ثانيًا : ملخص لأهم نقاط المقرر

* إذا كانت إحداثيات نقطة أ في الفراغ ثلاثي الأبعاد تتعين بالثلاثي المرتب أ $(س_1 ، ص_1 ، ع_1) \in ع^3$

حيث $س_1$ ، $ص_1$ ، $ع_1$ مساقط النقطة أ على المحاور الثلاثة س ، ص ، ع على الترتيب فإن :

① متجه موضع النقطة أ بالنسبة لنقطة الأصل هو $\overrightarrow{وأ} = \overrightarrow{أ} = (س_1 ، ص_1 ، ع_1)$

② $\overrightarrow{أ}$ «بدلالة متجهات الوحدة الأساسية» $= س_1 \overrightarrow{س} + ص_1 \overrightarrow{ص} + ع_1 \overrightarrow{ع}$

③ معيار $\overrightarrow{أ} = \|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{س_1^2 + ص_1^2 + ع_1^2}$

④ متجه الوحدة في اتجاه $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ى_أ} = \frac{\overrightarrow{أ}}{\|\overrightarrow{أ}\|}$

⑤ زوايا الاتجاه لمتجه $\overrightarrow{أ}$ في الفراغ هي $\theta_س$ ، $\theta_ص$ ، $\theta_ع$ وتساوي قياسات الزوايا التي يصنعها المتجه مع الاتجاهات الموجبة للمحاور س ، ص ، ع على الترتيب.

⑥ المتجه $(-\overrightarrow{أ}) = (-س_1 ، -ص_1 ، -ع_1)$ هو المعكوس الجمعي للمتجه $\overrightarrow{أ}$ حيث $\overrightarrow{أ} + (-\overrightarrow{أ}) = \overrightarrow{و}$

وتكون زوايا اتجاهه هي $\pi - \theta_س$ ، $\pi - \theta_ص$ ، $\pi - \theta_ع$

⑦ تعميم : إذا كانت $(\theta_س ، \theta_ص ، \theta_ع)$ هي زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$ فإن $(\theta_س ، \theta_ص ، \theta_ع)$ هي زوايا الاتجاه للمتجه ك $\overrightarrow{أ}$ حيث ك > صفر، $(\pi - \theta_س ، \pi - \theta_ص ، \pi - \theta_ع)$ هي زوايا الاتجاه للمتجه ك $\overrightarrow{أ}$ حيث ك < صفر

⑧ متجه الوحدة في اتجاه $\overrightarrow{أ}$ $(\overrightarrow{ى_أ}) = \frac{\overrightarrow{أ}}{\|\overrightarrow{أ}\|} = (جتا \theta_س ، جتا \theta_ص ، جتا \theta_ع)$

حيث : $جتا^2 \theta_س + جتا^2 \theta_ص + جتا^2 \theta_ع = 1$

لاحظ أن : زوايا الاتجاه للمتجهات في الاتجاه الموجب للمحاور س ، ص ، ع هي (٠ ، ٩٠° ، ٩٠°) ، (٩٠° ، ٠ ، ٩٠°) ، (٩٠° ، ٩٠° ، ٠) على الترتيب وبالتالي جيوب تمامها هي (١ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، ١ ، ٠) ، (٠ ، ٠ ، ١)

⑨ إذا كان المتجه $\overrightarrow{أ}$ يصنع زوايا متساوية مع محاور الإحداثيات

أي أن : $\theta_س = \theta_ص = \theta_ع = \theta$ فإن : $جتا \theta_س = جتا \theta_ص = جتا \theta_ع = جتا \theta$

، ∵ $جتا^2 \theta_س + جتا^2 \theta_ص + جتا^2 \theta_ع = 1$ ∴ $3 جتا^2 \theta = 1$

∴ $جتا^2 \theta = \frac{1}{3}$ ∴ $جتا \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ومنها $\theta \simeq 54° 44' 8''$

أ، $جتا \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ومنها $\theta \simeq 125° 15' 52''$

(١٠) * مجموع قياسى أى زاويتين من زوايا الاتجاه أكبر من أو يساوى ٩٠°

* إذا كان مجموع قياسى زاويتى اتجاه ٩٠° فإن قياس الزاوية الثالثة ٩٠°

(١١) إذا كان : ك $\in$ ح فإن : ك $\overrightarrow{أ}$ = ك (س$_1$ ، ص$_1$ ، ع$_1$) = (ك س$_1$ ، ك ص$_1$ ، ك ع$_1$) $\in$ ح^3

حيث $\overrightarrow{أ}$ // ك $\overrightarrow{أ}$ ويكونان:
- فى نفس الاتجاه إذا كانت ك > ٠
- فى اتجاهين متضادين إذا كانت ك < ٠

* إذا كان : أ (س$_1$ ، ص$_1$ ، ع$_1$) ، ب (س$_2$ ، ص$_2$ ، ع$_2$) ، حـ (س$_3$ ، ص$_3$ ، ع$_3$) ثلاث نقاط فى الفراغ ثلاثى الأبعاد فإن :

(١) نقطة منتصف $\overline{أب}$ = $\left(\frac{س_1 + س_2}{2} ، \frac{ص_1 + ص_2}{2} ، \frac{ع_1 + ع_2}{2}\right)$

(٢) القطعة المستقيمة الموجهة من أ إلى ب = $\overrightarrow{أب}$ = $\overrightarrow{ب}$ − $\overrightarrow{أ}$ = (س$_2$ − س$_1$ ، ص$_2$ − ص$_1$ ، ع$_2$ − ع$_1$)

(٣) طول القطعة المستقيمة الموجهة من أ إلى ب = معيار المتجه $\overrightarrow{أب}$ = $\| \overrightarrow{أب} \|$ = البعد بين النقطتين أ ، ب

= أب = $\sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2 + (ع_2 - ع_1)^2}$

