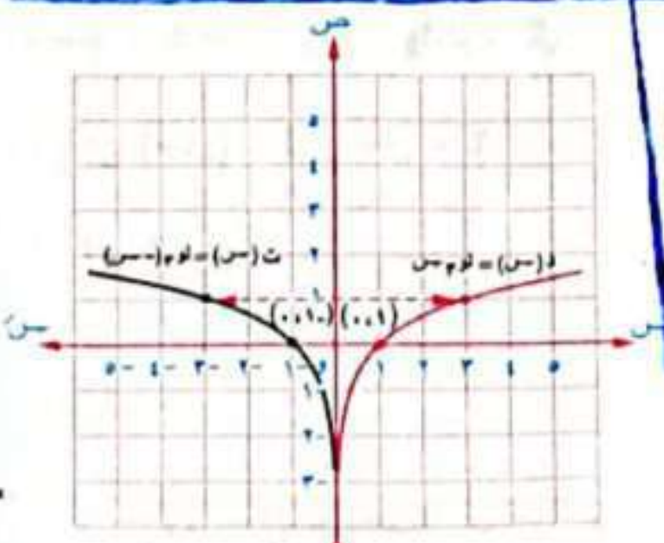
٤ منحنى الدالة ت هو نفس منحنى الدالة د بالانعكاس فى محور الصادات

، المجال =]- ∞ ، ٠[

، المدى = ح

، الدالة تناقصية على مجالها.

لو٣ (- س)
انعكاس فى محور الصادات



مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الواجب :-

① عبر بالصورة الأسية

ⓐ $\log_2 128 = 7$ ⓑ $\log_{\frac{1}{5}} 625 = -4$

② عبر بالصورة اللوغاريتمية

ⓐ $5^{صفر} = 1$ ⓑ $5^{-3} = \frac{1}{125}$

③ اوجد قيمة كل مما

ⓐ $\log_2 16$ ⓑ $\log_8 1$ ⓒ $\log_{\frac{1}{2}} 8$

ⓓ $\log_{10} 1000$ ⓔ $\log_{\frac{1}{2}} 128$

ⓕ $\log_{\sqrt{3}} 27$ ⓖ $\log_{\sqrt{2}} 4$

④ حل فى ح كلاً من :-

ⓐ $\log_2 س = 7$ ⓑ $\log_{\frac{1}{3}} س = -1$

ⓒ $\log_{\frac{1}{2}} س = \frac{3}{4}$ ⓓ $\log_3 س^2 = 4$

ⓔ $\log_3 (س^2 - 5س) = 0$ ⓕ $\log_2 س^{-1} = -5$

ⓖ $\log_7 \sqrt{س + 4} = \frac{1}{2}$ ⓗ $\log_{\frac{1}{2}} ق^{س} = -4$

ⓘ $\log_{12} |س + 1| = 1$

ⓙ $(\log_3 س)^2 - 9 \log_3 س + 20 = 0$

ⓚ $|\log_{10} س - 2| = 2$

ⓛ $\log_4 (س + 1,25) = \frac{1}{3}$

ⓜ $\log_2 س = \log_3 9$

ⓝ $\log_9 \log_3 \log_2 س = 0$

ⓞ $\log_2 64 = 3$

ⓟ $\log_{س+1} 27 = 3$

ⓠ $\log_3 (4 + \log_2 س) = 2$

ⓡ $\log_2 (س + 11) = 4$

⑤ اذا كان متحنى الدالة

د(س) = $\log_2$ س يمر بالنقطة $(\frac{1}{8}, ب)$

أوجد قيمة ب

الكمل :-

① متحنى الدالة

د(س) = $\log_2$ (3 - س) يقطع محور السينات فى النقطة .....

② اذا كان متحنى الدالة

ص = $\log_4$ (1 - ب س) يمر بالنقطة

$(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$ فإن ب = ...

③ متحنى الدالة د(س) = $\log_ب$ س

يمر بالنقطة (8، 3)

فإن د(4) = ...

مستر/ لطفى زهران
مدرس الرياضيات بالإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بعض خواص اللوغاريتمات

خاصيه ①

$$\log_{م} م = 1 \quad ; \quad م \in ح^+ - \{1\}$$

مثلاً: $\log_{٧} ٧ = ١$ ، $\log_{٥} ٥ = ١$

خاصيه ②

$$\log_{م} ١ = \text{صفر} \quad ; \quad م \in ح^+ - \{١\}$$

خاصيه ③

$$\log_{م}(س \times ص) = \log_{م} س + \log_{م} ص$$

$م \in ح^+ - \{١\}$ ، $س ، ص \in ح^+$

مثلاً:

$\log_{٣}(٥ \times ٢) = \log_{٣} ٢ + \log_{٣} ٥$

خلى بالك:

$\log_{م}(س + ص) \neq \log_{م} س + \log_{م} ص$

$\log_{م}(س \times ص) \neq \log_{م} س \times \log_{م} ص$

$\log_{٣}(٧ \times ٢ \times ٥) = \log_{٣} ٥ + \log_{٣} ٢ + \log_{٣} ٧$

خلى بالك

$\log_{م}(س - ص) \neq \log_{م} س - \log_{م} ص$

$\log_{م} س + \log_{م} ص - \log_{م} ع = \log_{م} \frac{س ص}{ع}$

خاصيه ④

$$\log_{م} \frac{س}{ص} = \log_{م} س - \log_{م} ص$$

$م \in ح^+ - \{١\}$ ، $س ، ص \in ح^+$ حيث $س > ص$

مثلاً:

$\log_{٥} \frac{٣}{٤} = \log_{٥} ٣ - \log_{٥} ٤$

خلى بالك:

$\log_{م} \frac{س}{ص} \neq \log_{م} س \div \log_{م} ص$

$\log_{م}(س - ص) \neq \log_{م} س - \log_{م} ص$

خاصيه ⑤

$$\log_{م} س^{ن} = ن \log_{م} س$$

$م \in ح^+ - \{١\}$ ، $س \in ح^+$ ، $ن \in ح$

مثلاً:-

$\log_{٥} ٣^{٣} = ٣ \log_{٥} ٣$

$\log_{٥} ٢^{٧} = ٧ \log_{٥} ٢$

$\log_{م} س^{٦} = ٦ \log_{م} |س|$

لو كان الأس زوجى ← لازم فيه مطلقة وكان فيه مجهول

مستر / لطفى زهران
رياضيات الوحشين الاعدادية

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

خاصية ⑥

$$\log_{ص} س = \frac{\log_{م} س}{\log_{م} ص}$$

س ∈ ح+ ، ص ∈ ح+ - {1} ، م ∈ ح+ - {1}

مثلاً:

$\log_{3} 7 = \frac{\log_{5} 7}{\log_{5} 3}$ ، $\log_{7} 2 = \frac{\log_{3} 2}{\log_{3} 7}$

$\log_{3} 5 \times \log_{5} 3 = \frac{\log_{3} 5}{\log_{3} 3} \times \frac{\log_{5} 3}{\log_{5} 5} = 1$

لستخدم الخاصية دى امتى؟؟

لما يكون عندى لو × لو

خاصية ⑦ المعكوس المقلوب

$$\log_{ص} س = \frac{1}{\log_{س} ص}$$

س ، ص ∈ ح+ - {1}

مثلاً: $\log_{5} 2 = \frac{1}{\log_{2} 5}$

امثلة:

① بدون استخدام الحاسبة اوجد قيمة ما يأتى

① $\log 2 + \log 5 = \log(2 \times 5)$

$= \log 10 = 1$

② $\log 10 - \log 2$

الحل

$= \log \frac{10}{2} = \log_{5} 5 = 1$

③ $\log_{5} 5 \times \log_{2} 2$

الحل

$= \frac{\log 5}{\log 2} \times \frac{\log 2}{\log 5} = 1$

④ $\log_{3} 81 \times \log_{9} 3$

الحل

$= \frac{\log 81}{\log 3} \times \frac{\log 3}{\log 9} = \frac{\log 81}{\log 9}$

$= \frac{\log 9^{2}}{\log 9} = \frac{2 \log 9}{\log 9} = 2$

يارب تكلمه الخواص نفهمت

يلا بينا نحل بقا يا رجالة

عايزك أسد

Scanned with CamScanner

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

⑤ $\log_3 10 + \log_3 6 - \log_3 10$

الحل

$\log_3 (6 \times 15) - \log_3 10 = \log_3 90 - \log_3 10$

$= \log_3 \frac{90}{10} = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2 \log_3 3$

$= 2 \times 1 = 2$

⑥ $\log_5 100 - 3\log_5 2 - \log_5 18 + \log_5 36$

الحل

$\log_5 100 + \log_5 36 - \log_5 2^3 - \log_5 18$

$\log_5 \frac{100 \times 36}{18 \times 2^3} = \log_5 25 = \log_5 5^2$

$= 2 \log_5 5 = 2 \times 1 = 2$

⑦ $\log_2 7 \times \log_7 11 \times \log_{11} 9 \times \log_3 2$

الحل (خاصية ⑤)

$= \frac{\log 7}{\log 2} \times \frac{\log 11}{\log 7} \times \frac{\log 9}{\log 11} \times \frac{\log 2}{\log 3}$

$= \frac{\log 9}{\log 3} = \frac{\log 3^2}{\log 3} = \frac{2 \log 3}{\log 3} = 2$

⑧ $\frac{\log_3 243 - \log_3 27}{\log_2 8 - \log_2 4}$

الحل

$= \frac{\log_3 3^5 - \log_3 3^3}{\log_2 2^3 - \log_2 2^2}$

$= \frac{5 \log_3 3 - 3 \log_3 3}{3 \log_2 2 - 2 \log_2 2} = \frac{5(\log_3 3 - \log_3 3)}{3(\log_2 2 - \log_2 2)}$

$= \frac{5}{3}$

⑨ $\log_2 25 + \frac{\log 8 \times \log 16}{\log 64}$

الحل

$\log_2 5^2 + \frac{\log 8 \times \log 4^2}{\log 8^2}$

$2 \log_2 5 + \frac{2 \log 8 \times 2 \log 4}{2 \log 8}$

$2 \log_2 5 + 2 \log_2 4$

$2 \log_2 5 + 2 \log_2 2^2$

$2 \log_2 5 + 2 \times 2 \log_2 2$

$2 \log_2 5 + 2 \log_2 2$

$= 2 (\log_2 5 + \log_2 2)$

$= 2 (\log_2 (5 \times 2)) = 2 \log_2 10$

$= 2 \times 1 = 2$

مستر / لطفي زهـران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

أوجد فيه س :-

① $٥^{س} = ١٧$

الحل بأخذ لو للطرفين

$لو ٥^{س} = لو ١٧$

$س لو ٥ = لو ١٧$

$س = \frac{لو ١٧}{لو ٥} \simeq ١,٧٦$ (بالآلة)

خذ رقمين عشريين دائماً

② $٢^{س-١} = ٧$ بأخذ لو للطرفين

الحل

$لو ٢^{س-١} = لو ٧$

$(س-١) لو ٢ = لو ٧$

$س لو ٢ - لو ٢ = لو ٧$

$س لو ٢ = لو ٧ + لو ٢$

$س = \frac{لو ٧ + لو ٢}{لو ٢} \simeq ٣,٨١$

③ $\frac{٤س-٣}{٥^{س+١}} = ٢$ بأخذ لو للطرفين

$لو ٥^{س+١} = لو ٢^{٤س-٣}$

$(س+١) لو ٥ = (٤س-٣) لو ٢$

$س لو ٥ + لو ٥ = ٤س لو ٢ - ٣ لو ٢$

$س لو ٥ - ٤س لو ٢ = -٣ لو ٢ - لو ٥$

$س (لو ٥ - ٤ لو ٢) = -٣ لو ٢ - لو ٥$

$س = \frac{-٣ لو ٢ - لو ٥}{لو ٥ - ٤ لو ٢} \simeq ٣,١٧$

④ $٣^{٢س} - ١٤ \times ٣^{س} + ٤٥ = ٠$

الحل

$(٣^{س} - ٩)(٣^{س} - ٥) = ٠$

$٣^{س} = ٩$	$٣^{س} = ٥$ بأخذ لو
$٣^{س} = ٣^{٢}$	$لو ٣^{س} = لو ٥$
$س = ٢$	$س لو ٣ = لو ٥$
	$س : \frac{لو ٥}{لو ٣} \simeq ١,٤٦$

⑤ $\frac{٥}{٢^{(١٠)}} = ٧$ بأخذ لو للطرفين

الحل

$لو \frac{٥}{٢^{(١٠)}} = لو ٧$

$لو ٥ - لو ٢^{١٠} = لو ٧$

$-لو ٢^{س} = لو ٧ - لو ٥$

$-٢س لو ٢ = لو ٧ - لو ٥$

$س = \frac{لو ٧ - لو ٥}{-٢ لو ٢} = -٧,٠$

أ/ لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

أوجد فى ح ميوس لكل :

① لو س - لو (س+٢) = ٠

الحل

لو س = لو (س+٢)

∴ س = س + ٢

س - س - ٢ = ٠

(س - ٢)(س + ١) = ٠

س = ٢ ، س = -١ مرفوض

∴ م.ح = {٢}

② لو س = لو ٥ / لو ٤

الحل

لو س / لو ٢ = لو ٢٥ / لو ٤

∴ لو س = لو ٢ × لو ٢٥ / لو ٤ = لو ٢ × لو ٥ / لو ٢^٢

= لو ٢ × ٢ لو ٥ / ٢ لو ٢ = لو ٥

∴ لو س = لو ٥

∴ س = ٥

③ لو س^٢ = لو ٤ + لو ٩

الحل

لو س^٢ = لو ٣٦

س^٢ = ٣٦

س = ± ٦ تحقق

∴ م.ح = {٦ ، -٦}

④ لو س^٢ = (لو س)^٢

الحل

(لو س)^٢ - ٢ لو س = ٠

لو س (لو س - ٢) = ٠

لو س = ٠ | لو س = ٢

س = ١٠^٠ | س = ١٠^٢

س = ١ | س = ١٠٠

مجموعة الحل = {١ ، ١٠٠}

⑤ لو س + لو (س - ٢) = ٣

الحل

لو (س (س - ٢)) = ٣

س (س - ٢) = ٣^٢

∴ س (س - ٢) = ٩

∴ س^٢ - ٢ س - ٨ = ٠

(س - ٤)(س + ٢) = ٠

س = ٤ ، س = -٢ مرفوض

∴ م.ح = {٤}

مستر / لطفى زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

⑥ $\log_{10} س - \log_{10} ص = 1$

الحل

$\log_{10} س - \log_{10} ص^{2} = 1$

$\log_{10} س - 2\log_{10} ص = 1$

$\log_{10} س - 2 \times \frac{\log_{10} ص}{\log_{10} 10} = 1$ (لاحظ $\log_{10} 10 = 1$)

$\log_{10} س - \frac{2}{\log_{10} س} = 1$ ($\times \log_{10} س$)

$(\log_{10} س)^{2} - 2 = \log_{10} ص$

$(\log_{10} س)^{2} - \log_{10} س - 2 = 0$

$(\log_{10} س - 2)(\log_{10} س + 1) = 0$

$\log_{10} س = 2$ | $\log_{10} س = -1$

$س = 10^{2} = 100$ | $س = 10^{-1} = \frac{1}{10}$

$\therefore$ م ح $= \{100, \frac{1}{10}\}$

⑦ $\log_{3} س + \log_{3} س^{2} = 3$

الحل

$\log_{3} س^{3} = 3$

$س^{3} = 3^{3}$ $\therefore$ $س = 3$

$\therefore$ م ح $= \{3\}$

⑧ $\log_{4} س = 1 - \log_{4}(س - 3)$

الحل

$\log_{4} س = \log_{4} 4 - \log_{4}(س - 3)$

$\log_{4} س = \log_{4} \frac{4}{س - 3}$

$\therefore س = \frac{4}{س - 3}$ (بالضرب)

$س^{2} - 3س = 4$

$س^{2} - 3س - 4 = 0$

$(س - 4)(س + 1) = 0$

$س = 4$ | $س = -1$

م ح $= \{4\}$

⑨ $\log_{\frac{3}{2}} س \times \log_{\frac{3}{2}} \frac{1}{س} = -1$

الحل

$\log_{\frac{3}{2}} س \times \log_{\frac{3}{2}} (\frac{3}{2})^{-1} = -1$

$\log_{\frac{3}{2}} س \times -\log_{\frac{3}{2}} (\frac{3}{2}) = -1$

$-(\log_{\frac{3}{2}} س)^{2} = -1$

$(\log_{\frac{3}{2}} س)^{2} = 1$

$\log_{\frac{3}{2}} س = 1$ | $\log_{\frac{3}{2}} س = -1$

$س = \frac{3}{2}$ | $س = (\frac{3}{2})^{-1} = \frac{2}{3}$

$\therefore$ م ح $= \{\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\}$

مستر/ لطفي زهران
رياضيات المرحلة الإعدادية والثانوية
٠١١١٥٩٥٦٢٢٦ - ٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الواجب:

يمون الحل سبه كراسه هيه

① لو٣ + لو٥٠

② لو١٥ - لو٣
٥ ٥

③ لو٣ × لو٤
٤ ٣

④ لو لو لو ٤
٤ ٤ ٢

⑤ ١ + لو٣ - لو٢ - لو١٥

⑥ لو ا + لو ب + لو جـ
ا ب جـ ا ب د ا جـ د

⑦ $\frac{1}{\text{لو}_{12}\ ٣} + \frac{1}{\text{لو}_{12}\ ٨} + \frac{1}{\text{لو}_{12}\ ٩}$

⑧ $\frac{\text{لو}_{٩}\ ٧٢٩ - \text{لو}_{٤}\ ٦٤}{\text{لو}\ ٩ - \text{لو}\ ٤}$

أوجد في ح مما يلي الحل:

① لو$_{٣}$(س + ٦) = ٢ لو$_{٣}$ س

② لو$_{٤}$ س + لو$_{٤}$(س + ٦) = ٣

③ لو$_{٣}$(س - ١) + لو$_{٣}$(س + ١) = لو$_{٣}$ ٨

④ لو(س + ٨) - لو(س - ١) = ١

⑤ لو$_{٥}$ س^{٢} + لو$_{٥}$ ٢ = لو$_{٥}$ ١٨

⑥ (لو س)^{٢} - لو س^{٢} = ٣

⑦ س$^{\text{لو س}}$ = ١٠

⑧ ٢$^{\text{لو ص}}$ × ٥$^{\text{لو س}}$ = ٨٠٠٠

⑨ لو$_{س}$ س + لو$_{س}$ ٢ = ٢

⑩ (لو س)^{٣} = لو س^{٩}

أوجد قيمة س

① ٥$^{\text{ص}}$ = ١٢

② ٣$^{\text{س}+٢}$ = ٦

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢٥

التفاضل

الدرس الاول :- مقدمة فى النهايات

الكمية المعينة :- هى الكميه التى لها ناتج معين ومحدد

مثل : $\frac{٥}{٤} = ١,٢٥$ ، $٥ \pm$ ، $\frac{٠}{٣}$ ، ٦×٢

الكميه غير المعينة :- هى الكميه التى ليس لها جواب محدد

وهم سبع كميات $\left(\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} ، \frac{\infty}{\infty} ، \infty - \infty ، \infty \times \text{صفر} ، (١)^{\infty} ، (\text{صفر})^{\text{صفر}} ، (\infty)^{\text{صفر}} \right)$

الكميه غير المعرفه :- هى الكميه التى ليس لها معنى :-

مثل $\frac{٣}{٠}$ ، $\frac{٥}{٠}$ ، $\frac{٧}{٠}$ ⇐ من الآخر $\frac{\text{م}}{\text{صفر}}$ حيث م ∈ ح - {٠} كميه غير معرفه

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢٥

مفهوم نهاية الدالة عند نقطة :-

د : د(س) = $\frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$ عند س = ١

فإننا نجد أن د(١) = $\frac{١^{٢} - ١}{١ - ١}$ = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ وهى كميه غير معينه

يعنى مش هقدر أعين قيمه الدالة عند س = ١

ولذلك ندرس اقتراب (س) من قيمة معينة كما

اقتربت س من العدد ١ (يعنى قبل الـ ١ على طول وبعد ١ على طول)

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تقدير النظرية عدديًا :-

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

لعين مثلاً هنعوض عن الـ س = ٩, ٩ هيطلع التالي ١,٩
أو هنعوض عن الـ س = ١,١ هيطلع التالي ٦١
لاحظ ان التالي اقرب جداً من ٢

لما عوضت بـ ١,١ د ى اسمها :-

$\lim_{س \to 1^+}$ د(س) = ٢ أو د(1^+) = ٢

لما عوضت بـ ٩, د ى اسمها :-

$\lim_{س \to آ}$ د(س) = ج أو د(آ) = ٢

وتقرأ نظاية الدالة عندما (س تؤول/تقترب آ) تساوى ٢

لاحظ أن :- د(1^+) = د(1^-) = ٢

∴ $\lim_{س \to 1}$ د(س) = ٢

سـ = جـ

واذا كان د(1^+) ≠ د(1^-)

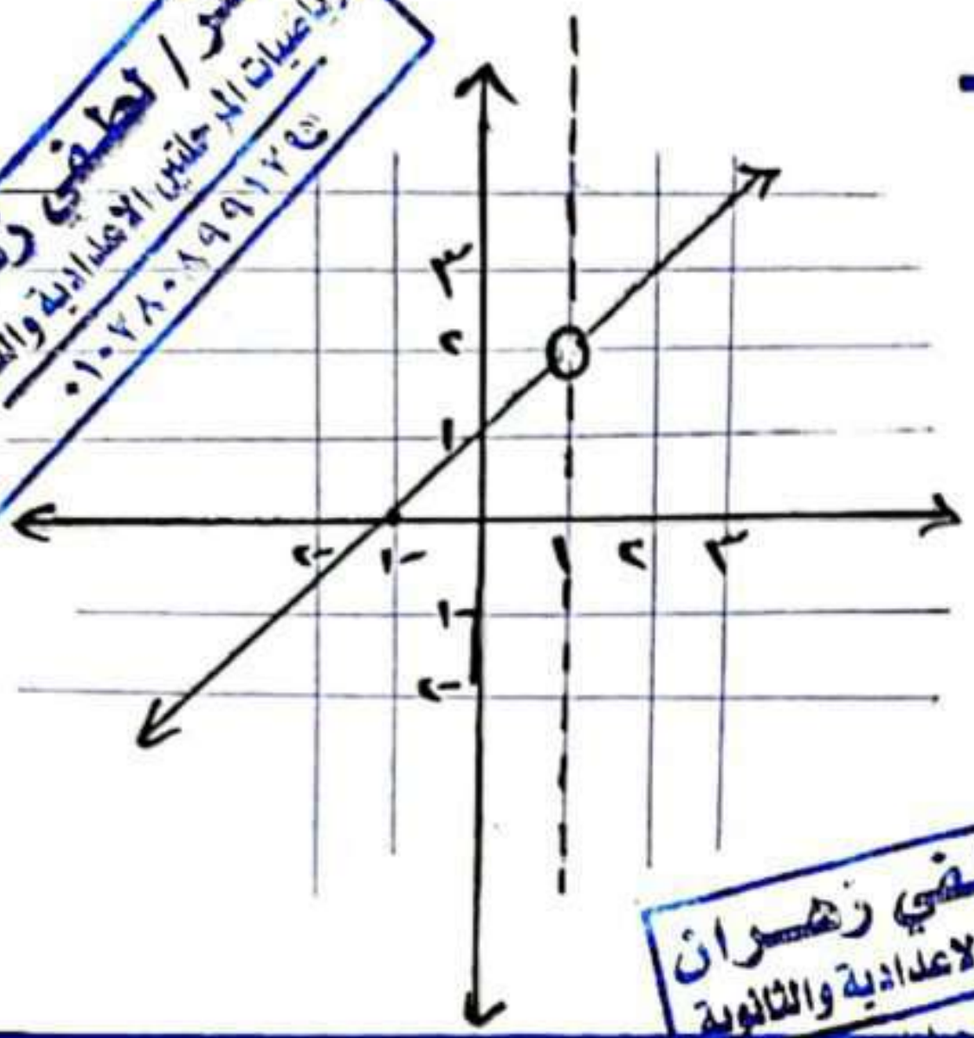
سـ ≠ جـ

∴ نظ د(س) غير موجودة
س ← ١

لما لا عمال تحب إلى الله :-
① الصلاة في وقتها ② بر الوالدين
③ الجهاد في سبيل الله

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تقدير النظاية بيانيا :-



مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢٥

نظا د(س)
س→١

الحل

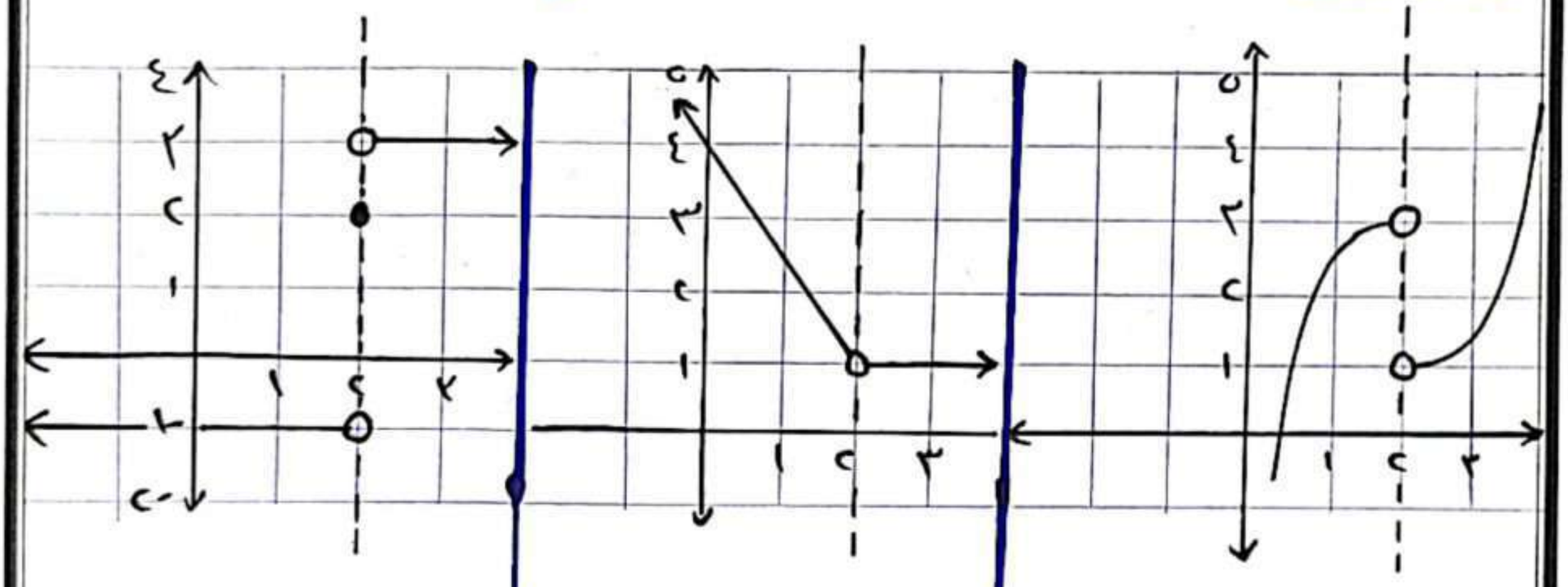
د(١⁺) = ٢ ، د(١⁻) = ٢

∴ د(١⁺) = د(١⁻)

