

ملخص قوانين

أولاً (الاستاتيكا)

1 محصلة القوتين F_1 ، F_2 وقياس الزاوية بينهما θ

$$C = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \theta}$$

يستخدم هذا القانون إذا اعطى لنا F_1 ، F_2 ، θ ، C وطلب منا المحصلة C

2 قياس الزاوية التي تصنعها المحصلة مع القوة

$$\cos \theta = \frac{F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta}{C}$$

يستخدم هذا القانون إذا اعطى لنا F_1 ، F_2 ، θ ، C وطلب منا المحصلة قياس الزاوية التي

تصنعها المحصلة مع القوة الأولى F_1 أو طلب ظل الزاوية التي تصنعها المحصلة مع F_1

3 قياس الزاوية التي تصنعها المحصلة مع القوة

$$\cos \theta = \frac{F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta}{C}$$

يستخدم هذا القانون إذا اعطى لنا F_1 ، F_2 ، θ ، C وطلب منا المحصلة قياس الزاوية التي

تصنعها المحصلة مع القوة الثانية F_2

4 لاحظ إذا اعطى لنا F_1 ، F_2 ، C وطلب منا الزاوية بين القوتين نستخدم القانون

$$\cos \theta = \frac{C^2 - F_1^2 - F_2^2}{2F_1F_2}$$

5 إذا كانت القوتان متساويتان في المقدار

$$C = 2F \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\frac{C}{2F} = \cos \frac{\theta}{2}$$

يستخدم هذا القانون إذا ذكر في المسألة أن القوتان متساويتان وأعطى لنا القوتان وقياس الزاوية بينهما

وطلب المحصلة أو أعطى المحصلة وطلب مقدار القوتين

لاحظ انه في هذه الحالة المحصلة تنصف الزاوية بين القوتين فإذا ذكر في المسألة أن المحصلة تنصف

الزاوية بين القوتين ده معناه أن القوتين متساويتين

6 إذا كانت القوتان متعامدتان

$$C = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$

$$\tan \theta = \frac{F_2}{F_1}$$

يستخدم هذا القانون إذا ذكر في المسألة أن القوتان متعامدتان

7 إذا كانت المحصلة عمودية على القوة الأولى

$$C \perp F_1 \text{ نستخدم القانون}$$

$$F_1 = F_2 \cos \theta$$

يستخدم هذا القانون إذا ذكر في المسألة أن المحصلة عمودية على القوة الأولى أو استنتاجنا ذلك من رسم

المسألة

8 إذا كانت المحصلة عمودية على القوة الثانية

$$C \perp F_2 \text{ نستخدم القانون}$$

$$F_2 = F_1 \cos \theta$$

يستخدم هذا القانون إذا ذكر في المسألة أن المحصلة عمودية على القوة الثانية أو استنتاجنا ذلك من

رسم المسألة

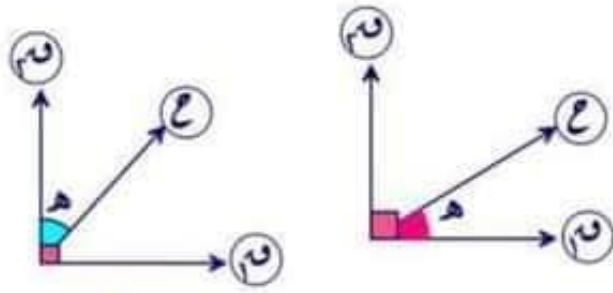
9 القيمة العظمى لمحصلة (أكبر قيمة للمحصلة)

قوتين هي مجموعهم أي محصلة القوتين

$$F_1 + F_2 \text{ هي}$$

وفي هذه الحالة تكون الزاوية

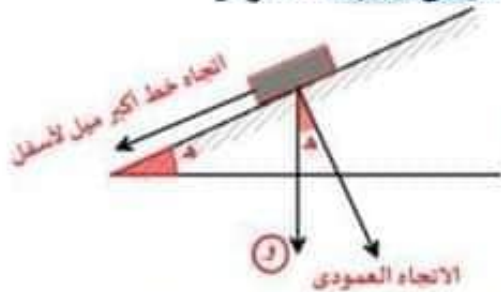
بين القوتين تساوى صفر



في حالة الشكل السابق والزاوية التي سوف نستخدمها في التحليل هي المحصورة بين القوة الثانية والمحصلة $u_1 = C \cos \alpha$ $u_2 = C \sin \alpha$

في حالة الشكل المقابل والزاوية التي سوف نستخدمها في التحليل هي المحصورة بين القوة الأولى والمحصلة $u_1 = C \cos \alpha$ $u_2 = C \sin \alpha$

٢ تحليل جسم وزنه (و) موضوع على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها (هـ) إلى مركبتين الأولى في اتجاه خط أكبر للمستوى لأسفل والثانية في الاتجاه العمودي



مركبة الوزن في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأسفل = و جا هـ

مركبة الوزن في الاتجاه العمودي = و ح تا هـ

الدرس الثالث : (محصلة عدة قوى متلاقية في نقطة)

* $\vec{C} = \vec{C}_1 + \vec{C}_2$

* $C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$

١٠ القيمة الصغرى لمحصلة قوتين هي القيمة المطلقة للفرق بينهما (أصغر قيمة للمحصلة) أي أصغر قيمة

لمحصلة القوتين u_1, u_2 هي $C = |u_1 - u_2|$ وفي هذه الحالة تكون الزاوية بين القوتين تساوي 180°

١١ لاحظ أن محصلة قوتين دائماً تنتمي للفترة المغلقة الفرق بين القوتين ومجموع القوتين

أي أن $C \in [u_1 - u_2, u_1 + u_2]$ أو $u_1 - u_2 \leq C \leq u_1 + u_2$

إذا ذكر لنا في المسألة أن $C \in [0, 3]$ أو $0 \leq C \leq 3$

ده معناه أن :

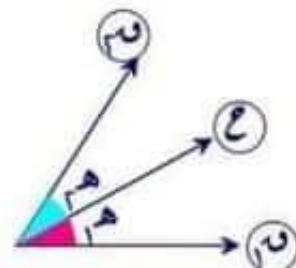
$u_1 - u_2 = 3, u_1 + u_2 = 5$ ونحلهم بالحذف

١٢ لاحظ أن في حالة القوتان متساويتان ومتعامدتان يكون $C = \sqrt{2} u$

الدرس الثاني : (تحليل القوة إلى مركبتين)

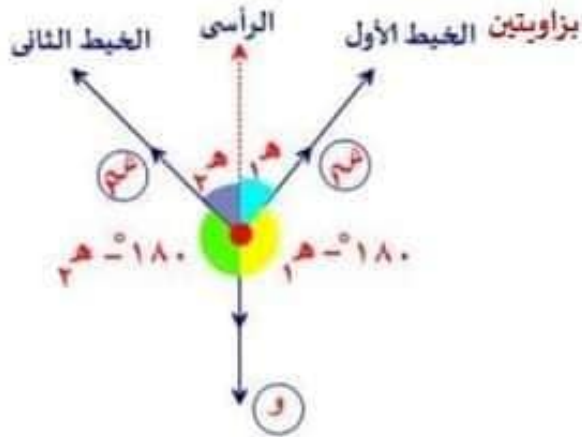
١ تحليل قوة معلومة إلى مركبتين غير متعامدتين

$\frac{C}{\sin \alpha} = \frac{u_1}{\sin \beta} = \frac{u_2}{\sin \gamma}$



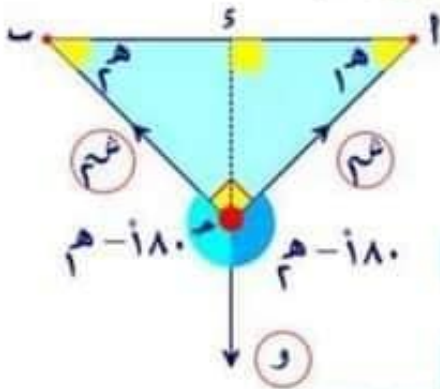
٢ تحليل قوة معلومة إلى مركبتين متعامدتين

٢ جسم مربوط بخيطين بميلان على الرأسى



٤ جسم معلق بخيطين في نقطتين في سقف حجرة

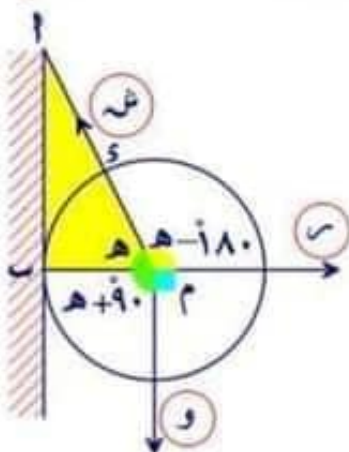
(أوفي خط أفقى واحد)



٥ كرة تستند على حائط رأسى امس ومعلقة من

إحدى نقط سطحها بخيط خفيف في نقطة في

حائط رأبى تعلو نقطة تماس الكرة مع الحائط



* طاه = $\frac{ص}{س}$ مع مراعاة الربع الذى يقع فيه

الضلع النهائى للقوة

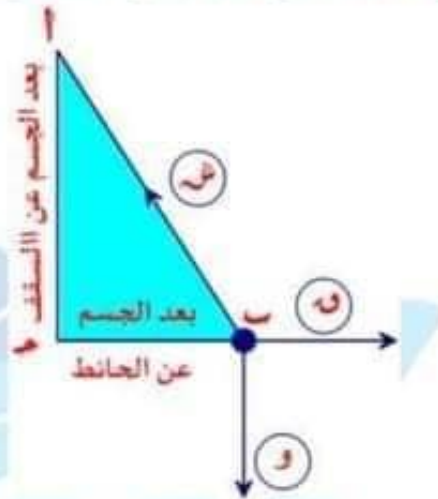
الاتزان

الأشكال الهندسية الهامة في الوحدة

الثانية

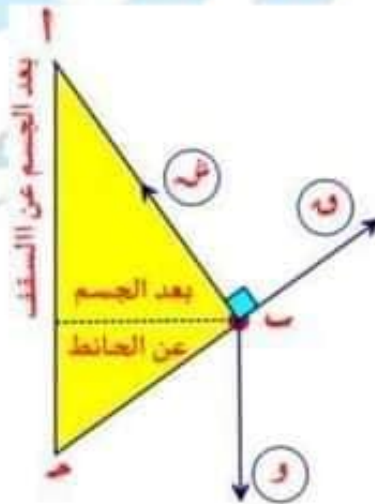
١ جسم مربوط بأحد طرفى خيط وأثرت عليه قوة

أفقية

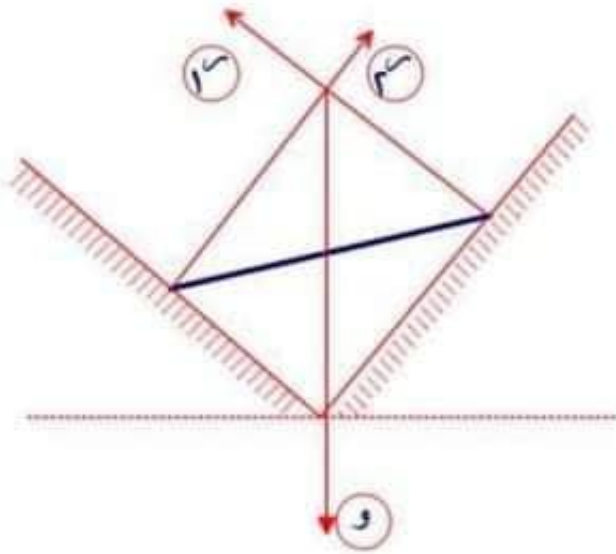


٢ جسم مربوط بأحد طرفى خيط وأثرت عليه

عمودية على الخيط



٩ قضيب يرتكز على مستويين أملسين يميلان على الأفقى



اتزان جسم علس مستوي مائل أملس

إذا وضع جسم وزنه (و) على مستوي مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها θ فإن الجسم يكون واقعاً تحت تأثير قوتين

١ قوة الوزن (و) واتجاهها رأسياً إلى أسفل

٢ قوة رد فعل المستوي المائل الأملس (ح) وهي

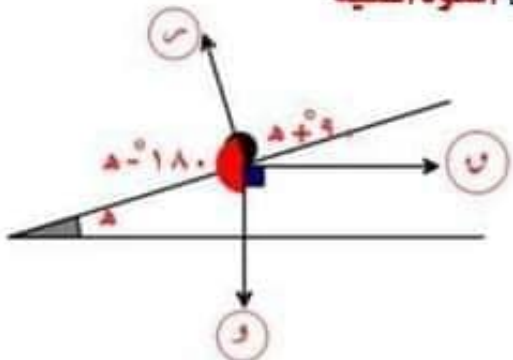
قوة عمودية على المستوي وهاتان القوتان لا يمكن

أن يتزنا حيث أن خطي عملهما ليسا على استقامو

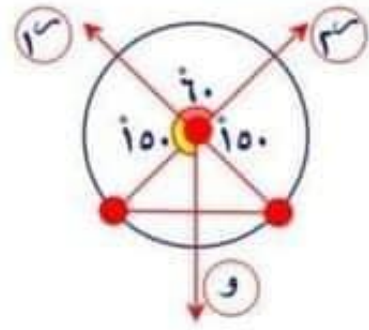
واحدة ولكي يحدث الأتزان لابد من وجود قوة ثالثة

تؤثر على الجسم وتأخذ الأشكال الآتية :

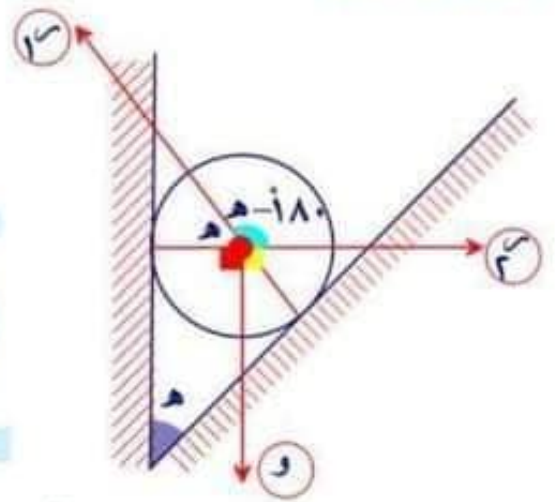
١ القوة أفقية



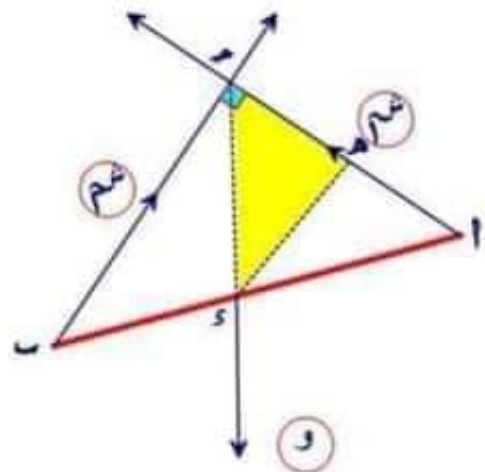
٦ كرة ترتكز على قضيبين متوازيين والبعد بينهما يساوى نصف قطر الكرة



٧ كرة تسند على حائط رأسى أملس ومستوي يميل على الرأسى



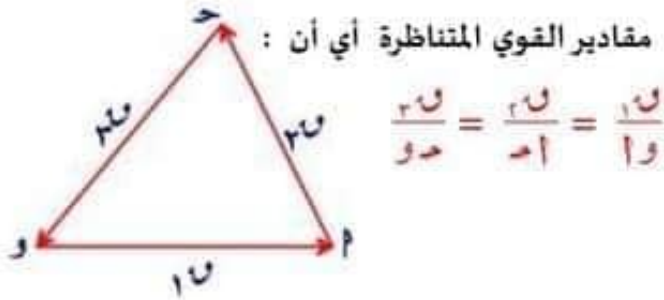
٨ قضيب منتظم معلق بخيطين في نقطة واحدة (في سقف حجرة أو في مسمار) والخيطين متعامدان



فمثلا: في الشكل المقابل يمثل مثلث القوي

لمجموعة القوي المتزنة ١٥ ، ٢٥ ، ٣٥

حيث إن أطوال أضلاع المثلث تكون متناسبة مع

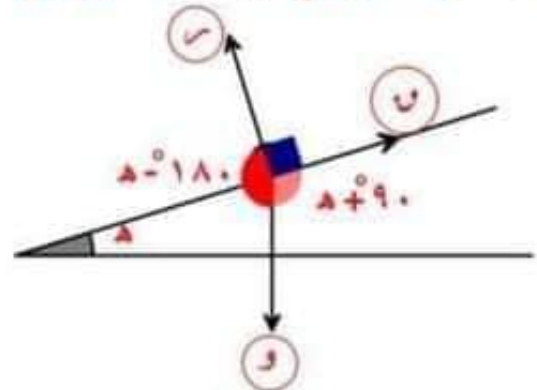


قاعدة

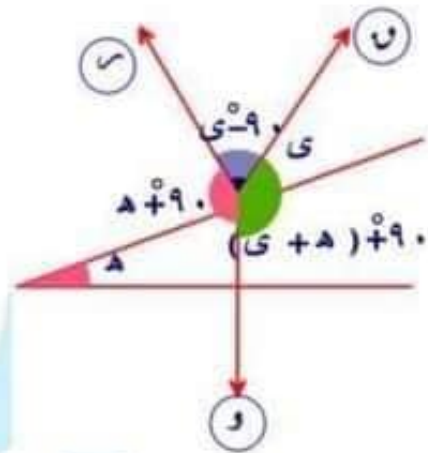
إذا أمكن تمثيل ثلاث قوي مستوية متلاقية في نقطة بأضلاع مثلث مأخوذ في ترتيب دوري واحد فإن هذه القوي تكون متزنة

هذا يعني إنه لكي تتزن القوي الثلاث يجب أن تكون مقاديرها تصلح لأن تكون أطوال أضلاع مثلث أي تحقق متباينة المثلث (مجموع طولي أي ضلعين في مثلث أكبر من الضلع الثالث)

٢ القوة تعمل في اتجاه خط أكبر ميل



٣ القوة تميل علي خط أكبر ميل



ملحوظة

بعد رسم المسألة يتم تطبيق قاعدة لامي أو قاعدة

مثلث القوي قاعدة لامي

إذا أتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوي مستوية متلاقية في نقطة فإن مقدار كل قوة يتناسب مع جيب الزاوية المحصورة بين القوتين الأخرتين

قاعدة مثلث القوي

إذا اتزنت ثلاث قوي متلاقية في نقطة وسم مثلث أضلاعه توازي خطوط عمل القوي فإن أطوال أضلاع المثلث تكون متناسبة مع مقادير القوي المتناظرة

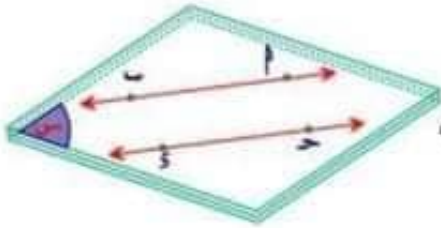
ففي الشكل المقابل :

$$\emptyset = \overline{rs} \cap \overline{ab}, \overline{rs} \parallel \overline{ab}$$

ولذلك المستقيمان

\overline{rs} ، \overline{ab} يعينان

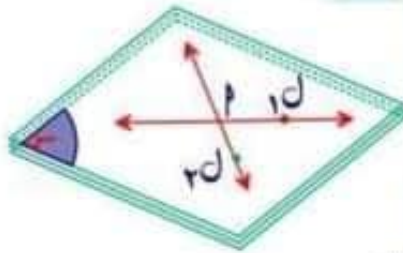
المستوي π



الأوضاع النسبية للمستقيمان والمستويات في الفراغ

1) المستقيمان المتقاطعان

هما مستقيمان يقعان في نفس المستوي ويشتركان في نقطة واحدة



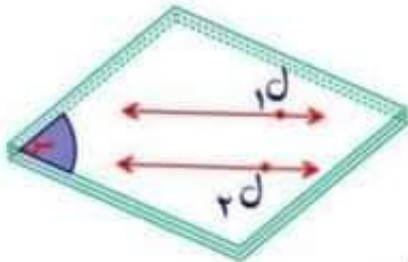
* l_1, l_2 متقاطعان

$$\{ \alpha \} = l_1 \cap l_2$$

* يجمعهما مستوي واحد

2) المستقيمان المتوازيان

هما مستقيمان يقعان في نفس المستوي ولا يشتركان في نقطة واحدة



$$* l_1 \parallel l_2$$

$$* \emptyset = l_1 \cap l_2$$

* يجمعهما مستوي واحد

3) المستقيمان المتخالفان

هما مستقيمان لا يمكن أن يحتويهما مستوي واحد

ملخص قوانين

الهندسة الفراغية

المستقيمان والمستويات في الفراغ

تعيين المستوي في الفراغ

يتحدد المستوي في الفراغ بإحدى الحالات الآتية

1) ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة

ففي الشكل المقابل :

النقط α, β, γ ليست على استقامة واحدة

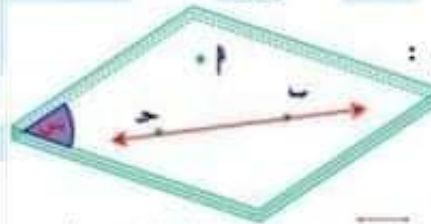


لذلك تعين المستوي

π أو المستوي $\alpha\beta\gamma$

2) مستقيم ونقطة لا تنتمي إليه

ففي الشكل المقابل :



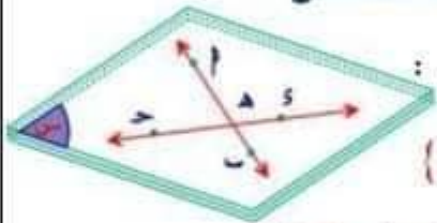
$\alpha \notin l$ ولذلك

النقطة α والمستقيم l يعينان المستوي π أو

المستوي αl

3) مستقيمان متقاطعان

ففي الشكل المقابل :



$$\{ \alpha \} = l_1 \cap l_2$$

ولذلك المستقيمان l_1, l_2

يعينان المستوي π أو المستوي $\alpha l_1 l_2$

4) مستقيمان متوازيان غير منطبقين

أي أن : $ل \supset س$ ، $ل \cap س = ل$

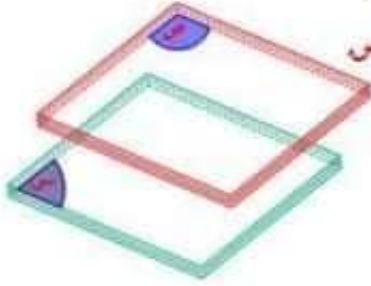
ملحوظة : إذا اشترك مستقيم ومستوي في أكثر من نقطة واحدة فإن المستقيم يقع بأكمله داخل المستوي

٢ الأوضاع النسبية لمستويين في الفراغ

١ المستويان متوازيان

المستوي $س$ // المستوي $ص$

أي أن : $س \cap ص = \emptyset$

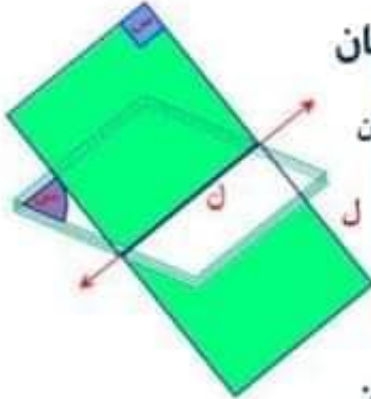


٢ المستويان متقاطعان

المستويان $س$ ، $ص$ يشتركان

مقاطعان في خط مستقيم $ل$

أي أن : $س \cap ص = ل$



٣ المستويان منطبقان

المستويان $س$ ، $ص$

يشتركان في جميع النقط

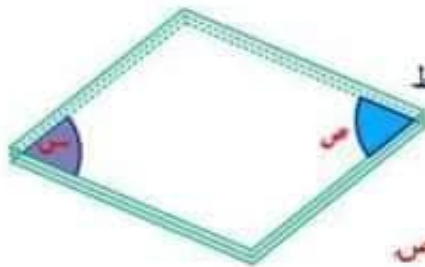
(منطبقان) أي أن :

$س \cap ص = س = ص$

ملاحظات :

١ إذا اشترك مستويان مختلفان في نقطة فإنهما

يشتركان في مستقيم يمر بهذه النقطة



* $ل$ ، $ل$ متخالفان

* $ل \cap ل = \emptyset$

* لا يجمعهما مستوي واحد

ملحوظة :

المستقيمان المتخالفان غير متوازيين وغير متقاطعين لأنه لا يجمعهما مستوي واحد

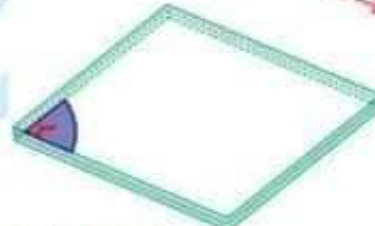
٢ الأوضاع النسبية لمستقيم ومستوي في الفراغ

١ المستقيم يوازي المستوي

المستقيم $ل$ // المستوي $س$

أي أن :

$ل \cap س = \emptyset$



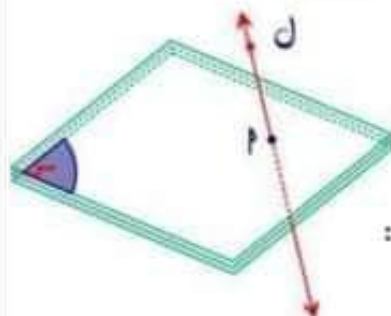
٢ المستقيمان المتوازيان

المستقيم $ل$ يقطع

المستوي $س$

في نقطة واحدة أي أن :

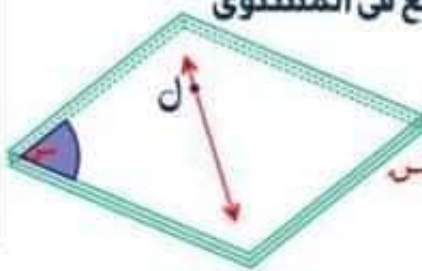
$ل \cap س = \{1\}$



٣ المستقيم يقع في المستوي

المستقيم $ل$ يقع

بأكمله في المستوي $س$

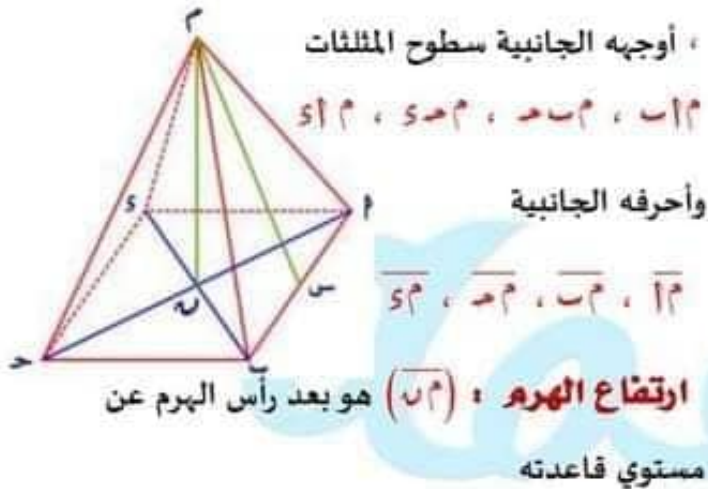


الهرم

تعريف الهرم

هو مجسم له قاعدة واحدة على شكل مضلع وجميع أوجهه الأخرى مثلثات تترك في رأس واحدة ويسمي الهرم ثلاثياً أو رباعياً أو خماسياً أو وفقاً لعدد أضلاع قاعدته

في الشكل المقابل : $س ا ب م$ هرم رباعي رأسه $م$ وقاعدته المضلع $س ا ب م$



الارتفاع الجانبي : $(م-س)$ هو بعد رأس الهرم عن أحد أضلاع قاعدته

حالات خاصة من الهرم

1 **الهرم القائم** : يكون الهرم قائماً إذا كان موقع العمود المرسوم من رأس الهرم علي قاعدته يمر بمركزها الهندسي .

2 **الهرم المنتظم** : هو الهرم الذي قاعدته مضلع منتظم مركزه هو موقع العمود المرسوم من رأس الهرم عليها .

أي أنه : هرم قائم قاعدته مضلع منتظم

- 1 إذا تقاطعت ثلاثة مستويات مثنى مثنى فإن مستقيمت تقاطعها إما تقاطعها إما أن تكون متوازية أو متقاطعة جميعاً جميعاً في نقطة واحدة
- 2 إذا أشترك مستقيم ومستوى في أكثر من نقطة واحدة فإن المستقيم يقع بتمامه داخل المستوى .
- 3 المستقيمان الموازيان لثالث في الفراغ متوازيان
- 4 المستقيمت الرأسية في الفراغ كلها متوازية ولكن ليس بالضرورة أن تكون المستقيمت الأفقية كلها متوازية
- 5 إذا تقاطع المستقيمان الحاملان لقطري الشكل الرباعي في نقطة فإن أضلاعه تقع جميعاً في مستوى واحد

ملاحظات :

- 1 عدد المستويات التي تمر بـ
- أ) بنقطة واحدة عدد لا نهائي
- ب) بنقطتين عدد لا نهائي
- ج) بثلاث نقاط على استقامة واحدة عدد لا نهائي
- د) بثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة واحد
- 2 عدد المستقيمت التي تمر بـ
- أ) بنقطة واحدة عدد لا نهائي
- ب) بنقطتين واحد
- ج) بثلاث نقاط على استقامة واحدة واحد
- د) بثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة صفر

الهرم الثلاثي

1 الهرم الثلاثي منتظم الوجوه

خواصه

1 أحرفه الجانبية متساوية في الطول وتساوى

أطوال أضلاع قاعدته

2 أوجهه الجانبية مثلثات متساوية الأضلاع

3 ارتفاعاته الجانبية متساوية في الطول وأي منها

يساوى ارتفاع قاعدته

4 علاقات هامة خاصة بالهرم الثلاثي منتظم

الوجوه

$$* \sqrt{3}l = \sqrt{6}e = \sqrt{2}e^2$$

ومن هذه العلاقة نستطيع إيجاد النسبة بين طول

حرف الهرم (طول ضلع قاعدته) وبين ارتفاعه

الجانبى أو بين طول ضلع قاعدته وارتفاع الهرم

$$* \text{المساحة الجانبية} = \frac{3\sqrt{3}}{4}l^2$$

$$* \text{المساحة الكلية} = \frac{3\sqrt{3}}{4}l^2 + l^2$$

$$* \text{الحجم} = \frac{\sqrt{3}}{12}l^3$$

حيث $l = \text{طول الحرف}$ ، $e = \text{الارتفاع}$

، $e = \text{الارتفاع الجانبى}$

1 الهرم الثلاثي المنتظم خواصه

1 أحرفه الجانبية متساوية في الطول

2 أوجهه الجانبية مثلثات متساوية الساقين

فمثلاً : في الهرم $ASMS$ الموضح بالشكل

إذا كانت S هي المركز الهندسي لقاعدته المنتظمة

$ASMS$ (على شكل مربع)

وكان :

$MS \perp$ مستوي القاعدة

فإن الهرم $ASMS$

يسمى هرمًا منتظمًا

خواص الهرم المنتظم

1 أحرفه الجانبية متساوية في الطول .

2 ارتفاعاته الجانبية متساوية في الطول .

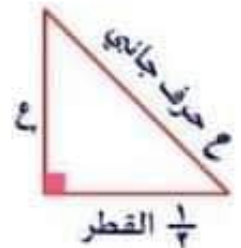
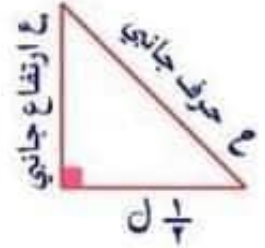
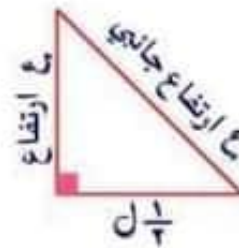
3 أوجهه الجانبية سطوح مثلثات متطابقة

متساوية الساقين .

ويمكن تلخيص العلاقة بين طول حرف الهرم

وارتفاعه الجانبى وارتفاع الهرم وطول قاعدته وطول

قطره في الهرم الرباعي المنتظم بالمثلثات الآتية



٢ من طي ورقة على شكل قطاع دائري بحيث

ينطبق قطريه كل على الآخر



ويمكن اختصار المطلوب في مثل قائم



$$l^2 = r^2 + h^2$$

شبكة المخروط

المخروط له شبكة واحدة ولكن يختلف شكلها باختلاف العلاقة بين طول الراس ونصف قطر قاعدتها

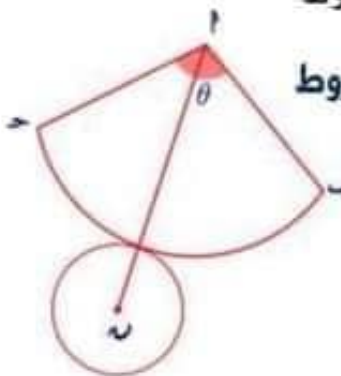
في كل الأشكال الآتية

١ - يمثل راس المخروط

٢ - الدائرة تمثل قاعدته المخروط

٣ - يمثل ارتفاع المخروط

شكل شبكات المخروط



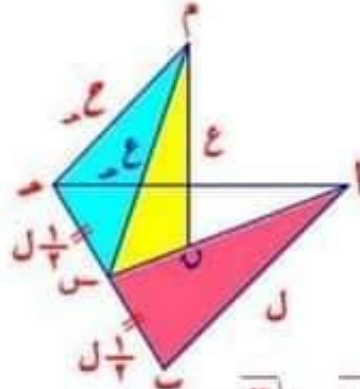
١ عندما $l < 2r$

$$0 < \theta < 180^\circ$$

٣ ارتفاعاته الجانبية متساوية في الطول

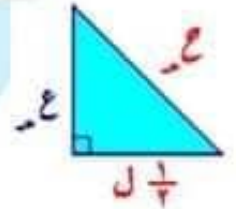
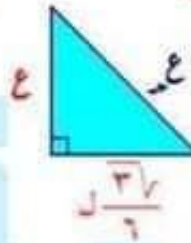
٤ علاقات هامة خاصة بالهرم الثلاثي منتظم

الوجوه



$$l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2} = l \cdot s \quad *$$

$$l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = l \cdot s \cdot \frac{1}{3} = l \cdot s \cdot \frac{1}{3}$$



والمثلثات السابقة أهم مثلثين في الهرم الثلاثي المنتظم

المخروط

المخروط

هو مجسم له قاعدة واحدة على شكل منحنى

مغلق وله رأس واحدة

ينتج المخروط من

١ من دوران مثلث قائم الزاوية حول أحد

أضلاعه دورة كاملة

٢ من دوران مثلث متساوي الساقين حول

محوره نصف دورة كاملة

* **المساحة الكلية = المساحة الجانبية +**

مساحة القاعدة

ملاحظات

1 **قاعدة الهرم المنتظم من الممكن**

أن تكون :

* مثلث متساوي الأضلاع ومساحته $= \frac{\sqrt{3}}{4} L^2$

حيث L طول ضلع القاعدة

* مربع ومساحته $= L^2$ حيث L طول ضلع

القاعدة

* مضلع منتظم (خماسي منتظم أو سداسي

منتظم) $\frac{n}{4} S^2 \sin \frac{\pi}{n}$ حيث S طول الضلع

n ، عدد الأضلاع

2 **قاعدة المخروط تكون :**

* دائرة ومساحتها $= \pi r^2$

ومحيط القاعدة $= 2\pi r$

يمكن كتابة قوانين المخروط

* **الحجم** $= \frac{1}{3} \pi r^2 h$

* **المساحة الجانبية**

$= \frac{1}{2} \times (2\pi r) \times l = \pi r l$

* **المساحة الكلية**

$= \pi r l + \pi r^2 = \pi r (l + r)$

عندما

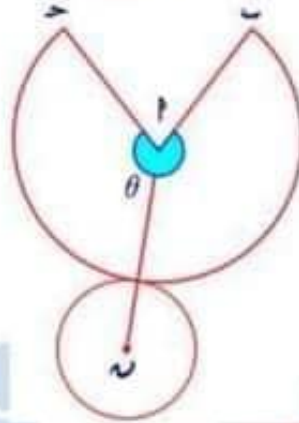
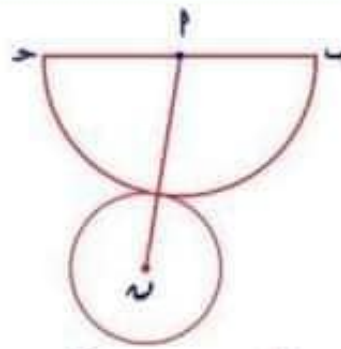
$l = 2r$

$\theta = 180^\circ$

عندما

$l > 2r$

$\theta < 180^\circ$



المساحة الجانبية والكلية والحجم

أولاً : الهرم

* **الحجم** $= \frac{1}{3}$ مساحة القاعدة \times الارتفاع

* **المساحة الجانبية** $= \frac{1}{2}$ محيط القاعدة

\times الارتفاع الجانبي

* **المساحة الكلية**

المساحة الجانبية

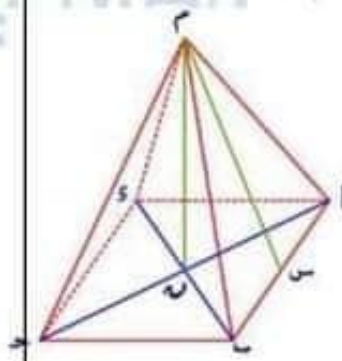
+ مساحة القاعدة

ثانياً : المخروط

* **الحجم** $= \frac{1}{3}$ مساحة القاعدة \times الارتفاع

* **المساحة الجانبية** $= \frac{1}{2}$ محيط القاعدة

\times طول الراسم



حالات خاصة

1 معادلة الدائرة المارة بنقطة الأصل هي

$$x^2 + y^2 + Ax + By = 0$$

من الحد المطلق

أي أن : $(A = 0)$

2 معادلة الدائرة التي مركزها علي محور السينات

$$x^2 + y^2 + Ax + B = 0$$

المعادلة خالية من الحد المشتغل علي y أي أن

: $(B = 0)$

3 معادلة الدائرة التي مركزها يقع علي محور

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

المعادلة خالية من الحد المشتغل علي x أي أن

: $(A = 0)$

4 معادلة الدائرة التي تمس محور السينات :

$$|k| = r$$

$$h = l + k - n$$

$$h = l + k - l' = l'$$

المعادلة هي :

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

5 معادلة الدائرة التي تمس محور الصادات :

$$|l| = r, \quad h = l + k - n$$

$$h = l + k - l' = l'$$

المعادلة هي :

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

6 معادلة الدائرة التي تمس محور المحورين :

$$|l| = |k| = r$$

$$h = l + k - n$$

$$h = l + k - l' = l'$$

المعادلة هي :

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

ملاحظات

1 الصورة العامة لمعادلة الدائرة :

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

أن تحقق الشروط الآتية :

* معادلة من الدرجة الثانية في x, y

* خالية من الحد المشتغل علي x

* معامل $x^2 =$ معامل $y^2 = 1$

2 لكي تمثل معادلة من الدرجة الثانية في

x, y معادلة دائرة يلزم تحقق الشروط

السابقة وأن :

$$l^2 + k^2 - n > 0$$

3 عند تعيين مركز أو طول نصف قطر دائرة من

معادلتها العامة يجب أن يكون

معامل $x^2 =$ معامل $y^2 = 1$ لذلك يجب

القسمة علي هذا المعامل إذا كان خلاف الوحدة .