"قوانين الهندسة التحليلية"

● لأي نقطتين أ (س₁ ، ص₁) ، ب (س₂ ، ص₂)

① البعد بين نقطتين : طول $\overline{أب} = \sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$

② منتصف قطعة مستقيمة :

منتصف $\overline{أب} = \left(\frac{س_1 + س_2}{2} ، \frac{ص_1 + ص_2}{2} \right)$

③ ميل الخط المستقيم :

ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$

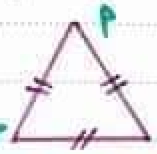
[1] المثلث :

محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ طول القاعدة × الارتفاع

(أ) لإثبات أن النقط أ ، ب ، ج تمثل رؤوس مثلث يمكن إيجاد أب ، ب ج ، أ ج ثم إثبات أن (مجموع طولي أصغر ضلعين) > (طول الضلع الثالث)

(ب) لإثبات أن △ أ ب ج متساوي الأضلاع



اثبت أن : أ ب = ب ج = أ ج

● وإذا كان في △ "ضلعين متساويين فقط" كان △ متساوي الساقين.

(ج) لتعيين نوع المثلث أ ب ج حسب زواياه حيث $\overline{أج}$ أطول الأضلاع :

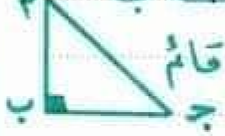
نقارن بين $(أج)^2$ ، $(أب)^2 + (بج)^2$ كما يلي :

① إذا كان : $(أج)^2 > (أب)^2 + (بج)^2$

فإن △ أ ب ج منفرج الزاوية في ب

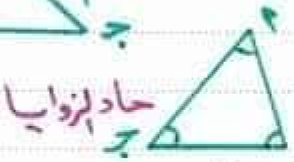
② إذا كان : $(أج)^2 = (أب)^2 + (بج)^2$

فإن △ أ ب ج قائم الزاوية في ب



③ إذا كان : $(أج)^2 < (أب)^2 + (بج)^2$

فإن △ أ ب ج حاد الزوايا .



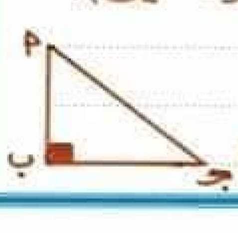
● كل ما سبق من المثلث يمكن إثباته : بقانون البعد بين نقطتين

(د) لإثبات أن المثلث أ ب ج قائم الزاوية في ب (بقانون الميل) :

نأتي بميل : $\overleftrightarrow{أب}$ ، ميل $\overleftrightarrow{بج}$

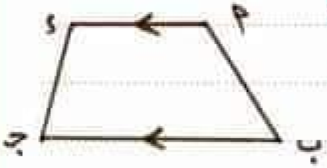
إذا كان : ميل $\overleftrightarrow{أب}$ × ميل $\overleftrightarrow{بج} = -1$

∴ $\overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{بج}$ ∴ المثلث قائم في ب



② شبه المنحرف : مساحة شبه المنحرف = $\frac{\text{مجموع القاعدتين}}{2}$ × الارتفاع

• لإثبات أن الشكل أ ب ج د شبه منحرف نثبت أن:
"ضلعين متقابلين فيه متوازيان والضلعان الآخران غير متوازيين"

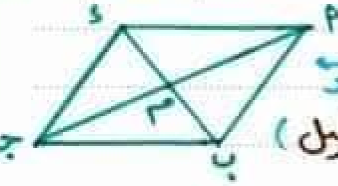


إذا كان: ميل $\overleftrightarrow{\text{أد}}$ = ميل $\overleftrightarrow{\text{بج}}$ ∴ $\overleftrightarrow{\text{أد}}$ // $\overleftrightarrow{\text{بج}}$
، ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ≠ ميل $\overleftrightarrow{\text{دج}}$ ∴ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{دج}}$ غير متوازيين
∴ الشكل أ ب ج د شبه منحرف
(باستخدام قانون الميل)

---

③ متوازي الأضلاع : مساحته = طول القاعدة × الارتفاع (المتعلق بالقاعدة)

• لإثبات أن الشكل الرباعي متوازي أضلاع نثبت إحدى الخواص الآتية:



① كل ضلعين متقابلين متوازيان:
أي أن: ميل $\overleftrightarrow{\text{أد}}$ = ميل $\overleftrightarrow{\text{بج}}$ ، ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ = ميل $\overleftrightarrow{\text{دج}}$
∴ $\overline{\text{أد}}$ // $\overline{\text{بج}}$ ، $\overline{\text{أب}}$ // $\overline{\text{دج}}$ (باستخدام قانون الميل)

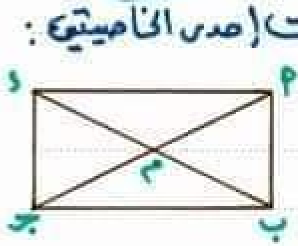
② كل ضلعين متقابلين متساويان في الطول:
أي أن: أ د = ب ج ، أ ب = د ج (باستخدام قانون البعد)

③ ضلعان متقابلان متوازيان ومتساويان في الطول:
ميل $\overleftrightarrow{\text{أد}}$ = ميل $\overleftrightarrow{\text{بج}}$ ، أ د = ب ج (أو) ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ = ميل $\overleftrightarrow{\text{دج}}$ ، أ ب = د ج

④ القطران ينصف كل منهما الآخر. (باستخدام قانون المنتصف)
أي أن: نقطة منتصف $\overline{\text{أج}}$ = نقطة منتصف $\overline{\text{بد}}$ = م

• لإثبات أن الشكل مستطيل أو معين أو مربع فإننا:
نثبت أولاً أن هذا الشكل متوازي أضلاع كما سبق.

④ لإثبات أن متوازي الأضلاع مستطيل نثبت إحدى الخاصيتين:

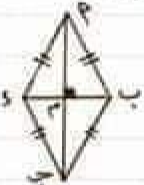


(أ) ضلعان متجاوران فيه متعامدان
أي: ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ × ميل $\overleftrightarrow{\text{بج}}$ = -1 ∴ $\overline{\text{أب}}$ ⊥ $\overline{\text{بج}}$
(أو) ميل $\overleftrightarrow{\text{دج}}$ × ميل $\overleftrightarrow{\text{بج}}$ = -1 ∴ $\overline{\text{دج}}$ ⊥ $\overline{\text{بج}}$
وهكذا ...

(ب) القطران متساويان في الطول أي: أ ج = ب د

• تذكر أن: محيط المستطيل = (الطول + العرض) × 2
مساحة المستطيل = الطول × العرض

٥ المعين: (نثبت أولاً أنه شكل متوازي أضلاع) ثم نثبت إحدى الآتي:



(أ) ضلعان متجاوران فيه متساويان في الطول.

أي: أب = ب جـ أو أ د = د جـ وهكذا...

(ب) القطران متعامدان.

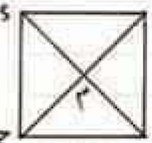
أي: ميل أجـ × ميل ب د = -١ ∴ أجـ ⊥ ب د

• تذكر أن:
محيط المعين = طول الضلع × ٤
مساحة المعين = ½ × حاصل ضرب القطرين
(أو) = طول الضلع × الارتفاع

٦ المربع: (نثبت أولاً أنه شكل متوازي أضلاع) ثم نثبت إحدى الآتي:

(أ) ضلعان متجاوران فيه متعامدان ومتساويان في الطول.

أي: ميل أب × ميل ب جـ = -١ ∴ أب ⊥ ب جـ ، (أب = ب جـ)



(ب) ضلعان متجاوران فيه متعامدان، والقطران متعامدان

أي: ميل أب × ميل ب جـ = -١ ∴ أب ⊥ ب جـ

و ميل أجـ × ميل ب د = -١ ∴ أجـ ⊥ ب د

(جـ) القطران متساويان في الطول ومتعامدان.

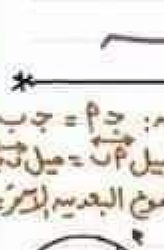
أي: أجـ = ب د ، ميل أجـ × ميل ب د = -١ ∴ أجـ ⊥ ب د

(د) ضلعان متجاوران متساويان في الطول وقطراه متساويان في الطول.

أي: أب = ب جـ ، أجـ = ب د

• تذكر أن:
محيط المربع = طول الضلع × ٤
مساحة المربع = طول الضلع × نفسه

* لإثبات أن النقطة جـ تقع على محور تماثل أب نثبت أن: جـ أ = جـ ب
* لإثبات أن أ، ب، جـ على استقامة واحدة نثبت أن: ميل أب = ميل ب جـ
أو نوجد طول أب، ب جـ، أجـ نثبت أن: أكبر بعد = مجموع البعدين الآخرين
* لإثبات أن ثلاث نقط مثل أ، ب، جـ تقع على دائرة واحدة مركزها م نثبت أن: م أ = م ب = م جـ = نق



• تذكر أن:
محيط الدائرة = ٢ π نق
مساحة الدائرة = π نق²

• كيفية إيجاد ميل الخط المستقيم :

١- إذا علمت نقطتان على المستقيم : أ (س١ ، ص١) ، ب (س٢ ، ص٢)

$\therefore$ م = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

٢- إذا علم قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وليكن هـ $\therefore$ م = ظا هـ

٣- إذا علمت معادلة الخط المستقيم على الصورة :

ص = ب س + جـ $\therefore$ م = ب ← (معامل س)

٤- إذا علمت معادلة الخط المستقيم على الصورة :

أ س + ب ص + جـ = ٠ $\therefore$ م = $\frac{-معامل\ س}{معامل\ ص}$ = $\frac{-أ}{ب}$

٥- إذا علم ميل الخط المستقيم الموازي له وليكن م١

$\therefore$ م = م١ لأن الميليين يكونان متساويان

٦- إذا علم ميل الخط المستقيم العمودي عليه وليكن م٢

$\therefore$ م = $\frac{-١}{م_٢}$ لأن : م × م٢ = -١

= (ملاحظات هامة) :

١- معادلة المستقيم الذي يمر بنقطة الأصل (٠ ، ٠) هي ص = م س
الميل

٢- معادلة محور السينات هي : ص = ٠

ومعادلة محور الصادات هي : س = ٠

٣- معادلة المستقيم الموازي لمحور السينات ويقطع محور الصادات في النقطة (٠ ، جـ) هي : ص = جـ

٤- معادلة المستقيم الموازي لمحور الصادات ويقطع محور السينات في النقطة (أ ، ٠) هي : س = أ

مع خالص تمنياتي بالتوفيق والنجاح

ROCKAL

"قوانين الهندسة كاملة"

١- سطحا متوازي الاضلاع المشتركين في قاعدة واحدة ومحصورين بين ضلعين متوازيين ← متساويين في المساحة.

٢- مساحة متوازي الاضلاع تساوي مساحة المستطيل المشترك معه في قاعدة واحدة ومحصور معه بين ضلعين متوازيين.

٣- مساحة المتوازي = طول القاعدة × الارتفاع المناظر.

٤- متوازيات الاضلاع المحصورة بين مستقيمين متوازيين ومشتركين في قاعدة واحدة تكون مساحتهم متساوية.

٥- مساحة المثلث تساوي $\frac{1}{2}$ مساحة متوازي الاضلاع المشترك معه في قاعدة واحدة ومحصورين بين ضلعين متوازيين.

٦- مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ طول القاعدة × الارتفاع المناظر

ROCKAL

٧- المثلثان المرسومان على قاعدة واحدة ورأسهما على مستقيم يوازي هذه القاعدة متساويين في المساحة.

٨- المثلثات التي قواعدها متساوية في الطول والمحصورة بين مستقيمين متوازيين تكون متساوية في المساحة

٩- متوسط المثلث يقسمه إلى مثلثين متساويين في المساحة

١٠- المثلثات التي أطوال قواعدها متساوية وعلى مستقيم واحد ومشتركة في الرأس مساحتها متساوية

١١- المثلثان المتساويان في المساحة والمرسومان على قاعدة واحدة يكون رأسهما على مستقيم يوازي القاعدة

١٢- المعين: هو متوازي أضلاع أضلاعه متساوية.

١٣- مساحة المعين = طول الضلع × الارتفاع
= $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب القطرين

١٤- محيط المعين = طول الضلع × ٤ ، = ٤ل

RoCKAL

١٥- مساحة المربع = $\frac{1}{2}$ مربع طول قطره .

١٦- المربع : هو معين قطراه متساويان في الطول

١٧- شبه المنحرف : هو شكل رباعي به ضلعان متوازيان
- الضلعان المتوازيان يسميان بقاعدتي شبه المنحرف
- الضلعين غير المتوازيان يسميان بساقي شبه المنحرف

١٨- شبه المنحرف متساوي الساقين : هو شبه منحرف ساقاه متساويان في الطول.

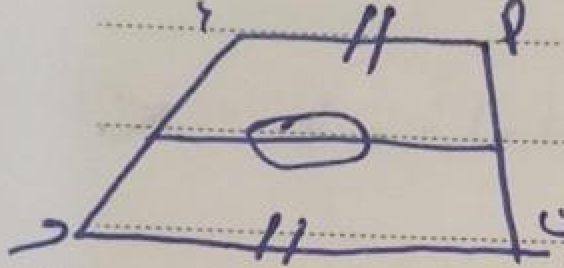
١٩- زاويتا كل من قاعدتي شبه المنحرف متساوي الساقين متساويان في القياس.

٢٠- قطرا شبه المنحرف متساوي الساقين متساويان في الطول

٢١- شبه المنحرف متساوي الساقين له محور تماثل واحد فقط ينصف قاعدتيه

٢٢- القاعدة المتوسطة لشبه المنحرف : هي القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفي ساقيه

٢٣- القاعدة المتوسطة لشبه المنحرف : تساوي نصف مجموع طولي قاعدتيه المتوازيتين



٢٤- طول القاعدة المتوسطة : $\frac{\text{أد} + \text{ب جـ}}{٢}$

٢٥- مساحة شبه المنحرف = $\frac{1}{2}$ مجموع طولي القاعدتين المتوازيتين × الارتفاع.

٢٦- مساحة شبه المنحرف = طول القاعدة المتوسطة × الارتفاع

٢٧- " شروط تشابه المضلعين "

١- زواياهما المتناظرة متساوية في القياس

٢- أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة

٢٨- أكبر من واحد صحيح ← تكبير

أصغر " " ← تصغير

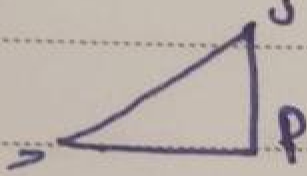
تساوي ١ ← تطابق

٢٩_ كل المضلعات المنتظمة التي لها نفس عدد الاضلاع تكون متشابهة

٣٠_ المضلعان المشابهان لثالث متشابهان

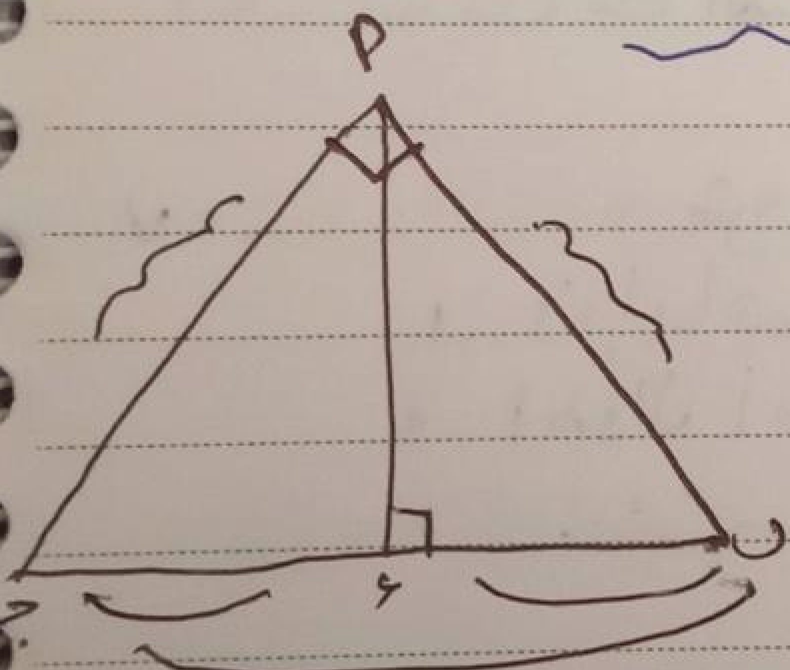
٣١_ عكس فيثاغورث ؛ إذا كان المثلث ا ب حـ قائم في (أ)

إذن (ب حـ)² = (أ ب)² + (أ حـ)²



٣٢_ طول مسقط قطعة مستقيمة معلومة على مستقيم معلوم ≥ طول القطعة نفسها

٣٣_ "نظرية اقليدس"



١_ (أ ب)² = ب ء × ب حـ

٢_ (أ حـ)² = حـ ء × حـ ب

٣_ (أ ء)² = ب ء × ء حـ

٤_ أ ء = (أ ب × أ حـ) / (ب حـ)

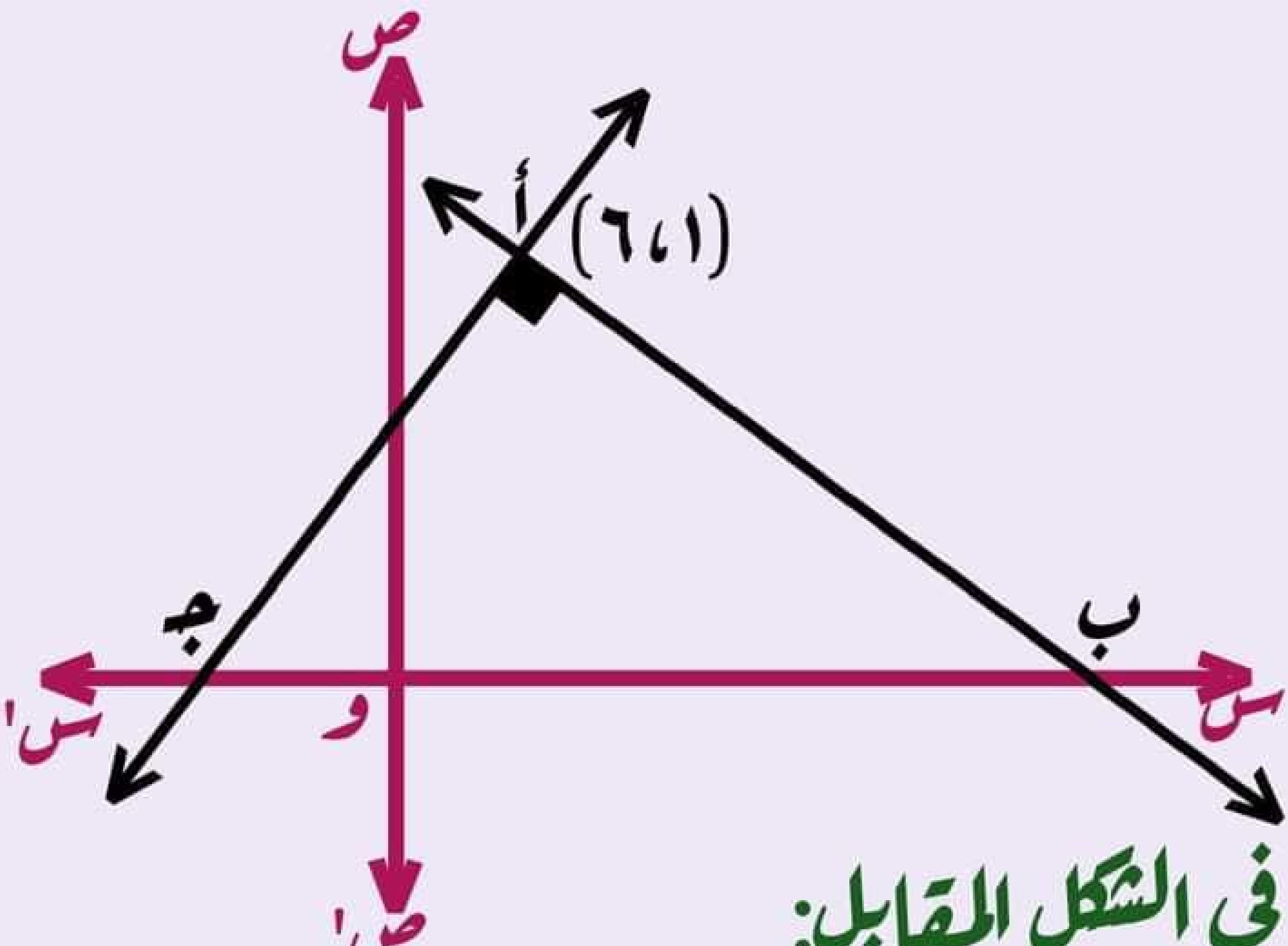
ROCKAL

« التعرف على نوع المثلث حسب زواياه »

١ـ إذا كان مربع طول الضلع الأكبر = مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين فإن المثلث « قائم الزاوية »

٢ـ إذا كان ״ ״ ״ ״ أكبر (<) ״ ״ ״ ״ ״ ״
فإن المثلث « منفرج الزاوية »

٣ـ إذا كان ״ ״ ״ أصغر (>) ״ ״ ״ ״ ״ ״
فإن المثلث « حاد الزوايا »



في الشكل المقابل:

$\overleftrightarrow{\text{أب}} \perp \overleftrightarrow{\text{أجـ}}$ ، أ(١ ، ٦) ؛ فإذا كان: ب جـ = ١٣

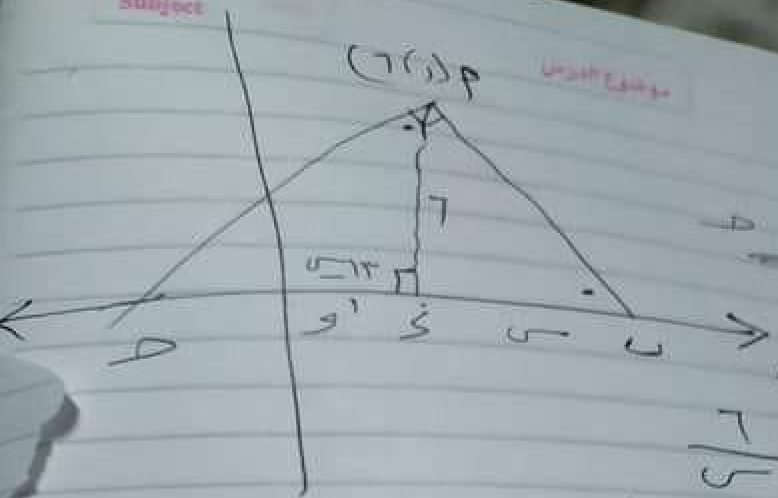
وحدة طول بحيث أن: و ب > و جـ فأوجد:

(١) مساحة سطح Δ أ ب جـ

(٢) معادلة $\overleftrightarrow{\text{أجـ}}$

تحياتي:

محمود عبد العزيز



الحل

$ظا(هـ \hat{م} د) = ظا ب$

$$\frac{١٣ - س}{٦} = \frac{٦}{س}$$

$$١٣س - س^٢ = ٣٦$$

$$س^٢ - ١٣س + ٣٦ = ٠$$

$$(س - ٤)(س - ٩) = ٠$$

$س = ٤$ مرفوضه $\quad\quad$ $س = ٩$

$\therefore$ $ب و = ٩ + ١ = ١٠$ $\quad\quad$ $م(١،٦)$

$و هـ = -٣$ $\quad\quad$ $هـ(-٣،٠)$

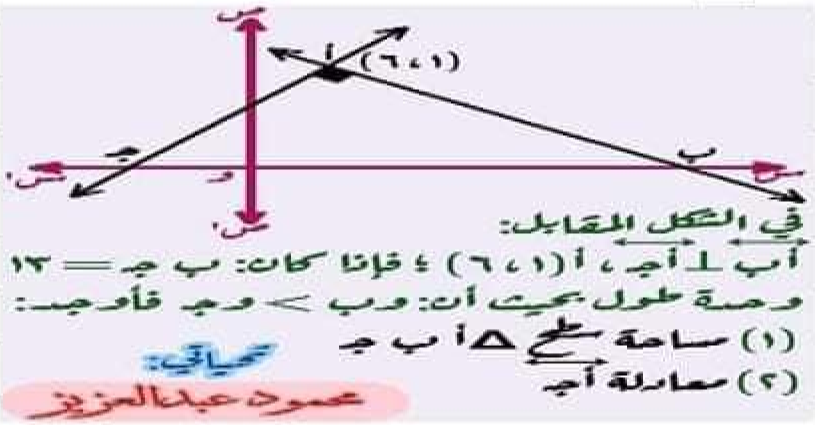
$$ميل\ \overleftrightarrow{م هـ} = \frac{٦ - ٠}{١ + ٣} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$$

معادلة $\overleftrightarrow{م هـ}$ $ص = \frac{٣}{٢}س + جـ \leftarrow (١،٦)$

$$٦ = \frac{٣}{٢} + جـ$$

$$جـ = ٦ - \frac{٣}{٢} = \frac{٩}{٢}$$

$$ص = \frac{٣}{٢}س + \frac{٩}{٢}$$



من اقليدس اب × أ ج = أ د × ب ج

وبنات أن ا د = ٦ وب ج = ١٣

اذن مساحة المثلث أ ب ج = ½ × ٦ × ١٣ = ٣٩ سم٢

نفرض و ج = ك ، و د = ١ ، د ب = ١٢ - ك من اقليدس

ا د)٢ = ب د × د ج

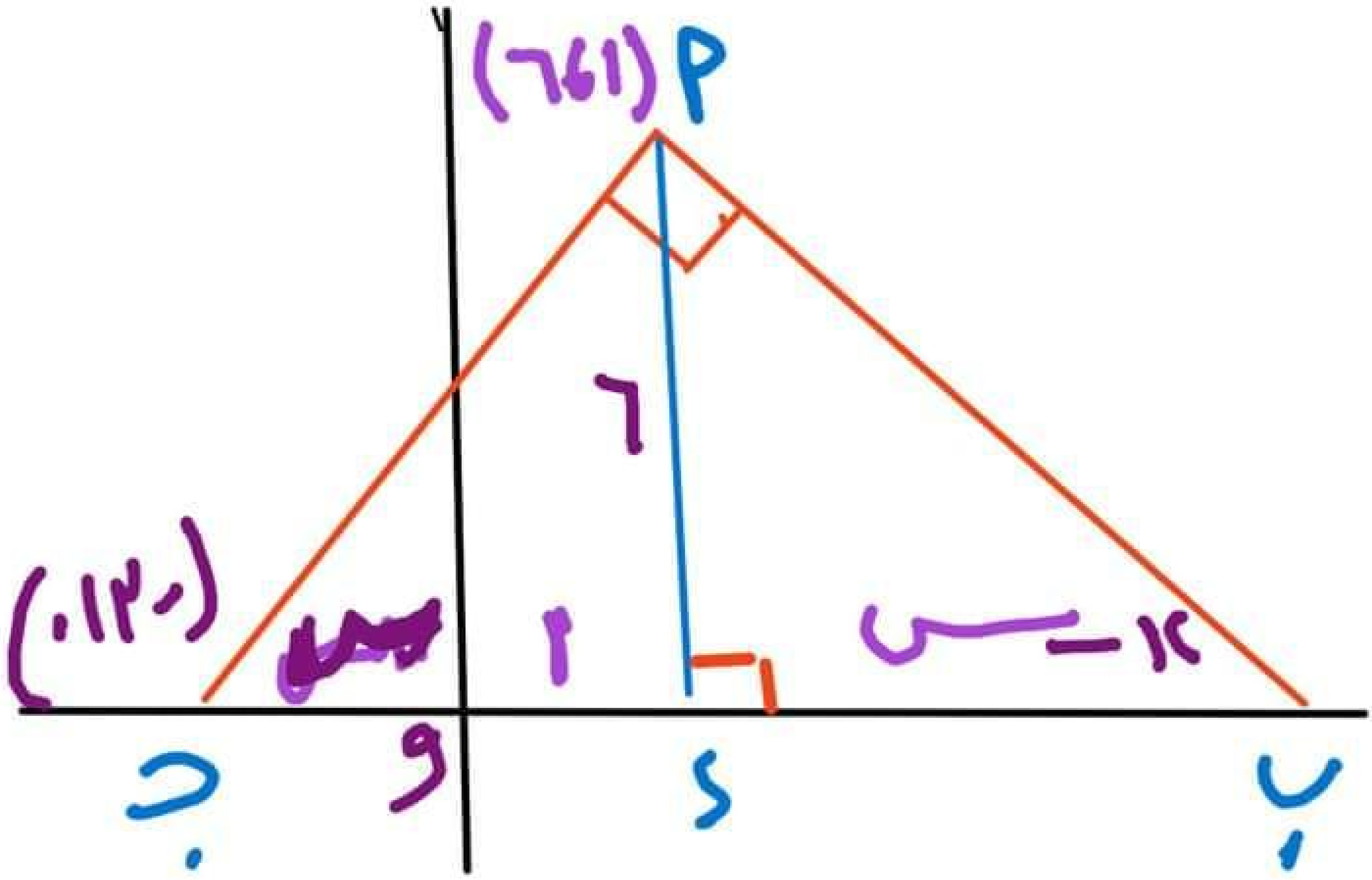
٣٦ = (١٢ - ك)(١ + ك)

وبالفك والتحليل

ك = ٣ اى أن ج = (- ٣ ، ٠)

وبما أن أ = (١ ، ٦) فإن ميله = ٦/ ٤ = ٣ / ٢

أى أن المعادلة ص = ٣/ ٢ س + ن حيث ن الجزء المقطوع والتعويض بنقطة أ فإن ن = ٩/ ٢ أى المعادلة ص = ٣/ ٢ س + ٩/ ٢



① مساحة △ = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ١٢ = ٣٦

② ∵ $|أد|^٢$ = |ب د| × |د جـ|

$(٦)^٢$ = (١٢ − س)(س + ١)

$س^٢$ − ١١ س + ٢٤ = ٠

(س − ٣)(س − ٨) = ٠ ⇐ $\boxed{س = ٣}$

س = ٨ مرفوضة لأنه اساسا > أو جـ |

⇐ احداثي جـ = (−٣ ، ٠)

⇐ معادلة $\overleftrightarrow{أجـ}$:

$\frac{ص - ٠}{س + ٣} = \frac{٦ - ٠}{١ + ٣} = \frac{٣}{٢}$

⇐ ص = $\frac{٣}{٢}$(س + ٣) = $\frac{٣}{٢}$ س + $\frac{٩}{٢}$