سلسلة نوبل في الرياضيات

# حل الاختبارات التراكمية القصيرة من التفاضل

إعداد :

أحمد نجاح

أستاذ الرياضيات MATH &

## * الطرائق التفاضلية *

① $\text{نها}_{س \to 0} \frac{\sqrt{٧س + ٤} - ٢}{س^{٢} + س}$

**الحل**

بالتعويض المباشر = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ..

نستخدم الضرب × مرافق البسط

$\text{نها}_{س \to 0} \frac{(\sqrt{٧س + ٤} - ٢) \times (\sqrt{٧س + ٤} + ٢)}{(س^{٢} + س) \times (\sqrt{٧س + ٤} + ٢)}$

$\text{نها}_{س \to 0} \frac{(٧س + ٤ - ٤)}{س (س + ١) (\sqrt{٧س + ٤} + ٢)}$

$\text{نها}_{س \to 0} \frac{٧}{(س + ١) (\sqrt{٧س + ٤} + ٢)}$

$= \frac{٧}{(١ + ٠)(٢ + ٢)} = \frac{٧}{٤}$

② $\text{نها}_{س \to ١} \frac{٢س^{٢} + س - ٣}{س^{٢} - ١}$

**الحل**

بالتعويض المباشر = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ نستخدم التحليل لغير البسط والتحليل مرة بسيطة مرتبطة للمقام

$\text{نها}_{س \to ١} \frac{(٢س + ٣)(س - ١)}{(س + ١)(س - ١)}$

$\text{نها}_{س \to ١} \frac{٢س + ٣}{س + ١} = \frac{٢ + ٣}{١ + ١} = \frac{٥}{٢}$

③ $\text{نها}_{س \to ٤} \frac{س^{٣} - ١٥س - ٤}{س - ٤}$

**الحل**

نستخدم القسمة المطولة أو القسمة التركيبية للتخلص من العامل الصفري وهو $س - ٤$

**أولاً: القسمة المطولة**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $س^{٣}$ | $-١٥س$ | $-٤$ | $س - ٤$ |
| $\ominus س^{٣} \oplus ٤س^{٢}$ | | | $س^{٢} + ٤س + ١$ |
| $٤س^{٢} - ١٥س$ | | | |
| $\ominus ٤س^{٢} \oplus ١٦س$ | | | |
| $س - ٤$ | | | |
| $\ominus س \oplus ٤$ | | | |
| صفر | | | |

$س^{٣} - ١٥س - ٤ = (س - ٤)(س^{٢} + ٤س + ١)$

$\text{نها}_{س \to ٤} \frac{(س - ٤)(س^{٢} + ٤س + ١)}{(س - ٤)}$

$= \text{نها}_{س \to ٤} س^{٢} + ٤س + ١$

$= ١٦ + ١٦ + ١ = ٣٣$

**ط ١**

بالتعويض المباشر = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ نستخدم التحليل الغير بسيط للبسط والتحليل مرة بسيطة مرتبطة للمقام

$\text{نها}_{س \to ١} \frac{(٣س + ٤)(س - ١)}{(س + ١)(س - ١)}$

مذكرتي mozkrty.com

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

④ $\lim_{س \to 1} \left( \frac{1}{1-س} - \frac{3}{1-س^3} \right)$

الحل

$= \lim_{س \to 1} \left( \frac{1}{1-س} - \frac{3}{(1-س)(1+س+س^2)} \right)$

$= \lim_{س \to 1} \frac{1+س+س^2-3}{(1-س)(1+س+س^2)}$

$= \lim_{س \to 1} \frac{س^2+س-2}{(1-س)(1+س+س^2)}$

$= \lim_{س \to 1} \frac{(س+2)(س-1)}{(1-س)(1+س+س^2)}$

$= \lim_{س \to 1} \frac{س+2}{1+س+س^2} = \frac{3}{3} = 1$

---

⑤ أوجد قيمة

$$\lim_{س \to 2} \frac{س^7 - 128}{س^2 + 2س - 10}$$

الحل

بالتعويض المباشر $\frac{صفر}{صفر}$ نستخدم القانون

$$\lim_{س \to 2} \frac{س^7 - 2^7}{(س+5)(س-2)}$$

$= \lim_{س \to 2} \frac{س^7 - 2^7}{س-2} \times \lim_{س \to 2} \frac{1}{5+س}$

$= 7 \times 2^6 \times \frac{1}{7} = 2^6 = 64$

---

⑥ $\lim_{س \to -2} \frac{(س+3)^5 - 1}{س+2}$

الحل

$ص = س+3 \quad س+2 = ص+1$

$س \to -2 \quad ص \to 1$

$$\lim_{ص \to 1} \frac{ص^5 - 1}{ص - 1}$$

$= 5 \times 1^4 = 5$

---

⑦ إذا كانت $ن(س)$ دالة وكانت $\lim_{س \to 2} \frac{ن(س) - 8}{س-2} = 7$

فأوجد قيمة $\lim_{س \to 2} \frac{2س^2 - ن(س)}{س-2}$

الحل

$$\lim_{س \to 2} \frac{2س^2 - ن(س) + 8 - 8}{س-2}$$

$$= \lim_{س \to 2} \frac{2س^2 - 8 - ن(س) + 8}{س-2}$$

اطرح + عامل مشترك

$$= \lim_{س \to 2} \frac{2س^2 - 8}{س-2} - \lim_{س \to 2} \frac{ن(س) - 8}{س-2}$$

$$= \lim_{س \to 2} \frac{2(س^2 - 4)}{س-2} - \lim_{س \to 2} \frac{ن(س) - 8}{س-2}$$

$$= \lim_{س \to 2} \frac{2(س-2)(2+س)}{س-2} - \lim_{س \to 2} \frac{ن(س) - 8}{س-2}$$

