مفاتيح حل المسائل
في
الرياضيات

الصف الثالث الاعدادي

الترم الأول

اعداد م / مختار ممدوح

ت / ٠١٢٨١٥٠٤٨٣٩

جبر

أمثلة

١) ∩ ← تقاطع (ياخد المشترك) ⇐ {٢، ٣} ∩ {٥، ٢} = {٢}

∪ ← إتحاد (ياخد كله) ⇐ {٢، ٣} ∪ {٥، ٢} = {٢، ٣، ٥}

− ← فرق (ياخد الأولى ويخرج منها المشترك) ⇐ {٢، ٣} − {٥، ٢} = {٣}

× ← ضرب (مجموعة الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول من المجموعة الأولى والمسقط الثاني من المجموعة الثانية) ⇐

{٢، ٣} × {٥، ٢} = {(٢، ٥)، (٢، ٢)، (٣، ٥)، (٣، ٢)}

---

٢) (أ، ب) = (س، ص) ⇐ تعني أن: أ = س ، ب = ص

---

٣) س^٢ ⇐ تعني: س × س ⇐

إذا كانت: س = {١، ٢} ⇐ س^٢ = {١، ٢} × {١، ٢} = {(١، ١)، (١، ٢)، (٢، ١)، (٢، ٢)}

---

٤) س × ∅ = ∅ × س = ∅ (∅ ← مجموعة خالية).

---

٥) إذا كان: (أ، ب) ∈ س × ص ⇐ تعني: أ ∈ س ، ب ∈ ص

---

٦) ن(س × ص) = ن(س) × ن(ص) (ن ← عدد العناصر).

⇐ فإذا كانت: س = {١، ٢} ، ص = {٣، ٤} ⇐ ن(س) = ٢ ، ن(ص) = ٢ ، ن(س^٢) = ٤

ن(ص^٢) = ٤ ، ن(س × ص) = ٤

---

٧) (٠، ٠) ← نقطة الأصل.

(١، ١) ← الربع الأول.

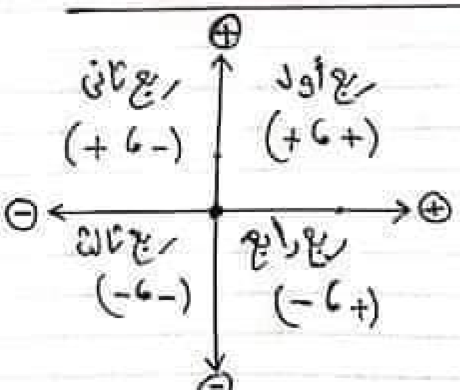
(-١، ١) ← الربع الثاني.

(-١، -١) ← الربع الثالث.

(١، -١) ← الربع الرابع.

(٠، أ) ← على محور ص.

(أ، ٠) ← على محور س.



8) إذا كانت: س = {أ، ب} ، ص = {جـ، د}
فإن: (جـ، د) ∈ ..ص²..
∈ ص ∈ ص

9) ن(س × ∅) = ن(س) × صفر = صفر. (لأن عدد عناصر ∅ = ٠)

10) إذا كان: (أ، ب) ∈ {أ، د} × {٥} ⟸ ب = ..٥..

11) النقطة تقع على محور السينات ⟸ نضع (ص = ٠).
والنقطة تقع على محور الصادات ⟸ نضع (س = ٠).

12) النقطة تقع على محور السينات ⟸ تعني أن النقطة ∈ س س' (ص = ٠)
والنقطة تقع على محور الصادات ⟸ تعني أن النقطة ∈ ص ص' (س = ٠)

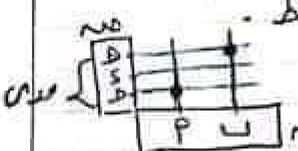
13) بيان ع ⊂ س × ص ، الدالة (د) ⊂ س × ص
المدى (صور عناصر المجال) ⊂ مجموعة المجال المقابل.

14) العلاقة من س ← ص تكون دالة لأن:

في بيان ع
- كل عنصر من عناصر س ظهر مرة واحد فقط كمسقط أول.
بيان ع = {(أ، جـ)، (ب، هـ)}

و في المخطط السهمي
- كل عنصر من عناصر س يخرج منه سهم واحد فقط.

و في المخطط البياني (ديكارتي)
- كل خط رأسي تقع عليه نقطة واحدة فقط.



المسقط الثاني يمثل المدى ⟸ المدى = {جـ، هـ}
- لاحظ أن ⟸ س ⟸ يسمى مجال الدالة. ، ص ⟸ يسمى المجال المقابل للدالة.

15) الشكل المقابل هو دالة على س.
- لأن: كل عنصر خرج منه سهم واحد فقط.

المدى = {١، ٢}

16) العدد (س) ⟸ ضعفه = ٢س ⟸ ٣ أمثاله = ٣س ⟸ .....
و العدد (س) ⟸ نصفه = $\frac{1}{2}$ س ⟸ ثلثه = $\frac{1}{3}$ س ⟸ .....
و العدد (س) ⟸ معكوسه الجمعي = −س.
و العدد (س) ⟸ معكوسه الضربي = $\frac{1}{س}$.
و العدد (س) ⟸ مربعه = س² ⟸ ومكعبه = س³ ⟸ .....
و العدد (س) ⟸ عوامله = الأعداد التى حاصل ضربها يساوي س
و العدد (س) ⟸ مضاعفاته / الأعداد التى تقبل القسمة عليه = ضرب (س) في ٠، ١، ٢، ٣، ...
- لاحظ أن: كلمة تقسم ⟸ تعني: عامل من عوامل

١٧ العدد الزوجي (عدد آحاده ٠، ٢، ٤، ٦، ٨) = {٠، ٢، ٤، ٦، ٨، ١٠، ١٢، ١٤، .....}
العدد الفردي (عدد آحاده ١، ٣، ٥، ٧، ٩) = {١، ٣، ٥، ٧، ٩، ١١، ١٣، ١٥، .....}
العدد الأولي (عدد أكبر من الواحد وله عاملان فقط) = {٢، ٣، ٥، ٧، ١١، ١٣، ١٧، ١٩، .....}

---

١٨ الدالة تكون كثيرة حدود ← ① المجال والمجال المقابل ⊂ ح .
② أس (س) ∈ ط .