(٤) زوايا الاتجاه لمتجه $\overrightarrow{أب}$ (لا يمر بنقطة الأصل) فى الفراغ هى قياسات الزوايا التى يصنعها متجه يمر بنقطة الأصل موازيًا للمتجه $\overrightarrow{أب}$ وجيوب تمامها هى : $\left(\frac{س_2 - س_1}{\|\overrightarrow{أب}\|} ، \frac{ص_2 - ص_1}{\|\overrightarrow{أب}\|} ، \frac{ع_2 - ع_1}{\|\overrightarrow{أب}\|}\right)$

(٥) $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{أ}$ = (س$_1$ + س$_2$ ، ص$_1$ + ص$_2$ ، ع$_1$ + ع$_2$)

(٦) $(\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}) + \overrightarrow{حـ} = \overrightarrow{أ} + (\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{حـ}) = \overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{حـ}$

(٧) $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{و} = \overrightarrow{و} + \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{أ}$ حيث $\overrightarrow{و}$ = (٠ ، ٠ ، ٠)

(٨) إذا كان : $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{أ} + \overrightarrow{حـ}$ فإن : $\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{حـ}$

(٩) إذا كان : ك $\overrightarrow{أ}$ = ك $\overrightarrow{ب}$ فإن : $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ب}$

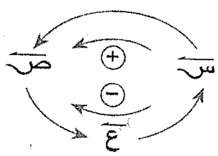
(١٠) ك $(\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب})$ = ك $\overrightarrow{أ}$ + ك $\overrightarrow{ب}$ ، (ك + ل) $\overrightarrow{أ}$ = ك $\overrightarrow{أ}$ + ل $\overrightarrow{أ}$

(١١) $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ب}$ إذا وإذا فقط كان س$_1$ = س$_2$ ، ص$_1$ = ص$_2$ ، ع$_1$ = ع$_2$

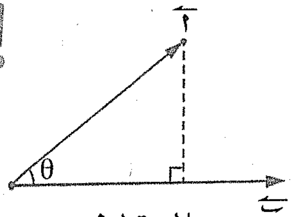
(١٢) إذا كان : $\|\overrightarrow{ب}\| = \|م \overrightarrow{أ}\|$ فإن : $\|\overrightarrow{ب}\| = |م| . \|\overrightarrow{أ}\|$

(١٣) $\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}\| \leq \|\overrightarrow{أ}\| + \|\overrightarrow{ب}\|$

الضرب القياسى والضرب الاتجاهى لمتجهين :

الضرب القياسى لمتجهين	الضرب الاتجاهى لمتجهين
$\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = \|\overrightarrow{أ}\| \, \|\overrightarrow{ب}\| \text{ جتا } \theta$ (كمية قياسية)	$\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \left(\|\overrightarrow{أ}\| \, \|\overrightarrow{ب}\| \text{ جا } \theta\right) \overrightarrow{ى}$ (كمية متجهة) حيث $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة عمودى على المستوى الذى يحوى $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ وفى اتجاه تحدده قاعدة اليد اليمنى.
$\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = أ_{س} ب_{س} + أ_{ص} ب_{ص} + أ_{ع} ب_{ع}$	$\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ أ_{س} & أ_{ص} & أ_{ع} \\ ب_{س} & ب_{ص} & ب_{ع} \end{vmatrix}$
$\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{ب} \cdot \overrightarrow{أ}$	$\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = -(\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{أ})$
$\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} =$ صفر ، $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ غير صفريين $\Big\}$ $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متعامدان	$\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{0}$ ، $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ غير صفريين $\Big\}$ $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متوازيان
$\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{أ} = \|\overrightarrow{أ}\|^2$	$\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{0}$
• $\overrightarrow{س} \cdot \overrightarrow{س} = \overrightarrow{ص} \cdot \overrightarrow{ص} = \overrightarrow{ع} \cdot \overrightarrow{ع} = 1$ • $\overrightarrow{س} \cdot \overrightarrow{ص} = \overrightarrow{ص} \cdot \overrightarrow{س} = \overrightarrow{ع} \cdot \overrightarrow{س} = \overrightarrow{س} \cdot \overrightarrow{ع} = \overrightarrow{ص} \cdot \overrightarrow{ع} = \overrightarrow{ع} \cdot \overrightarrow{ص} =$ صفر	• $\overrightarrow{س} \times \overrightarrow{س} = \overrightarrow{ص} \times \overrightarrow{ص} = \overrightarrow{ع} \times \overrightarrow{ع} = \overrightarrow{0}$ • $\overrightarrow{س} \times \overrightarrow{ص} = \overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ص} \times \overrightarrow{ع} = \overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ع} \times \overrightarrow{س} = \overrightarrow{ص}$ • $\overrightarrow{ص} \times \overrightarrow{س} = -\overrightarrow{ع}$ • $\overrightarrow{س} \times \overrightarrow{ع} = -\overrightarrow{ص}$ • $\overrightarrow{ع} \times \overrightarrow{ص} = -\overrightarrow{س}$ 
$\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \cdot \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{0} \cdot \overrightarrow{0} =$ صفر	$\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \times \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{0} \times \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$
$(م\overrightarrow{أ}) \cdot \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{أ} \cdot (م\overrightarrow{ب}) = م(\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب})$	$(م\overrightarrow{أ}) \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{أ} \times (م\overrightarrow{ب}) = م(\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب})$
$(\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}) \cdot \overrightarrow{ح} = \overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ح} + \overrightarrow{ب} \cdot \overrightarrow{ح}$	$(\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}) \times \overrightarrow{ح} = \overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ح} + \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{ح}$

ملاحظات على الضرب القياسى



«المسقط أ$_{\text{ب}}$»

① مسقط (مركبة جبرية) المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{ب}}$ ويرمز لها بالرمز أ$_{\text{ب}}$ هو أ$_{\text{ب}}$ = $\|\overrightarrow{\text{أ}}\|\ \text{جتا}\ \theta = \dfrac{\overrightarrow{\text{أ}}\cdot\overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{ب}}\|}$

(حيث θ هو قياس الزاوية الصغرى بين المتجهين عند رسمهما داخلين إلى أو خارجين من نفس النقطة ، $٠ \le \theta \le ١٨٠^\circ$)

② المركبة الاتجاهية للمتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{ب}}$ = المركبة الجبرية (أ$_{\text{ب}}$) × متجه وحدة فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{ب}}$

$$= \frac{\overrightarrow{\text{أ}}\cdot\overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{ب}}\|} \times \frac{\overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{ب}}\|} = \left(\frac{\overrightarrow{\text{أ}}\cdot\overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{ب}}\|^{٢}}\right)\overrightarrow{\text{ب}}$$

③ $\|\overrightarrow{\text{أ}}+\overrightarrow{\text{ب}}\|^{٢} = (\overrightarrow{\text{أ}}+\overrightarrow{\text{ب}})\cdot(\overrightarrow{\text{أ}}+\overrightarrow{\text{ب}}) = \overrightarrow{\text{أ}}\cdot\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{أ}}\cdot\overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{ب}}\cdot\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}\cdot\overrightarrow{\text{ب}}$

$= \|\overrightarrow{\text{أ}}\|^{٢} + ٢\,(\overrightarrow{\text{أ}}\cdot\overrightarrow{\text{ب}}) + \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^{٢} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\|^{٢} + \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^{٢} + ٢\,\|\overrightarrow{\text{أ}}\|\,\|\overrightarrow{\text{ب}}\|\ \text{جتا}\ \theta$

ملاحظات على الضرب الاتجاهى

① $\|\overrightarrow{\text{أ}}\times\overrightarrow{\text{ب}}\| = \|\overrightarrow{\text{أ}}\|\,\|\overrightarrow{\text{ب}}\|\ \text{جا}\ \theta$ ، $\text{جا}\ \theta = \dfrac{\|\overrightarrow{\text{أ}}\times\overrightarrow{\text{ب}}\|}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|\,\|\overrightarrow{\text{ب}}\|}$

② متجه الوحدة فى اتجاه $\overrightarrow{\text{أ}}\times\overrightarrow{\text{ب}}$ هو $\overrightarrow{\text{ى}} = \dfrac{\overrightarrow{\text{أ}}\times\overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\times\overrightarrow{\text{ب}}\|} = \dfrac{\overrightarrow{\text{أ}}\times\overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|\,\|\overrightarrow{\text{ب}}\|\ \text{جا}\ \theta}$

③ إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـ}}$ ثلاثة متجهات غير صفرية

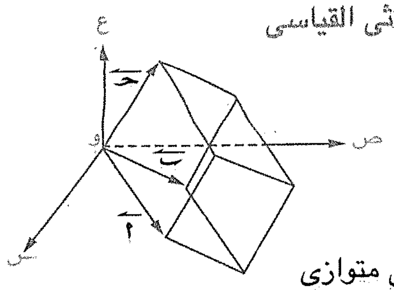
وكان : $\overrightarrow{\text{أ}}\times\overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{أ}}\times\overrightarrow{\text{حـ}}$ فهذا لا يعنى بالضرورة أن $\overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{حـ}}$ «خاصية الحذف غير متحققة»

الضرب الثلاثى القياسى

الضرب الثلاثى القياسى : $\overrightarrow{\text{أ}}\cdot(\overrightarrow{\text{ب}}\times\overrightarrow{\text{حـ}}) = \begin{vmatrix} \text{أ}_{\text{س}} & \text{أ}_{\text{ص}} & \text{أ}_{\text{ع}} \\ \text{ب}_{\text{س}} & \text{ب}_{\text{ص}} & \text{ب}_{\text{ع}} \\ \text{حـ}_{\text{س}} & \text{حـ}_{\text{ص}} & \text{حـ}_{\text{ع}} \end{vmatrix}$

- $\overrightarrow{\text{أ}}\cdot\overrightarrow{\text{ب}}\times\overrightarrow{\text{حـ}} = \overrightarrow{\text{ب}}\cdot\overrightarrow{\text{حـ}}\times\overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{حـ}}\cdot\overrightarrow{\text{أ}}\times\overrightarrow{\text{ب}}$ (يمكن تبديل المتجهات مع الاحتفاظ بالترتيب الدورى للمتجهات)
- $\overrightarrow{\text{أ}}\cdot\overrightarrow{\text{ب}}\times\overrightarrow{\text{حـ}} = \overrightarrow{\text{أ}}\times\overrightarrow{\text{ب}}\cdot\overrightarrow{\text{حـ}}$ (يمكن تبديل علامتى الضرب مع الاحتفاظ بالترتيب الدورى للمتجهات)

تذكر المعنى الهندسى لمعيار الضرب الاتجاهى لمتجهين والضرب الثلاثى القياسى



① $\|\overrightarrow{\text{أ}}\times\overrightarrow{\text{ب}}\|$ = مساحة متوازى الأضلاع الذى فيه :

$\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ضلعان متجاوران فيه = ضعف مساحة المثلث الذى فيه :

$\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ضلعان متجاوران فيه.

② إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـ}}$ ثلاثة متجهات تكون ثلاثة أحرف غير متوازية فى متوازى سطوح فإن حجم متوازى السطوح = $|\overrightarrow{\text{أ}}\cdot\overrightarrow{\text{ب}}\times\overrightarrow{\text{حـ}}|$

ملاحظات هامة على المتجهات

* إذا كانت : أ ، ب ، حـ ، ء أربعة نقاط فى الفراغ ثلاثى الأبعاد فإن :

(١) لإيجاد قياس الزاوية الصغرى θ بين المتجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ نستخدم القانون : جتا $\theta = \frac{\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{أ}\| \|\overrightarrow{ب}\|}$

(٢) لإثبات أن المتجهين غير الصفريين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متوازيين نثبت أن :

• $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{و}$ أو $\frac{أ_س}{ب_س} = \frac{أ_ص}{ب_ص} = \frac{أ_ع}{ب_ع}$ أو جتا $\theta = \pm 1$

والعكس صحيح أى أنه : إذا كان : $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$

فإن : $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{و}$ ، $\frac{أ_س}{ب_س} = \frac{أ_ص}{ب_ص} = \frac{أ_ع}{ب_ع}$ ، جتا $\theta = \pm 1$

(٣) لإثبات أن المتجهين غير الصفريين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متعامدين نثبت أن :

• $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = ٠$ أى $أ_س ب_س + أ_ص ب_ص + أ_ع ب_ع = ٠$ ، جتا $\theta = ٠$

والعكس صحيح أى أنه : إذا كان : $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$ فإن : $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = ٠$ ، جتا $\theta = ٠$

(٤) لإثبات أن أ ، ب ، حـ ثلاثة نقط على استقامة واحدة نثبت أن : $\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{ب حـ} = \overrightarrow{و}$

(٥) لإثبات أن النقاط أ ، ب ، حـ تقع فى مستوى واحد يمر بنقطة الأصل نثبت أن : $\overrightarrow{أ} \cdot (\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{حـ}) = ٠$

ومنها فإن $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{حـ}$ متجهات موضع تقع فى مستوى واحد.

(٦) لإثبات أن أ ، ب ، حـ ، ء تقع فى مستوى واحد نثبت أن : $\overrightarrow{أب} \cdot \overrightarrow{أحـ} \times \overrightarrow{أء} =$ صفر

معادلة الكرة فى الفراغ

(١) الصورة القياسية : $\boxed{(س - ل)^٢ + (ص - ك)^٢ + (ع - ن)^٢ = نق^٢}$

ومنها مركز الكرة م (ل ، ك ، ن) ، طول نصف قطرها نق

(٢) الصورة العامة : $\boxed{س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٢ ل س + ٢ ك ص + ٢ ن ع + ء = ٠}$

ومنها مركز الكرة (ـ ل ، ـ ك ، ـ ن) وطول نصف قطرها نق = $\sqrt{ل^٢ + ك^٢ + ن^٢ - ء}$

ملاحظات

(١) فى المعادلة العامة للكرة يجب أن يكون :

* معامل س^2 = معامل ص^2 = معامل ع^2 ≠ صفر   * ل^2 + ك^2 + ن^2 − ء > صفر

* المعادلة خالية من الحد الذى يشمل س ص ، أ ص ع ، أ س ع ، أ س ص ع

(٢) مساحة سطح الكرة = ٤ π نق^2 وحجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^3

(٣) الكرة التى تمس مستويات الإحداثيات الموجبة وطول نصف قطرها نق يكون مركزها هو النقطة (نق ، نق ، نق)

(٤) الكرة التى مركزها نقطة الأصل وتمر بالنقطة (أ ، ب ، حـ)

- طول نصف قطرها نق = $\sqrt{أ^2 + ب^2 + حـ^2}$
- معادلتها القياسية س^2 + ص^2 + ع^2 = أ^2 + ب^2 + حـ^2

(٥) الكرة التى مركزها م (أ ، ب ، حـ) و

- تمس المستوى س ص فإن نق = |حـ|
- تمس المستوى س ع فإن نق = |ب|
- تمس المستوى ص ع فإن نق = |أ|

(٦) الكرة التى يقع مركزها على المحور

- س وتمس المستوى ص ع فإن مركزها (أ ، ٠ ، ٠) ، نق = |أ|
- ص وتمس المستوى س ع فإن مركزها (٠ ، ب ، ٠) ، نق = |ب|
- ع وتمس المستوى س ص فإن مركزها (٠ ، ٠ ، حـ) ، نق = |حـ|

(٧) إذا كانت : م ، ن كرتين طولا نصفى قطريهما نق$_1$ ، نق$_2$ على الترتيب (حيث نق$_1$ > نق$_2$)

إذا كانت الكرتان م ، ن	فإن
(١) متباعدتين	م ن > نق$_1$ + نق$_2$
(٢) متماستين من الخارج	م ن = نق$_1$ + نق$_2$
(٣) متقاطعتين	نق$_1$ − نق$_2$ < م ن < نق$_1$ + نق$_2$
(٤) متماستين من الداخل	م ن = نق$_1$ − نق$_2$
(٥) إحداهما بداخل الأخرى	م ن < نق$_1$ − نق$_2$
(٦) متحدتى المركز	م ن = صفر

الصور المختلفة لمعادلة المستقيم فى الفراغ

* إذا كان ل مستقيم فى الفراغ ، $\text{ء}(\text{س}_1 ، \text{ص}_1 ، \text{ع}_1)$ نقطة معلومة عليه ، $\overrightarrow{\text{ه}} = (\text{أ} ، \text{ب} ، \text{ح})$ متجه اتجاه له فإن :

① $\overrightarrow{\text{ر}} = \overrightarrow{\text{ء}} + \text{ك}\ \overrightarrow{\text{ه}}$ (الصورة المتجهة لمعادلة الخط المستقيم)

- $\overrightarrow{\text{ر}}$: متجه موضع أى نقطة على المستقيم
- $\overrightarrow{\text{ء}}$: متجه موضع نقطة معلومة على المستقيم
- ك : عدد حقيقى
- $\overrightarrow{\text{ه}}$: متجه اتجاه المستقيم

② $\dfrac{\text{س} - \text{س}_1}{\text{أ}} = \dfrac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{ب}} = \dfrac{\text{ع} - \text{ع}_1}{\text{ح}}$ (الصورة الإحداثية لمعادلة الخط المستقيم)

③ $\text{س} = \text{س}_1 + \text{ك}\,\text{أ} ، \text{ص} = \text{ص}_1 + \text{ك}\,\text{ب} ، \text{ع} = \text{ع}_1 + \text{ك}\,\text{ح}$ (المعادلات البارامترية للخط المستقيم)

ملاحظات

① إذا كانت : $\theta_{\text{س}} ، \theta_{\text{ص}} ، \theta_{\text{ع}}$ هى زوايا الاتجاه للمستقيم ل فإن :

* $(\text{جتا}\ \theta_{\text{س}} ، \text{جتا}\ \theta_{\text{ص}} ، \text{جتا}\ \theta_{\text{ع}})$ متجه وحدة فى اتجاه المستقيم وهو متجه اتجاه له

* $(\text{ر}\ \text{جتا}\ \theta_{\text{س}} ، \text{ر}\ \text{جتا}\ \theta_{\text{ص}} ، \text{ر}\ \text{جتا}\ \theta_{\text{ع}})$ حيث $\text{ر} \in \text{ح}^*$ تسمى نسب اتجاه للمستقيم وهى مركبات متجه اتجاه له.

② فى معادلة المستقيم بالصورة الإحداثية $\dfrac{\text{س} - \text{س}_1}{\text{أ}} = \dfrac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{ب}} = \dfrac{\text{ع} - \text{ع}_1}{\text{ح}}$ حيث $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1 ، \text{ع}_1)$ نقطة عليه ، $(\text{أ} ، \text{ب} ، \text{ح})$ متجه اتجاه له

إذا كان

- $\text{أ} = 0$ تصبح $\text{س} = \text{س}_1 ، \dfrac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{ب}} = \dfrac{\text{ع} - \text{ع}_1}{\text{ح}}$
- $\text{ب} = 0$ تصبح $\text{ص} = \text{ص}_1 ، \dfrac{\text{س} - \text{س}_1}{\text{أ}} = \dfrac{\text{ع} - \text{ع}_1}{\text{ح}}$
- $\text{ح} = 0$ تصبح $\text{ع} = \text{ع}_1 ، \dfrac{\text{س} - \text{س}_1}{\text{أ}} = \dfrac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{ب}}$

③ معادلة المحور

- س هى $\text{ص} = 0 ، \text{ع} = 0$ ومتجه اتجاهه $(\text{ك} ، 0 ، 0)$
- ص هى $\text{س} = 0 ، \text{ع} = 0$ ومتجه اتجاهه $(0 ، \text{ك} ، 0)$
- ع هى $\text{س} = 0 ، \text{ص} = 0$ ومتجه اتجاهه $(0 ، 0 ، \text{ك})$

حيث $\text{ك} \neq 0$

④ معادلة المستقيم المار بالنقطة $(س_١ ، ص_١ ، ع_١)$ ويوازى المحور

- س ← هى ← ص = ص$_١$ ، ع = ع$_١$
- ص ← هى ← س = س$_١$ ، ع = ع$_١$
- ع ← هى ← س = س$_١$ ، ص = ص$_١$

⑤ معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل ، (أ ، ب ، حـ) متجه اتجاه له هى :

⇐ $\overleftarrow{ر} = ك$ (أ ، ب ، حـ) «الصورة الاتجاهية»

⇐ س = ك أ ، ص = ك ب ، ع = ك حـ «المعادلات البارامترية»

⇐ $\frac{س}{أ} = \frac{ص}{ب} = \frac{ع}{حـ}$ «الصورة الإحداثية»

⑥ إذا علمت نقطتان أ ، ب على المستقيم فإن :

⇐ متجه اتجاه المستقيم = $\overleftarrow{أب} = \overleftarrow{ب} - \overleftarrow{أ}$

⇐ ك $\overleftarrow{أب}$ حيث ك $\in ح^*$ هو أيضًا متجه اتجاه لنفس المستقيم.

⑦ المستقيم المار بنقطة الأصل وبالنقطة أ $(س_١ ، ص_١ ، ع_١)$

فإن : $\overleftarrow{أ} = (س_١ ، ص_١ ، ع_١)$ متجه اتجاه للمستقيم.

⑧ • المستقيم الذى متجه اتجاه له $\overleftarrow{هـ}$ = (أ ، ب ، ٠) يقع فى مستوى يوازى المستوى س ص وكذلك المستقيم الذى متجه اتجاه له $\overleftarrow{هـ}$ = (أ ، ٠ ، حـ) يقع فى مستوى يوازى المستوى س ع والمستقيم الذى متجه اتجاه له $\overleftarrow{هـ}$ = (٠ ، ب ، حـ) يقع فى مستوى يوازى المستوى ص ع

• لاحظ الفرق بين جيوب تمام الاتجاه للمستقيم ونسب الاتجاه للمستقيم :

⇐ إذا كان ل ، م ، ن هى جيوب تمام الاتجاه للمستقيم

فإن : (ل ، م ، ن) هو متجه وحدة فى اتجاه المستقيم ، $ل^٢ + م^٢ + ن^٢ = ١$

«لأن $جتا^٢ \theta_س + جتا^٢ \theta_ص + جتا^٢ \theta_ع = ١$»

⇐ إذا كان : أ ، ب ، حـ هى نسب اتجاه لنفس المستقيم

فإن : (أ ، ب ، حـ) هو متجه اتجاه للمستقيم ، (أ ، ب ، حـ) = ك (ل ، م ، ن) ، ك $\neq$ ٠

⇐ $(ل ، م ، ن) = \frac{(أ ، ب ، حـ)}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢ + حـ^٢}}$

معادلة المستوى فى الفراغ

يتطلب إيجاد معادلة المستوى فى الفراغ معرفة نقطة أ $(س_1 ، ص_1 ، ع_1)$ تقع عليه ومتجه اتجاه عمودى عليه $\overleftarrow{ن} = (أ ، ب ، حـ)$ فتكون معادلة المستوى :

- $\boxed{\overleftarrow{ن} \cdot \overleftarrow{ر} = \overleftarrow{ن} \cdot \overleftarrow{أ}}$ «المعادلة المتجهة لمعادلة المستوى»
- $\boxed{أ (س - س_1) + ب (ص - ص_1) + حـ (ع - ع_1) = 0}$ «الصورة القياسية لمعادلة المستوى»
- $\boxed{أ س + ب ص + حـ ع + د = 0}$ «الصورة العامة لمعادلة المستوى»

* يمكن أيضًا إيجاد معادلة المستوى فى الحالات الآتية :

① بمعلومية أطوال الأجزاء المقطوعة من محاور الإحداثيات : $\boxed{\frac{س}{س_1} + \frac{ص}{ص_1} + \frac{ع}{ع_1} = 1}$

حيث يقطع المستوى محاور الإحداثيات فى النقاط $(س_1 ، 0 ، 0)$ ، $(0 ، ص_1 ، 0)$ ، $(0 ، 0 ، ع_1)$

② بمعلومية ٣ نقاط أ $(س_1 ، ص_1 ، ع_1)$ ، ب $(س_2 ، ص_2 ، ع_2)$ ، حـ $(س_3 ، ص_3 ، ع_3)$ تقع عليه وليست على استقامة واحدة نتبع الخطوات التالية :

- نوجد ناتج الضرب الاتجاهى $\overleftarrow{أب} \times \overleftarrow{ب حـ}$ فيكون متجه اتجاه عمودى للمستوى $(\overleftarrow{ن})$
- نستخدم أى نقطة من الثلاث.
- نوجد المعادلة المتجهة للمستوى : $\overleftarrow{ن} \cdot \overleftarrow{ر} = \overleftarrow{ن} \cdot \overleftarrow{أ}$
- ويمكن إيجادها مباشرة من المحدد : $\begin{vmatrix} س - س_1 & ص - ص_1 & ع - ع_1 \\ س_2 - س_1 & ص_2 - ص_1 & ع_2 - ع_1 \\ س_3 - س_1 & ص_3 - ص_1 & ع_3 - ع_1 \end{vmatrix} = 0$

ملاحظات

* من المعادلة العامة للمستوى ط : أ س + ب ص + جـ ع + ء = ٠ نستنتج أن :

- (أ ، ب ، جـ) متجه اتجاه عمودى على المستوى ط ، ء = − م̄ . ن̄ حيث م̄ متجه موضع نقطة ∈ المستوى ، ن̄ متجه الاتجاه العمودى.
- أى مستوى يوازى المستوى ط يكون المتجه (أ ، ب ، جـ) متجه اتجاه عمودى له أيضًا.
- إذا كانت ء = صفر فإن المستوى يحوى نقطة الأصل.
- إذا كانت (فإن المعادلة تصبح ... وهى معادلة مستوى ... وعموديًا على المستوى):

إذا كانت	فإن المعادلة تصبح	وهى معادلة مستوى	وعموديًا على المستوى
أ = ٠	ب ص + جـ ع + ء = ٠	يوازى محور س	ص ع
ب = ٠	أ س + جـ ع + ء = ٠	يوازى محور ص	س ع
جـ = ٠	أ س + ب ص + ء = ٠	يوازى محور ع	س ص

- إذا كانت (فإن المعادلة تصبح ... وهى معادلة مستوى ... وعموديًا على المستوى):

إذا كانت	فإن المعادلة تصبح	وهى معادلة مستوى	وعموديًا على المستوى
أ = ء = ٠	ب ص + جـ ع = ٠	يحوى المحور س	ص ع
ب = ء = ٠	أ س + جـ ع = ٠	يحوى المحور ص	س ع
جـ = ء = ٠	أ س + ب ص = ٠	يحوى المحور ع	س ص

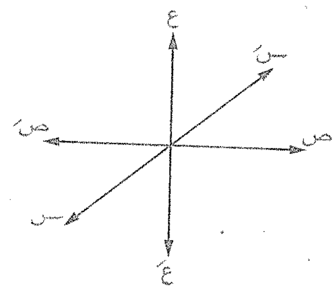
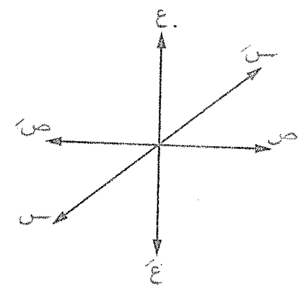
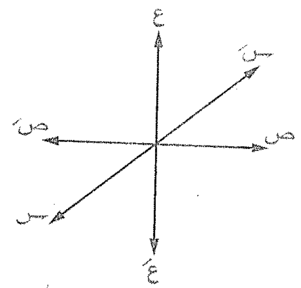
- معادلة المستوى س ص هى ع = ٠ ، المعادلة ع = أ هى معادلة مستوى يوازى المستوى س ص
- معادلة المستوى ص ع هى س = ٠ ، المعادلة س = أ هى معادلة مستوى يوازى المستوى ص ع
- معادلة المستوى س ع هى ص = ٠ ، المعادلة ص = أ هى معادلة مستوى يوازى المستوى س ع
- إذا كانت : هـ (س$_{1}$ ، ص$_{1}$ ، ع$_{1}$) ، و (س$_{2}$ ، ص$_{2}$ ، ع$_{2}$) ، ن (س$_{3}$ ، ص$_{3}$ ، ع$_{3}$)

ثلاثة نقاط فى الفراغ وكان التعويض عنهم فى معادلة المستوى كالتالى :

أ س$_{1}$ + ب ص$_{1}$ + جـ ع$_{1}$ + ء = ٠ ، أ س$_{2}$ + ب ص$_{2}$ + جـ ع$_{2}$ + ء > ٠ ، أ س$_{3}$ + ب ص$_{3}$ + جـ ع$_{3}$ + ء < ٠

فمعنى ذلك أن : هـ (س$_{1}$ ، ص$_{1}$ ، ع$_{1}$) تنتمى للمستوى ، و (س$_{2}$ ، ص$_{2}$ ، ع$_{2}$) ، ن (س$_{3}$ ، ص$_{3}$ ، ع$_{3}$) لا تنتميان للمستوى وكل منهما يقع فى جهة مختلفة عن الأخرى بالنسبة للمستوى.

● مستويات الإحداثيات :

المستوى الإحداثي س ص	المستوى الإحداثي س ع	المستوى الإحداثي ص ع
		
يحوى جميع نقط الفراغ التى إحداثياتها (س ، ص ، ٠) وتكون معادلته ع = ٠	يحوى جميع نقط الفراغ التى إحداثياتها (س ، ٠ ، ع) وتكون معادلته ص = ٠	يحوى جميع نقط الفراغ التى إحداثياتها (٠ ، ص ، ع) وتكون معادلته س = ٠

● معادلة المستوى الذى يحوى جميع نقط الفراغ التى على الصورة:

- (س ، ص ، أ) هى ع = أ
- (س ، أ ، ع) هى ص = أ
- (أ ، ص ، ع) هى س = أ

حيث أ ثابت ∈ ح

* الزاوية بين (متجهين – مستقيمين – مستويين – مستقيم ومستوى) فى الفراغ :

① الزاوية الصغرى θ بين متجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ فى الفراغ نوجدها من العلاقة :

متجهين

$$\text{جتا}\,\theta = \frac{\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{أ}\|\,\|\overrightarrow{ب}\|}$$ حيث $٠ \le \theta \le ١٨٠^\circ$

② الزاوية θ بين مستقيمين $ل_١$ ، $ل_٢$ فى الفراغ حيث متجها اتجاهيهما $\overrightarrow{هـ_١}$ ، $\overrightarrow{هـ_٢}$ نوجدها من العلاقة :

مستقيمين

$$\text{جتا}\,\theta = \frac{|\overrightarrow{هـ_١} \cdot \overrightarrow{هـ_٢}|}{\|\overrightarrow{هـ_١}\|\,\|\overrightarrow{هـ_٢}\|}$$ حيث $٠ \le \theta \le ٩٠^\circ$

وإذا كان $(ل_١ ، م_١ ، ن_١)$ ، $(ل_٢ ، م_٢ ، ن_٢)$ هى جيوب تمام الاتجاه المستقيمين

فإن : $\text{جتا}\,\theta = |ل_١ ل_٢ + م_١ م_٢ + ن_١ ن_٢|$

③ الزاوية θ بين مستويين فى الفراغ حيث $\overrightarrow{ن_١}$ متجه الاتجاه العمودى على الأول

، $\overrightarrow{ن_٢}$ متجه الاتجاه العمودى على الثانى نوجدها من العلاقة :

مستويين

$$\text{جتا}\,\theta = \frac{|\overrightarrow{ن_١} \cdot \overrightarrow{ن_٢}|}{\|\overrightarrow{ن_١}\|\,\|\overrightarrow{ن_٢}\|}$$ حيث $٠ \le \theta \le ٩٠^\circ$

④ قياس الزاوية بين مستقيم فى الفراغ متجه اتجاهه $\overleftarrow{\text{هـ}}$ ومستوى متجه الاتجاه العمودى عليه $\overleftarrow{\text{ن}}$ هو

(٩٠° − θ) حيث : $\boxed{\text{جتا}\ \theta = \dfrac{|\overleftarrow{\text{ن}} \cdot \overleftarrow{\text{هـ}}|}{\|\overleftarrow{\text{ن}}\|\,\|\overleftarrow{\text{هـ}}\|}}$

* شرط توازى (مستقيمين – مستويين) فى الفراغ :

① شرط توازى مستقيمين $ل_1$ ، $ل_2$ فى الفراغ هو توازى متجهى اتجاهيهما أى $\boxed{\overleftarrow{\text{هـ}}_1 \,//\, \overleftarrow{\text{هـ}}_2}$

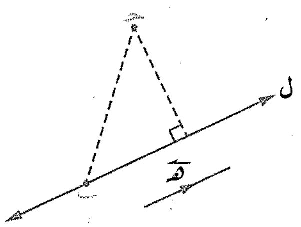
② شرط توازى مستويين فى الفراغ هو توازى متجهى الاتجاه العموديين عليهما أى $\boxed{\overleftarrow{\text{ن}}_1 \,//\, \overleftarrow{\text{ن}}_2}$

* شرط تعامد (مستقيمين – مستويين) فى الفراغ :

① شرط تعامد مستقيمين هو تعامد متجهى اتجاهيهما أى $\overleftarrow{\text{هـ}}_1 \perp \overleftarrow{\text{هـ}}_2$

② شرط تعامد مستويين هو تعامد متجهى الاتجاه العموديين عليهما أى $\overleftarrow{\text{ن}}_1 \perp \overleftarrow{\text{ن}}_2$

* طول العمود من نقطة إلى مستقيم فى الفراغ :



بفرض مستقيم ل فى الفراغ حيث ب نقطة عليه ، $\overleftarrow{\text{هـ}}$ متجه اتجاه له

فإن بعد نقطة حـ فى الفراغ عن المستقيم ل = $\dfrac{\|\overleftarrow{\text{حـ ب}} \times \overleftarrow{\text{هـ}}\|}{\|\overleftarrow{\text{هـ}}\|}$

* طول العمود من نقطة إلى مستوى :

إذا كانت المعادلة العامة للمستوى هى أ س + ب ص + حـ ع + ء = ٠ .

فإن طول العمود المرسوم من النقطة م ($س_1$ ، $ص_1$ ، $ع_1$) إلى المستوى هو $\boxed{ل = \dfrac{|أ س_1 + ب ص_1 + حـ ع_1 + ء|}{\sqrt{أ^2 + ب^2 + حـ^2}}}$

طول العمود المرسوم من النقطة ($س_1$ ، $ص_1$ ، $ع_1$) على ... أو بُعد النقطة ($س_1$ ، $ص_1$ ، $ع_1$) عن ...

- المحور س = $\sqrt{ص_1^2 + ع_1^2}$
- المحور ص = $\sqrt{س_1^2 + ع_1^2}$
- المحور ع = $\sqrt{س_1^2 + ص_1^2}$

طول العمود المرسوم من النقطة ($س_1$ ، $ص_1$ ، $ع_1$) على ... أو بُعد النقطة ($س_1$ ، $ص_1$ ، $ع_1$) عن ...

- المستوى ص ع = $|س_1|$
- المستوى س ع = $|ص_1|$
- المستوى س ص = $|ع_1|$

عند حل معادلتى مستقيمين فى الفراغ معًا	عند حل معادلتى مستقيم ومستوى فى الفراغ معًا
وكانت	وكانت
① مجموعة الحل = ∅ فإن المستقيمين متخالفان أو متوازيان. ② مجموعة الحل = نقطة واحدة فإن المستقيمين متقاطعان ويحويهما مستوى واحد. * إذا اشترك المستقيمان فى أكثر من نقطة فإنهما ينطبقان:	① مجموعة الحل = ∅ فإن المستقيم يوازى المستوى. ② مجموعة الحل = نقطة واحدة فإن المستقيم يقطع المستوى فى هذه النقطة. * إذا اشترك مستقيم ومستوى فى أكثر من نقطة فإن المستوى يحوى هذا المستقيم.

* معادلة خط تقاطع مستويين :

إذا كانت ط$_1$: أ$_1$ س + ب$_1$ ص + حـ$_1$ ع + ى$_1$ = ٠ ، ط$_2$: أ$_2$ س + ب$_2$ ص + حـ$_2$ ع + ى$_2$ = ٠

معادلتى مستويين مختلفين فى الفراغ وكانت النسب $\frac{أ_1}{أ_2}$ ، $\frac{ب_1}{ب_2}$ ، $\frac{حـ_1}{حـ_2}$

ليست جميعها متساوية فإن المستويين يتقاطعان ويمكننا إيجاد معادلة خط التقاطع عن طريق حذف المتغير ع لإيجاد قيمة س بدلالة ص ثم حذف المتغير ص لإيجاد قيمة س بدلالة ع واستنتاج معادلة الخط المستقيم.

* إيجاد نقطة تنتمى إلى المستقيم :

فمثلًا لإيجاد نقطة تنتمى للمستقيم $\overleftarrow{ر}$ = (٥ ، ‎-٤ ، ٢) + ك (٣ ، ٦ ، ‎-٥) نضع أى قيمة للبارامتر ك ∈ ح فمثلًا نضع ك = ١ فإن (٨ ، ٢ ، ‎-٣) تنتمى لهذا المستقيم.

* إيجاد نقطة تنتمى إلى المستوى :

فمثلًا لإيجاد نقطة تنتمى للمستوى ٢ س + ٣ ص − ٥ ع + ٩ = ٠ نضع قيم حقيقية لمتغيرين ونحسب الثالث

فمثلًا نضع س = ٠ ، ص = ٢ فى المعادلة فيكون :

٢ (٠) + ٣ (٢) − ٥ ع + ٩ = ٠ ∴ ع = ٣

∴ النقطة (٠ ، ٢ ، ٣) تنتمى للمستوى.

* إيجاد نقطة تنتمى لخط تقاطع مستويين متقاطعين :

فمثلًا لإيجاد نقطة تنتمى لخط تقاطع المستويين المتقاطعين س + ٤ ص − ع = ٥ ، ٣ س − ص + ٢ ع = ٤

نضع أى قيمة حقيقية لأى متغير فمثلًا نضع س = ٢ فى المعادلتين

∴ ٤ ص − ع = ٣ ، − ص + ٢ ع = −٢ وبحل المعادلتين معًا

∴ ص = $\frac{٤}{٧}$ ، ع = −$\frac{٥}{٧}$

∴ النقطة (٢ ، $\frac{٤}{٧}$ ، $\frac{-٥}{٧}$) تنتمى لخط تقاطع المستويين.

ملاحظات

① المستقيمان المتوازيان يجمعهما مستوى واحد.

② المستقيمان المتقاطعان يجمعهما مستوى واحد.

③ المستقيمان المتعامدان :

أما أن يكونا متقاطعين على التعامد وعندها يجمعهما مستوى واحد

أ، متخالفين وعندها لا يمكن أن يجمعهما مستوى واحد.

④ إذا توازى مستقيمان وكانت نقطة على أحدهما تحقق معادلة المستقيم الآخر فإن المستقيمين منطبقان.

⑤ فى المستويين :

$أ_١ س + ب_١ ص + حـ_١ ع + ى_١ = ٠$

، $أ_٢ س + ب_٢ ص + حـ_٢ ع + ى_٢ = ٠$ إذا كان :

(١) $\frac{أ_١}{أ_٢} = \frac{ب_١}{ب_٢} = \frac{حـ_١}{حـ_٢} \neq \frac{ى_١}{ى_٢}$ فإن المستويين متوازيان وغير منطبقين.

(٢) $\frac{أ_١}{أ_٢} = \frac{ب_١}{ب_٢} = \frac{حـ_١}{حـ_٢} = \frac{ى_١}{ى_٢}$ فإن المستويين منطبقان.

⑥ لإيجاد المسافة بين مستويين متوازيين فى الفراغ نوجد نقطة تقع على أحدهما ونحسب طول العمود المرسوم من هذه النقطة إلى المستوى الآخر.

⑦ المستقيم المار بمركز كرة ومركز الدائرة الناتجة من تقاطع مستوى مع هذه الكرة يكون عموديًا على مستوى الدائرة

فمثلًا : إذا قطع مستوى كرة مركزها ن ونتج من تقاطعهما دائرة مركزها م فإن $\overleftrightarrow{م ن}$ يكون عموديًا على مستوى الدائرة م