الدوال الحقيقية

إذا كانت د دالة من س~ إلى ص~ فإن

(١) مجال الدالة: هو المجموعة س~

(٢) المجال المقابل للدالة: هو المجموعة ص~

(٣) مدى الدالة: هو مجموعة صور عناصر مجال الدالة

تحديد العلاقات التى تمثل دالة: العلاقة من س~ ← ص~ تكون دالة

(١) **جبرياً**: إذا كانت العلاقة تحدد لكل عنصر من عناصر س~ عنصرًا وحيدًا من عناصر ص~

(٢) **بيانياً** (**اختبار الخط الرأسى**): إذا وجد أن الخط الرأسى عند كل عنصر من عناصر المجال س~ يمر بنقطة واحدة فقط من النقط التى تمثل العلاقة

تعيين مجال الدالة

① **الدالة كثيرة الحدود**: مجالها هو ح ما لم تكن معرفة على مجموعة جزئية منها.

② **الدالة الكسرية**: مجالها هو ح - { أصفار المقام }

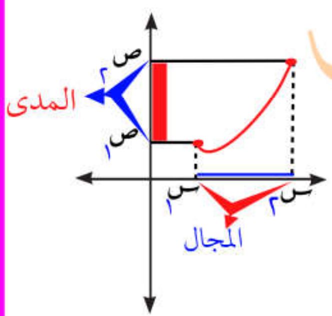
③ **الدالة الجذرية**: على الصورة د(س) = $\sqrt[ن]{ر(س)}$

أولاً: عندما ن عدد فردى فإن مجال الدالة د = ح

ثانياً: عندما ن عدد زوجى فإن مجال الدالة د هو مجموعة قيم س بشرط ر(س) ≥ ٠ حيث ر(س) كثيرة حدود

④ **الدالة متعددة التعريف**: (معرفة بأكثر من قاعدة) مجالها هو اتحاد فترات تعريف قواعدها

تعيين مجال ومدى الدالة بيانيًا



(١) مجال الدالة: هو مجموعة الاحداثيات **السينية** لجميع النقط التى تنتمى إلى منحنى الدالة. (**يعين المجال من على محور السينات**)

(٢) مدى الدالة: هو مجموعة الاحداثيات **الصادية** لجميع النقط التى تنتمى إلى منحنى الدالة. (**يعين المدى من على محور الصادات**)

العمليات على الدوال

إذا كانت $د_١$ ، $د_٢$ دالتين مجالاهما $م_١$ ، $م_٢$ على الترتيب فإن:

① $(د_١ \pm د_٢)(س) = د_١(س) \pm د_٢(س)$ ، **مجالها هو** $م_١ \cap م_٢$

② $(د_١ \bullet د_٢)(س) = د_١(س) \bullet د_٢(س)$ ، **مجالها هو** $م_١ \cap م_٢$

③ $\left(\frac{د_١}{د_٢}\right)(س) = \frac{د_١(س)}{د_٢(س)}$ حيث $د_٢(س) \neq ٠$ ، **مجالها هو** $م_١ \cap م_٢ - ف(د_٢)$

حيث ف $(د_٢)$ **مجموعة أصفار الدالة** $د_٢(س)$

بعض خواص الدوال

١ الدالـــة الزوجية والدالـــة الفردية

يقال للدالة د: $س \longrightarrow ص$ إنها

① **دالـــة زوجيـــة :** إذا كان د (- س) = د (س)، لكل س ، - س $\in$ س

ويكون منحنى الدالة الزوجية متماثلاً حول محور الصادات.

② **دالـــة فرديـــة :** إذا كان د (- س) = - د (س)، لكل س ، -س $\in$ س

ويكون منحنى الدالة الفردية متماثلاً حول نقطة الأصل.

③ **دالـــة ليست زوجيةوليست فردية :** إذا كان د (- س) $\neq$ د (س) $\neq$ - د (س)

ملاحظة

عند بحث نوع الدالة من حيث كونها زوجية أو فردية يجب تحقق شرط إنتماء العنصرين س ، -س إلى مجال الدالة، و إذا لم يتحقق كانت الدالة ليست زوجية وليست فردية دون إيجاد د(-س)

خواص هامة:

إذا كان كل من: $د_١$ ، $د_٢$ زوجية ، وكان كل من: $ر_١$ ، $ر_٢$ فردية ، فإن:

١) $د_١ + د_٢$ دالة زوجية

٢) $ر_١ + ر_٢$ دالة فردية.

٣) $د_١ \times د_٢$ دالة زوجية

٤) $ر_١ \times ر_٢$ دالة زوجية.

٥) $د_١ \times ر_٢$ دالة فردية

٦) $د_١ + ر_٢$ ليست زوجية وليست فردية.

التحويلات الهندسية

هناك اربع تحويلات هندسية يمكن تطبيقها على الأشكال البيانية للدوال وهى :

① **إزاحة افقية**
② **إزاحة راسية**
③ **إنعكاس فى محور السينات**
④ **تمدد أو إنكماش رأسى**

ملاحظات

منحنى الدالة $\boxed{ر(س) = أ\,د(س - ب) + حـ}$ **هو نفس منحنى الدالة** د(س)

① **بإزاحة افقية** قدرها |ب| وحدات
- فى اتجاه $\overrightarrow{وس}$ (لليمين) **إذا كان** ب > ٠ (موجباً)
- فى اتجاه $\overrightarrow{وس^{\prime}}$ (لليسار) **إذا كان** ب < ٠ (سالباً)

② **بإزاحة راسية** قدرها |حـ| وحدات
- فى اتجاه $\overrightarrow{وص}$ (لأعلى) **إذا كان** حـ > ٠ (موجباً)
- فى اتجاه $\overrightarrow{وص^{\prime}}$ (لأسفل) **إذا كان** حـ < ٠ (سالباً)

③ **بإنعكاس فى محور السينات** **إذا كان** أ < ٠ (سالباً)

④ **بتمدد رأسى** **إذا كان** |أ| > ١ **أو بإنكماش رأسى** **إذا كان** ٠ < |أ| < ١

ملاحظة

أذا كانت الدالة التربيعية على الصورة د(س) = أ س^{٢} + ب س + حـ **فإن**

نقطة رأس المنحنى $\left(\frac{-ب}{٢أ} \text{ ، } د\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$

ويمكن تحويلها الى الصورة $\boxed{د(س) = (س - ب)^{٢} + حـ}$ **بإكمال المربع**

حـــل متباينات المقياس

① إذا كان | س | ≤ أ : أ > ٠

فإن: $\boxed{-أ \le س \le أ}$

م.ح = [-أ ، أ]

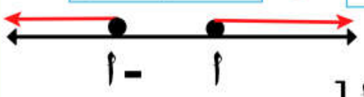
② إذا كان | س | < أ : أ > ٠

فإن: $\boxed{-أ < س < أ}$

م.ح =]-أ ، أ[

③ إذا كان | س | ≥ أ : أ > ٠

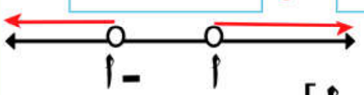
فإن: $\boxed{س \ge أ}$ أو $\boxed{س \le -أ}$



م.ح = ح −]-أ ، أ[

④ إذا كان | س | > أ : أ > ٠

فإن: $\boxed{س > أ}$ أو $\boxed{س < -أ}$



م.ح = ح − [-أ ، أ]

الأسس الكسرية

قوانين الأسس

لكل أ، ب ∈ ع - {٠} ولكل م ، ن ∈ ص فإن:

① $\text{أ}^{\text{ن}} = \text{أ} \times \text{أ} \times \text{أ} \times ..... \times \text{أ}$ (حيث العامل أ مكرر ن من المرات)

② $\text{أ}^{\text{صفر}} = ١$ لكل أ ∈ ع - {٠}

③ $\text{أ}^{-\text{ن}} = \frac{١}{\text{أ}^{\text{ن}}}$ ، $\text{أ} \neq ٠$

④ $\text{أ}^{\text{م}} \times \text{أ}^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{م}+\text{ن}}$ ، $\text{أ}^{\text{م}} \div \text{أ}^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{م}-\text{ن}}$ ، $(\text{أ}^{\text{م}})^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{م}\text{ن}}$

⑤ $(\text{أ}\text{ب})^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{ن}}\text{ب}^{\text{ن}}$ ، $\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\text{ن}} = \frac{\text{أ}^{\text{ن}}}{\text{ب}^{\text{ن}}}$ ، $\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{-\text{ن}} = \left(\frac{\text{ب}}{\text{أ}}\right)^{\text{ن}}$

الأسس الكسرية: لأى عدد حقيقي أ ≥ ٠، ن ∈ ص_+ - {١} يكون

⑥ $\text{أ}^{\frac{١}{\text{ن}}} = \sqrt[\text{ن}]{\text{أ}}$ هذه العلاقة صحيحة أيضًا عندما أ < ٠ ، ن عدد صحيح فردى أكبر من ١

⑦ $\text{أ}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}} = \sqrt[\text{ن}]{\text{أ}^{\text{م}}}$ حيث أ ∈ ع، م، ن عددان صحيحان ليس بينهما عامل مشترك، ن > ١، $\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}}$ ∈ ع

الجذر النونى: المعادلة $\boxed{\text{س}^{\text{ن}} = \text{أ}}$ حيث أ ∈ ع ، ن ∈ ص_+ لها ن من الجذور،
ونناقش فيما يلى عدة حالات:

١) إذا كان ن عدداً زوجيًّا ، أ > ٠ المعادلة لها جذران حقيقيان أحدهما موجب والآخر سالب وباقى الجذور أعداد مركبة غير حقيقية

مثل: المعادلة $\text{س}^{٦} = ١٦$ **عدد الجذور=** ٦ (٢ حقيقية ، ٤ مركبة)

٢) إذا كان ن عدداً زوجيًّا ، أ < ٠ المعادلة ليس لها جذور حقيقية مثل: المعادلة $\text{س}^{٢} = -٩$
عدد الجذور= ٢ مركبة غير حقيقية.

٣) إذا كان ن عدداً فرديًّا ، أ ∈ ع - {٠} المعادلة لها جذر حقيقي وحيد (باقى الجذور أعداد مركبة غير حقيقية)

مثل: المعادلة $\text{س}^{٥} = -٣٢$ **عدد الجذور=** ٥ (١ حقيقى ، ٤ مركبة)

٤) إذا كان ن ∈ ص_+ ، أ = صفر فإن المعادلة $\text{س}^{\text{ن}} = \text{صفر}$ لها حل حقيقى وحيد هو س = ٠
(المعادلة لها ن من الجذور المكررة وكل منها يساوى صفر عندما ن > ١).

خواص الدالة الأسية

١) مجالها = ح ومداها = $]٠ ، \infty[$ = $ح^{+}$

٢) إذا كان أ > ١ فإن الدالة تزايدية على مجالها وتسمى دالة نمو أسى معامله أ

أما إذا كان ٠ < أ < ١ فإن الدالة تناقصية على مجالها وتسمى دالة تضاؤل أسى معامله أ

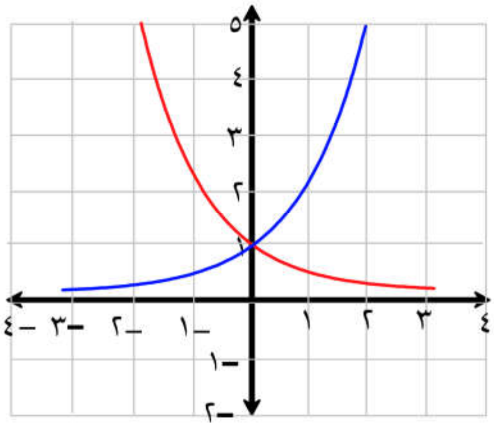
٣) منحنى الدالة د(س) = $أ^{س}$ يمر دائمًا بالنقطة (٠، ١) لجميع قيم أ > ٠ ، أ ≠ ١

٤) د(س) = $أ^{س}$ هي دالة احادية

٥) منحنى الدالة د(س) = $\left(\frac{١}{أ}\right)^{س}$ = $أ^{-س}$ هو صورة منحنى الدالة د(س) = $أ^{س}$ بالانعكاس على محور الصادات

٦) $أ^{س} \longrightarrow \infty$ عندما س $\longrightarrow \infty$ حيث أ > ١

$أ^{س} \longrightarrow ٠$ عندما س $\longrightarrow \infty$ حيث ٠ < أ < ١



تطبيقات الدالة الأسية

أولاً: النمو الأسى:

د(ن) = أ$(١ + ر)^{ن}$

ثانيًا: التضاؤل الأسى:

د(ن) = أ$(١ - ر)^{ن}$

حيث ن هى الفترة الزمنية،
أ القيمة الابتدائية،
ر النسبة المئوية للنمو فى الفترة الزمنية الواحدة.

الربح المركب:

جـ = أ$\left(١ + \frac{ر}{س}\right)^{ن س}$

جـ جملة المبلغ
س فترات تقسيم العائد

العائد السنوي	س = ١
العائد ربع سنوي	س = ٤
العائد الشهري	س = ١٢

المعادلات الأسية

حل المعادلات الأسية

① إذا كان $أ^{م} = أ^{ن}$ فإن $م = ن$ حيث $أ \notin \{٠، ١، -١\}$

② إذا كان $أ^{م} = ب^{م}$ حيث $أ، ب \notin \{٠، ١، -١\}$

فإن:
- $أ = ب$ عندما م عدد فردي
- أو: $أ = \pm ب$ عندما م عدد زوجي.
- أو: $م = صفر$ عندما $أ \neq ب$

③ إذا كان $أ^{م} = ١$ فإن $م = صفر$ حيث $أ \notin \{٠، ١، -١\}$

ملاحظات

✍ إذا كان $س^{\frac{م}{ن}} = أ$ ⟸ $س =$
- $أ^{\frac{ن}{م}}$ عندما م عدد فردي
- $\pm أ^{\frac{ن}{م}}$ عندما م عدد زوجي.

م، ن ليس بينهما عامل مشترك،

الصورة اللوغاريتمية والصورة الأسية للعدد

$س = أ^{ص}$ تكافئ $لو_{أ} س = ص$

الإس
العدد
الأساس

$لو_{أ} س = ص$

حيث $س \in ح^{+}$

$أ \in ح^{+} - \{١\}$

$ص \in ح$

اللوغاريتمات المعتادة للأساس ١٠:

إذا كان أساس اللوغاريتم (١٠) يسمى باللوغاريتم المعتاد و يكتب بدون أساس.

$لو_{١٠} س = ص$ تكتب $لو س = ص$

$لو ١٠ = ١$ $\quad$ $لو ١٠٠ = ٢$ $\quad$ $لو ١٠٠٠ = ٣$ $\quad$ $لو ٠,٠١ = -٢$ $\quad$ $لو \frac{١}{١٠٠٠} = -٣$

الدالة اللوغاريتمية

إذا كان $\text{أ} \in \text{ع}^{+} - \{1\}$ فإن الدالة د حيث $\text{د}: \text{ع} \longrightarrow \text{ع}^{+}$ حيث $\text{د(س)} = \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س}$ هى

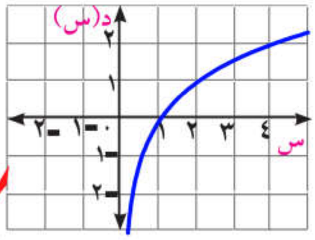
الدالة العكسية للدالة $\text{ص} = \text{أ}^{\text{س}}$ وتسمى $\text{د(س)} = \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س}$ بالدالة اللوغاريتمية

مجال الدالة اللوغاريتمية $= \text{ع}^{+}$

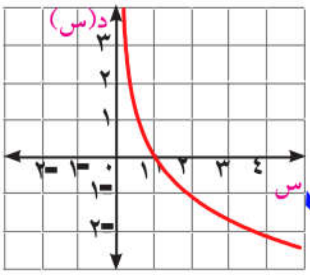
، مدى الدالة اللوغاريتمية $= \text{ع}$

التمثيل البياني للدالة اللوغاريتمية:

عندما $\text{أ} > 1$



عندما $0 < \text{أ} < 1$



المجال: ع^{+}

المدى: ع

التقاطع مع محور س:

$(1 ، 0)$

الاطراد:

تزايدية

تناقصية

على مجالها

قوانين اللوغاريتمات

إذا كانت $\text{أ} \in \text{ع}^{+} - \{1\}$

① $\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{أ} = 1$

② $\text{لو}_{\text{أ}}\,1 = \text{صفر}$

③ $\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س ص} = \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س} + \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ص}$

④ $\text{لو}_{\text{أ}}\,\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س} - \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ص}$

⑤ $\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س}^{\text{ن}} = \text{ن}\,\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س}$ خاصية لوغاريتم القوة

⑥ $\text{لو}_{\text{ص}}\,\text{س} = \frac{\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س}}{\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ص}}$ خاصية تغيير الأساس

⑦ $\text{لو}_{\text{ص}}\,\text{س} = \frac{1}{\text{لو}_{\text{س}}\,\text{ص}}$ خاصية المعكوس الضربي

ملاحظات

✍ $\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س} - \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ص} - \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ب} + \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ح} = \text{لو}_{\text{أ}}\,\frac{\text{س} \times \text{ح}}{\text{ص} \times \text{ب}}$

✍ **إذا كان** $\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س} = \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ص} \Longleftarrow \text{س} = \text{ص}$

✍ $\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س} \times \text{لو}_{\text{س}}\,\text{أ} = 1$

✍ $\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س}^{\text{ن}} = \text{ن}\,\text{لو}_{\text{أ}}|\text{س}|$ عندما ن عدد زوجي $\neq$.

✍

$(\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س})^{\text{ن}} \neq \text{ن}\,\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س}$

$\text{لو}_{\text{أ}}(\text{س} + \text{ص}) \neq \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س} + \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ص}$

$\text{لو}_{\text{أ}}(\text{س} - \text{ص}) \neq \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س} - \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ص}$

$\text{لو}_{\text{أ}}(\text{س} \times \text{ص}) \neq \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س} \times \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ص}$

$\text{لو}_{\text{أ}}\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right) \neq \frac{\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س}}{\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ص}}$

مقدمة في النهايات

تعريف

إذا كانت قيمة الدالة د تقترب من قيمة وحيدة ل عندما تقترب س من أ من جهتى اليمين واليسار، فإن نهاية د(س) تساوى ل وتكتب رمزيًا: $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}\ د(س) = ل$

أى أن **إذا كان** $د(أ^{+}) = د(أ^{-}) = ل$ **فإن** $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}\ د(س) = ل$

إذا كان $د(أ^{+}) \neq د(أ^{-})$ **فإن** $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}\ د(س)$ ليس لها وجود.

ملاحظة

وجود نهاية للدالة عندما س ← أ لاتعنى بالضرورة أن تكون الدالة معرفة عند س = أ ، والعكس إذا كانت الدالة معرفة عند س = أ فهذا لايعنى وجود نهاية للدالة.

نهاية الدالة كثيرة الحدود

نظرية ١

إذا كانت د(س) كثيرة حدود، أ ∈ ح فإن: $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}\ د(س) = د(أ)$ (بالتعويض المباشر)

ملاحظة

$\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}\ (م) = م$ حيث م ثابت

نظرية ٢

إذا كان $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}\ د(س) = ل$ ، $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}\ هـ(س) = م$ فإن:

① $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}\ ك\ د(س) = ك \times ل$ حيث ك ∈ ح

② $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}\ د(س) \times هـ(س) = ل \times م$

③ $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}\ [د(س) \pm هـ(س)] = ل \pm م$

④ $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}\ \frac{د(س)}{هـ(س)} = \frac{ل}{م}$ بشرط م ≠ ٠

⑤ $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}\ (د(س))^{ن} = (ل)^{ن}$ حيث $ل^{ن} \in ح$

نظرية ٣

إذا كانت $\text{د(س)} = \text{ه(س)}$ لكل $\text{س} \in \text{ع} - \{\text{ا}\}$

وكانت $\underset{\text{س}\to\text{ا}}{\text{نهــا}}\ \text{د(س)} = \text{ل}$ **فإن** $\underset{\text{س}\to\text{ا}}{\text{نهــا}}\ \text{ه(س)} = \text{ل}$

نظرية ٤

$$\underset{\text{س}\to\text{ا}}{\text{نهــا}}\ \frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{ا}^{\text{ن}}}{\text{س} - \text{ا}} = \text{ن}\ \text{ا}^{\text{ن}-1}$$

نتائج

① $\underset{\text{س}\to\text{ا}}{\text{نهــا}}\ \frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{ا}^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{م}} - \text{ا}^{\text{م}}} = \frac{\text{ن}}{\text{م}}\ \text{ا}^{\text{ن}-\text{م}}$

② $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهــا}}\ \frac{(\text{س}+\text{ا})^{\text{ن}} - \text{ا}^{\text{ن}}}{\text{س}} = \text{ن}\ \text{ا}^{\text{ن}-1}$

نهاية الدالة عند اللانهاية

$$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهــا}}\ \frac{1}{\text{س}} = 0$$

$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهــا}}\ \frac{1}{\text{س}^{\text{ن}}} = 0$ {حيث $\text{ن} \in \text{ع}^{+}$ ، ا ثابت}

إذا كان ن عدداً صحيحاً موجباً فإن $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهــا}}\ \text{س}^{\text{ن}} = \infty$

طريقة الحل

تكون الدالة كسرية فنقسم كلا من البسط والمقام على أعلى قوة للمتغير فى المقام

ملاحظات

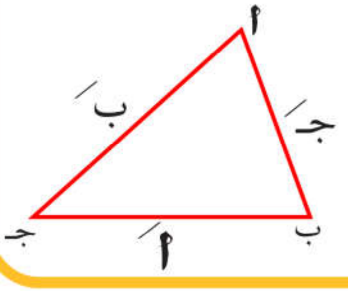
- النهاية تعطى عدداً حقيقيًّا لا يساوى الصفر إذا كانت درجة البسط تساوى درجة المقام.
- النهاية تساوى صفراً إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام.
- النهاية تعطى ∞ إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام.

قانون (قاعدة) الجيب

في أى مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها

فى أى مثلث أ ب جـ يكون:

$$\frac{\text{أَ}}{\text{حا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{حا ب}} = \frac{\text{جـَ}}{\text{حا جـ}}$$



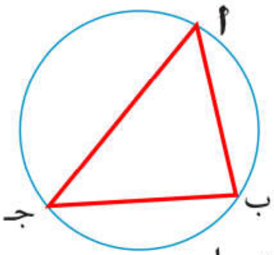
ملاحظات

- أَ : بَ : جـَ = حا أ : حا ب : حا جـ

- محيط المثلث

$$\frac{\text{أَ}}{\text{حا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{حا ب}} = \frac{\text{جـَ}}{\text{حا جـ}} = \frac{\text{أَ + بَ + جـَ}}{\text{حا أ + حا ب + حا جـ}} = \frac{\text{أَ + بَ}}{\text{حا أ + حا ب}} = \frac{\text{٢أَ - ٣جـَ}}{\text{٢حا أ - ٣حا جـ}}$$

- $$\frac{\text{أَ}}{\text{حا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{حا ب}} = \frac{\text{جـَ}}{\text{حا جـ}} = \text{٢ نق}$$



حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب جـ

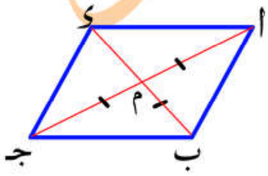
- مساحة سطح المثلث = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولي أى ضلعين × جيب الزاوية بينهما

مساحة المثلث أ ب حـ = $\frac{1}{2}$ أَ بَ حا حـ = $\frac{1}{2}$ أَ جـَ حا ب = $\frac{1}{2}$ بَ جـَ حا أ

- أكبر ضلع فى المثلث هو الضلع المقابل لأكبر زاوية والعكس أكبر زاوية فى المثلث هى المقابلة لأكبر ضلع

- يستخدم قانون الجيب إذا عُلِمَ **قياسا زاويتين وطول ضلع**

- مساحة سطح متوازى الاضلاع أ ب جـ ء = ٢م (△أ ب جـ)
= ٤م (△م ب جـ)



- محيط الدائرة = ٢ π نق ، مساحة الدائرة = π نق^2

قانون (قاعدة) جيب التمام

فى أى مثلث أ ب جـ يكون:

يستخدم فى إيجاد طول الضلع		يستخدم فى إيجاد قياس زاوية
$\text{أ}^{2} = \text{ب}^{2} + \text{جـ}^{2} - 2\,\text{ب}\,\text{جـ}\ \text{حتا أ}$	ومنه	$\text{حتا أ} = \dfrac{\text{ب}^{2} + \text{جـ}^{2} - \text{أ}^{2}}{2\,\text{ب}\,\text{جـ}}$
$\text{ب}^{2} = \text{جـ}^{2} + \text{أ}^{2} - 2\,\text{أ}\,\text{جـ}\ \text{حتا ب}$	ومنه	$\text{حتا ب} = \dfrac{\text{جـ}^{2} + \text{أ}^{2} - \text{ب}^{2}}{2\,\text{أ}\,\text{جـ}}$
$\text{جـ}^{2} = \text{أ}^{2} + \text{ب}^{2} - 2\,\text{أ}\,\text{ب}\ \text{حتا جـ}$	ومنه	$\text{حتا جـ} = \dfrac{\text{أ}^{2} + \text{ب}^{2} - \text{جـ}^{2}}{2\,\text{أ}\,\text{ب}}$

ملاحظات

- يستخدم قانون جيب التمام إذا عُلِمَ **طولى ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما**
- يستخدم قانون جيب التمام إذا عُلِمَ **أطوال أضلاعه الثلاثة**
- **إذا كان** حتا أ = − حتا جـ $\Leftarrow$ ق(∠أ) + ق(∠جـ) = ١٨٠°
- أ : ب : جـ = ٢ : ٥ : ٦ $\Leftarrow$ أ = ٢م ، ب = ٥م ، جـ = ٦م
- يكون الشكل رباعى دائرى
  - إذا وجد فيه زاويتان متقابلتان متكاملتان.
  - إذا كان قياس الزاوية الخارجة عند أى رأس من رؤوسه تساوى قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها.
  - إذا وجد فيه زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة منها ومتساويتان فى القياس.

حل المثلث

المقصود بحل المثلث هو إيجاد عناصر المثلث الستة ﴿ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا﴾

بشرط أن يكون من بين العناصر المعلومة طول أحد الأضلاع على الأقل

لأنه لايمكن حل المثلث إذا عُلِمَ منه قياسات ثلاث زوايا

﴿الحالة المبهمة﴾

حل المثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس زاوية مقابلة لأحدهما

في △ أ ب جـ إذا عُلِمَ أَ ، بَ ، ق (∠أ) نوجد قيمة الإرتفاع ع = بَ حا أ

ولإيجاد عدد الحلول الممكنة للمثلث نتبع الأتى :

	إذا كانت ∠أ حادة	عدد الحلول الممكنة
أَ < بَ	أَ < ع	صفر
	أَ = ع	١
	أَ > ع	٢
أَ ≥ بَ		١

إذا كانت ∠أ قائمة أو منفرجة	عدد الحلول الممكنة
أَ ≤ بَ	صفر
أَ > بَ	١

الجزء الخاص بالعلمى

- تركيب دالتين
- نهاية الدوال المثلثية
- الدالة الاحادية
- بحث وجود النهاية
- الدالة العكسية
- الاتصال

تركيب الدوال

إذا كانت د ، ر دالتين فإنه يمكن استنتاج دالة جديدة ع تتركب من الدالتين السابقتين وهى:

$\boxed{ع = د \circ ر}$ وتقرأ د تركيب ر ، أو د بعد ر حيث تطبق الدالة ر أولاً ثم الدالة د

ويكون $\boxed{ع(س) = (د \circ ر)(س) = د[ر(س)]}$ حيث $\boxed{مدى\ ر \cap مجال\ د \neq \varnothing}$

$$س \xrightarrow[\text{الداخلية}]{ر} ر(س) \xrightarrow[\text{الخارجية}]{د} د[ر(س)]$$

ملاحظات

- عملية تركيب دالتين ليست ابدالية أي أن $(د \circ ر)(س) \neq (ر \circ د)(س)$
- لتعين مجال الدالة $د \circ ر$ نتبع الخطوات الاتية

① نعين $م_1$ مجال الدالة ر (الداخلية)

② نعين $م_2$ مجال الدالة الناتجة من تركيب الدالتين

③ فيكون المجال المطلوب $= م_1 \cap م_2$

الدالـــة الأحــاديـة

الدالة د: س ⟵ ص تسمى دالة أحادية إذا كان:

لكل أ ، ب $\in$ س ، د(أ) = د(ب) فإن أ = ب

أو لكل أ $\neq$ ب فإن د(أ) $\neq$ د(ب)

وهذا يعني أنه لا يوجد عنصران في مجال الدالة الأحادية لهما نفس الصورة

إختبار الخط الأفقى

تكون الدالة إحادية إذا كان الخط الأفقى (الموازى لمحور السينات) عند كل عنصر من عناصر مدى الدالة يقطع منحنى الدالة فى نقطة واحدة.

ملاحظة: **الدوال الزوجية هي دوال ليست أحادية**

الدالة العكسية

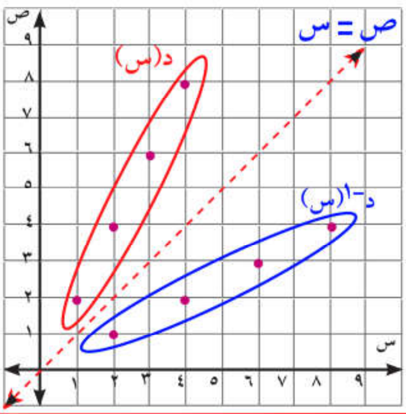
الدالة العكسية

إذا كانت الدالة د دالة أحادية من مجموعة س~ إلى مجموعة ص~

فإن الدالة $د^{-1}$ تسمى دالة عكسية للدالة د من ص~ إلى س~ إذا كان:

لكل (س، ص) ∈ د فإن (ص، س) ∈ $د^{-1}$

① إذا كانت د دالة بيانها كالآتي: د = {(١، ٢)، (٢، ٤)، (٣، ٦)، (٤، ٨)}.
أوجد بيان الدالة العكسية للدالة د ومثلهما في شكل واحد.

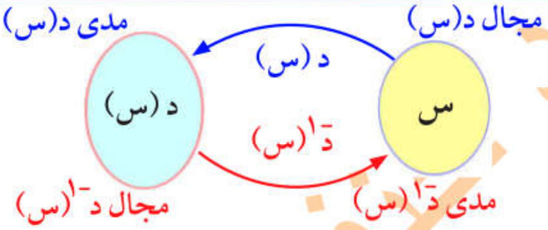


الحل

∵ د(س) = {(١، ٢)، (٢، ٤)، (٣، ٦)، (٤، ٨)}.

∴ $د^{-1}$(س) = {(٢، ١)، (٤، ٢)، (٦، ٣)، (٨، ٤)}

من خواص الدالة العكسية:



① مجال الدالة د(س) = مدى الدالة العكسية $د^{-1}$ (س)
مدى الدالة د(س) = مجال الدالة العكسية $د^{-1}$ (س)

② يقال أن د(س)، ر(س) دالة عكسية للأخرى إذا كان (د ∘ ر) (س) = (ر ∘ د) (س) = س

③ إذا كانت الدالة ليست أحادية (لا تحقق اختبار الخط الأفقي) فإن معكوسها لا يمثل دالة.

④ الدالة د والدالة العكسية $د^{-1}$ متماثلان بالنسبة للمستقيم ص = س
أي أن $د^{-1}$(س) هي صورة د(س) بالانعكاس في المستقيم ص = س

⑤ يمكن أن تكون الدالة د هي نفسها الدالة العكسية $د^{-1}$ إذا كان منحنى الدالة د متماثل حول المستقيم ص = س

مثل: الدالة الخطية على الصورة د(س) = − س + ب

، الدالة الكسرية على الصورة د(س) = $\frac{أ}{س - ب}$ + ب

لاحظ أن لإيجاد الدالة العكسية أولاً نقوم بتبديل المتغيرات، ثم نوجد ص بدلالة س.

نهايات الدوال المثلثية

$\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}} \text{ حا س} = \text{حا أ}$ حيث $\text{أ} \in \text{ح}$

$\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}} \text{ حتا س} = \text{حتا أ}$ حيث $\text{أ} \in \text{ح}$

$\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}} \text{ طا س} = \text{طا أ}$ حيث $\text{أ} \in \text{ح}$ ، $\text{أ} \neq \frac{\pi}{٢} + \text{ن}\,\pi$ لكل $\text{ن} \in \text{ص}$

نظرية

إذا كانت س زاوية مقاسة بالتقدير الدائرى فإن:

$\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا س}}{\text{س}} = ١$ $\qquad$ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{طا س}}{\text{س}} = ١$

نتائج

$\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا أس}}{\text{ب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ $\qquad$ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{حتا س}}{\text{س}} = ٠$

$\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{طا أس}}{\text{ب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

ملاحظات

$\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \text{ حا س} = ٠$

$\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \text{ حتا س} = ١$

$\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \text{ طا س} = ٠$

$\text{حا}^{٢}\text{س} + \text{حتا}^{٢}\text{س} = ١$

$\text{حا}^{٢}\text{س} = ١ - \text{حتا}^{٢}\text{س}$

$\text{حتا}^{٢}\text{س} = ١ - \text{حا}^{٢}\text{س}$

$\text{حا}(\pi - \text{س}) = \text{حا س}$

$\text{حا}(\pi + \text{س}) = -\text{حا س}$

$\text{حتا}(\frac{\pi}{٢} - \text{س}) = \text{حا س}$

$\text{حتا}(\frac{\pi}{٢} + \text{س}) = -\text{حا س}$

بحث وجود نهاية للدالة عند نقطة

نهاية الدالة المعرفة بإكثر من قاعدة

يقال إن نهاية الدالة د تساوى ل عندما س تؤول إلى ا إذا وفقط إذا كان نهايتها من اليمين ونهايتها من اليسار عندما س تؤول إلى ا متساويتين وكل منهما تساوى ل حيث ل ∋ ع

$\underset{س \leftarrow ا}{نهـا}$ د(س) = ل إذا و فقط إذا كان: د $(ا^{+})$ = د $(ا^{-})$ = ل

ملاحظات

- أذا كانت قاعدة الدالة مختلفة على يمين ويسار ا يجب إيجاد د $(ا^{+})$ و د $(ا^{-})$

فإذا كان ① د $(ا^{+})$ = د $(ا^{-})$ = ل فإن $\underset{س \leftarrow ا}{نهـا}$ د(س) = ل

② د $(ا^{+})$ ≠ د $(ا^{-})$ فإن $\underset{س \leftarrow ا}{نهـا}$ د(س) غير موجودة

- أذا كانت قاعدة الدالة واحدة على يمين ويسار ا يمكن إيجاد النهاية مباشرة
- عند بحث نهاية الدالة د على الفترة [ا ، ب] أو] ا ، ب [

اولا : بالنسبة للنقطة ا :

نبحث لها النهاية اليمنى فقط د $(ا^{+})$ ويكون د $(ا^{-})$ غيرموجودة

و $\underset{س \leftarrow ا}{نهـا}$ د(س) غيرموجودة

ثانيا : بالنسبة للنقطة ب :

نبحث النهاية اليسرى لها فقط د $(ب^{-})$ ويكون د $(ب^{+})$ غيرموجودة

و $\underset{س \leftarrow ب}{نهـا}$ د(س) غيرموجودة

أى أن : نهاية الدالة عند النقطة الطرفية (الحدية) للفترة غير موجودة ويكون لهذه النقطة نهاية من جهة واحدة (يمنى أو يسرى)

الاتصال

أولاً: اتصال دالة عند نقطة

تعريف

تكون الدالة د متصلة عندما س = أ ؛ إذا تحققت الشروط الآتية معاً:

- نهـا (س ← أ) د(س) موجودة
- د(أ) موجودة
- نهـا (س ← أ) د(س) = د(أ)

خطوات بحث اتصال الدالة د عند النقطة س = أ

- نوجد د(أ) وإذا كانت غير معرفة تكون الدالة غير متصلة عند س = أ
- نوجد نهـا (س ← أ) د(س) وإذا كانت غير موجودة تكون الدالة غير متصلة عند س = أ
- نقارن بين د(أ) و نهـا (س ← أ) د(س) وإذا كانت

إذا كانت نهـا (س ← أ) د(س) = د(أ) كانت الدالة متصلة عند س = أ

وإذا كانت نهـا (س ← أ) د(س) ≠ د(أ) كانت الدالة غير متصلة عند س = أ

ملاحظات

- الخلاصة لكي تكون الدالة متصلة عند س = أ يجب أن يكون

$$د(أ^{+}) = د(أ^{-}) = د(أ)$$

- عدم تحقق شرط واحد من الشروط الثلاثة كافي لعدم اتصال الدالة عند س = أ
- إذا كانت الدالة غير متصلة عند س = أ ولكن نهـا (س ← أ) د(س) موجودة

فإنه يمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة عند س = أ

أما إذا كانت نهـا (س ← أ) د(س) غير موجودة فإنه لا يمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة عند س = أ

ثانياً: اتصال دالة على فترة

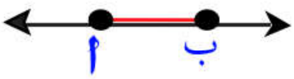
تعريف

إذا كانت د (س) معرفة على الفترة [أ ، ب]

تكون الدالة متصلة على الفترة [أ ، ب] إذا كانت:

① د(س) متصلة على الفترة] أ ، ب[

② $\lim_{س \leftarrow أ^+}$ د(س) = د(أ) ، $\lim_{س \leftarrow ب^-}$ د(س) = د(ب)



بعض الدوال المتصلة

١- الدالة كثيرة الحدود: متصلة على ح أو على مجال تعريفها.

٢- الدالة الكسرية: متصلة على ح عدا مجموعة أصفار المقام.

٣- دالة الجيب د(س) = جا (س) وجيب التمام د(س) = جتا س: متصلة على ح

٤- دالة الظل: د(س)= ظاس متصلة على ح - { س: س = $\frac{\pi}{٢}$ + نπ} ، ن ∈ ص

ملاحظات

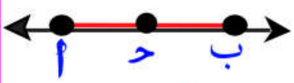
➢ إذا كانت د١ ، د٢ متصلتين على ح فإن:

١- د١ ± د٢ متصلة على ح

٢- د١ × د٢ متصلة على ح

٣- $\frac{د_١}{د_٢}$ متصلة على ح عدا مجموعة أصفار المقام.

خطوات بحث إتصال الدالة د المعرفة بأكثر من قاعدة على الفترة [أ ، ب]



➢ نبحث اتصال الدالة على كل فترة على حدة] أ ، حـ[،] حـ ، ب[

➢ نبحث اتصال الدالة عند النقطة التي تتغير عندها قاعدة الدالة (حـ)

➢ نبحث اتصالها من اليمين عند س = أ و اتصالها من اليسار عند س = ب

فإذا تحققت هذه الشروط تكون الدالة متصلة على الفترة [أ ، ب]