← بمعنى أن: الدالة تكون ليست كثيرة حدود عندما تكون:

① تحت جذر ← $\sqrt{س}$ أو $\sqrt[3]{س}$ ـــــ (ليست كثيرة حدود).
② في المقام ← $\frac{1}{س}$ أو $\frac{1}{س^2}$ ـــــ (ليست كثيرة حدود).

---

١٩ درجة الدالة ← هي أكبر (أس) للمتغير بعد تبسيط الدالة. ←
د(س) = ٠ (ليس لها درجة) ← د(س) = عدد غير الصفر (من الدرجة صفر) ← د(س) = ٢س (من الدرجة الأولى).

---

٢٠ فك القوس تربيع ← الأول × نفسه ± ٢×الأول×الثاني + الثاني × نفسه.

$(أ + ب)^2 = أ^2 + ٢أب + ب^2$
$(أ - ب)^2 = أ^2 - ٢أب + ب^2$

---

٢١ د(س) = س² − ٣ ← د(٣) = ... ← معناها: نعوض (س = ٣)

الحل ← د(٣) = (٣)² − ٣ = ٩ − ٣ = ٦

---

٢٢ مجال أي دالة كثيرة حدود = ح .

---

٢٣ إذا كان: (−١، ٠) ∈ بيان د، حيث د(س) = م س + ٢ ← م = ...
الحل ← نجعل $\boxed{د(س) = ص}$ ثم نعوض ← ص = م س + ٢ ، $\boxed{س = -١}$ ، $\boxed{ص = ٠}$
← ٠ = −م + ٢ ← $\boxed{م = ٢}$

---

٢٤ دراسة بعض الدوال كثيرات الحدود

الدالة الثابتة
صورتها: د(س) = جـ
حالاتها:
① د(س) = ٠ ← يمثل بمستقيم منطبق على محور س
② د(س) = + ← يمثل بمستقيم // س س وأعلى محور س
③ د(س) = − ← يمثل بمستقيم // س س وأسفل س
من الدرجة الصفرية

الدالة الخطية
صورتها: د(س) = أ س + ب (أ ≠ ٠)
حالاتها:
① د(س) = أ س (ب = ٠) يمثل بمستقيم يمر بالنقطة (٠، ٠)
② د(س) = أ س + ب (ب ≠ ٠) يمثل بمستقيم يقطع محور ص
عن طريق الجدول:
من الدرجة الأولى

الدالة التربيعية
صورتها: د(س) = أس² + ب س + جـ (أ ≠ ٠)
حالاتها:
① د(س) = أس² + ب س (جـ = ٠) يمثل بمنحنى يمر بنقطة الأصل (٠، ٠)
② د(س) = أس² + ب س + جـ (جـ ≠ ٠) يمثل بمنحنى لا يمر بنقطة الأصل وذلك عن طريق الجدول:
من الدرجة الثانية

(٢٥) الدالة التربيعية

$$د(س) = أ\,س^2 + ب\,س + جـ$$

إذا كان $\boxed{أ = +}$ فإن:

١) المنحنى مفتوح لأعلى.

٢) نقطة رأس المنحنى = $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، د\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$.

٣) للدالة قيمة صغرى = $د\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)$.

٤) معادلة محور التماثل: $س = \frac{-ب}{٢أ}$

إذا كان $\boxed{أ = -}$ فإن:

١) المنحنى مفتوح لأسفل.

٢) نقطة رأس المنحنى = $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، د\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$

٣) للدالة قيمة عظمى = $د\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)$

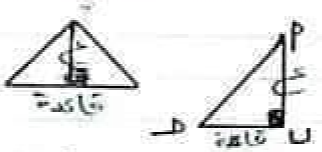
٤) معادلة محور التماثل: $س = \frac{-ب}{٢أ}$

ويمكن إيجاد كل ذلك من الرسم مباشرة.

---

(٢٦) مساحة Δ = $\frac{١}{٢}$ × طول القاعدة × الارتفاع.

= $\frac{١}{٢}$ × أب × ب جـ



---

(٢٧) التناسب: هو تساوي نسبتين أو أكثر.

---

(٢٨) * خواص التناسب:

١) $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ ⟸ أ × د = ب × جـ (حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين)

٢) أ × د = ب × جـ ⟸ $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ (عكس الخاصية الأولى)

٣) $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ ⟸ $\frac{أ}{جـ} = \frac{ب}{د}$ $\left(\frac{مقدم}{مقدم} = \frac{تالي}{تالي}\right)$

٤) $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ ⟸ $\frac{\boxed{أ}}{ب} = \frac{\boxed{جـ}}{د} = م$ (ثابت) ⟸ $\boxed{أ} = ب\,م$ ، $\boxed{جـ} = د\,م$ (ثابت التناسب).

٥) $\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالي}} = م$ (إحدى النسب) (خاصية الإضافة أو الطرح للمقدمات والتوالي)

---

(٢٩) ١- تستخدم الخاصية الأولى في إيجاد (عدد) من الأعداد المتناسبة.

• مثال/ ٢ ، ٨ ، س ، ٢٠ أعداد متناسبة. أوجد س.

الحل ⟸ نجعل الأعداد على الصورة: $\frac{٢}{٨} = \frac{س}{٢٠}$ ⟸ $س = \frac{٢ \times ٢٠}{٨} = ٥$

٢- وتستخدم الخاصية الثانية في إيجاد نسبة بين (عددين) بعد أن كانت ضرب.

• مثال/ ٢س = ٥ص . فأوجد $\frac{س}{ص}$.

الحل ⟸ $\frac{س}{ص} = \frac{٥}{٢}$

٣- وتستخدم الخاصية الثالثة في إيجاد $\frac{\text{مقدم}}{\text{مقدم}}$ أو $\frac{\text{تالي}}{\text{تالي}}$.

• مثال/ $\frac{\text{أ}}{5} = \frac{\text{ب}}{6}$ أوجد $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

الحل ⇐ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{5}{6}$

٤- وتستخدم الخاصية الرابعة في إيجاد جميع مسائل الإثبات وقيم الحدود.

• مثال/ أ، ب، جـ، د أعداد متناسبة فأثبت أن $\frac{\text{أ}+\text{ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}+\text{د}}{\text{د}}$

الحل ⇐ نفرض التناسب أولاً $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{م}$ ← نعوض عن أ = ب م ، جـ = د م

∴ الطرف الأيمن $= \frac{\text{أ}+\text{ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب م}+\text{ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}(\text{م}+1)}{\text{ب}} = \text{م}+1$

، الطرف الأيسر $= \frac{\text{جـ}+\text{د}}{\text{د}} = \frac{\text{د م}+\text{د}}{\text{د}} = \frac{\text{د}(\text{م}+1)}{\text{د}} = \text{م}+1$

∴ الطرفان متساويان.

٥- وتستخدم الخاصية الخامسة في إيجاد أحد حدي النسبة وبعض الإثبات.

• مثال/ إذا كان: $\frac{\text{أ}}{5} = \frac{\text{ب}}{6} = \frac{\text{جـ}}{-2} = \frac{\text{أ}+2\text{ب}-\text{جـ}}{\text{ل}}$. أوجد ل.

الحل ⇐ من الواضح أنه يريد أحد حدي النسبة وهو تالي النسبة الأخيرة.

مقدم النسبة أ + ٢ب - جـ ⇐ جمع مقدم النسبة الأولى + (٢× مقدم الثانية) - (مقدم الثالثة)

وبالتالي ⇐ نجمع: تالي النسبة الأولى + (٢× تالي الثانية) - (تالي الثالثة)

∴ $\text{ل} = 5 + (2\times 6) - (-2) = 5 + 12 + 2 = 19$

[٣٠] إذا كانت: ب وسطاً متناسباً بين أ، جـ أو أ، ب، جـ في تناسب متسلسل:

فإن ⇐ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \text{م}$ ⇐ ونعوض: ب = جـ م ، أ = جـ م²

[٣١] إذا كانت الأعداد: أ، ب، جـ، د، هـ في تناسب متسلسل:

فإن: $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{\text{د}}{\text{هـ}} = \text{م}$ ⇐ د = هـ م ، جـ = هـ م² ، ب = هـ م³ ، أ = هـ م⁴

[٣٢]

التغير الطردي	التغير العكسي
١) التغير ← طردي	١) التغير ← عكسي.
٢) التناسب ← ص ∝ س .	٢) التناسب ← ص ∝ $\frac{1}{\text{س}}$
٣) العلاقة ← ص = م س . يلزم إيجاد (م) في العلاقة.	٣) العلاقة ← ص = $\frac{\text{م}}{\text{س}}$ يلزم إيجاده
٤) في حالة نقطتين مختلفتين: $\frac{\text{ص}_1}{\text{ص}_2} = \frac{\text{س}_1}{\text{س}_2}$	٤) في حالة نقطتين مختلفتين: $\frac{\text{ص}_1}{\text{ص}_2} = \frac{\text{س}_2}{\text{س}_1}$

٣٣- التمثيل البياني للعلاقة الطردية ← عبارة عن خط مستقيم يمر بنقطة الأصل (٠،٠):

٣٤- والعلاقة الطردية بين س ، ص ← هي علاقة قسمة بين س ، ص وليست ضرب:
• مثل/ $س = ٥ص$ أو $\frac{س}{ص} = ٥$ أو $\frac{س}{٥} = \frac{ص}{٣}$ أو $\frac{٥}{س} = \frac{٣}{ص}$

٣٥- العلاقة بين س ، ص العكسية ← هي علاقة ضرب بين س ، ص:
• مثل/ $س ص = ٥$ أو $س = \frac{٥}{ص}$ أو $ص = \frac{٥}{س}$ أو $\cancel{\frac{٣}{ص} \times \frac{س}{٥}}$

٣٦- لإثبات أن: أ ، ب ، جـ ، د أعداد متناسبة ⟸ نثبت أن: $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$.
ولإثبات أن: أ ، ب ، جـ في تناسب متسلسل ⟸ نثبت أن: $ب^٢ = أ جـ$.
ولإثبات أن: ب وسطاً متناسباً بين أ ، جـ ⟸ نثبت أن: $ب^٢ = أ جـ$.
ولإثبات أن: س تتناسب طردياً مع ص ⟸ نثبت أن: ص = عدد × س .
ولإثبات أن: س تتناسب عكسياً مع ص ⟸ نثبت أن: س × ص = عدد .
ولإثبات أن: س تتناسب طردياً مع ص في حالة الجداول ⟸ نثبت أن: $\frac{س_١}{س_٢} = \frac{ص_١}{ص_٢}$.
ولإثبات أن: س تتناسب عكسياً مع ص في حالة الجداول ⟸ نثبت أن: $\frac{س_١}{س_٢} = \frac{ص_٢}{ص_١}$.

• مثال/ إذا كان: $\frac{أ^٢ + ب^٢}{ب^٢} = \frac{ب^٢ + جـ^٢}{جـ^٢}$. (أ جـ موجب)
فأثبت أن: ب وسطاً متناسباً بين أ ، جـ .

الحل ⟸ إوعى حد يقول $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ}$ علشان هو عايز يثبت دي ☺

نرجع للحل تاني ⟸ ∵ $\frac{أ^٢ + ب^٢}{ب^٢} = \frac{ب^٢ + جـ^٢}{جـ^٢}$ (طرفين × وسطين)

∴ $(أ^٢ + ب^٢) جـ^٢ = ب^٢ (ب^٢ + جـ^٢)$ $\xleftarrow{فك}$ $أ^٢ جـ^٢ + \cancel{ب^٢ جـ^٢} = ب^٤ + \cancel{ب^٢ جـ^٢}$

∴ $أ^٢ جـ^٢ = ب^٤$ ⟸ $(أ جـ)^٢ = ب^٤$ (بأخذ √ للطرفين)

∴ $\sqrt{(أ جـ)^٢} = \sqrt{ب^٤}$ (مفيش ± لأنه قال أ جـ موجب)

∴ $\boxed{أ جـ = ب^٢}$ ∴ ب وسطاً متناسباً بين أ ، جـ .

٣٧- عددان النسبة بينهما ٣ : ٤ ومجموعهما ١٤ فما العددان ؟
الحل ⟸ العددان هما س ، ص ⟸ ∴ $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٤} = م$ ⟸ $س = ٣م$ ، $ص = ٤م$

∵ مجموعهما ١٤ ⟸ $٣م + ٤م = ١٤$ ⟸ $\frac{٧م}{٧} = \frac{١٤}{٧}$ ⟸ $م = ٢$

⟸ ∴ العدد الأول س = ٣م = ٣ × ٢ = ٦
، العدد الثاني ص = ٤م = ٤ × ٢ = ٨

٣٨ لا تنسى $\pm$ في: ① $|س| = ٥$ ⟸ ∴ $س = \pm ٥$

الأس زوجي فقط ② $س^٢ = ٤$ ⟸ ∴ $س = \pm ٢$

③ $م^٢ = ٣^٢$ ⟸ ∴ $م = \pm ٣$

٣٩ إفتكر دائماً: $د(س) = ص$ ⟸ بمعنى: $د(٢) = ٥$

س ص

٤٠ إذا كانت الدالة $د: ص \leftarrow س$. فإن المدى $\subset$ ....

٤١ لإيجاد قاعدة الدالة: {(١، ٣)، (٢، ٥)، (٣، ٧)} ⟸ نعوض في: $ص = م س + ك$

الحل ⟸ ① $م = $ الميل $= \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٥-٣}{٢-١} = ٢$

② نأخذ أي نقطة مثل (١، ٣) ⟸ ونعوض في العلاقة عند: $س = ١$، $ص = ٣$، $م = ٢$

∴ $ص = م س + ك$ ⟸ $٣ = ٢ \times ١ + ك$ ⟸ $ك = ٣ - ٢ = ١$

③ ∴ قاعدة الدالة هي: $\boxed{ص = ٢ س + ١}$

ك م

٤٢ في مسائل العلاقة (م ع ب) تعني .... ⟸ نضع: ب لوحدها طرف

- $م = \frac{١}{٢} ب$ ⟸ نجعلها: $ب = ٢م$ ⟸ (٢م، ب)
- $م = ٢ ب$ ⟸ نجعلها: $ب = \frac{١}{٢} م$ ⟸ ($\frac{١}{٢}$م، ب)
- $م + ب = ٧$ ⟸ نجعلها: $ب = ٧ - م$ ⟸ (٧ - م، ب)

٤٣ إذا كان: م، ب، ج، د أعداد متناسبة ⟸ $\frac{م}{ب} = \frac{ج}{د}$

إذا كان: م، ب، ج، د أعداد متناسبة ⟸ $\frac{م}{ج} = \frac{ب}{د}$

إذا كان: م، ب، ج، د أعداد متناسبة ⟸ $\frac{ب}{م} = \frac{د}{ج}$

إذا كان: م، ب، ج، د أعداد متناسبة ⟸ $\frac{ج}{م} = \frac{د}{ب}$

إذا كان: م، ب، ج، د أعداد متناسبة ⟸ $م \times د = ب \times ج$

٤٤ إذا كان: $\frac{م}{٥} = \frac{ب}{٦}$ ⟸ نفرض: $م = ٥م$، $ب = ٦م$

إذا كان: $\frac{م}{ب} = \frac{٥}{٦}$ ⟸ نفرض: $م = ٥م$، $ب = ٦م$

إذا كان: $م : ب : ج = ٥ : ٦ : ١$ ⟸ نفرض: $م = ٥م$، $ب = ٦م$، $ج = م$

٤٥ العلاقة: $ص = م س$ ⟸ تمثل تغير طردي ⟸ مثل: $ص = ٥ س$

العلاقة: $ص = م س + عدد$ ⟸ لا تمثل تغير ⟸ مثل: $ص = ٥ س + ٣$

إحصاء

(1) مصادر جمع البيانات
- مصادر أولية (ميدانية) - كالمقابلة الشخصية -
- مصادر ثانوية (تاريخية) - كمواقع النت -

أساليب جمع البيانات
- أسلوب الحصر الشامل - كالإنتخابات -
- أسلوب العينات - كعينة دم مريض -

كيفية إختيار العينة
- اختيار متحيز/عمدي (غير عشوائي) - إختيار أحمد -
- اختيار عشوائي - إختيار أى طالب -

أنواع العينات العشوائية
- عينات عشوائية بسيطة
  - لمجتمع صغير - كالقرعة - الترقيم ثم السحب
  - لمجتمع كبير - إختيار ٢٠ طالب من ١٠٠ - بالآلة: SHIFT→Ran→=
- عينات عشوائية طبقية - إختيار من الطلاب ومدرسين - قانون ✗

(2) عدد مفردات كل طبقة فى العينة = $\dfrac{\text{عدد مفردات الطبقة فى المجتمع}}{\text{عدد مفردات المجتمع كله}}$ × عدد مفردات العينة كلها

(3) مقاييس النزعة المركزية (قيمة يتركز حولها القيم)
- الوسط: $\dfrac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددهم}}$
- الوسيط: القيمة التى تقع فى الوسط بعد ترتيب القيم.
- المنوال: القيمة الأكثر تكراراً.

مقاييس التشتت (التباعد)
- المدى
  - هو أبسط مقاييس التشتت
  - ويساوى (أكبر قيمة – أصغر قيمة)
- الانحراف المعيارى (ع)
  - هو أهم وأدق مقاييس التشتت.
  - وهو الجذر التربيعى الموجب لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابى

- مقاييس التشتت = ٠ إذا كانت القيم متساوية

(4) حساب الانحراف المعيارى لمجموعة من المفردات:

الحل ⟸ (1) نوجد: الوسط الحسابى $\overline{س} = \dfrac{مجـ\ س}{ن}$ ← مجموع القيم ، ن ← عدد القيم

(ونكتب وحدة القياس عن المسألة)

(2) نكون الجدول التالى:

س	$(س - \overline{س})^2$
...	...
مجـ س	مجـ $(س - \overline{س})^2$

(3) نوجد: $ع = \sqrt{\dfrac{مجـ (س - \overline{س})^2}{ن}}$

⑤ حساب الانحراف المعياري لتوزيع تكراري بسيط :-

الحل ← ① نكون جدول $\bar{س}$ ونوجد قيمته ؛

س	ك	س × ك
—	—	—
—	—	—
—	—	—
	مج ك	مج س × ك

$$\bar{س} = \frac{\text{مج } س \times ك}{\text{مج } ك}$$

② نكون جدول σ ونوجد قيمته :

س	$(س - \bar{س})^2$	ك	$(س - \bar{س})^2 \times ك$
—	—	—	—
—	—	—	—
—	—	—	—
		مج ك	مج $(س - \bar{س})^2 \times ك$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\text{مج } (س - \bar{س})^2 \times ك}{\text{مج } ك}}$$

⑥ مركز المجموعة $= \frac{\text{الحد الأدنى} + \text{الحد الأعلى}}{2}$

⑦ حساب الانحراف المعياري لتوزيع تكراري ذي مجموعات :

الحل ← ① نحذف المجموعات ونبدلها بمراكز المجموعات لتصبح (س)

② نكون الجدول $\bar{س}$ ونوجد قيمته :

المجموعة	س (المركز)	ك	س × ك
—	—	—	—
—	—	—	—
—	—	—	—
		مج ك	مج س × ك

$$\bar{س} = \frac{\text{مج } س \times ك}{\text{مج } ك}$$

③ نكون جدول σ ونوجد قيمته :

س	$(س - \bar{س})^2$	ك	$(س - \bar{س})^2 \times ك$
—	—	—	—
—	—	—	—
—	—	—	—
		مج ك	مج $(س - \bar{س})^2 \times ك$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\text{مج } (س - \bar{س})^2 \times ك}{\text{مج } ك}}$$

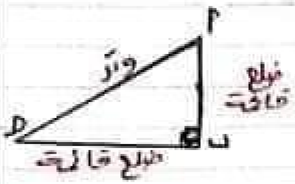
⑧ لاحظ الاختلاف في القوانين من القيم ← المجموعات :

$\bar{س} = \frac{\text{مج } س}{(ن)} \Leftarrow \bar{س} = \frac{\text{مج } س \times ك}{(\text{مج } ك)}$

$\sigma = \sqrt{\frac{\text{مج } (س - \bar{س})^2}{(ن)}} \Leftarrow \sigma = \sqrt{\frac{\text{مج } (س - \bar{س})^2 \times ك}{(\text{مج } ك)}}$

هندسة وحساب مثلثات

① نظرية فيثاغورث :



(الوتر)² = (الضلع الأول)² + (الضلع الثاني)²

∴ (أ هـ)² = (أ ب)² + (ب هـ)²

عوض في أي ضلعين علشان تجيب الثالث.

② النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة (هـ):

(جيب تمام الزاوية) جتا هـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ Cos

(جيب الزاوية) جا هـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ Sin

(ظل الزاوية) ظا هـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ tan

③ إذا كان: أ ، ب زاويتان متتامتان. أو د أ تتمم د ب أو ق(د أ) + ق(د ب) = ٩٠

⟸ فإن : جا أ = جتا ب أو جتا أ = جا ب

$\boxed{\text{جا أ} = \frac{1}{2} \Leftarrow \text{جتا ب} = \frac{1}{2}}$ بمعنى $\boxed{\text{جتا أ} = \frac{1}{2} \Leftarrow \text{جا ب} = \frac{1}{2}}$

① مجموعهم = ضعف واحدة فيهم.
∴ جا أ + جتا ب = ٢ جا أ = ٢ جتا ب

② طرحهم = صفر.
∴ جا أ − جتا ب = صفر

③ ضربهم = مربع واحدة فيهم.
∴ جا أ جتا ب = جا² أ = جتا² ب

④ قسمتهم = ١
∴ $\frac{\text{جا أ}}{\text{جتا ب}}$ = ١

① مجموعهم = ضعف واحدة فيهم.
∴ جتا أ + جا ب = ٢ جتا أ = ٢ جا ب

② طرحهم = صفر.
∴ جتا أ − جا ب = صفر.

③ ضربهم = مربع واحدة فيهم.
∴ جتا أ جا ب = جتا² أ = جا² ب

④ قسمتهم = ١
$\frac{\text{جتا أ}}{\text{جا ب}}$ = ١

④ لإيجاد زاوية من النسب المثلثية نستخدم الآلة

⟸ أوجد ق(د هـ) من النسبة المثلثية جا هـ = $\frac{1}{2}$ ⟸ الحل: بالآلة $\boxed{\text{Shift} \to \sin(\frac{1}{2}) = 30^\circ}$

⑤ لإيجاد زاوية من Δ به أضلاع ⟸ نوجد جا أو جتا أو ظا (حسب الأضلاع المعطاة)

• مثال/ أوجد ق(د أ) من الشكل المقابل:

⟸ الحل) ∴ الموجود هو ① المقابل لزاوية أ ② المجاور لزاوية أ.
∴ نستخدم قانون ظا أ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

بالآلة Shift tan ($\frac{1}{\sqrt{3}}$) = 30°

∴ ق(د أ) = ٣٠°

٦ في △ ا ب حـ. إذا كان: حا ا = جتا ب

يتحقق الآتي

⟸ حا ا تتمم د ب أو د ا ، د ب متتامتان أي ق(د ا) + ق(د ب) = ٩٠°

⟸ ∵ مجموع قياسات زوايا △ = ١٨٠° ⟸ ∴ ق(د حـ) = ١٨٠ − ٩٠ = ٩٠°

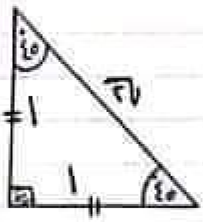
⟸ △ ا ب حـ هو △ قائم الزاوية في حـ.

⟸ جتا ا = حا ب

٧

حا ٤٥ = جتا ٤٥ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

ظا ٤٥ = ١

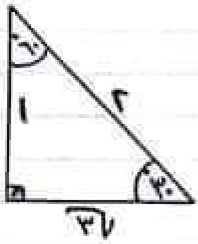


حا ٣٠ = جتا ٦٠ = $\frac{1}{2}$

جتا ٣٠ = حا ٦٠ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

ظا ٣٠ = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

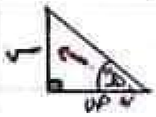
ظا ٦٠ = $\sqrt{3}$



---

٨ لإيجاد ضلع إذا كان المعطى (ضلع وزاوية) في △ قائم ⟵ نستخدم حا ، جتا ، ظا

⟸ المعطى (هـ ، س) والمطلوب (ص).



الحل: ∵ س ⟵ هو المقابل لـ هـ ، ص ⟵ هو المجاور لـ هـ

∴ نستخدم النسبة ظا هـ = $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ ⟸ ∴ $\boxed{\text{ص} = \frac{\text{س}}{\text{ظا هـ}}}$ ⟵ نعوض بالمعطيات

---

٩ ١- البعد بين نقطتين (الطول) = $\sqrt{(\text{فرق السينات})^2 + (\text{فرق الصادات})^2}$

٢- نقطة المنتصف = $\left(\frac{\text{مجموع السينات}}{2} ، \frac{\text{مجموع السينات}}{2}\right)$

٣- ميل الخط المستقيم (م):

① المار بنقطتين ⟸ م = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$.

② الذي يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية هـ ⟸ م = ظا هـ.

③ الذي معادلته: ا س + ب ص = حـ ⟸ نضعها على الصورة: ص = م س + حـ

∴ ا س + ب ص = حـ ⟸ ب ص = − ا س + حـ (÷ ب)

⟸ ∴ ص = $\left(-\frac{\text{ا}}{\text{ب}}\right)$ س + $\frac{\text{حـ}}{\text{ب}}$ ⟸ الميل = معامل س = $-\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$

---

١٠ ١- إذا كان المستقيمان متوازيان ($\overleftrightarrow{ل_1} // \overleftrightarrow{ل_2}$) ⟸ الميلان متساويان ($م_1 = م_2$)

والعكس ⟸ إذا كان ($م_1 = م_2$) ⟸ $\overleftrightarrow{ل_1} // \overleftrightarrow{ل_2}$

٢- إذا كان المستقيمان متعامدان ($\overleftrightarrow{ل_1} \perp \overleftrightarrow{ل_2}$) ⟸ $م_1 \times م_2 = -1$

والعكس ⟸ إذا كان ($م_1 \times م_2 = -1$) ⟸ $\overleftrightarrow{ل_1} \perp \overleftrightarrow{ل_2}$

(١١) إذا كان: $\overleftrightarrow{ل_1} \perp \overleftrightarrow{ل_2}$ ⟸ $م_1 = -$ مقلوب $م_2$

⟸ إذا كان: $م_1 = \frac{3}{5}$ ⟸ فإن ميل المستقيم العمودي $م_2 = -\frac{5}{3}$

(١٢) إذا كان: $\overleftrightarrow{ل_1} \parallel \overleftrightarrow{ل_2}$ ⟸ يتحقق الآتي

① $م_1 = م_2$ ② $م_1 - م_2 =$ صفر ③ $م_1 + م_2 = 2م_1 = 2م_2$

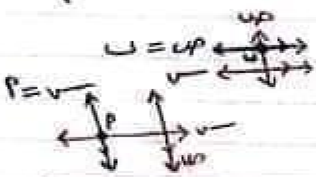
④ $م_1 \times م_2 = م_1^2 = م_2^2$ ⑤ $\frac{م_1}{م_2} = 1$

(١٣) معادلة المستقيم تكون على الصورة: ص = م س + جـ

الميل — الجزء المقطوع من محور ص

طول الجزء المقطوع = |جـ|

(١٤) إذا كان المستقيم يمر بالنقطة (أ ، ب) ⟸ فإن معادلة المستقيم:



① الموازي لمحور السينات ⟸ ص = ب

② الموازي لمحور الصادات ⟸ س = أ

(١٥) بعد النقطة عن محور السينات = |ص|

بعد النقطة عن محور الصادات = |س|

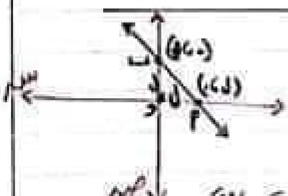
(س ، ص)

(١٦) معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل: ص = م س. (جـ = ٠)

(١٧) إذا كانت نقطة الأصل هي منتصف $\overline{أب}$ ⟸ أ(س ، ص) ، ب(−س ، −ص)

(١٨) لإيجاد الجزء المقطوع من محور الصادات (يقطع ص) ⟸ نضع س = ٠ ونجيب ص

ولإيجاد الجزء المقطوع من محور السينات (يقطع س) ⟸ نضع ص = ٠ ونجيب س



(١٩) لإيجاد نقط تقاطع المستقيمين مع المحورين مع الرسم ⟸

نفرض أن أ(ل ، ٠) ، ب(٠ ، ل) ثم نعوض في المعادلة

ويكون مساحة Δ = ½ القاعدة × الارتفاع = ½ × ل × ل = ½ ل² وحدة مربعة

(٢٠) البعد العمودي بين مستقيمين س − ٢ = ٠ ، س + ٣ = ٠.

الحل: نجعل المستقيمان على الصورة ⟸ س = ٢ ، س = −٣

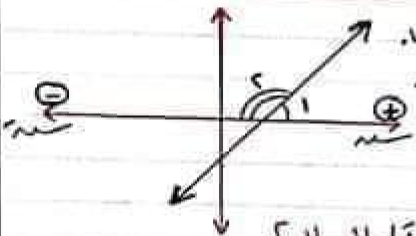
∴ البعد = |النهاية − البداية| = |−٣ − ٢| = |−٥| = ٥ وحدة طول

٢١ معادلة محور السينات ⟸ ص = ٠
ومعادلة محور الصادات ⟸ س = ٠

٢٢ الميل للمستقيم

1. = فرق الصادات / فرق السينات ⟸ عندما أعطي بنقطتين معلومتين
2. = معامل س ⟸ عندما تكون المعادلة في الصورة: ص = م س + أ
3. = ظا هـ ⟸ حادة (الميل = +) ، منفرجة (الميل = −) ⟸ عندما يصنع زاوية مع الاتجاه الموجب لمحور س
4. = صفر ⟸ عندما يكون // محور س ، ⊥ محور ص ، أفقي ، ص = رقم
5. غير معرف = ∞ ⟸ عندما يكون // محور ص ، ⊥ محور س ، رأسي ، س = رقم

٢٣



(د١) ⟸ هي الزاوية التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور س.
(د٢) ⟸ هي الزاوية التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه السالب لمحور س.
∵ ق(د١) + ق(د٢) = ١٨٠° (زاوية مستقيمة).
∴ ق(د١) [في الاتجاه الموجب] = ١٨٠° − ق(د٢) [في الاتجاه السالب].

٢٤ لإثبات أن النقط أ ، ب ، جـ

- تقع على استقامة واحدة ⟸ نثبت أن: ميل أب = ميل ب جـ
- تمثل رؤوس △ (النقط لا تقع على استقامة واحدة) ⟸ نثبت أن: ميل أب ≠ ميل ب جـ

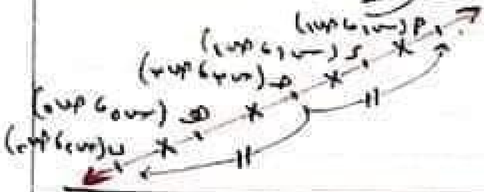
٢٥ لإثبات أي نوع في △ ⟸ نوجد الأبعاد: أب ، ب جـ ، أ جـ ....
⟸ فإذا كان:

نوجد أنواع △ بالنسبة للأضلاع بدون ترتيب:
1. أب = ب جـ ∴ △ متساوي الساقين
2. أب = ب جـ = أ جـ ∴ △ متساوي الأضلاع
3. أب ≠ ب جـ ≠ أ جـ ∴ △ مختلف الأضلاع

نوجد أنواع △ بالنسبة للزوايا بالترتيب:
1. (أب)² = (ب جـ)² + (أ جـ)² ∴ △ قائم في جـ
2. (أب)² > (ب جـ)² + (أ جـ)² ∴ △ منفرج في جـ
3. (أب)² < (ب جـ)² + (أ جـ)² ∴ △ حاد الزوايا

حيث (أب) أكبر ضلع.

٢٦ مسألة النقطة التي تقسم أب إلى ٤ أجزاء متساوية:

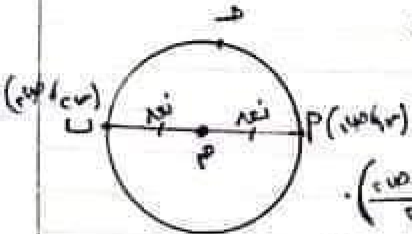


الحل ⇐ ① نوجد أولاً: جـ = $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$

② نوجد د = $\left(\frac{س_١ + س_٣}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٣}{٢}\right)$

، هـ = $\left(\frac{س_٣ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_٣ + ص_٢}{٢}\right)$

٢٧ لاحظ الأشكال والقوانين والإثباتات في الدائرة:



① الدائرة ⇐ • محيط الدائرة = ٢ط نق.

• مساحة الدائرة = ط نق².

• نقطة منتصف القطر أب (مركز الدائرة م) = $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$.

• لإثبات أن أ، ب، جـ تقع على دائرة واحدة ⇐ نثبت أن: م أ = م ب = م جـ

② شبه المنحرف ⇐ • محيط شبه المنحرف = مجموع أطوال أضلاعه.

• مساحة شبه المنحرف = طول القاعدة المتوسطة × الارتفاع

= ½ مجموع القاعدتين المتوازيتين × الارتفاع

• لإثبات أن الشكل شبه منحرف ⇐ نثبت أن: ميل أب = ميل دجـ

وميل أد ≠ ميل بجـ

٢٨ محيط أي شكل = مجموع أطوال أضلاعه.

مساحة أي شكل رباعي متوازي الأضلاع = طول الضلع × الارتفاع الساقط على الضلع المقابل.

٢٩ تأمل في تساوي الأضلاع والزوايا وقوانين الأشكال الآتية وأفضل طرق الإثبات:

• محيط المتوازي = ٢(س + ص)

• لإثبات الشكل متوازي ⇐ نثبت أن: ① ميل أب = ميل جـد

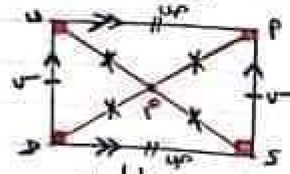
② ميل أد = ميل بجـ

* متوازي أضلاع *

• محيط المستطيل = ٢(س + ص) • مساحة المستطيل = س × ص

• لإثبات الشكل مستطيل ⇐ نثبت أن: ① ميل أب = ميل جـد

② ميل أد = ميل بجـ ③ ميل أب × ميل بجـ = -١



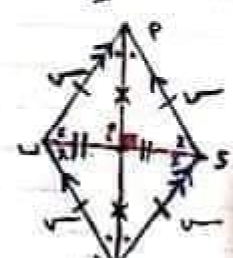
* مستطيل *

• محيط المعين = ٤س • مساحة المعين = ½ × أجـ × ب د

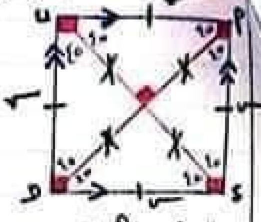
• لإثبات الشكل معين ⇐ نثبت أن: ① ميل أب = ميل جـد

② ميل بجـ = ميل أد

③ ميل أجـ × ميل ب د = -١



* معين *



• محيط المربع = ٤ س .
• مساحة المربع = س² = ½ (أ جـ)² = ½ (ب ء)²

• لإثبات الشكل مربع ⟸ نثبت أنه:

① ميل أب = ميل ءجـ .
② ميل ب جـ = ميل أ ء .
③ ميل أ جـ × ميل ب ء = -١
④ ميل أ جـ = ميل ب ء .

---

٣٠ ملخص الإثباتات:

م ⟸ الميل

م = فرق الصادات / فرق السينات

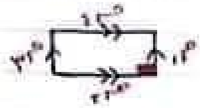
① شبه المنحرف:

⟸ ① م١ = م٣ ② م٢ ≠ م٤

② متوازي الأضلاع:

⟸ ① م١ = م٣ ② م٢ = م٤

③ المستطيل:



⟸ ① م١ = م٣ ② م٢ = م٤ ③ م١ × م٢ = -١

④ المربع:

⟸ ① م١ = م٣ ② م٢ = م٤ ③ م١ × م٢ = -١ ④ م٥ × م٦ = -١

⑤ Δ قائم:

⟸ م١ × م٢ = -١

---

٣١ المستقيم يقطع من محور السينات جزء موجب طوله ٤ وحدات ⟸ ∴ النقطة (٤، ٠)

المستقيم يقطع من محور الصادات جزء سالب طوله ٣ وحدات ⟸ ∴ النقطة (٠، -٣)

المستقيم يقطع من محوري الإحداثيات من الجزء الموجب الأطوال ٤، ٩ على الترتيب ⟸ (٤، ٠)، (٠، ٩)

٣٢ من الرسم ⟸ معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٢، ٠)، (٠، ٣) هي:

ص = م س + جـ ، جـ الجزء المقطوع من ص = ٣

فرق ص / فرق س = (٣ - ٠) / (٠ - ٢) = -٣/٢

∴ $\boxed{\text{ص} = \frac{-٣}{٢}\text{س} - \frac{٣}{٢}}$

---

٣٣ لاحظ أن:

① جا أ < ١ ⟸ لأن: جا أ = المقابل (أصغر) / الوتر (المقابل < الوتر)

② جتا أ < ١ ⟸ لأن: جتا أ = المجاور (أصغر) / الوتر (المجاور < الوتر)

③ جا أ + جتا أ > ١ ⟸ لأن: جا أ + جتا أ = (المقابل + المجاور) أكبر / الوتر (المقابل + المجاور > الوتر)

④ جا²أ + جتا²أ = ١ ⟸ لأن: جا²أ + جتا²أ = ((المقابل)² + (المجاور)²) / (الوتر)² (البسط = المقام)

---

٣٤ ق(∠أ) + ق(∠ب) = ٩٠° ⟸ ظا أ × ظا ب = ١

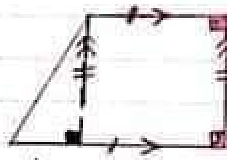
٣٥) لو عايز تجيب الزاوية ـهـ بالآلة: Shift $\frac{\sin}{\cos}$ tan (الناتج)

• مثال/ جاهـ = ٥٫٠ ⟸ جاهـ = $\frac{٥}{١٠}$ ⟸ جاهـ = $\frac{١}{٢}$ ⟸ $\text{Shift} \sin(\frac{1}{2}) = 30^\circ$

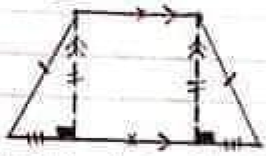
أو ⟸ مباشرة بالآلة $\text{Shift} \sin (0.5) = 30^\circ$

٣٦) في مسائل النسب المثلثية (جا، جتا، ظا) ⟸ لازم تكون △ قائم في الشكل لو لم يوجد.

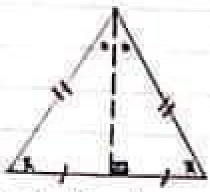
تأمل



شبه المنحرف القائم



شبه منحرف متساوي الساقين



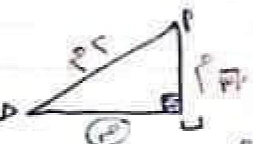
△ متساوي الساقين

٣٧) إذا جاءت مسائل النسب في صورة ضرب ⟸ نحولها إلى نسبة.

• مثال/ في △ ا ب جـ قائم في ب ،
و كان ٢ ا ب = √٣ ا جـ

الحل) نجعل ٢ ا ب = √٣ ا جـ في صورة ⟸ $\frac{\text{اب}}{\text{اجـ}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ⟸ ا ب = √٣ م ، ا جـ = ٢ م

ثم نرسم △ ونجيب الضلع الثالث من نظرية فيثاغورث:



∵ (اجـ)² = (اب)² + (ب جـ)² ⟸ (٢م)² = (√٣ م)² + (ب جـ)²

∴ ٤م² = ٣م² + (ب جـ)² ⟸ ب جـ = √(٤م² − ٣م²) = √م² = م

ثم نوجد المطلوب: سواء (جا أو جتا أو ظا).