$= 2 \times$ نهـا $(2+س) - 7 = 2 \times 4 - 7 = 1$

إعداد : أحمـــد نجاح معلم أول رياضيات MATH & ت / ٠١١٢٥٦٨٨٤٠٣

مذكرتي Modarty.com
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

# حل اختبار ٧

**(١) الدالة د(س) = ٤ س^-٣ + س / (س^٤ - ٩) متصلة لكل س ∈ ح .....**

**الحل**

نفرض انه هـ(س) = ٤ س^-٣ = ٤ / س^٣ كسرية متصلة على ح - {٠}

ر(س) = س / (س^٤ - ٩)

س^٤ - ٩ = ٠ ⇐ (س - ٣)(س + ٣) = ٠

س = ± ٣ ∉ المتصلة على ح - {± ٣}

∴ الدالة د متصلة على ح - {٠ ، ٣ ، -٣}

**(٢) د(س) = (س + ٢) / √(س - ٢) متصلة لكل س ∈ .....**

**الحل**

أولاً : نبحث أصفار المقام حيث

المقام ≠ صفر ← √(س - ٢) ≠ صفر

√(س - ٢) ≠ ٠ ← بتربيع ← س - ٢ ≠ ٠ ← س ≠ ٢ ... (١)

ثانياً : √(س - ٢) ≥ صفر (موجود في المقام) ومطروح ضمناً

∴ س - ٢ > صفر ∴ س ∈ ]٢ ، ∞[ ... (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن

س ∈ ]٢ ، ∞[ - {٤}

**(٣) إذا كانت د(س) = { (س^٨ - ٢^٨) / (س^٥ - ٢^٥) ، س ≠ ٢ ; ٠٠ ، س = ٢ } فإن ٢ = ..... حيث د متصلة**

**الحل**

∵ الدالة د متصلة

∴ د(٢) = دهـا(س) ، س ← ٢

∴ ٠٠ = دهـا (س^٨ - ٢^٨) / (س^٥ - ٢^٥) ، س ← ٢

٠٠ = دهـا ٨ س^٧ / ٥ س^٤ ، س ← ٢ (بالمشتقة)

٠٠ = دهـا ٨/٥ س^٣ ← دهـا(س) = ٨/٥ س^٣

دهـا(٢) = ٨/٥ × ٨ = ٢٠٠ − ٥

٢٠٠ = ٨/٥ ٢^٣ ب ← ب = ٢٠٠ × ٥/٨ = ١٢٥

∴ ب = ∛١٢٥ = ٥

**(٤) إذا كانت د(س) = { (√(س + ١) + ٦) / س ، س ≠ ٠ ; ب^٢ + جتا ٣س ، س ≤ ٠ } متصلة عند س = ٠ فأوجد ب**

∵ د متصلة عند ٠ ⇐ دهـا(س) = د(٠)

ب^٢ + ١ = دهـا (√(س + ١) + ٦) / س

ب^٢ + ١ = دهـا (س + ١ - ١) / س(√(س + ١) + ٦)

ب^٢ + ١ = دهـا ١ / (√(س + ١) + ٦)

ب^٢ + ١ = ١/٦ + ٦

ب^٢ + ١ = ٥

ب^٢ = ٤

ب = ± ٢



مذكرتي Mozkrty.com
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

⑤ إذا كانت د دالة أحادية
لنهاية عند ٢ وكانت نهـا د(س) = ٣
س ← ٢
فإن نهـا د^-١(س) = ....
س ← ٣

الحل

س ← ٢

د(٢) = ٣

بالتعويض بالمتغير نجد

ص = ٣

ص ← ٢

∴ نهـا د^-١(س) = ٢
س ← ٣

⑥ أوجد قيمة

نهـا (س جا٢س + جا٣س^٢) / (ظا^٢٣س + س^٢)
س ← ٠

الحل

بالتعويض المباشر نكون الناتج صفر/صفر
∴ كمية غير معينة لذا لابد نلجأ إلى القسمة على س^٢

نهـا (س/س^٢ جا٢س/س + جا٣س/س^٢) / (ظا^٢٣س/س^٢ + س/س^٢)
س ← ٠

= (٢ + ٣) / (١ + ٩) = ٥/١٠ = ١/٢

س٧ : ابحث اتصال د حيث

د(س) = { س^٢ + ٣ ، س ≤ ١
{ (س^٤ + ٢س - ٣) / (س - ١) ، س > ١

عند س = ١

الحل

أولاً: نبحث تعريف الدالة عند س = ١

د(١) = (١)^٢ + ٣ = ٤

ثانياً: نهاية اليمين للدالة

د(١)^+ = نهـا (س^٢ + ٣) = (١)^٢ + ٣ = ٤
س ← ١^+

ثالثاً: نهاية اليسار للدالة

د(١)^- = نهـا (س^٢ + ٢س - ٣) / (س - ١)
س ← ١^-

= (١ + ٢ - ٣) / (١ - ١) = صفر/صفر غير معين

∴ د(٦) = نهـا (س - ١)(س + ٣) / (س - ١)
س ← ١^-

= نهـا س + ٣ = ١ + ٣ = ٤
س ← ١^-

نلاحظ أن د(١) = د(١)^+ = د(١)^-

أي أن نهـا د(س) = ٤
س ← ١

∴ للدالة متصلة عند س = ١

تذكر

جا م س / س^٢ = م فقط بدون تربيع

أما جا^٢ م س / س^٢ = (جا م س / س)^٢ = م^٢




مذكرتي Mokrty.com
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

③ $\lim_{س \to -2} \frac{[د(س)]^3 - 64}{د(س) - 4}$

صفر ١٦ ٣٢ (٤٨)

* لاحظ ما يأتى *

لكى نستخدم نظرية (٤) القانون يجب تحويل $س \to -2$ إلى $د(س)$ ويكون ذلك بالتعويض

عند $د(-2) - 4 =$ صفر

$د(-2) = 4$ وصفها $د(س) \to 4$

لانه لم يفترض عند التعويض المباشر يكون الناتج كمية غير معرفه $\frac{صفر}{صفر}$

$\therefore$ نهـا $\frac{[د(س)]^3 - 4^3}{د(س) - 4}$

$د(س) \to 4$

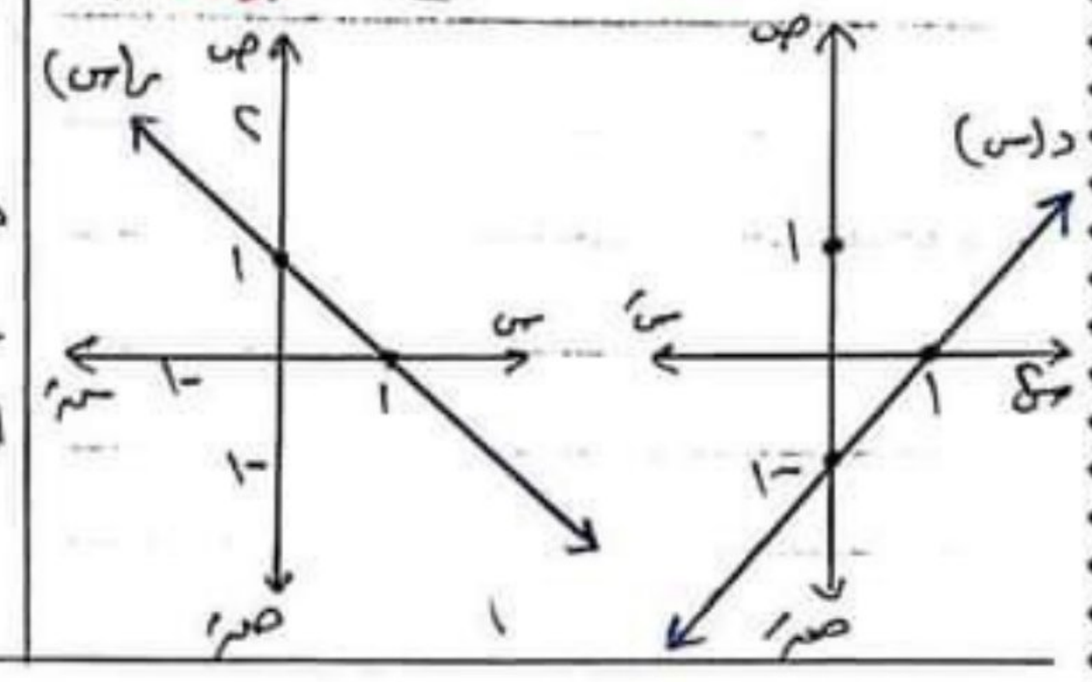
$= 3 \times 4^2 = 3 \times 16 = 48$

④ الشكلان التاليان يمثلان منحنيا الدالتين $د$ ، $ر$ فإن

نهـا $\frac{د(س)}{ر(س)} =$ .....

$س \to 1$

١ صفر (-١) غير موجودة




لاحظ: من تمثيل البيانى نستنتج أنه:

الجزء المقطوع من المحاذات هو -١

$\therefore د(س) = س - 1$

المستقيم البيانى يقطع من المحاذات جزءاً = ١

$\therefore ر(س) = -س + 1$

الأول يصنع زاوية حادة مع البيانى الموجب الثانى $س$ $س$ فنفرجة $س$ $س$

نهـا $\frac{د(س)}{ر(س)} =$ نهـا $\frac{س - 1}{-س + 1}$

$س \to 1$ $س \to 1$

$= -1$ نهـا $\frac{س - 1}{-(س - 1)}$

$س \to 1$

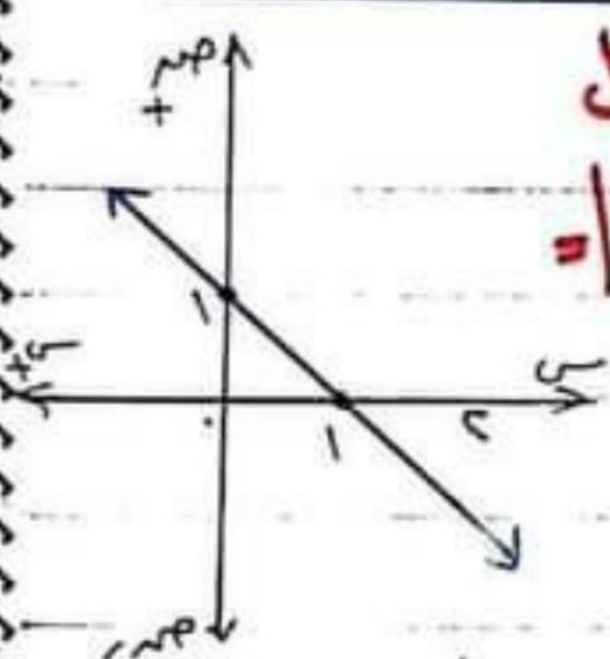
⑤ من الشكل المقابل

نهـا $|د(س)| =$

$س \to \infty$

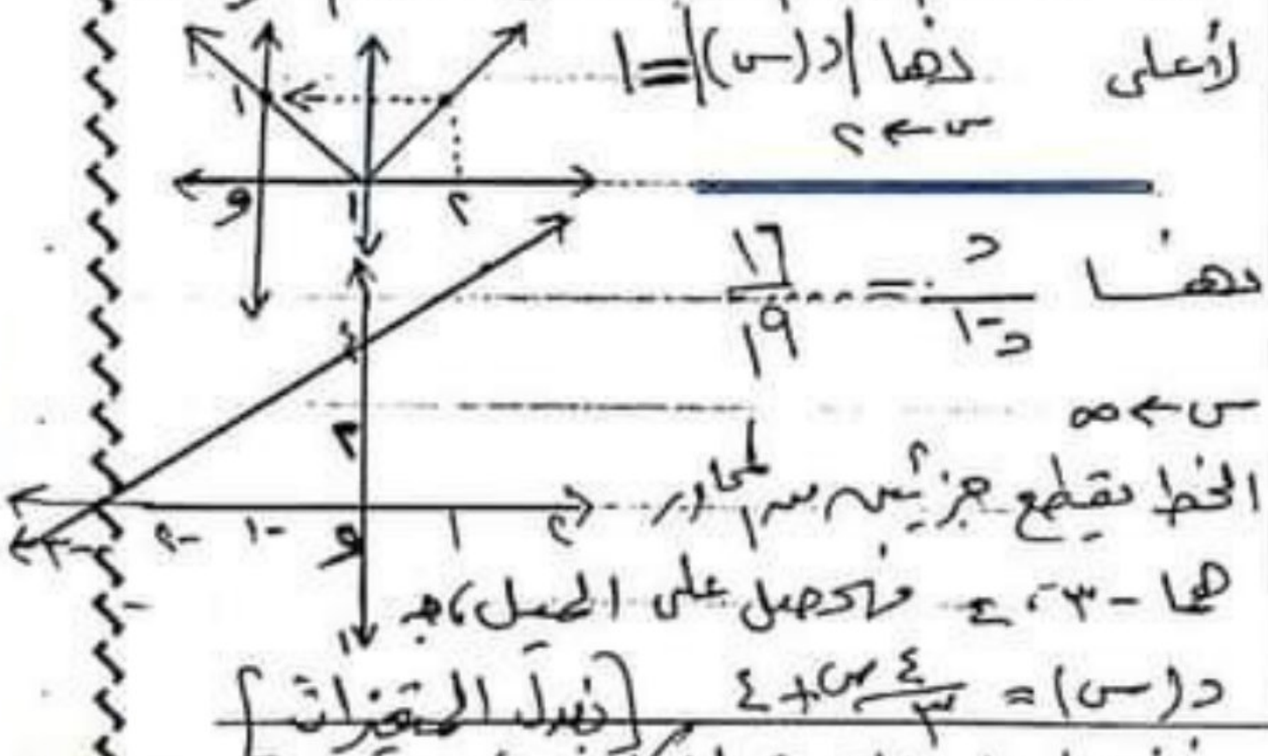
-١ صفر

(١) غير موجودة




منحنى دالة المقياس هو نفسه منحنى $د(س)$ بعد انعكاس الجزء الموجود أسفل محور السينات لأعلى نهـا $|د(س)| = 1$

$س \to \infty$




الخط يقطع جزء من المحاذات

لها $-3 ، 4$ فنحصل على الميل، $ب$

$د(س) = \frac{4}{س} + 4$ [بدلنا المقدارات]

فنحصل على الصورة العكسية.



مذكرتي
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

سلسلة نوبل في الرياضيات

# إجابات نماذج اختبارات الكتاب المدرسي في التفاضل وحساب المثلثات

## الاختبار الأول

إعداد :
أحمد نجاح
أستاذ الرياضيات MATH &

(١) س

نهـا
س ← ٥
س٣ + ٥
س (٢ س٢ + ٣)
٥/٨ ، ١ ، ٥/٣ ، ٤

الحل

عند التعويض المباشر ينتج ∞/∞

نهـا
س ← ٥
(س٣ + ٥) / (٢ س٢ + ٣ س)

بقسمة البسط والمقام على س

نهـا
س ← ٥
(س٣/س + ٥/س) / (٢ س٢/س + ٣ س/س)

= (١ + صفر) / (٢ + صفر) = ١/٢

(٢)

في Δ أ ب جـ
٤ جا أ = ٣ جا ب = ٦ جا جـ
فإن ق (∠ جـ) ≈ ...
٨٩° ، ٢٩ ، ٥٧ ، ٨٢

بالقسمة على ١٢

٤ جا أ / ١٢ = ٣ جا ب / ١٢ = ٦ جا جـ / ١٢

جا أ / ٣ = جا ب / ٤ = جا جـ / ٢

وضعها أ = ٣ ، ب = ٤ ، جـ = ٢

∴ جتا جـ = (أ٢ + ب٢ − جـ٢) / (٢ أ ب)

(٣)

إذا كانت
د(س) = (س٢ − ١)/(س − ١) ، س ≠ ١
د(س) = ٢ ، س = ١
متصلة عند س = ١ فإن أ = ...
صفر ، ٢ ، −٢ ، ١

∴ الدالة متصلة عند س = ١

∴ د(١) = نهـا د(س)
س ← ١

أ = نهـا (س٢ − ١)/(س − ١)
س ← ١

أ = نهـا (س − ١)(س + ١)/(س − ١)
س ← ١

أ = نهـا س + ١
س ← ١

أ = ٢ = ٢/١ = ١

(٤)

في Δ س ص ع

(س٢ + ص٢ − ع٢) / (٢ س ص) = ...

جتاس ، جتاص ، جتاع ، جا ع

س٢

(١) أوجد $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٥ - ٣٢}{س^٣ + ٣س - ١٠}$

الحل

بالتعويض المباشر ينتج $\frac{٠}{٠}$ صفر على صفر (كلام غير معين)

نلجأ إلى (نظرية ٤) القانون

$$\text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{س^٥ - ٢^٥}{(س + ٥)(س^٣ - ٢^٣)}$$

$$\text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{(س + ٥)(س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٤)}$$

$$\text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{١}{(س + ٥)(س^٢ + ٢س + ٤)} \times \text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{١}{س + ٥}$$

$$= ٥ \times ٢^٢ \times \frac{١}{٧} = \frac{١٦ \times ٥}{٧} = \frac{٨٠}{٧}$$

(٢) أوجد $\lim_{س \to ٠} \frac{جا^٢ س + ٥ جا ٣س}{س}$

الحل

بقسمة كلا من البسط والمقام ÷ س

$$\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{\frac{جا^٢ س}{س} + ٥ \frac{جا ٣س}{س}}{\frac{س}{س}}$$

$$= (٣ \times ٥) + ٢ = ١٧$$

(٣) حل المثلث أ ب جـ الحاد الزوايا والذى فيه $أ' = ٢١$ سم، $ب' = ٢٥$ سم وطول قطر الدائرة المارة برؤوسه ٢٨ سم

$$\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{جـ}{جا جـ} = ٢نـ$$

$$\frac{٢١}{جا أ} = \frac{٢٥}{جا ب} = ٢٨$$

$$جا أ = \frac{٢١}{٢٨} = \frac{٣}{٤}$$

$$جا ب = \frac{٢٥}{٢٨}$$

$$\therefore ق(\hat{أ}) \approx ٤٨° ٣٠' ٣٥''$$

$$ق(\hat{ب}) \approx ٦٣° ١٤' ٣''$$

$$ق(\hat{جـ}) = ١٨٠ - (٤٨° ٣٠' ٣٥'' + ٦٣° ١٤' ٣'')$$

$$= ٦٨° ١٠' ٣١''$$

$$\therefore \frac{جـ'}{جا جـ} = ٢نـ \Leftarrow \frac{جـ'}{جا(٦٨° ١٠' ٣١'')} = ٨$$

$$\therefore جـ' = ٢٨ \times جا(٦٨° ١٠' ٣١'')$$

$$= ٢٥٫٩٩ \text{ سم} \approx ٢٦ \text{ سم}$$

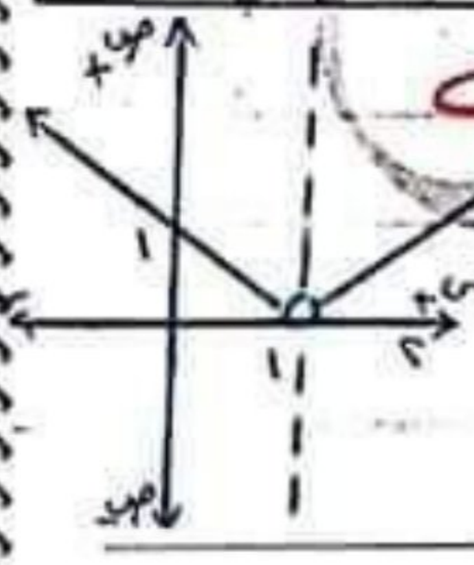
| | |
|---|---|
| $أ' = ٢١$ سم | $ق(\hat{أ}) = ٤٨° ٣٠' ٣٥''$ |
| $ب' = ٢٥$ سم | $ق(\hat{ب}) = ٦٣° ١٤' ٣''$ |
| $جـ' = ٢٦$ سم | $ق(\hat{جـ}) = ٦٨° ١٠' ٣١''$ |

س٣ : ارسم البياني أوجد

(١) نهـا$_{س \to ٠}$ د(س) = صفر

(٢) نهـا$_{س \to ٢}$ د(س) = ١

(٣) د(١) غير معرفة

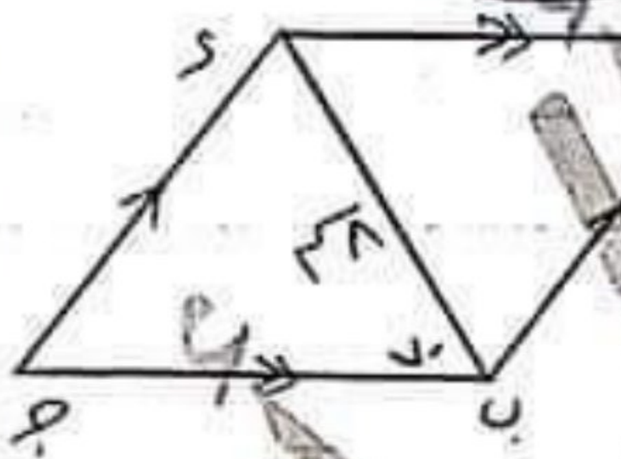





مذكرتي Mozkrty.com
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(ب) أ ب ج ء متوازى أضلاع، م(∠أ) = ٥٠°، م(∠ء ب ج) = ٧٠°، ب ء = ٣٨ سم. أوجد محيط المتوازى

الحل




م(∠ج) = ٥٠°

Δ ء ب ج فيه

م(∠ب ء ج) = ١٨٠ − (٧٠ + ٥٠) = ٦٠°

$\frac{ب ء}{جا أ} = \frac{ب ج}{جا ء} = \frac{ء ج}{جا ب}$

$\frac{٣٨}{جا ٥٠} = \frac{ب ج}{جا ٦٠} = \frac{ء ج}{جا ٧٠}$

$\frac{٣٨}{جا ٥٠} = \frac{ء ج}{جا ٧٠}$

$ء ج = \frac{٣٨ \times جا ٧٠}{جا ٥٠}$

ء ج ≈ ٤٩,٨ سم

$\frac{٣٨}{جا ٥٠} = \frac{ب ج}{جا ٦٠}$

ب ج ≈ ٩ سم

∴ محيط متوازى الأضلاع = مجموع أطوال أضلاعه

= ٢ (ب ج + ج ء)

= ٢ × (٩ + ٩,٨)

≈ ٣٨ سم

سؤال ٤

(أ) أ ب ج ∆ فيه أ ب = ٥ سم، ب ج = ٧ سم، م(∠أ) = ٤٠° أوجد م(∠ب)

الحل

$\frac{أ ب}{جا ج} = \frac{ب ج}{جا أ} = \frac{أ ج}{جا ب}$

$\frac{٥}{جا ج} = \frac{٧}{جا ٤٠}$

$\frac{٥}{جا ج} = \frac{٧}{٠,٦}$

$جا ج = \frac{٥ \times جا ٤٠}{٧}$

$= \frac{٥ \times ٠,٦}{٧}$

$= \frac{٣}{٧}$

∴ م(∠ج) ≈ ٢٥° ٣٦′ ٥١″

∴ م(∠ب) ≈ ١٨٠ − (٤٠ + ٢٥° ٣٦′ ٥١″)

≈ ١١٣° ٢٣′ ٩″

(ب) أوجد قيمة م التى تجعل الدالة د متصلة عند س = ٢ حيث

$د(س) = \begin{cases} س - ١ & ، س < ٢ \\ س - م & ، س \geq ٢ \end{cases}$

الحل

∵ الدالة متصلة عند س = ٢

∴ د(٢) = نهـا عند س ← ٢ د(س)

(٢)$^{٢}$ − ١ = نهـا عند س ← ٢ س − م

٣ = ٢ − م ٢ ⇐ ٣ − ٢ = ٢ − م ٢

م ٢ = ١ ⇐ م = $\frac{١}{٢}$

سؤال ٥

(أ) ابحث وجود نهاية د(س) عندما س ← ٠

$د(س) = \begin{cases} \frac{ظا ٢س}{س} & ، س < ٠ \\ \frac{٥س + ٦}{س + ٣} & ، س > ٠ \end{cases}$

الحل

د(٠)$^{+}$ = نهـا عند س ← ٠$^{+}$ $\frac{ظا ٢س}{س}$ ÷ $\frac{جا ٢س}{س}$ = ☐

د(٠)$^{-}$ = نهـا عند س ← ٠$^{-}$ $\frac{٥س + ٦}{س + ٣}$ = ☐ = $\frac{٦}{٣}$ = ٢

∵ د(٠)$^{-}$ = د(٠)$^{+}$ = ٢

∴ نهـا عند س ← ٠ د(س) = ☐




مذكرتي Mozkrty.com

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(١) اوجد $\lim_{س \to ١} \frac{٤ - ٧ س + ١٥}{١ - س^{٢}}$

الحل

بالضرب × مرافق البسط

$$\text{نها}_{س \to ١} \frac{(٤ - ٧ س + ١٥)(٤ + ٧ س + ١٥)}{(١ - س^{٢})(٤ + ٧ س + ١٥)}$$

$$= \text{نها}_{س \to ١} \frac{١٦ - (٧ س + ١٥)}{(١ - س^{٢})(٤ + ٧ س + ١٥)}$$

$$= \text{نها}_{س \to ١} \frac{١ - س}{(١ - س^{٢})(٤ + ٧ س + ١٥)}$$

$$= \text{نها}_{س \to ١} \frac{١}{(١ + س)(٤ + ٧ س + ١٥)}$$

$$= \frac{١}{١٦}$$

(٢) في Δ أ ب جـ يكون جتا (أ + ب) = .....

الحل

∵ مجموع قياسات زوايا Δ = ١٨٠°

∴ أ + ب = ١٨٠ − جـ

∴ جتا (أ + ب) = جتا (١٨٠ − جـ)

$$= -\text{جتا جـ} = -\left(\frac{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢} - \text{جـ}^{٢}}{٢ \text{أ ب}}\right)$$

$$= \frac{\text{جـ}^{٢} - \text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢}}{٢ \text{أ ب}}$$

(٣) في Δ أ ب جـ فيه $\frac{\text{جا أ}}{٣} = \frac{\text{جا ب}}{٥} = \frac{\text{جا جـ}}{٤}$

أوجد أ : ب : جـ

الحل

بالضرب × ١/ج الجميع لنسب

$$\frac{\text{جا أ}}{٣ \times ٤} = \frac{\text{جا ب}}{٥ \times ٤} = \frac{\text{جا جـ}}{٤ \times ٤}$$

$$\frac{\text{جا أ}}{١٢} = \frac{\text{جا ب}}{٢٠} = \frac{\text{جا جـ}}{١٦}$$

أ : ب : جـ = ١٢ : ٢٠ : ١٦

(٤) أوجد $\lim_{س \to ٥} \frac{س^{٢} + ٣}{س + ٢}$

الحل

$$\text{نها}_{س \to ٥} \frac{\frac{س^{٢}}{س^{٢}} + \frac{٣}{س^{٢}}}{\frac{س}{س^{٢}} + \frac{٢}{س^{٢}}}$$

$$= \frac{١ + ٠}{٠ + ٢} = \frac{١}{٢}$$

## الاختبار الثاني

(١) س ١ اختر

نها $\lim_{س \to ٣} \frac{س - ٣}{س^{٢} - ٩}$

$$= \text{نها}_{س \to ٣} \frac{١}{س + ٣}$$

$$= \frac{١}{٦}$$

نها $\lim_{س \to ٣} \frac{س - ٣}{(س - ٣)(س + ٣)}$

$$= \frac{١}{٦}$$

إعداد : أحمد نجاح معلم أول رياضيات MATH & ت / ٠١١٢٥٦٨٨٤٠٣

مذكرتي Mozkrty.com
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

س٢ (أ)

**اذا كانت د(س) متصلة**

$$\text{د}(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ + ٢س - ٣}{س + ٣} & س \neq -٣ \\ س + ١ & س = -٣ \end{cases}$$

**الحل**

د(-٣) = نهـا د(س)
س ← -٣

$$= نهـا \frac{(س+٣)(س-١)}{س+٣}$$
س ← -٣

= -٣ + ١ = -٣

نهـا د(س) = -٣ + ١ = -٣
س ← -١

-٣ + ١ = -٣ ← نهـا د(س) = -٣ + ١ = -٣
س ← -٣

∴ د(-٣) = -٣ + ١ = -٣

---

س٣ (أ)

**اوجد** $نهـا_{س \to ٠} \frac{١ - جتاس + ظا٣س}{١ - جتاس + ظا٢س}$

**الحل**

نقسم البسط والمقام على س

$$نهـا_{س \to ٠} \frac{\frac{١ - جتاس}{س} + \frac{ظا٣س}{س}}{\frac{١ - جتاس}{س} + \frac{ظا٢س}{س}}$$

$$= \frac{صفر + ٣}{صفر + ٢} = \frac{٣}{٢}$$

---

س٢ (ب)

**حل المثلث أ ب جـ الذى فيه**
**أ = ٩سم ، ق(∠ب) = ١٠٦°**
**ب = ١٥سم**

**الحل**

$$جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ - ٢أ ب جتا جـ$$

$$جـ^٢ = ٨١ + ٢٢٥ - ٢ \times ٩ \times ١٥ \times جتا ١٠٦°$$

∴ جـ = ٢٠ سم

$$\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{جـ}{جا جـ}$$

$$\frac{٩}{جا أ} = \frac{١٥}{جا ب} = \frac{٢٠}{١.٦ جا جـ}$$

---

س٣ (ب)

**أ ب جـ مثلث فيه**
**أ = ٣سم ، ب = ٤سم ، جـ = ٥سم**

∴ $\frac{جا أ}{٣} = \frac{جا ب}{٤} = \frac{جا جـ}{٥}$

∴ أ = ٣سم ، ب = ٤سم ، جـ = ٥سم

∵ المحيط = ٢٤ سم

∴ أ + ب + جـ = ٢٤ ⇐ ١٢ س = ٢٤

∴ س = $\frac{٢٤}{١٢}$ = ٢

---

**اذا كان أ ب جـ مثلث فيه**
**ق(∠أ) = ٩٠° ، ق(∠ب) = θ**
**محيط Δ = ٤٢ سم اوجد**
**مساحته**

**الحل**

∵ $\frac{جا أ}{٣} = \frac{جا ب}{٤} = \frac{جا جـ}{٥}$

∴ أ = ٣س ، ب = ٤س ، جـ = ٥س

∵ المحيط = ٤٢ سم

∴ أ + ب + جـ = ٤٢ ⇐ ١٢ س = ٤٢

∴ س = $\frac{٤٢}{١٢}$ = ٢



اعداد : أحمد نجاح معلم أول رياضيات MATH & ت / ٠١١٢٥٦٨٨٤٠٣

مذكرتي Mozkrty.com
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

① $\lim_{س \to -2} \frac{(س+3)^{٥} - 1}{س^{٤} - ٤}$ اوجد نهـــا

**الحل**

بالضرب × بمقترن $س+٣-١$ بطريقة مقام

$$\text{نهـا} = \frac{(س+٣)^{٥} - 1}{س^{٤} - ٤} \times \frac{س+٣-١}{س+٣-١}$$

$س \to -2$

بالقسمة على أعلى أس مقام

عندما $س \to -2$ فتكون $س+٣ \to ١$ ، $س+٣ \to -٢+٣$

$$\text{نهـا} = \frac{(س+٣)^{٥} - 1}{س+٣-١} \times \text{نهـا}$$

$س \to -2$ ، $س+٣ \to ١$ ، $س^{٤} - ٤$

$$= ٥ \times ١ \times \text{نهـا}_{س \to -2} \frac{س+٤}{(س-٢)(س^{٢}+٤)}$$

$$= ٥ \times ١ \times \frac{١}{-٢-٢} = \frac{٥}{-٤} = -\frac{٥}{٤}$$

$\Delta$ أ ب ج فيه : أ ب = ٢٧ سم ، ب ج = ٢٢ سم ، ج أ = ١٨ سم

أ د ينصف $\angle$ ب أ ج . اثبت أن أ د ينصف ب ج

ثم احسب مساحة الشكل أ ب ج د

---

$\Delta$ أ ج د فيه

$$\text{ق}(\angle \text{ج}) = \frac{(١٨)^{٢} + (١٤)^{٢} - (٨)^{٢}}{٢ \times ١٨ \times ١٤} = ٠,٩٣٥$$

$$\therefore \text{ق}(\angle \text{ج}) = ٢٠^{\circ}\ ٤٤'\ ٣٣''$$

وبالمثل $\Delta$ أ ب ج فيه

$$\text{ق}(\angle \text{ب}) = \frac{(١٨)^{٢} + (٢٧)^{٢} - (١٤)^{٢}}{٢ \times ١٨ \times ٢٧} = ٠,٩٣٥$$

$$\therefore \text{ق}(\angle \text{ب}) = ٢٠^{\circ}\ ٤٤'\ ٣٣''$$

$$\text{ق}(\angle \text{ب أ ج}) = ١٨^{\circ}$$

$\therefore$ أ ج منصف $\angle$ ب أ د

مساحة الشكل كله = مساحة $\Delta$ أ د ج + مساحة $\Delta$ أ ب ج

$$\text{مساحة } \Delta \text{ أ د ج} = \frac{1}{2} \times ١٨ \times ١٤ \times \text{جا}(٢٠^{\circ}\ ١٨'\ ٣٣'') \approx ٣٧,٤٨٥ \text{ سم}^{٢}$$

$$\text{مساحة } \Delta \text{ أ ب ج} = \frac{1}{2} \times ١٨ \times ٢٧ \times \text{جا}(٢٠^{\circ}\ ١٨'\ ٣٣'') \approx ٨٤,٣٤١ \text{ سم}^{٢}$$

مساحة الشكل كله = مساحة $\Delta$ أ د ج + مساحة $\Delta$ أ ب ج

$$= ٣٧,٤٨٥ + ٨٤,٣٤١$$

$$\approx ١٢١,٨٢٦ \text{ سم}^{٢}$$

مذكرتي Mozkrty.com
المسوحة ضوئيا بـ CamScanner

س ٥

(٢) اوجد $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{س+٤}-٢}{س^{٢}+س}$

الحل

بالتعويض المباشر نجد صفر/صفر

نستخدم المرافق

$$\text{نهـا} = \frac{(\sqrt{س+٤}-٢)(\sqrt{س+٤}+٢)}{(س^{٢}+س)(\sqrt{س+٤}+٢)}$$

$$\text{نهـا} = \frac{س+٤-٤}{س(س+١)(\sqrt{س+٤}+٢)}$$

$$\text{نهـا} = \frac{١}{(س+١)(\sqrt{س+٤}+٢)}$$

$$= \frac{١}{(٠+١)(\sqrt{٤}+٢)} = \frac{١}{٤}$$

(ب) اوجد $\lim_{س \to ∞} \sqrt{٣+\frac{٤}{س}-\frac{١}{س^{٢}}}$

الحل

$$\text{نهـا} = \frac{\sqrt{٣+\frac{٤}{س}-\frac{١}{س^{٢}}}}{س}$$

بقسمة البسط والمقام على س حيث $س = \sqrt{س^{٢}}$

$$\text{نهـا} = \frac{\sqrt{\frac{٣}{س^{٢}}+\frac{٤}{س}-١}}{-١}$$

$$= \sqrt{صفر+٤}-١ = ٢-١ = ١$$

(ج) شكل هندسي منتظم محيطه ٣٠ سم احسب قياس زاويته الداخلة

الحل

∵ الشكل هندسي منتظم ∴ ن = ٥

∴ قياس الزاوية الواحدة الداخلة

$$= \frac{١٨٠ \times (ن-٢)}{ن}$$

$$= \frac{١٨٠ \times (٥-٢)}{٥} = \frac{١٨٠ \times ٣}{٥} = ١٠٨°$$

∵ المحيط = ٣٠ سم ∴ طول الضلع = المحيط/٥

س = طول ضلعه = ٣٠/٥ = ٦ سم

∴ مساحة أي مضلع منتظم فيه

ضلعه س = $\frac{ن}{٤}$ س$^{٢}$ ظتا $\frac{\pi}{ن}$

ظتا $\frac{\pi}{٥}$ ≈ ٩١

∴ المساحة = $\frac{٥}{٤} \times ٣٦ \times$ ٩١ ≈ ٤١٠٣

مثال خارج الاختبار

اوجد قيمة $\lim_{س \to ٠} \frac{٢-٢ جتا٦س}{٨س}$

$$\text{نهـا} = \frac{(١-جتا٦س)}{٨س^{٢}} \times \frac{١+جتا٦س}{١+جتا٦س}$$

$$\text{نهـا} = \frac{١-جتا^{٢}٦س}{٤س^{٢}(١+جتا٦س)}$$

$$\frac{١}{٤}\text{نهـا} = \left[\frac{جا^{٢}٦س}{س^{٢}} \times \frac{١}{(١+جتا٦س)}\right]$$

$$= \frac{١}{٤}\text{نهـا} = \left[\frac{جا٦س}{س} \times \frac{جا٦س}{س} \times \frac{س}{١+جتا٦س}\right]$$

= صفر = [ ] = ٤٧ = ٧ $\frac{٣}{س^{٢}} + \frac{٤}{س^{٣}}$ / س

$$= \sqrt{\frac{٣}{١}+\frac{٤}{١}} = \sqrt{صفر+٤}$$



مذكرتي Mokrty.com
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner