2022

مذكرة التفوق
في الرياضيات البحتة

للصف الثاني الثانوي العلمي
الفصل الدراسي الأول

إعداد الأستاذ

السيد عبد الكريم عرابي

موجه رياضيات

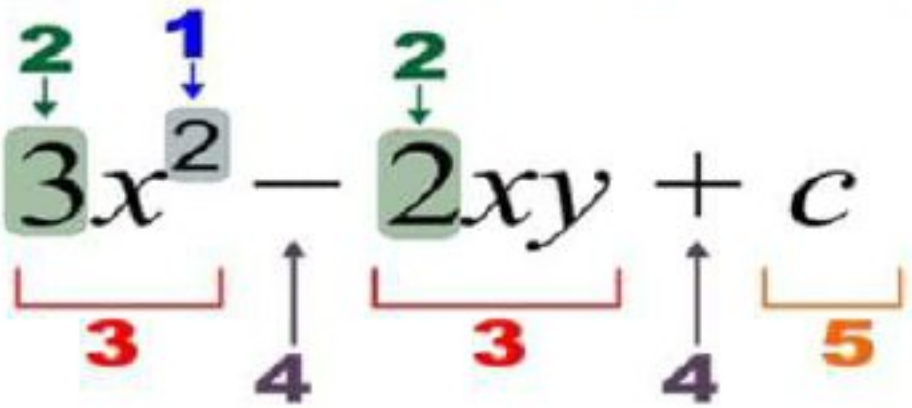
مذكرتي
Mozkrty.com

أولاً : الجبر

(١) الدوال الحقيقية

(٢) الاسس

(٣) اللوغاريتمات



العالي للمعالي
دايما فى العلالى
٠١٢٢٨٤٨٤٥٦٧
٠١١١٩٥٤٨٠٠
مذكرتي
Mozkrty.com

الدوال الحقيقية

العلاقة هي علاقة بين مجموعتين س ، ص بحيث كل عنصر من عناصر المجموعة س يرتبط بعنصر واحد فقط من المجموعة ص

* كتابة الدالة : د : س ← ص أو د (س) = ص

ملحوظة
- س تسمى مجال الدالة
- ص تسمى المجال المقابل
- المدى هو مجموعة صور عناصر المجال في المجال المقابل

تدريب ١ أي العلاقات التالية تمثل دالة من س ← ص

١ ٢ ٣ ٤

تدريب ٢ العلاقات الممثلة بمجموعة الأزواج المرتبة والتي لا تمثل دالة هي ....

أ) {(١ ، ٣) ، (٣ ، ٥) ، (٥ ، ٧) ، (٧ ، ٩)}
ب) {(٣ ، ٥) ، (٤ ، ٣) ، (٥ ، ١) ، (٣ ، ٥)}
ج) {(٠ ، ٣) ، (١ ، ٣) ، (٥ ، ٣) ، (٣ ، ٣)}
د) {(٣ ، ٥) ، (١ ، ٥) ، (٠ ، ٥) ، (٥ ، ٥)}

تدريب ٣ جميع العلاقات الآتية تكون فيها ص دالة في س ماعدا العلاقة :

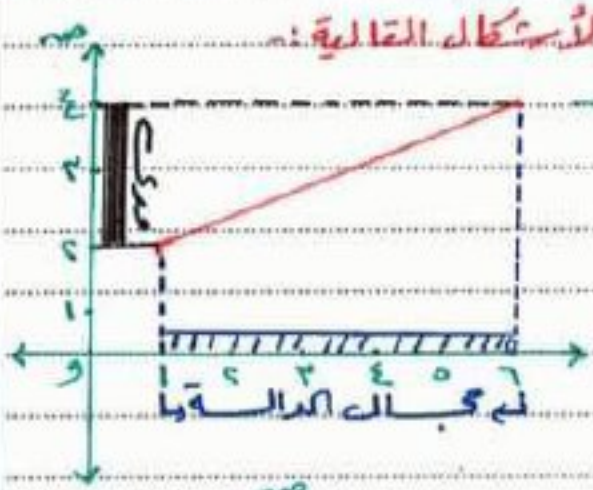
أ) ص = ٣ س + ١
ب) ص = س٢ − ٤
ج) س = ص٢ − ٢
د) ص = ± س

المعالي دائما في العلالي
+٢٢٦٨٤٤٥٦٧
٠٩١١١٩٥٤٨٠

الرياضيات .. إسلوب حياة !

تدريب ٤ جميع الأشكال التالية لايمثل دالة ماعدا ....

تدريب ٥ عين مجال ومدى الدوال الممثلة بالأشكال التالية :



الحل

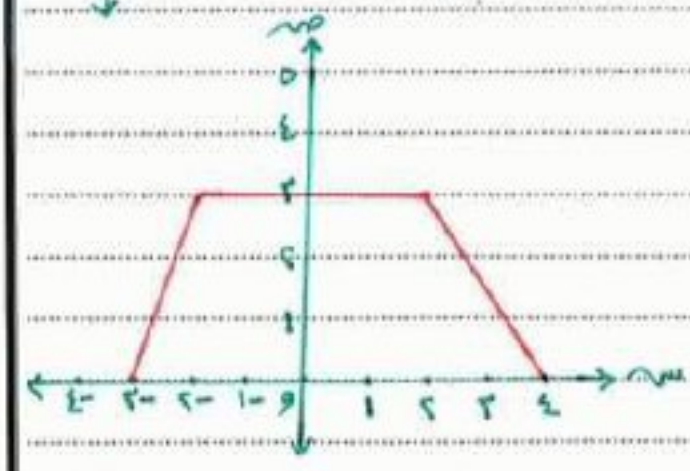
المجال : منحصر على محور الصادات

∴ المجال $س \in [٦ ، ١]$

المدى : منحصر على محور الصادات

$[٤ ، ٢]$

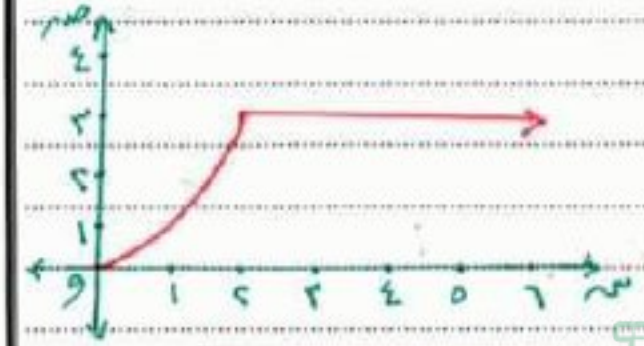
٢



المجال :

المدى :

٣



المجال :

المدى :

العمليات على الدوال

تعيين مجال الدالة

١ الدوال كثيرة الحدود

* مجال أى دالة كثيرة حدود هو $\mathbb{R}$

١) $د(س) = ٤$ ثابتة

٢) $د(س) = س + ٥$ خطية

٣) $د(س) = س^٢ + ١$ تربيعية

٤) $د(س) = س^٣ + ٤$ تكعيبية

٢ الدوال الجذرية

$د(س) = \sqrt[ن]{ر(س)}$ حيث $ن \in ص^+ ، ن > ١$

$ر(س)$ دالة كثيرة حدود

١) إذا كانت $ن$ عدد فردى ∴ مجالها $\mathbb{R}$

٢) إذا كانت $ن$ عدد زوجى ∴ نضع $ر(س) \geq ٠$

وتوجد قيم $س$

٣ الدالة النسبية

$ذ(س) = \frac{ر(س)}{ق(س)}$ حيث $ر ، ق$ كثيرتى حدود

مجالها $\mathbb{R} - \{$أصفار المقام$\}$

تدريب ١ عين مجال الدوال التالية:

١) $د(س) = \sqrt{س}$

نضع $س \geq ٠$ ∴ المجال $[٠ ، \infty[$

٢) $د(س) = \sqrt{س - ٢}$

نضع $س - ٢ \geq ٠$

$س \geq ٢$ ∴ المجال $[٢ ، \infty[$

٣) $د(س) = \sqrt{٣ - س}$

نضع $٣ - س \geq ٠$

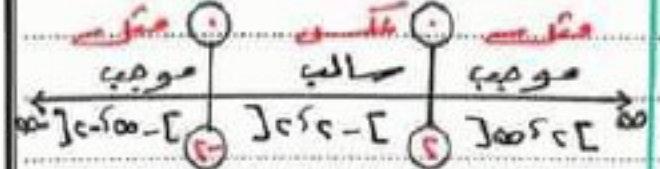
$٣ \geq س$ ∴ المجال $]-\infty ، ٣]$

٤) $د(س) = \sqrt{س^٢ - ٤}$

نضع $س^٢ - ٤ \geq ٠$ متباينة درجة ثانية

نجيب إشارة المقدار $د(س) = س^٢ - ٤$

جذرى المعادلة $س = \pm ٢$



∴ المجال هو قيم $س$ التى تجعل المقدار موجباً وصفر

∴ المجال $\mathbb{R} -]-٢ ، ٢[$

٥) $د(س) = \sqrt[3]{س + ٥}$

∴ دليل الجذر ③ فردي

∴ مجال الدالة هو ح

٦) $د(س) = \frac{س + ٥}{س}$

دالة كسرية ∴ أصفار المقام س = ٠

∴ المجال هو ح − {٠}

٧) $د(س) = \frac{س + ٢}{س - ٤}$

دالة كسرية ∴ أصفار المقام س = ٤

∴ المجال هو ح − {٤}

٨) $د(س) = \frac{س + ٧}{س^٢ - ٤}$

دالة كسرية ∴ أصفار المقام: $س^٢ - ٤ = ٠$

$س = -٢ ، س = ٢$

∴ المجال هو ح − {−٢ ، ٢}

٩) $د(س) = \frac{س + ٥}{س^٤ + ٤}$

دالة كسرية ∴ أصفار المقام: $س^٤ + ٤ = ٠$

∴ لا يوجد أصفار للمقام

∴ مجال الدالة ح

* إذا كانت د ، ر دالتين مجالهما م١ ، م٢ على الترتيب فإن:

١) $(د \pm ر)(س) = د(س) \pm ر(س)$

٢) $(د \cdot ر)(س) = د(س) \times ر(س)$

تكوين دوال حقيقية مجالها م١ ∩ م٢

٣) $(\frac{د}{ر})(س) = \frac{د(س)}{ر(س)}$ حيث $ر(س) \neq ٠$

مجالها م١ ∩ م٢ − {أصفار المقام}

ترتيب عين مجال الدوال التالية

١) $د(س) = \sqrt{س - ٢} + ٧$

لاحظ د(س) عبارة عن مجموع دالتين

$د_١(س) = \sqrt{س - ٢}$ مجالها = $[٢ ، \infty[$

$د_٢(س) = ٧$ مجالها = ح

∴ مجال د(س) هو م١ ∩ م٢

$= [٢ ، \infty[\cap ح$

$= [٢ ، \infty[$

٤) $د(س) = \sqrt{س + ٣} + \sqrt{٣ - س}$

نضع $س + ٣ \geq ٠$ ∴ $م_١ = [-٣ ، \infty[$

نضع $٣ - س \geq ٠$ ∴ $م_٢ =]-\infty ، ٣]$

∴ المجال $م_١ \cap م_٢ = [-٣ ، ٣]$

٣) $د(س) = \frac{س+٢}{\sqrt{س+٥}}$

لاحظ $د(س)$ ليست دالة كسرية ولكنها عملية قسمة دالتين

مجال البسط $م_١ = ح$

مجال المقام $م_٢ = [-٥ ، \infty[$

أصفار المقام $\{-٥\}$

∴ مجال الدالة: $ح \cap [-٥ ، \infty[- \{-٥\}$

$=]-٥ ، \infty[$

٤) $د(س) = \frac{\sqrt{س+١}}{\sqrt{س-٣}}$

مجال البسط $م_١ = [-١ ، \infty[$

مجال المقام $م_٢ =]٣ ، \infty[$

أصفار المقام $\{٣\}$

∴ مجال الدالة هو: $[-١ ، \infty[\cap]٣ ، \infty[- \{٣\}$

$=]٣ ، \infty[$

٥) إذا كانت: $د: [-٥ ، ٣] \to ح$

$د(س) = س^٢ + ٧$

$ر: [-١ ، ٧] \to ح$

حيث $ر(س) = س^٢ - ٤$

أوجد $(\frac{د}{ر})(س)$ وعين المجال

لاحظ: $م_١ = [-٥ ، ٣]$

$م_٢ = [-١ ، ٧]$

∴ $(\frac{د}{ر})(س) = \frac{س^٢ + ٧}{س^٢ - ٤}$

مجالها: $م_١ \cap م_٢ - \{-٢ ، ٢\}$

$= [-١ ، ٣] - \{-٢ ، ٢\}$

تدريب للطلبة

١) مجال الدالة $د(س) = س + ٣$ هو ....

أ) $\{-٣\}$ ب) $ح - \{-٣\}$

ج) $[-٣ ، \infty[$ د) $ح$

٢) مجال الدالة $د(س) = \sqrt{س+٣}$ هو

أ) $\{-٣\}$ ب) $ح - \{-٣\}$

ج) $[-٣ ، \infty[$ د) $ح$

٣) مجال الدالة $د(س) = \sqrt[٣]{س+٣}$ هو

أ) $\{-٣\}$ ب) $ح - \{-٣\}$

ج) $[-٣ ، \infty[$ د) $ح$

٤) مجال الدالة: $د(س) = \sqrt{س^٢ - ٤} + ٧$ هو

أ) $ح$ ب) $[٤ ، \infty[$

ج) $]٤ ، \infty[$ د) $]-\infty ، ٤[$

٥) مجال الدالة $د(س) = \frac{\sqrt{س-٢}}{س-٥}$ هو

أ) $ح - \{٥\}$ ب) $[٢ ، \infty[$

ج) $[٢ ، \infty[- \{٥\}$ د) $]-\infty ، ٢[- \{٥\}$

تركيب دالتين

إذا كانت د ، ر دالتين فإن تركيب الدالة د مع الدالة ر يمثل دالة جديدة يرمز لها (د ∘ ر) أي (د ∘ ر)(س) = د(ر(س))

خطوات تعيين المجال

١) نوجد مجال ر ... م١

٢) نوجد مجال الدالة بعد التركيب ... م٢

٣) المجال المطلوب : م١ ∩ م٢

ملحوظة شرط تركيب (د ∘ ر) أن يكون في الدالة ر ∩ مجال الدالة د ≠ ∅

تدريب ١ إذا كانت : د(س) = ٢س + ١ ، ر(س) = س² − ٣ أوجد

١) (د ∘ ر)(س) ٢) (ر ∘ د)(س)

الحل

١) (د ∘ ر)(س) = د[ر(س)]

= د(س² − ٣)

نوع الدالة د ونعوض عن س بـ (س² − ٣)

= ٢(س² − ٣) + ١

∴ (د ∘ ر)(س) = ٢س² − ٥

٢) (ر ∘ د)(س) = ر(د(س))

= ر(٢س + ١)

= (٢س + ١)² − ٣

∴ (ر ∘ د)(س) = ٤س² + ٤س − ٢

تدريب ٢ إذا كانت : د(س) = √(س − ٥) ، ر(س) = س² فأوجد مجال (ر ∘ د)

أ)]−∞ ، ٥[ب) [٠ ، ∞[

ج) ℝ+ د) ℝ

الحل

١) نوجد مجال د ... م١ = [٥ ، ∞[

٢) نوجد (ر ∘ د)(س)

٣) ∴ (ر ∘ د)(س) = د(ر(س))

= د(٣س)

∴ (ر ∘ د)(س) = ٩س² + ٦

∴ ٤٠ = ٩س² + ٦

∴ س² = ٤ ⇐ س = ± ٢

تدريب ٣ إذا كانت : د(س) = √(س − ٥) ، ر(س) = س² فأوجد مجال (ر ∘ د)

الحل

١) نوجد مجال د ... م١ = [٥ ، ∞[

٢) نوجد (ر ∘ د)(س)

$(ر \circ د)(س) = ر(د(س))$

$= ر(\sqrt{س})$

$= (\sqrt{س})^{2}$

$= س$ مجالها $م = ح$

∴ المجال هو: $م \cap م$

$= ح \cap [0, \infty[$

$= [0, \infty[$

تدريب ٤ إذا كانت $د(١) = ٤$ ، $ر(٤) = ٧$

فإن: $(ر \circ د)(١) =$

(أ) ١ (ب) ٤

(ج) ٧ (د) ١١

الحل

$\therefore (ر \circ د)(١) = ر(د(١))$

$= ر(٤)$

$\therefore (ر \circ د)(١) = ٧$

تدريب ٥ إذا كانت $د(س) = \sqrt{س}$ ،

$ر(س) = س^{٣}$ فإن $(د \circ ر)(س) =$

(أ) $س$ (ب) $س^{٣}$

(ج) $\sqrt{س}$ (د) $|س|$

الحل

$(د \circ ر)(س) = د(ر(س))$

$= د(س^{٣})$

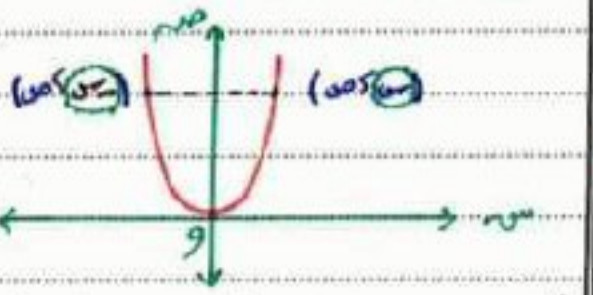
$= \sqrt{س^{٣}}$

$\therefore (د \circ ر)(س) = س$

الدوال الزوجية والدوال الفردية

(١) يقال أن الدالة د زوجية إذا كانت:

$د(-س) = د(س)$ لكل $س$ ، $-س \in$ المجال



لكل $(س ، ص) \in د$ فإن: $(-س ، ص) \in د$

أي: منحنى الدالة متماثل حول محور الصادات

ملاحظة لكي تكون الدالة زوجية:

$(س ، ص)$

$(-س ، ص)$

(٢) يقال للدالة د أنها فردية إذا كان:

$د(-س) = -د(س)$ لكل $س$ ، $-س \in$ المجال

لكل $(س ، ص) \in د$

فإن $(-س ، -ص) \in د$

المنحنى متماثل حول نقطة الأصل

ملاحظات

١) عند بحث نوع الدالة لابد أن يكون المجال على الصورة $س \in [-أ، أ]$ حيث $أ \in ح^+$

٢) إذا كان: $د(-س) \neq د(س) \neq -د(س)$
فإن الدالة ليست زوجية وليست فردية

٣) من خواص الدوال المثلثية سابقاً:
* $طا(-س) = -طاس$ فردية
* $ظتا(-س) = -ظتاس$ زوجية
* $قا(-س) = قاس$ فردية

تدريب ١
ابحث نوع كل من الدوال التالية من حيث كونها زوجية أو فردية أو ليست كذلك

١) $د(س) = س^٤ + جتاس$

$د(-س) = (-س)^٤ + جتا(-س)$
$د(-س) = س^٤ + جتاس$
$\therefore د(-س) = د(س)$ زوجية

٢) $د(س) = س^٣ - جاس$

$د(-س) = (-س)^٣ - جا(-س)$
$د(-س) = -س^٣ + جاس$
$\therefore د(-س) = -د(س)$ فردية

٣) $د(س) = س^٣ + س^٢ + طاس$

$د(-س) = (-س)^٣ + (-س)^٢ + طا(-س)$
$= -س^٣ + س^٢ - طاس$
$\therefore د(-س) \neq د(س) \neq -د(س)$
$\therefore$ الدالة ليست زوجية وليست فردية

٤) $د(س) = س^٤ ظتاس$

$د(-س) = (-س)^٤ \times ظتا(-س)$
$د(-س) = س^٤ ظتاس$ زوجية

٥) $د(س) = س جتاس$

$د(-س) = (-س) \times جتا(-س)$
$= -س جتاس$
$\therefore د(-س) = -د(س)$ فردية

٦) $د(س) = \frac{ظتاس}{س^٢ + ٧}$

$د(-س) = \frac{ظتا(-س)}{(-س)^٢ + ٧}$
$د(-س) = \frac{ظتاس}{س^٢ + ٧}$ زوجية

٧) $د(س) = \sqrt{س - ٣}$

$\therefore$ مجال الدالة $[٣، \infty[$
$\therefore$ الدالة ليست زوجية وليست فردية

٨) إذا كانت د : [-٣ ، ٤] ← ح حيث
د(س) = س٢ + ٥

∴ المجال هو [-٣ ، ٤]
∴ -٤ ∉ للمجال
∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية

خواص هامة

إذا كان: د١ ، د٢ دالة زوجية
ك ، ق١ ، ق٢ دالة فردية

١) د١ ± د٢ تكون زوجية
٢) ق١ ± ق٢ تكون فردية
٣) د١ ± ق١ ليست زوجية وليست فردية
٤) (د١ × د٢) ، $\frac{د_1}{د_2}$ تكون زوجية
٥) (ق١ × ق٢) ، $\frac{ق_1}{ق_2}$ تكون زوجية
٦) (د١ × ق١) ، $\frac{د_1}{ق_1}$ تكون فردية

الخلاصة

١) زوجية ± زوجية = زوجية
٢) فردية ± فردية = فردية
٣) زوجية × ÷ زوجية = زوجية
٤) فردية × ÷ فردية = زوجية
٥) زوجية × ÷ فردية = فردية

تدريب للطلبة

١) الدالة الزوجية من بين الدوال التالية هي .
أ) د(س) = س٣ ب) د(س) = جاس
ج) د(س) = س جتاس د) د(س) = س جاس

٢) الدالة الفردية من بين الدوال التالية هي
أ) د(س) = س٢ جاس ب) د(س) = ظاس
ج) د(س) = جتاس د) د(س) = ١

٣) إذا كانت الدالة د دالة زوجية في الفترة [أ ، ب] فإن ب =
أ) أ ب) -أ
ج) ٢أ د) ٣أ

٤) إذا كانت د دالة زوجية ، ٢ ∈ مجال د
فإن: د(٢) + د(-٢) =
أ) صفر ب) ٤
ج) ٢ د) ٢ د(٢)

٥) نوع الدالة د(س) = $\frac{جاس}{س}$ هو
أ) زوجية ب) فردية
ج) لا زوجية ولا فردية د) زوجية وفردية

الرياضيات ...
فكر - فهم - تطبيق

Mozkrty.com

الدالة الأحادية

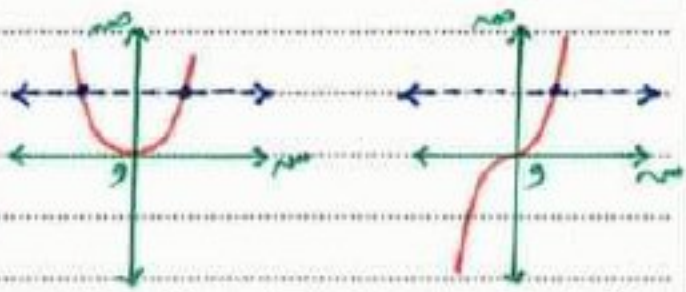
الدالة د : س ← ص هي دالة أحادية
إذا كان لكل ﻫ ، ﺟ ∈ س ، د(ﻫ) = د(ﺟ)
فإن : ﻫ = ﺟ

أو : لكل ﻫ ، ﺟ ∈ س ، ﻫ ≠ ﺟ
فإن : د(ﻫ) ≠ د(ﺟ)

خطوات الدالة الأحادية

١) نوجد : د(ﻫ) ، د(ﺟ)
٢) نضع : د(ﻫ) = د(ﺟ)
٣) نختصر : بعد الاختصار إذا كان :
ﻫ = ﺟ تكون أحادية
ﻫ ≠ ﺟ تكون ليست أحادية

بيانياً : باستخدام الخط الأفقي



أحادية | ليست أحادية

تدريب ١ بين أي الدوال التالية أحادية وأيها ليست أحادية.

١) د(س) = ٢س − ٣

١) د(ﻫ) = ٢ﻫ − ٣ ، د(ﺟ) = ٢ﺟ − ٣
٢) نضع : ٢ﻫ − ٣ = ٢ﺟ − ٣
٣) نختصر : ٢ﻫ = ٢ﺟ
∴ ﻫ = ﺟ دالة أحادية

٢) د(س) = س² + ١

١) نوجد : د(ﻫ) = ﻫ² + ١ ، د(ﺟ) = ﺟ² + ١
٢) نضع : ﻫ² + ١ = ﺟ² + ١
٣) نختصر : ﻫ² = ﺟ²
∴ ﻫ = ± ﺟ ليست أحادية

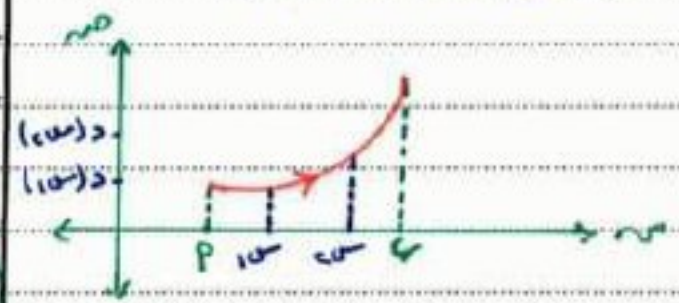
٣) د(س) = $\frac{١}{٣+س}$

١) نوجد : د(ﻫ) = $\frac{١}{٣+ﻫ}$ ، د(ﺟ) = $\frac{١}{٣+ﺟ}$
٢) نضع : $\frac{١}{٣+ﻫ} = \frac{١}{٣+ﺟ}$
٣) نختصر : ٣ + ﻫ = ٣ + ﺟ
ﻫ = ﺟ أحادية

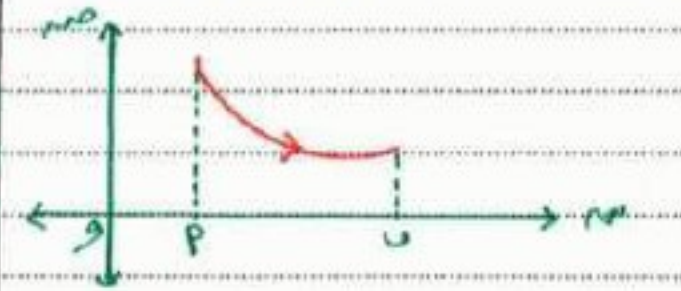
اللهم إن كان من توفيق فمن الله
وإن كان من خطأ أو نسيان فمني
والشيطان ...

إطراد الدالة

تزايد الدالة يقال للدالة د أنها تزايدية في الفترة]أ ، ب[إذا كان لكل س١ ، س٢ ∈]أ ، ب[حيث س٢ > س١ فإن: د(س٢) > د(س١)



تناقص الدالة يقال للدالة د أنها تناقصية في]أ ، ب[إذا كان لكل س١ ، س٢ ∈]أ ، ب[حيث س٢ > س١ فإن: د(س٢) < د(س١)



ثبوت الدالة يقال للدالة د أنها ثابتة في]أ ، ب[إذا كان لكل س١ ، س٢ ∈]أ ، ب[حيث س٢ > س١ فإن: د(س٢) = د(س١)

١ الدالة الثابتة

* الصورة العامة: د(س) = أ حيث أ ∈ ح
* التمثيل البياني: خط مستقيم // محور السينات ويقطع محور الصادات في النقطة (٠ ، أ)
* المجال: ح
* المدى: {أ}
* الاطراد: ثابتة على مجالها ليست أحادية

تدريب ١

١) إذا كانت: د(س) = ٩ فإن مجال د هو
أ) ح ب) ح+ ج) {٩} د) ح - {٩}

٢) مدى الدالة د(س) = ٣ هو ....
أ) ح ب) ح+ ج) {٣} د) ح - {٣}

٣) الدالة د(س) = -٤ تمثل بيانياً خط مستقيم يقطع محور الصادات في النقطة ....
أ) (٠ ، ٤) ب) (-٤ ، ٠) ج) (٠ ، -٤) د) (٤ ، ٠)

٤) مدى الدالة د(س) = { ٢ س ≥ ٠ ، -٣ س < ٠ } هو ....

(أ) $\mathbb{R}-\{0\}$ (ب) $\mathbb{R}-\{-3,2\}$

(ج) $\mathbb{R}-\{-3,3\}$ (د) $\mathbb{R}$

(هـ) المجال د: $د(س)=\begin{cases} س^2+2 & ، س<2 \\ -س^2+2 & ، س \geq 2 \end{cases}$

متماثلة بالنسبة للنقطة

(أ) $(2,0)$ (ب) $(-2,0)$

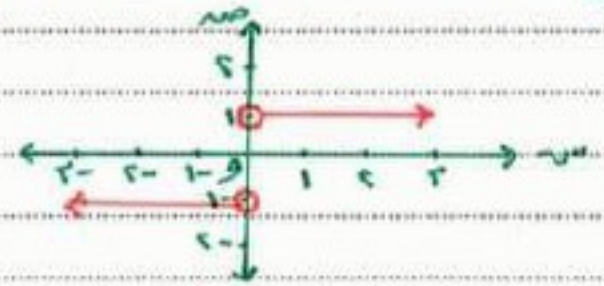
(ج) $(0,0)$ (د) $(2,-2)$

(و) مجال الدالة د: $د(س)=\begin{cases} 4س+1 & ، س<1 \\ -4س+1 & ، س \geq 1 \end{cases}$

(أ) $\mathbb{R}$ (ب) $\mathbb{R}-\{0\}$

(ج) $\mathbb{R}-\{4,-4\}$ (د) $\mathbb{R}-\{1\}$

(ز) مدى الدالة الممثلة بالشكل المقابل هو



(أ) $\{1\}$ (ب) $\{1,-1\}$

(ج) $\mathbb{R}$ (د) $\{-1\}$

(٢) الدالة الخطية

- الصورة العامة: $د(س)=أ س+ب$ حيث $أ \neq 0$
- المجال: $\mathbb{R}$
- المدى: $\mathbb{R}$
- الطرفان: لا يوجد
- الاطراد: تزايدية على $\mathbb{R}$ إذا كان $أ>0$ ، تناقصية على $\mathbb{R}$ إذا كان $أ<0$
- النوع: ليست زوجية وليست فردية إلا إذا كان $ب=0$ فردية
- الرسم: خط مستقيم يقطع المحورين أو يمر بنقطة الأصل $(0,0)$

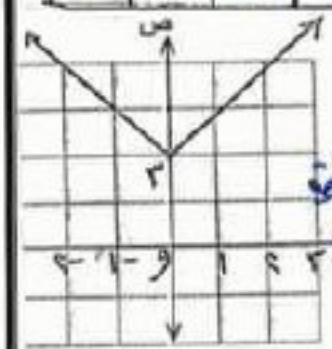
مثال (٣) ارسم لكل مما يأتي الدالة د حيث

$د(س)=\begin{cases} س+3 & ، س<2 \\ -س+3 & ، س \geq 2 \end{cases}$

ثم بين المجال - الطرفان - النوع

الحل

س	٠	١	٢	-١	-٢
ص = س+٣	٣	٤	٦		
ص = -س+٣			٦	٤	٥



المجال: $\mathbb{R}$

المدى: $[3,\infty[$

الاطراد: $]-\infty,0[$ تناقصية

$]0,\infty[$ تزايدية

النوع: زوجية

الدالة ليست أحادية

حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة

تعريف القيمة المطلقة للعدد الحقيقي س (تسمى مقياس العدد) ويرمز له |س|

معناه أكبر العددين س ، -س

$$|س| = \begin{cases} س & ، س \geq 0 \\ -س & ، س < 0 \end{cases}$$

خواص مقياس العدد الحقيقي

١) $|س| \geq 0$

٢) $|س| = |-س|$

٣) $|أ - س| = |س - أ|$

٤) إذا كان: $|س| = أ$ حيث $أ > 0$ فإن $س = \pm أ$

٥) إذا كان: $|س| = |أ|$ فإن: $س = \pm أ$

٦) $\sqrt{س^2} = |س|$ لأي عدد حقيقي س

٧) $|س|^ن = س^ن$ لأي عدد حقيقي س

٨) $|س ص| = |س| \times |ص|$

٩) $|س + ص| \leq |س| + |ص|$

دايما في العلالي
٠١٢٢٨٤٨٥٦٧
٠١١١٩٥١٨٠٠
Mozkrty.com

إعادة تعريف المقياس

١ نرتب س داخل المقياس ونجعلها موجبة

٢ نوجد صفر المقياس [نجعل ما بداخل المقياس = ٠]

٣ نصيغ ترتيب المقياس على فترتين : | دالة | =
+ (دالة) ، س ≥ صفر المقياس
− (دالة) ، س < صفر المقياس

حل معادلة المقياس

حل جبري
باستخدام إعادة تعريف المقياس
أو بتربيع طرفي المعادلة

حل بياني
نرسم دالة الطرف الأيمن ونرسم دالة الطرف الأيسر ونتعلم لتقاطع نوجد الإحداثي السيني لها

تمرين ١ أوجد مجموعة الحل في ح

١) | ٢س − ١ | = ٥

الحل

٢س − ١ = ٥	−٢س + ١ = ٥
٢س = ٦	−٢س = ٤
س = ٣	س = −٢

ح.ح = {−٢ ، ٣}

٢) | ٣ − ٤س | = ٧

الحل

س < ١/٢	س ≥ ١/٢
٣ − ٤س = ٧	−٣ + ٤س = ٧
−٤س = ٤	٤س = ١٠
س = −١	س = ٥

ح.ح = {−١ ، ٥}

٣) | س − ٢ | + ٤س = ٧

الحل

س < ٢	س ≥ ٢
٢ − س + ٤س = ٧	س − ٢ + ٤س = ٧
٣س = ٥	٥س = ٩
س = ٥	س = ٩/٥
٥ ∉]−∞ ، ٢[	٩/٥ ∈ [٢ ، ∞[

ح.ح = {٩/٥}

ملحوظة إذا كان |س + ب| = هـ حيث هـ ∈ ح⁻

فإن ∩ ح = ∅

٤) |س − ٣| + ٥ = ٠

الحل

|س − ٣| = −٥ ∉ ح⁻

∴ ∩ ح = ∅

٥) |س − ٤| = |س − ٦|

الحل

س + ٢ = س − ٦ ، س + ٢ = −س + ٦

٢ = −٦ ، ٢س = ٤

مرفوض ، س = ٢

∴ ∩ ح = {٢}

٦) √(س² − ٢س + ١) = ٤

الحل

√(س − ١)² = ٤

|س − ١| = ٤

س ≥ ١ ، س < ١

س − ١ = ٤ ، −س + ١ = ٤

س = ٥ ، س = −٣

∩ ح = {٥ ، −٣}

تدريب اختر الإجابة الصحيحة

١) مجموعة حل المعادلة: |س − ٢| = ٥ من ح هي

أ) {٧} ب) {−٣}

ج) {٧ ، −٣} د) {٧ ، ٣}

٢) مجموعة حل المعادلة |٥س − ١| + ٤ = ٤ من ح هي

أ) {−٤/٥ ، ٦/٥} ب) ∅

ج) {٦/٥} د) {−٤/٥}

٣) مجموعة حل المعادلة: |س + ١| + |س − ٢| = ٠ هي

أ) {٠} ب)]−∞ ، ٠[

ج)]−∞ ، ٠] د) ∅

٤) مجموعة حل المعادلة: |س − ٤| = |٢س + ١| هي

أ) {١/٣} ب) {٥ ، −١}

ج) {١ ، ٥} د) {−٥ ، −١}

٥) مجموعة حل المعادلة: |٢س + ٥| = ٧ من ح هي

أ) {٦} ب) {−٦}

ج) {١} د) {−١}

٦) العبارة الخطأ فيما يلي هي

أ) |س| = |−س| ب) |س + ص| = |س| + |ص|

ج) |س − ص| = |س| − |ص| د) √س² = |س|

متباينة المقياس

(١) إذا كان $|س| \geq ٢$ فإن: $-٢ \geq س \geq ٢$

(٢) إذا كان $|س| \leq ٢$ فإن: $س \leq ٢$ ، $س \geq -٢$

تدريب ١ أوجد مجموعة الحل في ح

(١) $|س - ٤| < ٣$

الحل

$-٣ < س - ٤ < ٣$

$+٤ \quad +٤ \quad +٤$

$١ < س < ٧$

$ح =]١ ، ٧[$

(٢) $|٢س + ١١| \geq ٧$

الحل

$٢س + ١١ \leq -٧$ ، $٢س + ١١ \geq ٧$

$-١١ \quad -١١$ $\quad$ -١١

$٢س \leq -١٨$ ، $٢س \geq -٤$

$\div ٢ \quad \div ٢$ $\quad$ $\div ٢$

$س \leq -٩$ ، $س \geq -٢$

$ح =]-\infty ، -٩] \cup [-٢ ، \infty[$

(٣) $|٣ - ٢س| \leq ٥$

نرتب المقياس: $|٢س - ٣| \leq ٥$

$-٥ \leq ٢س - ٣ \leq ٥$

$+٣ \quad +٣ \quad +٣$

$-٢ \leq ٢س \leq ٨$

$\div ٢ \quad \div ٢ \quad \div ٢$

$-١ \leq س \leq ٤$

$ح = [-١ ، ٤]$

(٤) $\sqrt{٤س^٢ - ١٢س + ٩} < ٩$

الحل

$\sqrt{(٢س - ٣)^٢} < ٩$

$|٢س - ٣| < ٩$

$-٩ < ٢س - ٣ < ٩$

$+٣ \quad +٣ \quad +٣$

$-٦ < ٢س < ١٢$

$\div ٢ \quad \div ٢ \quad \div ٢$

$-٣ < س < ٦$

$ح =]-٣ ، ٦[$

(٥) $|س - ١| + |س - ١١| < ١ + |س - ١١|$

الحل

$|س - ١| + |س - ١١| < ١ + ٣$

$|س - ١| < ٤$

$|س - ١| < ٢$

$-٢ < س - ١ < ٢$

$+١ \quad +١ \quad +١$

$-١ < س < ٣$

$ح =]-١ ، ٣[$

Mozkrty.com

٦) $|س-٤| \geq ٥$

الحل

$س-٤ \geq ٥$ أو $س-٤ \leq -٥$

$س \geq ٩$ أو $س \leq -١$

$م =]-\infty ، -١] \cup [٩ ، \infty[$

٧) $|٢س-٥| < ٩$

الحل

$٢س-٥ < ٩$ و $٢س-٥ > -٩$

$٢س < ١٤$ و $٢س > -٤$

$س < ٧$ و $س > -٢$

$م =]-٢ ، ٧[$

٨) $\sqrt{(س+٢)^٢} + |س+٤| \leq ٦$

الحل

$|س+٢| + |س+٢| \leq ٦$

$٢|س+٢| \leq ٦$

$|س+٢| \leq ٣$

$س+٢ \leq ٣$ و $س+٢ \geq -٣$

$س \leq ١$ و $س \geq -٥$

$م = [-٥ ، ١]$

٩) $\frac{١}{|٣س-١|} \geq ٥$

الحل

$|٣س-١| \leq \frac{١}{٥}$

$-\frac{١}{٥} \leq ٣س-١ \leq \frac{١}{٥}$

$\frac{٤}{٥} \leq ٣س \leq \frac{٦}{٥}$

$\frac{٤}{١٥} \leq س \leq \frac{٢}{٥}$

$م = [\frac{٤}{١٥} ، \frac{٢}{٥}] - \{\frac{١}{٣}\}$

تدريب ٢ إختر الإجابة الصحيحة

١) مجموعة حل المتباينة $|س-٣| < ٧$ هي

أ) $]-\frac{٥}{٣} ، ٣[$ ب) $ح -]-\frac{٥}{٣} ، ٣[$

ج) $ح -]-\frac{٥}{٣} ، ٣[$ د) ϕ

٢) إذا كان: $|س| \leq ٩$ فإن $س \in$

أ) $]-٩ ، ٩[$ ب) $ح -]-٩ ، ٩[$

ج) $ح -]-٩ ، ٩[$ د) $]-٩ ، ٩[$

١٣) مجموعة حل المتباينة $|س-٢|+|س-١| \geq ٦$ في ح هو

أ) $]-١ ، ٥[$ ب) $]-\infty ، -١] \cup [٥ ، \infty[$

ج) $ح -]-١ ، ٥[$ د) $ح - [-١ ، ٥]$

التمثيل البياني للدوال

الدوال

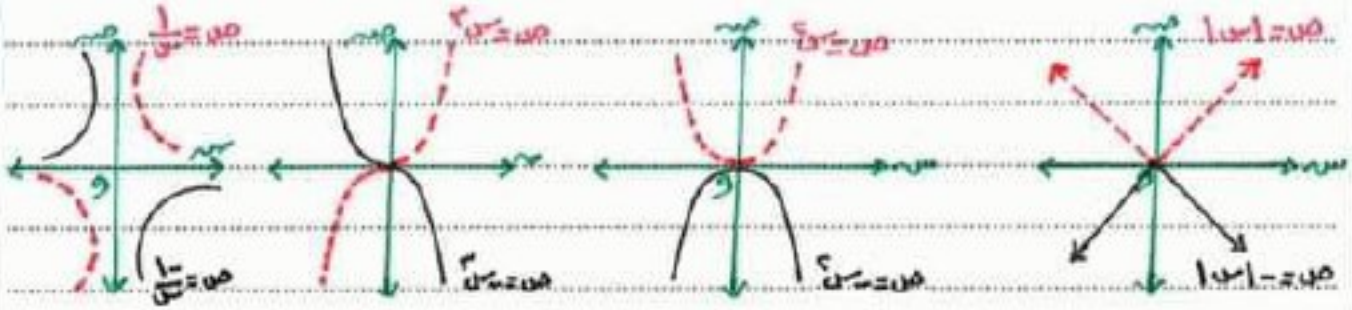
الدالة	تربيعية	تكعيبية	كسرية
	ص = س²	ص = س³	ص = $\frac{1}{س}$

ترتيب التحويلات على المنحنى ص = د(س) للحصول على المنحنى ص = ± هـ (س + ك) + ك

(١) إنعكاس في محور السينات (٢) إزاحة أفقية (٣) إزاحة رأسية

(١) إنعكاس منحنى الدالة في محور السينات

لأن دالة د بكوين المنحنى ص = − د(س) هو نفس المنحنى ص = د(س) بالإنعكاس في محور السينات



(٢) الإزاحة الأفقية: لأن دالة د بكوين المنحنى ص = د(س + ك) ، ك ∈ ح − {٠} هو نفس المنحنى ص = د(س) بإزاحة أفقية قدرها |ك| وحدة طول

في اتجاه { وسك يميناً عندما ك > ٠ ، وسك يساراً عندما ك < ٠

(٣) الإزاحة الرأسية: لأن دالة د بكوين المنحنى ص = د(س) + ك ، ك ∈ ح − {٠} هو نفس المنحنى ص = د(س) بإزاحة رأسية قدرها |ك| وحدة طول

في اتجاه { وصك لأعلى عندما ك > ٠ ، وصك لأسفل عندما ك < ٠

تمثيل البياني لدالة المقياس

$د(س) = |س|$

دالة المقياس في الصورة القياسية لها تمثيل بيانيًا بعاملين لهما نفس نقطة البداية

نقطة البداية (٠،٠)

المجال : ح

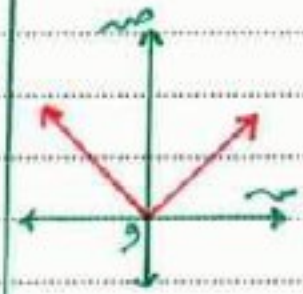
المدى : $[٠، \infty[$

الاطراد : $]-\infty، ٠[$ تناقصية

$]٠، \infty[$ تزايدية

النوع : زوجية

الدالة : ليست أحادية



تدريب ١ باستخدام منحنى الدالة د(س) = |س| ارسم منحنى الدوال التالية مبينًا :
المجال - المدى - الاطراد - النوع - تماثل

١) $د(س) = |س| + ٢$

الحل

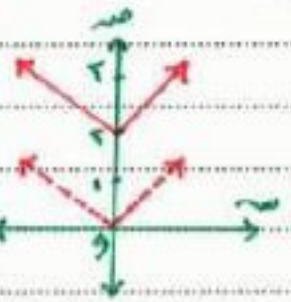
نقطة البداية : (٠، ٢) إزاحة مقدارها ٢ وحدة في إتجاه وص

المدى :

الاطراد :

النوع :

معادلة محور التماثل :



٢) $د(س) = |س - ١| - ٢$

الحل

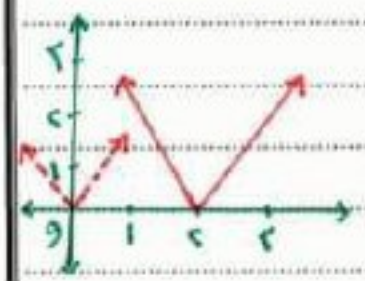
نقطة البداية : (١، -٢) إزاحة مقدارها ٢ وحدة في إتجاه وص

المدى :

الاطراد :

النوع :

معادلة محور التماثل :



٣) $د(س) = |س - ٣| + ٢$

الحل

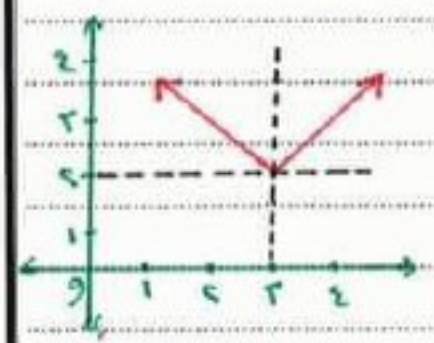
نقطة البداية : (٣، ٢) إزاحة مقدارها ٣ وحدات في اتجاه وس ثم إزاحة مقدار ٢ وحدة في إتجاه وص

المدى :

الاطراد :

النوع :

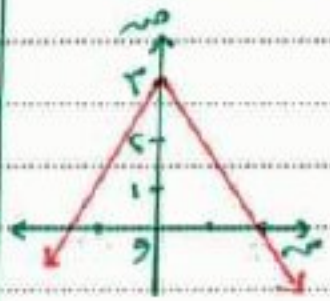
معادلة محور التماثل :



٤) د(س) = ٣ − |س|

الحل

نقطة البداية : (٠ ، ٣) إنعكاس على محور السينات ثم إزاحة مقدارها ٣ وحدات في إتجاه وص



المدى :

المجال :

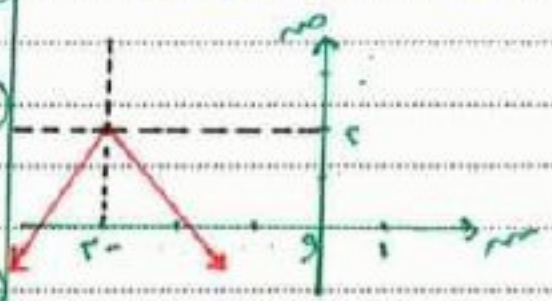
النوع :

معادلة التماثل :

٥) د(س) = ٢ − |س + ٣|

الحل

نقطة البداية : (−٣ ، ٢) إنعكاس على محور السينات ثم إزاحة مقدارها ٢ وحدات في إتجاه وس ثم إزاحة مقدارها ٢ وحدة في إتجاه وص



المدى :

المجال :

النوع :

معادلة محور التماثل :

س ٢) إختر الإجابة الصحيحة

١) في الشكل المقابل ..

تكون الدالة تناقصية في الفترة ...

أ)]−∞ ، ١[ب)]١ ، ٢[ج)]−∞ ، ٢[د)]٢ ، ٣[هـ)]١ ، ٣[

٢) إذا كانت الدالة د حيث د(س) = ٣ − |س − ١| فإنها تكون تزايدية في الفترة ...

أ)]−∞ ، ١[ب)]−∞ ، ٣[ج)]١ ، ٣[د)]−∞ ، ١[هـ)]٣ ، ∞[

٣) نقطة رأس المنحنى د(س) = |س + ١٣| − ٢ هي

أ) (٣ ، ٢) ب) (٣− ، ٢) ج) (٣ ، ٢−) د) (٣− ، ٢−)

٤) منحنى الدالة ع : ع(س) = |س + ١٣| هو نفسه منحنى د(س) = |س| بإزاحة مقدارها ٣ وحدات في إتجاه ...

أ) وس ب) وس ج) وص د) وص

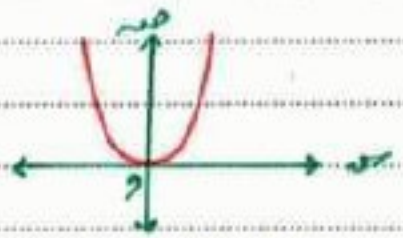
٥) مدى الدالة د : د(س) = |س − ٢| هو

أ)]٠ ، ∞[ب)]٢ ، ∞[ج)]٠ ، ∞[د)]٢ ، ∞[

الدالة التربيعية

$د(س) = س^2$

نقطة رأس المنحنى : $(0,0)$



المدى : $[0, \infty[$

المجال : $]-\infty, 0[$ تناقصية

$]0, \infty[$ تزايدية

النوع : زوجية

محور التماثل : محور الصادات $(س = 0)$

تدريب ١

باستخدام منحنى الدالة $د(س) = س^2$

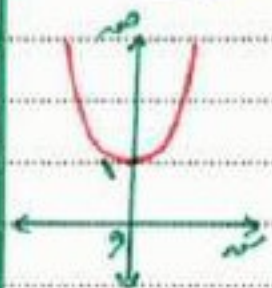
ارسم منحنى الدوال التالية مبينًا

المدى - المجال - النوع

(١) $د(س) = س^2 + ١$

الحل

نقطة رأس المنحنى : $(0,1)$ إزاحة مقدارها ١ وحدة في اتجاه ص+



المدى :

المجال :

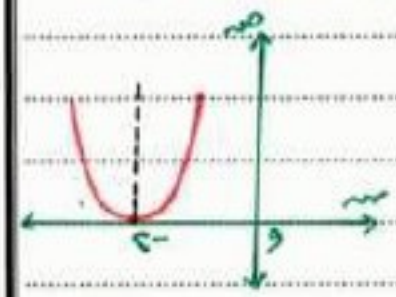
النوع :

معادلة محور التماثل :

(٢) $د(س) = (س + ٢)^2$

الحل

نقطة رأس المنحنى : $(-٢, 0)$ إزاحة مقدارها ٢ وحدة في اتجاه س-



المدى :

المجال :

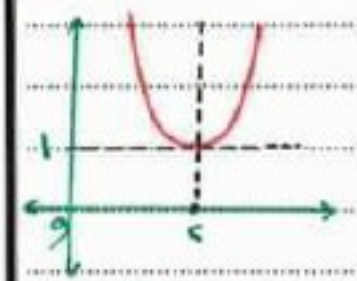
النوع :

معادلة التماثل :

(٣) $د(س) = (س - ٢)^2 + ١$

الحل

نقطة رأس المنحنى : $(2,1)$ إزاحة مقدارها ٢ وحدة في اتجاه س+ ثم إزاحة مقدارها ١ في اتجاه ص+



المدى :

المجال :

النوع :

معادلة التماثل :

(٤) $د(س) = ٣ - س^2$

الحل

نقطة رأس المنحنى : $(0,3)$ انعكاس على محور السينات ثم إزاحة مقدارها ٣ وحدات في اتجاه ص+

المدى :

المدار :

النموذج :

معادلة محور التماثل :

⑤ $د(س) = ٢ - (س-١)^٢$

الحل

نقطة رأس المنحنى : $(١ ، ٢)$ إنعكاس على محور السينات ثم إزاحة مقدارها ١ وحدة فى إتجاه وصف ثم إزاحة مقدارها ٢ وحدة فى إتجاه وصف

المدى :

المدار :

النموذج :

معادلة محور التماثل :

⑥ $د(س) = -س^٢ - ٢س + ٣$

الحل

نجعل الدالة على الصورة القياسية

$د(س) = -س^٢ - ٢س + ١ + ٣ - ١$

بإضافة وطرح (١) للدالة

$د(س) = -(س+١)^٢ + ٤$

نقطة رأس المنحنى : $(-١ ، ٤)$ نكمل الحل

تدريب ٢

إختر الإجابة الصحيحة :

① الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة التربيعية حيث $د(س)$ فإن قاعدة الدالة هى ....

أ) $د(س) = (س-١)^٢ + ٢$ ب) $د(س) = (س-٢)^٢ + ١$

ج) $د(س) = (س+١)^٢ - ٢$ د) $د(س) = (س+٢)^٢ - ١$

② الشكل المقابل .. المنحنى يمثل الدالة ..

أ) $د(س) = -(س-١)^٢ + ٢$

ب) $د(س) = -س^٢ + ٢س + ٣$

ج) $د(س) = -س^٢ - ٢س + ٣$

د) $د(س) = -(س+٢)^٢ + ١$

③ الشكل الذى يمثل منحنى الدالة : $د(س) = -(س-١)^٢$ هو

أ) ب)

ج) د)

الدالة التكعيبية

$د(س) = س^3$

نقطة التماثل : (٠ ، ٠)

المدى : ح

الأطراد : تزايدية على ح

النوع : فردية

(١) $د(س) = س^3 + ١$

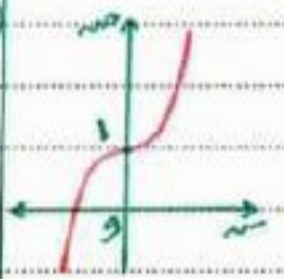
الحل

نقطة التماثل : (٠ ، ١) إزاحة مقدارها ١ في اتجاه وصـ

المدى : ح

الاطراد : تزايدية على ح

النوع : ليست زوجية وليست فردية



(٢) $د(س) = (س + ٢)^3$

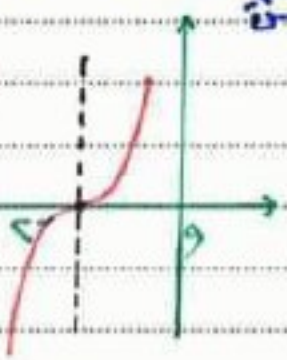
الحل

نقطة التماثل : (-٢ ، ٠) إزاحة مقدارها ٢ وحدة في اتجاه وسـ

المدى :

الاطراد :

النوع :



(٣) $د(س) = (س - ٢)^3 + ١$

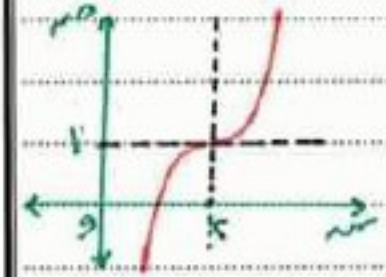
الحل

نقطة التماثل : (٢ ، ١) إزاحة مقدارها ٢ وحدة في اتجاه وسـ ثم إزاحة مقدارها وحدة في اتجاه وصـ

المدى :

الاطراد :

النوع :



(٤) $د(س) = ٢ - س^3$

الحل

نقطة التماثل : (٠ ، ٢) إنعكاس على محور السينات ثم إزاحة مقدارها ٢ وحدة في اتجاه وصـ

المدى :

الاطراد :

النوع :

(٥) $د(س) = -(س - ٢)^3$

الحل

نقطة التماثل : (٢ ، ٠) إنعكاس على محور السينات ثم إزاحة مقدارها ٢ وحدة في إتجاه وسـ

دالة المقياس في صورة غير قياسية

لرسم دالة المقياس التي في صورة غير قياسية نتبع الآتي :

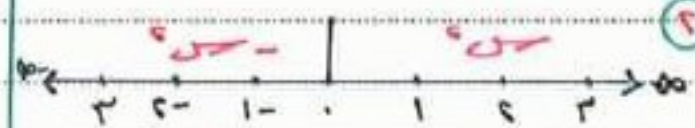
١) نوجد المجال
٢) نعيد تعريفها على قاعدتين
٣) نختصر كل قاعدة
٤) نعمل جدول لكل قاعدة

١) $د(س) = س|س|$

الحل

١) المجال : $ح$

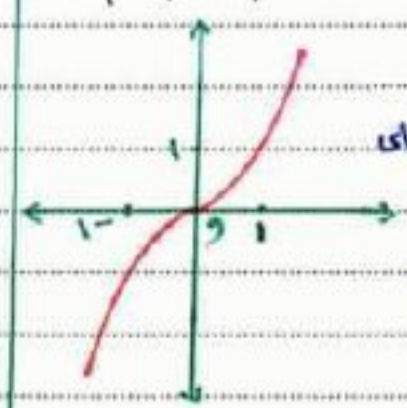
٢)



المدى : $ح$

الاطراد : تزايدية على $ح$

النوع : فردية

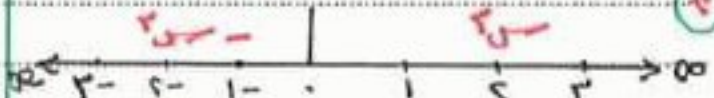


٢) $د(س) = س^{٢}|س|$

الحل

١) المجال : $ح$

٢)



المدى :

الاطراد :

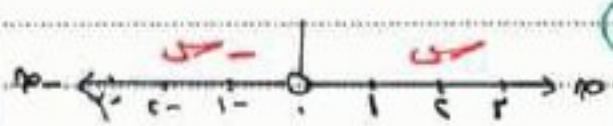
النوع :

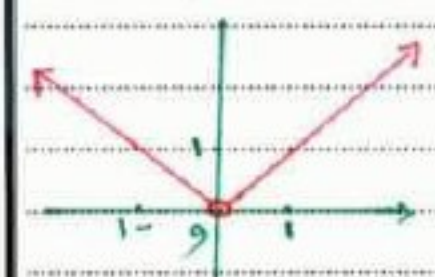
٣) $د(س) = \frac{س^{٢}}{س}$ حيث $س \neq ٠$

الحل

١) المجال : $ح - \{٠\}$

٢)





المدى :

الاطراد :

النوع :

٤) $د(س) = \frac{|س|}{س}$ حيث $س \neq ٠$

الحل

الدالة النسبية

$د(س) = \frac{1}{س}$ صورة قياسية

نقطة التماثل : (٠،٠)

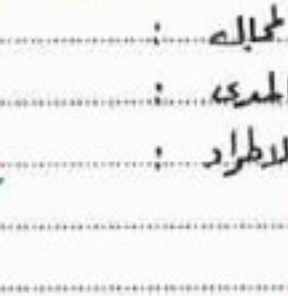
المجال : $ح - \{٠\}$

المدى : $ح - \{٠\}$

الاطراد : $]-\infty، ٠[$ تناقصية

$]٠، \infty[$ تناقصية

النوع : فردية



---

(١) $د(س) = \frac{1}{س} + ٢$

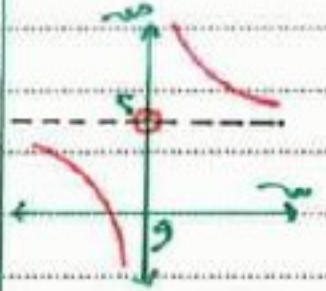
نقطة التماثل : (٠،٢) إزاحة مقدارها ٢ وحدة في إتجاه وص

المجال :

المدى :

الاطراد :

النوع :



---

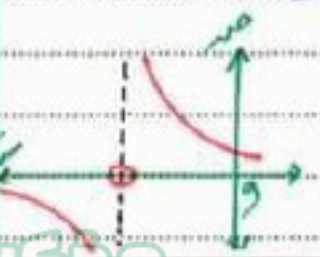
(٢) $د(س) = \frac{1}{س+٢}$

نقطة التماثل : (-٢،٠) إزاحة مقدارها ٢ وحدة في إتجاه وس

المجال :

المدى :

الاطراد :



---

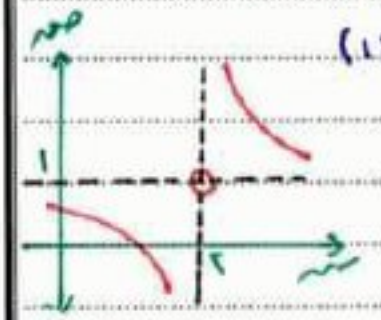
(٣) $د(س) = \frac{1}{س} + ١$

نقطة التماثل : (٠،١)

المجال :

المدى :

الاطراد :



---

(٤) $د(س) = \frac{-١}{س}$

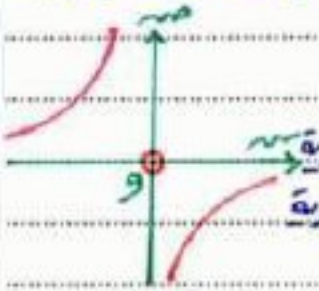
نقطة التماثل : (٠،٠) إنعكاس على محور السينات

المجال : $ح - \{٠\}$

المدى : $ح - \{٠\}$

الاطراد : $]-\infty، ٠[$ تزايدية

$]٠، \infty[$ تزايدية



---

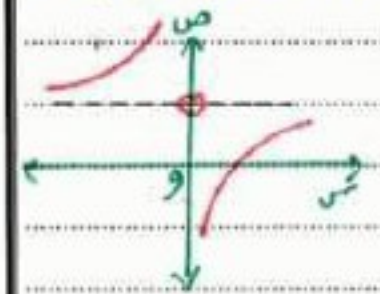
(٥) $د(س) = ٣ - \frac{١}{س}$

نقطة التماثل : (٠،٣) انعكاس على محور السينات

المجال :

المدى :

الاطراد :



الأسس الكسرية

تعريف

(١) إذا كان: $ن \in ص^+ - \{1\}$ ، $أ \in ح$ فإن: $أ^{\frac{1}{ن}} = \sqrt[ن]{أ}$

(٢) إذا كان: $م$ ، $ن$ عددان صحيحان ليس بينهما عامل مشترك ، $ن > 1$ ، $\sqrt[ن]{أ} \in ح$

فإن: $أ^{\frac{م}{ن}} = أ^{م \times \frac{1}{ن}} = (أ^{\frac{1}{ن}})^م = (\sqrt[ن]{أ})^م$

ملحوظة

إذا كان: $ن$ عدد زوجي ، $أ > 0$ فإن: $أ^{\frac{1}{ن}} = \sqrt[ن]{أ} \in ح$

مثال

(١) $٢٥^{\frac{1}{٢}} = \sqrt{٢٥} = ٥ \in ح$

(٢) $(-٩)^{\frac{1}{٤}} = \sqrt[٤]{-٩} \notin ح$

خواص الجذور النونية

إذا كان: $أ$ ، $ب$ عددين حقيقيين ، $\sqrt[ن]{أ}$ ، $\sqrt[ن]{ب} \in ح$ فإن:

(١) $\sqrt[ن]{أ ب} = \sqrt[ن]{ب} \times \sqrt[ن]{أ}$

(٢) $\frac{\sqrt[ن]{أ}}{\sqrt[ن]{ب}} = \sqrt[ن]{\frac{أ}{ب}}$

تدريب ١

(١) $\sqrt[٣]{٢٧ أ^٦ ب^٩} = \sqrt[٣]{٢٧} \times \sqrt[٣]{أ^٦} \times \sqrt[٣]{ب^٩} = ٣ أ^٢ ب^٣$

(٢) $\sqrt[٤]{٨١ س^{١٢} ص^{٨}} = \sqrt[٤]{٨١} \times \sqrt[٤]{س^{١٢}} \times \sqrt[٤]{ص^{١٦}} = ٣ |س^٣| ص^٤$

قوانين الأسس

(١) $أ^{صفر} = ١$

(٢) $أ^م \times أ^ن = أ^{م+ن}$

(٣) $أ^م \div أ^ن = أ^{م-ن}$

(٤) $(أ^م)^ن = أ^{م ن}$

(٥) $(أ ب)^ن = أ^ن ب^ن$

(٦) $(\frac{أ}{ب})^ن = \frac{أ^ن}{ب^ن}$

تدريب ٢

١) $\sqrt{س} \times \sqrt[3]{س} = س^{\frac{1}{2}} \times س^{\frac{1}{3}} = س^{\frac{5}{6}}$

٢) $(\sqrt[5]{س})^2 \times \sqrt[3]{س^4} = س^{\frac{2}{5}} \times س^{\frac{4}{3}} = س^{\frac{16}{15}}$

المعادلات الأسية

١) المعادلة : $س^ن = ب$ حيث $ب \in ح ، ن \in ص^+$ لها $ن$ من الجذور

المعادلة	عدد الجذور	عدد الجذور الحقيقية	عدد الجذور المركبة
١) $ن$ عدد زوجي			
$س^ن = ب ، ب > ٠$	$ن$	جذران	$(ن - ٢)$
$ب = ٠$	$ن$	ليس لها جذور (صفر)	$ن$
٢) $ن$ عدد فردي			
$س^ن = ب ، ب \neq ٠$	$ن$	واحد	$(ن - ١)$

تدريب ٢

١) المعادلة $س^٣ = ٨$ عدد جذورها ـــاوي (أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

٢) عدد الجذور الحقيقية للمعادلة $س^٤ = -١٦$ هو (أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٤

٢) المعادلة : $س^{\frac{ن}{م}} = ب$ فإن $س = ب^{\frac{م}{ن}}$ بشرط $م$ عدد فردي

المعادلة : $س^{\frac{ن}{م}} = ب$ فإن $س = \pm ب^{\frac{م}{ن}}$ بشرط $م$ عدد زوجي

المعالي دايما في العلالي ٠١٢٢٨٤٨٥٦٧ ٠١١١٩٥١٨٠٠
مذكرتي Mozkrty.com

تدريب ٣ أوجد مجموعة الحل في ح

١) $س^{٤} = ٨١$

الحل

$س = \pm \sqrt[٤]{٨١} = \pm ٣$

$\therefore$ ح.م = $\{\pm ٣\}$

٢) $س^{٥} = ٢٤٣$

الحل

$س = \sqrt[٥]{٢٤٣} = ٣$

ح.م = $\{٣\}$

٣) $٤ س^{٥} = ١٢٨$

الحل

$س^{٥} = \frac{١٢٨}{٤} = ٣٢$

$\therefore س = \sqrt[٥]{٣٢} = ٢$

ح.م = $\{٢\}$

٤) $س^{\frac{٦}{٤}} = ١٢٨$

الحل

$س = (١٢٨)^{\frac{٤}{٦}} = ٤$

$\therefore$ ح.م = $\{٤\}$

٥) $س^{\frac{٤}{٣}} = ٨١$

الحل

$س = \pm (٨١)^{\frac{٣}{٤}} = \pm ٢٧$

$\therefore$ ح.م = $\{\pm ٢٧\}$

٦) $س^{٤} = ١$

الحل

$س^{٥} = ١$

$س = \pm (١)^{\frac{٥}{٤}} = \pm ١$

ح.م = $\{\pm ١\}$

٧) $\frac{٤}{٣}(٣س + ٢) = ٨$

الحل

$\frac{٤}{٣}(٨) = ٣س + ٢$

$٣س + ٢ = ١٦$

$س = \frac{١٤}{٣}$

ح.م = $\{\frac{١٤}{٣}\}$

تدريب ٤ أوجد مجموعة الحل في ح

١) $س^{\frac{١}{٢}} + س^{\frac{١}{٤}} - ١٢ = ٠$

الحل

$(س^{\frac{١}{٤}} + ٤)(س^{\frac{١}{٤}} - ٣) = ٠$

تحليل مقدار ثلاثي

$\therefore س^{\frac{١}{٤}} = -٤$ مرفوض

$س^{\frac{١}{٤}} = ٣ \Leftarrow س = ٣^{٤} = ٨١$

$\therefore$ ح.م = $\{٨١\}$

٢) $س^{\frac{٢}{٣}} - ٤ س^{\frac{١}{٣}} + ٣ = ٠$

الحل

$(س^{\frac{١}{٣}} - ١)(س^{\frac{١}{٣}} - ٣) = ٠$

$س^{\frac{١}{٣}} = ٣ \Leftarrow س = ٢٧$

$س^{\frac{١}{٣}} = ١ \Leftarrow س = ١$

٤) $\lim_{س \to ٥} \frac{س^{٢} - ٥س}{\sqrt{س+٤} - ٣}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{س^{٢} - ٥س}{\sqrt{س+٤} - ٣} \times \frac{\sqrt{س+٤} + ٣}{\sqrt{س+٤} + ٣}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{س(س-٥)(\sqrt{س+٤}+٣)}{(س+٤-٩)}$

$= \lim_{س \to ٥} س(\sqrt{س+٤}+٣) = ٥ \times ٦ = ٣٠$

٥) $\lim_{س \to ١٠} \frac{\sqrt{٢س} - \sqrt{٧-س}}{س-٩} =$

أ) $\frac{\sqrt{٢}}{٤}$ ب) $\frac{\sqrt{٢}}{٤}$

ج) $٢\sqrt{٢}$ د) $-٢\sqrt{٢}$

٦) $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س} - ٢}{٥س^{٢} - ٢٣س + ١٢} =$

أ) $\frac{١}{٩٢}$ ب) $\frac{١}{٦٨}$

ج) ٦٨ د) ٩٢

٧) $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt[٣]{س+١} - ٣}{س^{٤} - ١٦} =$

أ) $\frac{١}{١٢}$ ب) $\frac{١}{٢٤}$

ج) $\frac{١}{٤٨}$ د) $\frac{١}{٣٦}$

٨) $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٣]{٨+س^{٢}} - ٣}{س+١} =$

أ) $-\frac{١}{٣}$ ب) $\frac{١}{٣}$

ج) ٣ د) -٣

مسائل على القسمة المطولة

١) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٣} - س^{٢} - ٥س + ٦}{س - ٢}$

(أ) ترتب معاملات المقدار تنازلياً حسب قوى س

(ب) نأخذ معاملات المقدار الجبري

	١	-١	-٥	٦
٢		٢	٢	-٦
	١	١	-٣	٠

$= \lim_{س \to ٢} (س^{٢} + س - ٣) = ٤ + ٢ - ٣ = ٣$

٢) $\lim_{س \to ٤} \frac{س^{٢} - ١٥س + ٤}{س - ٤}$

	١	-١٥	٤
٤		٤	-٤٤
	١	-١١	-٤٠

$= \lim_{س \to ٤} (س - ١١ - \frac{٤٠}{س-٤})$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{(س-٤)(س^{٢} - ١١س + ٤٤) - ٤٠}{(س-٤)}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{(س-٤)(س^{٢} - ١١س + ٤٤ - ١٠)}{(س-٤)}$

$= \lim_{س \to ٤} (س^{٢} - ١١س + ٣٤)$

$= ١٦ - ٤٤ + ٣٤ = ٣$

نظرية ٤ (القانون)

إذا كان $ن \in ح$ فإن:

(١) $\text{نهـا}_{س \to أ} \frac{س^ن - أ^ن}{س - أ} = ن \times أ^{ن-١}$

(٢) $\text{نهـا}_{س \to أ} \frac{س^ن - أ^ن}{س^م - أ^م} = \frac{ن}{م} \times أ^{ن-م}$

(٣) $\text{نهـا}_{س \to ١} \frac{س^ن - ١}{س^م - ١} = \frac{ن}{م}$

(١) $\text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{س^٤ - ٨١}{س - ٣}$

$= \text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{س^٤ - ٣^٤}{س - ٣} = ٤ \times ٣^{٤-١} = ١٠٨$

(٢) $\text{نهـا}_{س \to -٢} \frac{س^٥ + ٣٢}{س + ٢}$

$= \text{نهـا}_{س \to -٢} \frac{س^٥ - (-٢)^٥}{س - (-٢)} = ٥(-٢)^{٤} = ٨٠$

(٣) $\text{نهـا}_{س \to ١} \frac{س^ن - ١}{س^م - ١} = \frac{ن}{م}$

(٤) $\text{نهـا}_{س \to ٥} \frac{س^٧ - ١٢٥ \times ٥^٢}{س - ٥}$

$= \text{نهـا}_{س \to ٥} \frac{س^٧ - (٥^٢)^٧}{س - ٥}$

$= ٧ \times (٥^٢)^٦ = ٨٧٥$

(٤) $\text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{س^٧ - ١٢٨}{س^٣ - ٨}$

$= \text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{س^٧ - ٢^٧}{س^٣ - ٢^٣}$

$= \frac{٧}{٣} \times (٢)^{٤} = \frac{١١٢}{٣}$

(٥) $\text{نهـا}_{س \to ٤} \frac{٢س^٣ - ١٢٨}{س^٤ - ١٦}$

$= \text{نهـا}_{س \to ٤} \frac{٢(س^٣ - ٦٤)}{س^٤ - ١٦}$

$= \text{نهـا}_{س \to ٤} ٢ \times \text{نهـا}_{س \to ٤} \frac{س^٣ - ٤^٣}{س^٤ - ٤^٤}$

$= ٢ \times \frac{٣}{٤} \times ٤ = ١٢$

(٦) $\text{نهـا}_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{س^٣ - \frac{١}{٨}}{س^٤ - \frac{١}{١٦}}$

$= \text{نهـا}_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{س^٣ - (\frac{١}{٢})^٣}{س^٤ - (\frac{١}{٢})^٤} = \frac{٣}{٤} \times (\frac{١}{٢}) = \frac{٣}{٨}$

(٧) $\text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{س^٧ - ١٢٨}{س^٤ - ٥س^٣ + ٦٤}$

$= \text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{س^٧ - ٢^٧}{(س - ٢)(س - ٣)}$

$= \text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{س^٧ - ٢^٧}{س - ٢} \times \text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{١}{س - ٣}$

$= ٧ \times ٢^٦ \times \frac{١}{-١} = -٤٤٨$

(٨) $\lim_{س \to ١} \frac{١٢٨ - س^{٧}}{٣٢ - س^{٥}} = \lim_{س \to ١} \frac{-(س^{٧} - ١)}{-(س^{٥} - ١)} = \lim_{س \to ١} \frac{س^{٧} - ١}{س^{٥} - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{(س - ١)(س^{٦} + س^{٥} + س^{٤} + س^{٣} + س^{٢} + س + ١)}{(س - ١)(س^{٤} + س^{٣} + س^{٢} + س + ١)} = \frac{٧}{٥}$

(٩) $\lim_{هـ \to ٠} \frac{(٣ + هـ)^{٥} - ٢٤٣}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{(٣ + هـ)^{٥} - ٣^{٥}}{هـ}$

$\because هـ \to ٠ \Leftarrow ٣ + هـ \to ٣$

$= \lim_{٣ + هـ \to ٣} \frac{(٣ + هـ)^{٥} - ٣^{٥}}{(٣ + هـ) - ٣} = ٥ \times ٣^{٤} = ٤٠٥$

(١٠) $\lim_{هـ \to ٠} \frac{(٣ + هـ)^{٤} - ٨١}{٦ هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{(٣ + هـ)^{٤} - ٣^{٤}}{٦ هـ}$

$= \frac{١}{٦} \lim_{٣ + هـ \to ٣} \frac{(٣ + هـ)^{٤} - ٣^{٤}}{(٣ + هـ) - ٣}$

$= \frac{١}{٦} \times ٤ \times ٣^{٣} = ١٨$

(١١) $\lim_{س \to ٦} \frac{(س - ٥)^{٧} - ١}{س - ٦} = \lim_{س - ٥ \to ١} \frac{(س - ٥)^{٧} - ١}{(س - ٥) - ١}$

$= ٧$

(١٢) $\lim_{هـ \to ٠} \frac{(٣ + ٢هـ)^{٥} - ٢٤٣}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{(٣ + ٢هـ)^{٥} - ٣^{٥}}{هـ}$

$= ٢ \times \lim_{٣ + ٢هـ \to ٣} \frac{(٣ + ٢هـ)^{٥} - ٣^{٥}}{(٣ + ٢هـ) - ٣}$

$= ٢ \times ٥ \times ٣^{٤} = ١٦٠$

(١٣) $\lim_{س \to ٢٧} \frac{س^{\frac{٤}{٣}} - ٢٤٣}{س - ٢٧} =$

(١٤) إذا كانت $د(س) = س^{٥}$ ، $ر(س) = س^{٤} - ٤$

فإن: $\lim_{س \to ٢} \frac{د(س) - ٣٢}{ر(س)} =$

(١٥) إذا كان: $\lim_{س \to ٩} \frac{س^{\frac{٣}{٢}} - ٢٧}{س^{\frac{١}{٢}} - ٣} = \frac{٩}{٣}$ فإن $أ =$

(١٦) $\lim_{س \to ١٦} \frac{\sqrt[٤]{س^{٧}} - ١٢٨}{س - ١٦} =$

(١٧) إذا كان: $د(س) = \frac{١}{س^{٤}}$ فإن:

$\lim_{س \to ٢} \frac{د(س) - د(٢)}{س - ٢} =$

(أ)	١٠٥	(ب)	$\frac{٥}{٣}$
(ج)	٩	(د)	٢٧
(هـ)	-٢٠	(و)	٢٠
(ز)	-٣٢	(ح)	٣٠
(ط)	$\frac{٣}{٢}$	(ي)	٨١
(ك)	٣	(ل)	١
(م)	١٤	(ن)	-١٤
(س)	$\frac{١}{١٤}$	(ع)	$\frac{-١}{١٤}$
(ف)	-٨	(ص)	٨
(ق)	$\frac{١}{٨}$	(ر)	$\frac{-١}{٨}$

المعالي دائما في العلاء ٠١٢٢٨٤٨٥٦٧ ٠١١١٩٥١٨٠٠

موقع مذكرتي Mozkrty.com

نهاية دالة عند اللانهاية

نظرية ٥

$\lim_{س \to \pm\infty} \frac{1}{س^{ن}}$ = صفر

نتيجة

(١) $\lim_{س \to \pm\infty} \frac{أ}{س^{ن}}$ = صفر حيث أ ∈ ح

(٢) $\lim_{س \to \pm\infty} أ$ = أ حيث أ ثابت

ملاحظات عند إيجاد $\lim_{س \to \pm\infty} \frac{د(س)}{هـ(س)}$ حيث د، هـ دوال كثيرة حدود، هـ(س) ≠ ٠ فإن:

(i) إذا كانت درجة البسط = درجة المقام ← ناتج النهاية = عدد حقيقي ≠ ٠

(ii) إذا كانت درجة البسط < درجة المقام ← ناتج النهاية = صفر

(iii) إذا كانت درجة البسط > درجة المقام ← ناتج النهاية = ± ∞

تدريب ١ أكمل ما يأتي:

(١) $\lim_{س \to \infty} (\frac{1}{س} + ٤)$ =

(٢) $\lim_{س \to -\infty} (٥ - \frac{1}{س^{٤}})$ =

(٣) $\lim_{س \to \infty} \sqrt{\frac{1}{س}}$ =

(٤) $\lim_{س \to \infty}$ ٩ =

(٥) $\lim_{س \to \infty} (\sqrt{١ + \frac{٤}{س}})$ =

(٦) $\lim_{س \to \infty} (س^{٤} - ٣)$ =

(٧) $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{٥}}{س}$ =

تدريب ٢ أوجد النهايات التالية:

(١) $\lim_{س \to \infty} (س^{٣} + ٥س^{٢} + ١)$

= ∞ + ∞ + ١ = ∞ + ١ = ∞

(٢) $\lim_{س \to \infty} (س^{٢} + ٣س^{-١} + ٤)$

= $\lim_{س \to \infty} (\frac{1}{س} + \frac{1}{س^{٢}} + ٤)$

= ٠ + ٠ + ٤ = ٤

(٣) $\lim_{س \to \infty} (س^{٣} - ٥س + ١)$

= $\lim_{س \to \infty} س^{٣}(١ - \frac{٥}{س^{٢}} + \frac{1}{س^{٣}})$

= ∞ (١ + ٠ + ٠) = ∞

تدريب ٣ أوجد ناتج النهايات التالية

١) $\lim_{س\to\infty} \frac{٥ - ٦س - ٣س^{٤}}{٢س^{٤} + س - ٤}$

بقسمة البسط والمقام على أعلى أس للمتغير س في المقام

$= \lim_{س\to\infty} \frac{\frac{٥}{س^{٤}} - \frac{٦س}{س^{٤}} - \frac{٣س^{٤}}{س^{٤}}}{\frac{٢س^{٤}}{س^{٤}} + \frac{س}{س^{٤}} - \frac{٤}{س^{٤}}}$

$= \frac{٠ - ٠ - ٣}{٢ + ٠ - ٠} = -\frac{٣}{٢}$

٢) $\lim_{س\to\infty} \frac{٢س^{٤} - ١}{٤س^{٣} - ٥س - ١}$ بالقسمة على $س^{٣}$

$\lim_{س\to\infty} \frac{\frac{٢}{س} - \frac{١}{س^{٣}}}{٤ - \frac{٥}{س^{٢}} - \frac{١}{س^{٣}}} = \frac{صفر}{٤} = صفر$

٣) $\lim_{س\to\infty} \frac{س^{٣} - ٢}{٣س^{٤} + ٤س + ١}$ ÷ $س^{٤}$

$= \lim_{س\to\infty} \frac{\frac{١}{س} - \frac{٢}{س^{٤}}}{٣ + \frac{٤}{س^{٣}} + \frac{١}{س^{٤}}}$

$= \frac{٠ - ٠}{٣ + ٠ + ٠} = \frac{٠}{٣} = ٠$

٤) $\lim_{س\to\infty} \frac{(٣س + ٤)(٥س - ١)}{(٤ - س + ٣)(٢س - ٧)}$

لاحظ لو تم فك الأقواس هيكون درجة $س^{٢}$

$= \lim_{س\to\infty} \frac{(\frac{٣س}{س^{٢}} + \frac{٤}{س^{٢}})(\frac{٥س}{س^{٢}} - \frac{١}{س^{٢}})}{(\frac{٤}{س^{٢}} - \frac{س}{س^{٢}} + \frac{٣}{س^{٢}})(\frac{٢س}{س^{٢}} - \frac{٧}{س^{٢}})}$

$= \lim_{س\to\infty} \frac{(\frac{٣}{س} + \frac{٤}{س^{٢}})(٥ - \frac{١}{س^{٢}})}{(\frac{٤}{س^{٢}} - \frac{١}{س} + \frac{٣}{س^{٢}})(٢ - \frac{٧}{س^{٢}})} = \frac{١٥}{٨}$

٥) $\lim_{س\to\infty} \frac{(٢س^{٣} - ٥)(٧ - ١٤س)}{٤ + س^{٥}}$

بالقسمة على $س^{٥}$ = $\frac{س^{٢}}{س^{٥}}$

$= \lim_{س\to\infty} \frac{(٢ - \frac{٥}{س^{٣}})(\frac{٧}{س^{٥}} + ١٤)}{\frac{٤}{س^{٥}} + ١}$

$= \frac{١٤}{١} = ١٤$

٦) $\lim_{س\to\infty} (٧ + \frac{٢س^{٤}}{(٣ + س)^{٤}})$

$= ٧ + \lim_{س\to\infty} \frac{٢س^{٤}}{س^{٤} + ٦س + ٩}$

$= ٧ + \lim_{س\to\infty} \frac{٢}{١ + \frac{٦}{س} + \frac{٩}{س^{٤}}}$

$= ٧ + ٢$

$= ٩$

تمرين ٤ اختر الاجابة الصحيحة :

١) $\lim_{س \to ٥} \frac{٣س^{٢}}{س(٢س-١)} =$

أ) $\frac{٣}{٢}$ ب) $\frac{٢}{٣}$ ج) $\frac{٥}{٢}$

د) صفر هـ) ٢

٢) إذا كانت $\lim_{س \to ∞} \frac{أ س^{٢} - ٥س}{٢س^{٣} + ٣س^{٢}} = ٢$ فإن أ =

أ) ٣ ب) ٦ ج) ١٢

د) ٩ هـ) ١٨

٣) $\lim_{س \to ∞} \frac{٥ + س^{-٢}}{١ + ٣س^{-٣}} =$

أ) $\frac{١}{٣}$ ب) $\frac{٥}{٤}$ ج) $\frac{٥}{٣}$

د) ٥ هـ) ١٠

٤) $\lim_{س \to ∞} \left(\frac{٣س^{٤} + ٢س + ١}{س^{٤} - ٣س + ٢}\right)^{٤} =$

أ) ٣ ب) ٩ ج) ٢٧

د) ٨١ هـ) ٢٤

٥) $\lim_{س \to ∞} \frac{س^{٥} + ٢س^{-٣} - س^{-٢}}{(٣س + ٤)^{-٢}} =$

أ) ٩ ب) -٩ ج) $\frac{١}{٣}$

د) صفر هـ) ٣

تمرين ٣

١) $\lim_{س \to ∞} \frac{٣س^{٢}}{س(٢س-١)} = \lim_{س \to ∞} \frac{٣س^{٢}}{٢س^{٢} - س}$

بقسمة البسط والمقام على $س^{٢}$

$= \lim_{س \to ∞} \frac{٣}{٢ - \frac{١}{س}} = \frac{٣}{٢ - ٠} = \frac{٣}{٢}$

٢) $\lim_{س \to ∞} \frac{٧}{٥س + ٧}$

بقسمة البسط والمقام على $\sqrt{٤س^{٢} + ٩}$

$= \lim_{س \to ∞} \frac{\frac{٧}{س}}{\frac{٥س}{\sqrt{٤س^{٢}}} + \frac{٩}{\sqrt{٤س^{٢}}}}$ بـ $\sqrt{س^{٢}} = س$

$= \frac{٠}{٢ + ٠} = ٠$

٣) $\lim_{س \to ∞} \frac{\sqrt{٤س^{٢} + ٥}}{٨س^{٣} + ٤}$

بالقسمة على $\sqrt{س^{٦}} = س^{٣}$

$= \lim_{س \to ∞} \frac{\sqrt{٤ + \frac{٥}{س^{٢}}}}{٨ + \frac{٤}{س^{٣}}} = \frac{١}{٢}$

٤) $\lim_{س \to ∞} \frac{٢س^{-١} - ٣س^{-٢} + س^{-٣}}{٤س^{-٣} + س^{-١}}$

بضرب البسط والمقام × $س^{٣}$

$= \lim_{س \to ∞} \frac{٢س^{٢} - ٣س + ١}{٤ + س^{٢}}$ بـ $س^{٢}$

$= \lim_{س \to ∞} \frac{٢ - \frac{٣}{س} + \frac{١}{س^{٢}}}{\frac{٤}{س^{٢}} + ١}$

$= \frac{٢ - ٠ + ٠}{٠ + ١}$

$= ٢$

المعالى دايما فى العلالى ٠١٢٢٨٤٨٥٦٧ ٠١١١٩٥١٨٠٠

Modarsty.com

نهاية الدوال المثلثية

نظرية

$$\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا } س}{س} = 1$$

$$\lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا } س}{س} = 1$$

حيث س بالتقدير الدائري

نتائج

١) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا } أس}{س} = أ$

٢) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 س}{س^2} = أ$

٣) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا } أس}{ب س} = \frac{أ}{ب}$

٤) $\lim_{س \to 0} \frac{١ - \text{جتا } س}{س} =$ صفر

تدريب ١

أكمل ما يأتي :-

١) $\lim_{س \to 0} \text{جا } ٣س \text{ جتا } ٣س =$

٢) $\lim_{س \to 0} \text{جا } س \text{ ظا } س =$

٣) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \text{جا}^2 س =$

٤) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا } ٧س}{س} =$

٥) $\lim_{س \to 0} \frac{٣ + ٢س}{\text{قتا } ٤س} =$

٦) $\lim_{س \to 0} \frac{١ - \text{جتا } س}{٣س} =$

٧) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 ٤س}{س^2} =$

٨) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا}^2 ٣س}{٥ س^2} =$

٩) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا } ٣س}{٤س} =$

١٠) $\lim_{س \to ٥} \frac{\text{جا}(س - ٥)}{٣س - ١٥} =$

١١) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا } ٣س}{٤س} =$

١٢) $\lim_{س \to 0} \frac{ج - \text{جتا } س}{\text{ظا } ٣س} =$

١٣) $\lim_{س \to 0} ٣س \text{ قتا } ٤س =$

١٤) $\lim_{س \to 0} س \text{ ظتا } س =$

١٥) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 س \text{ ظا } ٣س}{٤ س^2} =$

١٦) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا } \frac{١}{٢} س}{\text{ظا } ٣س} =$

تدريب ٢ أوجد النهايات التالية :-

(١) $\lim_{س \to 0} \frac{س - ٣ ظاس}{٣س + ظاس}$

بقسمة البسط والمقام على س

$= \lim_{س \to 0} \frac{١ - ٣ \times \frac{ظاس}{س}}{٣ + \frac{ظاس}{س}}$

$= \frac{١ - ٣ \times ١}{٣ + ١} = \frac{-٢}{٤}$

(٢) $\lim_{س \to 0} \frac{٤س^{٢} + ظا٣س}{٧س - ظا٤س}$

بقسمة البسط والمقام على س

$= \lim_{س \to 0} \frac{٤س + \frac{ظا٣س}{س}}{٧ - \frac{ظا٤س}{س}}$

$= \frac{٠ + ٣}{٧ - ٤} = ١$

(٣) $\lim_{س \to 0} \frac{٤س^{٢} + ظا^{٢}٣س}{س^{٢} + ظا^{٢}س}$

بقسمة البسط والمقام على $س^{٢}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{٤ + \frac{ظا^{٢}٣س}{س^{٢}}}{١ + \frac{ظا^{٢}س}{س^{٢}}}$

$= \frac{٤ + ٩}{١ + ٥} = \frac{١٣}{٦}$

(٤) $\lim_{س \to 0} \frac{١ - جتاس}{ظاس}$

بقسمة البسط والمقام على س

$= \lim_{س \to 0} \frac{\frac{١ - جتاس}{س}}{\frac{ظاس}{س}} = \frac{صفر}{١} = صفر$

(٥) $\lim_{س \to ٢} \frac{ظا(س-٢)}{س^{٢} - ٦س + ٨}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{ظا(س-٢)}{(س-٢)(س-٤)}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{ظا(س-٢)}{(س-٢)} \times \lim_{س \to ٢} \frac{١}{س - ٤}$

$= ١ \times \frac{١}{-٢} = -\frac{١}{٢}$

(٦) $\lim_{س \to ٢} \frac{ظا(س-٢)}{س^{٢} - ٤}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{ظا(س-٢)}{(س-٢)(س+٢)}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{ظا(س-٢)}{(س-٢)} \times \lim_{س \to ٢} \frac{١}{س + ٢}$

$= ١ \times \frac{١}{٤} = \frac{١}{٤}$

تذكر أن :

(١) $ظا(\pi - س) = ظاس$

(٢) $ظا(\pi + س) = ظاس$

(٣) $ظا(\frac{\pi}{٢} - س) = جتاس$

(٤) $ظا(\frac{\pi}{٢} + س) = -جتاس$

(٥) $١ - جتا^{٢}س = جا^{٢}س$

Mozkrty.com

٧) نهـا $\frac{\text{حا س}}{\pi - س}$ ، $س \to \pi$

للعلم أن: حا(π − س) = حا س

∴ نهـا $\frac{\text{حا}(\pi - س)}{(\pi - س)-}$ ، $س \to \pi$ = −١

٨) نهـا $\frac{\text{حتا س}}{\pi - 2س}$ ، $س \to \frac{\pi}{2}$

إفتكر معايا: حا$(\frac{\pi}{2} - س)$ = حتا س

∴ نهـا $\frac{\text{حا}(\frac{\pi}{2} - س)}{2(\frac{\pi}{2} - س)-}$ ، $س \to \frac{\pi}{2}$ = $\frac{1}{2}$

٩) نهـا $\frac{\text{ظتا س}}{\frac{\pi}{2} - س}$ ، $س \to \frac{\pi}{2}$

إفتكر معايا: ظا$(\frac{\pi}{2} - س)$ = ظتا س

∴ نهـا $\frac{\text{ظا}(\frac{\pi}{2} - س)}{(\frac{\pi}{2} - س)-}$ ، $س \to \frac{\pi}{2}$ = −١

١٠) نهـا $\frac{١ - \text{حتا}2س}{س^2}$ ، $س \to 0$

إفتكر معايا: ١ − حتا٢س = حا٢س

∴ نهـا $\frac{\text{حا}^2 2س}{س^2}$ ، $س \to 0$ = ٩

تدريب ٢ إختر الإجابة الصحيحة

١) نهـا $[\frac{\text{حا}^2 س}{س^3} + \frac{س \text{ حا س}^2}{\text{حا س}^3}]$ ، $س \to 0$ = ...

(أ) $\frac{5}{3}$ (ب) $\frac{2}{3}$

(ج) ١ (د) $\frac{4}{3}$

٢) نهـا $\frac{4 - \text{حا}3س}{\text{ظا س} - 2\text{حتا س}}$ ، $س \to 0$ = ...

(أ) ٢ (ب) −٢

(ج) ١ (د) −١

٣) إذا كانت نهـا $\frac{(ب+3)س}{\text{حا}ب س}$ ، $س \to 0$ = $\frac{2}{5}$

فإن: ب = ...

(أ) −٥ (ب) −٣

(ج) −١ (د) ٣

٤) نهـا $\frac{\text{حا س} - \text{حا س حتا س}}{س^2}$ ، $س \to 0$ = ...

(أ) صفر (ب) ١

(ج) ٢ (د) ٣

٥) إذا كانت نهـا $\frac{\text{حا}^2 أس - \text{ظا}^2 ب س}{س^2}$ ، $س \to 0$ = ١

فإن: أ ب = ...

(أ) −١ (ب) ٢

(ج) ١ (د) ٤

بحث وجود نهاية للدالة عند نقطة

الدالة د(س) تؤول إلى النهاية ل عندما س → م ، إذا وفقط إذا كانت نهايتها اليمنى واليسرى عند م موجودتين وكل منهما تساوى ل أى أن:

(١) النهاية اليمنى موجودة $د(م)^{+} = ل$

(٢) النهاية اليسرى موجودة $د(م)^{-} = ل$

(٣) النهاية اليمنى = النهاية اليسرى $د(م^{+}) = د(م)^{-} = ل$

تدريب ١ إبحث وجود نهاية لكل مما يأتى:

(١) $د(س) = \begin{cases} ٢س & ، س < ٢ \\ س^{٢} & ، س \geq ٢ \end{cases}$ عند س = ٢

$د(٢)^{+} = \lim_{س \to ٢^{+}} ٢س = ٤$

$د(٢)^{-} = \lim_{س \to ٢^{-}} س^{٢} = ٤$

$\therefore د(٢)^{+} = د(٢)^{-}$ $\therefore \lim_{س \to ٢} د(س) = ٤$

(٢) $د(س) = \begin{cases} س^{٢}+١ & ، س < ٣ \\ ٣س+١ & ، س \geq ٣ \end{cases}$ عند س = ٣

$د(٣)^{+} = \lim_{س \to ٣^{+}} ٣س+١ = ٩+١ = ١٠$

$د(٣)^{-} = \lim_{س \to ٣^{-}} س^{٢}+١ = ٩+١ = ١٠$

$\therefore \lim_{س \to ٣} د(س) = ١٠$

(٣) $د(س) = \begin{cases} \frac{٣س + ط س}{٥س - ط س} & ، س > ٠ \\ ظتا س & ، س < ٠ \end{cases}$ عند س = ٠

$د(٠)^{+} = \lim_{س \to ٠^{+}} \frac{٣س + ط س}{٥س - ط س}$ بقسمة البسط والمقام على س

$= \frac{٣ + ط}{٥ - ط} = \frac{١+٣}{١-٥} = -١$

$د(٠)^{-} = \lim_{س \to ٠^{-}} ظتا س = ظتا ٠ = ١$

$\therefore \lim_{س \to ٠} د(س) = -١$

---

(٤) إذا كانت: د(س) = { ٣س + ٢ ، س < ١ ؛ ٢س + ٣ ، س ≥ ١ }

أوجد قيمة ؟ التى تجعل د(س) لها وجود

س	٢ + ٣س	٣ - ٢س
١		

∴ الدالة لها نهاية عند س = ١

∴ د(١)⁺ = د(١)⁻

∴ ؟ + ٣ = ٣ - ٢

∴ ؟ = -٢

(٥) إذا كانت د(س) = { ٣س + ٢ ، س < ؟ ؛ ؟س + ؟ ، س ≥ ؟ }

أوجد قيمة ؟ التى تجعل:

نهـا د(س) = ٧
س→٢

س	٣س + ٢	؟س + ؟
٢		

∴ د(٢)⁺ = ٧

∴ ٣ + ٢ = ٧

∴ ؟ = ١

∴ د(٢)⁻ = ٧

∴ ٢؟ + ؟ = ٧

∴ ؟ = ١

تدريب (٤) اختر الإجابة الصحيحة:

(١) إذا كانت د(س) = { ٣س - ١ ، س < ٢ ؛ ؟ ، س = ٢ ؛ ٦ ، س > ٢ }

فإن: نهـا د(س) =
س→٢

(أ) ٥ (ب) ٥ (ج) ٦ (د) ليس لها وجود

(٢) إذا كانت د(س) = { ظتاس / (س - π/٢) ، س < π/٢ ؛ جتا(π - س) ، س ≥ π/٢ }

فإن: نهـا د(س) =
س→π/٢

(أ) ١ (ب) ؟ (ج) π (د) غير موجودة

(٣) إذا كانت د(س) = { جاس / س ، س < ٠ ؛ ؟ ظاس ، س ≥ ٠ }

حيث نهـا د(س) = ٢ فإن ؟ = ...
س→٠

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) صفر (د) -٢

المعالي دايما فى العلالى ٠١٢٢٨٤٨٥٦٧ ٠١١١٩٥١٨٠٠

مدكار Modkar.com

الإتصال

تكون الدالة د(س) متصلة عند س = ع إذا تحققت الشروط الآتية معاً :-

1. د(س) معرفة عند س = ع ⟵ د(ع) لها وجود
2. د(س) لها نهاية عند س = ع ⟵ $\lim_{س \to ع}$ د(س) لها وجود
3. $\lim_{س \to ع}$ د(س) = د(ع) ⟵ ناتج التعريف = ناتج النهاية

تدريب (1) إبحث اتصال الدوال التالية عند النقطة المعرفة عندها الدالة

1) د(س) = { س² + 2 ; س ≤ 1 ، عند س = 1 ؛ س + 2 ; س > 1 }

س	س² + 2	س + 2
1	3	3

(i) د(1) = 3

(ii) $\lim_{س \to 1^+}$ د(س) = $\lim_{س \to 1}$ س² + 2 = 3

(iii) $\lim_{س \to 1^-}$ د(س) = $\lim_{س \to 1}$ س + 2 = 3

∴ الدالة متصلة عند س = 1

2) د(س) = { 5 − 2س ; س < −1 ، عند س = −1 ؛ 3س + 7 ; س ≥ −1 }

(i) د(−1) =

(ii) $\lim_{س \to -1^+}$ د(س) =

(iii) $\lim_{س \to -1^-}$ د(س) =

3) د(س) = { $\frac{\sqrt{س+1}-2}{س-3}$; س ≠ 3 ، $\frac{1}{4}$; س = 3 } ، عند س = 3

س	$\sqrt{س+1}-2$	$\sqrt{س+1}+2$	س − 3
3	0	4	0

لاحظ : س ≠ 3 مضاعفا المقاعدة ليمين = المقاعدة ليسار

(i) د(3) = $\frac{1}{4}$

(ii) $\lim_{س \to 3^+}$ د(س) = $\lim_{س \to 3}$ $\frac{\sqrt{س+1}-2}{س-3} \times \frac{\sqrt{س+1}+2}{\sqrt{س+1}+2}$

= $\lim_{س \to 3}$ $\frac{س+1-4}{(س-3)(\sqrt{س+1}+2)}$

= $\frac{1}{4}$

∴ د(3) = $\lim_{س \to 3}$ د(س)

∴ الدالة متصلة عند س = 3

٤ $د(س) = \begin{cases} 1 + ظاس & : س \neq \frac{\pi}{٤} \\ ٤(\frac{\pi}{٤} - س)^{٢} + ج & : س = \frac{\pi}{٤} \end{cases}$ عند $س = \frac{\pi}{٤}$

(i) $د(\frac{\pi}{٤}) =$

(ii) $د(\frac{\pi}{٤})^{+} =$

(iii) $د(\frac{\pi}{٤})^{-} =$

∴

تدريب ٢ إذا كانت $د(س) = \begin{cases} ٩س^{٤} + ١ & : س \leq ١ \\ ٤س + ١ & : س > ١ \end{cases}$

هتصلة عند $س = ١$ أوجد قيمة ٩

$\frac{٩س^{٤} + ١ \;|\; ٤س + ١}{٢}$

∴ الدالة متصلة عند $س = ١$

∴ $د(١)^{+} = د(١)^{-}$

∴ $٤٩ + ١ = ٤ + ١$

∴ $٩ = ١$

تدريب ٣ إذا كانت $د(س) = \begin{cases} \frac{حا(س-٣)}{س^{٢} - ٩} & : س \neq ٣ \\ ل & : س = ٣ \end{cases}$ متصلة عند $س = ٣$ أوجد قيمة $ل$

∴ الدالة متصلة عند $س = ٣$

∴ $د(٣) = \lim_{س \to ٣} د(س)$

∴ $ل = \lim_{س \to ٣} \frac{حا(س-٣)}{(س-٣)(س+٣)}$

∴ $ل = \frac{١}{٦}$

تدريب ٤ إذا كانت $د(س) = \begin{cases} \frac{س + ٥ظاس}{حاس} & : س < ٠ \\ ٦ & : س = ٠ \\ ٦حتاس & : س > ٠ \end{cases}$ أعد تعريف الدالة بحيث تكون متصلة عند $س =$

∴ $د(٠)^{+} = \lim_{س \to ٠} \frac{س + ٥ظاس}{حاس}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{١ + ٥\frac{ظاس}{س}}{\frac{حاس}{س}} = ٦$

$د(٠)^{-} = \lim_{س \to ٠} ٦حتاس = ٦حتا٠ = ٦$

∴ $د(س) = \begin{cases} \frac{س + ٥ظاس}{حاس} & : س < ٠ \\ ٦ & : س = ٠ \\ ٦حتاس & : س > ٠ \end{cases}$

إتصال دالة على فترة

إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة المفتوحة ف =]أ، ب[فإن د تكون متصلة على ف إذا كانت متصلة عند كل نقطة تنتمي للفترة

ملاحظات

١) جميع الدوال كثيرة الحدود متصلة على ح أو فترة جزئية من ح

٢) الدوال النسبية متصلة على ح - {أصفار المقام} أو فترة جزئية منها

٣) دالة الجيب د(س) = جا س ودالة جيب التمام د(س) = جتا س متصلة على ح أو فترة جزئية منها

تدريب ٥ اختر الاجابة الصحيحة:

١) إذا كانت د دالة حيث:

د(س) = { ٢س - ٣ حيث س ≤ ١ ; ٣س - م حيث س > ١ }

متصلة عند س = ١ فإن: م =

أ) -١ ب) -٢ ج) ٢ د) ١

٢) إذا كانت د(س) = { ك س + ٢ عندما س ≤ ٢ ; ٣س + ك عندما س > ٢ }

متصلة عند س = ٢ فإن: ك =

أ) ٦ ب) ٤ ج) ٥ د) ٣

٣) إذا كانت د(س) = { (س - ٣س + ٢) / (س - ١) عندما س ≠ ١ ; م عندما س = ١ }

متصلة عند س = ١ فإن م =

أ) ٣ ب) ٢ ج) ١/٤ د) ٤

٤) الدالة د : د(س) = س / (س^٢ + ١)

متصلة على

أ) ح - {٠} ب) ح - {١، -١} ج) ح د) ح - {١}

اللهم إن كان من توفيق فمن الله وإن كان من خطأ أو نسيان فمني والشيطان

المعالي دايما في العلالي
٠١٢٢٨٤٨٥٦٧
٠١١١٩٥١٨٠٠
Mokrty.com

٣) $س^{\frac{4}{3}} - ١٠ س^{\frac{2}{3}} + ٩ = ٠$

الحل

$(س^{\frac{2}{3}} - ٩)(س^{\frac{2}{3}} - ١) = ٠$

$س^{\frac{2}{3}} = ٩ \Leftarrow س = \pm (٩)^{\frac{3}{2}} \Leftarrow س = \pm ٢٧$

$س^{\frac{2}{3}} = ١ \Leftarrow س = \pm (١)^{\frac{3}{2}} \Leftarrow س = \pm ١$

$\therefore$ ح.ص $= \{\pm ٢٧ ، \pm ١\}$

٤) $\sqrt[٣]{س^{٥}} - \sqrt[٣]{س^{٢}} = ٦$

الحل

$س^{\frac{5}{3}} - س^{\frac{2}{3}} - ٦ = ٠$

$(س^{\frac{2}{3}} - ٣)(س^{\frac{2}{3}} + ٢) = ٠$

$س^{\frac{2}{3}} = ٢ \Leftarrow س = ٣^{\frac{3}{2}} \Leftarrow س = \sqrt{٢٧}$

$س^{\frac{2}{3}} = -٢$ مرفوض

$\therefore$ ح.ص $= \{\sqrt{٢٧}\}$

السؤال الخامس: اختر الإجابة الصحيحة

١) إذا كان: $س^{\frac{2}{3}} = ٦٤$ فإن $س =$ ...

أ) ٤ ، ب) ١٦ ، ج) ٨ ، د) ٣٢

٢) مجموعة حل المعادلة $(س - ٣)^{٣} = ٢٧$ في ح هي ...

أ) $\{٣\}$ ، ب) $\{-١١ ، ١١\}$ ، ج) $\{١١\}$ ، د) $\{٢\}$

٣) مجموعة حل المعادلة: $\sqrt{س^{٣}} = ٨$ في ح هي ...

أ) $\{٤\}$ ، ب) $\{٤\}$ ، ج) $\{١٦\}$ ، د) $\{٦٤\}$

٤) مجموعة حل المعادلة: $س^{\frac{2}{3}} = ٢٥$ في ح هي ...

أ) $\{٥\}$ ، ب) $\{١٢٥\}$ ، ج) $\{٥ ، -٥\}$ ، د) $\{١٢٥ ، -١٢٥\}$

٥) مجموعة حل المعادلة $\sqrt[٣]{(س - ١)^{٥}} = ٢٢$ في ح هي ...

أ) $\{٣\}$ ، ب) $\{-٣\}$ ، ج) $\{-٩\}$ ، د) $\{٩\}$

٦) مجموعة حل المعادلة:

$س + ١٥ = ٨ \sqrt{س}$ في ح هي ...

أ) $\{٩ ، ٢٥\}$ ، ب) $\{-٩ ، ٢٥\}$ ، ج) $\{٩ ، -٢٥\}$ ، د) $\{-٩ ، -٢٥\}$

٧) مجموعة حل المعادلة

$س - ٣ س^{\frac{1}{2}} + ٢ = ٠$ في ح هي ...

أ) $\{-١ ، -٤\}$ ، ب) $\{-١ ، ٤\}$ ، ج) $\{١ ، -٤\}$ ، د) $\{١ ، ٤\}$

(٣) إذا كان $أ^{ن} = أ^{م}$ فإن: $ن = م$ حيث $م$ كمية ∈ صـ ، $أ$ ∈ ح - {-١، ٠، ١}

إذا كان $أ^{ن} = ب^{ن}$ وكان:

(١) ن عدداً فردياً فإن: $أ = ب$

(٢) ن عدداً زوجياً فإن: $أ = \pm ب$

(٣) $أ \neq ب$ فإن: ن = صفر

تدريب ١ أوجد مجموعة الحل في ح

(١) $٥^{٤س-١} = \frac{١}{١٢٥}$

$٥^{٤س-١} = ٥^{-٣}$

$٤س - ١ = -٣$

$٤س = -٢ \Leftarrow س = -١$

$\therefore$ ح.م = {-١}

(٢) $(\frac{٣}{٥})^{٤س-١} = \frac{٢٧}{١٢٥}$

$(\frac{٣}{٥})^{٤س-١} = (\frac{٣}{٥})^{٣}$

$٤س - ١ = ٣$

$٤س = ٤ \Leftarrow س = ١ \Leftarrow$ ح.م = {١}

(٣) $(\sqrt{٣})^{س^{٢}-٥س} = ١$

$(\sqrt{٣})^{س^{٢}-٥س} = (\sqrt{٣})^{٠}$

$س^{٢} - ٥س = ٠$

$س(س - ٥) = ٠$

ح.م = {٠، ٥}

(٤) $٣س^{٢-٤س} = (\frac{١}{٣})س$

$٣س^{٢-٤س} = ٣^{-س}$

$س^{٢} - ٤س = -س$

$س^{٢} - ٣س = ٠$

$س(س - ٣) = ٠$

ح.م = {٠، ٣}

(٥) $٤ \times ٢^{س+٢} = \frac{١}{٣٢}$

$٢^{س+٢} \div ٤ = \frac{١}{٣٢}$

$٢^{س+٢} = \frac{١}{١٢٨}$

$س + ٢ = -٧$

$س = -٩$

ح.م = {-٩}

الدالة الأسية

تعريف إذا كان : $أ \in ع^+ - \{1\}$

فإن : الدالة $د : ع \longrightarrow ع^+$ حيث $د(س) = أ^{س}$ تسمى دالة أسية

التمثيل البياني للدالة الأسية

خواص الدالة الأسية د : د(س) = $أ^{س}$

١) المجال : ع ٢) المدى : $ع^+$ ويقع منحناها فوق محور السينات

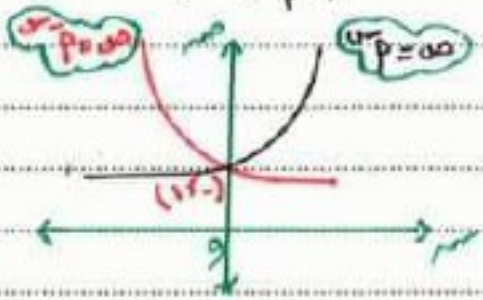
٣) الدالة تزايدية على مجالها إذا كان أ > ١ وتسمى دالة نمو أسي معامله أ

٤) الدالة تناقصية على مجالها إذا كان ٠ < أ < ١ وتسمى دالة تضاؤل أسي معامله أ

٥) منحنى الدالة الأسية يمر بالنقطة (٠،١)

٦) الدالة د(س) = $أ^{س}$ هي دالة أحادية

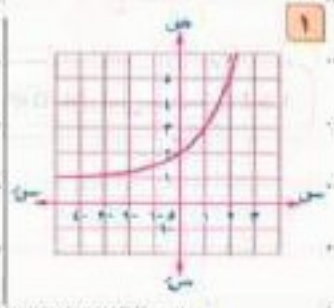
٧) منحنى الدالة : د(س) = $أ^{س}$ صورته منحنى الدالة د(س) = $(\frac{1}{أ})^{س}$ بالانعكاس على محور الصادات



تدريب ١ إرسم منحنى الدوال التالية:

١) $د(س) = ٢^{س} + ١$

الحل



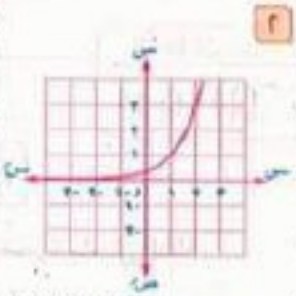
المجال : $ح$

المدى : $]١ ، \infty[$

الاطراد: تزايدية على مجالها

٢) $د(س) = ٣^{س-١}$

الحل



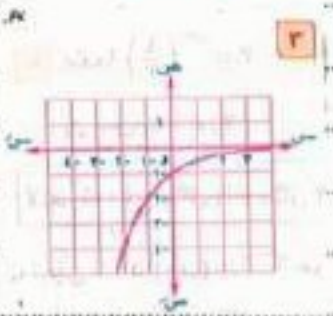
المجال : $ح$

المدى : $]٠ ، \infty[$

الاطراد : تزايدية على مجالها

٣) $د(س) = -(\frac{١}{٢})^{س}$

الحل



المجال : $ح$

المدى : $]-\infty ، ٠[$

الاطراد: تزايدية على مجالها

تدريب ٢ إذا كانت $د(س) = ٣^{س}$ أوجد قيمة س التي تحقق:

$د(س+١) + د(س-١) = ٩٠$

الحل

$٣^{س+١} + ٣^{س-١} = ٩٠$

$٣ \times ٣^{س} + \frac{١}{٣} \times ٣^{س} = ٩٠$

$٣^{س}(٣ + \frac{١}{٣}) = ٩٠$

$\frac{١٠}{٣} \times ٣^{س} = ٩٠$

$\therefore ٣^{س} = ٢٧$

$٣^{س} = ٣^{٣}$

$\therefore س = ٣$

تدريب ٣ إذا كانت $د(س) = ٥^{س}$ أوجد قيمة س التي تحقق:

$د(٤س) + ٢٥ = ٢٦ د(س)$

الحل

$٥^{٤س} + ٢٥ = ٢٦ \times ٥^{س}$

$٥^{٤س} - ٢٦ \times ٥^{س} + ٢٥ = ٠$

$(٥^{س} - ٢٥)(٥^{س} - ١) = ٠$

$٥^{س} = ٥^{٢} \Leftarrow س = ٢$

$٥^{س} = ٥^{٠} \Leftarrow س = ٠$

مذكرتي Mozkrty.com

تدريب ٤ اختر الاجابة الصحيحة

١) إذا كانت د(س) = $٢^{س}$ فإن: د(-س) =

أ) $-٢^{س}$ ب) $(\frac{١}{٢})^{س}$ ج) $٢^{س+١}$ د) $(\frac{١}{٢})^{-س}$

٢) إذا كانت د(س) = $٣^{س}$ فإن: د(أ) × د(ب) =

أ) د(أ+ب) ب) أ ب ج) د(أ ب) د) أ+ب

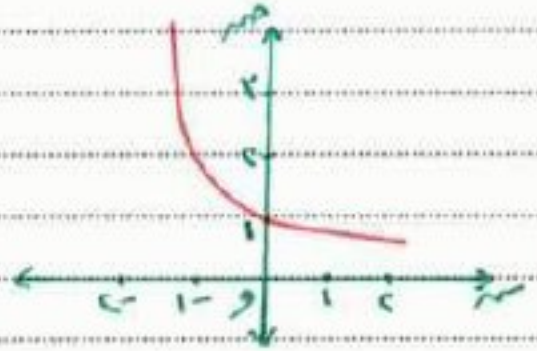
٣) إذا كان: د(س+١) = $٢^{س}$ وكان: د(أ) = ٨ فإن أ =

أ) ٣ ب) ٢ ج) ٤ د) ٥

٤) منحنى الدالة د(س) = $٣^{-س}$ + ٤ يقطع محور الصادات في النقطة

أ) (٥، ٠) ب) (-٥، ٠) ج) (٦، ٠) د) (٠، ٦)

٥) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د حيث



أ) د(س) = $٢^{س+١}$

ب) د(س) = $٢^{-س}$

ج) د(س) = $٢^{س}$

د) د(س) = $٢^{س-١}$

٦) الدالة الأسية د حيث د(س) = $أ^{س}$ ، ٠ < أ < ١ يقترب فيها المنحنى من

أ) محور السينات (الاتجاه الموجب)

ب) محور السينات (الاتجاه السالب)

ج) محور الصادات (الاتجاه الموجب)

د) محور الصادات (الاتجاه السالب)

الدالة العكسية

إذا كانت د دالة أحادية مجالها س ومداها ص فإنه لكل عنصر من ص يناظره عنصر ومبر من س في المجال ولذلك يمكن تعيين دالة عكسية من ص إلى س ويرمز لها بالرمز $د^{-1}$

* لكل $(أ، ب) \in د$ بيان د
فإنه $(ب، أ) \in د^{-1}$ بيان $د^{-1}$

خواص الدالة العكسية

(١) الدالة د والدالة العكسية $د^{-1}$ متماثلة بالنسبة للمستقيم ص = س

(٢) مجال الدالة د = مدى الدالة العكسية $د^{-1}$

(٣) مدى الدالة د = مجال الدالة العكسية $د^{-1}$

(٤) يقال إن د ، ر كل منهما دالة عكسية للأخرى إذا كان
$(د \circ ر)(س) = س$ ، $(ر \circ د)(س) = س$

تدريب ١ إذا كانت د دالة بيانها ص : $د = \{(١، ٤)، (٢، ٥)، (٤، ٣)، (٦، ٣)، (٨، ٤)\}$
أوجد بيان الدالة العكسية للدالة د

الحل

بيان $د^{-1} = \{(٤، ١)، (٥، ٢)، (٣، ٤)، (٣، ٦)، (٤، ٨)\}$

تدريب ٢ أوجد الدالة العكسية للدالة د حيث $د(س) = ٣س - ٢$

الحل

$ص = ٣س - ٢$ يتبدل ص بدلالة س

$س = ٣ص - ٢$

$٣ص = س + ٢ \Leftarrow ص = \frac{١}{٣}(س + ٢) \Leftarrow د^{-١}(س) = \frac{١}{٣}(س + ٢)$

تدريب ٣ إذا كانت د حيث د(س) = $\frac{1}{س-٢}$ + ٣ أوجد :

١) مجال ومدى د ٢) $د^{-١}(س)$ وتبين مجال ومدى $د^{-١}$

الحل

١) مجال د = ح - {٢} مدى د = ح - {٣}

٢) $ص = \frac{1}{س-٢} + ٣$ ⟸ $س = \frac{1}{ص-٢} + ٣$

$\therefore ص - ٢ = \frac{1}{س-٣}$ ⟸ $د^{-١}(س) = \frac{1}{س-٣} + ٢$

مجال $د^{-١}(س)$ = ح - {٣} مدى $د^{-١}(س)$ = ح - {٢}

تدريب ٤ إذا كانت د دالة حيث د(س) = ٢ + $\sqrt{س-٣}$ أوجد :

١) مجال ومدى د ٢) $د^{-١}(س)$ وتبين مجالها ومداها

الحل

١) $\because س - ٣ \geq ٠ \Leftarrow س \geq ٣$

∴ مجال د = $[٣ ، \infty[$

لإيجاد المدى : $\sqrt{س-٣} \geq ٠$ بإضافة ٢

$\therefore ٢ + \sqrt{س-٣} \geq ٢$

∴ د(س) ≥ ٢

∴ المدى : $[٢ ، \infty[$

٢) $ص = ٢ + \sqrt{س-٣}$ بالتبديل

$س = ٢ + \sqrt{ص-٣}$

$س - ٢ = \sqrt{ص-٣}$ بالتربيع

$(س-٢)^{٢} = ص - ٣$

$\therefore ص = (س-٢)^{٢} + ٣$

$\therefore د^{-١}(س) = (س-٢)^{٢} + ٣$

مجال $د^{-١}(س)$ = مدى د = $[٢ ، \infty[$

مدى $د^{-١}(س)$ = مجال د = $[٣ ، \infty[$

تدريب ٥ إختر الاجابة الصحيحة :-

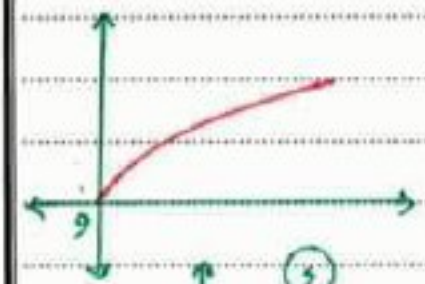
(١) إذا كانت د دالة حيث د(س) = ٧ س فإن : د'(س) =

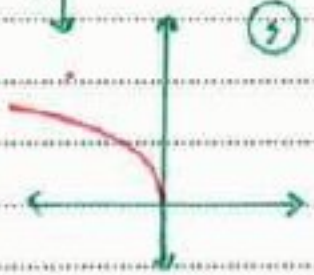
(أ) ٧ س (ب) س/٧ (ج) ٧/س (د) ٧ - س

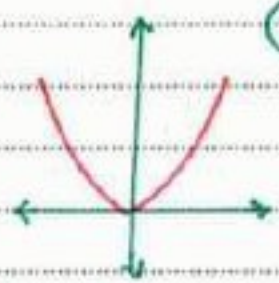
(٢) إذا كان التمثيل البياني للدالة د هو

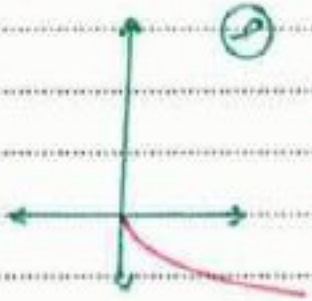
حيث د(س) = √س ، س ≥ ٠ ،

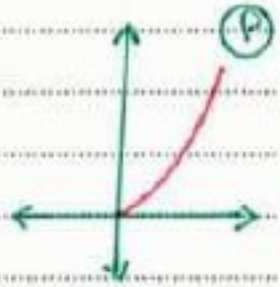
فإن الشكل البياني للدالة د' هو الشكل ..



(أ) 

(ب) 

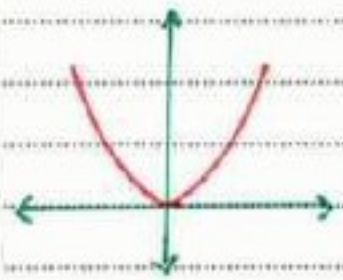
(ج) 

(د) 

(٣) الشكل المقابل يبين التمثيل البياني للدالة د

حيث د(س) = س٢ ، س ∈ ح

فإن : د'(س) =



(أ) = √س (ب) = -√س

(ج) = ±√س (د) غير موجودة

(٤) إذا كانت : د(س) = ٣ س٢ - ١ فإن : د'(٠) =

(أ) ١ (ب) -١ (ج) ٢ (د) ٥

دايما في العلالي
٠١٢٢٨٤٨٥٦٧
٠١١١٩٥١٨٠٠
Mozkrty.com

الدالة اللوغاريتمية

ص = لو$_{ب}$ س ⇔ س = ب^{ص} حيث ب ∈ ح$^{+}$ − {١} ، س ∈ ح$^{+}$ ، ص ∈ ح

تدريب ١

عبر عما يأتي بصورة لوغاريتمية	عبر عما يأتي بصورة أسية
١) ٢^{٦} = ٦٤ ← لو$_{٢}$ ٦٤ = ٦	١) لو$_{٧}$ ٤٩ = ٢ ← ٧^{٢} = ٤٩
٢) ٥$^{-٣}$ = $\frac{١}{١٢٥}$ ← لو$_{٥}$ $\frac{١}{١٢٥}$ = −٣	٢) لو$_{٣}$ $\frac{١}{٢٧}$ = −٣ ← ٣$^{-٣}$ = $\frac{١}{٢٧}$
٣) ٧^{صفر} = ١ ← لو$_{٧}$ ١ = صفر	٣) لو$_{ب}$ م = ن ← ب^{ن} = م

لو (العدد) = الأس ← ح$^{+}$

العدد ← ح$^{+}$

الأساس ← ح$^{+}$ − {١}

الدالة اللوغاريتمية

إذا كان: ب ∈ ح$^{+}$ − {١} فإن: الدالة د : ح$^{+}$ ← ح حيث د(س) = لو$_{ب}$ س تسمى دالة لوغاريتمية

خواص الدالة اللوغاريتمية د : د(س) = لو$_{ب}$ س

١) مجال الدالة اللوغاريتمية = ح$^{+}$

٢) مدى الدالة اللوغاريتمية = ح

٣) إذا كانت ب > ١ تكون تزايدية وإذا كانت ٠ < ب < ١ تكون تناقصية

٤) جميع مقتضيات الدوال اللوغاريتمية لأي أساس موجب ≠ اتمر النقطة (١،٠)

٥) الدوال اللوغاريتمية هي دالة أحادية أي إذا كان: لو$_{ب}$ س = لو$_{ب}$ ص فإن س = ص

٦ الدالة اللوغاريتمية هي الدالة العكسية للدالة الأسية

* لإيجاد مجال الدالة اللوغاريتمية

١) نضع العدد > ٠ ٢) نضع الأساس > ٠ ٣) نضع الأساس ≠ ١

تدريب ٢ عين مجال الدوال التالية :-

١) د(س) = لو٤ (س-٣) ٢) د(س) = لو٤ (٤-س)

٣) د(س) = لو٧ / (س-١) ٤) د(س) = لو(س-٣) / س

الحل

١) بوضع س-٣ > ٠
س > ٣
∴ المجال =]٣، ∞[

٢) بوضع ٤-س > ٠
٤ > س
∴ المجال]-∞، ٤[

٣) س-١ > ٠ ⇐ س > ١
س-١ ≠ ١ ⇐ س ≠ ٢
∴ المجال :]١، ∞[- {٢}

٤) س > ٠ ⇐]٠، ∞[
س-٣ > ٠ ⇐]٣، ∞[
س-٣ ≠ ١ ⇐ س ≠ ٤
∴ المجال =]٣، ∞[- {٤}

الرياضيات : فهم .. إبتكار .. تطبيق

خواص اللوغاريتمات

إذا كانت $ب \in ح^+ - \{1\}$ ، $س ، ص \in ح^+$

١) $\log_ب (س ص) = \log_ب س + \log_ب ص$

٢) $\log_ب \frac{س}{ص} = \log_ب س - \log_ب ص$

٣) $\log_ب س^ن = ن \log_ب س$

٤) $\log_ب ب = ١$

٥) $\log_ص س = \frac{\log_ب س}{\log_ب ص}$

٦) $\log_ص س = \frac{١}{\log_س ص}$

٧) إذا كان $\log_ب س = \log_ب ص$ فإن $س = ص$

٨) $\log_ب ١ =$ صفر

ملاحظة اللوغاريتم المعتاد هو لوغاريتم أساسة ١٠ ويكتب (Log) الآلة

تدريب ٣ برهن باستخدام الحاسبة أو جد قيمة :-

١) $\log_٢ ١٥ + \log_٢ ١٤ - \log_٢ ١٠$

المقدار $= \log_٢ \frac{١٤ \times ١٥}{١٠} = \log_٢ ٢ = ١$

٢) $\log ٩٠٠ - \log \frac{٢٧}{١٦} + \log \frac{١٢٥}{٨} - \log \frac{١}{١٢}$

المقدار $= \log ٩٠٠ - \log \frac{٢٧}{١٦} + \log \frac{١٢٥}{٨} - \log \frac{١}{١٢}$

$= \log \frac{٩٠٠ \times ١٦ \times ١٢٥ \times ١٢}{٢٧ \times ٨ \times ١}$

$= \log ١$

$\therefore =$ صفر

٣) $\frac{١}{\log_{١٢} ٢} + \frac{١}{\log_{١٢} ٨} + \frac{١}{\log_{١٢} ٩}$

المقدار $= \log_{١٢} ٢ + \log_{١٢} ٨ + \log_{١٢} ٩$

$= \log_{١٢} ٢ \times ٨ \times ٩ = \log_{١٢} ١٤٤ = ٢$

٤) $\log_{ب ص} أ + \log_{ب ص} ب + \log_{ب ص} ص$

المقدار $= \log_{ب ص} أ ب ص$

$= ١$

حل المعادلة اللوغاريتمية

تدريب أوجد مجموعة الحل في ح

(١) $\log_{٢} س = ٧$

$س = ٢^{٧} = ١٢٨$

$\therefore$ ح.م = {١٢٨}

(٢) $\log_{٣}(٢س - ٥) = ٠$

$٢س - ٥ = ٣^{٠}$

$٢س = ٦ \Leftarrow س = ٣$

ح.م = {٣}

(٣) $\log_{س}(٢س + ٨) = ٢$

$س^{٢} = ٢س + ٨$

$س^{٢} - ٢س - ٨ = ٠$

$س = ٤$ ، $س = -٢$ مرفوض

$\therefore$ ح.م = {٤}

(٤) $\log_{٢}(\log_{٢} س) = ١$

$\log_{٢} س = ٢^{١} = ٢$

$س = ٢^{٢} = ٩$

ح.م = {٩}

(٥) $\log_{س-١} ٢٧ = ٣$

$(س - ١)^{٣} = ٢٧$

$س - ١ = ٣ \Leftarrow س = ٤$

$\therefore$ ح.م = {٤}

(٦) $\log_{٢} س + \log_{٢}(س + ٢) = ٣$

$\log_{٢} س(س + ٢) = ٣$

$س^{٢} + ٢س = ٢^{٣}$

$س^{٢} + ٢س - ٨ = ٠$

$س = ٢$ ، $س = -٤$ مرفوض

ح.م = {٢}

(٧) $\log_{٣}(س - ١) + \log_{٣}(س + ١) = \log_{٣} ٨$

$\log_{٣}(س - ١)(س + ١) = \log_{٣} ٨$

$س^{٢} - ١ = ٨$

$س^{٢} = ٩ \Leftarrow س = ٣$ ، $س = -٣$ مرفوض

ح.م = {٣}

(٨) $(\log س)^{٢} - \log س^{٢} = ٣$

$(\log س)^{٢} - ٢\log س - ٣ = ٠$ مقدار مراوغ

$(\log س - ٣)(\log س + ١) = ٠$

$\log س = ٣$ ، $\log س = -١$

$س = ١٠^{٣}$ ، $س = ١٠^{-١}$

$ح = \{١٠٠٠ ، \frac{١}{١٠}\}$

(٩) $\log_{٣} س + \log_{س} ٣ = ؟$

$\therefore \log_{٣} س + \frac{١}{\log_{٣} س} = ؟ \times \log_{٣} س$

$(\log_{٣} س)^{٢} + ١ = ؟ \log_{٣} س$

$(\log_{٣} س)^{٢} - ؟ \log_{٣} س + ١ = ٠$

$(\log_{٣} س - ١)^{٢} = ٠$

$\log_{٣} س = ١ \Leftarrow س = ٣^{١} = ٣$

(١٠) $\log_{٤} س = ١ - \log_{٤} (س - ٣)$

$\log_{٤} س + \log_{٤} (س - ٣) = ١$

$\log_{٤} س (س - ٣) = ١$

$س^{٢} - ٣س = ٤$

$س^{٢} - ٣س - ٤ = ٠$

$س = ٤$ ، $س = -١$ مرفوض

$ح = \{٤\}$

(٥) تدرب: إذا كان: $؟^{س+١} = ٥$ أوجد قيمة $س$ لأقرب رقمين عشريين

بأخذ لو اللطرفين

$\log ؟^{س+١} = \log ٥$

$(س+١)\log ؟ = \log ٥$

$س \log ؟ + \log ؟ = \log ٥$

$س \log ؟ = \log ٥ - \log ؟$

$س = \frac{\log ٥ - \log ؟}{\log ؟} \approx ١٫٣٢$

(٦) تدرب: إذا كان: $٧^{س+١} = ٣^{س-؟}$ أوجد قيمة $س$ لأقرب رقمين عشريين

$\log ٧^{س+١} = \log ٣^{س-؟}$

$(س+١)\log ٧ = (س-؟)\log ٣$

$س \log ٧ + \log ٧ = س \log ٣ - ؟ \log ٣$

$س \log ٧ - س \log ٣ = -؟ \log ٣ - \log ٧$

$س (\log ٧ - \log ٣) = -؟ \log ٣ - \log ٧$

$\therefore س = \frac{-؟ \log ٣ - \log ٧}{\log ٧ - \log ٣} \approx -٤٫٨٩$

تدريب ٧ إذا كان س ص = ١٦ إثبت أن: ٣ لو٢ س + ٤ لو٢ ص − لو٢ س ص٢ = ٨

ط١: = لو٢ س٣ + لو٢ ص٤ − لو٢ س ص٢

= لو٢ س٣ ص٤ / س ص٢

= لو٢ س٢ ص٢ = لو٢ (س ص)٢

= لو٢ (١٦)٢ = لو٢ ٢٨ = ٨

تدريب ٨ حل المعادلة: لو٣ لو٩ لو٣ س = صفر

∴ لو٩ [لو٣ لو٣ س] = ٠

لو٣ لو٣ ٢٧ = ٩٠ = ١

∴ لو٣ [لو٣ ٢٧] = ١

لو٣ ٢٧ = ٣

س٣ = ٢٧ ⇐ س = ٣

تدريب ٩ اختر الإجابة الصحيحة

١) إذا كانت لو٢ س = ٣ فإن قيمة لو٢ (س/٤) = ...

أ) ٢ ب) ١.٥ ج) ٣ د) ٢.٥

٢) إذا كان: لو٣ ٩ = ٢ فإن س٢ + س٢ = ...

أ) ١٠٥ ب) ١٤٥ ج) ٩٥ د) ١٥٥

٣) قيمة ٣ لوه٣ = ...

أ) ١.٥ ب) ٥ ج) ١ د) ٣

٤) مجموعة حل المعادلة لو٣ ٨١ = ٤ هي ...

حيث س ∈ ح − {١}

أ) {٣، −٣} ب) {٩، −٩} ج) {٣} د) {٨١/٤}

٥) إذا كانت لو٣ = ص − ١ فإن ...

أ) ٢ س = ص ب) ص = ١/٢ س ص

ج) س = ٢ ص س د) س = ١/٢ ص س

٦) الدالة العكسية للدالة د(س) = لو٣ (س) هي د١ (س) = ...

أ) س٢ ب) ٣ س س

ج) (١/٣) س د) ٣ س + ٣

اللهم إن كان توفيقاً فمن الله

وإن كان خطأ أو نسيان فمني

ومن الشيطان

موقع مذكرتي Mozkrty.com

ثانياً :
حساب المثلثات

(١) قانون الجيب

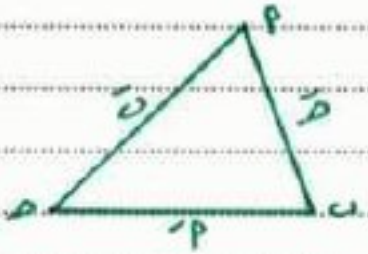
(٢) قانون جيب التمام

العالي المعالي
دايما في العلالي
٠١٢٢٨٤٨٥٦٧
٠١١١١٩٥٤٨٠٠
مذكرتي
Mozkrty.com

قانون الجيب

في أي مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها

في Δ أ ب جـ يكون: $\frac{أ}{ط(أ)} = \frac{ب}{ط(ب)} = \frac{جـ}{ط(جـ)}$



تمرين مشهور: $\frac{أ}{ط(أ)} = \frac{ب}{ط(ب)} = \frac{جـ}{ط(جـ)} = ٢ نو$

حيث نو لطول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب جـ

ملاحظات

١) محيط Δ أ ب جـ = أ + ب + جـ

٢) مساحة Δ أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب ط(أ) = $\frac{١}{٢}$ ب جـ ط(أ) = $\frac{١}{٢}$ أ جـ ط(ب)

٣) محيط الدائرة = ٢ π نو ، مساحة الدائرة = π نو^{٢}

٤) طول الضلع الأكبر يقابل قياس الزاوية الأكبر والعكس

تدريب ١

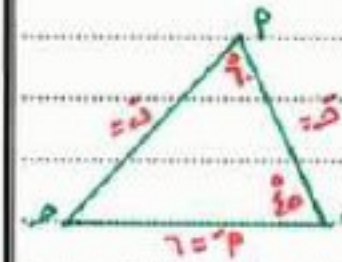
أ ب جـ Δ فيه ق(أ) = ٦٠° ، ق(ب) = ٤٥° ، أ = ٦ سم أوجد

محيط Δ أ ب جـ لأقرب سم

الحل

ق(جـ) = ١٨٠° − ١٠٥° = ٧٥°

$\frac{٦}{ط ٦٠°} = \frac{ب}{ط ٤٥°} = \frac{جـ}{ط ٧٥°}$



ب = $\frac{٦ \times ط ٤٥°}{ط ٦٠°}$ ≈ ٤٫٩ سم ، جـ = $\frac{٦ \times ط ٧٥°}{ط ٦٠°}$ ≈ ٦٫٩ سم

∴ محيط Δ أ ب جـ = ٦ + ٤٫٩ + ٦٫٩ = ١٧٫٦ ≈ ١٨ سم

تدريب ٢

أ ب جـ Δ فيه جـ = ٦٫٩ سم ، ق(أ) = ٨٠° ، ق(ب) = ٤٧° أوجد

طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب جـ

ق(ح) = ١٨٠° − ١٢٧° = ٥٣°

∴ $\frac{ح}{جا ح} = ٢ نق$ ⇐ $\frac{٧٫٦}{جا ٥٣°} = ٢ نق$ ⇐ نق ≈ ٤٫٧٦ سم

تدريب ٣

ه ل م ن فيه: ق(ل) = ٦٠° ، ق(م) = ٤٠° وطول نصف قطر الدائرة الطارة برؤوسه ٢٠ سم أوجد مساحة ه ل م ن

الحل

ق(ن) = ١٨٠° − ١٠٥° = ٧٥°

$\frac{ل}{جا ٦٠°} = \frac{م}{جا ٤٠°} = \frac{ن}{جا ٧٥°} = ٢ \times ٢٠$

∴ ل = ٤٠ جا ٦٠° ≈ ٣٤٫٦ سم

م = ٤٠ جا ٤٠° ≈ ٢٥٫٧ سم

∴ مساحة ه = $\frac{١}{٢}$ ل م جا ن

= $\frac{١}{٢} \times ٣٤٫٦ \times ٢٥٫٧ \times$ جا ٧٥°

= ٤٧٢٫٩ سم²

تدريب ٤

إذا كان محيط ه ل م ن يساوي ٤٤ سم ، ق(ن) = ٣٠° ، ق(ح) = ٤٨°

أوجد ت

الحل

$\frac{م}{جا ١٠٢°} = \frac{ت}{جا ٣٠°} = \frac{ح}{جا ٤٨°}$

$\frac{م + ت + ح}{جا ١٠٢° + جا ٣٠° + جا ٤٨°} = \frac{ت}{جا ٣٠°}$

∴ $\frac{٤٤}{٢٫٢٤} = \frac{ت}{جا ٣٠°}$

∴ ت ≈ ٤٫٥ سم

تدريب ٥

في الشكل المقابل: دائرة طول نصف قطرها ٥ سم

تمر برؤوس ه ل م ن ، ق(ه ل م) = ٤٠° فإن طول ل ن =

(أ) ١٠ جا ٤٠°

(ب) ٥ جا ٤٠°

(ج) $\frac{١٠}{جا ٤٠°}$

(د) $\frac{٥}{جا ٤٠°}$

الحل

$\frac{ل ن}{جا ٤٠°} = ٢ نق$

ل ن = ١٠ جا ٤٠°

تدريب ٦

في الشكل المقابل: أ ب ح د مرسوم في الدائرة م التي طول نصف قطرها ٢٠ سم ، ق(∠ أ م ح) = ١١٤°

فيكون: م أ = ... سم لأقرب سم

(أ) ٢٠ (ب) ٢٠٠

(ج) ١٠ (د) ١٩

الحل

∵ ق(∠ أ) المحيطية = ½ ق(∠ أ م ح) المركزية المشتركة معها في نفس القوس

∴ ق(∠ أ) = ٥٧°

م أ / جا ٥٧° = ٢ نق

∴ م أ = ٤٢ جا ٥٧° ≈ ٣٥ سم

تدريب ٧

في Δ أ ب ح إثبت أن مساحته = م أ × ت ح / ٤ نق حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث

الحل

∵ مساحة Δ = ½ ت ح جا أ

= ½ ت ح × م أ / ٢ نق

= م أ × ت ح / ٤ نق

تدريب ٨

في Δ أ ب ح إثبت أن: مساحته = ٢ نق² جا أ جا ب جا ح

الحل

∵ مساحة Δ = ½ ت ح جا أ

= ½ × ٢ نق جا ب × ٢ نق جا ح × جا أ

= ٢ نق² جا أ جا ب جا ح

بالتعويض عن ت = ٢ نق جا ب

ح = ٢ نق جا ح

تذكر أن

Δ أ ب ح فيه ق(∠ أ) + ق(∠ ب) + ق(∠ ح) = ١٨٠°

∴ أ + ب = ١٨٠ − ح

يأخذ جا الطرفين ← جا (أ + ب) = جا ح

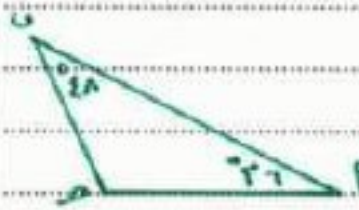
يأخذ جتا الطرفين ← جتا (أ + ب) = − جتا ح

ظا الطرفين ← ظا (أ + ب) = − ظا ح

تدريب ٩

إختر الإجابة الصحيحة :-

(١) في الشكل المقابل :-



المثلث م ن ص فيه : ق(∠م) = ٣٦° ، ق(∠ن) = ٤٨°

م ص = ٨ سم فيكون ن ص = ... سم لأقرب سم

(أ) ٦ (ب) ١٠ (ج) ١٤ (د) ١١

(٢) في Δ م ن ص أى من العبارات التالية صحيحة ؟

(أ) $\frac{م}{حا م} = \frac{ن}{حا ن}$ (ب) $\frac{م}{حا م} = \frac{ن}{حا ص}$

(ج) حا م + حا ن = م + ن (د) $\frac{م}{حا م} = \frac{حا ن}{ن}$

(٣) إذا كان : نق = طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس Δ م ن ص فإن : نق(Δ م ن ص) = ...

(أ) $\frac{1}{2}$ م (ب) ٢ م (ج) م (د) ٤ م

(٤) إذا كان نق نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث م ن ص وكان م = $\frac{1}{2}$ نق فإن ق(∠م) = ...

(أ) حا$^{-1}$(١) (ب) حا$^{-1}$(٢) (ج) حا$^{-1}$($\frac{1}{2}$) (د) حا$^{-1}$($\frac{1}{4}$)

(٥) في Δ م ن ص إذا كان م حا م = ن حا ن فإن :

(أ) ق م صغرى (ب) م = ن (ج) ق(∠م) = ٩٠° (د) ن = ص

(٦) إذا كان : م ن ص مثلث فيه : حتا (ن + ص) = $\frac{3}{5}$ ، ن ص = ٨ سم فإن

طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس Δ م ن ص = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٥ (ج) ٨ (د) ١٠

الرياضيات : غذاء العقل

المعالي دايما في العلالي ٠١٢٢٨٤٨٥٦٧ ٠١١١٩٥١٨٠٠
Mozkrty.com

قانون جيب التمام

في أي مثلث أ ب ح يكون :

$أ^2 = ب^2 + ح^2 - 2 ب ح \, جتا أ$	$جتا أ = \frac{ب^2 + ح^2 - أ^2}{2 ب ح}$
$ب^2 = أ^2 + ح^2 - 2 أ ح \, جتا ب$	$جتا ب = \frac{أ^2 + ح^2 - ب^2}{2 أ ح}$
$ح^2 = أ^2 + ب^2 - 2 أ ب \, جتا ح$	$جتا ح = \frac{أ^2 + ب^2 - ح^2}{2 أ ب}$

تدريب ١ أ ب ح مثلث فيه: أ = ٥ سم ، ب = ٣ سم ، ق(∠ح) = ١٢٠° أوجد ح

الحل

$\therefore ح^2 = أ^2 + ب^2 - 2 أ ب \, جتا ح$

$\therefore ح^2 = ٢٥ + ٩ - ٢ \times ٥ \times ٣ \, جتا ١٢٠°$ ⇐ ح = ٧ سم

تدريب ٢ أوجد قياس أكبر زاوية في Δ أ ب ح حيث: أ = ١٣ سم ، ب = ١١ سم ، ح = ٦ سم

الحل

أكبر زاوية هي المقابلة لأكبر ضلع

$\therefore جتا أ = \frac{ب^2 + ح^2 - أ^2}{2 ب ح}$ ⇐ $جتا أ = \frac{١٢١ + ٣٦ - ١٦٩}{٢ \times ١١ \times ٦}$ ⇐ ق(∠أ) = ٩٠° ٤٧′ ٥٨″

تدريب ٣ أ ب ح Δ فيه: ٤ جا أ = ٣ جا ب = ٦ جا ح أوجد ق(∠أ)

الحل

$\therefore ٤ جا أ = ٣ جا ب = ٦ جا ح \div ١٢$

$\therefore \frac{جا أ}{٣} = \frac{جا ب}{٤} = \frac{جا ح}{٢}$

$\therefore أ : ب : ح = ٣ : ٤ : ٢$

نفرض: أ = ٣ك ، ب = ٤ك ، ح = ٢ك

$جتا أ = \frac{٩ك^2 + ١٦ك^2 - ٤ك^2}{٢ \times ٤ك \times ٢ك} = \frac{٢١ك^2}{٢٤ك^2}$

$\therefore ق(∠أ) = ٢٨° ٥٧′$

Mozkrty.com

تدريب ٤: $\triangle$ ا ب ح مساحته = $\frac{٣٧}{٢}$ سم^٢ وفيه: ا ب = ٤ سم ، ق(∠ب) = ٦٠° أوجد ت

الحل

$\because$ م($\triangle$ ا ب ح) = $\frac{١}{٢}$ ا ب × ب ح × جتا ب

$\therefore \frac{٣٧}{٢} = \frac{١}{٢} \times ٤ \times$ ب ح × جتا ٦٠°

$\therefore \frac{٣٧}{٢} = \frac{٢}{٢}$ ب ح

$\therefore$ ب ح = ٥ سم

$\because$ ت^٢ = ا ب^٢ + ح^٢ − ٢ ا ب × ح جتا ب

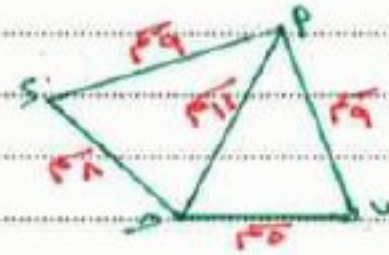
= ١٦ + ٢٥ − ٢ × ٤ × ٥ × جتا ٦٠°

$\therefore$ ت = ٦٫٤ سم

تدريب ٥: فى الشكل المقابل:

ا ب ح د شكل رباعى فيه: ا ب = ٩ سم ، ب ح = ٥ سم

ق ح د = ٨ سم ، ق ا د = ٩ سم



إثبت أن الشكل ا ب ح د رباعى دائرى

الحل

فى $\triangle$ ا ب ح

جتا ب = $\frac{٩^٢ + ٥^٢ - ١١^٢}{٢ \times ٩ \times ٥}$ = $\frac{١}{٦}$

فى $\triangle$ ا د ح

جتا د = $\frac{٩^٢ + ٨^٢ - ١١^٢}{٢ \times ٩ \times ٨}$ = $\frac{١}{٦}$

$\therefore$ جتا د = − جتا ب $\Leftarrow$ ق(∠د) + ق(∠ب) = ١٨٠°

$\Leftarrow \therefore$ الشكل ا ب ح د رباعى دائرى

إختر معايا: يكون الشكل رباعى دائرى إذا كان به فيه:

١) زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة متساويتان

٢) زاويتان متقابلتان متكاملتان.

إختر معايا: عند حل المثلث فإننا نوجد جميع عناصر المثلث [٣ زوايا + ٣ أضلاع]

تدريب ٦: $\triangle$ ا ب ح فيه: ت = $\frac{١}{٢}$ ٤ سم ، ح = ٤ سم ، جتا ا = $\frac{٢}{٥}$ إثبت أن $\triangle$ ا ب ح متساوى الساقين

الحل

$\because$ ا ح^٢ = ت^٢ + ح^٢ − ٢ ت ح جتا ا

$\therefore$ ا ح = ٤ سم

= ٤ + ١٦ − ٢ × ٤ × ٤ × $\frac{٢}{٥}$

= ٢٠ − ١٦ = ٤

$\because$ ا ح = ح $\therefore$ $\triangle$ ا ب ح متساوى الساقين

تمرين ٧

أ ب ح ∆ فيه: أ ح² = (ت ب − ح ب)² + ت ح | أثبت أن: ق(∠أ) = ٦٠°

الحل

∴ أ ح² = ت ب² + ح ب² − ٢ ت ب ح ب + ت ب ح ب ← معطى

∴ أ ح² = ت ب² + ح ب² − ت ب ح ب ← ①

∴ جتا أ = (ت ب² + ح ب² − أ ح²) / (٢ ت ب ح ب) ← ②

بالتعويض من ① في ② ⇐ ∴ جتا أ = (ت ب² + ح ب² − [ت ب² + ح ب² − ت ب ح ب]) / (٢ ت ب ح ب)

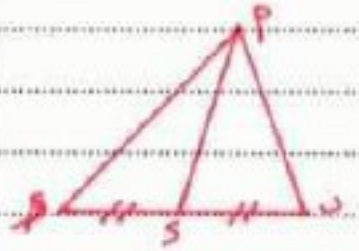
∴ جتا أ = (ت ب² + ح ب² − ت ب² − ح ب² + ت ب ح ب) / (٢ ت ب ح ب) = ١/٢ ⇐ ∴ ق(∠أ) = ٦٠°

تمرين ٨

أ ب ح ∆ فيه: ء منتصف ب ح

كما بالشكل المقابل

أثبت أن: (أ ب)² + (أ ح)² = ٢ (أ ء)² + ٢ (ب ء)²



الحل

نفرض: ق(∠أ ء ب) = θ ∴ ق(∠أ ء ح) = (١٨٠° − θ)

في ∆ أ ب ء

(أ ب)² = (أ ء)² + (ب ء)² − ٢ (أ ء)(ب ء) جتا θ ← ①

في ∆ أ ح ء

(أ ح)² = (أ ء)² + (ح ء)² − ٢ (أ ء)(ح ء) جتا (١٨٠° − θ)

(أ ح)² = (أ ء)² + (ح ء)² + ٢ (أ ء)(ح ء) جتا θ ← ②

∴ ب ء = ح ء

∴ ① + ② ⇐ ∴ (أ ب)² + (أ ح)² = ٢ (أ ء)² + ٢ (ب ء)² #

للحظ أن: جتا(١٨٠° − θ) = − جتا θ

المعالي دائما في العلالي ٠١٢٢٨٤٨٥٦٧ ٠١١١٩٥١٨٠٠
Mozkrty.com

تمرين ٦ اختر الاجابة الصحيحة :-

(١) Δ أ ب حـ فيه : أ = ٥ سم ، ب = ٣ سم ، ق(∠حـ) = ٣٠° فإن : حـ = ... سم

(أ) ٣ (ب) ١٫٣ (جـ) ٢٫٩ (د) ٣٫٢

(٢) أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٤ سم ، ب حـ = ٥ سم ، ق(∠أ ب حـ) = ١١٥°

فإن : مساحة سطح الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب حـ = ... سم^2

(أ) π ٢٫٢٩ (ب) π ٤٫٢١ (جـ) π ١٧٫٠ (د) π ٤٩

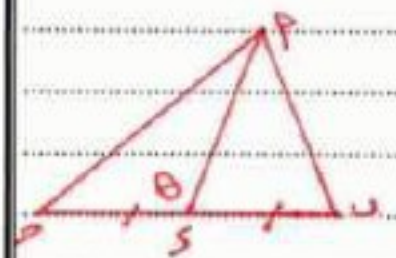
(٣) في Δ أ ب حـ إذا كان : أ : ب : حـ = ٥ : ٦ : ٧ فإن قياس أكبر زواياه =

(أ) ٥٤° ٥١′ ١٢″ (ب) ٤٧° ٢٧′ ٢٧″ (جـ) ٧٨° ٣٥′ ٥٤″ (د) ٤٣° ٣٧′ ٥٥″

(٤) إذا كانت أطوال أضلاع المثلث هي : س ، س − ٢ ، س + ٢ وكان قياس أكبر زواياه ١٢٠° فإن : س =

(أ) ٦ سم (ب) ٥ سم (جـ) ٣ سم (د) ٤ سم

(٥) في الشكل المقابل :



(أ ب)^2 − (أ حـ)^2 = ...

(أ) ٢ (أ د)^2 + ٢ (د ب)^2

(ب) ٢ (أ د)^2 + ٢ (د ب)^2 − ٤ (أ د)(د ب) جتا θ

(جـ) ٢ أ د × ب حـ جتا θ

(د) ٢ (أ د)^2

(٦) أ ب حـ Δ فيه : (أ + ب + حـ)(أ + ب − حـ) = ٣ أ ب فإن : ق(∠حـ) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ١٢٠°

اللهم إن كان توفيقاً من الله ... وإن كان خطأ أو نسيان فمني والشيطان

ثالثاً :

التفاضل

المعالي
دايما في العلالي
٠١٢٢٨٤٨٤٥٦٧
٠١١١١٩٥٤٨٠٠
مذكرتي
Mozkrty.com

مقدمة فى النهايات

الرمز ∞ ، -∞

إذا كان ∞ ∈ ℝ

∞ يعبر عن كمية أكبر من أى عدد حقيقى موجب يمكن تخيله [ليس عددًا حقيقيًا]

-∞ يعبر عن كمية أصغر من أى عدد حقيقى سالب يمكن تخيله [ليس عددًا حقيقيًا]

١) $\infty = \infty \pm \mathbb{R}$ ٢) $-\infty = -\infty \pm \mathbb{R}$

٣) $\infty \times \mathbb{R} = \begin{cases} \infty & \text{عندما } \mathbb{R} > 0 \\ -\infty & \text{عندما } \mathbb{R} < 0 \end{cases}$ ٤) $\mathbb{R} \div \infty = \begin{cases} \infty & \text{عندما } \mathbb{R} > 0 \\ -\infty & \text{عندما } \mathbb{R} < 0 \end{cases}$

أنواع الكميات

الكمية المعينة	الكمية الغير معينة	الكمية الغير معرفة
هى كمية لها ناتج محدد	هى كمية ليس لها ناتج محدد	هى كمية ليس لها معنى
مثل: $\frac{1}{4} \times 3 = 0$	$\frac{0}{0} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = \infty - \infty = \ldots$	$\frac{\mathbb{R}}{\text{صفر}}$ حيث $\mathbb{R} \in \mathbb{R} - \{0\}$

تدريب ١

١) $\infty = \infty + 7$ ٢) $\infty = \infty + \infty$ ٣) $\infty = \infty \times 6$

٤) $-\infty = \infty \times -4$ ٥) $-\infty = -\infty - 5$ ٦) $\text{صفر} = \infty \times \text{صفر}$

نهاية دالة عند نقطة

مثال توضيحى: إذا كانت $د(س) = \frac{س^2 - 4}{س - 2}$ واضح أن مجال د = ℝ - {2} فعند د(2) = ÷

كمية غير معينة يمكن لا يمكن تعيين قيمة للدالة عند س = 2 . لذلك سوف نقوم

دراسة إقتراب الدالة من قيمة معينة كلما إقتربت س من هذا العدد 2

ولدراسة هذا المقدار يوجد طريقتين: جبرية وبيانية

تقدير النهاية عدديًا

دراسة تقارب الدالة د(س) = س + ؟ عندما س تقترب من ١

س تقترب من ١ من اليمين: س ← ١+

س تقترب من ١ من اليسار: س → ١−

س	١٫٤	١٫٣	١٫٢	١٫١		٠٫٩	٠٫٨	٠٫٧	٠٫٦
د(س)	٢٫٤	٢٫٣	٢٫٢	٢٫١		٢٫٩	٢٫٨	٢٫٧	٢٫٦

د(س) تقترب من ٣ من اليمين ← د(س) ← ٣

د(س) تقترب من ٣ من اليسار ← د(س) ← ٣

يسمى العدد ٣ بالنهاية اليمنى للدالة

يسمى العدد ٣ بالنهاية اليسرى للدالة

$\lim_{س \to 1^+} د(س) = ٣$

$\lim_{س \to 1^-} د(س) = ٣$

أو: $د(١)^+ = ٣$

أو: $د(١)^- = ٣$

تعريف

إذا كانت قيمة الدالة د تقترب من قيمة وحيدة ل عندما تقترب س من ؟ من اليمين واليسار فإن نهاية الدالة د(س) = ل ونكتب

$\lim_{س \to ؟} د(س) = ل$

أى أن: $د(؟)^+ = د(؟)^- = ل$

تقدير النهاية بيانيًا

تعريف الدالة: د(؟) = ل

النهاية اليمنى: $د(؟)^+ = ل$

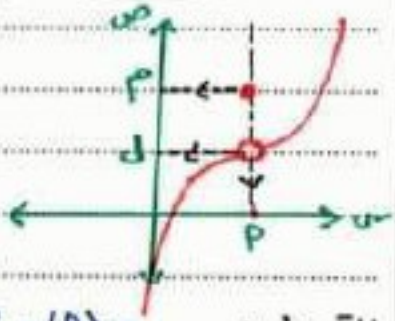
النهاية اليسرى: $د(؟)^- = ل$

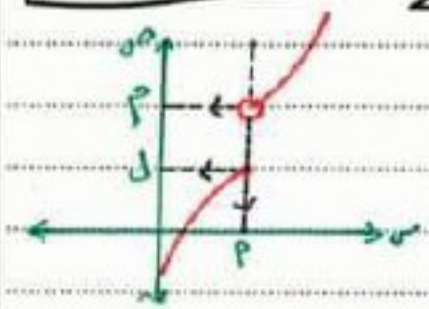
د(؟) = غير معرفة

$د(؟)^+ = ل$

$د(؟)^- = ل$

$\lim_{س \to ؟} د(س) = ل$ إذا وفقط إذا





التعريف: $د(ب) = م$ | $د(ب) = ل$

النهاية اليمنى: $د(ب)^{+} = ل$ | $د(ب)^{+} = م$

النهاية اليسرى: $د(ب)^{-} = ل$ | $د(ب)^{-} = ل$

$\therefore \lim_{س \to ب} د(س) = ل$ | $\lim_{س \to ب} د(س)$ غير موجودة

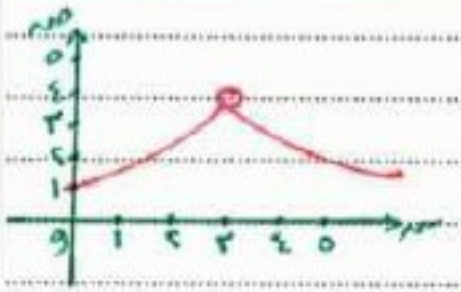
ملاحظات:

١) عند إيجاد نهاية الدالة ليس من الضروري أن تكون الدالة معرفة عند $س = ب$

٢) يجب أن تكون الدالة معرفة على فترة على يمين ب وفترة أخرى على يسار ب

٣) إذا كان $د(ب)^{+} \neq د(ب)^{-}$ فإن نهاية الدالة غير موجودة

تدريب ٢ في الشكل المقابل.. أوجد:



١) $د(٣) =$

٢) $د(٣)^{+} =$

٣) $د(٣)^{-} =$

٤) $\lim_{س \to ٣} د(س) =$

تدريب ٣ في الشكل المقابل.. أوجد:

١) $د(١) =$

٢) $د(١)^{+} =$

٣) $د(١)^{-} =$

٤) $\lim_{س \to ١} د(س) =$

إيجاد نهاية الدالة جبرياً

نظرية ١

إذا كانت : د(س) كثيرة حدود فى المتغير س فإن: $\lim_{س \to أ} د(س) = د(أ)$

نتيجة

إذا كانت : د(س) = ك حيث ك ثابت فإن: $\lim_{س \to أ} د(س) = \lim_{س \to أ} ك = ك$

نظرية ٢

إذا كانت د ، ر دالتين فى المتغير س وكانت : $\lim_{س \to أ} د(س) = ل$

، $\lim_{س \to أ} ر(س) = م$ حيث ل ، م ∈ ح فإن :

١) $\lim_{س \to أ} [د(س) \pm ر(س)] = \lim_{س \to أ} د(س) \pm \lim_{س \to أ} ر(س) = ل \pm م$

٢) $\lim_{س \to أ} [د(س) \times ر(س)] = \lim_{س \to أ} د(س) \times \lim_{س \to أ} ر(س) = ل \times م$

٣) $\lim_{س \to أ} [د(س) \div ر(س)] = \lim_{س \to أ} د(س) \div \lim_{س \to أ} ر(س) = ل \div م$ حيث م ≠ ٠

٤) $\lim_{س \to أ} [د(س)]^ن = [\lim_{س \to أ} د(س)]^ن = ل^ن$ حيث ن ∈ ص

تدريب ١ أكمل ما يأتى :

١) $\lim_{س \to ٢} (٣س + ١)$

٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{س - ١}{س + ١}$ =

٣) $\lim_{س \to ٤} \frac{٣}{٥}$

٤) $\lim_{س \to ٠} \frac{ظتاس}{٣ + ٢س}$

٥) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{ظتاس}{س}$

تدريب ٢ إختر الإجابة الصحيحة

١) $\lim_{س \to ٠} \sqrt{٤ - س^٢}$ =

[-١ ، صفر ، ٢ ، ليس لها وجود]

٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{٥}{(س - ٢)^٢}$ =

[$-\frac{٥}{٢}$ ، صفر ، ٥ ، ليس لها وجود]

٣) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{ظاس}{س}$ =

[صفر ، ١ ، $\frac{٤}{\pi}$ ، ليس لها وجود]

ملحوظة لإيجاد $\lim_{س \to م} \frac{د(س)}{هـ(س)}$ فوجد :-

$\lim_{س \to م} د(س) = ل$ ، $\lim_{س \to م} هـ(س) = م$

فإذا كانت : $ل = صفر$ ، $م = صفر$ أى $\frac{صفر}{صفر}$ صيغة غير معينة فإننا نقوم بإختصار المقدار $(س - م)$ عن طريق : تحليل - القرين x المرافق - القسمة المطولة

تدريب ٣ أوجد النهايات التالية :-

١) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{(س - ٣)}$

$= \lim_{س \to ٣} (س + ٣) = ٣ + ٣ = ٦$

٢) $\lim_{س \to ٤} \frac{س^٢ + س - ٢٠}{س^٢ - ٥س + ٤}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{(س - ٤)(س + ٥)}{(س - ٤)(س - ١)}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{س + ٥}{س - ١} = \frac{٩}{٣} = ٣$

٣) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٣ - ٢٧}{س - ٣}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س^٢ + ٣س + ٩)}{(س - ٣)}$

$= \lim_{س \to ٣} (س^٢ + ٣س + ٩) = ٢٧$

٤) $\lim_{س \to ١} \frac{٢س^٢ + س - ٣}{س^٢ - ١}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{(س - ١)(٢س + ٣)}{(س - ١)(س + ١)}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{٢س + ٣}{س + ١} = \frac{٥}{٢}$

٥) $\lim_{س \to ٠} \frac{(س + ٥)^٢ - ٢٥}{س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{س^٢ + ١٠س + ٢٥ - ٢٥}{س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{س^٢ + ١٠س}{س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{س(س + ١٠)}{س}$

$= \lim_{س \to ٠} (س + ١٠) = ١٠$

ملحوظة : جميع المسائل السابقة نوجد نهاية البسط ونهاية المقام والناتج = $\frac{صفر}{صفر}$ صيغة غير معينة لذلك إستخدمنا التحليل لإختصار جزء الحل

مكتبتي Mozkrty.com

تدريب ٤ إختر الإجابة الصحيحة :-

١) $\lim_{س \to ٢} (٤س^{٢} - ٢س - ٢^{٢}) =$ .....

أ) صفر ب) ٢ ج) ٤٢^{٢}

د) ٢^{٢} - ٢٤

٢) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٤} - س - ٦}{س^{٣} + س - ١٢} =$

أ) $\frac{٥}{٧}$ ب) $\frac{١}{٧}$ ج) ٥

د) ١-

٣) $\lim_{س \to ٣} \frac{٤س^{٣} - ٣س - ٣}{٤س^{٣} - ٩} = \frac{٥}{١٢}$ فإن: ٢ =

أ) $\frac{٣}{٢}$ ب) $-\frac{٣}{٢}$ ج) $\frac{٢}{٣}$

د) $-\frac{٢}{٣}$

٤) $\lim_{س \to ٤} \frac{٣س^{٣} - ٨س - ١٦}{س^{٣} - ٤} =$

أ) ٤ ب) ٢ ج) ١

د) ليس لها وجود

٥) إذا كانت : $\lim_{س \to ٢} \frac{د(س) - ٥}{س - ٢} = ١$

حيث د(س) كثيرة حدود

فإن: $\lim_{س \to ٢} د(س) =$ .....

أ) صفر ب) ٢ ج) ٥

د) ٥

مسائل على الضرب في المرافق

١) $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س - ٣} - ١}{س - ٤}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س - ٣} - ١}{س - ٤} \times \frac{\sqrt{س - ٣} + ١}{\sqrt{س - ٣} + ١}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{(س - ٣ - ١)}{(س - ٤)(\sqrt{س - ٣} + ١)}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{١}{\sqrt{س - ٣} + ١} = \frac{١}{٢}$

٢) $\lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{س - ١} - ٢}{س - ٥}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{س - ١} - ٢}{س - ٥} \times \frac{\sqrt{س - ١} + ٢}{\sqrt{س - ١} + ٢}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{(س - ١ - ٤)}{(س - ٥)(\sqrt{س - ١} + ٢)}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{١}{\sqrt{س - ١} + ٢} = \frac{١}{٤}$

٣) $\lim_{س \to ١-} \frac{س + ١}{\sqrt{س + ٥} - ٢}$

$= \lim_{س \to ٢-} \frac{س + ١}{\sqrt{س + ٥} - ٢} \times \frac{\sqrt{س + ٥} + ٢}{\sqrt{س + ٥} + ٢}$

$= \lim_{س \to ٢-} \frac{(س + ١)(\sqrt{س + ٥} + ٢)}{(س + ٥ - ٤)}$

$= \lim_{س \to ٢-} (\sqrt{س + ٥} + ٢) = ٤$