∴ نظا د(س) = ٢
س→١

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢٥

مثال :-



د(س) غير معرفة	د(س) غير معرفة	د(س) = ٢
نظا د(س) = ١ س→٢⁺	نظا د(س) = ١ س→٢⁺	نظا د(س) = ٣ س→٢⁺
نظا د(س) = ٣ س→٢⁻	نظا د(س) = ١ س→٢⁻	نظا د(س) = -١ س→٢⁻
نظا د(س) غير موجودة س→٢ لأن د(٢⁺) ≠ د(٢⁻)	نظا د(س) = ١ س→٢ لأن د(٢⁺) = د(٢⁻)	نظا د(س) غير موجودة س→٢ لأن د(٢⁺) ≠ د(٢⁻)

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال

٢ الشكل المقابل يمثل الدالة

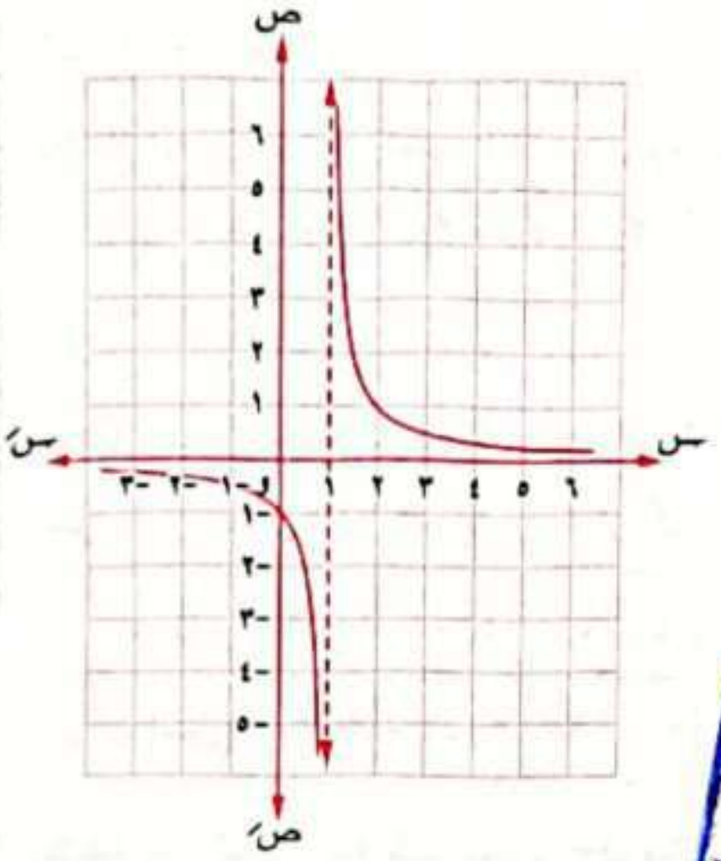
د : د (س) = $\frac{١}{س - ١}$

ونجد أن : د (١^{+}) = ∞

، د (١^{-}) = − ∞

∴ د (١^{+}) ≠ د (١^{-})

∴ نهـــا د (س) غير موجودة
س ← ١



مثال

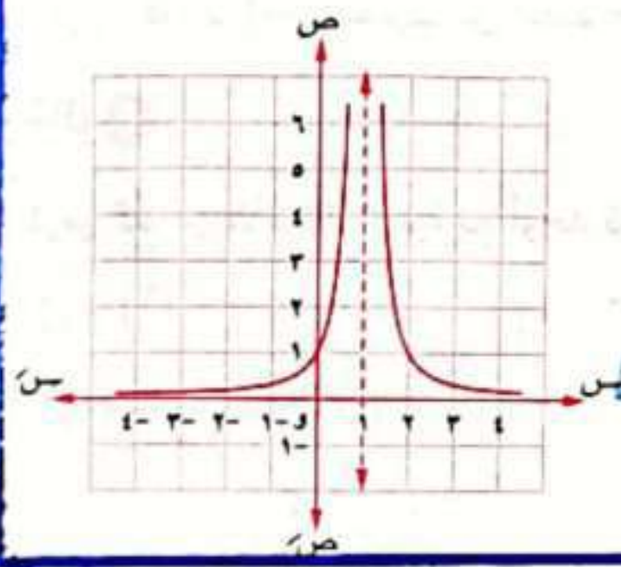
٣ الشكل المقابل يمثل الدالة

د : د (س) = $\frac{١}{(س - ١)^{٢}}$

ونجد أن : د (١^{+}) = ∞

، د (١^{-}) = ∞

، نهـــا د (س) = ∞
س ← ١



مستر / لطفي زهران
رياضيات البرهان الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

مثال

الشكل المقابل يمثل دائرة م

طول نصف قطرها ٥ سم ، $\overline{م حـ}$

، طول $\overline{م حـ}$ = س ، طول $\overline{أ ب}$ =

فإن : ص ← ..... سم

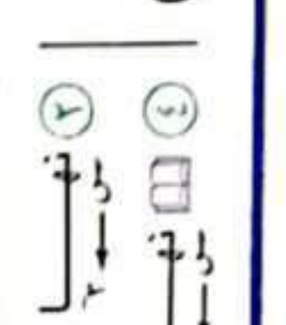
(أ) ٢،٥ (ب) ٥

$\overline{م حـ} \perp \overline{أ ب}$

عندما س ← ص عندما س ← .

∴ مجـ م ب قطع

(د) ٢٠ (ب) ١٠



الواجب :-

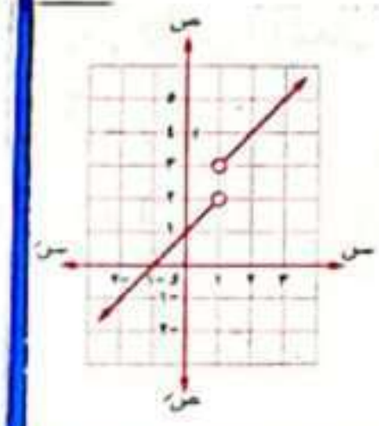
١ من الشكل المقابل أوجد :

① د (١)

② د (١^{+})

③ د (١^{-})

④ نهـــا د (س)
س ← ١



مستر / لطفي زهران
رياضيات البرهان الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

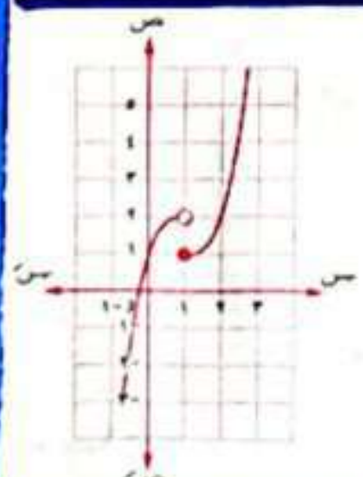
٢ ادرس الشكل المقابل ثم أوجد :

① د (١)

② د (١^{-})

③ د (١^{+})

④ نهـــا د (س)
س ← ١



٣ ادرس الشكل المقابل ثم أوجد :

① د (٠)

② د (٠^{-})

③ د (٠^{+})

④ نهـــا د (س)
س ← ٠

⑤ د (٢)

⑥ نهـــا د (س)
س ← ٢

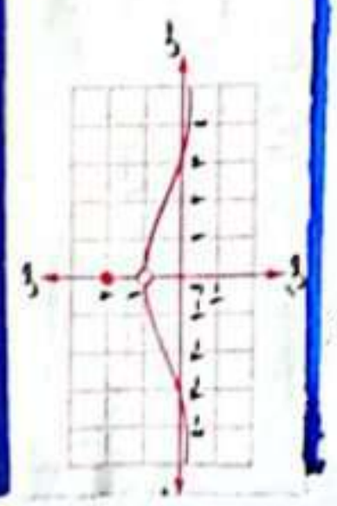
٤ من الشكل المقابل أوجد :

① د (٠)

② د (٠^{-})

③ د (٠^{+})

④ نهـــا د (س)
س ← ٠



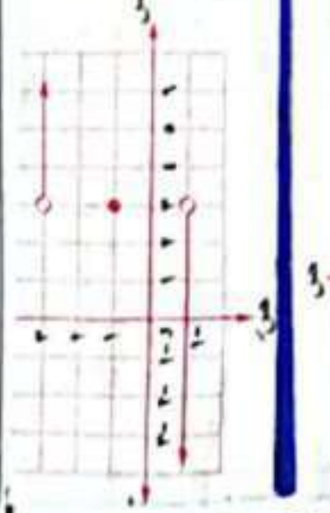
٥

① □ د (٣)

② نهـــا د (س)
س ← ٢

③ نهـــا د (س)
س ← ٢

④ □ نهـــا د (س)
س ← ٢



Scanned with CamScanner

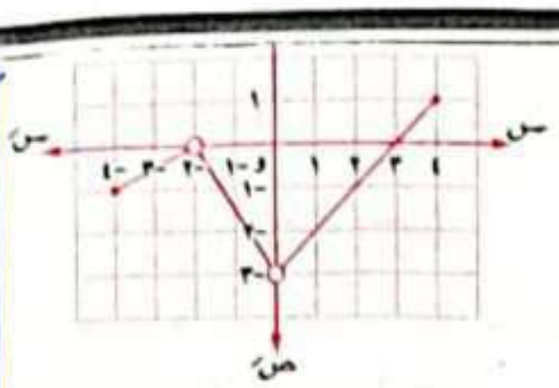
المسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٦ ① نهـــا د (س) = ...
س ← -٢

② نهـــا د (س) = ...
س ← ٠

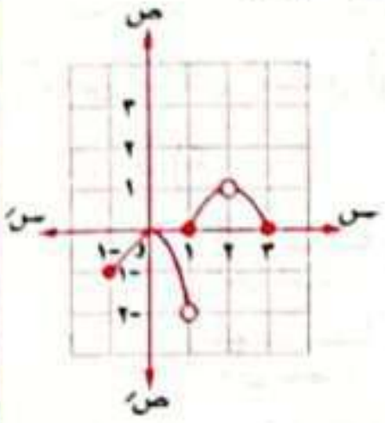
③ نهـــا د (س) = ...
س ← -٤

④ نهـــا د (س) = ...
س ← ٤



مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلة الثانوية والثانوية
٠١١١٥٩٥٦٢٢٦

٧ بالاستعانة بالشكل المقابل الذى يمثل منحنى الدالة د حيث د (س) أكمل ما يأتى :



① نهـــا د (س) = ...
س ← -١

② نهـــا د (س) = ...
س ← -١

③ نهـــا د (س) = ...
س ← ١

④ نهـــا د (س) = ...
س ← -١٠

⑤ نهـــا د (س) = ...
س ← -١

⑥ نهـــا د (س) = ...
س ← ٢

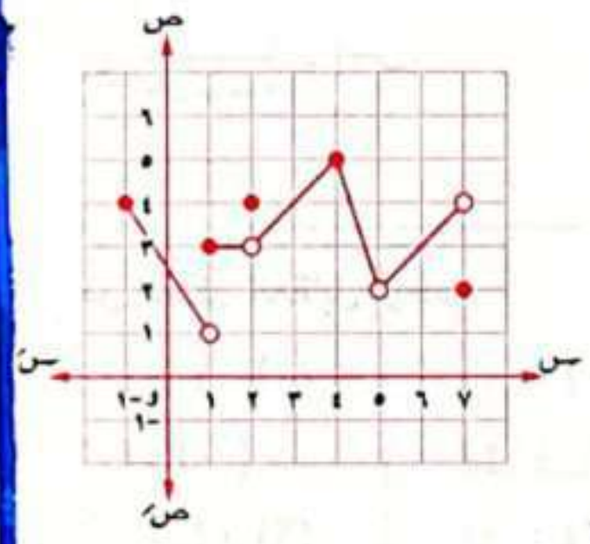
⑦ نهـــا د (س) = ...
س ← ٠

⑧ نهـــا د (س) = ...
س ← ٢٠

⑨ نهـــا د (س) = ...
س ← -٢

⑩ نهـــا د (س) = ...
س ← ٣

٨ بالاستعانة بالشكل المقابل أكمل ما يلى :



① نهـــا د (س) = ...
س ← -١٠

② نهـــا د (س) = ...
س ← -١

③ نهـــا د (س) = ...
س ← -١

④ د (-١) = ... ، د (٢) = ...
، د (٥) = ...

⑤ نهـــا د (س) = ...
س ← ٥-

⑥ نهـــا د (س) = ...
س ← ٥+

⑦ نهـــا د (س) = ...
س ← ٥

⑧ نهـــا د (س) = ...
س ← ١+

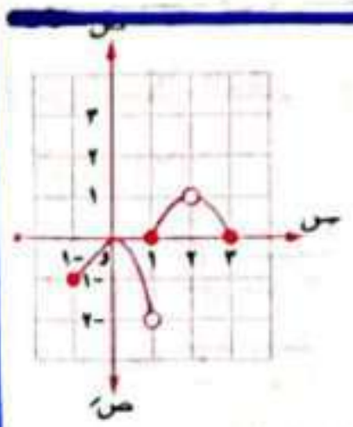
⑨ نهـــا د (س) = ...
س ← ١-

⑩ نهـــا د (س) = ...
س ← ١

⑪ نهـــا د (س) = ...
س ← ٧-

⑫ نهـــا د (س) = ...
س ← ٧

٩



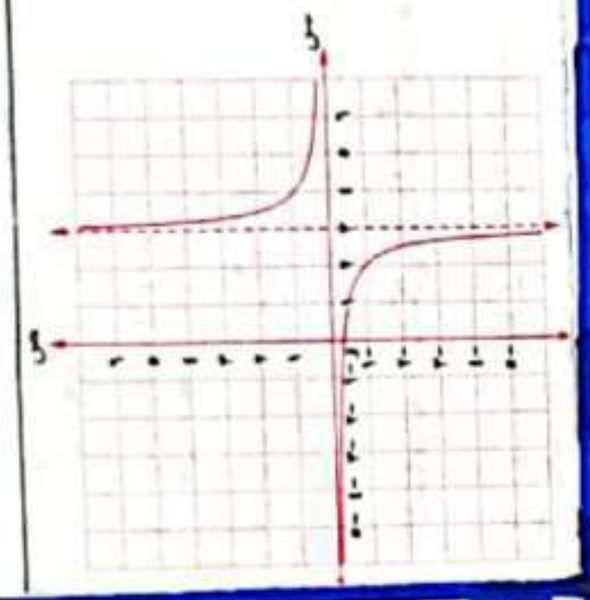
① نهـــا د (س) = ...
س ← ١+

② نهـــا د (س) = ...
س ← ١-

③ نهـــا د (س) = ...
س ← ١

④ نهـــا د (س) = ...
س ← -١+

١٠ من الشكل المقابل أوجد إن أمكن ما يلى :



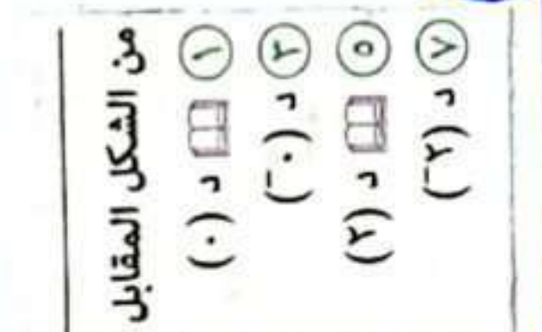
① د (٣)

② د (٣+)

③ د (٣-)

④ نهـــا د (س)
س ← ٢

١١



من الشكل المقابل أوجد :

① ☐ د (٠)

② د (٠+)

③ ☐ د (٠-)

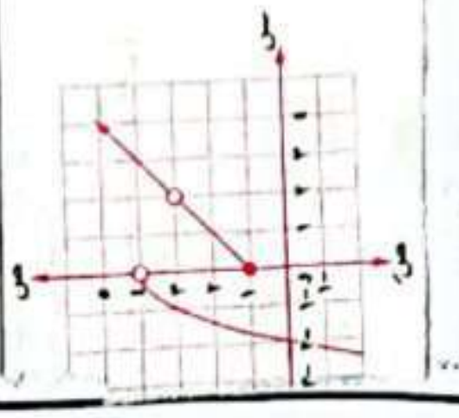
④ نهـــا د (س)
س ← ٠

⑤ ☐ د (٢)

⑥ د (٢+)

⑦ د (٢-)

⑧ ☐ نهـــا د (س)
س ← ٢



Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

إيجاد نهاية الدالة جبريًا

① الدالة كثيرة الحدود

$$\text{نهـا}_{س \to ٢} (٥ + ٣س + ٢س^{٢}) = د(٢) = ٥ + ٣ \times ٢ + ٢ \times ٢ = ٩$$

$$\text{نهـا}_{س \to ١} (٢ + ٣س - ٣س^{٢}) = د(١) = ٢ + ٣ - ٣ = \text{صفر}$$

تعويض مباشر

② الدالة النسبية

$$\text{نهـا}_{س \to ٤} ٧ = ٧$$

$$\text{نهـا}_{س \to ٣} ٤ = ٤$$

$$\text{نهـا}_{س \to ١} \frac{٥ + س}{٤ - س^{٢}} = د(١) = \frac{٥ + ١}{٤ - ١} = \frac{٦}{٣} = ٢$$

$$\text{نهـا}_{س \to ١} \frac{س - ٣}{س} = د(١) = \frac{١ - ٣}{١} = \frac{-٢}{١} = -٢$$

③ دالة كسرية مقاومها ≠ صفر عند التعويض

تعويض مباشر

$$\text{نهـا}_{س \to ٤} \frac{س^{٢} - ١٦}{س - ٤}$$

الحل

$$د(٤) = \frac{١٦ - ١٦}{٤ - ٤} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$ كمية غير معينة

$$\therefore \text{نهـا}_{س \to ٤} \frac{(س + ٤)(س - ٤)}{س - ٤}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٤} (س + ٤) = ٤ + ٤ = ٨$$

④ دالة كسرية مقاومها = صفر عند التعويض

$$\text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{س^{٣} - ٨}{س^{٢} - ٤س + ٦}$$

$$د(٢) = \frac{٨ - ٨}{٤ - ٨ + ٦} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$ كمية غير معينة

$$\therefore \text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س^{٢} + ٢س + ٤)}{(س - ٢)(س - ٣)}$$

$$\therefore \text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{س^{٢} + ٢س + ٤}{س - ٣} = \frac{٤ + ٤ + ٤}{٣ - ٢}$$

$$= \frac{١٢}{-١} = -١٢$$

اللهم لك الحمد ولك الشكر ... الحمد لله

مستشار / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

③ $\lim_{س \to ٥} \frac{س^٢ - ٢٥}{س - ٥}$

الحل

$د(٥) = \frac{٢٥ - ٢٥}{٥ - ٥} = \frac{صفر}{صفر}$ كمية غير معينة

$\therefore \lim_{س \to ٥} \frac{(س - ٥)(س + ٥)}{س - ٥}$

$= \lim_{س \to ٥} س + ٥ = ٥ + ٥ = ١٠$

④ $\lim_{س \to ٤} \frac{س - ٤}{س^٣ - ٦٤}$

$د(٤) = \frac{٤ - ٤}{٦٤ - ٦٤} = \frac{صفر}{صفر}$ كمية غير معينة

$\therefore \lim_{س \to ٤} \frac{س - ٤}{(س - ٤)(س^٢ + ٤س + ١٦)}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{١}{س^٢ + ٤س + ١٦} = \frac{١}{٤ + ١٦ + ١٦} = \frac{١}{٣٦}$

⑤ $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ - ٥س + ٤}{س^٣ - ١}$

$د(١) = \frac{١ - ٥ + ٤}{١ - ١} = \frac{صفر}{صفر}$ كمية غير معينة

$\therefore \lim_{س \to ١} \frac{(س - ١)(س - ٤)}{(س - ١)(س^٢ + س + ١)}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{س - ٤}{س^٢ + س + ١} = \frac{-٣}{٣} = -١$

⑥ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ - ٨}{س^٣ - ٣س^٢ - ١٢}$

$د(٢) = \frac{٨ - ٨}{٨ - ١٢ - ١٢} = \frac{صفر}{صفر}$ كمية غير معينة

$\therefore \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٤)}{(س - ٤)(س + ٣)}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ + ٢س + ٤}{س + ٣} = \frac{٤ + ٤ + ٤}{٥} = \frac{١٢}{٥} = ١$

⑦ $\lim_{س \to ٠} \frac{(س + ٢)^٣ - ٨}{س^٢ + ٤س}$

$د(٠) = \frac{(٠ + ٢)^٣ - ٨}{٠ + ٠} = \frac{٠}{٠}$ كمية غير معينة

$\therefore \lim_{س \to ٠} \frac{[(س + ٢)^٣ - ٢^٣]}{س^٢ + ٤س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{(س + ٤)(س^٢ + ٤س + ٤)}{س(س + ٤)} = \frac{٤ + ٠ + ٤}{١ + ٠} = [٤]$

⑧ $\lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{|س - ٢|}$

$د(٢) = \frac{٢ - ٢}{|٢ - ٢|} = \frac{٠}{٠}$ كمية غير معينة

$\therefore \lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{|س - ٢|}$

$\lim_{س \to ٢^+} \frac{س - ٢}{س - ٢} = ١$

$\lim_{س \to ٢^-} \frac{س - ٢}{-(س - ٢)} = -١$

$\therefore$ النهاية غير موجودة

⑨ $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ - ٥س + ٤}{س^٣ - ١}$

$د(١) = \frac{١ - ٥ + ٤}{١ - ١} = \frac{صفر}{صفر}$ كمية غير معينة

$\therefore \lim_{س \to ١} \frac{(س - ١)(س - ٤)}{(س - ١)(س^٢ + س + ١)}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{س - ٤}{س^٢ + س + ١} = \frac{-٣}{٣} = -١$

⑩ $\lim_{س \to ٤} \frac{س^٣ - ٦٤}{س^٢ - ١٦}$

$د(٤) = \frac{٦٤ - ٦٤}{١٦ - ١٦} = \frac{صفر}{صفر}$ كمية غير معينة

$\therefore \lim_{س \to ٤} \frac{(س - ٤)(س^٢ + ٤س + ١٦)}{(س - ٤)(س + ٤)}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{س^٢ + ٤س + ١٦}{س + ٤} = \frac{١٦ + ١٦ + ١٦}{٨} = \frac{٤٨}{٨} = ٦$

⑪ $\lim_{س \to ٠} \frac{(س + ٢)^٢ - ٤}{س^٢ + ٤س}$

$د(٠) = \frac{(٠ + ٢)^٢ - ٤}{٠ + ٠} = \frac{٠}{٠}$ كمية غير معينة

$\therefore \lim_{س \to ٠} \frac{[(س + ٢)^٢ - ٢^٢]}{س^٢ + ٤س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{(س + ٤)(س + ٠)}{س(س + ٤)} = \frac{٤ + ٠}{١ + ٠} = [٤]$

⑫ $\lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{٢س^٢ - ٥س + ٢}{١ - س^٢}$

$د(\frac{١}{٢}) = \frac{٢ \times (\frac{١}{٢})^٢ - ٥ \times \frac{١}{٢} + ٢}{١ - (\frac{١}{٢})^٢} = \frac{صفر}{صفر}$ كمية غير معينة

$\therefore \lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{(٢س - ١)(س - ٢)}{(١ - س)(١ + س)}$

$= \lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{(٢س - ١)(س - ٢)}{(١ - س)(١ + س)}$

$= \frac{٠ \times (-\frac{٣}{٢})}{\frac{١}{٢} \times \frac{٣}{٢}} = ٠$

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
01115956226 - 01028089912
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

نوع جديد مسائل

(٨) نهـ$_{س\to 0}$ $\dfrac{\frac{1}{س+2}-\frac{1}{2}}{س}$

الحل

$د(0)=\dfrac{\frac{1}{0+2}-\frac{1}{2}}{0}=$ صفر على صفر معنى كده مش عارف

$\therefore$ نهـ$_{س\to 0}$ $\dfrac{\frac{2-(س+2)}{2(س+2)}}{س}$

$=$ نهـ$_{س\to 0}$ $\dfrac{-س}{2س(س+2)}$

$=$ نهـ$_{س\to 0}$ $\dfrac{-1}{2(س+2)}=\dfrac{-1}{2(0+2)}=\dfrac{-1}{4}$

(٩) نهـ$_{س\to 1-}$ $\left(\dfrac{2س}{س^2-1}-\dfrac{3س+4}{س^2-1}\right)$

$د(-1)=\dfrac{2}{1-1}-\dfrac{-3+4}{1-1}=$ صفر على صفر

$\therefore$ نهـ$_{س\to 1-}$ $\dfrac{2س-3س-4}{س^2-1}$

$=$ نهـ$_{س\to 1-}$ $\dfrac{(س-4)(س+1)}{(س-1)(س+1)}$

$=$ نهـ$_{س\to 1-}$ $\dfrac{س-4}{س-1}=\dfrac{-1-4}{-1-1}=\dfrac{-5}{-2}$

$=\dfrac{5}{2}$

(١٠) نهـ$_{س\to 4}$ $\dfrac{س^3-10س-4}{س-4}$

$د(4)=\dfrac{4^3-10\times 4-4}{4-4}=$ صفر على صفر معنى كده مش عارف

$\therefore$ نهـ$_{س\to 4}$ $\dfrac{س^3-10س-4}{س-4}$

$=$ نهـ$_{س\to 4}$ $\dfrac{(س-س_1)(س^2+4س+1)}{س-4}$

$=$ نهـ$_{س\to 4}$ $س^2+4س+1=16+16+1$

$=33$

ازاى حللت البط :-

عملت طريقه القسمه الترکيبيه
كده كده انت عارف ان البط
لازم يكون عنده $س-4$

1	0	-15	-4
	4	16	4
1	4	1	0

المقدار الثانى $\leftarrow س^2+4س+1$

لازم حد يشرحها .. هعب تقولها
لو صدك .. اسمعها على القناة

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
01028089912 ، 01115956226

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(١١) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٣ - ٢س + ١}{س^٢ + س - ٢}$

$= \frac{١ - ٢ + ١}{١ + ١ - ٢} = \frac{٠}{٠}$ صفر على صفر كمية غير معينة

$\therefore \lim_{س \to ١} \frac{س^٣ - ٢س + ١}{س^٢ + س - ٢}$ نهاية مقدار نسبي

$= \lim_{س \to ١} \frac{(س - ١)(س^٢ + س - ١)}{(س - ١)(س + ٢)}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{س^٢ + س - ١}{س + ٢} = \frac{١ + ١ - ١}{٣} = \frac{١}{٣}$

(١٢) $\lim_{س \to -٢} \frac{س^٣ + ٣س^٢ - ٨س - ١٢}{س^٣ + ٤س^٢ + ٤س}$

$د(-٢) = \frac{(-٢)^٣ + ٣(-٢)^٢ - ٨(-٢) - ١٢}{(-٢)^٣ + ٤(-٢)^٢ + ٤(-٢)} = \frac{-٨ + ١٢ + ١٦ - ١٢}{-٨ + ١٦ - ٨} = \frac{٠}{٠}$ صفر على صفر كمية غير معينة

$\therefore \lim_{س \to -٢} \frac{س^٣ + ٣س^٢ - ٨س - ١٢}{س^٣ + ٤س^٢ + ٤س}$ نهاية مقدار نسبي

$= \lim_{س \to -٢} \frac{(س + ٢)(س^٢ + س - ٦)}{(س + ٢)(س^٢ + ٢س)}$ تحليل تركيبية

$= \lim_{س \to -٢} \frac{س^٢ + س - ٦}{س^٢ + ٢س}$

$= \frac{٤ - ٢ - ٦}{٤ - ٤} = \frac{-٤}{٠}$ عدد على صفر كمية غير معينة

$\therefore \lim_{س \to -٢} \frac{س^٣ + ٣س^٢ - ٨س - ١٢}{س^٣ + ٤س^٢ + ٤س} = \infty$

(١٣) $\lim_{س \to ٩} \frac{\sqrt{س} - ٣}{س - ٩}$

$د(٩) = \frac{\sqrt{٩} - ٣}{٩ - ٩} = \frac{٠}{٠}$ صفر على صفر كمية غير معينة

$\lim_{س \to ٩} \frac{\sqrt{س} - ٣}{س - ٩} \times \frac{\sqrt{س} + ٣}{\sqrt{س} + ٣}$

$= \lim_{س \to ٩} \frac{س - ٩}{(س - ٩)(\sqrt{س} + ٣)} = \frac{١}{\sqrt{٩} + ٣} = \frac{١}{٦}$

(١٤) $\lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{س - ١} - ٢}{س - ٥}$

$د(٥) = \frac{\sqrt{٥ - ١} - ٢}{٥ - ٥} = \frac{٠}{٠}$ صفر على صفر كمية غير معينة

$\therefore \lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{س - ١} - ٢}{س - ٥} \times \frac{\sqrt{س - ١} + ٢}{\sqrt{س - ١} + ٢}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{س - ١ - ٤}{(س - ٥)(\sqrt{س - ١} + ٢)} = \frac{١}{\sqrt{٥ - ١} + ٢}$

$\therefore \lim_{ط \to ٥} \frac{١}{ط + \sqrt{ط - ١}} = \frac{١}{٥ + \sqrt{٥ - ١}} = \frac{١}{٤ + ٢} = \frac{١}{٦}$

تمرين جديد مع الحل

(١٣) $\lim_{س \to ٩} \frac{\sqrt{س} - ٣}{س - ٩}$

$د(٩) = \frac{\sqrt{٩} - ٣}{٩ - ٩} = \frac{٠}{٠}$ صفر على صفر كمية غير معينة

$\lim_{س \to ٩} \frac{\sqrt{س} - ٣}{س - ٩} \times \frac{\sqrt{س} + ٣}{\sqrt{س} + ٣}$

$= \lim_{س \to ٩} \frac{س - ٩}{(س - ٩)(\sqrt{س} + ٣)} = \frac{١}{\sqrt{٩} + ٣} = \frac{١}{٦}$

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

١٥ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{س+٩} - ٣}{س^{٢} + س}$

$= \frac{\sqrt{٠+٩} - ٣}{٠ + ٠} = \frac{٠}{٠}$ صفر على صفر ⇐ صيغة غير معينة

$\therefore \lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{س+٩} - ٣}{س^{٢} + س} \times \frac{\sqrt{س+٩} + ٣}{\sqrt{س+٩} + ٣}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{س+٩-٩}{س(س+١)(\sqrt{س+٩} + ٣)}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{١}{(س+١)(\sqrt{س+٩} + ٣)}$

$= \frac{١}{(٠+١)(\sqrt{٠+٩} + ٣)} = \frac{١}{٦ \times ١} = \frac{١}{٦}$

١٦ $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س+١} - ٢}{\sqrt{س-٢} - ١}$

$= \frac{\sqrt{٣+١} - ٢}{\sqrt{٣-٢} - ١} = \frac{٠}{٠}$ صفر على صفر ⇐ صيغة غير معينة

$\therefore \lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س+١} - ٢}{\sqrt{س-٢} - ١} \times \frac{\sqrt{س+١} + ٢}{\sqrt{س+١} + ٢} \times \frac{\sqrt{س-٢} + ١}{\sqrt{س-٢} + ١}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س-٣)(\sqrt{س-٢} + ١)}{(س-٣)(\sqrt{س+١} + ٢)}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س-٢} + ١}{\sqrt{س+١} + ٢} = \frac{\sqrt{٣-٢} + ١}{\sqrt{٣+١} + ٢}$

$= \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

١٧ اذا كانت

$\lim_{س \to ٢} \frac{ط(س) - ٥}{س - ٢} = ١$ (مقدر)

حيث ط(س) كثيرة حدود

أوجد $\lim_{س \to ٢} ط(س)$

الحل

ط(س) − ٥ = س − ٢

ط(س) = س − ٢ + ٥

∴ $\lim_{س \to ٢} ط(س) = ٢ - ٢ + ٥$

ط(٢) = ٥

١٨ $\lim_{س \to ٠} \frac{ط(س)}{س} = ٥$

أوجد $\lim_{س \to ٠} ط(س)$

الحل

عندما س = ٠

ط(س) = ٠

ط(٠) = ٥ × ٠ = ٠

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الواجب:

أوجد كلاً مما يأتي

(١) $\lim_{س \to ٤} \frac{س^٢ - ١٦}{س - ٤}$

(٢) $\lim_{س \to ٤} \frac{س^٤ - ٦٤}{س - ٤}$

(٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{س^٢}{٣س^٣ - ٤س}$

(٤) $\lim_{س \to -٣} \frac{س^٢ + ٤س + ٣}{٩ - س^٢}$

(٥) $\lim_{س \to ٩} \frac{٩ - س}{٨١ - س^٢}$

(٦) $\lim_{س \to ١} \frac{٣س^٢ + س - ٤}{س^٣ - ١}$

(٧) $\lim_{س \to ٤} \frac{س^٢ - ٨}{٣س^٢ - ١٢}$

(٨) $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - (١ - ٣س)^٢}{٥س}$

(٩) $\lim_{س \to ٣} \frac{١ - (٣ - س)^٢}{س^٣ - ٣س^٢ - س + ٣}$

(١٠) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ - س^٢}{(١ - س)^٥ + ٢س^٢ - ٢}$

(١١) $\lim_{س \to ٣} \left(\frac{٥}{س - ٣} + \frac{س^٢ - ٣س}{٣ - س} \right)$

(١٢) $\lim_{س \to ٤} \frac{س^٣ - ١٥س - ٤}{س - ٤}$

(١٣) $\lim_{س \to ٤} \frac{س^٤ - ١٢س^٢ + ٣٥س}{س - ٤}$

(١٤) $\lim_{س \to ١} \frac{٢س^٣ - ٥س^٢ + ٧س - ٣}{س^٣ - ٢س^٢ + س}$

(١٥) $\lim_{س \to ١} \frac{س + ١}{\sqrt{س + ٥} - ٢}$

(١٦) $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{٩ + س^٢} - ٣}{س^٢ + س}$

(١٧) $\lim_{س \to ٥} \frac{س - ٥}{\sqrt{س + ٤} - ٣}$

(١٨) $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س + ٨} - ٣}{س + ١}$

(١٩) $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{س + ١} - \sqrt{١ - س}}{س^٢}$

(٢٠) اذا كانت $\lim_{س \to ١} \frac{ب س^٢ + ٣س + ٢}{١ - س} = ٥$

أوجد $ب$ ، $ب$

Scanned with CamScanner

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

اختر:-

① $\lim_{س \to \frac{1}{2}} (١٠) =$ .....

(أ) ٥ (ب) ٢٠ (جـ) ٠ (د) $١٠\frac{١}{٢}$

② $\lim_{س \to ٤} (٣س - \sqrt{س}) =$ .....

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١٤ (د) ١٦

③ $\lim_{س \to ٢} (٣^{٢}+٣) =$ .....

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) $٣^{٢}+٣$ (د) ١٢

④ $\lim_{س \to ٢} \sqrt{\frac{٣+٢س}{٤س-١}} =$ .....

(أ) -٣ (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $-\frac{١}{٢}$

⑤ $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢}-٧س+١٢}{س-٣} =$ .....

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) ٧ (د) -٢

⑥ $\lim_{س \to -١} \frac{س^{٢}+س}{س^{٣}+١} =$ .....

(أ) صفر (ب) $-\frac{١}{٣}$ (جـ) -١ (د) ليس لها وجود.

⑦ 📖 $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢}-س-٦}{س^{٢}+س-١٢} =$ .....

(أ) $\frac{٥}{٧}$ (ب) $\frac{١}{٧}$ (جـ) -١ (د) -٥

⑧ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{س+١}-١}{س} =$ .....

(أ) صفر (ب) $\sqrt{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ليس لها وجود.

⑨ $\lim_{س \to ٠} \frac{٧+٢س}{٩-س} =$ .....

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ١

⑩ 📖 $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{ظاس}{س} =$ .....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) $\frac{٤}{\pi}$ (د) ليس لها وجود.

⑪ $\lim_{س \to ٢} \frac{س-٣}{س-٢} =$ .....

(أ) -١ (ب) $\frac{-٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) ليس لها وجود.

⑫ 📖 إذا كانت : $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢}-٤}{س-٢}$ لها وجود فإن : أ = ...

(أ) -١ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

ملحوظة خطيرة

نهـا $\frac{١}{س}$ غير موجودة
$س \to ٠$

لأن $د(٠)^{+} \neq د(٠)^{-}$

حيث أن $د(٠)^{+} = \infty$

$د(٠)^{-} = -\infty$

نهـا $\frac{١}{س^{٤}} = \infty$
$س \to ٠$

لأن $د(٠)^{+} = (\infty)^{٤} = \infty$

$د(٠)^{-} = (-\infty)^{٤} = \infty$

ملاك حياتك

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

نظرية (٤) «القانون»

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢٤

نظرية ④

$$\lim_{س \to أ} \frac{ق(س) - ق(أ)}{س - أ} = ق'(أ) \quad \text{حيث } ن \in \{1, 2, 3, 4\}$$

خلي بالك لازم $س \to أ$

@SecondaryTwo_M

أمثلة:

① $\lim_{س \to 2} \frac{س^3 - 8}{س - 2}$

الحل

$= \lim_{س \to 2} \frac{س^3 - 2^3}{س - 2} = 3 \times 2^2 = 12$

② $\lim_{س \to 3} \frac{س^4 - 81}{س - 3}$

الحل

$= \lim_{س \to 3} \frac{س^4 - 3^4}{س - 3} = 4 \times 3^3 = 108$

لاحظ يا مَلِك عند التعويض المباشر عند $س = 3$ هيطلع الناتج $\frac{صفر}{صفر}$

③ $\lim_{س \to 5} \frac{س^4 - 625}{س + 5}$

$= \lim_{س \to 5} \frac{س^4 - (-5)^4}{س - (-5)} = 4 \times (-5)^3 = -500$

④ $\lim_{س \to -3} \frac{س^4 - 81}{س + 3}$

الحل

$= \lim_{س \to -3} \frac{س^4 - (-3)^4}{س - (-3)}$

$= 4 \times (-3)^3 = -108$

⑤ $\lim_{س \to \frac{1}{2}} \frac{32س^5 - 1}{2س - 1}$

الحل

$= \lim_{س \to \frac{1}{2}} \frac{32(س^5 - (\frac{1}{2})^5)}{2(س - \frac{1}{2})}$

$= 16 \lim_{س \to \frac{1}{2}} \frac{س^5 - (\frac{1}{2})^5}{س - \frac{1}{2}}$

$= 16 \times 5 \times (\frac{1}{2})^4 = 5$

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢٤

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حل آخر لرحم ⑤

$= \text{نها}_{س \to 1} \frac{(س^2)^5 - (1)^5}{س^2 - 1}$ لاحظ $س^2 \to 1$ ضربت مقص

$= 5 \times (1)^{2-4} = 5$

⑥ $\text{نها}_{س \to 5} \frac{س^2 - 125}{5 - س}$

لاحظ $(5)^3 = 125$

$= \text{نها}_{س \to 5} \frac{س^2 - 5 \times (5)^2}{5 - س}$

$= \text{نها}_{س \to 5} \frac{(س^2)' - (5^2)'}{(5 - س)'}$

$= 2 \times (5)^{2-1} \times (-1) = -10$

⑦ $\text{نها}_{س \to -2} \frac{س^3 + 2س^2}{س^3 + 5س^2 + 6}$

الحل

$= \text{نها}_{س \to -2} \frac{س^2 (س + 2)}{(س + 3)(س + 2)}$

$= \text{نها}_{س \to -2} \frac{س^2}{س + 3}$

$= \frac{4}{1}$

لاحظ

$س \to 0$

نتيجه ①

$\text{نها}_{س \to 0} \frac{(1 + س)^n - 1}{س} = n$

نتيجه ②

$\text{نها}_{س \to 0} \frac{(1 + س)^n - 1}{س} = \frac{n}{m}$ حيث $n, m \in ط - \{0\}$

مستر / لطفي زهران
رياضيات الدحاتيه الصناعيه والثانويه
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢٦

⑧ $\text{نها}_{س \to 1} \frac{س^5 - 1}{س^3 - 1}$

الحل

$= \text{نها}_{س \to 1} \frac{(س^5)' - (1^5)'}{(س^3)' - (1^3)'}$

$= 5 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$

⑨ $\text{نها}_{س \to -3} \frac{س^3 + 27}{س^4 - 81}$

الحل

$= \text{نها}_{س \to -3} \frac{(س^3)' - ((-3)^3)'}{(س^4)' - ((-3)^4)'}$

$= -3 \times \frac{1}{4} = \frac{-15}{4}$

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(١٠) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٦ - ٦٤}{س^٧ - ١٢٨}$

الحل

$\lim_{س \to ٢} \frac{س^٦ - ٢^٦}{س^٧ - ٢^٧}$

$= \frac{٦}{٧} \times ٢^{-١} = \frac{٣}{٧}$

(١١) $\lim_{س \to ٣} \frac{٢س^٦ - ١٢٨}{س^٤ - ٤}$

الحل

$= ٢ \lim_{س \to ٢} \frac{س^٦ - ٢^٦}{س^٤ - ٢^٤}$

$= ٢ \times \frac{٦}{٤} \times ٢^٤ = ٩٦$

(١٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{(٣س - ٦٤)^٤ - ٢٥٦}{س}$

الحل

$\lim_{س \to ٠} \frac{(٣س + ٥)^٤ - ٥^٤}{س}$

$= ٣ \times ٤ \times ٥^٣ = ٥٠٠$

(١٣) $\lim_{س \to ١} \frac{(س+١)^٦ - ٦٤}{(س+١)^٣ - ٨}$

الحل

$س \to ١ \Leftarrow س + ١ \to ١ + ١$

$\therefore س + ١ \to ٢$

$\lim_{س+١ \to ٢} \frac{(س+١)^٦ - ٢^٦}{(س+١)^٣ - ٢^٣}$

$= \frac{٦}{٣} \times (٢)^{٦-٣} = ١٦$

(١٤) $\lim_{س \to ٠} \frac{(٥+س)^٤ - ٢٥^٢}{س}$

الحل

$\lim_{س \to ٠} \frac{(٥+س)^٤ - ٥^٤}{س}$

$= ٤ \times ٥^٣ = ٥٠٠$

(١٥) $\lim_{س \to ٠} \frac{(١+٥س)^٣ - ١٢٥}{٣س}$

الحل

هضرب $\times \frac{٤}{٣}$ فوق وتحت

$= \lim_{س \to ٠} \frac{\frac{٤}{٣}[(١+٥س)^٣ - ٥^٣]}{٣س \times \frac{٤}{٣}}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{(١+٥س)^٣ - ٥^٣}{٤س}$

$= \frac{٢}{٣} \times ٣ \times ٥^٢ \times \frac{٢}{٤} = ٥٠$

(١٦) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٤ - ٢٧س}{٢س^٣ - ٢٤س}$

الحل

$= \lim_{س \to ٣} \frac{س(س^٣ - ٢٧)}{٢س(س^٣ - ٨١)}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{س^٣ - ٣^٣}{٢(س^٤ - ٣^٤)} \times \frac{س}{٣}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{٣}{٤} \times \frac{٣}{٣} = \frac{١}{٤}$

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(١٦) $\lim_{س \to ٦} \frac{(س-٥)^{٧}-١}{٦-س}$

$س \to ٦ \Leftarrow س-٥ \to ٦-٥ \Leftarrow س-٥ \to ١$

$= \lim_{س-٥ \to ١} \frac{(س-٥)^{٧}-١^{٧}}{(س-٥)-١}$

$= \frac{٧}{١} \times ١^{٦} = ٧$

(١٧) $\lim_{س \to ٩} \frac{\sqrt{س}-٣}{س-٩}$

الحل

$\lim_{س \to ٩} \frac{س^{\frac{١}{٢}}-٩^{\frac{١}{٢}}}{س-٩} = \frac{١}{٢} \times ٩^{\frac{١}{٢}-١} = \frac{١}{٦}$

(١٨) $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٥]{س}-١}{\sqrt[٣]{س}-١}$

الحل

$\lim_{س \to ١} \frac{س^{\frac{١}{٥}}-١}{س^{\frac{١}{٣}}-١}$

$= \frac{\frac{١}{٥}}{\frac{١}{٣}} \times ١^{\frac{١}{٥}-\frac{١}{٣}} = \frac{٣}{٥}$

(١٩) $\lim_{س \to ١٦} \frac{\sqrt[٤]{س}-٢}{\sqrt{س}-٤}$

الحل

$\lim_{س \to ١٦} \frac{س^{\frac{١}{٤}}-١٦^{\frac{١}{٤}}}{س^{\frac{١}{٢}}-١٦^{\frac{١}{٢}}} = \frac{\frac{١}{٤}}{\frac{١}{٢}} \times ١٦^{\frac{١}{٤}-\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٢}$

(٢٠) $\lim_{س \to ١٦} \frac{\sqrt{س}-٨}{س-١٦}$

الحل

$\lim_{س \to ١٦} \frac{س^{\frac{١}{٢}}-١٦^{\frac{١}{٢}}}{س-١٦}$

$= \frac{\frac{١}{٢}}{١} \times ١٦^{\frac{١}{٢}-١} = \frac{١}{٨}$

(٢١) $\lim_{س \to ٦} \frac{(س-٥)^{٧}-١}{س-٦}$

الحل

$س \to ٦ \Leftarrow س-٥ \to ٦-٥ \Leftarrow س-٥ \to ١$

$\therefore \lim_{س-٥ \to ١} \frac{(س-٥)^{٧}-١^{٧}}{(س-٥)-١}$

$= ٧ \times ١^{٦} = ٧$

(٢٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{(٣+س)^{٤}-٨١}{٦س}$

الحل

هضرب ، فوق وتحت فى $\frac{١}{٦}$

$\lim_{س \to ٠} \frac{\frac{١}{٦}(٣+س)^{٤}-٣^{٤}}{س \times ٦ \times \frac{١}{٦}}$

$= \frac{١}{٦} \lim_{س \to ٠} \frac{(٣+س)^{٤}-٣^{٤}}{س}$

$= \frac{١}{٦} \times ٤ \times ٣^{٣} = ١٨$

مستر/ لطفى زهران رياضيات الى حلقة الاعدادية والثانوية ٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(٣) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٣ + س^٢ - ٣٦}{س^٤ - ٨١}$

الحل

$= \lim_{س \to ٣} \frac{س^٣ - ٢٧}{س^٤ - ٨١} + \lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٩}{س^٤ - ٨١}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{س^٣ - ٣^٣}{س^٤ - ٣^٤} + \lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٣^٢}{س^٤ - ٣^٤}$

$= \frac{٣}{٤} \times ٣^{٣-٤} + \frac{٢}{٤} \times ٣^{٢-٤} = \frac{١١}{٣٦}$

(٤) $\lim_{س \to ٧} \frac{\sqrt{س + ٢٥} - ٦}{س - ٧}$

$س \to ٧ \Rightarrow س + ٢٥ \to ٣٢$

$\therefore س + ٢٥ \to ٣٢$

$\therefore \lim_{س \to ٧} \frac{(س+٢٥)^{\frac{١}{٥}} - ٣٢^{\frac{١}{٥}}}{(س+٢٥) - ٣٢}$

$= \frac{١}{٥} \times ٣٢^{\frac{١}{٥}-١} = \frac{١}{٨٠}$

أول حاجه جبت الاساس بالطريقه
اللى انت شوفتها فى الاول
وبعدين عدلت عليها

الواجب:

أوجد كلاً مما يأتى

(١) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ - ٨}{س - ٢}$ الناتج $= ١٢$

(٢) $\lim_{س \to ٥-} \frac{٦٢٥ - س^٤}{٥ + س}$ $= -٥٠٠$

(٣) $\lim_{س \to ٣} \frac{٨١ - س^٤}{٢٤٣ + ٥س}$ $= \frac{-٤}{١٥}$

(٤) $\lim_{س \to ٤} \frac{٦٤ - ص^٣}{١٢٨ - س^٧}$ $= \frac{٣}{٢٨}$

(٥) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٩ - ١}{س^٧ - ١}$ $= \frac{٩}{٧}$

(٦) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{١٠} + س}{س^٧ - س}$ $= \frac{-٣}{٣٥}$

(٧) $\lim_{س \to ١-} \frac{س^{-٤} - ١}{س^{-١٨} - ١}$ $= \frac{٩}{١٧}$

(٨) $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س^٧} - ١}{س - ١}$ $= \frac{١}{٧}$

(٩) $\lim_{س \to ٤} \frac{\frac{١}{٢}س^٤ - ١٢٨}{٤ - س}$ $= ١٢٨$

مستر / لطفى زهران
رياضيات الصف الأول الثانوى
01028089912

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(١٠) $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س} - ٢}{س^{٢} - ١٦}$ = $\frac{١}{٨}$	(١٥) $\lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt[٣]{س + ٣} - ٢}{س - ٥}$ = $\frac{١}{١٢}$
(١١) $\lim_{س \to ٦} \frac{(س - ٥)^{٧} - ١}{س - ٦}$ = ٧	(١٦) $\lim_{س \to ٤} \frac{٣٢ + (س - ٤)^{٥}}{س - ٤}$ = ٨٠
(١٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{(١ + س)^{١٠} - ١}{(١ + س)^{٧} - ١}$ = $\frac{١٠}{٧}$	(١٧) $\lim_{س \to ٠} \frac{(٣ + س)^{٥} - ١}{س^{٤} - ٤}$ = $\frac{٥}{٤}$
(١٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{(٤ + س)^{٥} - ٣٢}{س}$ = ٨٠	(١٨) $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt[٣]{١ + ٣س} - ١}{س}$ = $\frac{١}{٣}$
(١٤) $\lim_{هـ \to ٠} \frac{(٣ + هـ)^{٤} - ٨١}{٦هـ}$ = ١٨	(١٩) $\lim_{س \to -١} \frac{س^{٢} + ٩س + ٨}{١ + س}$

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{ن} - ١^{ن}}{س^{م} - ١^{م}}$ = ...

(أ) $\frac{م}{ن}$ (ب) $\frac{م}{ن} (١)^{م-ن}$ (ج) $\frac{ن}{م} (١)^{م-ن}$ (د) $\frac{ن}{م} (١)^{ن-م}$

(٢) $\lim_{ص \to ٢} \frac{ص^{٥} - ٣٢}{ص - ٢}$ = ...

(أ) ٣١ $ص^{٤}$ (ب) ٣٢ × $٢^{٤}$ (ج) ٦٤ (د) ٥ × $٢^{٤}$

(٣) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{-١} - ٢^{-١}}{س^{-٤} - ٢^{-٤}}$ = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{٢}$ (ج) $\frac{١}{٣٢}$ (د) ٨

(٤) $\lim_{س \to -١} \frac{س^{٥} + ١}{س + ١}$ = ...

(أ) ٥ (ب) ٤ (ج) −٥ (د) −٤

(٥) $\lim_{هـ \to ٠} \frac{(س + هـ)^{٧} - س^{٧}}{هـ}$ = ...

(أ) $س^{٧}$ (ب) ٧ $س^{٦}$ (ج) صفر (د) ١

(٦) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٥} - ٣٢}{س^{٣} - ٨}$ = ...

(أ) ٤ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (ج) صفر (د) $٦\frac{٢}{٣}$

(٧) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{\frac{١٣}{٢}} - س^{\frac{١}{٢}}}{س^{\frac{٧}{٢}} - س^{\frac{١}{٢}}}$ = ...

(أ) $\frac{١٣}{٧}$ (ب) ١ (ج) ٢ (د) س

مستر / لطفي زهران
رياضيات | الحلقتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

(١) ب (٢) ٦ (٣) ٥ (٤) ب (٥) ١ (٦) ب (٧) ٦٣ (٨) ج/٢ (٩) ج/٩ (١٠) ٦٤ (١١) ج/٢ (١٢) ١٢٨ (١٣) ج/٩ (١٤) ٦٤ (١٥) ٥ (١٦) ج/٤ (١٧) ج/٤ (١٨) ج/٣ (١٩) ٦٣

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

نظرية الدالة عند اللانهاية

خلى بالك

① $\frac{\text{اى رقم}}{\infty} = \text{صفر}$

② اى رقم $\times \infty = \infty$

③ اى رقم $+ \infty = \infty$

④ $\infty + \infty = \infty$

⑤ $\frac{\infty}{\text{اى رقم}} = \infty$

⑥ $(\infty)^{ج} = \text{صفر}$

⑦ $(\infty)^{ج} = \infty$

⑧ $\sqrt{\infty} = \infty$

⑨ $\infty \times \text{صفر}$

⑩ $\infty - \infty$

⑪ $\infty^{(1)}$

⑫ $(\infty)^{\infty}$

⑬ $\frac{\infty}{\infty}$

كميات غير معينة:

⑭ $\lim_{س \to \infty} ج = ج$ حيث ج ثابت

⑮ $\lim_{س \to \infty} س^{ن} = \infty$ حيث ن عدد موجب

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩١٢

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩١٢

ملاحظات هامة:

عند ايجاد $\lim_{س \to \infty} \frac{د(س)}{ر(س)}$

① النهاية = عدد حقيقى لايساوى صفر

اذا كان ← درجة البسط = درجة المقام

② النهاية = صفر

اذا كانت درجة البسط اصغر من درجة المقام

③ النهاية $= \pm \infty$

اذا كانت درجة البسط اكبر من درجة المقام

امثله

① $\lim_{س \to \infty} \frac{٥ - س^{٢}}{٧ - س^{٣}}$

الحل بمجرد النظر $= \frac{٢}{٣}$

الحل بالخطوات لازم تكون عارف هتوف اكبر اس فى المقام وتقسم عليه فى حالة كان البسط والمقام

$\therefore \lim_{س \to \infty} \frac{٥ - س^{٢}}{٧ - س^{٣}} = \lim_{س \to \infty} \frac{\frac{٥}{س^{٣}} - \frac{س^{٢}}{س^{٣}}}{\frac{٧}{س^{٣}} - \frac{س^{٣}}{س^{٣}}}$

$= \frac{\frac{٥}{\infty} - ٢}{\frac{٧}{\infty} - ٣} = \frac{٥ - ٢}{٧ - ٣}$

$= \frac{٠ - ٢}{٠ - ٣} = \frac{٢}{٣}$

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

④ $\lim_{س\to\infty} \frac{٢س^{٥}-٥}{٣س^{٣}+٨}$

الحل

عجز النظر $= \infty$

لأن درجة البسط > درجة المقام

الكل بالخطوات ← هقسم على $س^{٣}$

$$\text{نهـ} \frac{\frac{٢س^{٥}}{س^{٣}}-\frac{٥}{س^{٣}}}{\frac{٣س^{٣}}{س^{٣}}+\frac{٨}{س^{٣}}} \quad س\to\infty$$

$$= \text{نهـ} \frac{٢س^{٢}-\frac{٥}{س^{٣}}}{٣+\frac{٨}{س^{٣}}} \quad س\to\infty$$

$$= \frac{\infty\times٢-\frac{٥}{\infty}}{٣+\frac{٨}{\infty}} = \frac{\infty-٠}{٣+٠} = \infty$$

⑤ $\lim_{س\to\infty} \frac{٢س^{٥}-٥}{٣س^{٣}+٨}$

بمجرد النظر $=$ صفر

لأن درجة البسط أكبر من درجة المقام

هقسم على $س^{٥}$

$$\therefore \text{نهـ} \frac{\frac{٢س^{٥}}{س^{٥}}-\frac{٥}{س^{٥}}}{\frac{٣س^{٣}}{س^{٥}}+\frac{٨}{س^{٥}}} \quad س\to\infty$$

$$= \text{نهـ} \frac{٢-\frac{٥}{س^{٥}}}{\frac{٣}{س^{٢}}+\frac{٨}{س^{٥}}} \quad س\to\infty$$

$$= \frac{٢-\frac{٥}{\infty}}{\frac{٣}{\infty}+\frac{٨}{\infty}} = \frac{٢-٠}{٠+٠} = \frac{٢}{٠} = \text{صفر}$$

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
01028089912

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

⑥ $\lim_{س \to ∞} \frac{٥س^{٢} - ٣س + ٦}{س^{٣} - ٧س^{٢}}$

الحل بمجرد النظر $= \frac{٥}{-٧} = \frac{-٥}{٧}$

حل انت بالخطوات بقا

⑦ $\lim_{س \to ∞} \frac{س^{٥} - ٢س^{٢}}{س^{٤} + ٣س^{٣} - ١}$

بمجرد النظر الحل $= ∞$

لان درجة البسط > درجة المقام

حل انت بالخطوات بقا (∞)

⑧ $\lim_{س \to ∞} \frac{س^{٣} - ٢}{|س|^{٣} + ١}$

عندما $س \to ∞$ فإن $|س| = س$

$\therefore \lim_{س \to ∞} \frac{س^{٣} - ٢}{س^{٣} + ١} =$ بمجرد النظر $= [١]$

بالقسمة على $س^{٣}$ لبسط ومقام

$\therefore \lim_{س \to ∞} \frac{\frac{س^{٣}}{س^{٣}} - \frac{٢}{س^{٣}}}{\frac{١}{س^{٣}} + \frac{س^{٣}}{س^{٣}}} = \frac{١ - \frac{٢}{∞}}{\frac{١}{∞} + ١}$

$= \frac{١ - ٠}{٠ + ١} = [١]$

⑨ $\lim_{س \to ∞} (س^{٣} + ٥س^{٢} + ١)$

الحل

بالتعويض مباشر

$\therefore \lim_{س \to ∞} (س^{٣} + ٥س^{٢} + ١) = ∞ + ∞ + ١$

$∞ + ١ = ∞$

⑩ $\lim_{س \to ∞} (٥ + س - س^{٣})$

نقول نعوض مباشر الاول

$= ٥ + ∞ - ∞ = ∞ - ∞$

كميه غير معينه

كده لسه هاخد عامل مشترك اكبر أس

$\therefore \lim_{س \to ∞} س^{٢} (\frac{٥}{س^{٢}} + \frac{١}{س} - ١)$

$= \lim_{س \to ∞} س^{٢} \times \lim_{س \to ∞} (\frac{٥}{س^{٢}} + \frac{١}{س} - ١)$

$= ∞ \times (\frac{٥}{∞} + \frac{١}{∞} - ١)$

$= ∞ \times (٠ + ٠ - ١)$

$= ∞ \times ١ - = ∞ -$

حياك القطه يا عسل

لازم تكون عارف

الحل بالخطوات

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(١١) $\lim_{س \to \infty} \frac{(س-١)(س^{٣}+١)}{س^{٤}(١-٣س^{٥})}$

الحل

بمجرد النظر ⇐ الحل $= \frac{١}{-٣}$

الخطوات ⇐ هقسم على $س^{٣}$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\frac{(س-١)}{س} \times \frac{(س^{٣}+١)}{س^{٣}}}{\frac{س^{٤}}{س^{٣}} \times \frac{(١-٣س^{٥})}{س}}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{(\frac{١}{س}-\frac{س}{س})(\frac{١}{س^{٣}}+\frac{س^{٣}}{س^{٣}})}{١ \times (\frac{١}{س}-\frac{٣س^{٥}}{س})}$$

$$= \frac{(\frac{١}{\infty}-١)(\frac{١}{\infty}+١)}{(\frac{١}{\infty}-٥) \times ١}$$

$$= \frac{(١-٠)\times(٠+١)}{(٠-٥)\times ١} = \frac{١\times١}{٥\times١} = \frac{١}{٥}$$

(١٢) $\lim_{س \to \infty} \frac{٣س^{٤}-٤س+٥}{(س+١)^{٤}}$

الحل

بمجرد النظر = $\frac{٣}{١}$

خطوات ⇐ هقسم على $س^{٤}$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\frac{٣س^{٤}}{س^{٤}}-\frac{٤س}{س^{٤}}+\frac{٥}{س^{٤}}}{\frac{(س+١)^{٤}}{س^{٤}}}$$

$$= \frac{٣-\frac{٤}{س^{٣}}+\frac{٥}{س^{٤}}}{(\frac{س}{س}+\frac{١}{س})^{٤}}$$

$$= \frac{٣-\frac{٤}{\infty}+\frac{٥}{\infty}}{(١+\frac{١}{\infty})^{٤}} = \frac{٣-٠+٠}{(١+٠)^{٤}} = \frac{٣}{١}$$

(١٣) $\lim_{س \to \infty} \frac{(٧+٣س)(٧+٧س)}{٣-٤س}$

بمجرد النظر ⇐ الحل $= \frac{١}{٤}$

الخطوات هقسم على $س$ بس وهقام

$$\therefore \lim_{س \to \infty} \frac{\frac{(٧+٧س)}{س} \times \frac{(٧+٣س)}{س}}{\frac{٣}{س}-\frac{٤س}{س}}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{(\frac{٧}{س}+١)(\frac{٣}{س}+١)}{\frac{٣}{س}-٤}$$

$$= \frac{(\frac{٧}{\infty}+١)(\frac{٣}{\infty}+١)}{٣-٤} = \frac{(٠+١)(٠+١)}{٣-٤} = \frac{١\times١}{-٤} = -\frac{١}{٤}$$

لاحظ ان $\infty = \infty٧$

مستشار / لطفي زهران
رياضيات الإعدادية والثانوية
٠١١١٥٩٥٦٢٢٦

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(١٤) $\lim_{س \to ٥} \frac{(س+٢)^{٣}(٣-٢س)^{٣}}{س^{٣}(٧+٤س^{٢})^{٢}}$

بمجرد النظر الحل = $\frac{-٢}{٣}$

الحظوا هنقسم على $س^{٥}$

(١٥) $\lim_{س \to ٥} \frac{٥س-٦س^{٥}}{\sqrt{٩س^{٤}+٧}}$

بمجرد النظر ← الحل = $\frac{٥}{٣}$

الحظوا هقسم على $س^{٤}$ تحت الجذر
واللى مش تحت الجذر هقسم على س

لاحظ ان $\sqrt{س^{٤}} = س^{٢}$

$$\therefore \text{نهـ} = \frac{\frac{٦}{س^{٣}} - \frac{٥س}{س^{٣}}}{\sqrt{\frac{٩س^{٤}}{س^{٤}} + \frac{٧}{س^{٤}}}}$$

$$= \frac{\frac{٦}{\infty} - ٥}{\sqrt{٩ + \frac{٧}{\infty}}} = \frac{٠ - ٥}{\sqrt{٩ + ٠}} = \frac{-٥}{٣}$$

(١٦) $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt[٣]{٨س^{٣} - ٥س + ١}}{٢ - س^{٣}}$

بمجرد النظر ← الحل = $\frac{٢}{٣}$

الحظوا ← هقسم على $س = \sqrt[٣]{س^{٣}}$
لان تحت الجذر هقسم على $س^{٣}$
والمقام هقسم على س

$$\therefore \text{نهـ} = \frac{\sqrt[٣]{\frac{٨س^{٣}}{س^{٣}} - \frac{٥س}{س^{٣}} + \frac{١}{س^{٣}}}}{\frac{٢}{س} - \frac{س^{٣}}{س}}$$

$$= \frac{\sqrt[٣]{٨ - \frac{٥}{س^{٢}} + \frac{١}{س^{٣}}}}{\frac{٢}{\infty} - ٣} = \frac{\sqrt[٣]{٨ - ٠ + ٠}}{٠ - ٣}$$

$$= \frac{٢}{-٣}$$

(١٧) $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{٥}{س^{٢}} - \frac{٧س^{٣}}{٤س^{٣}} + ٢\right)$

بتعالى عوض صابر $\left(\frac{٥}{\infty} - \frac{٧}{٤} + ٢\right)$

$$= ٠ - \frac{٧}{٤} + ٢ = \frac{-٧}{٤} + \frac{٨}{٤} = \frac{١}{٤}$$

(١٨) $\lim_{س \to \infty} (٥س^{٤} - س^{٣} - ٣)$

بتعويض مباشر $= \infty - \infty - ٣$ = غير معين

هاخد $س^{٤}$ عامل مشترك

$$\therefore \text{نهـ} = \left(٥ - \frac{١}{س} - \frac{٣}{س^{٤}}\right) \times س^{٤}$$

$$= \left(٥ - \frac{١}{\infty} - \frac{٣}{\infty}\right) \times \infty$$

$$= ٥ \times \infty = \infty$$

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(١٩) $\lim_{س \to ∞} \left[٧ + \frac{٢ س^{٢}}{(س+٣)^{٢}} \right]$

الحل بمجرد النظر $= ٧ + ٢ = ٩$

الخطوا ← هنقسم أسألة الأول

$= \lim_{س \to ∞} ٧ + \lim_{س \to ∞} \frac{٢ س^{٢}}{(س+٣)^{٢}}$

لـ ÷ $س^{٢}$

$= \lim_{س \to ∞} ٧ + \lim_{س \to ∞} \frac{٢}{\frac{(س+٣)^{٢}}{س^{٢}}}$

$= \lim_{س \to ∞} ٧ + \lim_{س \to ∞} \frac{٢}{(\frac{٣}{س} + ١)^{٢}}$

$= \lim_{س \to ∞} ٧ + \frac{٢}{(٠ + ١)^{٢}}$

$= ٧ + \frac{٢}{١} = ٧ + ٢ = ٩$

(٢٠) $\lim_{س \to ∞} \left[\frac{٣ س^{٢}}{(س-٣)^{٢}} + \frac{س}{١ + س^{٢}} \right]$

الحل بمجرد النظر $= \frac{١}{٢} + ٣ = \frac{٧}{٢}$

الخطوات

$\lim_{س \to ∞} \frac{٣ س^{٢}}{(س-٣)^{٢}} + \lim_{س \to ∞} \frac{س}{١ + س^{٢}}$

لـ ÷ $س$ لـ ÷ $س^{٢}$

كمل حل انت بقا (٥ درجات)

(٢١) اذا كانت

$\lim_{س \to ∞} \frac{٤ م س^{٣} - ٤ س + ٥}{٣ - ٩ س + ٨ س^{٢}} = ٣$

اوجد $م$ ، $ن$

الحل

طالما الناتج عدد حقيقي $\neq ٠$

∴ درجة البسط = درجة المقام

∴ $ن = ٢$

∴ المعامل / المعامل = الناتج

$\frac{٤ م}{٨} = ٣$ ∴ $٤ م = ٢٤$

∴ $م = ٦$

الواجب:

اوجد كلاً من النهايات الآتية

① $\lim_{س \to ∞} \frac{٥ - س^{٢}}{٨ + س^{٣} + ٣ س}$

② $\lim_{س \to ∞} \frac{٤ + ٢ س}{١ + س^{٣} + ٣}$

③ $\lim_{س \to ∞} \frac{٦ س^{٣} - ٤ س}{٢ - ٧ س^{٣}}$

④ $\lim_{س \to ∞} \frac{١ + ٧ س^{٢}}{١ + س - ٨ س^{٣} + ٤ س^{٤}}$

⑤ $\lim_{س \to ∞} \frac{١ - س^{٢} + ٧ س^{٥}}{١٣ + ٤ س^{٦}}$

⑥ $\lim_{س \to ∞} \left[\frac{س}{١ + س^{٢}} + \frac{٣ س^{٢}}{(س-٣)^{٢}} \right]$

مستر / لطفي زهران
رياضيات الثانوية العامة والثانوية الأزهرية

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

⑥ $\lim_{س \to \infty} \frac{(٣س+٩)(٢س+٧)}{(س+١)(٥س+٤)}$

⑦ $\lim_{س \to ٣} \frac{٦س^{٢}-٥س}{(٣-س)(٢+س)}$

⑧ $\lim_{س \to ٥} \frac{٨س^{٣}-س+١}{(س+١)(٢س^{٢}-٣)}$

⑨ $\lim_{س \to ٥} \frac{س^{٣}-٤س+٥}{(١-س٢)^{٣}}$

⑩ $\lim_{س \to ٥} \frac{١}{س} \sqrt{٣+٤س^{٤}}$

⑪ $\lim_{س \to ٥} \frac{٤-٣س^{٣}}{\sqrt{٩+٦س}}$

⑫ $\lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt[٣]{٨س^{٤}+١}}{\sqrt[٥]{٣٢س^{٥}+س}}$

⑬ $\lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{س^{٤}+١}}{\sqrt{س^{٤}+٢}}$

⑭ $\lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{٤س^{٢}+٧}+٣س}{٩+س٢}$

⑮ $\lim_{س \to ٥} \frac{٥س^{٣}-٤س+٢}{\sqrt[٣]{|س٢|+س-٧}}$

⑯ $\lim_{س \to ٥} \frac{س^{٣}-٢}{|س|^{٣}+١}$

⑰ $\lim_{س \to ٥} \left[\frac{٢س}{(٣+س)^{٢}}+٣\right]$

⑱ $\lim_{س \to ٥} \left[\frac{٣س}{٧+س٢}-\frac{٢}{٣}\right]$

⑲ $\lim_{س \to ٥} \left(س-\frac{٣س^{٢}}{١+س^{٢}٢}\right)$

توحيد المقامات

⑳ $\lim_{س \to ٥} س(\sqrt{١+٤س^{٢}}-٢س)$

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\lim_{س \to \infty} \frac{س^{٢}+٥}{٦}$ = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{٥}{٦}$ (جـ) ١ (د) ∞

② $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{س}-٣}{س}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) -٢ (د) ∞

③ $\lim_{س \to \infty} (٣س^{-٥}+٤س^{-٢}+٥)$ = ...

(أ) ١٢ (ب) ∞ (جـ) ٥ (د) صفر

④ $\lim_{س \to \infty} \sqrt{\frac{٣+٢س}{٤س-١}}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

⑤ $\lim_{س \to \infty} \frac{س^{٢}+٥}{س(٢س^{٢}+٣)}$ = ...

(أ) $\frac{٥}{٨}$ (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٥}{٣}$

⑥ $\lim_{س \to \infty} \frac{٥+س^{-٢}}{٢س^{-٢}+١}$ = ...

(أ) $\frac{٥}{٤}$ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (جـ) ٥ (د) $\frac{١}{٣}$

⑦ $\lim_{س \to \infty} \frac{(١٢)^{\frac{١}{س}}}{س+٧}$ = ...

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) $\frac{١٢}{٧}$ (د) ∞

مستر / لطفي زهران
رياضيات الاعدادية والثانوية
٠١١١٥٩٥٦٢٢٦

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

نهايات الدوال المثلثية

نظرية

① $\lim_{س \to 0} \frac{جا س}{س} = 1$	② $\lim_{س \to 0} \frac{ظا س}{س} = 1$	حيث س بالتقدير الدائري

مثلاً

① $\lim_{س \to 0} \frac{جا ٣س}{س} = ٣$

② $\lim_{س \to 0} \frac{ظا ٢س}{س} = ٢$

③ $\lim_{س \to 0} \frac{جا ٥س}{٢س} = \frac{٥}{٢}$

④ $\lim_{س \to 0} \frac{ظا ٤س}{٣س} = \frac{٤}{٣}$

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

ملحوظة هامة

① $\lim_{س \to 0} \frac{س}{جا س} = 1$	② $\lim_{س \to 0} \frac{س}{ظا س} = 1$	حيث س بالتقدير الدائري

مثلاً

① $\lim_{س \to 0} \frac{س}{ظا ٢س} = \frac{١}{٢}$

② $\lim_{س \to 0} \frac{س}{جا ٣س} = \frac{-٥}{٣}$

③ $\lim_{س \to 0} \frac{س}{ظا ٧س} = \frac{١}{٧}$

④ $\lim_{س \to 0} \frac{٣س}{ظا ٢س} = \frac{٣}{٢}$

@SecondaryTwo_M

خلي بالك :.

خطيرة

① $\lim_{س \to 0} \frac{جا ٣س^{٢}}{س^{٢}} = ٣$

② $\lim_{س \to 0} \frac{جا ٣س^{٢}}{س^{٢}} = \left(\frac{جا ٣س}{س}\right)^{٢} = (جا ٣س)^{٢} = ٣^{٢} = ٩$

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

أمثلة :-

① $\lim_{س \to 0} \frac{ظا س}{ظا ٢س}$ (÷ س) لبسط ومقام

الحل

$$\lim_{س \to 0} \frac{\frac{ظا س}{س}}{\frac{ظا ٢س}{س}} = \frac{١}{٢}$$

② $\lim_{س \to 0} \frac{ظا ٥س}{جتا ٣س}$ (÷ س)

الحل

$$\therefore \lim_{س \to 0} \frac{\frac{ظا ٥س}{س}}{\frac{جتا ٣س}{س}} = \frac{٥}{٣ \times ١} = \frac{٥}{٦}$$

③ $\lim_{س \to 0} \frac{ظا^٢ ٣س}{٣س^٤}$

الحل

$$\frac{١}{٣} \lim_{س \to 0} \left(\frac{ظا ٣س}{س}\right)^٢$$

$$= \frac{١}{٣} \times (٣)^٢ = \frac{١}{٣} \times ٩ = ٣$$

④ $\lim_{س \to 0} \frac{س جتا ٣س}{ظا ٢س}$

الحل

$$\lim_{س \to 0} \frac{س}{ظا ٢س} \times جتا ٣س$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{س}{ظا س} \times$$

$$= \frac{١}{٢} \times جتا ٠ = \frac{١}{٢} \times ١ = \frac{١}{٢}$$

ملحوظة : لو شفت جتا عوض تعويض مباشر

⑤ $\lim_{س \to 0} \left(\frac{٥س}{ظا س} - \frac{ظا ٢س}{س}\right)$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{٥س}{ظا س} - \lim_{س \to 0} \frac{ظا ٢س}{س}$$

$$٥ - ٢ = \underline{٣}$$

⑥ $\lim_{س \to ٣} \frac{٣ - س}{٥ظا س - ظا ٢س}$

بالقسمة ع س

$$\lim_{س \to ٣} \frac{\frac{٣ - س}{س}}{\frac{٥ظا س}{س} - \frac{ظا ٢س}{س}}$$

$$= \frac{٣}{٥ \times ١ - ٢ \times ٣} = \frac{٣}{٥ - ٦} = \underline{-٣}$$

⑦ $\lim_{س \to ٠} \frac{ظا ٣س - ظا ٤س}{س^٣ + ٢س}$

بالقسمة ع س

$$\lim_{س \to ٠} \frac{\frac{ظا ٣س}{س} - \frac{ظا ٤س}{س}}{س^٢ + ٢}$$

$$= \frac{٣ - ٤}{٠ + ٢} = \frac{-١}{٢}$$

⑧ $\lim_{س \to ٠} \frac{س}{ظا ٢س} \times جتا ٣س$

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{س}{ظا س} \times \lim_{س \to ٠} جتا ٣س$$

مستر / لطفي زهران
دبلومات الأزهر حلقات الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

⑧ $\lim_{س\to0} \frac{ظا٣س}{٥س}$ جتاس

الحل

$= \lim_{س\to0} \frac{ظا٣س}{٥س} \times$ جتاس

$= \lim_{س\to0} \frac{ظا٣س}{٥س} \times \lim_{س\to0}$ جتاس

$\frac{٣}{٥} \times$ جتا٠ $= \frac{٣}{٥} \times ١ = \frac{٣}{٥}$

⑨ $\lim_{س\to0} \frac{٤}{س}$ ظا $\frac{س}{٧}$

الحل

$= \lim_{س\to0} \frac{ظا\frac{س}{٧}}{\frac{س}{٤}}$

$= \lim_{س\to0} \frac{ظا\frac{س}{٧}}{\frac{س}{٧}} \times ٤ = ١ \times ٤ = ٤$

⑩ $\lim_{س\to0} (\frac{٣}{٥س} + ٤)$ ظا٤س

الحل

$\lim_{س\to0} (\frac{٣+٠س٤}{٥س})$ ظا٤س

$= \lim_{س\to0} \frac{٣ظا٤س + ٠س٤ظا٤س}{٥س}$

$= \lim_{س\to0} \frac{٣ظا٤س}{٥س} + \lim_{س\to0} \frac{٠س٤ظا٤س}{٥س}$

$= \lim_{س\to0} \frac{٣ظا٤س}{٥س} + ٠$

$\frac{٣}{٥} \times \frac{٤}{٣} \times \lim_{س\to0} \frac{٤ظا٤س}{٤س}$

$\frac{٤}{٥} \times ١ = \frac{٤}{٥}$

⑪ $\lim_{س\to0} \frac{س$ جتا$(-٢س+١)}{س^{٢}+س}$

يلاحظ ان الدالة جتا

تكون بصفة مباشرة

$\therefore$ النهاية $= \frac{\frac{١}{٢}$ جتا$(-٢ \times \frac{١}{٢}+١)}{(\frac{١}{٢})^{٢}+\frac{١}{٢}} = \frac{٢}{٣}$

⑫ $\lim_{س\to0} \frac{ظا٣س}{٥س}$

الحل

$\frac{١}{٥} \lim_{س\to0} (\frac{ظا٣س}{س})^{٢} = \frac{١}{٥} \times (\frac{٣}{١})^{٢} = \frac{٩}{٥}$

⑧ $\lim_{س\to0} \frac{ظا٣س}{٥س}$ جتاس

الحل

$= \lim_{س\to0} \frac{ظا٣س}{٥س} \times$ جتاس

$= \lim_{س\to0} \frac{ظا٣س}{٥س} \times \lim_{س\to0}$ جتاس

$\frac{٣}{٥} \times$ جتا٠ $= \frac{٣}{٥} \times ١ = \frac{٣}{٥}$

⑨ $\lim_{س\to0} \frac{٤}{س}$ ظا $\frac{س}{٧}$

الحل

$= \lim_{س\to0} \frac{ظا\frac{س}{٧}}{\frac{س}{٤}}$

$= \lim_{س\to0} \frac{ظا\frac{س}{٧}}{\frac{س}{٧}} \times ٤ = ١ \times ٤ = ٤$

⑩ $\lim_{س\to0} (\frac{٣}{٥س} + ٤)$ ظا٤س

الحل

$\lim_{س\to0} (\frac{٣+٠س٤}{٥س})$ ظا٤س

$= \lim_{س\to0} \frac{٣ظا٤س + ٠س٤ظا٤س}{٥س}$

$= \lim_{س\to0} \frac{٣ظا٤س}{٥س} + \lim_{س\to0} \frac{٠س٤ظا٤س}{٥س}$

$= \lim_{س\to0} \frac{٣ظا٤س}{٥س} + ٠$

$\frac{٣}{٥} \times \frac{٤}{٣} \times \lim_{س\to0} \frac{٤ظا٤س}{٤س}$

$\frac{٤}{٥} \times ١ = \frac{٤}{٥}$

⑪ $\lim_{س\to0} \frac{س$ جتا$(-٢س+١)}{س^{٢}+س}$

يلاحظ ان الدالة جتا

تكون بصفة مباشرة

$\therefore$ النهاية $= \frac{\frac{١}{٢}$ جتا$(-٢ \times \frac{١}{٢}+١)}{(\frac{١}{٢})^{٢}+\frac{١}{٢}} = \frac{٢}{٣}$

⑫ $\lim_{س\to0} \frac{ظا٣س}{٥س}$

الحل

$\frac{١}{٥} \lim_{س\to0} (\frac{ظا٣س}{س})^{٢} = \frac{١}{٥} \times (\frac{٣}{١})^{٢} = \frac{٩}{٥}$

⑬ $\lim_{س\to0} \frac{ظا٣س}{٤س+٥س}$

الحل

$\lim_{س\to0} \frac{ظا٣س}{٥س+٤س} \times \frac{\frac{١}{س}}{\frac{١}{س}}$

$\lim_{س\to0} \frac{\frac{ظا٣س}{س}}{\frac{٥س}{س}+\frac{٤س}{س}}$

$\frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣}$

⑭ $\lim_{س\to0} \frac{ظا٣س}{٤س+٥س^{٢}}$

الحل

$\lim_{س\to0} \frac{ظا٣س}{س(٤+٥س)}$

$\lim_{س\to0} \frac{ظا٣س}{س} \times \lim_{س\to0} \frac{١}{٤+٥س}$

$٣ \times \frac{١}{٤} = \frac{٣}{٤}$

⑮ $\lim_{س\to0} \frac{ظا٣س}{٤س+٥س^{٢}}$

الحل

$\lim_{س\to0} \frac{ظا٣س}{س(٤+٥س)}$

$\lim_{س\to0} \frac{ظا٣س}{س} \times \lim_{س\to0} \frac{١}{٤+٥س}$

$٣ \times \frac{١}{٤} = \frac{٣}{٤}$

مستر / لطفي زهران
رياضيات الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(١٤) $\lim_{س \to 0} \frac{ظا^2 س}{س ظا 2س}$

الحل

بالقسمة ع $س$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\frac{ظا^2 س}{س^2}}{\frac{س}{س} \times \frac{ظا 2س}{س}} = \frac{\frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{8}$

(١٥) $\lim_{س \to 0} \frac{ظا 4س \, ظا^2 س}{س^2 ظا س}$

الحل

بالقسمة ع $س^2$

$\therefore \lim_{س \to 0} \frac{\frac{ظا 4س}{س} \times \frac{ظا^2 س}{س^2}}{\frac{4}{4} \times \frac{ظا س}{س}}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\frac{ظا 4س}{س} \times \left(\frac{ظا س}{س}\right)^2}{\frac{ظا س}{س}}$

$= \frac{4 \times 1^2}{1} = 4$

(١٦) $\lim_{س \to 0} \frac{2س^3 + 5س^2 + 3س}{ظا 2س \, جتا 3س}$

$\lim_{س \to 0} \frac{2س^2 + 5س + 3}{ظا 2س} \times \frac{1}{جتا 3س}$

$\lim_{س \to 0} \frac{2س^2 + 5س + 3}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{س}{ظا 2س} \times \frac{1}{جتا 3س}$

$= \frac{3}{2} \times 1 \times 1 = \frac{3}{2}$

(١٧) $\lim_{س \to 0} \frac{ظا^3 س + ظا^5 س}{2س^3}$

الحل

$\lim_{س \to 0} \frac{ظا^3 س}{2س^3} + \lim_{س \to 0} \frac{ظا^5 س}{2س^3}$

$\lim_{س \to 0} \frac{ظا 2س}{2س} \times \frac{1}{جتا^3 س} + \lim_{س \to 0} \frac{ظا^5 س}{2س^3}$

$\frac{1}{2} \times 1 \times 1 + \lim_{س \to 0} \left(\frac{ظا س}{س}\right)^3 \times \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

(١٨) $\lim_{س \to 0} \frac{س}{س - ظا س}$

الحل

بالقسمة ع $س$ ← فكر تحاول

$\lim_{س \to 0} \frac{\frac{س}{س}}{\frac{3س}{س} - \frac{ظا س}{س}}$

$\lim_{س \to 0} \frac{1}{3 - \left(\frac{ظا س}{س}\right)} = \frac{1}{3-1}$

$= \frac{1}{2}$

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

نتيجه هامة جدا

$$\lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{جتا} س}{س} = \text{صفر}$$

خلى بالك

لو كانت $\lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{جتا}^2 س}{س^2} = \text{صفر}$

تابع الامثله :-

(١٩) $\lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{جتا} س}{\text{ظا} س}$

الحل

$\lim_{س \to 0} \left(\frac{1 - \text{جتا} س}{س} \times \frac{س}{\text{ظا} س} \right)$

$\lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{جتا} س}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{س}{\text{ظا} س}$

صفر × ١ = صفر

(٢٠) $\lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{جتا} س}{س^2}$

الحل

$\lim_{س \to 0} \left(\frac{1 - \text{جتا} س}{س^2} \times \frac{1 + \text{جتا} س}{1 + \text{جتا} س} \right)$

$\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 س}{س^2} \times \lim_{س \to 0} \frac{1}{1 + \text{جتا} س}$

$= \lim_{س \to 0} \left(\frac{\text{جا} س}{س} \right)^2 \times \lim_{س \to 0} \frac{1}{1 + \text{جتا} س}$

$(1)^2 \times \frac{1}{1 + \text{جتا} 0} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

(٢١) $\lim_{س \to 0} \frac{2 - \text{جتا} 3س - \text{جتا} 4س}{س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{جتا} 3س + 1 - \text{جتا} 4س}{س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{جتا} 3س}{س} + \lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{جتا} 4س}{س}$

$= 3 \lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{جتا} 3س}{3س^2} + 4 \lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{جتا} 4س}{4س^2}$

$3 \times 0 + 4 \times 0 = \text{صفر}$

(٢٢) $\lim_{س \to 5} \frac{\text{ظا}(س - 5)}{س^2 - 5}$

الحل

$\lim_{س \to 5} \frac{\text{ظا}(س - 5)}{(س - 5)(س + 5)} = \frac{1}{10}$

لو لزم تكوين نسب المثلثية

(٢٣) $\lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{جتا} س}{س^2}$

الحل

$\lim_{س \to 0} \left(\frac{1 - \text{جتا} س}{س^2} \times \frac{1 + \text{جتا} س}{1 + \text{جتا} س} \right)$

$\lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{جتا}^2 س}{س^2 (1 + \text{جتا} س)} = \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 س}{س^2 (1 + \text{جتا} س)}$

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(٢٣) $\lim_{س \to ٤} \frac{ا(٣س - ١٢)}{س - ٤}$

الحل

$= \lim_{س-٤ \to ٠} \frac{٣ ا(س-٤)}{س-٤} = ٣$

(٢٤) $\lim_{س \to ٣} \frac{\text{جتا } س}{س^٢ - ٣س - ٣}$

$س \to ٣ \Rightarrow س^٢ \to ٣$

$\therefore س - \frac{\pi}{٢} \to ٠$

$ا(\frac{\pi}{٢} - س) = \text{جتا } س$

$\therefore \lim = \frac{ا(\frac{\pi}{٢} - س)}{(\frac{\pi}{٢} - س)^{-١}} = \frac{١}{٢}$

$(س - \frac{\pi}{٢}) \to ٠$

(٢٥) $\lim_{س \to ٣} \frac{ظ س}{س - ٣}$

الحل

$س \to ٣ \Rightarrow س - ٣ \to ٠$

$\therefore ظ(٣ - س) = -ظ س$

$\therefore -ظ(٣-س) = ظ س$

$\lim = \frac{-ظ(٣-س)}{٣-س} = -١$

$٣ - س \to ٠$

(٢٦) $\lim_{س \to ٠} \frac{ا س}{ط(\pi - س)}$

الحل

$ا(س - \pi) = ا(س + \pi) = -ا س$

$\therefore ا س = -ا(س - \pi)$

$(س - \pi) \to ٠$

$\therefore \lim = \frac{-ا(س-\pi)}{ط(\pi - س)} = \frac{١}{ط}$

$\pi - س \to ٠$

(٢٧) $\lim_{س \to ٠} \frac{ا س}{س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{ا س \times \frac{\pi}{١٨٠}}{س} = \frac{\pi}{١٨٠}$

(٢٨) $\lim_{س \to ٠} \frac{ظا س}{س} = \frac{\pi}{١٨٠}$

(٢٩) $\lim_{س \to ٠} \text{جتا } ٣س \ ا ٥س$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{١}{ط ٣س} \times ط ٥س$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{ط ٥س}{ط ٣س} \quad (\div س)$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{\frac{ط ٥س}{س}}{\frac{ط ٣س}{س}} = \frac{٥}{٣}$

(٣٠) $\lim_{س \to ٠} س(\text{قتا}^٢ س - ظ ٣س)$

الحل

$= \lim س \times \frac{١}{ا^٢ س} - س \times \frac{١}{ط ٣س}$

$= \lim \frac{س}{ا^٢ س} - \frac{س}{ط ٣س} = \frac{١}{٢} - \frac{١}{٣} = \frac{١}{٦}$

(٣١) $\lim_{س \to ٠} \frac{ا س}{\pi - س}$ $ا(\pi - س) \to ٠$

الحل

$ا(س - \pi) = ا(\pi + س) = -ا س$

$\therefore ا س = -ا(س - \pi)$

$\therefore \lim = \frac{-ا(س-\pi)}{\pi - س} = ١$

$\pi - س \to ٠$

س بالتقدير الستيني

(٢٧) $\lim_{س \to ٠} \frac{ا س}{س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{ا س \times \frac{\pi}{١٨٠}}{س} = \frac{\pi}{١٨٠}$

(٢٨) $\lim_{س \to ٠} \frac{ظا س}{س} = \frac{\pi}{١٨٠}$

(٢٩) $\lim_{س \to ٠} \text{جتا } ٣س \ ا ٥س$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{١}{ط ٣س} \times ط ٥س$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{ط ٥س}{ط ٣س} \quad (\div س)$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{\frac{ط ٥س}{س}}{\frac{ط ٣س}{س}} = \frac{٥}{٣}$

(٣٠) $\lim_{س \to ٠} س(\text{قتا}^٢ س - ظ ٣س)$

الحل

$= \lim س \times \frac{١}{ا^٢ س} - س \times \frac{١}{ط ٣س}$

$= \lim \frac{س}{ا^٢ س} - \frac{س}{ط ٣س} = \frac{١}{٢} - \frac{١}{٣} = \frac{١}{٦}$

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١١١٥٩٥٦٢٢٦

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الواجب : أوجد كلاً مما يأتي

① $\lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا}^2 س}{\text{ظا} ٥ س}$

② $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}٣س - \text{جا}٥س}{٥س}$

③ $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا} س + \text{ظا} س}{\text{ظا} س}$

④ $\lim_{س \to 0} \frac{س \text{ جتا}٣س}{\text{ظا}^2 س}$

⑤ $\lim_{س \to 0} \frac{٣ س}{٥ \text{ظا} س - ٢ \text{جا}٥س}$

⑥ $\lim_{س \to 0} \frac{س + س \text{جتا} س}{\text{ظا} س \text{ جتا} س}$

⑦ $\lim_{س \to 0} \frac{س^2 + \text{جا}٣س}{٥ س - \text{جتا}٢س}$

⑧ $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 س + ٢ س \text{ جتا} س}{\text{ظا}٣س}$

⑨ $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 ٣س}{٥ س^2}$

⑩ $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 ٣س}{س^2 \text{ظا}^2 س}$

⑪ $\lim_{س \to 0} \frac{س^3 + \text{ظا}^2 ٢س}{٢ س^3 + \text{ظا}^2 ٣س}$

⑫ $\lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا}٣س^2 + \text{جا}٥س}{س^2}$

⑬ $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}٥ س^3 + \text{جا}^2 ٥س}{٣ س^2}$

⑭ $\lim_{س \to 1} \frac{\text{جا}(س - ١)}{س^2 + س - ٢}$ فكرة

⑮ $\lim_{س \to 0} \frac{٣(١ - \text{جتا} س)}{س}$

⑯ $\lim_{س \to 0} \frac{س - س \text{ جتا} س}{\text{ظا}^2 ٣س}$

⑰ $\lim_{س \to 0} \frac{١ - \text{جتا}٣س}{\text{جا}^2 س - ١}$ القرب في المرافق

⑱ $\lim_{س \to 0} ٦ س^3 \text{ جتا}^2 س \text{ جتا} س$

⑲ $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جتا} س}{\pi - ٢س}$

⑳ $\lim_{س \to -١} \frac{\text{جا}(٤ - س - ٥)}{س + ١}$

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
01028089912

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
01115956226 - 01028089912

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

البحث وجود نهاية للدالة عند أطراف المجال

①

اذا كانت د(س) = { ٣س + ١ ، س < ١ ، ٥ - س ، س > ١ } أوجد كلاً من

① $\lim_{س \to -٢}$ د(س) = $\lim_{س \to -٢}$ ٣س + ١ = ٣ × -٢ + ١ = -٥

② $\lim_{س \to ٣}$ د(س) = $\lim_{س \to ٣}$ ٥ - س = ٥ - ٣ = ٢

③ $\lim_{س \to ١}$ د(س) ركز هنا جامد بقا

د(١$^+$) = ٥ - س

د(١$^+$) = ٥ - ١ = ٤

د(١$^-$) = ٣س + ١

د(١$^-$) = ٣ × ١ + ١ = ٤

∴ د(١$^+$) = د(١$^-$) ∴ النهاية لها وجود

∴ $\lim_{س \to ١}$ د(س) = ٤

②

د(س) = { س^٢ + ٢ ، س ≤ -٢ ، ٣س + ٣ ، س > -٢ }

ابحث وجود $\lim_{س \to -٢}$ د(س)

د(-٢$^+$) = $\lim_{س \to -٢}$ س^٢ + ٢ = (-٢)^٢ + ٢ = ٦

د(-٢$^-$) = $\lim_{س \to -٢}$ ٣س + ٣ = ٣ × -٢ + ٣ = -٣

∵ د(-٢$^+$) ≠ د(-٢$^-$) ∴ $\lim_{س \to -٢}$ د(س) غير موجودة

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

③ $د(س) = \begin{cases} \frac{س^3}{ظاس} & -\frac{\pi}{2} < س < 0 \\ جتاس^3 & س \geq 0 \end{cases}$

لبحث وجود $\lim_{س \to 0}$ د(س)

الحل

$د(0^-) = \lim_{س \to 0^-} د(س) = \lim_{س \to 0^-} \frac{س^3}{ظاس} = 3$

$د(0^+) = \lim_{س \to 0^+} جتاس^3 = جتا 0 = 1$

$\therefore د(0^-) \neq د(0^+)$ ∴ الدالة ليس لها وجود

---

④ $د(س) = \frac{|س-1|-3}{س-3}$

لبحث وجود $\lim_{س \to 3}$ د(س)

الحل

$د(س) = \begin{cases} \frac{س-3}{س-3} & ، س > 3 \\ \frac{-(س-3)}{س-3} & ، س < 3 \end{cases}$

$\therefore د(س) = \begin{cases} 1 & ، س > 3 \\ -1 & ، س < 3 \end{cases}$

$د(3^-) = -1$ $\quad د(3^+) = 1$

$\therefore د(3^-) \neq د(3^+)$

∴ النهاية ليس لها وجود

---

⑤ $د(س) = \begin{cases} |س|-1 & ، س \leq 0 \\ \frac{|س|}{س} - 2 & ، س > 0 \end{cases}$

أوجد $\lim_{س \to 0}$ د(س)

الحل

$د(س) = \begin{cases} س(-س)-1 & ، س \leq 0 \\ \frac{+س}{س} - 2 & ، س > 0 \end{cases}$

$د(س) = \begin{cases} -س^2 - 1 & ، س < 0 \\ -1 & ، س > 0 \end{cases}$

$د(0^+) = -1$ $\quad د(0^-) = -1$

$\therefore د(0^-) = د(0^+)$ ∴ $\lim_{س \to 0}$ د(س) = -1

---

⑥ $د(س) = |س-4| + 3$

فإن $\lim_{س \to 4}$ د(س) = ...

الحل

ظاهرها دالة كثيرة حدود

لا تعرف المطلوب $س \to$ حل عالطول

∴ $\lim_{س \to 4}$ د(س) = $|4-4| + 3 = 3$

---

⑦ $د(س) = |س^2 - 4س + 3|$

∴ $\lim_{س \to 3}$ د(س) = $|9 - 12 + 3| =$ صفر

مستر / لطفي زهران
رياضيات الوحلتين الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩١٢

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

⑧ $d(س) = \begin{cases} س^2 + 4 & ، س < -3 \\ 3س + 7 & ، -3 \leq س \leq 5 \\ 5 - س & ، س > 5 \end{cases}$

الحل

① نهـا $d(س)$ ، نهـا $d(س)$
$س \to -3$ ، $س \to 5$

الحل

① $d(-3^-) = $ نهـا $س^2 + 4 = (-3)^2 + 4 = 9 + 4 = 13$
$س \to -3^-$

$d(-3^+) = $ نهـا $3س + 7 = 3 \times (-3) + 7 = -9 + 7 = -2$
$س \to -3^+$

$\because d(-3^-) \neq d(-3^+)$ $\therefore$ نهـا $d(س)$ غير موجودة
$س \to -3$

② $d(5^+) = $ نهـا $5 - س = 5 - 5 = $ صفر
$س \to 5^+$

$d(5^-) = $ نهـا $3س + 7 = 3 \times 5 + 7 = 22$
$س \to 5^-$

$\because d(5^+) \neq d(5^-)$ $\therefore$ نهـا $d(س)$ غير موجودة
$س \to 5$

⑨ $d(س) = \begin{cases} \frac{6س + طاس}{5س + طا2س} & ، 0 < س < \frac{\pi}{4} \\ ظاس & ، س \geq 0 \end{cases}$

اثبت وجود نهـا $d(س)$
$س \to 0$

الحل

$d(0^+) = $ نهـا $\frac{6س + طاس}{5س + طا2س}$ $(\div س)$
$س \to 0^+$

$= $ نهـا $\frac{6 + \frac{طاس}{س}}{5 + \frac{طا2س}{س}}$
$س \to 0^+$

$= \frac{6 + 1}{5 + 2} = \frac{7}{7} = 1$

نهـا $\frac{طاس}{س} = 1$ ، نهـا $\frac{طا2س}{س} = 2$
$س \to 0$ ، $س \to 0$

$d(0^-) = $ نهـا $ظاس \times جتاس = 0 \times 1 = 0$
$س \to 0^-$

$\because d(0^+) = d(0^-) = d(0)$

$\therefore$ نهـا $d(س) = 0$
$س \to 0$

⑩ $d(س) = \sqrt{3 - س}$

اثبت نهـا $d(س)$
$س \to 3$

الحل

المجال $\Leftarrow 3 - س \geq 0 \Leftarrow س \leq 3$

$\therefore$ مجال الدالة هو $]-\infty, 3]$

$\therefore d(3^+) = $ نهـا $\sqrt{3 - س} = \sqrt{0} = $ صفر
$س \to 3^+$

$d(3^-)$ غير موجودة لأنها لا تعرف على يسار العدد ③

$\therefore$ نهـا $d(س)$ غير موجودة
$س \to 3$

⑪ $d(س) = \begin{cases} \frac{(س+2)^2 - 4}{س^2 + س} & ، س > 0 \\ \frac{1 - جتا^2 س}{س^2} & ، س < 0 \end{cases}$

أوجد نهـا $d(س)$
$س \to 0$

$d(س) = \begin{cases} \frac{س^2 + 4س + 4 - 4}{س^2 + س} & ، س > 0 \\ \frac{جا^2 س}{س^2} & ، س < 0 \end{cases}$

أ/ لطفي زهران
رياضيات المرحلة الإعدادية والثانوية
01028089912

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$د(س) = \begin{cases} \frac{س(س+٤)}{(س+١)(س+٢)} & ، س > ٠ \\ \left(\frac{جا ٢س}{س}\right)^{٢} & ، س < ٠ \end{cases}$$

$$\therefore د(٠^+) = \lim_{س \to ٠^+} \frac{س+٤}{س+٢} = \frac{٠+٤}{٠+٢} = ٢$$

$$د(٠^-) = \lim_{س \to ٠^-} \left(\frac{جا ٢س}{س}\right)^{٢} = ٢^{٢} = ٤$$

$$\therefore د(٠^+) \neq د(٠^-) \quad \therefore \lim_{س \to ٠} د(س) \text{ غير موجودة}$$

(٤) $\lim_{س \to ٠} \frac{|س|}{س}$

أثبت وجودها من اليمين واليسار

$$|س| = \begin{cases} س & ، س > ٠ \\ -س & ، س < ٠ \end{cases}$$

$$\therefore \lim_{س \to ٠^+} \frac{طا س}{س} = ١$$

$$\lim_{س \to ٠^-} \frac{طا(-س)}{س} = -١$$

$$\therefore د(٠^+) \neq د(٠^-)$$

∴ الدالة ليس لها وجود

(١٣) أوجد بيه م ، ل إذا كان

$$د(س) = \begin{cases} ٧ & ، س = ٠ \\ س^{٣} + ٣م س + ل & ، س < ٠ \\ ٥ + ل س + ٣م س^{٢} & ، س > ٠ \end{cases}$$

الحل

$$\because د(٠^+) = ٧ \quad \therefore د(٠^-) = ٧$$

$$د(٠^+) = ٥ + ل + ٠ + ٠ = ل + ٥$$

$$د(٠^-) = ٠ + ٠ + ل = ل$$

$$\therefore ل + ٥ = ٧$$

$ل = ٢$	$م = ١$

(١٤) $\lim_{س \to ٢} |س^{٢} + ٣س + ١| = ١٤$ أوجد م

الحل

كثيرة حدود ← موضع طول

$$|م^{٢} + ٣م + ٢| = ١٤$$

$$\therefore م^{٢} + ٣م + ٢ = \pm ١٤$$

$م^{٢} + ٣م + ٢ = ١٤$	$م^{٢} + ٣م + ٢ = -١٤$
$م^{٢} + ٣م = ١٢$	$م^{٢} + ٣م = -١٦$
$م = ٤$	$م = \frac{-١٦}{٣}$

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

رب اجعلني مقيم الصلاة ومن ذريتي

Scanned with CamScanner

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

⑮ أوجد فيما إن كانت د(س) حيث تكون د(س) قابلة للاشتقاق عند س = ١ حيث

$$د(س) = \begin{cases} \frac{(س-١)^{٢}}{|س-١|} & ، س \neq ١ \\ ٦س - ٣م & ، س = ١ \end{cases}$$

الحل

$$\therefore د'(س) = \begin{cases} \frac{٢(س-١)}{-(س-١)} & ، س < ١ \\ ٦ & ، س > ١ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -٢(س-١) & ، س < ١ \\ ٦ & ، س > ١ \end{cases}$$

∴ الدالة قابلة للاشتقاق عند س = ١

∴ د'(١) = د'(١⁺)

د'(١⁻) = -٢(١-١) = صفر

د'(١⁺) = ٦ × ١ - ٣م = ٦ - ٣م

∴ ٦ - ٣م = ٠ ∴ -٣م = -٦

م = ٢

---

⑯ أوجد قيمة النهاية إن وجدت $\lim_{س \to ٠} \frac{|س|}{س}$

الحل

$$\lim_{س \to ٠^{+}} \frac{|س|}{س} = \lim_{س \to ٠^{+}} \frac{س}{س} = ١$$

$$\lim_{س \to ٠^{-}} \frac{|س|}{س} = \lim_{س \to ٠^{-}} \frac{-س}{س} = -١$$

∴ $\lim_{س \to ٠^{+}} د(س) \neq \lim_{س \to ٠^{-}} د(س)$ ∴ النهاية ليس لها وجود

---

⑰ $د(س) = \frac{١}{س - ٢}$ ، $س \to ٢$

$$د(٢^{+}) = \frac{١}{٢ - ٢} = \frac{١}{٠^{+}} = \infty$$

$$د(٢^{-}) = \frac{١}{٢ - ٢} = \frac{١}{٠^{-}} = -\infty$$

∴ النهاية غير موجودة

---

⑱ $د(س) = \sqrt{٣ - س}$

أوجد فيما إذا كانت النهاية العظمى المطلقة عند س = ٣

الحل

٣ - س ≥ صفر ∴ -س ≥ -٣

س ≤ ٣

∴ د(٣⁺) غير موجودة

$د(٣) = \sqrt{٣ - ٣} = \sqrt{٠} = ٠$

∴ $\lim_{س \to ٣^{-}} د(س)$ غير موجودة

---

⑲ أثبت وجود $\lim_{س \to ٠} \frac{|ق س| - ١}{س}$

الحل

∵ ق س - ١ = ظ س ← أولى ثانوى

∴ $\lim_{س \to ٠} \frac{|ظ س|}{س} = \lim_{س \to ٠} \frac{|ا ظ س|}{س}$

مستر / لطفي زهران
رياضيات المراحل الإعدادية والثانوية
01115956226 - 01028089912

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الواجب :

① $د(س) = \begin{cases} س^2 + 1 & ، س < 3 \\ 3س + 1 & ، س \geq 3 \end{cases}$

أوجد $\lim_{س \to 3} د(س)$

② إذا كانت $\lim_{س \to 0} د(س) = 2$

حيث $د(س) = \begin{cases} \frac{ط س^2}{س} & ، س < 0 \\ ب جتا س & ، س \geq 0 \end{cases}$

أوجد قيمة ط ، ب

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

③ إذا كانت $د(س) = \begin{cases} \frac{س^2 - 7س + 12}{س - 3} & ، س < 3 \\ س^2 - 7 & ، س \geq 3 \end{cases}$

أبحث وجود $\lim_{س \to 3} د(س)$

④ $د(س) = \begin{cases} س - 2 & ، س < 0 \\ س^2 & ، 0 \leq س < 2 \\ س & ، س \geq 2 \end{cases}$

أبحث وجود $\lim_{س \to 0} د(س)$ ، $\lim_{س \to 1} د(س)$ ، $\lim_{س \to 2} د(س)$

⑤ $د(س) = \begin{cases} \frac{(س-3)^6 - 1}{س - 4} & ، س < 4 \\ س + 2 & ، س > 4 \end{cases}$

أوجد $\lim_{س \to 4} د(س)$

⑥ $د(س) = \begin{cases} \frac{ظا 2س}{س} & ، س < 0 \\ ا جتا س & ، س \geq 0 \end{cases}$

أوجد $\lim_{س \to 0} د(س)$

⑦ أبحث وجود $\lim_{س \to \frac{\pi}{3}} د(س)$

$د(س) = \begin{cases} \frac{س^3}{ظا س} & ، 0 < س < \frac{\pi}{3} \\ 3 جتا س & ، \frac{\pi}{3} < س < \frac{\pi}{2} \end{cases}$

① $\lim_{س \to \frac{\pi}{3}^-}$ ② $\lim_{س \to \frac{\pi}{3}^+}$ ③ $\lim_{س \to \frac{\pi}{3}}$

⑧ $د(س) = \begin{cases} |س| + 1 & ، س \neq 0 \\ 1 & ، س = 0 \end{cases}$

أبحث وجود $\lim_{س \to 0} د(س)$

⑨ $د(س) = \begin{cases} \frac{ظا س}{\pi - س} & ، س < \pi \\ ا - جتا س & ، س > \pi \end{cases}$

أوجد $\lim_{س \to \pi} د(س)$

⑩ $د(س) = \begin{cases} 3س - 2 & ، س < -1 \\ أ س + ب & ، -1 < س < 3 \\ 6 - س & ، س > 3 \end{cases}$

إذا كانت $\lim_{س \to -1} د(س)$ ، $\lim_{س \to 3} د(س)$ موجودة

فأوجد قيمة أ ، ب

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

① إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} -٢ & ، \ س > ٠ \\ ١ & ، \ س < ٠ \end{cases}$ فإن :

أولًا : $\lim_{س \to -٢}$ د (س) = ...

(أ) -٢ (ب) ١ (جـ) -١ (د) غير موجودة.

ثانيًا : $\lim_{س \to ٤}$ د (س) = ...

(أ) -٢ (ب) ١ (جـ) -١ (د) غير موجودة.

ثالثًا : $\lim_{س \to ٠}$ د (س) = ...

(أ) -٢ (ب) ١ (جـ) -١ (د) غير موجودة.

② $\lim_{س \to ٢}$ $\frac{|س - ٢|}{س - ٢}$ = ... ، $\lim_{س \to ١}$ $\frac{|س - ٢|}{س - ٢}$ = ...

(أ) غير موجودة ، صفر (ب) غير موجودتين.

(جـ) غير موجودة ، -١ (د) ١ ، -١

③ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} ٣س - ١ & ، \ س \neq ٢ \\ ٦ & ، \ س = ٢ \end{cases}$ فإن : $\lim_{س \to ٢}$ د (س) = ...

(أ) -٥ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ليس لها وجود.

④ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} ٣ - س & ، \ س < ١ \\ ٤ & ، \ س = ١ \\ س^٢ + ١ & ، \ س > ١ \end{cases}$

فإن : $\lim_{س \to ١}$ د (س) = ...

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) غير موجودة.

⑤ 📖 إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{ط\ا (س - ١)}{(س - ١)} & ، \ س > ١ \\ ط\ا \frac{\pi س}{٤} & ، \ ١ > س > ٢ \end{cases}$

فإن : $\lim_{س \to ١}$ د (س) = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{\pi}{٤}$ (د) غير موجودة.

⑥ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{ط\ا (٢س - ٦)}{س - ٣} & ، \ س > ٣ \\ ٢ ط\ا \frac{\pi س}{٦} & ، \ س < ٣ \end{cases}$

فإن : $\lim_{س \to ٣}$ د (س) = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{\pi}{٢}$ (د) غير موجودة.

⑦ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} ط\ا ٤س ط\ا ٩ س & ، \ \frac{-\pi}{١٨} < س < ٠ \\ ٤س + \ا^٢ & ، \ س > ٠ \end{cases}$

وكانت : $\lim_{س \to ٠}$ د (س) موجودة فإن : \ا = ...

(أ) $\frac{٤}{٩}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\pm\frac{٢}{٣}$ (د) $\pm\frac{٤}{٩}$

⑧ 📖 إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \ا + ط\ا س & ، \ س > ٠ \\ \frac{ط\ا ٢س}{\ا س} & ، \ ٠ < س < \frac{\pi}{٢} \end{cases}$

وكانت نهـــا د (س) موجودة فإن : \ا = ...

(أ) صفر أ، ١ (ب) ١ أ، -٢ (جـ) ٢ أ، ٣

⑨ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{ط\ا ٢س}{س} & ، \ س < ٠ \\ ٢ + ٣ ط\ا س & ، \ ٠ < س < ٧ \\ ٢ + ٤ س & ، \ س > ٧ \end{cases}$

فإن : د (س) موجودة

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) -$\frac{١}{٢}$

⑩ 📖 إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{ط\ا س}{س - ٢ - \pi} & ، \ س \neq \pi \\ \text{ما} (س - \pi) & ، \ س = \pi \end{cases}$

فإن : $\lim_{س \to \pi}$ د (س) = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) π (د) غير موجودة.

⑪ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{ط\ا^٢ س}{س^٢} & ، \ س < ٠ \\ ٢ + ٣ ط\ا س & ، \ ٠ < س < ٧ \\ ٢ + ٤ س & ، \ س > ٧ \end{cases}$

وكانت نهـــا د (س) موجودة

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) -$\frac{١}{٢}$

فإن : \ا = ...

⑫ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{ط\ا^٢ س}{س^٢} & ، \ س < ٠ \\ \frac{ط\ا س^٢ - ط\ا س^٢}{س} & ، \ ٠ < س < ٧ \\ ٢ + ٤ س & ، \ س > ٧ \end{cases}$

وكانت : $\lim_{س \to ٠}$ د (س) موجودة

فإن : \ا = ...

(أ) صفر أ، ١ (ب) ١ أ، -٢ (جـ) ٢ أ، ٣

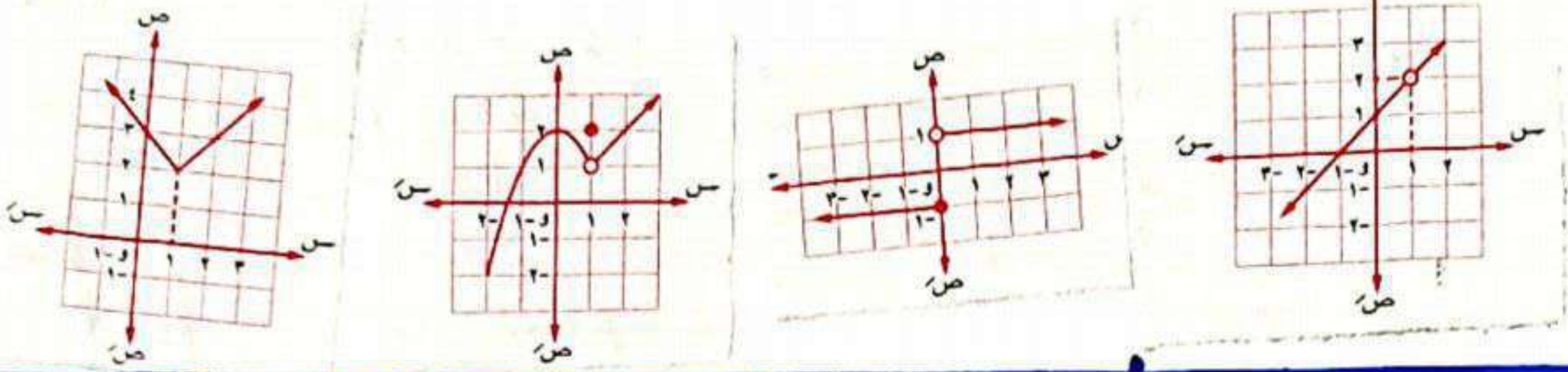
مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

الإتصال

تعالى نفهم بالرسم الاول..



الدالة غير معرفة عند س = ١ ∴ الدالة غير متصلة عند س = ١	منحنى الدالة به قفزة عند س = صفر ∴ الدالة غير متصلة عند س = صفر	منحنى الدالة به ثقب عند س = ١ ∴ الدالة غير متصلة عند س = ١	منحنى الدالة ليس به ثقوب أو قفزات ∴ الدالة متصلة عند س = ١

① ابحث اتصال الدالة : د(س) = { س٢ + ٣ ، س < ٢ ; ٥ - ٣س ، س ≥ ٢ } عند س = ٢

∴ الدالة غير معرفة عند س = ٢ اى ان د(٢) غير موجودة

∴ الدالة ليست متصلة عند س = ٢

@SecondaryTwo_M

② ابحث اتصال الدالة : د(س) = { ٥ - ٦س ، س ≤ ٣ ; ٤ + ٣س ، س > ٣ } عند س = ٣

د(٣) = ٥ - ٣ × ٦ = ٩

د(٣⁺) = ٤ + ٣ × ٣ = ١٣

∴ د(٣⁺) ≠ د(٣⁻)

∴ الدالة ليس لها نهاية عند س = ٣

∴ الدالة ليست متصلة عند س = ٣

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

③ أبحث اتصال

د(س) = |س - ١| + ٢ عند س = ١

طالما كثيرة حدود

∴ هي متصلة عند س = ١

نهـا د(س) = نهـا (|س - ١| + ٢)
س→١ س→١

= (|١ - ١| + ٢) = (٢)

د(١) = |١ - ١| + ٢ = ٢

د(س) = ١

نهـا د(س) = نهـا (س + ٢) = ٢ + ٢ = ٤
س→٢ س→٢

∴ دالة غير متصلة عند س = ٢

ولكي تصبح متصلة لابد من إعادة تعريفها كالتالي

د(س) = { س + ٢ ، س ≠ ٢
       { ٤ ، س = ٢

---

⑤ د(س) = { (س^٢ - ١٢٨) / (س^٤ - ١٦) ، س ≠ ٢
         { ١٤ ، س = ٢

أبحث الاتصال عند س = ٢

الحل

د(٢) = ١٤

نهـا د(س) = نهـا (س^٧ - ١٢٨) / (س^٤ - ١٦)
س→٢ س→٢

= نهـا (س^٧ - ٢^٧) / (س^٤ - ٢^٤)
س→٢

= ٧ × ٢^٣ / ٤ = ١٤

∴ نهـا د(س) = د(٢)
س→٢

∴ د متصلة عند س = ٢

---

⑥ د(س) = { (١ - جتاس) / س ، س < ٠
         { ٢ جاس ، س ≥ ٠

أبحث الاتصال عند س = ٠

د(٠^+) = صفر (نتيجة المرس الأيمن)

د(٠^-) = ٢ × ١ - جتا٠ = ٢ × ٠ = صفر

د(٠) = ٢ جا٠ = ٢ × ٠ = ٠

∴ د(٠^+) = د(٠^-) = د(٠)

∴ الدالة متصلة عند س = صفر

---

⑦ د(س) = { (س - ٣) / |س - ٣| ، س ≠ ٣
         { ٢ ، س = ٣

أبحث الاتصال عند س = ٣

الحل

د(س) = { (س - ٣) / (٣ - س) ، س < ٣
       { -(س - ٣) / (٣ - س) ، س > ٣
       { ٢ ، س = ٣

---

⑧ د(س) = { س + ٢ ، س ≠ ٢
         { ١ ، س = ٢

أعد تعريف هذه الدالة لكي تصبح متصلة عند س = ٢

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

د(س) = { ١ ، س < ٣ ؛ -١ ، س > ٣ ؛ ٢ ، س = ٣

∴ د(٣⁺) = ١ ، د(٣⁻) = -١

د(٣) = ٢

∴ الدالة غير متصلة عند س = ٣

---

⑧ د(س) = { (٥س² + ط جا٢س) / (س + ط٣س) ، س < π/٦ ؛ (س + ٣) / (س + ١) ، س ≥ ٠

اختبر الاتصال عند س = ٠

د(٠) = ٣ = (٠ + ٣) / (٠ + ١)

د(٠⁻) = نها (٥س² + ط جا٢س) / (س + ط٣س) (÷ س)
س → ٠

د(٠⁻) = نها (٥س + ط جا٢س / س) / (س + ط٣س / س)
س → ٠

= (٥ + ط × ٢) / (١ + ط٣) = (٥ + ٦) / ٣ = ٣

د(٠) = (٣ + ٠) / (١ + ٠) = ٣

∴ د(٠⁺) = د(٠⁻) = د(٠)

∴ الدالة متصلة عند س = صفر

---

⑨ د(س) = { (س² - ١٦) / (س - ٤) ، س ≠ ٤ ؛ صفر ، س = ٤

اختبر الاتصال عند س = ٤

حل انت بالطريقة شبه مثال ٧

---

⑩ د(س) = { س² + ٢ب س - ٤ ، س < ٤ ؛ ٤ ، س = ٤ ؛ ٥ ق + ب س ، س > ٤

متصلة عند س = ٤ أوجد ق ، ب

الحل

∴ الدالة متصلة ∴ د(٤⁺) = د(٤⁻) = د(٤)

∴ ٤ = د(٤)

∴ ٤ + ٢ق = ١٦ - ٤ ب + ٤

∴ ٥ ق + ٤ ب = ٤

من الآخر:- لو طلك اختبر الاتصال عند ق مثلا

انت بتظبط مسألتك الاول وبعدين د(ق) = ...

نطاق د(س) = ...
ق ← س

لو طلعوا ذى بعض ∴ هى متصلة طبعا لو الدالة حجزاه فإنت هتجيب د(ق⁺) ، د(ق⁻)

لو طلعت النهاية ليس لها وجود ∴ لازم تعريف ك تصبح متصلة

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
01115956226 - 01028089912

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

∴ ٢ أ + ٢ ج = ٤

∴ ٢ أ = ٢ ⟹ أ = ١

∴ ٥ أ + ٢ ب = ٤

٥ + ٢ ب = ٤

٢ ب = -١ ⟹ ب = $-\frac{١}{٢}$ ⟸ ٥ + ٢ ب = ٤

إتصال دالة على فترة

① الدالة كثيرة الحدود
متصلة ∀ ح أو أى فترة جزئية من ح

② الدالة النسبية
متصلة ∀ ح - { أصفار المقام }
أو أى فترة جزئية من ح ما عدا أصفار المقام

③ الدوال المثلثية
① جا س ← متصلة ∀ ح أو أى فترة جزئية من ح

② جتا س ← متصلة ∀ ح أو أى فترة جزئية من ح

③ ظا س متصلة ∀ ح ما عدا بعض النقط

ح - { ن π + $\frac{\pi}{٢}$ }

أمثلة :

① ابحث اتصال كلاً من الدوال

د(س) = س^{٣} + ٤ س - ٥

كثيرة حدود ... متصلة ∀ ح

② د(س) = ٣

كثيرة حدود متصلة ∀ ح

③ د(س) = $\frac{س - ٤}{س^{٢} - ٥ س + ٦}$

متصلة ∀ ح - { أصفار المقام }

س^{٢} - ٥ س + ٦ = ٠

(س - ٢)(س - ٣) = ٠

س = ٢ ، س = ٣

∴ الدالة متصلة ∀ ح - { ٢ ، ٣ }

④ د(س) = $\frac{س}{٥ + ٤ س}$

متصلة ∀ ح - { أصفار المقام }

لا يوجد أصفار للمقام

∴ الدالة متصلة ∀ ح

ملحوظة : اذا كانت الدالتان د ، ﻫ معرفتين على الفترة ف فإن :
وكانتا متصلتين على الفترة ف
فإن كلاً من الدوال الآتية تكون متصلة على الفترة ف

① د ± ﻫ ② د ﻫ ③ $\frac{د}{ﻫ}$ حيث ﻫ ≠ ٠

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
01115956226 - 01028089912

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

⑤ $د(س) = (س+2)$ جا س

الكل

كل من $(س+2)$ ، جا س متصلة على ح

∴ الدالة متصلة على ح

⑥ $د(س) = (س+1)^2 -$ جا س

كل من $(س+1)^2$ ، جا س متصلة على ح

∴ الدالة متصلة على ح

⑦ $د(س) = \frac{\text{جتا س} + \text{جا س}}{س+3}$

كل من جتا س ، جا س متصلة على ح

∴ الدالة متصلة على ح $- \{-3\}$ إذا وفقط إذا

∴ الدالة متصلة على ح $- \{-3, 3\}$

⑧ $د(س) = س^3 + 5 + 3س$

$د(س) = س^3 + 5 + \frac{3}{س^2}$

∴ الدالة متصلة على ح $- \{0\}$

⑨ $د(س) = \frac{\text{ظا س}}{س^2 - 1}$

ظا س متصلة على ح $- \{\pi + \frac{\pi}{2}\}$

∴ الدالة متصلة على ح $- \{-1, 1, \pi + \frac{\pi}{2}\}$

⑩ $د(س) = \begin{cases} س+3 & ، -3 < س < 0 \\ س^2 + 3 & ، 0 \leq س \leq 2 \end{cases}$

مجال $(س+3) =]-3, 2[$

مجال $(س^2+3) = [3, 7]$

∴ مجال $د(س) =]-3, 7[-$ الاتحاد

∴ الدالة متصلة على $]-3, 7[$

⑪ $د(س) = \sqrt{س+2}$

$س + 2 \geq 0 \Leftarrow س \geq -2$

المجال $= [-2, \infty[$

∴ الدالة متصلة على $[-2, \infty[$

⑫ $د(س) = \sqrt[3]{2 - س^2}$

دليل الجذر فردي

∴ الدالة متصلة على ح

⑬ $د(س) = \frac{1}{\sqrt[3]{س^2 - 25}}$

الدالة متصلة على ح $- \{$القيم التي تجعل المقام $= 0\}$

$س^2 - 25 = 0 \quad \therefore س = \pm 5$

∴ الدالة متصلة على ح $- \{\pm 5\}$

⑭ $د(س) = \begin{cases} \text{جا س} - \text{جتا س} & ، 0 \leq س \leq \pi \\ 2 \text{ جتا س} - 1 & ، س > \pi \end{cases}$

المجال $= [0, \pi] \cup]\pi, \infty[= [0, \infty[$

∴ الدالة متصلة على $[0, \infty[$

مستر / لطفي زهران
رياضيات المراحل الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢٩

Scanned with CamScanner

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

المعادلة	الحل العام
• ماس = ٠	س = ن π
• ماس = ١	س = $\frac{\pi}{2}$ + ٢ ن π
• ماس = -١	س = $\frac{\pi}{2}$ + ٢ ن π
• متاس = ٠	س = $\frac{\pi}{2}$ + ن π
• متاس = ١	س = ٢ ن π
• متاس = -١	س = π + ٢ ن π

ابحث اتصال الدالتين ع

① د(س) = $\frac{\text{س} - ١}{\text{جتا س}}$

الحل

متصلة ∀ ع - {ط : جتا ط = ٠}

∴ جتا س = ٠

∴ س = $\frac{\pi}{2}$ + ن π

∴ الدالة متصلة ∀ ع - {$\frac{\pi}{2}$ + ن π}

② د(س) = $\frac{\text{س}^{٣} + ٣}{١ + \text{جا س}}$

الدالة متصلة ∀ ع - {ط : جا ط = -١}

∴ ١ + جا س = ٠

∴ جا س = -١

∴ س = $\frac{٣\pi}{2}$ + ٢ ن π

∴ الدالة متصلة ∀ ع - {$\frac{٣\pi}{2}$ + ٢ ن π}

د(س) = { ٣س - ٢ ، س ≤ -٢
أ س + ب ، -٢ < س < ٥
س² - ١٢ ، س ≥ ٥

متصلة ∀ ع أوجد أ ، ب

لأنها متصلة ∀ ع

∴ د متصلة عند س = -٢

د متصلة عند س = ٥

∴ د(-٢⁺) = د(-٢⁻) = د(-٢)

د(٥⁺) = د(٥⁻) = د(٥)

∴ د(-٢⁺) = -٢أ + ب

د(-٢) = ٣ × -٢ - ٢ = -٨

∴ -٢أ + ب = -٨ ← ①

د(٥⁻) = ٥أ + ب

د(٥) = ٥٢ - ١٢ = ١٣

∴ ٥أ + ب = ١٣ ← ②

بضرب المعادلة رقم ② × -١

-٥أ - ب = -١٣

-٢أ + ب = -٨

بالجمع

-٧أ = -٢١

∴ أ = ٣

بالتعويض فى ①

-٦ + ب = -٨

∴ ب = -٢

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الواجب :

الاتصال بالنقطة

④ ابحث اتصال الدوال الآتية عند النقطة الموضحة

① $د(س) = س^2 + س - 3$ عند $س = -1$

② $د(س) = \sqrt[3]{س - 1}$ عند $س = 9$

③ $د(س) = \frac{س^2 - 4}{2 - س}$ عند $س = 1$ ، $س = 2$

④ $د(س) = \begin{cases} 4س + 3 & ، س \leq \frac{1}{2} \\ 5 - 2س & ، س > \frac{1}{2} \end{cases}$

⑤ $د(س) = \begin{cases} 4 + س & ، س < -2 \\ 3 + س^2 & ، -2 \leq س < -1 \\ 1 - 4س & ، س \geq -1 \end{cases}$

عند $س = -2$ ، $س = -1$

⑥ $د(س) = \begin{cases} |س| \, س & ، س \neq 0 \\ 2 & ، س = 0 \end{cases}$

عند $س = 0$

⑦ $د(س) = \begin{cases} س^2 + 3 & ، س \neq 1 \\ \frac{س^3 + 2س - 3}{س - 1} & ، س = 1 \end{cases}$

عند $س = 1$

⑧ $د(س) = \begin{cases} \frac{|س - 1| - 3}{س - 3} & ، س \neq 3 \\ 2 & ، س = 3 \end{cases}$

عند $س = 3$

⑨ $د(س) = \begin{cases} \frac{س^2 - 18}{16 - س^4} & ، س \neq 2 \\ |3س + 4| & ، س = 2 \end{cases}$

عند $س = 2$

⑩ $د(س) = \begin{cases} \frac{س^3 + 2س - 3}{|3 + س|} & ، س \neq -3 \\ 2 & ، س = -3 \end{cases}$

عند $س = -3$ ، $س = 1$

⑪ $د(س) = \begin{cases} |س + 3| & ، س \leq 2 \\ 11 - 3س & ، س > 2 \end{cases}$

فكره

عند $س = -3$ ، $س = 2$

⑫ أوجد قيمة $ب$ التي تجعل الدالة الآتية متصلة عند $س = -3$

$د(س) = \begin{cases} \frac{س^3 + 2س - 3}{3 + س} & ، س \neq -3 \\ ب + 5 & ، س = -3 \end{cases}$

$د(س) = \begin{cases} \frac{2 - \sqrt{3 + س}}{1 - س^2} & ، س \neq 1 \\ ب & ، س = 1 \end{cases}$

عند $س = 1$ ، $س = 1$

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢٩

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تمارين على الاتصال على فترة

أ حيث اتصال كل من الدوال الآتية

① $د(س) = ٧$

② $د(س) = س^{٣} - ٢س^{٢} + ١$

③ $د(س) = س^{٣} ظا ٢س$

④ $د(س) = \frac{س}{س^{٢} + س + ١}$

⑤ $د(س) = \frac{س^{٢} - ٩}{س^{٢} - ٥س + ٦}$

⑥ $د(س) = ظا س - ٣ جتا(س + ١)$

⑦ $د(س) = \frac{س}{١ - جتا ٢س}$

⑧ $د(س) = \frac{١}{\sqrt{س - ٢}}$

⑨ $د(س) = \frac{س^{٣} + ١}{ظا س}$

⑩ $د(س) = \frac{٢ + س}{١ + ظا س}$

⑪ $د(س) = \frac{ظا س}{٩ - ٤}$

⑫ $د(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ & ، س \geq ١ \\ ٢ - س & ، س < ١ \end{cases}$

⑬ $د(س) = \begin{cases} ٤ & ، ٢ < س < ٣ \\ ٥ - ٤ & ، ٣ \leq س < ٤ \end{cases}$

خلى بالك لازم تبحث عند ③

⑭ $د(س) = \begin{cases} \frac{(٣ + س)^{٤} - ٨١}{س} & ، س \neq ٠ \\ ١٠٨ & ، س = ٠ \end{cases}$

$د(س) = \begin{cases} \frac{س ظا س + ٤ جتا ٣س - ٤}{٥ س^{٤}} & ، ٠ < س < \frac{\pi}{٤} \\ ٤ جتا س & ، ٠ \leq س \leq \frac{\pi}{٤} \end{cases}$

⑯ اذا كانت

$د(س) = \begin{cases} أ س^{٢} + ب س + ٣ & ، س < ١ \\ ٢ أ س + ب & ، س \geq ١ \end{cases}$

متصلة عند $س = ١$

$د(١) = ٧$

أوجد $أ$ ، $ب$

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢٥

⑬ أوجد قيمة ك التي تجعل الدالة متصلة عند $س = ٠$

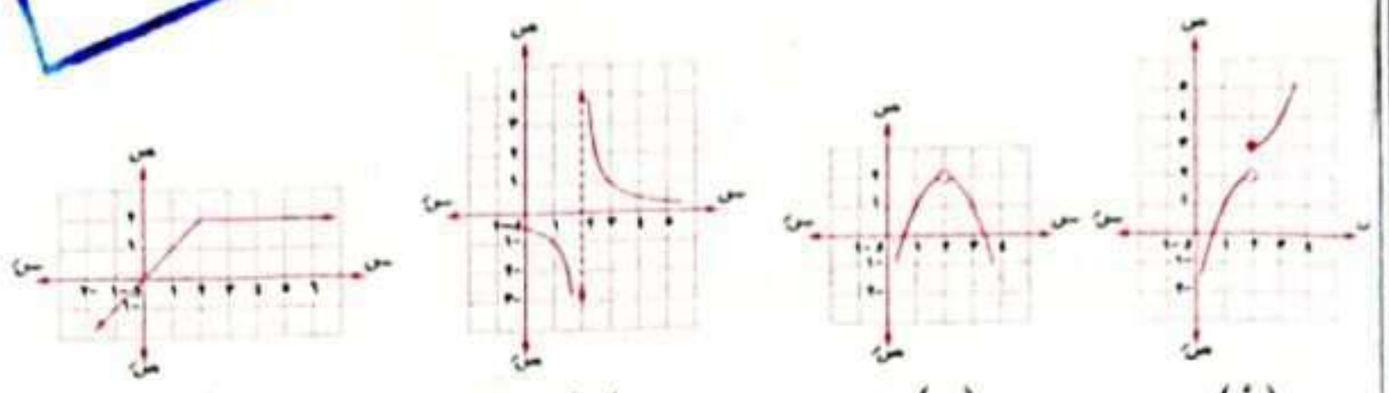
$د(س) = \begin{cases} \frac{جتا ٢س - ١}{س^{٢}} & ، س \neq ٠ \\ ك & ، س = ٠ \end{cases}$

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢٥

أ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

① الشكل الذى يبين الدالة المتصلة عندما س = ٢ هو الشكل .....



(أ) (ب) (جـ) (د)

② إذا كانت : $\lim_{س \to ٢}$ د (س) = ل ، $\lim_{س \to ٢}$ د (س) = م وكانت الدالة

متصلة عند س = ٢ فإن : ل − م = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{ل}{م}$ (جـ) ل م (د) غير معرفة.

③ إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \frac{س^{٢} - ١}{س - ١} & ، س \neq ١ \\ ٢ أ & ، س = ١ \end{cases}$

متصلة عند س = ١ فإن : أ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

④ إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \frac{ما ٢س + طاس}{١ + ما ٤س} & ، س \in]صفر ، \frac{\pi}{٣}[- \{\frac{\pi}{٤}\} \\ ك & ، س = \frac{\pi}{٤} \end{cases}$

متصلة عند س = $\frac{\pi}{٤}$ فإن : ك = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{٥}$ (جـ) ٣ (د) ٢

⑤ إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \frac{ما ٩س طا ٤س}{ك^{٢}} & ، س \in]-\frac{\pi}{٨} ، \frac{\pi}{٨}[- \{٠\} \\ & ، س = ٠ \end{cases}$

متصلة عند س = ٠ فإن : ك = ...

(أ) $\frac{٩}{٤}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\pm \frac{٣}{٢}$ (د) $\pm \frac{٢}{٣}$

⑥ إذا كانت : د (س) = $\frac{س^{٢} - ٢٥}{س - ٥}$ حيث س ≠ ٥

فإن قيمة د (٥) التى تجعل الدالة متصلة عند هذا الموضع تساوى .....

(أ) ١٠ (ب) صفر (جـ) ٢٥ (د) غير معرفة.

⑦ إذا كانت : د (س) = $\frac{س^{٢} - ٥س + ٦}{س^{٢} - ٩}$ حيث س ≠ ± ٣

فإن قيمة د (٣) التى تجعل الدالة متصلة عند هذا الموضع تساوى .....

(أ) $\frac{١}{٦}$ (ب) صفر (جـ) $\frac{١}{٩}$ (د) غير معرفة.

⑧ إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \frac{|س|}{س} & ، س < ٠ \\ ٦ + ٣س^{٢} + ك^{٢} & ، س \geq ٠ \end{cases}$

فإن : ك = ...

(أ) ٢ (ب) $\pm \sqrt{٦}$ (جـ) ± ٢ (د) $\pm \sqrt{٥}$

⑨ إذا كانت د : د (س) = $\frac{س^{٨} - ٢^{٨}}{س^{٥} - ٢^{٥}}$ عند س ≠ ٢ ، د (٢) = ٢٠٠ متصلة عند س = ٢

فإن : ٢ = ...

(أ) ٥ (ب) $\frac{٨}{٥}$ (جـ) ١٢٥ (د) $\frac{١}{٥}$

وقل رب زدنى علما
مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢٥

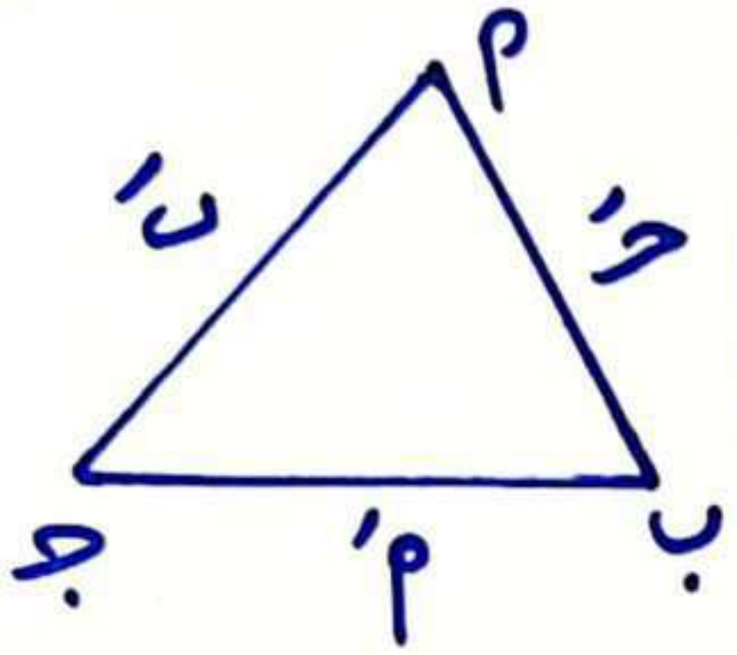
Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

حساب مثلثات

الدرس الأول :- قانون الجيب

في أي مثلث :-



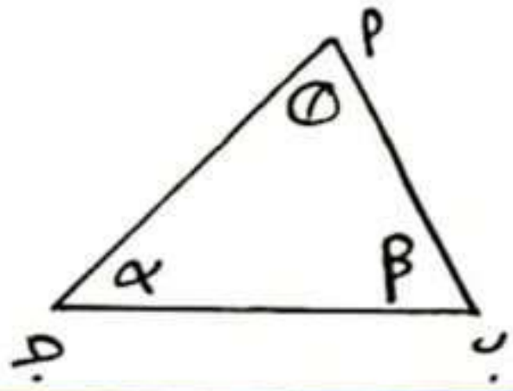
$$\frac{م'}{ام} = \frac{ن'}{اب} = \frac{ح'}{اجـ}$$

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

تذكران :-

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولي ضلعين × جيب الزاوية المحصورة بينهما

= $\frac{1}{2} \times أ ب \times ب جـ \times جا ب$



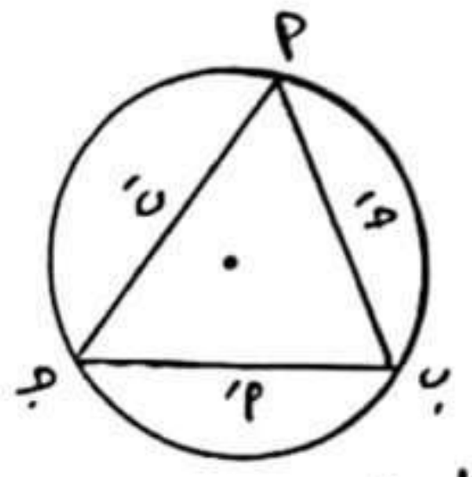
= $\frac{1}{2} \times أ ب \times أ جـ \times جا \theta$

= $\frac{1}{2} \times ب جـ \times أ جـ \times جا \alpha$

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ طول القاعدة × الارتفاع

تمرين مشهور :-



$$\frac{أ'}{جا م} = \frac{ن'}{جا ب} = \frac{ء'}{جا جـ} = 2 \text{ نصف}$$

نصف : هو نصف القطر للدائرة الخارجة المارة برؤوس المثلث

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

أمثلة :

① Δ أ ب جـ إذا كان $\hat{أ} = 60°$

$ق(\hat{ب}) = 30°$

$ق(\hat{جـ}) = 45°$

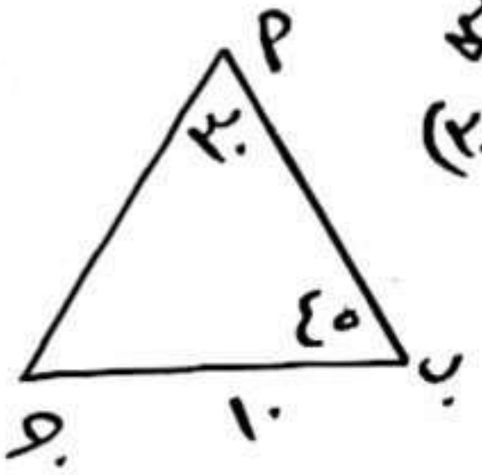
أوجد $\frac{ب}{جـ}$ ، $\frac{ح}{ح}$ لأقرب عشر واحد

ثم أوجد $\frac{ح}{ح}$ لأقرب رقم عشري صحيح

الحل

$ق(\hat{أ}) = 180 - (30 + 45)$

$= 105°$



$\therefore \frac{أ}{ح أ} = \frac{ب}{ح ب} = \frac{جـ}{ح جـ}$

$\therefore \frac{10}{ح 30} = \frac{ب}{ح 45} = \frac{جـ}{ح 105}$

$\therefore ب = \frac{10 \times ح 45}{ح 30} \simeq 14,1$ سم

$جـ = \frac{10 \times ح 105}{ح 30} \simeq 19,3$ سم

$م(\Delta أ ب جـ) = \frac{1}{2} \times أ ب \times ب جـ \times ح 45$

$= \frac{1}{2} \times 10 \times 14,1 \times ح 45$

$= \frac{1}{2} \times 19,3 \times 10 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 68,2$ سم^2

② إذا كان محيط $\Delta أ ب جـ = 24$ سم

$ق(\hat{ب}) = 30°$ ، $ق(\hat{أ}) = 48°$

أوجد $ب ج$

الحل

$ق(\hat{جـ}) = 180 - (48 + 30) = 102°$

$\frac{أ}{ح أ} = \frac{ب}{ح ب} = \frac{جـ}{ح جـ} = \frac{\text{المحيط}}{ح أ + ح ب + ح جـ}$

$\frac{ب}{ح 30} = \frac{24}{ح 48 + ح 30 + ح 102}$

$\therefore ب = \frac{24 \times ح 30}{ح 48 + ح 30 + ح 102} \simeq 5,4$ سم

③ $\Delta أ ب جـ$ فيه

$3 ح أ = 4 ح ب = 2 ح جـ$

أوجد أطوال أضلاعه علماً بأن

المحيط $= 39$ سم

الحل

$3 ح أ = 4 ح ب = 2 ح جـ = ك$ (مثلاً)

$\frac{ح أ}{4} = \frac{ح ب}{3} = \frac{ح جـ}{6}$

$\therefore \frac{ح أ}{4} = \frac{ح ب}{3} = \frac{ح جـ}{6}$

$\therefore أ : ب : جـ = 4 : 3 : 6$

$\therefore أ = 4م$ ، $ب = 3م$ ، $جـ = 6م$

$\therefore 4م + 3م + 6م = 39$

$13م = 39$ $\therefore م = 3$

$\therefore أ = 4م = 4 \times 3 = 12$ سم

$ب = 3م = 3 \times 3 = 9$ سم

$جـ = 6م = 6 \times 3 = 18$ سم

④ إذا كان محيط $\Delta أ ب جـ = 24$ سم

$ق(\hat{ب}) = 30°$ ، $ق(\hat{أ}) = 48°$

أوجد $ب ج$ ← الحل

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢٩

Scanned with CamScanner
المسوحة ضوئيا بـ CamScanner

④ $\triangle$ ا ب جـ فيه ن = ٧ سم

ق(أ) = ٣٠° ، ح = ٩ سم

احسب نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث

يحصر بين أ ب جـ

احسب ق(ب)

الحل

$\frac{ب}{جا ب} = \frac{ن}{جا ب} = \frac{ح}{جا جـ} = ٢$ نصف

$\frac{ن}{جا ب} = ٢$ نصف $\therefore \frac{٧}{جا ٣٠} = ٢$ نصف

$\therefore$ نصف $= \frac{١ \times ٧}{جا ٣٠ ق} = ٧$ سم

$\frac{ح}{جا جـ} = ٢$ نصف $\therefore \frac{٩}{جا جـ} = ١٤$

$\therefore$ جا جـ $= \frac{٩}{١٤}$

(٤٠)

الأول ٤٠

الثاني ١٨٠ - ٤٠ = ١٤٠

$\therefore$ ق(أ) = ٤٠ ، ق(ب) = ١٤٠

ق(ب) = ١١٠ ، ق(جـ) = ١٠

حالة مبهمة في الدرس الثالث بالتفصيل

⑤ $\triangle$ ل م ن فيه ق(ل) = ١٨٠ - ٤٢° ق(ن) = ١٧° ٤٣' ، ن = ٣٥ سم

أوجد ① طول $\overline{م ن}$ ، $\overline{ل م}$

② مساحة الدائرة المارة برؤوس

ل ، م ، ن $\therefore$ ق(م) = ١٨٠ - (٤٢° ٨' + ١٧° ٤٣')

= ١١٦° ٥١'

$\frac{ل}{جا م} = \frac{م}{جا ن} = \frac{ن}{جا ل} = ٢$ نصف

$\therefore \frac{ل}{جا ٤٢° ٨'} = \frac{٣٥}{جا ١١٦° ٥١'} = \frac{ن}{جا ١٧° ٤٣'} = ٢$ نصف

$\therefore$ ل = م ن $= \frac{٣٥ \times جا ٤٢° ٨'}{جا ١١٦° ٥١'} \approx ٢٧,٨$ سم

ن = ل م $= \frac{٣٥ \times جا ١٧° ٤٣'}{جا ١١٦° ٥١'} = ١٩,٦$ سم

نصف $= \frac{٣٥}{٢ جا ١١٦° ٥١'} \approx ١٩,٦$ سم

$\therefore$ مساحة الدائرة = π نصف^٢

$= \frac{٢٢}{٧} \times (١٩,٦)^٢ \approx ١٢٠٧,٤$ سم^٢

⑥ $\triangle$ ا ب جـ فيه ن = ١٠ سم

ق(أ) = ٤٠° ، ق(ب) = ٨٠°

أوجد طول أكبر الأضلاع طولاً

الحل

ق(جـ) = ١٨٠ - (٤٠ + ٨٠) = ٦٠°

$\therefore$ أكبر الأضلاع تقابل أكبر زاوية (أ)

$\therefore$ أكبر الأضلاع هو $\overline{ح}$ أو (أ ب)

$\frac{ح}{جا جـ} = \frac{ن}{جا ب}$ $\therefore \frac{ح}{جا ٦٠} = \frac{١٠}{جا ٨٠}$ $\therefore$ ح = ١١,٤ سم

أ / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(٧) أوجد محيط المثلث أ ب جـ الذي فيه ق = ٨٤ سم

ق(أ) = ٤٦° ١٨′ ، ق(ب) = ٧٥° ١٣′

الحل

ق(جـ) = ١٨٠ − (٤٦° ١٨′ + ٧٥° ١٣′)

= ٥٨° ٢٩′

$$\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{جـ}{جا جـ}$$

$$\frac{أ}{جا ٧٥° ١٣′} = \frac{ب}{جا ٤٦° ١٨′} = \frac{٨٤}{جا ٥٨° ٢٩′}$$

∴ أ = ٨٠٫٧ سم ، ب = ٦٥٫٩ سم

∴ المحيط = ٨٠٫٧ + ٦٥٫٩ + ٨٤

≈ ٢٣٠٫٦ سم

(٨) أ ب جـ مثلث متساوي الساقين فيه ق(أ) = ١٢٠° وطول نصف قطر الدائرة الخارجة يساوي ١٢ سم أوجد ق ثم أوجد طول ضلع المثلث أ ب جـ

الحل

ق(ب) = ق(جـ) = $\frac{١٨٠ - ١٢٠}{٢}$ = ٣٠°

$$\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{جـ}{جا جـ} = ٢ نق$$

$$\frac{أ}{جا ١٢٠} = \frac{ب}{جا ٣٠} = ٢٤$$

∴ أ = ٢٤ × جا ١٢٠ = ١٢ √٣

ب = ٢٤ × جا ٣٠ = ١٢ √١

∴ ق = ٢٤ × جا ٦٠ = ١٢ √٣

∴ مساحة المثلث

= $\frac{١}{٢}$ × ق × ب × جا أ

= $\frac{١}{٢}$ × ١٢ √٣ × ١٢ √١ × جا ١٢٠ ≈ ٣٤٫٤ سم²

(٩) أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة طولها ٥٠ سم ق(ب) = ٤٥° ، ق(جـ) = ٥٦° أوجد طول أ ب ثم أوجد مساحة سطح المثلث

الحل

ق(أ) = ١٨٠ − (٤٥ + ٥٦) = ٧٩°

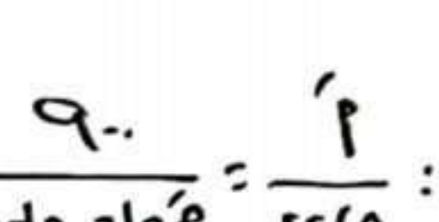
$$\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{جـ}{جا جـ} = ٢ نق$$

$$\frac{أ}{جا ٧٩°} = \frac{ب}{جا ٤٥°} = ٥٠$$

∴ ب = ٥٠ × جا ٤٥° = ٣٥٫٤ سم

مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × أ × ب × جا جـ

= $\frac{١}{٢}$ × ٥٠ × ٣٥٫٤ × جا ٥٦° ≈ ٧٣٤٫٣ سم²



∴ $\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{جـ}{جا جـ}$

$$\frac{أ}{جا ٧٩°} = \frac{ب}{جا ٤٥°} = \frac{جـ}{جا ٥٦°}$$

$$\frac{أ}{٠٫٩٨٥} = \frac{ب}{٠٫٧٠٧} = \frac{جـ}{٠٫٨٣٢}$$

∴ أ = ٧٫٤ ، ب = ٥٫٣ سم

∴ المحيط = ٧٫٤ + ٥٫٣ + ٦٫٩

≈ ١٩٫٦ سم

(١٠) أ ب جـ مثلث فيه ق(أ) = ٦٠° ، ق(ب) = ٤٥° ، ب جـ = ٩ سم أوجد طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث ثم أوجد مساحة سطح المثلث

الحل

ق(جـ) = ١٨٠ − (٦٠ + ٤٥) = ٧٥°

$$\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{جـ}{جا جـ} = ٢ نق$$

$$\frac{٩}{جا ٦٠°} = ٢ نق$$

∴ نق = $\frac{٩}{٢ \times جا ٦٠°}$ = $\frac{٩}{٢ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}}$ = $\frac{٩}{\sqrt{٣}}$ = $\frac{٩ \sqrt{٣}}{٣}$ = ٣ √٣ سم

$$\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{جـ}{جا جـ}$$

$$\frac{أ}{جا ٦٠°} = \frac{ب}{جا ٤٥°} = \frac{جـ}{جا ٧٥°}$$

$$\frac{أ}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} = \frac{ب}{\frac{\sqrt{٢}}{٢}} = \frac{جـ}{٠٫٩٦٦}$$

$$\frac{أ}{٠٫٨٦٦} = \frac{ب}{٠٫٧٠٧} = \frac{جـ}{٠٫٩٦٦}$$

∴ $\frac{٩}{٠٫٩٦٦}$ = $\frac{ب}{٠٫٧٠٧}$ ∴ $\frac{٩}{٠٫٩٦٦}$ = $\frac{أ}{٠٫٨٦٦}$

∴ ب = ٦٫٥٣ سم ∴ أ = ٨٫٠٧ سم

مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ب × جـ × جا أ

= $\frac{١}{٢}$ × ٦٫٥٣ × ٩ × جا ٦٠° ≈ ٢٥٫٣ سم²

مستر / لطفي زهران
رياضيات الثانوية العامة

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الواجب :

① Δ س ص ع فيه م(∠س) = ٨٠°
م(∠ص) = ٦٠° ، ع = ٢٠ سم
أوجد كلاً من س ، ص لأقرب سم

② Δ أ ب جـ فيه ك = ١٩ سم
م(∠أ) = ١١٢° ، م(∠ب) = ٣٣°
أوجد جـ ثم أوجد طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث لأقرب رُبع سم

③ ل م ن Δ فيه م = ٦٨,١٤ سم
م(∠م) = ١٠٠° ، م(∠ن) = ٤٠°
أوجد ① ل ، ② ن ص لأقرب سم

④ Δ أ ب جـ فيه ك = ٥,٤ سم
م(∠أ) = ١٠٠° ، م(∠ب) = ٩٥°
أوجد طول أصغر ضلع

⑤ Δ أ ب جـ فيه م(∠أ) = ٣٥°
أ ب = ٨ سم ، ب جـ = ٦ سم ، م(∠جـ)
م(∠جـ) = ٨٧°

⑥ Δ أ ب جـ ، م(∠ب) = ٤٥°
م(∠جـ) = ٦٠° ، طول قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث = ٤٠ سم
وتحيط هذا المثلث لأقرب عدد صحيح

⑦ إذا كان محيط Δ أ ب جـ = ٤٠ سم
م(∠أ) = ٤٤° ، م(∠ب) = ٦٦°
أوجد أطوال أضلاع Δ أ ب جـ

⑧ Δ س ص ع فيه ص ع = ١٥ سم
م(∠ص) = ٣٠° ، م(∠ع) = ٧٠°
أوجد طول العمود الساقط من س على ص ع

⑨ Δ أ ب جـ فيه ب ج = ٥ سم
ط جـ = ٤ / ٣ ، م(∠ب) = ٣٠°
أوجد لأقرب سم كلاً من أ ، جـ
ومحيط Δ أ ب جـ

⑩ أ ب جـ د متوازي أضلاع
فيه م(∠أ) = ٥٠° ، م(∠ب جـ د) = ٧٠°
ب د = ٨ سم أوجد محيط متوازي الأضلاع

⑪ أ ب جـ د شكل رباعي فيه
ب د = ٦٠ سم ، م(∠ب جـ أ) = ٣٦°
م(∠ب د أ) = ٥٥° ، م(∠ب أ د) = ٨٥°
م(∠جـ د أ) = ٨٧°
أوجد طول كل من : ب جـ ، أ د
لأقرب سم

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢٦

Scanned with CamScanner
المسوحة ضوئيا بـ CamScanner

① فى أى مثلث س ص ع يكون : س ص : ص ع = ...

(أ) ما س : ما ص (ب) ما ص : ما ع

(جـ) ما ع : ما س (د) ما ع : ما ص

② فى المثلث ء هـ و الذى فيه : ق (د ء) = ٨٠° ، ق (د هـ) = ٦٠°

إذا كان : وَ = ١٢ سم فإن : ءَ = ... سم

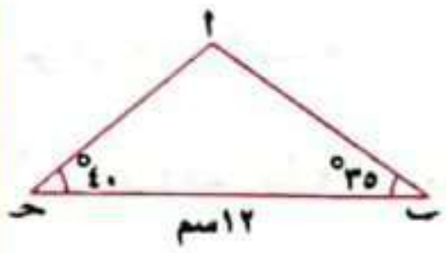
(أ) $\frac{١٢ \text{ ما } ٨٠^\circ}{\text{ما } ٤٠^\circ}$ (ب) $\frac{١٢ \text{ ما } ٨٠^\circ}{\text{ما } ٦٠^\circ}$

(جـ) $\frac{١٢ \text{ ما } ٤٠^\circ}{\text{ما } ٨٠^\circ}$ (د) $\frac{١٢ \text{ مثا } ٨٠^\circ}{\text{مثا } ٤٠^\circ}$

③ 📖 س ص ع مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ١٠ √٣ سم فإن طول قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث يساوى .....

(أ) ٥ سم (ب) ١٠ سم (جـ) ١٥ سم (د) ٢٠ سم

④ فى الشكل المقابل :



طول $\overline{ا ب}$ = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٧

(جـ) ٨ (د) ٩

⑤ دائرة طول قطرها ٢٠ سم ، تمر برؤوس Δ ا ب حـ

الحاد الزوايا الذى فيه : ب حـ = ١٠ سم فإن : ق (د ا) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٤٥° (د) ١٥٠°

⑥ إذا كان طول ضلع ما فى أى مثلث = ١٢ سم ، وقياس الزاوية المقابلة لهذا الضلع = ٥٥°

فإن محيط الدائرة المارة برؤوس هذا المثلث ≈ ..... سم

(أ) ٣٦ (ب) ٤٢ (جـ) ٤٦ (د) ٥٢

⑦ فى Δ س ص ع يكون المقدار : ٢ نق ما س = ... «حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة له»

(أ) عَ (ب) صَ

(جـ) سَ (د) مساحة Δ س ص ع

⑧ 📖 إذا كان نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث س ص ع

فإن : $\frac{\text{صَ}}{\text{٢ ما ص}}$ = ...

(أ) نق (ب) ٢ نق (جـ) $\frac{١}{٢}$ نق (د) ٤ نق

⑨ 📖 فى أى مثلث ا ب حـ يكون $\frac{\text{ما ا} + \text{ما ب}}{\text{ما ا} + \text{ما ب}}$ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{\text{حَ}}{\text{أَ} + \text{بَ}}$ (جـ) $\frac{\text{أَ}}{\text{بَ} + \text{حَ}}$ (د) $\frac{\text{بَ}}{\text{أَ} + \text{حَ}}$

⑩ فى Δ ا ب حـ يكون : $\frac{\text{أَ}}{\text{أَ} + \text{بَ}} = \frac{\text{ما ا}}{.....}$

(أ) ما ب (ب) ما حـ (جـ) ما ا + ما ب (د) ما ا + ما حـ

⑪ 📖 فى Δ س ص ع : إذا كان ٣ ما س = ٤ ما ص = ٢ ما ع

فإن سَ : صَ : عَ = ...

(أ) ٢ : ٣ : ٤ (ب) ٦ : ٤ : ٣ (جـ) ٣ : ٤ : ٦ (د) ٤ : ٣ : ٦

⑫ 📖 ا ب حـ مثلث فيه : $\frac{\text{ما ا}}{٣} = \frac{٢ \text{ ما ب}}{٥} = \frac{\text{ما حـ}}{٤}$ فإن : أَ : بَ : حَ = ...

(أ) ٦ : ٥ : ٨ (ب) ٨ : ٥ : ٦ (جـ) ٧ : ٢ : ٤

MR/ Lotfy Zahran

مستر/ لطفى زهران
مدرس المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢٦

⑫ فى أى مثلث ا ب حـ يكون : $\frac{\text{أَ}}{\text{بَ}} \times \frac{\text{بَ}}{\text{حَ}} = \frac{\text{ما ب}}{\text{ما ا}}$ = ...

(أ) $\frac{\text{حَ}}{\text{ما حـ}}$ (ب) $\frac{\text{ما حـ}}{\text{حَ}}$ (جـ) ٤ نق٢ (د) ١

⑬ إذا كان ا ب حـ مثلث فيه : ا ب = ٨ سم ، ب حـ = ١٢ سم ، ق (د ا) - ق (د حـ) = ٩٠°

فإن : ما ا = $\frac{٢}{٣}$ ما ب

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) ١

⑭ 📖 فى Δ ا ب حـ إذا كان ا ب حـ قائم الزاوية ومتساوى الساقين ، نق طول نصف قطر الدائرة برؤوسه فإن مساحة Δ ا ب حـ = ... (بدلالة نق)

(أ) $\frac{١}{٢}$ نق٢ (ب) ٢ نق٢ (جـ) نق٢ (د) ٤ نق٢

⑮ إذا كان ا ب حـ مثلث محيطه ٢٤ سم وكان : ما ا + ما ب = ٢ ما حـ

فإن : ما حـ = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ٩

⑯ إذا كان ا ب حـ مثلث فيه : ق (د ا) = ٣٠° ، ق (د ب) = ٩٠° ، ا ب = ٦ سم

فإن : ما حـ = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٢

⑰ 📖 فى Δ ا ب حـ إذا كان ا ب حـ مثلث فيه : ا ب = ٨ سم ، ب حـ = ١٢ سم ، ق (د ا) - ق (د حـ) = ٩٠°

فإن : ما حـ = ...

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

Scanned with CamScanner

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الدرس الثانى:- قانون جيب التمام

حفظا يا قلبى

فى أى مثلث أ ب حـ يكون :

$أ^2 = ب^2 + حـ^2 - 2 ب حـ \, جتا أ$ ومنها $جتا أ = \frac{ب^2 + حـ^2 - أ^2}{2 ب حـ}$

$ب^2 = أ^2 + حـ^2 - 2 أ حـ \, جتا ب$ ومنها $جتا ب = \frac{أ^2 + حـ^2 - ب^2}{2 أ حـ}$

$حـ^2 = أ^2 + ب^2 - 2 أ ب \, جتا حـ$ ومنها $جتا حـ = \frac{أ^2 + ب^2 - حـ^2}{2 أ ب}$

تستخدم هذه القاعدة إذا علم
طولا ضلعين فى Δ أ ب حـ
وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

تستخدم هذه القاعدة إذا علمت
أطوال أضلاع Δ أ ب حـ أو
النسبة بينها.

مستر / لطفي زهران
مدرس الرياضيات الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

امتى استخدم القاعدة دى :

لو أعطاك ضلعين وزاوية محصورة بينهما

لو أعطاك ٣ أضلاع

(١) Δ ق ب جـ فيه ب = ٣٠ سم ، جـ = ١٤ سم ، ق(∠ب) = ٦٠°
أوجد طول أ ق

الحل

$أ ق^2 = ب^2 + جـ^2 - 2 ب جـ \, جتا ب$

$أ ق^2 = (٣٠)^2 + (١٤)^2 - 2 \times ٣٠ \times ١٤ \times جتا ٦٠$

$أ ق^2 = ٦٧٦$ ∴ $أ ق = \sqrt{٦٧٦} = ٢٦$ سم

(٢) Δ س ص ع فيه س = ٤ سم ، ص = ٥ سم ، ع = ٦ سم
اوجد قياس اكبر زواياه وكذلك صاحبة اكبر ضلع

الحل

اكبر زاوية (ع) لانها تقابل اكبر ضلع

$جتا ع = \frac{س^2 + ص^2 - ع^2}{2 س ص}$

$جتا ع = \frac{١٦ + ٢٥ - ٣٦}{٤٠} = \frac{١}{٨}$

∴ ق(∠ع) = ٨٢° ٢٨′ ٤٩″

∴ م(Δ س ص ع) = $\frac{1}{2} \times س \times ص \times جتا ع$

$= \frac{1}{2} \times ٤ \times ٥ \times ٩٦٥٦٢٥ = ٩,٩$ سم²

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
01028089912 - 01115956226

(٣) $\triangle$ أ ب جـ فيه أ ب = ٣ سم ، ب جـ = ٥ سم ، جـ أ = ٧ سم

أوجد ($\overrightarrow{أ ب}$ ، $\overrightarrow{أ جـ}$)

الحل

$$\text{جتا} أ = \frac{أ ب^2 + أ جـ^2 - ب جـ^2}{2 أ ب \times أ جـ}$$

$$\text{جتا} أ = \frac{9 + 49 - 25}{2 \times 3 \times 7} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ ق($\angle$ أ) = ٦٠°

(٢)

الثاني: ١٨٠ − ٦٠ = ١٢٠

الثالث: ١٨٠ + ٦٠ = ٢٤٠ مرفوض

$\therefore$ ق($\angle$ أ) = ١٢٠°

(٤) $\triangle$ أ ب جـ فيه ق($\angle$ أ) = ٩٦° ٢٣′

أ ب = ٧ سم ، ب جـ = ٩ سم أوجد

(١) جـ (٢) مساحة $\triangle$ أ ب جـ لأقرب سم^2

(٣) طول نصف قطر الدائرة الذي يمر بالرؤوس

الحل

$$ب جـ^2 = أ ب^2 + أ جـ^2 - 2 أ ب \times أ جـ \times \text{جتا} أ$$

$$ب جـ^2 = 49 + 81 - 2 \times 7 \times 9 \times \text{جتا} 96° 23′$$

$$ب جـ^2 = 144 \quad \therefore ب جـ = 12$$

$$\text{مساحة} \triangle = \frac{1}{2} \times أ ب \times ب جـ \times \text{جا} أ$$

$$= \frac{1}{2} \times 7 \times 9 \times \text{جا} 96° 23′ = 31 \text{ سم}^2$$

$$\frac{ب جـ}{\text{جا} أ} = 2 \text{ نق} \quad \therefore 2 \text{ نق} = \frac{12}{\text{جا} 96° 23′}$$

$$\therefore \text{نق} = \frac{12}{2 \text{ جا} 96° 23′} = 6$$

(٥) $\triangle$ صع ل سبه بين الهواء أفلاعه

س : ص : ع = ٤ : ٥ : ٦ بين أن قياس أصغر زواياه ٤١° ٢٥′ تقريبا

الحل

نفرض أن س = ٤ك ، ص = ٥ك ، ع = ٦ك

أصغر زاوية هي زاوية س

$$\text{جتا} س = \frac{ص^2 + ع^2 - س^2}{2 ص \times ع}$$

$$= \frac{25ك^2 + 36ك^2 - 16ك^2}{2 \times 5ك \times 6ك} = \frac{45ك^2}{60ك^2} = \frac{3}{4}$$

$\therefore$ جتا س = $\frac{3}{4}$ $\therefore$ ق($\angle$ س) = ٤١° ٢٥′

(٦) $\triangle$ أ ب جـ فيه أ ب = ١٦ سم ، ب جـ = ١٨ سم

ظا ب = $\frac{3}{4}$ أوجد مساحة $\triangle$ ، ومحيطه

الحل

$\because$ ظا ب = $\frac{3}{4}$ $\therefore$ جا ب = $\frac{3}{5}$ ، جتا ب = $\frac{4}{5}$

$$\therefore \text{مساحة} \triangle = \frac{1}{2} \times أ ب \times ب جـ \times \text{جا} ب$$

$$= \frac{1}{2} \times 16 \times 18 \times \frac{3}{5} = 86.4 \text{ سم}^2$$

لإيجاد المحيط ... عايزين ب جـ

$$\therefore أ جـ^2 = أ ب^2 + ب جـ^2 - 2 أ ب \times ب جـ \times \text{جتا} ب$$

$$أ جـ^2 = (16)^2 + (18)^2 - 2 \times 16 \times 18 \times \frac{4}{5}$$

$$\therefore أ جـ^2 = 119.2 \quad \therefore ب جـ \approx 11 \text{ سم}$$

$\therefore$ محيط $\triangle$ = 16 + 18 + 11 = 45 سم

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٧ $\triangle$ أ ب جـ ، ق (أ ب) = ٥ سم

$\frac{1}{3}$ ق (أ م) = $\frac{1}{4}$ ق (أ ب) = $\frac{1}{5}$ ق (أ جـ)

أوجد ق ($\angle$ أ) ، إذا كان محيطه = ٤٢ سم

أوجد ق ($\angle$ أ) ، إذا كان محيطه = ٤٢ سم

الحل

$\frac{\text{ق}(\text{أ م})}{3} = \frac{\text{ق}(\text{أ ب})}{4} = \frac{\text{ق}(\text{أ جـ})}{5} = \text{ك}$

∴ أ م = ٣ ك ، أ ب = ٤ ك ، أ جـ = ٥ ك

∴ محيط = ٤٢ سم

∴ ٣ ك + ٤ ك + ٥ ك = ٤٢

١٢ ك = ٤٢ ∴ ك = ٣

∴ أ م = ٣ × ٣ = ٩ سم ، أ ب = ٤ × ٣ = ١٢ سم

∴ ق ($\triangle$ أ ب جـ) = $\frac{1}{2}$ × أ م × أ ب × جا أ

= $\frac{1}{2}$ × ٩ × ١٢ × جا ٩٠° = ٥٤ سم٢

∴ ق ($\angle$ أ) = ٩٠°

∴ $\frac{\text{صفر}}{\text{ك}^2} = \frac{\text{صفر}}{\text{ك}^2}$

∴ أ م + م ب + ب أ = ٤٢ سم

٣ ك + ٤ ك + ٥ ك = ٤٢

١٢ ك = ٤٢ ∴ ك = ٣

∴ أ م = ٣ × ٣ = ٩ سم ، م ب = ٤ × ٣ = ١٢ سم

∴ ق ($\triangle$ أ ب جـ) = $\frac{1}{2}$ × أ م × م ب × جا أ

= $\frac{1}{2}$ × ٩ × ١٢ × جا ٩٠° = ٥٤ سم٢

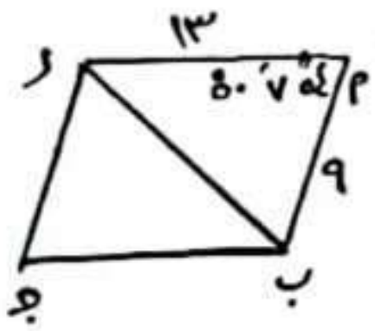
مستر / لطفي زهران
رياضيات الحلس الاعدادية والثانوية
٠١١١٥٩٥٦٢٢٦ - ٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

٨ أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه

أ ب = ٩ سم ، ب جـ = ١٣ سم ، أ جـ = ٢٠ سم

أوجد طول ب د

الحل



جتا ب = $\frac{\text{أ ب}^2 + \text{ب جـ}^2 - \text{أ جـ}^2}{2 \text{ أ ب ب جـ}}$

∴ جتا ب = $\frac{(13)^2 + (9)^2 - (20)^2}{2 \times 9 \times 13}$ = $\frac{-50}{39}$

الثاني ١٨٠ − ٤٥° ٧′ ٥٠″

الثالث ٤٥° ٧′ ٥٠″

∴ ق (الثاني) = ١٨٠ − ٤٥° ٧′ ٥٠″

= ١٢٩° ٥٢′ ٦″

من تطابق المثلثين

∴ ق ($\angle$ أ) = ١٢٩° ٥٢′ ٦″

∴ ق ($\angle$ أ) = ١٨٠ − ١٢٩° ٥٢′ ٦″

= ٥٠′ ٧ ٤٥°

∴ أ د = ب جـ

∴ أ د = ١٣

∴ أ د^2 = ب د^2 + أ ب^2 − ٢ ب د × أ ب × جتا ٤٥° ٧′ ٥٠″

∴ ٢٠^2 = ب د^2 + ٩^2 − ٢ × ٩ × ب د × ٠٫٧٠٠٠

∴ ب د^2 − ١٢٫٦ ب د − ٣٠٠ = ٠

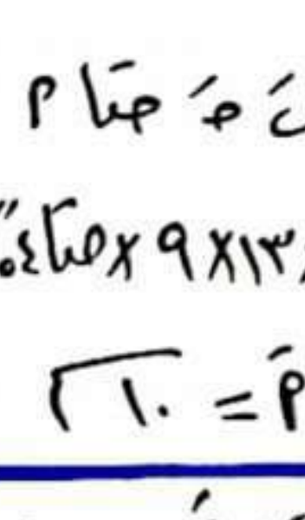
∴ ب د = ٢٠ سم

٩ أ ب جـ د شكل رباعي فيه ب د = ١٠ سم

أ د = ٨ سم ، ق ($\angle$ د أ ب) = ق ($\angle$ د ب ط) = ٩٠°

ق ($\angle$ د ب جـ) = ٣٠° أوجد أ جـ لأقرب سم

الحل



أ ب = $\sqrt{10^2 - 8^2}$ = $\sqrt{36}$ = ٦ سم

أ ب = ٦ سم ← فيثاغورث

∴ ق ($\angle$ ب) = ٣٠°

∴ ب د = $\frac{1}{2}$ وتر

∴ وتر = ٢٠ سم ، ق ($\angle$ ب) = ٦٠°

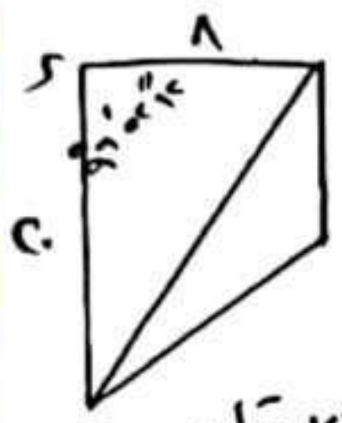
Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

لطفي زهران
مدرس الرحلتين الإعدادية والثانوية
01028089912

ط(ب ∩ ب) = ٦/٨

∴ م(ب ∩ ب) = ٣٦° ٥٢′ ١٢″

∴ م(ب ∩ ص) = ٩٦° ٥٢′ ١٢″ = ٦٠° + ٣٦° ٥٢′ ١٢″



ق(∠ب) = ق(∠د) = ٦٠°

ق(∠ب) = ٦٠°

∴ ب ج² = ٨² + ٦² − ٢ × ٨ × ٦ × جتا ٦٠°

∴ ب ج² = ٦٤ + ٣٦ − ٩٦ × ١/٢

∴ ب ج² = ٢٨

∴ ب ج = √٢٨ = ٥,٢٩ سم

∴ ب ج ≈ ٥,٣ سم

الواجب :-

① ∆ ب ص ع فيه م(∠ع) = ٩٠°

ص ع = ١٣ سم ، ب ص = ١٦ سم

أوجد ب ع

② ∆ ب ج فيه م(∠ب) = ٣٠° ، ب ج = ٤ سم

م(∠ج) = ٤٥° أوجد ب

③ ∆ ب ج فيه ب ج = ٣ سم

ق(∠ب) = ٦٠° ، ق(∠ج) = ٤٥°

أوجد ب ج

④ ∆ ب ج فيه ب ج = ٥ سم

ق(∠ب) = ٣٠° ، ق(∠ج) = ٤٥°

أوجد ب

⑤ ∆ ب ج فيه ب ج = ٣ سم ، ق(∠ب) = ٦٠°

ق(∠ج) = ٤٥° أوجد ب

⑥ ∆ ب ص ع فيه

ق(∠ب) : ق(∠ص) : ق(∠ع) = ٧ : ٨ : ١٢

أوجد قياس أكبر زاوية

⑦ ∆ ب ج فيه ق(∠ب) = ٣ ق(∠ج) = ٤ ق(∠ب)

أوجد قياس أصغر زاوية

⑧ ب ج د متوازي أضلاع فيه

ب ج = ١٦ سم ، ب د = ٢٠ سم

ق(∠ب م ج) = ٥٠° حيث م ملتقى القطرين

أوجد ب م ، ق(∠ب م د) لأقرب سم

⑨ ب ج د متوازي أضلاع فيه ب ج = ٨ سم

فإذا كانت النسبة بين طولي ضلعين متجاورين ٣ : ٢ فإذا كان ب د = ٨ سم

أوجد طول ب ج

⑩ ∆ ب ج فيه ب = ٣ سم

ق(∠ج) = ٦٠° أوجد ق(∠ب) ، ق(∠ب)

⑪ ∆ ب ج فيه ب = ٥ سم ، ق(∠ب) = ١٢٠°

مساحته = ٣٧١ سم²

أوجد ب ، ج ، ق(∠ب)

⑫ ∆ ب ج محيطه ٧٠ سم

ب = ٢٦ سم ، ق(∠ب) = ٦٠°

أوجد مساحة سطح المثلث ثم اجب مساحة سطح المربع

⑬ ∆ ب ج فيه ب = ١٣ سم

ج = ٥ سم ، ق(∠ب) = ١٧°

أوجد قياس أكبر زاوية في المثلث ثم اجب مساحة سطح المربع

⑭ ∆ ب ج فيه ب = ١٣ سم

ج = ٥ سم ، ق(∠ب) = ١٧°

أوجد قياس أكبر زاوية في المثلث ثم اجب مساحة سطح المربع

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

@SecondaryTwo_M

إختر الاجابة الصحيحة :-

① فى Δ س ص ع المقدار $\frac{س^{٢} + ص^{٢} - ع^{٢}}{٢ س ص}$ = ...

(أ) مٰا س (ب) مٰا ص (جـ) مٰا ع (د) ما ع

② فى المثلث س ص ع يكون : $ص^{٢} + ع^{٢} - س^{٢} = ٢ ص ع$ × .....

(أ) مٰا س (ب) ما ع (جـ) مٰا ع (د) ما س

③ فى المثلث س ص ع إذا كان : س = ص فإن : مٰا س = ...

(أ) $\frac{٢ ص^{٢}}{ع}$ (ب) $\frac{ع}{٢ ص}$ (جـ) $\frac{ع}{٤ س}$ (د) $\frac{ص}{٢ س}$

④ فى Δ أ ب حـ يكون مٰا (أ + ب) = ...

(أ) $\frac{أ^{٢} + ب^{٢} - حـ^{٢}}{٢ أ ب}$ (ب) $\frac{أ^{٢} + حـ^{٢} - ب^{٢}}{٢ أ ب}$

(جـ) $\frac{ب^{٢} + حـ^{٢} - أ^{٢}}{٢ ب حـ}$ (د) $\frac{حـ^{٢} - أ^{٢} - ب^{٢}}{٢ أ ب}$

⑤ إذا كان : أ ب حـ مثلث فيه : ٥ مٰا أ مٰا ب = ٦ مٰا ب مٰا حـ = ٩ مٰا حـ مٰا أ

فإن : ق (∠ حـ) ≈ .....

(أ) ٢٨° (ب) ٣٢° (جـ) ٣٦° (د) ٤٢°

⑥ إذا كان : أ ب حـ مثلث فيه : ٦ أ = ٤ ب = ٣ حـ

فإن قياس أصغر زوايا المثلث ≈ .....

(أ) ٥٧° ٢٨َ (ب) ٤١° ١٢َ (جـ) ٢٨° ٥٧َ (د) ٣٦° ٥٢َ

⑦ أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ) = ٦٠° ، ب : حـ = ٥ : ٨ وكانت مساحة الدائرة المارة برؤوس المثلث تساوى ١٤٧ π سم^{٢} فإن : محيط Δ أ ب حـ = ... سم

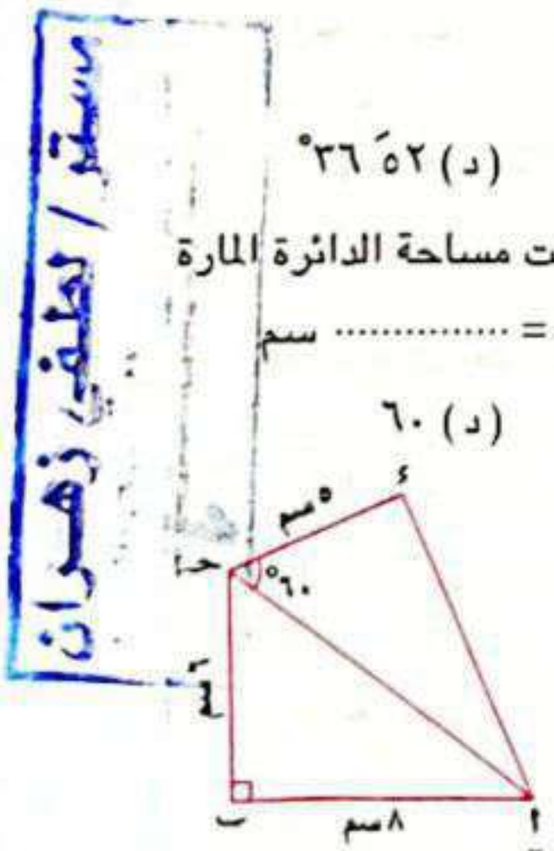
(أ) ٢١ (ب) ٣٤ (جـ) ٥٤ (د) ٦٠

⑧ فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء شكل رباعى فيه :

أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ٦ سم ، ق (∠ ب) = ٩٠°

، ء حـ = ٥ سم ، ق (∠ أ حـ ء) = ٦٠°



فإن مساحة الدائرة المارة برؤوس Δ أ ء حـ = ... سم^{٢}

(أ) ٩ π (ب) ١٦ π (جـ) ٢٥ π (د) ٤٩ π

مستر / لطفى زهران
رياضيات الحلقتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢
Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مستر / لطفي زهران
رياضيات الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

حل المثلث

الحاله الأولى: زاويتين وضلع

هستخدم قاعدة الجيب (قا)

مثال: حل المثلث أ ب جـ حيث م(أ) = ٣٠° ، م(ب) = ٤٥° ، أ ب = ١٠ سم

الحل

م(جـ) = ١٨٠ − (٣٠ + ٤٥) = ١٠٥

$\therefore \frac{أ}{جا م} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{جـ}{جا جـ}$ $\therefore \frac{١٠}{جا ٣٠} = \frac{ب}{جا ٤٥} = \frac{جـ}{جا ١٠٥}$

$\therefore ب = \frac{١٠ \times جا ٤٥}{جا ٣٠} = ١٠ \sqrt{٢} \times ٢ = ١٤,١ سم$ ، $جـ = \frac{١٠ جا ١٠٥}{جا ٣٠} = ١٩,٣ سم$

الحاله الثانية: ضلعين وزاويه محصورة بينهما

هستخدم قاعدة جيب التمام (قتا)

مثال: حل المثلث أ ب جـ الذى فيه ب = ٣٠ سم ، جـ = ١٤ سم

م(أ) = ٦٠°

$\therefore أ^٢ = ب^٢ + جـ^٢ - ٢ ب جـ جتا أ = (٣٠)^٢ + (١٤)^٢ - ٢ \times ٣٠ \times ١٤ \times جتا ٦٠°$

$\therefore أ^٢ = ٦٧٦$ $\therefore أ = \sqrt{٦٧٦} = ٢٦ سم$

$جتا جـ = \frac{أ^٢ + ب^٢ - جـ^٢}{٢ أ ب} = \frac{(٢٦)^٢ + (٣٠)^٢ - (١٤)^٢}{٢ \times ٢٦ \times ٣٠} = \frac{٤٣}{٥٦}$

$\therefore$ م(جـ) = ١٨٠ − (٣٩° ٤٧′ ٨٢″ + ٦٠°) = ٧٩° ١٢′ ٥٠″

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحالة الثالثة :. يعطيك الـ ③ أضلاع

هستخدم قاعدة جيب التمام يرضه (ق ق)

مثال

حل المثلث ا ب جـ الذى فيه ا = ٥ سم ، ب = ٧ سم ، جـ = ١١ سم

$\therefore \text{ق}(\hat{أ}) = \frac{ب^2 + جـ^2 - أ^2}{2 ب جـ} = \frac{121 + 25 - 49}{2 \times 11 \times 5} = \frac{97}{110}$ ، $\text{ق}(\hat{أ}) \approx 28^\circ\ 8'$

$\therefore \text{ق}(\hat{ب}) = \frac{أ^2 + جـ^2 - ب^2}{2 أ جـ} = \frac{49 + 25 - 121}{2 \times 7 \times 5} = \frac{-47}{70}$ ، $\text{ق}(\hat{ب}) \approx 19^\circ\ 41'$

$\therefore \text{ق}(\hat{جـ}) = 180^\circ - (28^\circ\ 8' + 19^\circ\ 41') = 132^\circ\ 11'$

الحالة الرابعة (المبهمة)

ضلعين وزاوية مقابلة لأحد الضلعين

* فى Δ ا ب جـ إذا علم أ ، ب ، ق (د ا) نوجد ق = ب جا ا ولإيجاد عدد الحلول الممكنة للمثلث نقارن بين قيم أ ، ب ، ق كما يلى :	
أولًا : إذا كانت د ا حادة وكان :	ثانيًا : إذا كانت د ا قائمة أو منفرجة وكان :
١ أ > ق فإنه لا يمكن رسم مثلث	١ أ ≥ ب فإنه لا يمكن رسم مثلث
٢ أ = ق فإنه يمكن رسم مثلث وحيد قائم الزاوية	٢ أ > ب فإنه يمكن رسم مثلث وحيد
٣ ق < أ < ب فإنه يمكن رسم مثلثين	
٤ أ ≤ ب فإنه يمكن رسم مثلث وحيد	

لو (م̂) حاده لازم تجيب الارتفاع

لو (م̂) قائمه أو منفرجه مش هتجيب الارتفاع

تعالى نشوف الامثله وهتلاقى الدنيا تمام

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢٦

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢٦

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

أمثلة: بين ما إذا كانت الشروط الآتية تحقق وجود مثلث وحيد أو أكثر من مثلث أو لا تحقق وجود أى مثلث ثم أوجد الحلول الممكنة:-

① $\triangle$ أ ب جـ

$م(\hat{أ}) = ١١٢^\circ$ ، أ ب = ٧ سم ، ب جـ = ٤ سم

الحل

$(\hat{أ})$ منفرجة $\therefore$ أ ب > ب جـ

$\therefore$ يمكن رسم مثلث

$\therefore \frac{أ ب}{جا أ} = \frac{ب جـ}{جا جـ}$ $\therefore \frac{٧}{جا ١١٢^\circ} = \frac{٤}{جا جـ}$

$جا جـ = \frac{٤ \times جا ١١٢^\circ}{٧} = ٠,٥٣٩٨$

جا موجبة فى الأول والثانى

لكن مش هاخد الثانى لأنه

مستحيل زاوية ب تكون منفرجة

لأن المثلث يوجد به زاوية منفرجة

واحدة فقط

$\therefore م(\hat{جـ}) = ٣٢^\circ$

$\therefore م(\hat{ب}) = ١٨٠ - (٣٢ + ١١٢) = ٣٦^\circ$

$\therefore \frac{أ ب}{جا جـ} = \frac{ب جـ}{جا أ}$ $\therefore \frac{ك}{جا ٣٦^\circ} = \frac{٧}{جا ١١٢^\circ}$

$\therefore ك = \frac{٧ \times جا ٣٦^\circ}{جا ١١٢^\circ} \approx ٤,٤$ سم

③ $\triangle$ أ ب جـ

$م(\hat{أ}) = ٥٠^\circ$ ، أ ب = ٤ سم ، ب جـ = ٧ سم

الحل

$(\hat{أ})$ حادة $\therefore$ هجيب ارتفاع

ع = ب جـ جا أ = ٧ × جا ٥٠° ≈ ٥,٤ سم

$\therefore$ أ ب > ع فإنه لا يمكن رسم مثلث $\therefore$ لا يوجد حل

④ $\triangle$ أ ب جـ فيه

$م(\hat{ب}) = ٦٠^\circ$ ، ب جـ = ٧,٥ سم ، أ ب = ٣٧٥ سم

الحل

$(\hat{ب})$ زاوية حادة $\therefore$ هجيب ارتفاع

ع = أ ب جا ب = ٣٧٥ جا ٦٠° = ٣٧٥ سم

$\therefore$ ب جـ = ع $\therefore$ يمكن رسم مثلث قائم

$\frac{ب جـ}{جا ب} = \frac{أ ب}{جا أ}$ $\therefore \frac{٧,٥}{جا ٦٠^\circ} = \frac{٣٧٥}{جا أ}$

$\therefore جا أ = ١$ $\therefore م(\hat{أ}) = ٩٠^\circ$

$م(\hat{جـ}) = ١٨٠ - (٩٠ + ٦٠) = ٣٠^\circ$

Scanned with CamScanner

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

⑤ ∆ل م ن فيه

(ل) = ٣٠° ، ل = ٦ سم ، م = ٩ سم

المطلوب

ع = م ، طا ل = ٩ طا ٣٠ = ٥,٤ سم

ع > ل > م

∴ عكس رسم مثلثين

$\frac{ل}{طا ل} = \frac{م}{طا م}$ ∴ $\frac{٦}{طا ٣٠} = \frac{٩}{طا م}$

$طا م = \frac{٩ \times طا ٣٠}{٦} = \frac{٣}{٤}$

م(∠م) = ٣٧ ، ٣٧ ≃ ٣٦ ، ٣٦ ≃ ٣٧

م(∠ن) = ١٨٠ - (٣٧ + ٣٦) = ١٠٧

الأول

م(∠م) = ٣٧

م(∠ن) = ١٨٠ - (٣٧ + ١٠٧) = ٣٦

م(∠ل) = ١٠٧

$\frac{ل}{طا ل} = \frac{ن}{طا ن}$

$\frac{٦}{طا ٣٠} = \frac{ن}{طا ١٠٧}$

ن = ١١,٧٨ سم

الثاني

١٨٠ - ٣٧ = ١٤٣

م(∠م) = ١٤٣

م(∠ن) = ١٨٠ - (١٤٣ + ٣٠) = ٧

م(∠ل) = ٩

$\frac{ل}{طا ل} = \frac{ن}{طا ن}$

$\frac{٦}{طا ٣٠} = \frac{ن}{طا ٩}$

ن = ٣,٩ سم

∴ عكس رسم مثلث واحد

$\frac{م}{طا م} = \frac{ن}{طا ن}$

$\frac{٨,٥}{طا ٤٠} = \frac{٧}{طا ب}$

∴ طا ب = ٠,٥٣

م(∠ب) = ٢٧ أو (١٤٨)

م(∠ن) = ١٨٠ - (٤٠ + ٢٧) = ١١٣

مرفوض

لأنه سيكون

زوايا ∆ اكبر من

١٨٠

حيث

٤٠ + ١٤٨ = ١٨٨

$\frac{م}{طا م} = \frac{ب}{طا ب}$

$\frac{٨,٥}{طا ٤٠} = \frac{٤,٥}{طا ب}$

$\frac{٨,٥}{٤ طا} = \frac{ب}{١٠٨ طا}$

∴ ب = $\frac{٨,٥ \times ١٠٨ طا}{٤ طا}$ ≃ ١٢,٦ سم

يارب تكون لدينا وضحت

يا حبيب (ﷺ)

مستر / لطفي زهران
رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

⑥ ∆ أ ب جـ فيه

م(∠أ) = ٤٠° ، أ = ٨,٥ سم ، ب = ٧ سم

المطلوب

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الواجب :-

حل المثلث في الحالة الأولى

① حل المثلث ا ب جـ فيه
ب = ١١ سم ، ق(Â) = ٦٧° ، ق(B̂) = ٢٦°

② حل المثلث ل م ن فيه
م = ١٧ سم ، ق(L̂) = ١٦′ ٣٣°
ق(N̂) = ١٩′ ٤٤°

③ حل المثلث س ص ع الذي فيه
س ص = ٤٠ سم ، ق(Ŝ) = ١٢′ ٥٧°
ق(Ô) = ١٥′ ٨٤°
ثم أوجد ارتفاع المثلث المرسوم من ص على س ع

حل المثلث في الحالة الثانية

① حل المثلث ا ب جـ الذي فيه
ا = ٥ سم ، ب = ٧ سم ، ق(Â) = ٦٥°
ثم أوجد ق(B̂) ، ق(Ĉ)

② حل المثلث ل م ن فيه
ل = ٦ سم ، م = ٨ سم ، ق(L̂) = ٤٧°
ثم أوجد ق(M̂) ، ق(N̂)

③ حل المثلث س ص ع فيه
س = ٥ سم ، ص = ٧ سم ، ق(Ŝ) = ٦٠°
ثم أوجد ص ع ، ق(Ô) ، ق(Ê)

حل المثلث في الحالة الثالثة

① حل المثلث ا ب جـ الذي فيه
ا = ١٣ سم ، ب = ١٤ سم ، جـ = ١٥ سم

② حل المثلث ا ب جـ الذي فيه
ا = ٥ سم ، ب = ٢ سم ، جـ = ٨ سم

حل المسألة الرابعة :- (المتبقية)

تحقق من وجود مثلث أو أكثر أو عدم وجوده
ثم أوجد الحل

① Δ ا ب جـ فيه
ا = ١٠ سم ، ب = ٩ سم ، ق(Ĉ) = ٥٧°

② Δ ا ب جـ فيه
ق(Â) = ٥٠° ، ا = ٤ سم ، ب = ٣ سم

③ Δ ا ب جـ فيه
ق(Â) = ١١٦° ، جـ = ١٢ سم ، ا = ١٠ سم

④ Δ ا ب جـ فيه
ا = ١٥ سم ، ب = ٦ سم ، ق(Â) = ١٠٥°

⑤ Δ ا ب جـ فيه
ا = ٣٤ سم ، ب = ٢٤ سم ، ق(Â) = ٤٣°

⑥ Δ س ص ع فيه
س ص = ٥ سم ، ص ع = ٧ سم ، ق(Ŝ) = ٦٠°

⑦ Δ ل م ن فيه
ل = ٦ سم ، م = ٨ سم ، ق(L̂) = ٤٧°

حل المثلث في الحالة الرابعة

① حل المثلث ا ب جـ الذي فيه
ا = ٥ سم ، ب = ٧ سم ، ق(Â) = ٦٥°

② حل المثلث ل م ن الذي فيه
ل م = ٨ سم ، م ن = ٤٦ سم ، ق(M̂) = ٤٨°

حيث م = ٦ ، و

أ / لطفي زهران
مدرس الرياضيات بالمراحل الإعدادية والثانوية
٠١٠٢٨٠٨٩٩١٢

Scanned with CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

جروب: تانية ثانوي ٢٠٢٤ ❤

رابط الجروب:

https://t.me/SecondaryTwo_M

للاستفسارات 📩:

@m o m e n 2007

القناة:

https://t.me/SecondaryTwo Channel M

اضغط على الروابط

المالك: @m_o_m_e_n_2007

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner