

سلسلة

# الفاروق

في الرياضيات



الفصل الدراسي الأول

الصف الثاني الثانوي

القسم العلمي

إعداد: أ/ عشري فاروق

ت: ٠١١٥٦٢٤٤٤٣١

مذكرتي  
Mozkrty.com

# أولاً: الجبر

٠. بيان  $E = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$

المجال

هو المجموعة  $S = \{1, 2, 3\}$

المجال المقابل

هو المجموعة  $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

المدى هو مجموعة صور عناصر المجموعة  $S$   
وهو مجموعة جزئية من  $S$

٠. المدى =  $\{1, 2, 3\}$

التعبير الرمزي عن الدالة

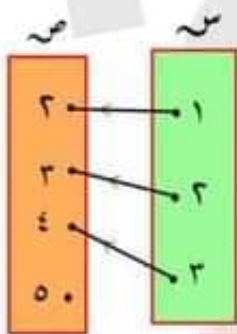
٠. العلاقة دالة من  $S$  إلى  $S$

٠.  $D: S \rightarrow S$

$D: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$

مثال ①

أى من اللفظيات السهوية التالية تمثل دالة  
من  $S$  إلى  $S$ ؟ وفي حالة كونها دالة  
أكتب المجال والمدى



الحل

٠. لكل عنصر من عناصر  $S$  يخرج منه سهم واحد

نقط نحو عناصر  $S$

١ الدالة ذات المتغير الحقيقي

الدالة:

إذا كانت  $S$ ،  $S$  مجموعتين غير خاليتين  
وجزئيتين من مجموعة الأعداد الحقيقية

فإن:

العلاقة من  $S$  إلى  $S$  تسمى دالة إذا ارتبط  
لكل عنصر من عناصر  $S$  بعنصر واحد فقط  
من عناصر  $S$

التعرف على العلاقة التي تمثل دالة من خلال:

١ اللفظ السهوي المثل للعلاقة

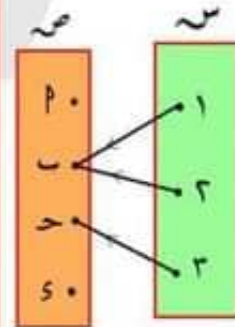
٢ الشكل البياني المثل للعلاقة

٣ بيان العلاقة

٤ قاعدة العلاقة

أولاً: المخطط السهوي الممثل للعلاقة

الشكل المقابل:



يمثل دالة من  $S$  إلى  $S$   
لأن لكل عنصر من عناصر  
 $S$  خرج منه سهم واحد  
نقط نحو عناصر  $S$

ومن هذه الدالة نتعرف على:

بيان العلاقة

وهي تساوي مجموعة الأزواج الرتبة المثلثة للعلاقة

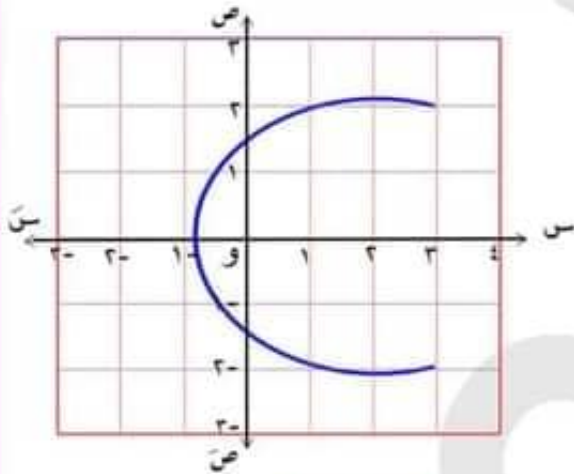
$$\{\text{المدى}\} = \{2\}$$

ثانياً: الشكل البياني الممثل للعلاقة

تكون العلاقة الممثلة بيانياً تمثل دالة إذا كان لكل خط رأسي تقع عليه نقطة وحيدة من نقاط العلاقة

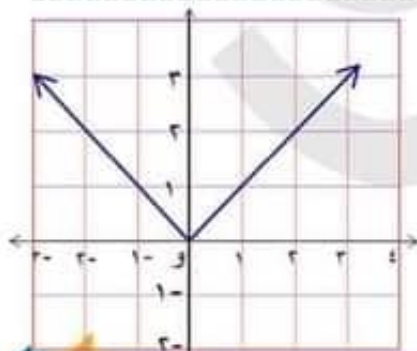
مثال ٢

أي من الأشكال البيانية التالية يمثل دالة وأيها لا يمثل دالة وإذا كانت تمثل دالة عين المجال والمدى



الحل

الشكل البياني لا يمثل منحنى لدالة لأنه يوجد خط رأسي يقطع الدالة في أكثر من نقطة  
مثل: محور الصادات هو خط رأسي يقطع المنحنى في نقطتين



٢

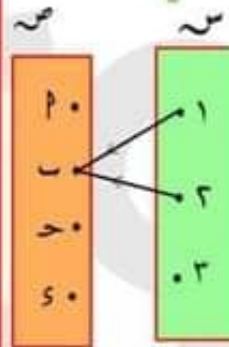
∴ العلاقة تمثل دالة من  $S$  إلى  $T$

ويكون:

$$\{\text{المجال}\} = \{1, 2, 3\}$$

$$\{\text{المجال المقابل}\} = \{2, 3, 4, 5\}$$

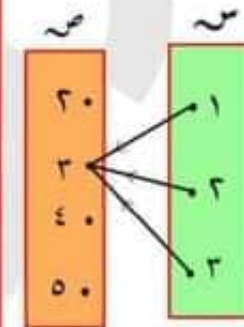
$$\{\text{المدى}\} = \{2, 3, 4\}$$



٢

الحل

∴ العنصر ٣ لم يخرج منه أية سهم نحو عناصر  $T$   
∴ العلاقة لا تمثل دالة



٣

الحل

∴ كل عنصر من عناصر  $S$  خرج منه سهم واحد فقط نحو عناصر  $T$

∴ العلاقة تمثل دالة من  $S$  إلى  $T$

ويكون:

$$\{\text{المجال}\} = \{1, 2, 3\}$$

$$\{\text{المجال المقابل}\} = \{2, 3, 4, 5\}$$

## الحل

$$1 \quad \{(2, 3), (1, 2), (1, 1)\} = S$$

## الحل

∴ العدد 1 ظهر كمسقط أول مرتين في بيان العلاقة وكذلك العدد 2 لم يظهر كمسقط أول في بيان العلاقة

∴ لا تمثل دالة

$$2 \quad \{(2, 3), (2, 2), (1, 1)\} = S$$

كل عنصر من عناصر المجموعة S ظهر كمسقط أول مرة واحدة في بيان العلاقة

∴ تمثل دالة

ويكون :

$$\text{المجال} = \{1, 2, 3\}$$

$$\text{المدى} = \{1, 2, 3\}$$

$$3 \quad \{(2, 3), (1, 2), (2, 1)\} = S$$

## الحل

∴ كل عنصر من عناصر المجموعة S ظهر كمسقط أول مرة واحدة في بيان العلاقة

∴ تمثل دالة

ويكون :

$$\text{المجال} = \{1, 2, 3\}$$

$$\text{المدى} = \{1, 2, 3\}$$

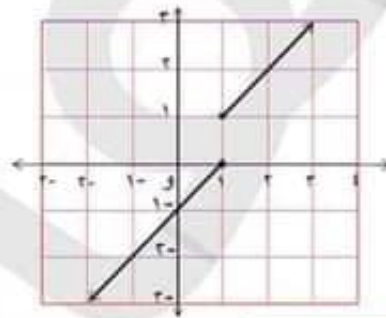
رابعاً : من قاعدة العلاقة

نحدد العلاقة التي تمثل دالة من قاعدتها إذا كان :

يمثل دالة لأن عند رسم أي خط رأسي يقطع منحني الدالة في نقطة وحيدة  
ويكون :

$$\text{المجال} = S$$

$$\text{المدى} = [0, \infty]$$



## الحل

الشكل البياني لا يمثل دالة لأن الخط الرأسي  $x = 1$  تقع عليه نقطتان من نقط العلاقة

ثالثاً : بيان العلاقة

العلاقة E تمثل دالة من S إلى S إذا ظهر كل عنصر من عناصر S مرة واحدة كمسقط أول في بيان العلاقة

## مثال ٣

$$\text{إذا كانت : } S = \{1, 2, 3\}$$

$$, S = \{1, 2, 3\}$$

فأي من العلاقات الآتية تمثل دالة من S إلى S وإذا كانت تمثل دالة عين مداها

حاول بنفسك

مثال ٦

أي العلاقات الآتية تمثل دالة وأيها لا يمثل دالة

١ ص ١ = ٣س + ١

٣ ص ٣ = ٢س + ٤

٥ ص ٣ = ٣

الحل

مثال ٧

إذا كانت دالة حيث

د: {١، ٢، ٣} ← ع ، د(س) = ٣س - ٦

فإن مدى د هو .....

مثال ٨

إذا كانت دالة حيث

د: {١-، ٢-، ٣-، ١، ٢، ٣} ← ع

د(س) = ١ - ٢س

فإن مدى د هو .....

كل قيمة للمتغير س ينظرها قيمة وحيدة للمتغير س

مثال ٤

هل العلاقة ص ٢ = ٢س + ٤ تمثل دالة أم لا؟

الحل

بالتعويض عن المتغير س بأي قيمة يكون عندها

المتغير ص له قيمة موجبة

عند س = ٠ نجد أن: ص ٢ = ٤

∴ ص = ± ٢

∴ يوجد قيمة للمتغير س ينظرها قيمتان للمتغير ص

∴ العلاقة لا تمثل دالة

ملحوظة

جميع قواعد العلاقات التي تكون فيها س ذات

أس زوجي ليست قواعد لدوال

مثال ٥

هل العلاقة ص ٢ = ٧س + ١ تمثل دالة أم لا؟

الحل

عند وضع س = ١

فإن: ص ٢ = ١ + ١ × ٧ = ٨

∴ ص = √٨ ∴ ص = ٢

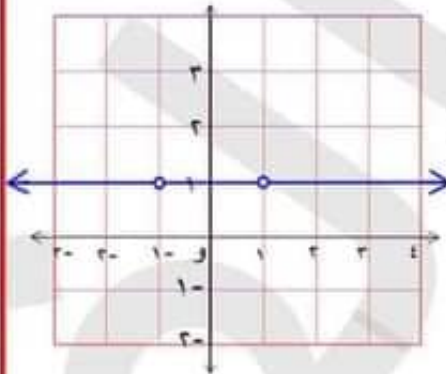
كل قيمة للمتغير س ينظرها قيمة وحيدة للمتغير ص

∴ العلاقة تمثل دالة

مثال ٩

في كل من الأشكال البيانية التالية استنتج مجال ومدى كل دالة

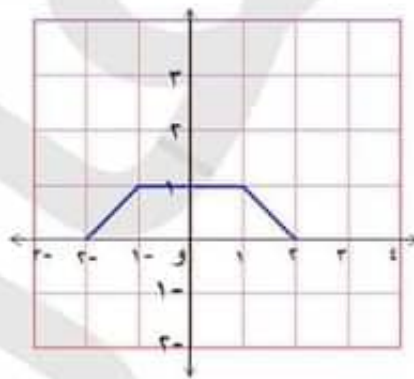
١



المجال = .....

المدى = .....

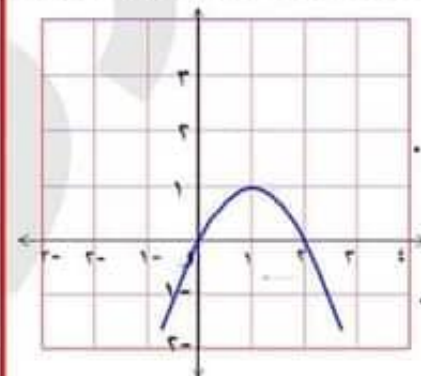
٢



المجال = .....

المدى = .....

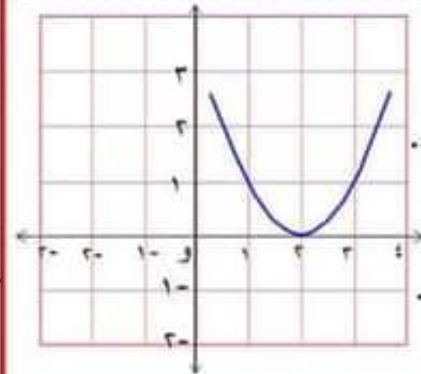
٣



المجال = .....

المدى = .....

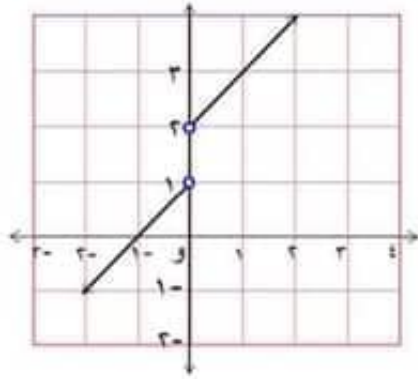
٤



المجال = .....

المدى = .....

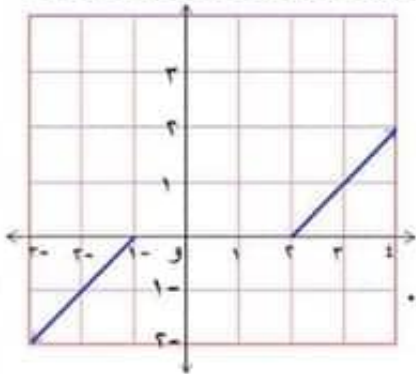
٥



المجال = .....

المدى = .....

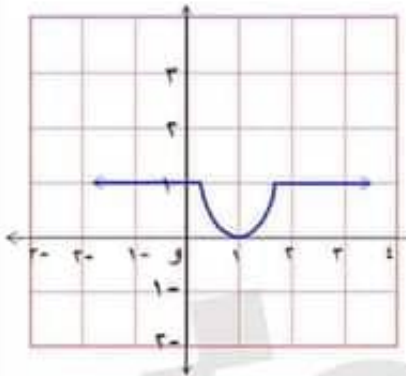
٦



المجال = .....

المدى = .....

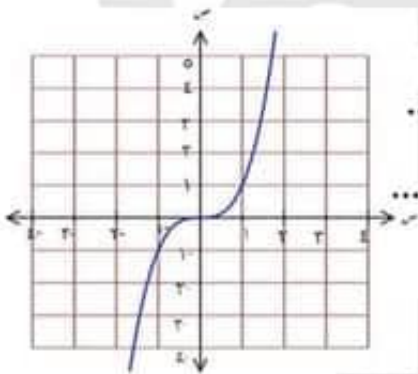
٧



المجال = .....

المدى = .....

٨



المجال = .....

المدى = .....

التمثيل البياني للدوال ذات المجال المتصل

إذا كان مجال الدالة مجموعة متصلة من الأعداد  
[...،...] فإنها تمثل بمجموعة متصلة من النقاط

مثال ١١

مثل بيانيا الدالة  $d: [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$   
 $d(s) = s^2 - 4$  ومن الرسم عين الدرس

الحل

$$d(s) = s^2 - 4$$

∴ مجال الدالة  $d = [-3, 3]$  على صورة فترة

$$d(-3) = (-3)^2 - 4 = 9 - 4 = 5$$

$$d(-2) = (-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$$

$$d(-1) = (-1)^2 - 4 = 1 - 4 = -3$$

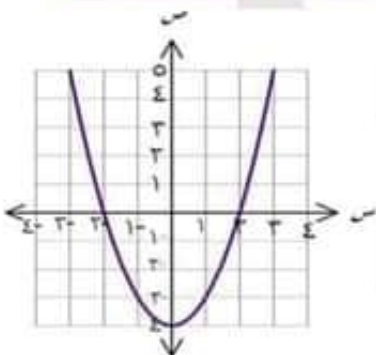
$$d(0) = (0)^2 - 4 = 0 - 4 = -4$$

$$d(1) = (1)^2 - 4 = 1 - 4 = -3$$

$$d(2) = (2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$$

$$d(3) = (3)^2 - 4 = 9 - 4 = 5$$

س	-3	-2	-1	0	1	2	3
د(س)	5	0	-3	-4	-3	0	5



من الرسم نجد أن

$$\text{المجال} = [-3, 3]$$

$$\text{الدرس} = [-4, 5]$$

التمثيل البياني للدوال ذات المجال المتقطع

إذا كان مجال الدالة مجموعة منفصلة من الأعداد  
{...،...} فإنها تمثل بمجموعة منفصلة من النقاط

مثال ١٥

مثل بيانيا الدالة  $d: \{-3, -1, 1, 3\} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $d(s) = 2s^2 + 3$  ومن الرسم عين الدرس

الحل

$$\text{مجال الدالة} = \{-3, -1, 1, 3\}$$

$$d(s) = 2s^2 + 3$$

∴ نوجد صور عناصر المجال

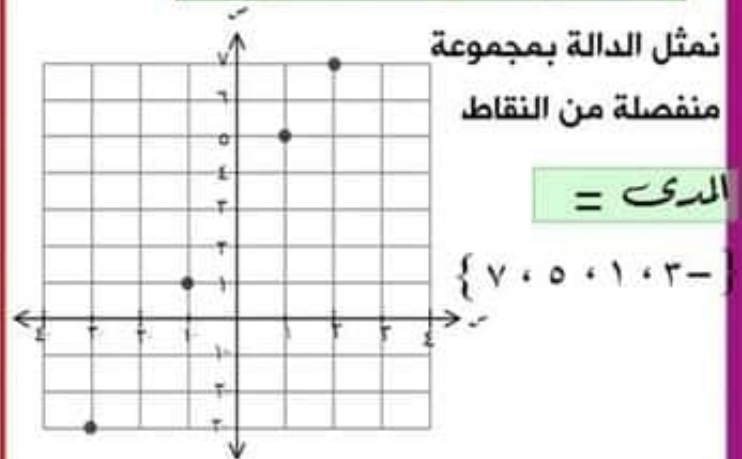
$$d(-3) = 2(-3)^2 + 3 = 2(9) + 3 = 18 + 3 = 21$$

$$d(-1) = 2(-1)^2 + 3 = 2(1) + 3 = 2 + 3 = 5$$

$$d(1) = 2(1)^2 + 3 = 2(1) + 3 = 2 + 3 = 5$$

$$d(3) = 2(3)^2 + 3 = 2(9) + 3 = 18 + 3 = 21$$

س	-3	-1	1	3
د(س)	21	5	5	21



نمثل الدالة بمجموعة

منفصلة من النقاط

$$\text{الدرس} =$$

$$\{-21, 5, 5, 21\}$$

س	٣-	٢-	١-
د (س)	٠	١	٢

لاحظ :

١- [١-، ٣-] الفترة مفتوحة عند  $s = -1$   
فيتم وضع ثقب عند النقطة  $(-1, 2)$

عندما  $s \in [١-، ١-]$  فإن:  $d(s) = 2$

الدالة تكون ثابتة وتساوي ٢

لجميع قيم  $s \in [١-، ١-]$

س	١-	٠	١
د (س)	٢	٢	٢

عندما  $s \in [٢، ١]$  فإن:  $d(s) = s - 3$

$$d(1) = 1 - 3 = -2$$

$$d(2) = 2 - 3 = -1$$

$$d(3) = 3 - 3 = 0$$

س	١	٢	٣
د (س)	٢	١	٠

لاحظ :

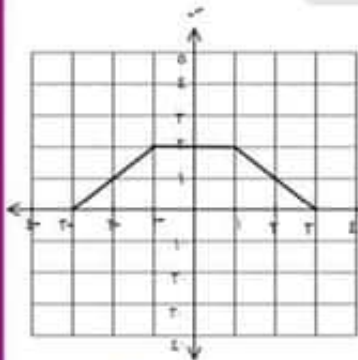
١- [٢، ١] الفترة مفتوحة عند ١

فيتم وضع ثقب عند النقطة  $(1, 2)$

من الرسم نجد أن:

$$\text{المجال} = [٢، ٣-]$$

$$\text{المدى} = [٢، ٠]$$



الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة

الدالة د :

$$d(s) = \begin{cases} s & , s > 1 \\ s^2 + 4 & , s \leq 1 \end{cases}$$

هي دالة معرفة بقاعدتين على يمين ويسار العدد ١

$$\text{مجالها} = ]-\infty، ١] \cup ]١، \infty[$$

$$= ]-\infty، \infty[$$

حيث  $d(s) = s$  عندما  $s > 1$

أي أن د  $(-1) = -1$

،  $d(s) = s^2 + 4$  عندما  $s \leq 1$

ومن هذه القاعدة نوجد منها صورة العدد ١ وجميع الأعداد الأكبر منه

مثال ١٢

إذا كانت د :

$$d(s) = \begin{cases} s+3 & ، 3 \geq s > 1 \\ 2 & ، 1 \geq s \geq -1 \\ s-3 & ، s > 1 & ، 3 \geq s \end{cases}$$

$$s > 1 & ، 3 \geq s$$

مثل بيانياً الدالة ومن الرسم عين

المجال والمدى

الحل

عندما  $s \in [١-، ٣-]$

فإن:  $d(s) = s + 3$

$$d(-2) = (-2) + 3 = 1$$

$$d(-1) = (-1) + 3 = 2$$

$$d(1) = (1) + 3 = 4$$

إطراد الدوال

يقصد بإطراد الدوال مجت فترات  
التزايد والتناقص والثبوت للدالة

١ تزايد الدالة

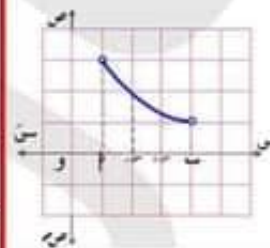
يقال للدالة  $f$  انها تزايدية على الفترة  $[a, b]$   
إذا كان:  $f(x_1) < f(x_2)$



$x_1, x_2 \in [a, b]$   
فإن:  $f(x_1) < f(x_2)$

٢ تناقص الدالة

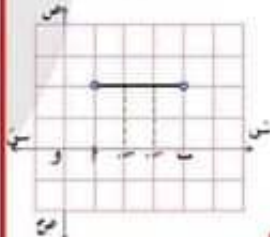
يقال للدالة  $f$  انها تناقصية على الفترة  $[a, b]$   
إذا كان:  $f(x_1) > f(x_2)$



$x_1, x_2 \in [a, b]$   
فإن:  $f(x_1) > f(x_2)$

٣ ثبوت الدالة

يقال للدالة  $f$  انها ثابتة على الفترة  $[a, b]$   
إذا كان:  $f(x_1) = f(x_2)$

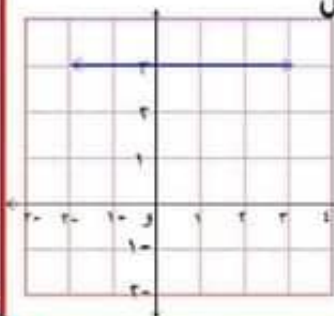


$x_1, x_2 \in [a, b]$   
فإن:  $f(x_1) = f(x_2)$

مثال ١

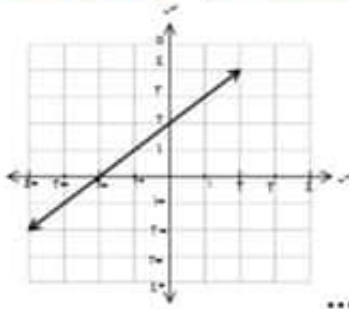
أكمل المطلوب أمام كل شكل

١ في الشكل المقابل



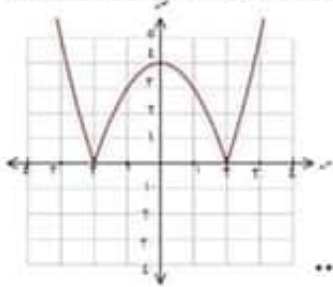
- المجال = .....
- المدى = .....
- الإطراد: .....

٢ في الشكل المقابل



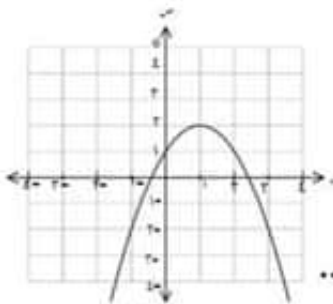
- المجال = .....
- المدى = .....
- الإطراد: .....

٣ في الشكل المقابل



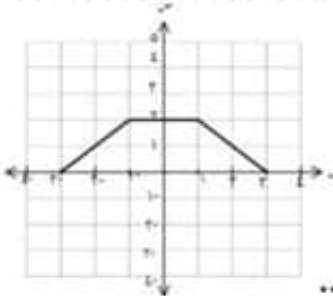
- المجال = .....
- المدى = .....
- الإطراد: .....

٤ في الشكل المقابل



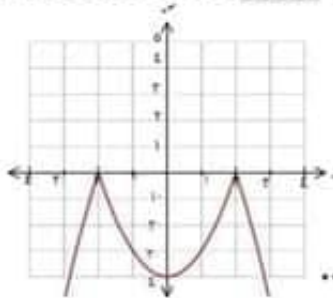
- المجال = .....
- المدى = .....
- الإطراد: .....

٥ في الشكل المقابل



- المجال = .....
- المدى = .....
- الإطراد: .....

٦ في الشكل المقابل



- المجال = .....
- المدى = .....
- الإطراد: .....

الدالة ذات المتغير الحقيقي

تمارين على

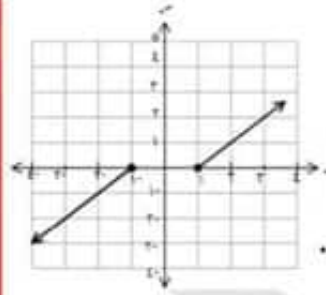
إذا كانت دالة حيث

$$د(س) = \left. \begin{array}{l} ٢ \leq س \\ ٢ < س \end{array} \right\}$$

فإن : د(٢) + د(١) + د(٤) = .....

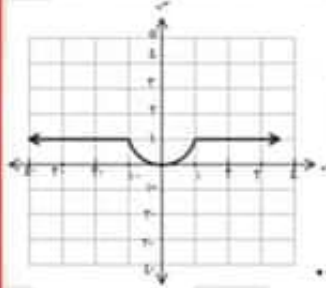
- ١) ٥   ٢) ١٨   ٣) ٢٤   ٤) ٢٢

٧ في الشكل المقابل



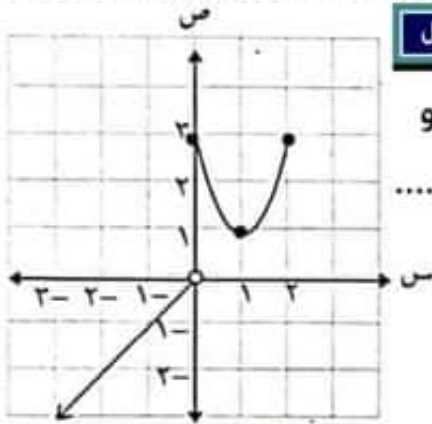
- المجال = .....
- المدى = .....
- البطراد : .....

٨ في الشكل المقابل



- المجال = .....
- المدى = .....
- البطراد : .....

٣ في الشكل المقابل



مجال الدالة د هو

.....

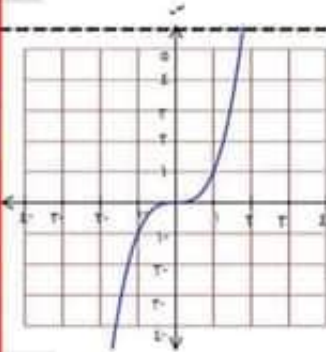
أ ٢

ب - {٠}

ج [٢ ، ∞ - [

د [٢ ، ∞ - [ - {٠}

٩ في الشكل المقابل



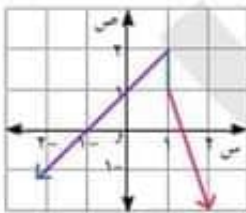
- المجال = .....
- المدى = .....
- البطراد : .....

٣ إذا كانت د دالة حيث : د(س) = أس + ب ،

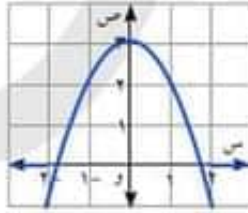
وكان د(٢) + د(٣) - د(٥) = ١٢ فإن د(٠) =

- أ ١٢   ب صفر   ج -١   د ١٨

٤ في كل من الأشكال الآتية بين ما إذا كانت ص دالة في س أم لا ؟ وإذا كانت دالة عين المجال والمدى



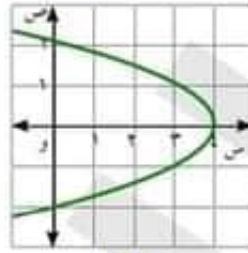
أ



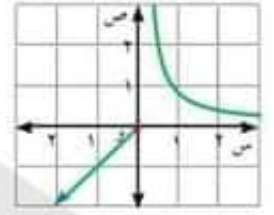
ب

٩ إذا كانت د :  $[-\infty, 1) \cup (2, \infty]$  حيث

د(س) =  $1 - س$  ارسم الشكل البياني للدالة ، واستنتج من الرسم مدى الدالة.



س



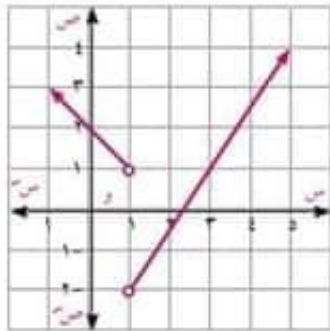
ح

١٠ إذا كانت د(س) =  $\begin{cases} 3 - س & \text{عندما } 2 \leq س < 3 \\ س & \text{عندما } 2 \leq س < 3 \end{cases}$

عين مجال الدالة د ومثلها بيانياً واستنتج من الرسم المدى

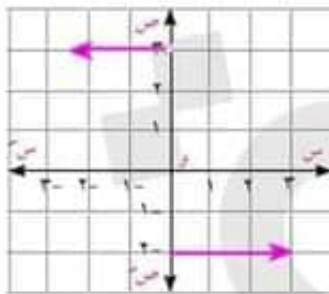
١١ ارسم الشكل البياني للدالة س حيث

س :  $[-\infty, 1) \cup (2, \infty]$  ، س(س) =  $1 - س$  ،  
، واستنتج من الرسم مدى الدالة.



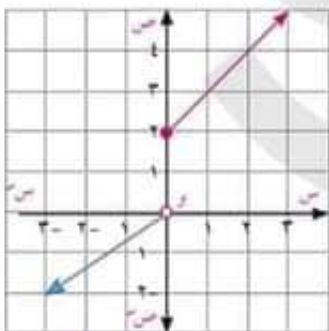
١٢ في الشكل المقابل

- المجال = .....
- المدى = .....
- البطراد: .....



١٣ في الشكل المقابل

- المجال = .....
- المدى = .....
- البطراد: .....



١٤ في الشكل المقابل

- المجال = .....
- المدى = .....
- البطراد: .....

٥ إذا كانت د دالة حيث :

د(س) =  $\begin{cases} 5 + س^2 & س \leq 3 \\ 6 + س & س > 3 \end{cases}$   
فإن د(3+1) = .....

س 9 + 1 -

ح 14 + 16 + 21

س 14 + 21

ح 3 + 1 -

٦ أي من العلاقات الآتية لا تعبر عن دالة :

- س  $\{(3, 2), (4, 3), (2, 1), (2, 1-), (1, 2-)\}$
- ح  $\{(4- , 2), (5, 1), (3, 0), (1-, 1-), (0, 2-)\}$
- د  $\{(4, 3), (4, 2), (4, 1), (4, 0), (4, 1-)\}$
- س  $\{(3, 2), (4, 3), (2, 1), (2, 1-), (1, 1-)\}$

٧ أرسم الشكل البياني للدالة د حيث :

د(س) =  $\begin{cases} 1 - س & س > 0 \\ 2 - س & 0 \leq س \leq 3 \end{cases}$

ومن الرسم حدد مدى الدالة د

٨ أرسم الشكل البياني للدالة د حيث :

د(س) =  $\begin{cases} 2 س & س > 0 \\ 3 & 0 \leq س \leq 3 \\ 6 + س & س < 3 \end{cases}$

ومن الرسم حدد مدى الدالة د

١٥ إذا كانت :

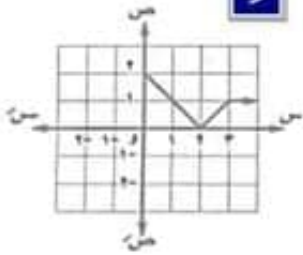
د :  $[-2, 2] \leftarrow ع, د(س) = 3س + 2$

فإن مدى الدالة = .....

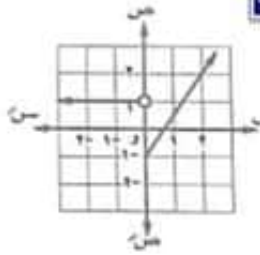
ب  $[-4, 9]$       ج  $[-4, 11]$

د  $[-2, 2]$       هـ  $[-3, 7]$

١٦



١٧



١٩ إذا كان  $س$ ،  $ص$  متغيرين حقيقيين فحدد

أي علاقة مما يأتي تمثل قاعدة دالة في  $س$  وأيها لا :

ب  $ص = 2س + 5$

ج  $ص + ص = 2س + 2$

د  $ص^2 = س + 4$

هـ  $ص = (س - ص)^2 = 5$

و  $ص = 2$

ز  $ص = 3$

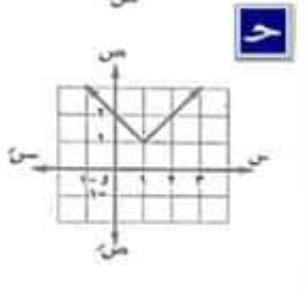
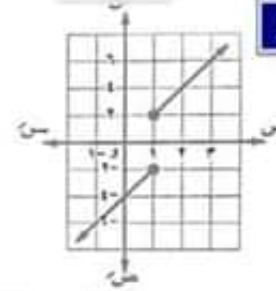
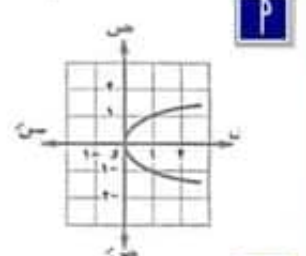
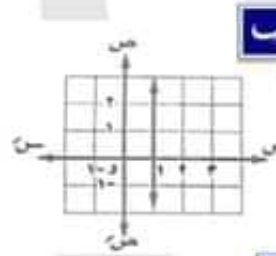
ح  $ص^2 = 2س - 2$

ط  $ص = \sqrt{2س + 4}$

ي  $ص = 3س + 2$  مما  $ص$   $س$

١٦ الشكل الذي يمثل دالة في  $س$  من بين

الأشكال الآتية هو .....



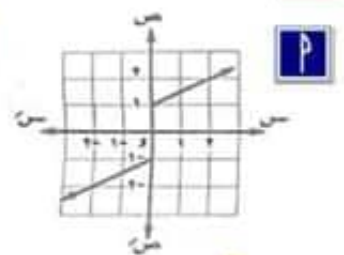
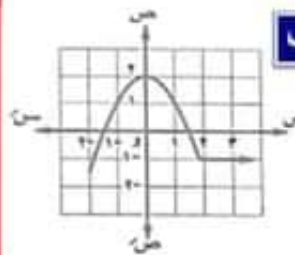
١٧ جميع العلاقات الآتية تكون فيها  $ص$  دالة

في  $س$  ما عدا العلاقة ....

ب  $ص = 3س + 1$       ج  $ص = 2س - 2$

د  $ص = 3س$       هـ  $ص = 2س - 4$

١٨ أي الأشكال البيانية الآتية لا يمثل دالة في  $س$  ؟



∴ مجالها = ع - {أصفار المقام}

نوجد أصفار المقام :

$$\text{برضع : } 2 - س = 0$$

$$\therefore س = \frac{0}{2}$$

∴ المجال = ع -  $\left\{\frac{0}{2}\right\}$

$$\text{٢} \quad د (س) = \frac{س}{س^2 - 4س}$$

**الحل**

∴ د (س) دالة كسرية

∴ مجالها = ع - {أصفار المقام}

نوجد أصفار المقام :

$$\text{بوضع : } س^2 - 4س = 0$$

بأخذ س عامل مشترك

$$س (س - 4) = 0$$

$$\therefore س (س - 4) (س + 4) = 0$$

$$\text{أما } س = 0 \quad \text{أو } س - 4 = 0 \quad \text{أو } س + 4 = 0$$

$$\therefore س = 0 \quad س = 4 \quad س = -4$$

∴ المجال = ع - {0، 4، -4}

$$\text{٣} \quad د (س) = \frac{س - 5}{س^2 - 3س + 2}$$

**تعيين مجال الدالة من خلال قاعدتها**

**أولاً : دوال كثيرات الحدود**

دوال كثيرات الحدود مجالها ع أو مجموعة جزئية من ع إذا كانت معرفة على فترة من مجموعة الأعداد الحقيقية

**فمثلاً :**

$$\text{١} \quad د (س) = 4$$

دالة كثيرة الحدود ثابتة مجالها = ع

$$\text{٢} \quad د (س) = 2س - 1$$

دالة كثيرة حدود من الدرجة الأولى  
مجالها = ع

$$\text{٣} \quad د (س) = س^2 - 2س + 3$$

دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية  
مجالها = ع

**ثانياً : الدالة الكسرية**

$$\text{الدالة د : } د (س) = \frac{س (س)}{س}$$

حيث كلاً من البسط والمقام كثيرتي حدود تسمى

دالة كسرية مجالها = ع - {أصفار المقام}

**مثال ١**

عين مجال كلاً من الدوال الآتية :

$$\text{١} \quad د (س) = \frac{1}{س^2 - 5}$$

**الحل**

∴ د (س) دالة كسرية

$$5 \text{ د (س) } = \frac{س^2 - 2س + 1}{س^2 + 8}$$

الحل

∴ د (س) دالة كسرية

∴ مجالها = ح - {أصفار القام}

بوضع  $س^2 + 8 = 0$ 

(بتعليل مجموع متعيبين)

$$∴ (س + 2)(س^2 - 2س + 4) = 0$$

$$\text{أما } س + 2 = 0 \text{ أو } س^2 - 2س + 4 = 0$$

∴  $س = -2$  ليس له أصفار في ح

∴ المجال = ح - {2}

ثالثاً: تعيين مجال الدالة الجذرية على الصورة:

$$د(س) = \sqrt{س}$$

إذا كانت:

$$د(س) = \sqrt{س}$$

1 إذا كانت م عدد فردي فإن:

مجال د = مجال م

2 إذا كانت م عدد زوجي فإن:

مجال د هو قيم م التي تجعل

$$م \geq 0$$

الحل

∴ د (س) دالة كسرية

∴ مجالها = ح - {أصفار القام}

بوضع القام = 0

$$∴ س^2 - 3س + 2 = 0$$

$$∴ (س - 1)(س - 2) = 0$$

$$\text{أما } س - 1 = 0 \text{ أو } س - 2 = 0$$

$$∴ س = 1 \text{ أو } س = 2$$

∴ المجال = ح - {1, 2}

$$4 \text{ د (س) } = \frac{س - 1}{س^2 + 4}$$

الحل

∴ د (س) دالة كسرية

∴ مجالها = ح - {أصفار القام}

بوضع  $س^2 + 4 = 0$ 

$$∴ س^2 = -4$$

∴ (لا يوجد عدد حقيقي مربعه = عدد سالب)

∴ مجموعة أصفار القام = ∅

∴ المجال = ح - ∅

$$ح =$$

$$\therefore -3 \leq s$$

بالضرب  $\times (-1)$  للطرفين

$$\therefore s \geq 3$$

$$\therefore \text{المجال} = [-3, \infty[$$

$$\text{٤} \quad \text{د (س)} = \sqrt{2s^2 - 5s + 6}$$

**الحل**

$\therefore$  دليل الجذر زوجي

$\therefore$  مجال د هو قيم  $s$  التي تجعل :

$$s^2 - 5s + 6 \geq 0$$

نوجد جذري المعادلة :

$$s^2 - 5s + 6 = 0$$

$$\therefore (s-2)(s-3) = 0$$

$$\text{اما } s-2=0 \quad \text{او } s-3=0$$

$$\therefore s=2 \quad \text{او } s=3$$

نبحث اشارة القدار  $(s^2 - 5s + 6)$



$\therefore$  القدار :  $s^2 - 5s + 6 \geq 0$

عندما  $s \in [-3, 2] \cup [3, \infty[$

$$\therefore \text{المجال} = [-3, 2] \cup [3, \infty[$$

**مثال ١**

عين مجال كلا من الدوال الآتية :

$$\text{١} \quad \text{د (س)} = \sqrt{3-s}$$

**الحل**

$\therefore$  دليل الجذر زوجي

$\therefore$  نوجد قيم  $s$  التي تجعل :

$$3-s \geq 0 \quad \therefore s \leq 3$$

$$\therefore \text{المجال} = ]-\infty, 3]$$

$$\text{٢} \quad \text{د (س)} = \sqrt{5+s}$$

**الحل**

$\therefore$  دليل الجذر فردي

$\therefore$  مجال د = مجال  $s$

$s (س) = 5+s$  دالة كثيرة الحدود من

الدرجة الاولى مجالها  $E$

$\therefore$  مجال الدالة د =  $E$

$$\text{٣} \quad \text{د (س)} = \sqrt{3-2s}$$

**الحل**

$\therefore$  دليل الجذر زوجي

$\therefore$  نوجد قيم  $s$  التي تجعل :  $3-2s \geq 0$

$$5 \quad (س) د = \sqrt[3]{\frac{5+س^3}{1-س}}$$

الحل

∴ دليل الجذر فردى = 3

∴ مجال د = مجال الدالة تحت الجذر

وهي دالة كسرية مجاله

$$= ع - \{ \text{اصفار القام} \}$$

$$\therefore \text{المجال} = ع - \{ 1 \}$$

$$6 \quad (س) و = \sqrt[4]{\frac{6+س^5-س^2}{2س-4}}$$

الحل

مجال الدالة هو مجموعة قيم س التي تجعل

كلاً من البسط والمقام موجبين معاً أو سالبين معاً

بفرض أن

$$\text{دالة البسط: } (س) د = 6 + س^5 - س^2$$

$$\text{دالة القام: } (س) ر = 2س - 4$$

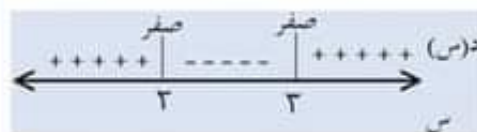
نعين الفترات التي تكون فيها

الدالتين مرجبتين معاً أو سالبتين معاً

نبعث إشارة الدالة د:

جذرا المعادلة الأولى هما : 2 ، 3

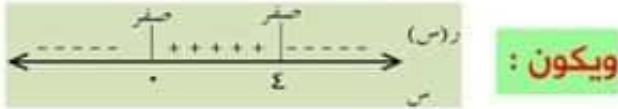
ويكون:



نبحث إشارة الدالة ر (دالة المقام)

$$ر (س) = 4س - س^2$$

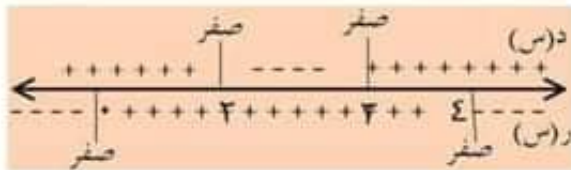
∴ جذرا المعادلة هما : 4 ، 0



ويكون:

يبعث إشارة الدالتين على خط أعداد

واحد كما بالسلك:



نلاحظ أن الدالتين مرجبتين معاً في

$$[ 2, 0 ] \cup [ 3, 4 ]$$

و كذلك الدالة معرفة عند أصفار البسط

∴ المجال = الفترات التي تكون فيها

الدالتين مرجبتين معاً U مجموعة أصفار البسط

∴ مجال الدالة و

$$= [ 2, 0 ] \cup [ 3, 4 ] \cup \{ 2, 3 \}$$

$$= [ 2, 0 ] \cup [ 3, 4 ]$$

تدريب : ١

٥ عين مجال الدالة د:

$$د (س) = \sqrt{٤ - س^٢}$$

الحل

١ عين مجال الدالة د: د (س) =  $\sqrt{٢س + ١}$ 

الحل

٦ عين مجال الدالة د:

$$د (س) = \sqrt{\frac{٦ - س - ٥س^٢}{٤ - ٢س}}$$

الحل

٢ عين مجال الدالة د: د (س) =  $\sqrt{٢س + ١}$ 

الحل

٣ عين مجال الدالة د: د (س) =  $\sqrt{٥ - س}$ 

الحل

٧ عين مجال الدالة د:

$$د (س) = \left. \begin{array}{l} ٣ - س \\ ٣ - س \\ ٣ \leq س \\ ٣ > س \end{array} \right\}$$

٤ عين مجال الدالة د:

$$د (س) = \sqrt{٤ - ٢س + ٥س}$$

الحل

تعيين مجال الدالة من خلال قاعدتها

تمارين على

١ إذا كان مجال الدالة د :

$$د (س) = \frac{س + ٥}{س^٢ + س + ٥} \text{ هو } ع - \{٢, ٣\}$$

فأوجد قيمتي :  $س, ٢$ 

٢ إذا كان مجال الدالة د :

$$د (س) = \sqrt{٢س - ٤س + ٢} \text{ هو } ع$$

فأوجد الفترة التي ينتمي إليها  $٢$ 

٣ إذا كانت الدالة د حيث د : ع - {٢} ← ع

$$د (س) = \frac{س + ٥}{س^٢ - ٢س + ١} \text{ فإن د (٢) = .....}$$

$$\frac{٨}{٢١} \quad \frac{١٠}{٢١} \quad ٣ \quad ٢$$

٤ مجال الدالة د (س) =  $\frac{٥}{٣ - ١ - ٢س}$  هو .....

$$\frac{١}{٢} \quad \frac{١٠}{٢١} \quad ٣ \quad ٢$$

$$\frac{١}{٢} \quad \frac{١٠}{٢١} \quad ٣ \quad ٢$$

٥ مجال الدالة د (س) =  $\frac{س}{٢ - ٢س}$  هو .....

$$\frac{١}{٢} \quad \frac{١٠}{٢١} \quad ٣ \quad ٢$$

$$\frac{١}{٢} \quad \frac{١٠}{٢١} \quad ٣ \quad ٢$$

٦ إذا كانت العلاقة بين قياسات زوايا المضلع (ص)

، عدد أضلاع المضلع (س) هي

$$ص = \pi (س - ٢) \text{ فإن مجال الدالة ص = .....}$$

$$\frac{١}{٢} \quad \frac{١٠}{٢١} \quad ٣ \quad ٢$$

مثال ٣

إذا كان مجال الدالة د :

$$د (س) = \frac{س + ٥}{س^٢ + س + ٥} \text{ هو } ع \text{ فإن } ٢ \ni \text{ .....}$$

الحل

∴ مجال الدالة هو ع

∴ المقام ليس له أصفار

∴ مجموعة حل المعادلة :  $س^٢ + س + ٥ = ٠$ في ع هي  $\emptyset$ ∴ المميز  $> ٠$ 

$$\Delta = ١ - ٤ < ٠$$

$$\Delta = ١ - ٤ < ٠$$

$$\Delta = ١ - ٤ < ٠$$

$$\Delta = ١ - ٤ < ٠$$

$$\Delta = ١ - ٤ < ٠$$

$$\Delta = ١ - ٤ < ٠$$

مثال ٤

إذا كان مجال الدالة د :

$$د (س) = \frac{س + ٥}{س^٢ + س + ٤} \text{ هو } ع \text{ فإن } ٢ \ni \text{ .....}$$

الحل

٧ عين مجال كلاً من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية

$$د (س) = \frac{٢س + ١}{٢س - ١}$$

$$د (س) = \frac{٢س + ٢}{٩س - ٢}$$

$$د (س) = \frac{٥س - ٢}{١س + ٢س + ١}$$

$$د (س) = \frac{٢س + ٣}{٢س - ٣س + ٢}$$

$$د (س) = \sqrt{٣س - ٢}$$

$$د (س) = \left. \begin{array}{l} ٠ \leq س \leq ١ \\ ٢ \geq س > ١ \end{array} \right\}$$

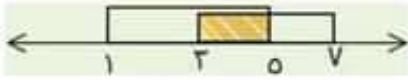
$$د (س) = \sqrt{١٦س - ٢}$$

$$د (س) = \frac{١}{\sqrt{٦س - ٥س - ٦}}$$

$$د (س) = \left. \begin{array}{l} ٢س \in [٠, ٢] \\ ٦ \in [٢, ٤] \\ ٢س + ٢ \in [٤, ٦] \end{array} \right\}$$

$$د (س) = \sqrt{٢س - ٢س}$$

نوجد تقاطع مجالي الدالتين



$$\therefore [5, 7] = [1, 7] \cap [5, 7] = \mathbb{R} \cap [5, 7]$$

$$1 \quad \therefore (d_1 + d_2)(s) = (s) + d_1 + d_2$$

$$(1 + s^3) + (s^2 + s + 2) =$$

$$= s^3 + s^2 + s + 3$$

$$\text{وبجاء } (d_1 + d_2) = \mathbb{R} \cap [5, 7]$$

$$[1, 7] \cap [5, 7] =$$

$$= [5, 7]$$

$$\therefore (d_1 + d_2)(s) = s^3 + s^2 + s + 3$$

$$\text{وبجاء } (d_1 + d_2) = [5, 7]$$

$$, \therefore \exists 3 \text{ لبجاء } (d_1 + d_2)$$

$$\therefore (d_1 + d_2)(3) = (3) + 3^2 + 3 + 3 = 24$$

$$= 9 + 12 + 3 = 24$$

$$, \therefore 7 \notin [5, 7]$$

$$\therefore (d_1 + d_2)(7) \text{ غير معرفة}$$

$$2 \quad \therefore (d_1 - d_2)(s) = (s) - d_1 - d_2$$

$$= (1 + s^3) - (s^2 + s + 2) =$$

$$= s^3 - s^2 - s - 1$$

$$= -s^2 - s - 1$$

٢ العمليات على الدوال - تركيب الدالتين

أولاً: العمليات على الدوال

[ جمع - طرح - ضرب - قسمة ] دالتين

إذا كان:  $d_1, d_2$  دالتين مجالهما  $\mathbb{R}, \mathbb{R}$

$$\text{صيت: } \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$$

فإن:

١ جمع وطرح دالتين

$$(d_1 \pm d_2)(s) = (s) \pm d_1 \pm d_2$$

$$\text{بجاء } (d_1 \pm d_2) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}$$

أي أن جمع دالتين هو دالة جديدة:

قاعدتها = مجموع قاعدتي الدالتين

وبجاءها = تقاطع مجالي الدالتين

مثال ١

إذا كانت  $d_1(s) = s^2 + s + 1$  وبجاءها  $[5, 7]$

$d_2(s) = s^2 + s + 2$  وبجاءها  $[7, 10]$

فأوجد:

١  $d_1 + d_2$  تم أوجد

$$(d_1 + d_2)(3) = (3) + 3^2 + 3 + 2 = 14$$

٢  $d_1 - d_2$  إن أمكن

الحل

$$\therefore d_1 = [5, 7], d_2 = [7, 10]$$

∴ دليل الجذر زوجي

∴ الدالة معرفة عندما  $s - 1 \leq 0$

∴  $s \leq 1$

∴ مجال الدالة  $U$  هو:  $U = ]-\infty, 1]$

∴ مجال  $D = ]-\infty, 1]$

$$]-\infty, 1] \cap U =$$

$$]-\infty, 1] =$$

ومجال  $(D - U) = ]-\infty, 1]$

$$]0, 1] \cap ]-\infty, 1] =$$

$$]0, 1] =$$

∴  $(D - U) = ]-\infty, 1]$

∴ مجال  $(D - U) = ]-\infty, 1]$

### ملحوظة مهمة

الدالة التي تساوي مجموع دالتين

مجالها = تقاطع مجالي الدالتين

### مثال ٢

عين مجال كلاً من الدوال الآتية

$$1) \quad D(s) = s + \frac{1}{s}$$

### الحل

الدالة  $D(s) = s + \frac{1}{s}$  مجالها هو  $U = \mathbb{R} - \{0\}$

الدالة  $U(s) = \frac{1}{s}$  مجالها هو  $U = \mathbb{R} - \{0\}$

∴ مجال  $D = \mathbb{R} - \{0\}$

$$2) \quad D(s) = s + \sqrt{s-1}$$

### الحل

∴  $D$  تتكون من مجموع دالتين

$D(s) = s$  هو  $U = \mathbb{R}$

الدالة  $U(s) = \sqrt{s-1}$

$$3) \quad D(s) = \sqrt{s-2} - \sqrt{s-7}$$

### الحل

الدالة  $D$  تتكون من طرح دالتين

الدالة  $D(s) = \sqrt{s-2}$

∴ دليل الجذر زوجي

∴  $D$  تتكون معرفة عندما  $s - 2 \geq 0$

∴  $s - 7 \leq 0$  بالضرب  $\times (-1)$  للطرفين

∴  $s \geq 7$

∴ مجال الدالة هو  $U = ]7, \infty[$

الدالة  $U(s) = \sqrt{s-7}$

∴ دليل الجذر زوجي

∴  $U$  تتكون معرفة عندما  $s - 7 \geq 0$

∴  $s \geq 7$

∴ مجال الدالة هو  $U = ]7, \infty[$

∴ مجال  $h$  هو  $h = [-1, 4]$

∴ مجال  $h = [-1, 4]$

$h = [-1, 4] \cap h = [-1, 4]$

$h = [-1, 4]$

٥ د (س)  $\sqrt{s-1} + \sqrt{s-4} =$

**الحل**

الدالة تتكون من مجموع دالتين

الدالة  $h$  حيث  $h(s) = \sqrt{s-1}$

∴ دليل الجذر زوجي ∴ الدالة تكون معرفة عندما  $s-1 \geq 0$  ∴  $s \geq 1$

∴ مجال  $h$  هو  $h = [1, \infty)$

الدالة  $h$  حيث

$h(s) = \sqrt{s-4}$  ∴ دليل الجذر زوجي

∴ الدالة تكون معرفة عندما  $s-4 \geq 0$  ∴  $s \geq 4$

بوضع  $s-4 = 0$

∴  $(s-2)(s+2) = 0$

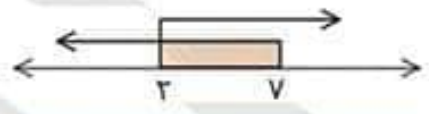
أما  $s-2 = 0$  أو  $s+2 = 0$

∴  $s = 2$  |  $s = -2$

نبحث إشارة القدر  $(s-4)$

∴ مجال  $h = [-1, 4]$

$h = [-1, 4] \cap h = [-1, 4]$



∴ مجال  $h = [2, 4]$

٤ د (س)  $\sqrt{s-3} + \sqrt{s-4} =$

**الحل**

∴ د تساوي مجموع دالتين هما :

الدالة  $h(s) = \sqrt{s-3}$

∴ مجال  $h$  هو  $h = [3, \infty)$

الدالة  $h$  حيث :

$h(s) = \sqrt{s-4}$

∴ دليل الجذر زوجي

∴ الدالة تكون معرفة عندما

$s-4 \geq 0$

بوضع  $s-4 = 0$

∴  $(s-1)(s-4) = 0$

أما

$s-1 = 0$  أو  $s-4 = 0$

∴  $s = 1$  |  $s = 4$



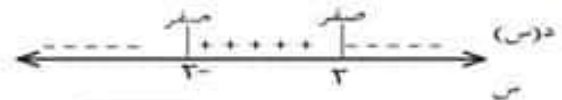
الدالة تكون معرفة عندما  $s \geq 3$  ∴  $h = [3, \infty)$

∴ مجال الدالة  $h$  هو  $\mathbb{R} = ]-\infty, 2]$

∴ مجال الدالة  $d$  =  $\mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

$] -\infty, 2 ] \cap \mathbb{R} =$

$] -\infty, 2 ] =$

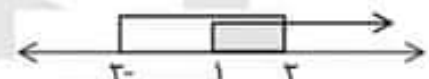


الدالة تتكون معرفة

عندما  $s \in ]-\infty, 2]$

∴ مجال  $h$  هو  $\mathbb{R} = ]-\infty, 2]$

∴ مجال  $d$  =  $\mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$



$] -\infty, 1 ] = [ ]-\infty, 2 ] \cap [ ]-\infty, 1 ] =$

∴ مجال  $d$  =  $] -\infty, 1 ]$

### الحل

∴  $d(s)$  = حاصل ضرب الدالتين

∴ مجال  $d$  = تقاطع مجال الدالتين

الدالة  $r$ :  $r(s) = s^2 - 4s$

دالة كثيرة الحدود مجالها هو  $\mathbb{R} = \mathbb{C}$

الدالة  $h$ :  $h(s) = \sqrt{s-4}$

تكون معرفة عندما:  $s-4 \geq 0$

∴  $s-4 \geq 0$  بالضرب في (-1)

∴  $s \geq 4$

∴ مجال الدالة  $h$  هو

$[-4, +\infty[ = \mathbb{R}$

∴ مجال الدالة  $d$  =  $\mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

$[-4, +\infty[ \cap \mathbb{R} =$

$[-4, +\infty[ =$

### 2 ضرب الدالتين

(د.د)  $(s) = (s) \cdot (s) = (s) \cdot (s)$

ومجال (د.د) =  $\mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

### مثال 3

عين مجال كلا من الدوال الآتية

$d(s) = \sqrt{s-3}$

### الحل

الدالة تتكون من حاصل ضرب الدالتين

∴ مجالها = تقاطع مجال الدالتين

مجال  $r$ :  $r(s) = s$

هو  $\mathbb{R} = \mathbb{C}$

مجال الدالة  $h$ :  $h(s) = \sqrt{s-3}$

يرضع:  $s-3 \geq 0$  ∴  $s \geq 3$

∴ مجال دالة القام =  $]-\infty, 7[$

أصفار دالة القام  
بوضع :  $\sqrt{7-s} = 0$  بالتربيع للطرفين

$$7 = s$$

$$\frac{d(s)}{r(s)} = \left(\frac{d}{r}\right)(s)$$

، مجال  $\left(\frac{d}{r}\right)$

$$= \text{مجال } d \cap \text{مجال } r - \{\text{أصفار الدالة } r\}$$

## العمليات على الدوال

## تمارين على

١ إذا كانت د، د دالتين حقيقيتين؛ حيث  
 $(د) = (س) = ١ - س^٢$ ،  $(د) = (س) = ٥ - س$ ، فأوجد قيمة  
 $\left(\frac{د}{ر}\right)$  (١) إن أمكن.

٢ غير معرّفة. ب صفر ح ٢- ٤

٢ إذا كانت د، د دالتين حقيقيتين،  
 وكانت  $(د) = (س) = ٥ - س^٢$ ،  $(د) = (س) = ٣ - س$ ،  
 فأوجد مجال الدالة  $(د + د)$ .

٣ إذا كانت:

د:  $٢ + س - ٥ = (س)$  حيث د، ح؛ حيث  $٢ + س - ٥ = (س)$   
 د:  $٧، ٨ - ] \leftarrow$  ح حيث د،  $٧، ٨ - ] \leftarrow$  ح حيث د،  $٧، ٨ - ] \leftarrow$  ح حيث د،  
 فأوجد قيمة  $(د \cdot د)$ ، وحدّد مجالها.

٤ إذا كانت د:  $٤ - ح \leftarrow$  ح

حيث  $(د) = (س) = ٤ + س - ٤$ ، د:  $٤ - ] \leftarrow$  ح؛ حيث  
 $(د) = (س) = ٥ + س - ٢$ ، فأوجد قيمة  $(د + د)$  (٧) إن أمكن

٥ : إذا كانت:

د:  $٥، ٦ - ] \leftarrow$  ح حيث د،  $٥ + س = (س)$   
 وكانت:

د:  $٢ - ] \leftarrow$  ح حيث  
 $(د) = (س) = ٤ - س^٢ - ١٨ + س + ٢٠$ .

فأوجد  $\left(\frac{د}{ر}\right)$ ، وحدّد مجالها.

٦ إذا كانت د، د، ر:  $١ - ح \leftarrow$  ح حيث د،  $١ + س = (س)$

، وكان  $(د + ر) = (س) = ٢ + س - ١$  فإن:  $(١ - ) = \dots$

٢ ٤ ب صفر ح ١- ٥

برضع :  $٩ - س^٢ = ٠$

$٠ = (س - ٣) (س + ٣)$

أما  $٠ = س - ٣$  |  $٠ = س + ٣$  أو  
 $٣ = س$  |  $٣ = -س$



∴ مجال دالة القام  $[-٣، ٣]$

أصفار دالة القام  $\{٣، -٣\}$



مجال د

مجال د ∩ مجال ر - {أصفار الدالة ر} =

$([١، ∞) \cap [-٣، ٣]) - \{٣، -٣\} =$

$[١، ٣] =$

٧ إذا كان:

د :  $[-2, 8]$  ← ح ؛ حيث د (س) =  $س^2 + 2س - 2$   
د :  $[-1, \infty)$  ← ح ؛ حيث د (س) =  $س^2 + 5$   
فاكتب مقدارًا يمثل (د + ح) (س) ووضح مجالها.

٨ اعرّف الدالتان د، ح في صورة مجموعات

من الأزواج المرتبة، كما يأتي:

د =  $\{(8, 4), (0, 2), (1, -2), (3, 1)\}$

ح =  $\{(5, -5), (4, -4), (2, -2), (2, -2)\}$

فإن : د + ح = .....

أ  $\{(4, 2), (3, -3), (3, 2)\}$

ب  $\{(2, 4), (1, -2), (5, 1)\}$

ج  $\{(4, 4), (3, -2), (3, -2)\}$

د  $\{(1, 7), (4, -5), (2, 8)\}$

هـ  $\{(5, -5), (3, 1), (4, 4), (3, -2), (3, -2)\}$

٩ إذا كانت د : ح ← حيث د (س) =  $س - 5$

س :  $[-1, 5]$  ← ح

حيث ح (س) =  $س - 2$  فإن :  $\left(\frac{د}{ح}\right) = (1)$  .....

١ ٥ ٢ ٤ ٨

١٠ إذا كان د : ح ← حيث د (س) =  $س^2 - 2س$  ،

س : ح ← حيث س (س) =  $س^2 - 2س$

فإن : (د - س) (س) = .....

١١ مجال الدالة د : د (س) =  $\sqrt{س^2 - 2س} - 2$  هو .....

١٢ مجال الدالة د : د (س) =  $\sqrt{س^2 - 4} - 2$  هو .....

١٣ عين مجال كلا من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية

١٤ مجال الدالة د حيث د (س) =  $\frac{س^2 - 3س}{س - 5}$  هو .....

١٥ مجال الدالة د : د (س) =  $\sqrt{\frac{س - 2}{س - 5}}$  هو .....

١٦

١٧

## ثانياً: تركيب دالتين

إذا كانت:  $d, r$  دالتينمدى الدالة  $r \cap$  مجال الدالة  $d \neq \emptyset$ فإنه يمكن استنتاج دالة جديدة  $e$ 

تتركب من الدالتين السابقتين

 $e = (d \circ r)$  ونقرأ [د تركيب  $r$ ]أو [د بعد  $r$ ]

ويكون:

$$(d \circ r)(s) = d(r(s))$$

فمثلاً: إذا كانت:  $d(s) = s^2 + 1$ 

$$r(s) = s^2 + 4$$

فإن:  $(d \circ r)(s) = (s^2 + 4)^2 + 1$ بالمثل:  $(r \circ d)(s) = (s^2 + 1)^2 + 4$ 

## تعيين مجال تركيب دالتين

مجال:  $(d \circ r)$ 

$$\{s : s \in \text{مجال } r, r(s) \in \text{مجال } d\}$$

بل إيجاد مجال  $(d \circ r)$ 1 نوجد  $M = \text{مجال الدالة } r$ 2 نوجد مجال  $(d \circ r) = M^2$ فيكون: مجال:  $(d \circ r) = M \cap M^2$ 

## مثال 5

إذا كانت:

$$d(s) = s^2, r(s) = s + 1$$

فأوجد:

$$(1) (d \circ r)(1), (r \circ d)(-1)$$

$$(2) (d \circ r)(2), (r \circ d)(-1)$$

## الحل

1 نوجد  $(d \circ r)(s)$ 

$$(d \circ r)(s) = d(r(s))$$

$$(d \circ r)(s) = (s + 1)^2$$

مجال  $(d \circ r) = E$  عند  $s = 1$ 

$$(d \circ r)(1) = (1 + 1)^2$$

$$= 2^2$$

$$= 4$$

عند  $s = -1$ 

$$(d \circ r)(-1) = (-1 + 1)^2$$

$$= 0^2$$

$$= 0$$

2 نوجد  $(r \circ d)(s)$ 

$$(r \circ d)(s) = r(d(s))$$

$$(r \circ d)(s) = s^2 + 1$$

حيث  $x \in (0, 2)$  وهي دالة  
كثيرة الحدود من الدرجة الثانية مجالها  
 $x \in (0, 2)$  نوجد مجال  $(0, 2)$   $x \in (0, 2)$   
 $\therefore \sqrt{x-2} = (0, 2)$   
 $\therefore (0, 2)$  تكون معرفة عندما  
 $x-2 \geq 0$   
ببساطة إشارة القدر  $(x-2) \geq 0$   
بوضع  $x-2 = 0$

$$\therefore (x-2)(x+2) = 0$$

أما

$$\begin{array}{l|l} x-2 = 0 & x+2 = 0 \\ x = 2 & x = -2 \end{array}$$



$\therefore$  الدالة  $(0, 2)$  تكون معرفة

$$\begin{aligned} & \text{عندما } x \in [-2, 2] \\ & \therefore x-2 = -2 \text{ : } [-2, 2] \\ & (2) \text{ مجال الدالة : } (0, 2) \\ & = 2 \cap 2 = \end{aligned}$$

$$= [-2, 2] \cap [-2, 2] = [-2, 2]$$

$$= [-2, 2]$$

$\therefore \exists$  لمجال الدالة  $(0, 2)$

$$(0, 2) \cap (2) = (2) \text{ : } \sqrt{x-2} = \sqrt{2-2} = 0$$

مجال  $(0, 2) = x$   $\therefore$  عند  $x = 1$

$$(0, 2) \cap (1) = (1)$$

$$1 + 1 =$$

$$2 =$$

عند  $x = -1$

$$(0, 2) \cap (-1) = (1)$$

$$1 + 1 =$$

$$2 =$$

مثال ٦

إذا كانت:

$$d(x) = \sqrt{x-1}, \quad r(x) = x^2 - 3$$

أوجد:  $(0, 2)$   $(x)$  موضعاً الجبال

تم أوجد:  $(0, 2)$   $(x)$

الحل

$$(0, 2) \cap (x) = d(x) = r(x)$$

$$\sqrt{x-1} =$$

$$\sqrt{x^2 - 3} =$$

$$\sqrt{x-1} =$$

$$\therefore (0, 2) \cap (x) = (x)$$

نعين مجال  $(0, 2)$

(1) نوجد مجال الدالة

(٣) مجال الدالة (د ٥ س)

$$٢٣ \cap ١٢ =$$

$$[٤, \infty - [ \cap ]٥, \infty - [ =$$

$$[٤, \infty - [ =$$

مثال ٨

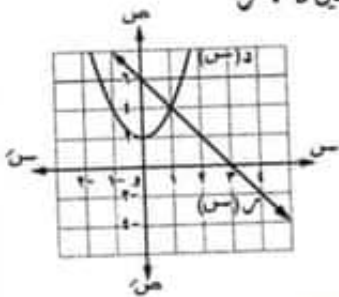
إذا كانت: د (١) = ٥، س (٧) = ١ فإن:

$$\dots\dots\dots = (٧) (٥ د)$$

- ٥  أ ٧  ب ٦  ج ١  د

مثال ٩

الشكل المقابل يوضح منحنى الدالتين د، س



فإن: (س ٥ د) (١) = \dots\dots\dots

- ٢-  أ ٥  ب ٤-  ج ٦  د

مثال ٧

إذا كانت  $٥ \leq \sqrt{s}$  = (س) س

٥، د (س) =  $\sqrt{s-3}$

فأوجد مجال (د ٥ س)

الحل

(١) نوجد مجال الدالة:

$$\sqrt{s-5} = (س) س$$

س (س) تكون معرفة عندما:

$$٥ \leq s - ٥$$

س - ٥ ≤ س - ٥ بالضرب في (-١) للطرفين

$$\therefore s \geq ٥$$

$$\therefore ١٢ = [٤, \infty - [$$

(٢) نوجد: (د ٥ س) (س)

$$\sqrt{\sqrt{s-5}-3} = (س) (د ٥ س)$$

نوجد قيم س التي تجعل:

$$٥ \leq \sqrt{s-5} - 3$$

$$\therefore \sqrt{s-5} \geq 3 \text{ بتربيع الطرفين}$$

$$\therefore ٩ \leq s - ٥$$

$$\therefore s - ٩ \leq ٥$$

$$\therefore s - ٤ \leq ٤ \text{ بالضرب في (-١) للطرفين}$$

$$\therefore s \geq -٤$$

$$\therefore s \in [٤, \infty - [$$

$$\therefore ٢٣ = [٤, \infty - [$$

$$7 \quad \frac{اس + ب}{س + ج} = د(س)$$

$$8 \quad \frac{س - ب}{س + ج} = د(س) \text{ أوجد في أبسط}$$

صورة د(د(س))، د(د(س)).

$$8 \quad \text{افتراض أن } د(د(س)) = د(د(س)) = د(د(س)) = د(د(س))$$

وهكذا، بملاحظة أن د<sup>(ن)</sup> تكون دالة خطية دائماً

عندما تكون د(س) = 2س + 2، أوجد د<sup>(1)</sup> دون تركيب فعلي.

$$9 \quad \text{إذا كانت الدالة } د(س) = \frac{7}{س + 22}$$

والدالة ر(س) = 68 - 2س<sup>2</sup>، فأوجد د(د(س))

في أبسط صورة، وأوجد مجالها.

$$10 \quad \text{إذا كانت: } د(س) = \frac{1}{س} \text{، } ر(س) = 1 - 2س$$

فإن مجال (د(س)) = .....

$$11 \quad \text{ج - } \{1, -1\} \quad \text{ب - } \{1, -1, 0\}$$

$$12 \quad \text{ح - } \{1, -1, 0\} \quad \text{د - } [1, -1]$$

$$13 \quad \text{مجال الدالة (د(س)) حيث: } د(س) = \sqrt{2-س}$$

، ر(س) = 62 - 7س هو .....

$$14 \quad \text{ب - } [2, \infty) \quad \text{ج - } [2, \infty) \quad \text{د - } [2, \infty) \quad \text{هـ - } [2, \infty)$$

$$15 \quad \text{إذا كان: } د(س) = \sqrt{2-س} \text{، } ر(س) = 2س$$

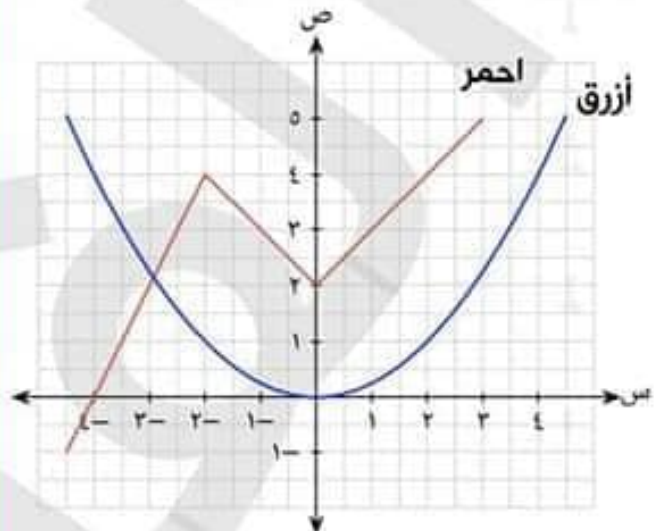
فإن: مجال (د(س)) = .....

$$16 \quad \text{ب - } [0, \infty) \quad \text{ج - } [0, \infty) \quad \text{د - } [0, \infty) \quad \text{هـ - } [0, \infty)$$

$$17 \quad \text{إذا كان: } د(س) = \sqrt{1+س} \text{، } ر(س) = \frac{2}{3-س}$$

فأوجد مجال (د(س))

1 في الشكل الآتي، يمثل المنحنى الأحمر  
ص = د(س)، ويمثل المنحنى الأزرق ص = د(د(س)).



ما قيمة د(د(2))؟

$$2 \quad \text{إذا كانت الدالة } د(س) = \frac{11}{س} \text{؛ حيث } س \neq 0$$

والدالة ر(س) = 4 - 2س<sup>2</sup>، فأوجد مجال الدالة

(د(س)).

$$3 \quad \text{أوجد قيم } س \text{ التي تجعل } د(د(س)) = 848$$

حيث د(س) = 52 - 2س<sup>2</sup>، ر(س) = 15س.

$$4 \quad \text{افتراض أن } د(د(س)) = د(د(س)) = د(د(س)) = د(د(س))$$

وهكذا؛ بحيث تصبح د<sup>(2)</sup>(س) = د(د(س))،

د<sup>(3)</sup>(س) = د(د(د(س))), وهكذا. افتراض أن

د(س) = 4س - 5. أوجد د<sup>(4)</sup>(2).

$$5 \quad \text{إذا كانت } د(س) = 4 - س \text{، } ر(س) = 2س$$

، ن(س) = 2س، فأحسب قيمة د(د(ن(2))).

$$6 \quad \text{إذا كانت } د(س) = اس + ب$$

د(س) = جس + د، فما معامل س في د(د(س))؟

$$14 \left. \begin{array}{l} \text{إذا كانت: د (س) = } \\ \text{س}^2 + 1, \text{ س} > 0. \\ \text{س}^2 + 1, \text{ س} \leq 0. \end{array} \right\}$$

$$, \text{ م (س) = } \left. \begin{array}{l} \text{س}^4 - 2, \text{ س} > 2 \\ \text{س}^2 + 2, \text{ س} \leq 2 \end{array} \right\}$$

فإن: (د م) = (١-) = .....

٢٧  ١٠  ٦  ١٧-

$$15 \text{ إذا كان: د (س) = } \text{س}^2 + 6, \text{ م (س) = } \text{س}^2 - 3$$

٢ حدد: قيم س التي تجعل (د م) = ٤٢

أوجد: (د م) (٣)

$$16 \text{ إذا كانت: د (س) = } \text{س}^2, \text{ م (س) = } 2 + \text{س}^2$$

فإن مجموعة حل المعادلة د = م (س) هي .....

{٣, ١-}  {٢, ١}  {١, ٢-}  {٢, ١-}

$$17 \text{ إذا كانت: د: ح} \leftarrow \text{ح} \text{ وكان: د (س) = } 2 - \text{س}^2$$

, (د م) = (س) = 2 + س فإن: م (س) = .....

٢   $\frac{2 + \text{س}}{2 - \text{س}}$

٢   $\frac{2 + \text{س}}{2}$    $\frac{7 + \text{س}}{2}$

$$18 \text{ إذا كانت: د (س) = } 2 + \text{س}, \text{ م (س) = } \frac{\text{س} - 1}{1 - \text{س}}$$

وكان: (د م) = (٠) = (د م) (١) فإن: لك = .....

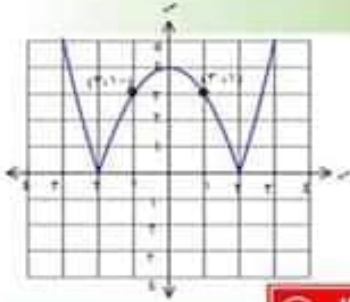
٥  ٧  ١   $\frac{7}{2}$

## مثال ٣

سلك بياني متماثل حول محور السينات  
درسم خط رأسي فقطع السلك  
في النقطتين  $P$ ،  $Q$  حيث  $P = (3, 2)$   
وكان منتصف  $PQ = (8, 2)$  فإن:  
 $س + ص = \dots\dots\dots$

ثانياً: التماثل حول محور الصادات

يكون الشكل البياني متماثل حول محور الصادات  
إذا كان لكل نقطة  $A(س, ص)$  تقع على هذا الشكل  
توجد نقطة أخرى  $A'(س, -ص)$  تقع أيضاً على  
هذا الشكل



السلك القابل  
يمثل منحنى متماثل  
حول محور الصادات

## مثال ٤

إذا كانت النقطة  $(-3, 2)$  تقع على منحنى  
بياني متماثل حول محور الصادات فإن النقطة  
 $\dots\dots\dots$  تقع على هذا الشكل

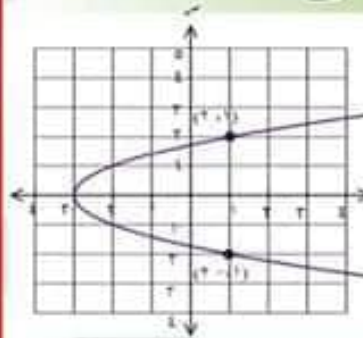
ثالثاً: التماثل حول نقطة الأصل

يكون الشكل البياني الممثل لعلاقة متماثل حول  
نقطة الأصل إذا كانت كل نقطة  $A(س, ص)$   
توجد نقطة  $A'(-س, -ص)$  تقع على هذا الشكل

بعض خواص الدوال  
الدوال الزوجية والدوال الفردية-الدوال الأحادية

أولاً: التماثل حول محور السينات

إذا كان: لكل نقطة  $A(س, ص)$  تقع على  
المنحنى توجد نقطة أخرى  $A'(س, -ص)$   
تقع على هذا السلك



السلك القابل

متماثل حول محور السينات

هذا النوع من الأشكال البيانية لا يمثل دالة  
لوجود خط رأسي يقطع المنحنى في أكثر من نقطة

## مثال ١

إذا كانت النقطة  $(3, -1)$  تقع على  
سلك بياني متماثل حول محور  
السينات فإن النقطة  $\dots\dots\dots$  تقع  
على نفس السلك البياني

## مثال ٢

سلك بياني متماثل حول محور  
السينات درسم خط رأسي فقطع السلك  
في النقطتين  $P$ ،  $Q$  حيث  $P = (3, 2)$   
فإن طول  $PQ = \dots\dots\dots$

## جبرياً :

يقال للدالة زوجية بانها زوجية اذا كانت :

$$D(-s) = D(s)$$

لكل  $s$ ،  $-s \in$  مجال  $D$

## مثال ①

بين أن كلا من الدوال الآتية هي دوال زوجية

$$1 \quad D(s) = s^2 + 3$$

$$2 \quad D(s) = (s-1)^0 + (s+1)^0$$

$$3 \quad D(s) = \left(\frac{s-1}{s+1}\right)^2 + \left(\frac{s+1}{s-1}\right)^2$$

## الحل

$$1 \quad D(s) = s^2 + 3$$

دالة كثيرة حدود مجالها  $\mathbb{R}$

$\therefore$  لكل  $s$ ،  $-s \in$  مجال  $D$  فإن :

$$D(-s) = (-s)^2 + 3$$

$$= s^2 + 3$$

$$= D(s)$$

$\therefore$  الدالة زوجية

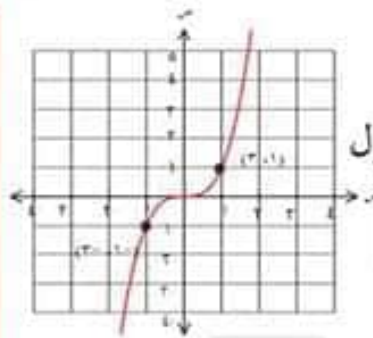
## 2 الدالة د :

$$D(s) = (s-1)^0 + (s+1)^0$$

مجالها  $\mathbb{R}$

$\therefore$  لكل  $s$ ،  $-s \in$  مجال  $D$  فإن :

## الشكل المقابل:



يمثل منحنى متماثل حول  
نقطة الأصل

## الدوال الزوجية والدوال الفردية

## أولاً: الدالة الزوجية

التعرف على الدالة الزوجية يكون جبرياً من قاعدتها  
أو من خلال شكلها البياني

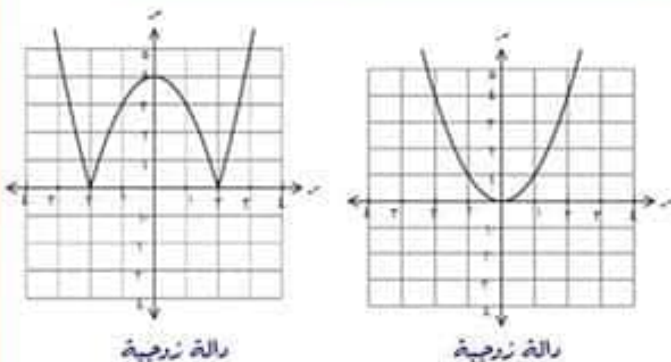
## بيانياً

الدالة الممثلة بيانياً تكون زوجية إذا كان منحنها  
متماثل حول محور الصادات

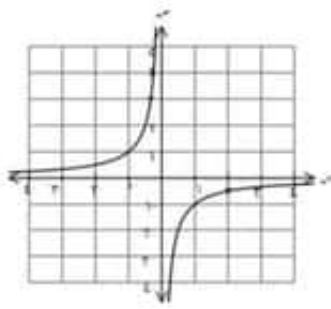
## أي أن

- لأي نقطة  $(s, D(s))$  تقع على  
منحنى الدالة يكون النقطة  $(-s, D(-s))$   
تقع أيضاً على منحنى هذه الدالة

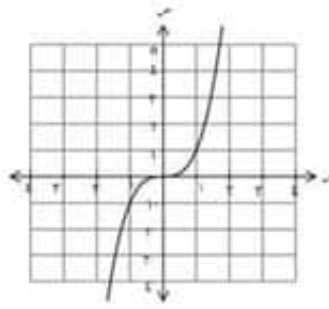
## الشكلان التاليان يمثلان دالتين زوجيتين



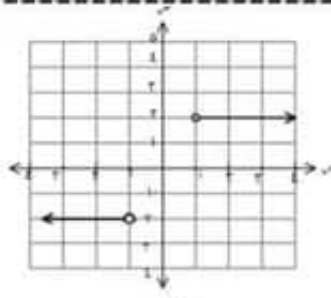
لأنهما متماثلتين حول محور الصادات



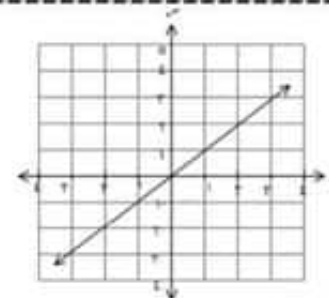
دالة فردية



دالة فردية



دالة فردية



دالة فردية

## جبرياً

يقال للدالة  $f$  بانها فردية اذا كانت :

$$f(-x) = -f(x)$$

لكل  $x$ ،  $-x \in \text{مجال } f$

## مثال ٦

بين أن كلا من الدوال الآتية هي دوال فردية

$$1 \quad f(x) = x^2 + x$$

$$2 \quad f(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right) - \left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$3 \quad f(x) = \left(\frac{1}{x} + x\right)^5$$

## الحل

$$1 \quad \text{مجال } f = \mathbb{R}$$

$$\therefore f(-x) = (-x-1) + (-x)^2 = (-x-1) + x^2 = x^2 - x - 1$$

$$= -(x^2 + x) = -f(x)$$

$$f(-x) = (-x-1) + (-x)^2 = (-x-1) + x^2 = x^2 - x - 1$$

$$= -(x^2 + x) = -f(x) \therefore \text{الدالة زوجية}$$

$$3 \quad f(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right) - \left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$\text{مجال } f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

$\therefore$  لكل  $x$ ،  $-x \in \text{مجال } f$

$$\therefore f(-x) = \left(\frac{-x-1}{-x+1}\right) - \left(\frac{-x+1}{-x-1}\right) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right) - \left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$= -\left[\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - \left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right] = -f(x)$$

$$= -f(x) \therefore \text{الدالة زوجية}$$

## ثانياً: الدالة الفردية

## بيانياً

الدالة الممثلة بيانياً تكون فردية إذا كان منحناها

متماثل حول نقطة الأصل

أي أن

- لاى نقطة  $(x, y)$  تقع على

منحنى الدالة فإن النقطة  $(-x, -y)$

تقع أيضاً على منحنى هذه الدالة

$$^{\circ} \left( \left( \frac{1}{s} + s \right) - \right) =$$

$$^{\circ} \left( \frac{1}{s} + s \right) - =$$

$$- = (s) د$$

∴ الدالة فردية

### ملاحظات

١ إذا كانت:  $د(s) \neq د(-s)$

،  $د(s) \neq -د(-s)$

في هذه الحالة تكون الدالة

ليست زوجية ولا فردية

### مثال ٧

اجمعت نوع الدالة د:

$$د(s) = s^2 - 2s + 2$$

كرونها زوجية أو فردية أو غير ذلك

### الحل

∴ مجال  $د = ح$

∴ لكل  $s \in ح$   $د(s) \neq د(-s)$

$$د(s) = s^2 - 2s + 2$$

$$= s^2 + 2s + 2$$

$$\neq د(s)$$

$$\neq -د(s)$$

الدالة الناتجة ليست الدالة الأصلية ولا معكوس جمعي لها

∴ الدالة ليست زوجية ولا فردية

لكل  $s \in ح$   $د(s) \neq د(-s)$

$$د(s) = (s-1)^2 + (s-1)$$

$$= s^2 - 2s + 1 + s - 1$$

$$= (s^2 + s) - 1$$

$$= د(s)$$

∴ الدالة فردية

$$٢ د(s) = \left( \frac{s-1}{s+1} \right)^2 - \left( \frac{s+1}{s-1} \right)^2$$

∴ مجال  $د = ح - \{1, -1\}$

∴ لكل  $s \in ح$   $د(s) \neq د(-s)$

$$د(s) = \left( \frac{s-1}{s+1} \right)^2 - \left( \frac{s+1}{s-1} \right)^2$$

$$= \left( \frac{s-1}{s+1} \right)^2 - \left( \frac{s+1}{s-1} \right)^2$$

$$= \left[ \left( \frac{s-1}{s+1} \right)^2 - \left( \frac{s+1}{s-1} \right)^2 \right] -$$

$$= -د(s) \quad \therefore \text{الدالة فردية}$$

$$٣ د(s) = \left( \frac{1}{s} + s \right)^{\circ}$$

مجال  $د = ح - \{0\}$

∴ لكل  $s \in ح$   $د(s) \neq د(-s)$

$$د(s) = \left( \frac{1}{s} + s \right)^{\circ}$$

$$= \left( \frac{1}{s} - s \right)^{\circ} \quad \text{بأخذ } 1 \text{ عامل مشترك}$$

$$^{\circ} \left( \left( \frac{1}{s} + s \right) - \right) =$$

$$^{\circ} \left( \frac{1}{s} + s \right) - =$$

$$- - د (س) =$$

∴ الدالة فردية

### ملاحظات

١ إذا كانت :  $د (س) \neq د (-س)$

،  $د (-س) \neq - د (س)$

في هذه الحالة تكون الدالة

ليست زوجية ولا فردية

### مثال ٧

اجمعت نوع الدالة د :

$$د (س) = س^2 - 2س + 2$$

كرونها زوجية أو فردية أو غير ذلك

### الحل

∴ مجال  $د = ع$

∴ لكل  $س \in ع$  :  $د (س) \neq د (-س)$

$$د (-س) = (-س)^2 - 2(-س) + 2 = س^2 + 2س + 2$$

$$= س^2 + 2س + 2$$

$$\neq د (س)$$

$$\neq - د (س)$$

الدالة الناتجة ليست الدالة الأصلية ولا معكوس جمعي لها

∴ الدالة ليست زوجية ولا فردية

لكل  $س \in ع$  :  $د (س) \neq د (-س)$

$$د (-س) = (-س)^2 + (-س) = س^2 - س$$

$$= س^2 - س$$

$$= - د (س)$$

$$= - د (س)$$

∴ الدالة فردية

$$٢ د (س) = \left( \frac{س-1}{س+1} \right)^2 - \left( \frac{س+1}{س-1} \right)^2$$

∴ مجال  $د = ع - \{1, -1\}$

∴ لكل  $س \in ع$  :  $د (س) \neq د (-س)$

$$د (-س) = \left( \frac{(-س)-1}{(-س)+1} \right)^2 - \left( \frac{(-س)+1}{(-س)-1} \right)^2$$

$$= \left( \frac{س-1}{س+1} \right)^2 - \left( \frac{س+1}{س-1} \right)^2$$

$$= \left[ \left( \frac{س-1}{س+1} \right)^2 - \left( \frac{س+1}{س-1} \right)^2 \right] =$$

$$= - د (س) \quad \therefore \text{الدالة فردية}$$

$$٣ د (س) = \left( \frac{1}{س} + س \right)^{\circ}$$

مجال  $د = ع - \{0\}$

∴ لكل  $س \in ع$  :  $د (س) \neq د (-س)$

$$د (-س) = \left( \frac{1}{-س} + (-س) \right)^{\circ}$$

$$= \left( -\frac{1}{س} - س \right)^{\circ} \quad \text{بأخذ } 1 \text{ عامل مشترك}$$

## الحل

بجاء د = ع

لأن د تساوي حاصل ضرب دالتين

بجاء كلاً منهما بساوي ع

$$د (س) = (س) ها (س) - (س)$$

$$س = (س) - (س) ها (س)$$

$$- س ها س =$$

∴ الدالة فردية

٤ الدالة التي تساوي :

- مجموع دالتين زوجيتين

- حاصل ضرب دالتين فرديتين أو زوجيتين

- خارج قسمة دالتين زوجيتين معاً أو فرديتين معاً

تكون دالة زوجية

٥ الدالة التي تساوي :

- مجموع دالتين فرديتين

حاصل ضرب دالتين إحداهما فردية والأخرى زوجية

- خارج قسمة دالتين إحداهما فردية والأخرى زوجية

تكون دالة فردية

## الحل

$$د (س) = ها س + ٢ ها س حنا س - ١$$

$$∴ ها س + حنا س = ١$$

$$∴ د (س) = ١ + ٢ ها س حنا س - ١$$

$$∴ د (س) = ٢ ها س حنا س$$

$$∴ د (س) = (س) ها (س) حنا (س)$$

$$∴ د (س) = (س) ها (س) حنا س$$

$$∴ د (س) = ٢ ها س حنا س$$

$$= - د (س)$$

∴ الدالة فردية

٦ إذا كانت د: معرفة على الفترة [٢، ٣]

وكانت د دالة زوجية أو فردية فإن

$$١ = - س \quad \text{أى} \quad ١ = س + ٠$$

## مثال ١٣

إذا كانت الدالة د: د: [٣، ٣] ← ع

د دالة زوجية فإن ب = .....

## مثال ١٤

١ اصدى الدوال المعرفة بالقواعد الآتية زوجية

$$ب \quad د (س) = س حنا س$$

$$ج \quad د (س) = س ها س$$

٢ اصدى الدوال المعرفة بالقواعد الآتية فردية

$$ب \quad س ها س$$

$$ج \quad س حنا س$$

## مثال ١٥

ابحث نوع الدالة الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك

$$d(s) = \begin{cases} \frac{1}{s} & \text{عندما } s > 0 \\ \frac{1}{s} - 1 & \text{عندما } s < 0 \end{cases}$$

## الحل

بمجال  $d = \mathbb{R} - \{0\}$

$$d(s) = \begin{cases} \frac{1}{s} & \text{عندما } s > 0 \\ \frac{1}{s} - 1 & \text{عندما } s < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{s} & \text{عندما } s < 0 \\ \frac{1}{s} & \text{عندما } s > 0 \end{cases}$$

$d(s) = d(s) \therefore$  الدالة زوجية

## تدريب ٢

١ إذا كانت  $d$  دالة فردية

$$\text{فإن: } \frac{d(2) + d(3)}{d(2-3)} = \dots$$

١ ٢  $\ominus$  ٢ -

٢ ٤  $\ominus$  ٢ -  $d(2)$

٢ إذا كانت  $d$  دالة زوجية حيث

$$d(s) = \frac{s^2 + 9}{s^2 + 9}, s \neq 0$$

فإن:  $1 = \dots$

١ صفر  $\ominus$  ٦

٢  $\ominus$  ٦ -

ابحث نوع كلاً من الدوال الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك

١  $d(s) = s^2 + \frac{1}{s}$

٢  $d(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$

٣  $d(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}$

٤  $d(s) = s^2 + \frac{1}{s}$

٥  $d(s) = \frac{s^2}{s^2}$

٦  $d(s) = \frac{s^2 - 4}{s^2 - 4}$

٧  $d(s) = s^2 + \frac{1}{s}$

٨  $d(s) = s^2 + \frac{1}{s}$

## الدوال الزوجية والدوال الفردية

## تمارين على

١ | أي من النقاط التالية تُكوّن دالة فردية؟

٢ | (٨، ٨-)، (٦، ٥-)، (٠، ٠)، (٦، ٥-)، (٨، ٨-)

٣ | (٨، ٨-)، (٦، ٥-)، (٤، ٠)، (٦، ٥-)، (٨، ٨-)

٤ | (٨، ٨)، (٦، ٥)، (٤، ٠)، (٦، ٥-)، (٨، ٨-)

٥ | (٨، ٨)، (٦، ٥)، (٠، ٠)، (٦، ٥-)، (٨، ٨-)

٢ | هل الدالة د(س) =  $\frac{7س^2 + 8س}{4س}$  زوجية أم فردية؟

زوجية أم فردية أم ليست زوجية ولا فردية؟

٢ | فردية  ليست زوجية ولا فردية  زوجية 

٣ | أوجد قيمة ا إذا كانت د دالة زوجية؛ حيث

$$د(س) = \frac{ص}{1 - اس + 2س^2} ، س \neq ٠$$

٤ | أي من النقاط التالية تكون منحني يمثل دالة زوجية

٢ | (٦، ٩-)، (٥، ٨-)، (٠، ٠)، (٥، ٨-)، (٦، ٩-)

٣ | (٥، ٩)، (٦، ٨)، (٤، ٠)، (٥، ٨-)، (٦، ٩-)

٤ | (٦، ٩)، (٥، ٨)، (٤، ٠)، (٥، ٨-)، (٦، ٩-)

٥ | (٦، ٩)، (٥، ٨)، (٤، ٠)، (٥، ٨-)، (٦، ٩-)

٥ | هل الدالة د(س) =  $\left(\frac{س-1}{س^2-1}\right) + \left(\frac{س+1}{س^2+1}\right)$  زوجية أم فردية أم ليست زوجية ولا فردية؟٦ | إذا كانت د<sub>١</sub>، د<sub>٢</sub>، د<sub>٣</sub> دوال حقيقية؛ حيث

$$د_١(س) = ٩س^٢ ، د_٢(س) = ٣س ، د_٣(س) = ٣س$$

د<sub>١</sub>(س) = ٥س<sup>٢</sup>، د<sub>٢</sub>(س) = ٣س، فحدّد أيّ من الدوال التالية فردية.٢ | د<sub>١</sub> × د<sub>٢</sub>  د<sub>١</sub> - د<sub>٢</sub>  د<sub>١</sub> - د<sub>٣</sub> ٥ | د<sub>١</sub> × د<sub>٢</sub>  د<sub>١</sub> + د<sub>٢</sub> ٣ | إذا كانت د دالة زوجية،  $٢ \in$  مجال د فإن :

$$د(٢) + د(-٢) = \dots\dots$$

١ | صفر  ٤ ٢ | ٢  د(٢) 

٤ | إذا كانت د دالة زوجية، على الفترة

$$[-٢، ٢] \text{ فإن : } ب = \dots\dots\dots$$

١ | صفر  ٤ ٢ | ٢  -٢ ٥ | إذا كانت د دالة فردية،  $٢ \in$  مجال د

فإن :

$$د(٢) + د(-٢) = \dots\dots\dots$$

١ | صفر  د(٢) ٢ | د(٢)  ٢ 

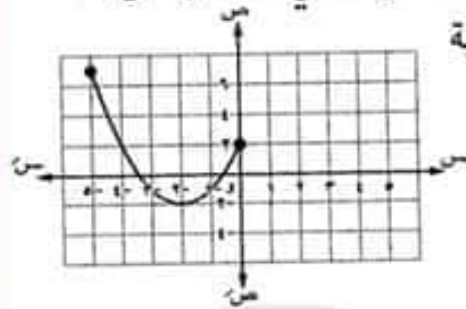
٦ | إذا كانت د دالة فردية، د(١) = ٢

فأفك من النقط الآتية تقع على منحنى الدالة د

١ | (٢، ١-)  (٢، ١-) ٢ | (٢، ١-)  (٠، ١-)

أكمل رسم الشكل التالي لتحصل على

دالة زوجية

١١ إذا كانت الدالة  $d$  دالة زوجية في الفترة  $[2, 5]$ فإن  $d(3) = \dots$ 

٢  ٥      ٢  ٣      ٢٢  ٤      ٢-  ٤

١٢ إذا كانت  $d$  دالة زوجية ،  $2 \in \text{مجال } d$ فإن  $d(2) + d(2-) = \dots$ 

٢  ٥      ٢  ٣      ٤  ٤      ٤  ٤

١٣ نوع الدالة  $d : d(x) = \frac{1}{x}$  هي ....

٢  فردية.      ٣  زوجية.      ٤  لا زوجية ولا فردية.

١٤ كل الدوال الآتية زوجية ما عدا .....

٢   $d(x) = x^2$       ٣   $d(x) = x^3$ ٤   $d(x) = x^4$       ٥   $d(x) = x^5$ ١٥ إذا كانت  $d$  دالة فردية ،  $2 \in \text{مجال } d$ فإن  $d(1) + d(1-) = \dots$ 

٢  ٥      ٢  ٣      ٤  ٤      ٤  ٤

٩ ابحث نوع كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية

من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

٢   $d(x) = x^2 + x - 1$ ٣   $d(x) = \frac{1}{x} - x^2$ ٤   $d(x) = (x^2 + 1)^2$ ٥   $d(x) = (x^2 + 1)^2$ ٦   $d(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x \geq 0 \\ x^2 - x - 1, & x < 0 \end{cases}$ ٧   $d(x) = \frac{2x^2 + 2x - 1}{x^2 + 1}$ ٨   $d(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-2}} + \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$ ٩   $d(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ ١٠ إذا كانت  $d$  دالة مجالها  $\mathbb{R}$  أوجد قيمة :

$$7d(5-) + 3d(5) \quad \text{إذا كان} \quad \frac{d(5-)}{d(5)}$$

٢  دالة فردية.      ٣  دالة زوجية.

علمي فقط

## الدالة الأحادية

الدالة  $d: S \rightarrow T$  تسمى دالة أحادية إذا كان لكل  $s \in S$  ،  $d(s) = t$  ، فإن  $t = p$  بمعنى :

$$s \in S, d(s) = t, \text{ فإن } t = p$$

بمعنى :

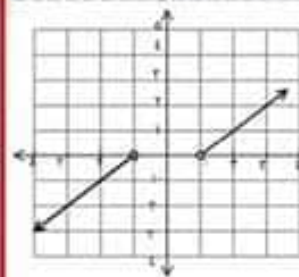
- أن كل عنصر من عناصر المدى يناظره قيمة وحيدة من عناصر المجال
- لا يوجد عنصران في مجال الدالة الأحادية يكرن لهما نفس الصورة

ونحدد الدالة الأحادية :

## أولاً: بيانياً

اختبار الخط الأفقي :

إذا كان لكل خط أفقي ( يوازي محور السينات ) يقطع الدالة في نقطة وحيدة فإن الدالة تكون أحادية

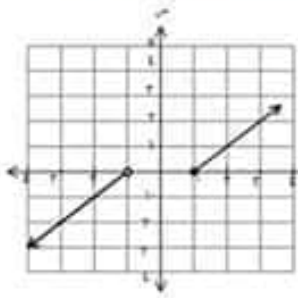


في الشكل المقابل

- يمثل دالة أحادية لأن كل خط أفقي

يقطع الدالة في نقطة وحيدة وهي دالة فردية لأنها متماثلة حول نقطة الاصل

في الشكل المقابل



يمثل دالة أحادية ولكنها ليست فردية ولا زوجية

∴ ليس كل دالة أحادية تكون فردية

## ثانياً: جبرياً

لنثبت أن الدالة  $d$  أحادية نفرض أن :

$$s, p \in S, d(s) = t, \text{ فإن } t = p$$

$$d(s) = t, \text{ إذا تحقق أن } :$$

$$p \text{ لها قيمة وحيدة فإن الدالة تكون أحادية}$$

$$\text{فمثلاً: } p = s \text{ فقط فإنها أحادية}$$

$$p \text{ لها أكثر من قيمة فإنها تكون ليست أحادية}$$

$$\text{إذا كانت: } p = s, p = -s \text{ تكون ليست أحادية}$$

## مثال ①

اثبت أن الدالة :

$$d(s) = s^3 + 1 \text{ دالة أحادية}$$

## الحل

نفرض أن :  $s, p \in S$  ،

$$\text{وأن: } d(s) = t, d(p) = t$$

$$s^3 + 1 = t, p^3 + 1 = t$$

وأن : د (أ) = د (ب)

$$\frac{5+b^3}{1+b^4} = \frac{5+p^3}{1+p^4} \therefore$$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب المقام

$$= (1+b^4)(5+p^3)$$

$$(1+p^4)(5+b^3)$$

$$5 + b^3 + p^3 + b^3 p^3$$

$$5 + p^3 + b^3 + b^3 p^3 =$$

$$p^3 + b^3 = b^3 + p^3$$

$$p^3 - p^3 = b^3 - b^3$$

$$17 = b = 17 \text{ بالقسمة على } 17$$

$$p = b$$

$\therefore$  لها قيمة وحيدة

$\therefore$  الدالة أحادية

$$3 - s = 2s^2 - s - 3 \quad \text{د (س)}$$

الحل

نفرض أن :  $p, b \in \mathbb{R}$

وأن : د (أ) = د (ب)

$$3 - s - 2s^2 = 3 - p - 2p^2$$

$$\therefore 3 - p = 3 - s \text{ بالقسمة على } 2 \text{ للطرفين}$$

$$\therefore p = s$$

$\therefore$  الدالة أحادية

مثال ١

في كل من الدوال الآتية : حدد ما

إذا كانت الدالة أحادية أم لا

$$1 - s^2 = (s) \quad \text{د (س)}$$

الحل

نفرض أن :  $p, b \in \mathbb{R}$

وأن : د (أ) = د (ب)

$$\therefore 1 - s^2 = 1 - p^2$$

$$s^2 = p^2$$

$$\therefore s = \pm p$$

$$\therefore p = b \text{ أو } p = -b$$

$\therefore$  لها قيمتان

$\therefore$  الدالة ليست أحادية

$$\frac{5+s^3}{1+s^4} = (s) \quad \text{د (س)}$$

الحل

نفرض أن :  $p, b \in \mathbb{R}$

## الدالة الأحادية

## تمارين على

١ في كل من الدوال المعرفة كما يلي حدد ما إذا كانت الدالة المعطاة أحادية أم لا ، مع توضيح السبب.

د (س) =  $1 + 3^s$  **ب**

د (س) =  $1 + 3^s$  **ب**

د (س) =  $1 + 2^s + 3^s$  **ح**

د (س) =  $\frac{1 + 2^s}{3 - 2^s}$  **د**

٢ الدالة الأحادية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هي .....

**ب**  $س^2 + 1$  **ب**  $س^2 + 1$

**د**  $س^2$  **ح**  $س^2$

٣ كل الدوال المعرفة بالقواعد التالية أحادية ما عدا الدالة التي قاعدتها .....

د (س) =  $2(س - 2)^2$  **ب** د (س) =  $س^2$  **ب**

د (س) =  $س + 6$  **ح** د (س) =  $س$  **د**

٤ إذا كانت الدالة في تناقص مستمر لجميع قيم

س  $\exists$  مجال الدالة فإن الدالة تكون ...

**ب** ليست أحادية. **ب** أحادية. **ح** فردية. **د** زوجية.

٥ أي من الأشكال الآتية يعبر عن دالة أحادية ؟



$$س - 2^2 = 2 - 2^2$$

$$0 = س + 2 - 2^2 - 2^2$$

$$0 = (س - 2) - (2^2 - 2^2) \therefore$$

$$0 = (س - 2) - (س + 2)(س - 2)^2$$

بأخذ عامل مشترك (س - 2)

$$0 = [1 - (س + 2)^2](س - 2)$$

$$0 = 1 - (س + 2)^2 \text{ أو } 0 = (س - 2)$$

$$0 = 1 - س^2 + 2س \quad \therefore س = 2$$

$$س^2 - 1 = 2س$$

$$\frac{س^2 - 1}{2} = 2 \therefore$$

$\therefore$  لها قيمتان

$\therefore$  الدالة ليست أحادية

١٢ أيّ ممّا يلي دالة أحادية؟

ب د(س) = جتا س  ب د(س) = س<sup>٢</sup>

ح د(س) = س<sup>٢</sup>  د(س) = س<sup>٤</sup> + س<sup>٣</sup>

١٣ إذا كانت د دالة أحادية وكانت النقطة (٢، ٢)

تتنتمي لبيان الدالة د فأيّ النقط الآتية يمكن أن تنتمي لبيان د ؟

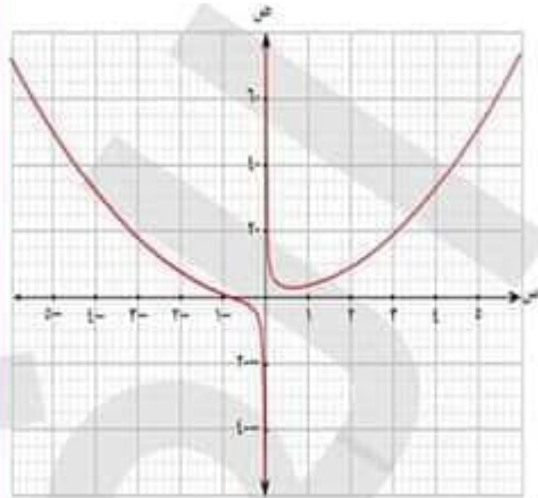
ب (٢، ٣)  ب (٣، ٥)  ح (٢، ١)  د كل ما سبق

١٤ إذا كانت د دالة أحادية وكانت النقطتان (٢، ٢)

، (٣، ٣) تنتميان للدالة د فأيّ مما يأتي صحيح دائمًا ؟

ب ١ < س  ب ١ + س = ٥  ح ١ ≠ س  د س = ٢

٦ هل الدالة الموضحة في التمثيل البياني التالي دالة أحادية؟

٧ هل د(س) = ٢ جتا(س) دالة أحادية عند  $[\pi, 0]$  ؟ب نعم  ب لا ٨ هل الدالة د(س) =  $\frac{1}{9 - س^٢}$  دالة أحادية

على ح / {٢، ٢} ؟

ب نعم  ب لا ٩ الدالة د(س) =  $\sqrt{٢ - س} - ١$  هل هي دالة أحاديةعندما يكون س  $\in [-٢، ٢]$  ؟

١٠ أيّ الدوال الآتية ليست دالة أحادية

ب د(س) = س<sup>٢</sup> + ٤  ب د(س) =  $\frac{1}{١ + س}$

ح د(س) = س<sup>٢</sup>  د(س) = ١٠

١١ صواب أم خطأ: إذا كانت د، د دالتين أحاديتين

، فإن د + د يجب أن تكون دالة أحادية؟

ب خطأ  ب صواب

وهي دالة تربط كل عدد حقيقي بنفسه

$$\text{المجال} = \mathbb{R} \quad \text{المدى} = \mathbb{R}$$

- النوع فردية - والدالة أحادية

ويمثلها مستقيم يمر بالنقطة (0, 0)

### التمثيل البياني للدوال والتحويلات الهندسية

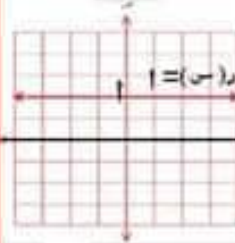
أولاً: دوال كثيرات الحدود

#### ١ الدالة الثابتة

تسمى الدالة د:

$$د : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad د(s) = p$$

حيث  $p \geq 1$  دالة ثابتة



وهي دالة تربط جميع الأعداد الحقيقية بالعدد 1

ويمثلها مستقيم يمر بالنقطة (0, 0)

$$\text{المجال} = \mathbb{R} \quad \text{المدى} = \{1\}$$

الإطراد: ثابتة في  $\mathbb{R}$  ، النوع زوجية

ليست أحادية

#### مثال ١

مثل بيانياً الدالة د :

$$د : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad د(s) = 3$$

ومن الرسم عين المجال والمدى

والنوع من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك

#### الحل

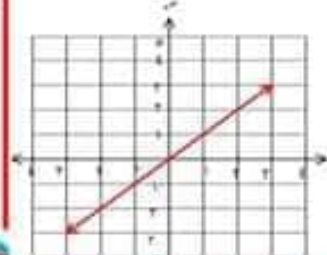


#### ٢ الدالة الخطية

تسمى الدالة د:

$$د : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad د(s) = ms + n$$

،  $m \neq 0$  دالة خطية



#### ٣ الدالة التربيعية

تسمى الدالة د:

$$د : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad د(s) = as^2 + bs + c$$

،  $a \neq 0$  دالة تربيعية

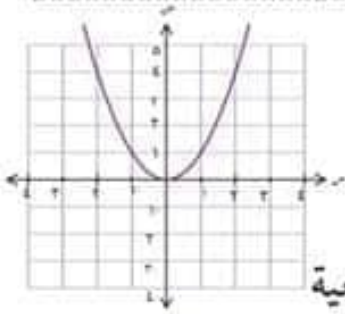
$$\text{المجال} = \mathbb{R} \quad \text{المدى} = \mathbb{R}$$

الإطراد: تزايدية في  $[-\infty, 0]$

وتناقصية في  $[0, \infty)$

النوع: زوجية والدالة ليست أحادية

ونقطة رأس النعنى (0, 0)



#### ٤ الدالة التكعيبة

تسمى الدالة د:

$$د : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad د(s) = as^3 + bs^2 + cs + d$$

وهي دالة تربط كل عدد حقيقي بمتعبه

$$\text{المجال} = \mathbb{R}$$

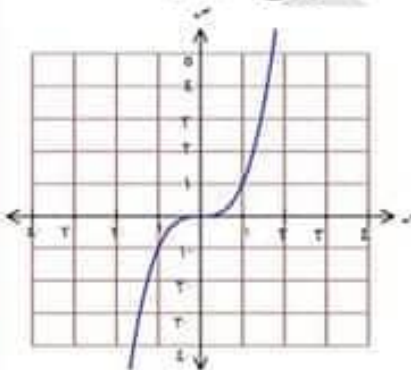
$$\text{المدى} = \mathbb{R}$$

الإطراد:

تزايدية على  $\mathbb{R}$

- النوع: فردية

- والدالة: أحادية

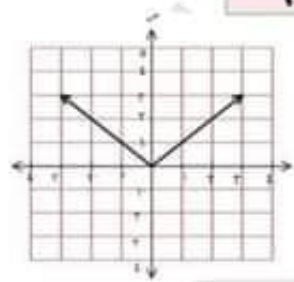


∴ مجموعة حل المعادلة :  $|s - 1| = 3$

$$\begin{array}{l|l} \text{أما } s - 1 = 3 & \text{أو } s - 1 = -3 \\ \hline \therefore s = 1 + 3 & \therefore s = 1 - 3 \\ s = 4 & s = -2 \end{array}$$

∴ م . ح =  $\{4, -2\}$

ثانياً: دالة المقياس  
(دالة القيمة المطلقة)



تسمى الدالة د:

د:  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$d(s) = |s|$

بدالة المقياس

- المجال =  $\mathbb{R}$  - المدى =  $[0, \infty)$

- البطاراد :

تزايدية في :  $[0, \infty)$

تناقصية في :  $]-\infty, 0]$

- النوع : زوجية

- والدالة ليست أحادية

- ونقطة رأس المعنى  $(0, 0)$

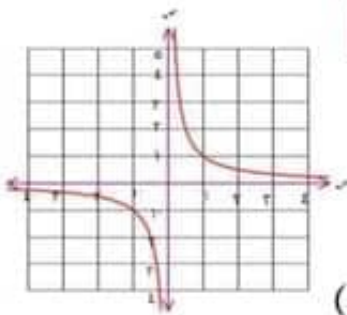
٥ ثالثاً: الدالة الكسرية

تسمى الدالة د:

د:  $\mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$

$d(s) = \frac{1}{s}$

(أبسط صورة للدالة الكسرية)



وهي دالة تربط كل عدد بمعكوسه الضرب

الدالة متماثلة حول النقطة  $(0, 0)$

المجال =  $\mathbb{R} - \{0\}$  - المدى =  $\mathbb{R} - \{0\}$

الدالة : أحادية

الدالة : فردية لأنها متماثلة حول نقطة الأصل

البطاراد :

الدالة تناقصية على

$]-\infty, 0[$  ،  $]0, \infty[$

إعادة تعريف دالة المقياس

$$|s| = \begin{cases} s & \text{عندما } s \geq 0 \\ -s & \text{عندما } s < 0 \end{cases}$$

$$|s - 2| = \begin{cases} s - 2 & \text{عندما } s \geq 2 \\ -(s - 2) & \text{عندما } s < 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} s - 2 & \text{عندما } s \geq 2 \\ s - 2 & \text{عندما } s < 2 \end{cases}$$

تذكر أن

$$|5| = 5 , | -5| = 5$$

$$|s| = p \text{ فإن } s = \pm p$$

مثال ١

ارسم الشكل البياني لكل من الدوال الآتية :  
ومن الرسم عين المجال والدمى وابتجئ الاطرار

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{عندما } x \leq 0 \\ x^2 & \text{عندما } x > 0 \end{cases}$$

الحل

∴  $f(x) = x$  عندما  $x \leq 0$

∴ نرسم الدالة  $f(x) = x$

لكل  $x \in ]-\infty, 0]$

∴  $f(x) = x^2$  عندما  $x > 0$

∴ نرسم الدالة  $f(x) = x^2$

لكل  $x \in ]0, \infty[$

- المجال =  $\mathbb{R}$

- الدمى =  $]0, \infty[$

- الاطرار :

- تزايدية في :  $]0, \infty[$

- وتناقضية في :  $]0, \infty[$

- النوع : ليست زوجية ولا فردية

- ليست احادية

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{عندما } x \leq 0 \\ x^2 & \text{عندما } x > 0 \end{cases}$$

شكّلها البياني في أبسط صورة لها	الدالة
	الدالة الثابتة $f(x) = p$
	الدالة الخطية $f(x) = x$
	الدالة التربيعية $f(x) = x^2$
	الدالة التكعبية $f(x) = x^3$
	دالة القياس $f(x) =  x $
	الدالة الكسرية $f(x) = \frac{1}{x}$

## الحل

•  $\therefore د(س) = |س|$  عندما  $س \leq 0$

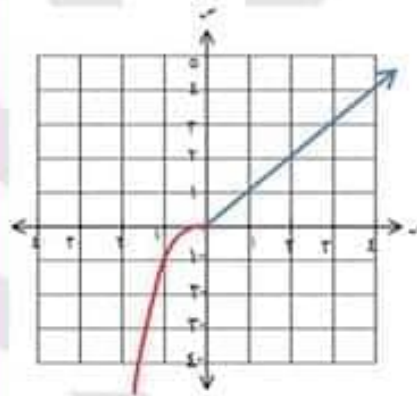
$\therefore$  نرسم الدالة  $د(س) = |س|$

لكل  $س \in ]0, \infty[$

•  $\therefore د(س) = س^2$  عندما  $س > 0$

$\therefore$  نرسم الدالة  $د(س) = س^2$

لكل  $س \in ]-\infty, 0[$



- المجال =  $\mathbb{R}$

- المدى =  $\mathbb{R}$

- الإطراد :

تزايدية في  $\mathbb{R}$

•  $د(س) = 4$  عندما  $س < 2$   
نرسم  $د(س) = 4$  وهي دالة ثابتة

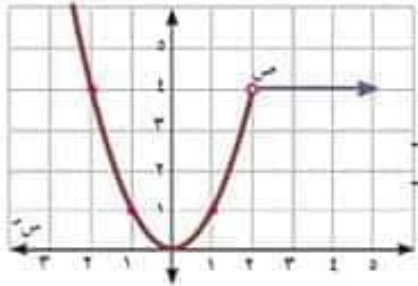
لكل  $س \in ]2, \infty[$

كما بالشكل

- المجال =  $\{2\}$

- المدى =  $]\infty, 0[$

- الإطراد :



- تناقصية في  $]-\infty, 0[$

- تزايدية في  $]2, \infty[$

- ثابتة في  $]\infty, 2[$

النوع : ليست زوجية ولا فردية

والدالة ليست أحادية

## مثال ٣

مثل بيانياً الدالة  $د$  :

$$د(س) = \begin{cases} 2 & \text{عندما } س < 1 \\ 2 & \text{عندما } 1 \leq س < 2 \\ 3 & \text{عندما } س \geq 2 \end{cases}$$

ومن الرسم عين المدى والإطراد والنوع

## الحل

•  $د(س) = 2$  عندما  $س < 1$

وهي دالة ثابتة وتساوي 2 لجميع قيم  $س$  الأكبر من 1

•  $د(س) = 2$  عندما  $1 \leq س < 2$

(نحن أن الدالة تربط كل الأعداد الأكبر من أو تساوي

1 بأقل من أو يساوي 1 بالعدد 2

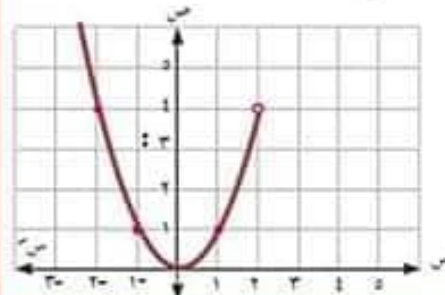
## الحل

•  $\therefore د(س) = س^2$  عندما  $س > 2$

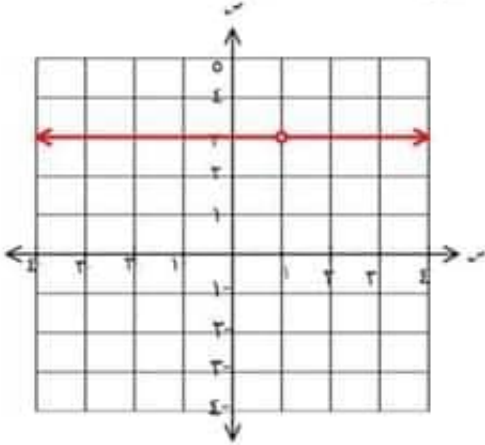
$\therefore$  نرسم  $د(س) = س^2$

لكل  $س \in ]2, \infty[$

كما بالشكل



النوع ليست زوجية ولا فردية



الإطراد ثابتة في:  $\{1\}$  - ع

والدالة ليست أحادية

مثال ٥

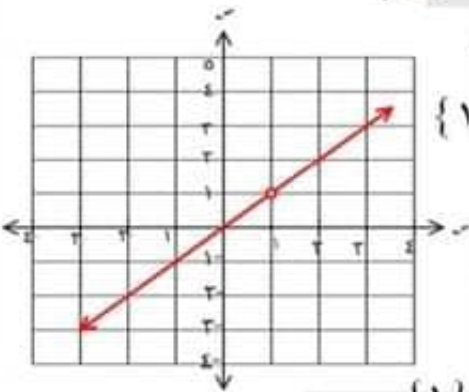
مثل بيانها الدالة  $r: D(s) = \frac{s^2 - s}{1 - s}$

الحل

$$\therefore D(s) = \frac{s(s-1)}{s-1} = s$$

$$\therefore D(s) = s$$

المجال =  $\{1\}$  - ع



الدالة =  $\{1\}$  - ع

الدالة: تزايدية في:  $\{1\}$  - ع

الدالة: أحادية

الدالة ليست زوجية ولا فردية

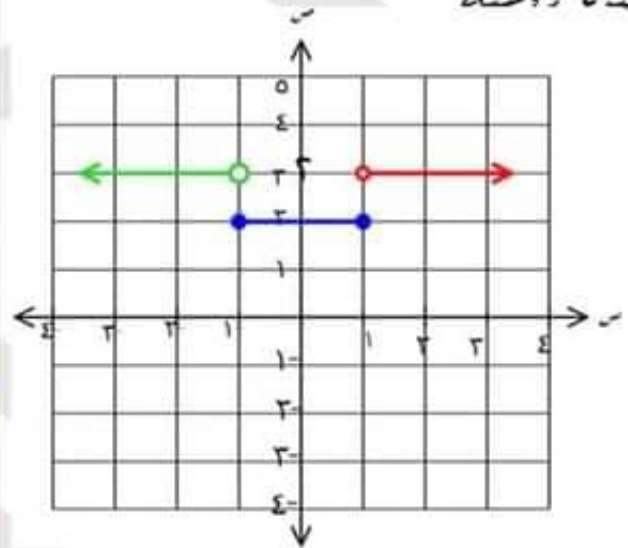
$$D(s) = 3 \text{ عندما } s \rightarrow 1$$

(أي أن الدالة تربط كل

الأعداد الأقل من 1 بالعدد 3)

$$\text{الدالة} = \{3, 3\}$$

الذات زوجية



الإطراد ثابتة في:

$$]1, \infty[ \cup ]1, 1[ \cup ]\infty, 1[$$

والدالة ليست أحادية

مثال ٤

مثل بيانها الدالة  $r: D(s) = \frac{3-s^3}{1-s}$

الحل

مجال الدالة =  $\{1\}$  - ع

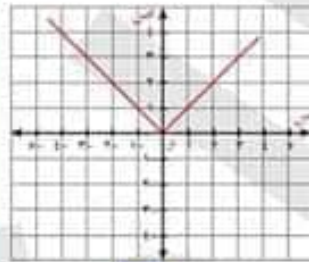
$$D(s) = \frac{(1-s)^3}{1-s} = 3$$

المجال =  $\{1\}$  - ع ، الدالة =  $\{3\}$

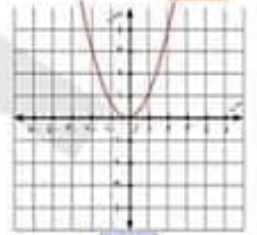
تمارين على

التمثيل البياني للدوال

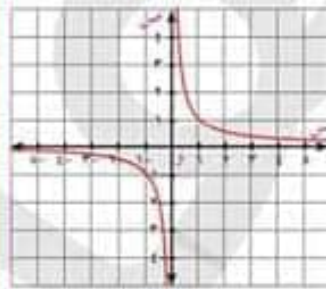
١ أكتب قاعدة الدالة الممثلة بيانياً بالأشكال الآتية



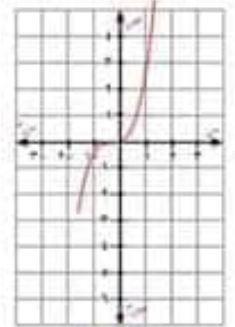
ب



د



س



ح

٢ أكتب المعادلة  $ص^2 = \frac{3+س^6}{2}$  على الصورة

ص =  $س^2 + 3$

ب ص =  $س^2 + 1$

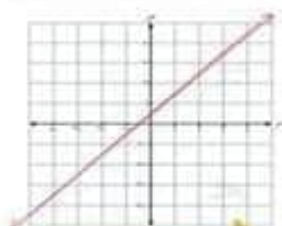
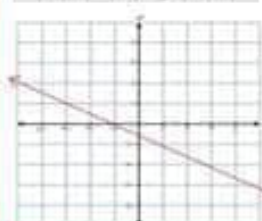
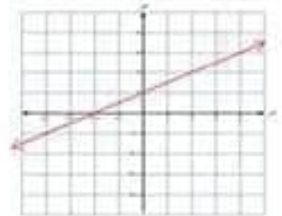
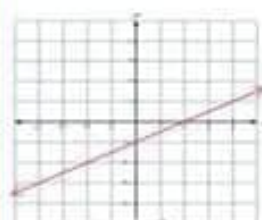
د ص =  $س - \frac{1}{2}$

س ص =  $س + \frac{1}{2}$

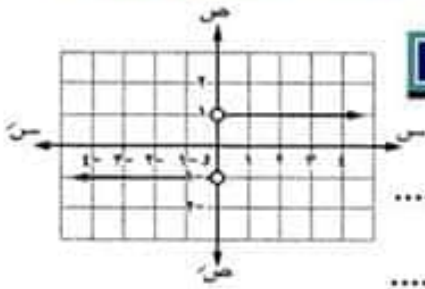
ح ص =  $س^2 - 1$

٣ أي من الأشكال البيانية التالية هو تمثيل

للمعادلة ص =  $\frac{1}{4}س + 1$ .



٤ في الشكل المقابل



• المجال = .....

• المدى = .....

• البُطْراد: .....

• نوع الدالة من حيث كونها زوجية أو فردية هو ....

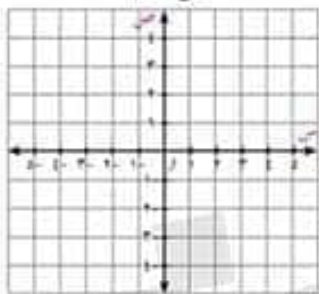
• قاعدة الدالة هي ....

٥ مجال الدالة د : د (س) =  $\frac{س^2 - 2س - 2}{س - 1}$  هو .....

ب  $س > 1$       د  $س < 1$

س  $س < 2$       ح  $س > 2$

٦ مثل بيانياً الدالة د : د (س) =  $\frac{س^3 - 2س}{س - 1}$



ومن الرسم عين

المجال والمدى والبُطْراد

والنوع من حيث كونها

زوجية أو فردية أو غير ذلك

٧ مدى الدالة د : د (س) =  $\frac{س^2 - 2س - 2}{س - 1}$  هو .....

ب  $س < 1$       د  $س > 2$

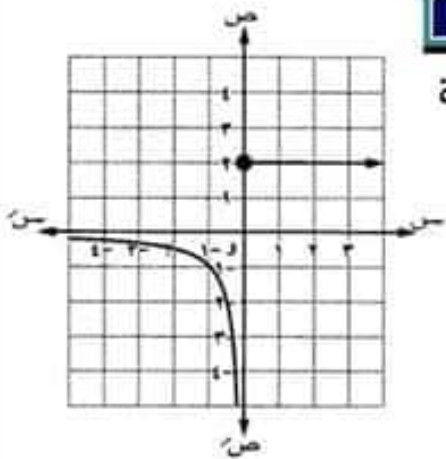
س  $س < 2$       ح  $س > 2$



في الشكل المقابل

١١

أكتب منحنى قاعدة  
تعريف الدالة د  
الممثلة بالشكل



٨ مثل بيانياً كلاً من الدوال الآتية ومن الرسم

عين المجال والمدى والإطراد  
والنوع من حيث كونها  
زوجية أو فردية أو غير ذلك

د (س) =  $\begin{cases} |س| ، س \geq ٠ \\ \frac{1}{س} ، س < ٠ \end{cases}$  **٢**

د (س) =  $\begin{cases} س^٢ ، س > ٠ \\ س ، س \leq ٠ \end{cases}$  **٣**

د (س) =  $\begin{cases} |س| ، س \geq ٠ \\ س^٢ ، س < ٠ \end{cases}$  **٤**

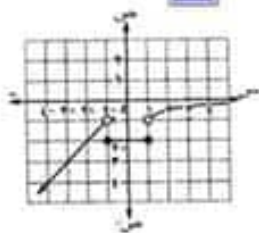
د (س) =  $\begin{cases} ٢ ، س \geq ٢ \\ |س| ، ٢ > س > -٢ \\ ٢ ، س \leq -٢ \end{cases}$  **٥**

د (س) =  $\frac{س^٢ - ١}{١ - س^٢}$  **٥**

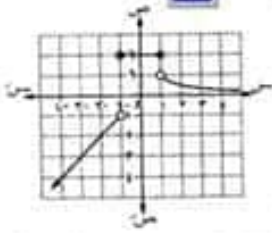
١٢ إذا كانت : د (س) =  $\begin{cases} س ، س > ١ \\ ٢ ، ١ \geq س \geq -١ \\ \frac{1}{س} ، س < ١ \end{cases}$

فإن الشكل الذي يمثلها بيانياً هو .....

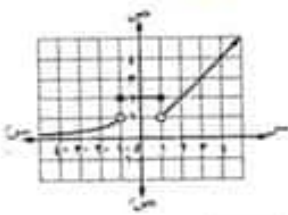
**٣**



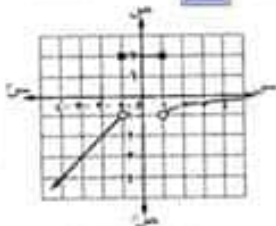
**٤**



**٥**



**٦**



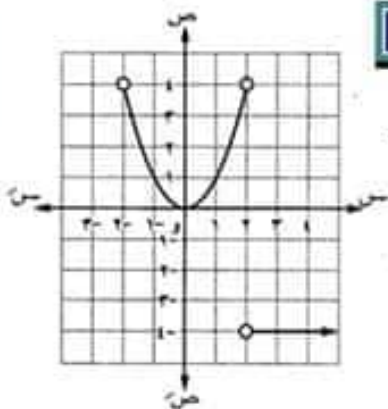
٩ محور تماثل الدالة د : د (س) = س<sup>٢</sup>

هو المستقيم .....

٢ س = صفر **٣** س = - صفر **٤** س = صفر **٥** س = صفر

في الشكل المقابل

١٠

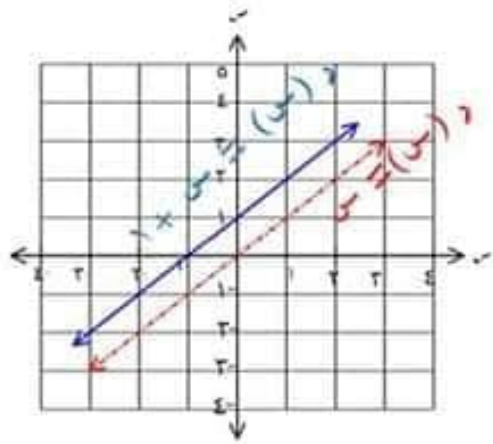


أكتب منحنى قاعدة  
تعريف الدالة د  
الممثلة بالشكل

١٣ إذا كانت د : د (س) =  $\begin{cases} س - ٤ ، عندما س \geq ٢ \\ س ، عندما س \geq ١ \end{cases}$  ، ح

د (س) =  $\begin{cases} س - ٤ ، عندما س \geq ٢ \\ س ، عندما س \geq ١ \end{cases}$  ، ح

مثل الدالة بيانياً ومن الرسم عين المجال والمدى  
والإطراد والنوع من حيث كونها زوجية أو فردية  
أو غير ذلك



- النوع: ليست زوجية ولا فردية  
- الدالة أحادية

$$٢ \quad د (س) = س^٢ + ١$$

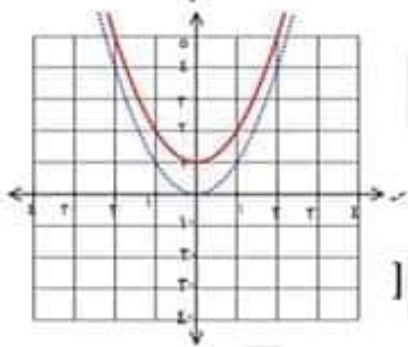
الحل

هو نفس منحنى الدالة :

$$د (س) = س^٢ + ١$$

دالة في اتجاه وصح ←

( رأسياً لأعلى بمقدار دالة واحدة )



المجال = ع

$$، الدى = ]١، ∞]$$

والإطار : - تزايدية في  $]٠، ∞[$

- تناقصية في  $]∞، ٠[$

النوع: زوجية

( بلان الدالة متماثلة حول محور الصادات )

## التحويلات الهندسية

أولاً: الإزاحة الرأسية

لدى دالة بكونت المنحنى

$$ص = د (س) + پ، پ > ٠ - ع < ٠$$

نفس المنحنى : ص = د (س)

بإزاحة قدرها  $|پ|$  وحدة

وتكون :

- في اتجاه وصح إذا كان  $٠ < پ$

- في اتجاه وصح إذا كان  $٠ > پ$

مثال ١

ارسم الشكل البياني لكل من الدوال الآتية

$$١ \quad د (س) = س + ١$$

الحل

منحنى الدالة د:  $د (س) = س + ١$

هو نفس منحنى الدالة :

$$د (س) = س$$

دالة في اتجاه وصح ←

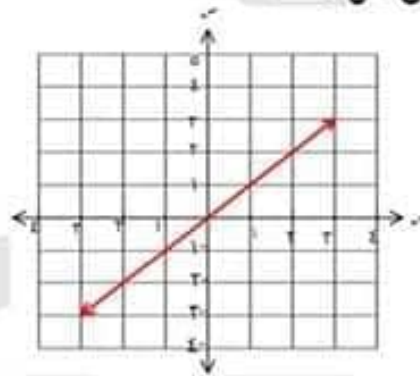
( رأسياً لأعلى دالة واحدة )

المجال = ع ، الدى = ع

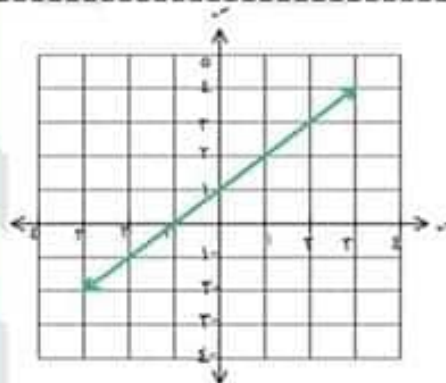
والإطار : تزايدية في ع

مثال ١

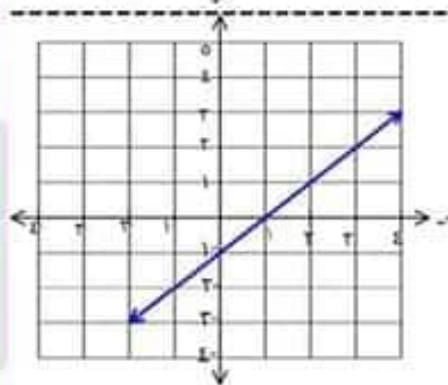
في كل من الأشكال الآتية اكتب قاعدة الدالة  
مبيناً مجال ومدى كل منها



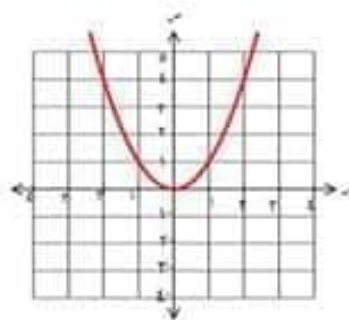
١



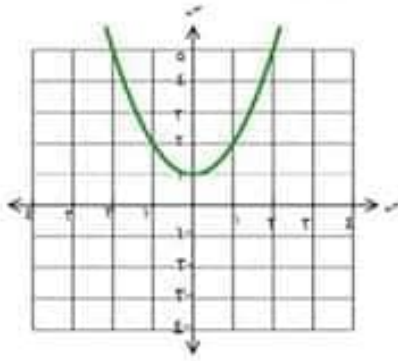
٢



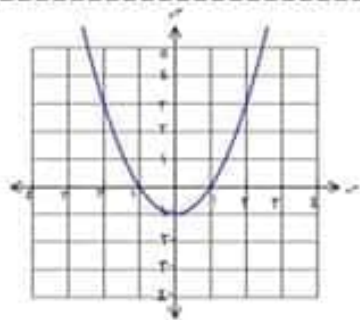
٣



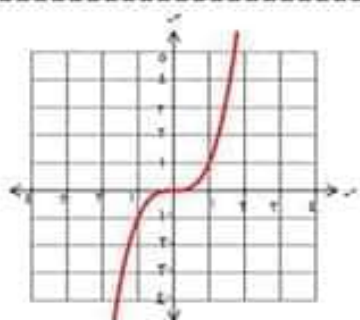
٤



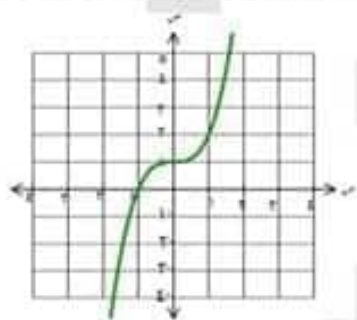
٥



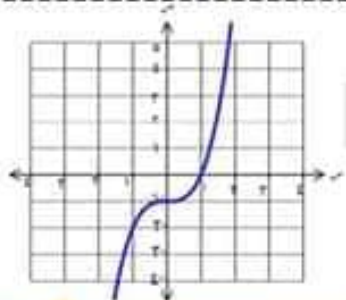
٦



٧



٨



٩

## تدريب

مثل بيانيا الدالة  $d: (s) = (s-3)^2$

ومن الرسم عين المجال والمدى والبطراد والنوع  
من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك

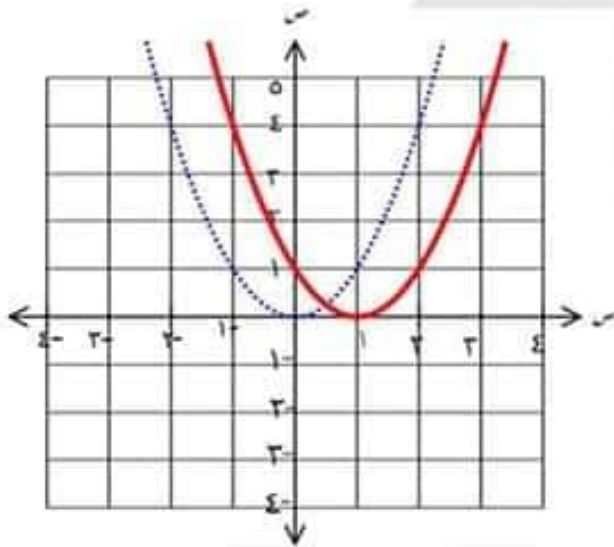
## مثال ٣

ارسم الشكل البياني لكل من الدوال الآتية

$$١ \quad d(s) = (s-1)^2$$

## الحل

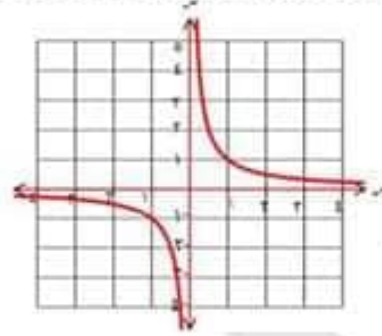
منصني  $d$  هو نفس منصني الدالة :  
 $s = 1$  بإزاحة قدرها وحدة واحدة  
في اتجاه يسار



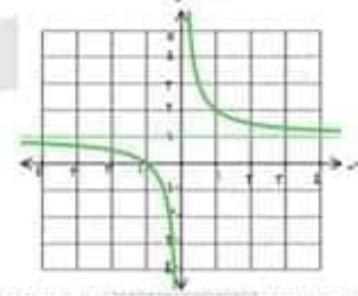
المجال =  $\mathbb{R}$

المدى =  $[0, \infty)$

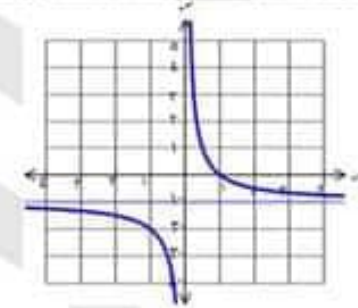
١٠



١١



١٢



## ثانيا: الإزاحة الأفقية

لأي دالة  $d$  يكون المنصني :  
 $s = p$  هو نفس المنصني  
 $s = p$  بإزاحة أفقية  
قدرها  $|p|$  وحدة طول  
وتكون

- في اتجاه يسار إذا كان  $p > 0$

- في اتجاه يسار إذا كان  $p < 0$

وهذا النوع من الإزاحات تكون فيه

الدوال ليست زوجية ولا فردية