أولاً: الاستاتيكا

الدرس الأول : محصلة قوتين متلاقيتين فى نقطة

١ إذا بلغت محصلة قوتين تؤثران فى نقطة قيمتها العظمى فإن قياس الزاوية بين خطى عملهما يساوى ....

(١) ١٢٠° (٢) ١٢٠° (٣) ٦٠° (٤) صفر°

الحل

∵ المحصلة قيمة عظمى

∴ القوتان لهما نفس الاتجاه

∴ قياس الزاوية بين خطى عملهما = صفر

٢ قوتان مقدارهما ٤ ، ق نيوتن تؤثران فى نقطة مادية قياس الزاوية بينهما ١٢٠° فإذا كانت المحصلة عمودية على القوة الأولى فإن مقدار المحصلة = ... نيوتن.

(١) ٤ (٢) $٤\sqrt{٣}$ (٣) $٢\sqrt{٣}$ (٤) $\sqrt{٣}$

الحل

∵ المحصلة عمودية على القوة الأولى ∴ ٤ + ق جتا ١٢٠° = ٠

∴ ٤ − $\frac{١}{٢}$ ق = ٠ منها ق = ٨

المحصلة = $ح = \sqrt{٨^٢ + ٤^٢ + ٢ \times ٨ \times ٤ \text{ جتا } ١٢٠^\circ} = ٤\sqrt{٣}$ نيوتن.

٣ قوتان مقدارهما ق ، ق$\sqrt{٣}$ نيوتن متلاقيان فى نقطة وقياس الزاوية بينهما ٩٠° ومحصلتهما $ح_١$ فإذا أصبح قياس الزاوية بينهما ١٥٠° كانت المحصلة $ح_٢$ فإن ....

(١) $ح_١ = ح_٢$ (٢) $ح_١ = ٣ح_٢$ (٣) $ح_١ = ٢ح_٢$ (٤) $ح_١ = ٤ح_٢$

الحل

$ح_١ = \sqrt{ق^٢ + (ق\sqrt{٣})^٢} = ٢ق$

، $ح_٢ = \sqrt{ق^٢ + (ق\sqrt{٣})^٢ + ٢(ق)(ق\sqrt{٣}) \text{ جتا } ١٥٠^\circ} = ق$

∴ $ح_١ = ٢ح_٢$

٤ إذا كانت $\overrightarrow{ق}$ تتزن مع قوتين متعامدتين مقدارهما ٨ نيوتن ، ١٥ نيوتن فإن: ق = ... نيوتن.

(١) ١٧ (٢) ٢٣ (٣) ٧ (٤) صفر

الحل

∵ ق تتزن مع القوتين المتعامدتين ٨ ، ١٥

$ق = \sqrt{(٨)^٢ + (١٥)^٢} = ١٧$ نيوتن

٥ إذا كانت محصلة القوتين $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ تصنع مع كل من القوتين زاوية قياسها ٤٥° فإن مقدار المحصلة يساوى ....

(١) $\sqrt{٢}\, ق_١$ (٢) $٢\, ق_١$ (٣) $ق_١$ (٤) $٢\sqrt{٢}\, ق_١$

الحل

∵ المحصلة تصنع مع كل من القوتين زاوية قياسها ٤٥°

∴ القوتان متساويتان ومتعامدتان ($ق_١ = ق_٢$)

∴ مقدار المحصلة = $\sqrt{ق_١^٢ + ق_٢^٢} = \sqrt{٢ ق_١^٢} = \sqrt{٢}\, ق_١$

٦ قوتان مقدارهما ٢ ق ، ٥ ق نيوتن وقياس الزاوية بينهما ى ومقدار محصلتهما ٣ ق فإن : ى = ...

(١) ٩٠° (٢) صفر (٣) ١٨٠° (٤) ٤٥°

الحل

∵ المحصلة (٣ ق) هى الفرق بين القوتين (٢ ق) ، (٥ ق)

∴ القوتان فى اتجاهين متضادين

∴ قياس الزاوية بينهما ى = ١٨٠°

٧ قوتان مقدارهما ٦ ، ٦$\sqrt{٢}$ ث.جم تؤثران فى نقطة مادية ومحصلتهما عمودية على القوة الأولى ، فإن مقدار محصلتهما = ... ث.جم.

(١) ١٧ (٢) ٢٣ (٣) ٧ (٤) صفر

الحل

∵ المحصلة عمودية على القوة الأولى

∴ $ق_١ + ق_٢$ جتا هـ = ٠

، ٦ + ٦$\sqrt{٢}$ جتا هـ = ٠ ∴ جتا هـ = $\frac{-٦}{٦\sqrt{٢}} = \frac{-١}{\sqrt{٢}}$

∴ هـ = ١٣٥°

، $ح = \sqrt{(٦)^٢ + (٦\sqrt{٢})^٢ + ٢ \times ٦ \times ٦\sqrt{٢} \text{ جتا } ١٣٥^\circ} = ٦$ ث.جم.

٨ إذا كانت محصلة القوتين $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ تنصف الزاوية بينهما فأى الجمل الآتية صحيح ؟

(I) $ق_1 = ق_2$ (II) $\overrightarrow{ق_1} = \overrightarrow{ق_2}$ (III) $\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ق_2}$

① I ، II فقط ② I ، III فقط ③ II ، III فقط ④ I ، II ، III

الحل

∵ المحصلة تنصف الزاوية بين القوتين

∴ القوتان متساويتان فى المقدار فقط

أى أن : $ق_1 = ق_2$

، أيضًا تكون $\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ق_2}$

أى أن الإجابة ② هى الصحيحة.

٩ قوتان مقدارهما ٦ ، ٦ $\sqrt{٣}$ نيوتن تؤثران فى نقطة واحدة وقياس الزاوية بينهما ١٥٠°

فإن قياس الزاوية التى تصنعها المحصلة مع القوة الأولى = ...

① ٣٠° ② ٦٠° ③ ٩٠° ④ ١٢٠°

الحل

$ظا\,\theta = \frac{٦\sqrt{٣}\ جا\ ١٥٠°}{٦ + ٦\sqrt{٣}\ جتا\ ١٥٠°} = -\sqrt{٣}$

∴ θ = ١٢٠° مع القوة الأولى.

١٠ قوتان متساويتان فى المقدار وقياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{٢}$ ومقدار محصلتهما ٨ نيوتن

فإن مقدار كل منهما يساوى .... نيوتن.

① ٤ ② ٤ $\sqrt{٢}$ ③ $\sqrt{٨}$ ④ $\sqrt{٢}$

الحل

∵ ح = ٢ ق جتا $\frac{٩٠°}{٢}$

∴ ٨ = ٢ ق جتا ٤٥°

∴ ق = ٤ $\sqrt{٢}$ نيوتن.

١١ قوتان متلاقيتان فى نقطة مادية مقدارهما ٦ ، ٣ نيوتن والمحصلة عمودية على إحداهما

فإن مقدار المحصلة = ... نيوتن.

① ٣ $\sqrt{٣}$ ② ٣ ③ ٦ ④ ٣ $\sqrt{٦}$

الحل

∵ المحصلة ⊥ إحداهما

∴ المحصلة ⊥ القوة الصغرى (٣ نيوتن).

∴ ٣ + ٦ جتا ى = صفر

∴ جتا ى = $-\frac{١}{٢}$

∴ ى = ١٢٠°

∴ ح = $\sqrt{(٦)^٢ + (٣)^٢ + ٢ \times ٦ \times ٣ \times جتا\ ١٢٠°}$

= ٣ $\sqrt{٣}$ نيوتن.

١٢ قوتان متلاقيتان فى نقطة مقدارهما $ق_1$ ، $ق_2$ نيوتن ومقدار محصلتهما ح نيوتن

حيث : ٥ ≤ ح ≤ ٧ ، $ق_1 > ق_2$ فإن مقدار محصلتهما عندما تكون الزاوية بينهما ١٢٠° تساوى .... نيوتن.

① ٣٥ ② ١٢ ③ $\sqrt{٣٥}$ ④ $\sqrt{٣١}$

الحل

∵ ٥ ≤ ح ≤ ٧

∴ $ق_1 - ق_2 = ٥$ ، $ق_1 + ق_2 = ٧$

بحل المعادلتين : ∴ $ق_1 = ٦$ ، $ق_2 = ١$

∴ ح = $\sqrt{٦^٢ + ١^٢ + ٢ \times ٦ \times ١ \times جتا\ ١٢٠}$ = $\sqrt{٣١}$ نيوتن.

١٣ قوتان متلاقيتان فى نقطة مقدارهما ٣ ق ، ٢ ق ، مقدار محصلتهما ٥ ق فتكون قياس الزاوية بينهما = ...

① صفر° ② ٦٠° ③ ٩٠° ④ ١٨٠°

الحل

∵ مقدار محصلة القوتان تساوى مجموعهما

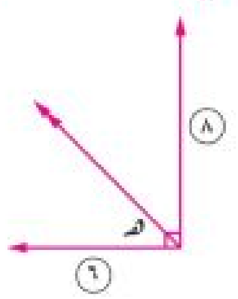
∴ القوتان فى نفس الاتجاه

∴ قياس الزاوية بين القوتين = صفر°

١٤ قوتان متعامدتان مقدارهما ٦ ، ٨ نيوتن فإن قياس زاوية ميل محصلتهما على القوى الأولى هى ....

① $ظا^{-1}\left(\frac{٤}{٣}\right)$ ② $ظتا^{-1}\left(\frac{٤}{٣}\right)$ ③ $جتا^{-1}\left(\frac{٣}{٤}\right)$ ④ $جا^{-1}\left(\frac{٣}{٤}\right)$

الحل



بفرض أن : هـ هى قياس الزاوية بين المحصلة والقوة الأولى

ظا هـ = $\frac{٨}{٦} = \frac{٤}{٣}$

∴ هـ = $ظا^{-1}\left(\frac{٤}{٣}\right)$

١٥ قوتان مقداراهما ٦ ، ق نيوتن تؤثران فى نقطة وقياس الزاوية بينهما ١٣٥° فإذا كانت المحصلة عمودية على القوة ق فإن : ق = ... نيوتن.

① ٣ ② ٣ $\sqrt{٢}$ ③ ٢ ④ ٦

الحل

∵ $\overrightarrow{ح} \perp \overrightarrow{ق}$

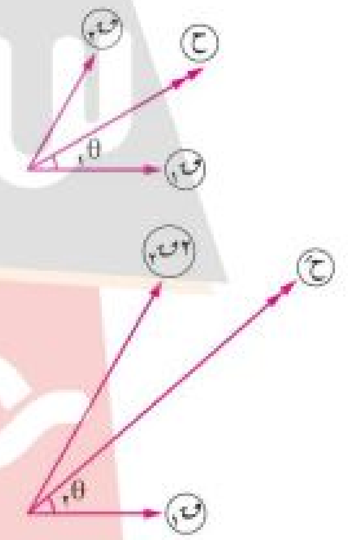
∴ ق + ٦ جتا ١٣٥° = ٠

∴ ق = ٣ $\sqrt{٢}$ نيوتن.

١٦ إذا كانت : θ_1 قياس الزاوية بين محصلة القوتين $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ والقوة $\overrightarrow{ق_1}$ وكانت θ_2 قياس الزاوية بين محصلة القوتين $\overrightarrow{ق_1}$ ، ٢ $\overrightarrow{ق_2}$ والقوة $\overrightarrow{ق_1}$ فإن : ....

① $\theta_1 > \theta_2$ ② $\theta_1 < \theta_2$ ③ $\theta_1 = \theta_2$ ④ $\theta_1 \geqslant \theta_2$

الحل



عندما تزداد القوة $ق_2$ إلى الضعف

فإن المحصلة سوف تميل

أكثر ناحية القوة الأكبر

∴ من الرسم نجد أن : $\theta_1 < \theta_2$

١٧ قوتان $ق_1$ ، $ق_2$ تؤثران فى نقطة مادية ومحصلتيهما ح ∈ [٢ ، ١٢] ، $ق_1 > ق_2$

فإن : $ق_1$ = ...

① ٧ ② ٨ ③ ٩ ④ ١٠

الحل

∵ $ق_1 - ق_2$ = ٢ (١)

، $ق_1 + ق_2$ = ١٢ (٢)

بجمع (١) ، (٢) : ∴ ٢ $ق_1$ = ١٤ ∴ $ق_1$ = ٧

١٨ قوتان ٣ ، ٥ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية فإن محصلتهما ح ∈ ....

① [٢ ، ١٠] ② [٨ ، ١٠] ③ [٣ ، ١٥] ④ [٢ ، ٨]

الحل

محصلة القوتان $ق_1$ ، $ق_2$ ∈ [$ق_1 - ق_2$ ، $ق_1 + ق_2$] حيث : $ق_1 > ق_2$

∴ محصلة القوتان ٣ ، ٥ ∈ [٥ − ٣ ، ٥ + ٣] إى ∈ [٢ ، ٨]

١٩ قوتان متساويتان فى المقدار ومتعامدتان ، ومحصلتهما ٨ نيوتن.

فإن مقدار كل قوة منهما يساوى .... نيوتن.

① ٤ $\sqrt{٢}$ ② ٤ ③ ٢ ④ ٨

الحل

ح = ٢ ق جتا $\frac{٩٠°}{٢}$ ∴ ٨ = ٢ ق جتا ٤٥°

∴ ق = ٤ $\sqrt{٢}$ نيوتن.

٢٠ إذا كان : $\overrightarrow{ق_1}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ − ٢ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ = أ $\overrightarrow{س}$ − $\overrightarrow{ص}$

، $\overrightarrow{ق_3}$ = ٤ $\overrightarrow{س}$ − ب $\overrightarrow{ص}$ ثلاث قوى متلاقية فى نقطة

، محصلتهم $\overrightarrow{ح}$ = ٦ $\overrightarrow{س}$ − ٤ $\overrightarrow{ص}$ فإن : أ + ب = ...

① ١ ② ٣ ③ −١ ④ صفر

الحل

∵ $\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ق_2} + \overrightarrow{ق_3}$

∴ (٦ ، −٤) = (٣ ، −٢) + (أ ، −١) + (٤ ، −ب)

∴ (٦ ، −٤) = (أ + ٧ ، −٣ − ب)

∴ أ + ٧ = ٦ منها أ = −١

، −٣ − ب = −٤ منها −ب = −١

∴ ب = ١ ∴ أ + ب = صفر

٢١ ثلاث قوى مستوية مقاديرها ٨ ، ١٠ ، ١٢ نيوتن تؤثر فى نقطة مادية ، فإذا كانت القوى متزنة فإن ى قياس الزاوية بين القوتين الثانية والثالثة ≃ ....

① ٤١° ٢٥َ ② ٤٣° ٣٥َ ③ ١٣٨° ٣٥َ ④ ١٣٦° ٢٥َ

الحل

∵ مقدار القوة الأولى يساوى مقدار محصلة القوتين الثانية والثالثة

∴ $(٨)^٢ = (١٠)^٢ + (١٢)^٢$ + ٢ (١٠) (١٢) جتا ى

∴ جتا ى = $\frac{-٣}{٤}$ ∴ ى = ١٣٨° ٣٥َ

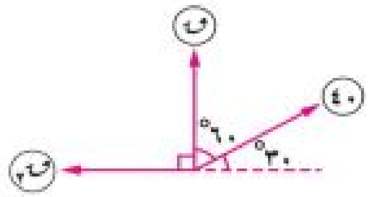
أ. مصطفى سلامة _ 01018047203
01005270744 عمرو خضر Amr Khadr

الدرس الثانى : تحليل القوه إلى مركبتين

١ حُللت قوة مقدارها ق نيوتن وتؤثر فى اتجاه الشمال إلى مركبتين الأولى فى اتجاه ٣٠° شمال الشرق ومقدارها ٤٠ نيوتن. والثانية فى اتجاه الغرب
فإن مقدار المركبة الثانية = ... نيوتن.

(١) ١٠$\sqrt{٣}$ (٢) ٢٠$\sqrt{٣}$ (٣) ٢٠ (٤) ١٠

الحل



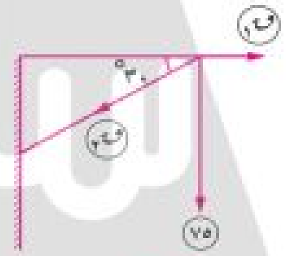
ق١ = $\frac{\text{ق جا ٩٠°}}{\text{جا ١٥٠°}}$

∴ ٤٠ = ٢ ق

∴ ق = ٢٠ نيوتن.

∴ ق٢ = $\frac{\text{٢٠ جا ٦٠°}}{\text{جا ١٥٠°}}$ = ٢٠$\sqrt{٣}$ نيوتن.

٢ فى الشكل المقابل :
حُللت القوة الرأسية ٧٥ نيوتن
إلى مركبتين أحدهما أفقية ق١ والأخرى ق٢
فإن : ق٢ = ... نيوتن.



(١) ١٠٠ (٢) ١٥٠ (٣) ١٥٠$\sqrt{٣}$ (٤) ١٠٠$\sqrt{٣}$

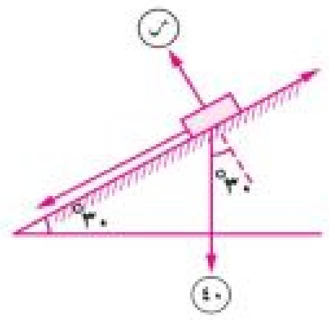
الحل

ق٢ = $\frac{\text{٧٥ جا ٩٠°}}{\text{جا ١٥٠°}}$ = ١٥٠ نيوتن

٣ إذا وضع جسم وزنه ٤٠ ث.جم على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠°
فإن مركبة الوزن فى اتجاه المستوى تساوى .... ث.جم.

(١) ٢٠$\sqrt{٣}$ (٢) ٤٠$\sqrt{٣}$ (٣) ٢٠ (٤) ١٠

الحل



مركبة الوزن فى اتجاه المستوى
= ٤٠ جا ٣٠° = ٢٠ ث.جم.

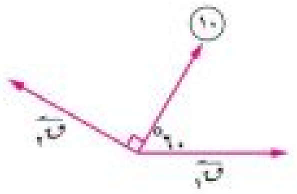
٤ قوة مقدارها ٥$\sqrt{٣}$ نيوتن تؤثر فى اتجاه ٣٠° شرق الجنوب حُللت إلى مركبتين متعامدتين
فإن مقدار المركبة فى اتجاه الجنوب = ... نيوتن.

(١) ٧٫٥ (٢) ٥ (٣) ٧٫٥$\sqrt{٣}$ (٤) ٥$\sqrt{٣}$

الحل

مقدار مركبة القوه فى اتجاه الجنوب = ٥$\sqrt{٣}$ جتا ٣٠°
= ٥$\sqrt{٣}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٧٫٥ نيوتن.

٥ فى الشكل المقابل :
بتحليل القوة التى مقدارها ١٠ نيوتن
إلى مركبتين ق١ ، ق٢ اللتين تصنعان معها زاويتين
قياساهما ٦٠° ، ٩٠° من جهتيها
فإن : ق١ = ... نيوتن.

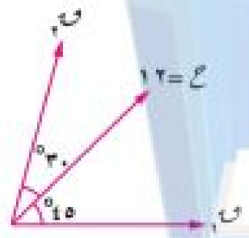


(١) ٥ (٢) ١٥ (٣) ٢٠ (٤) ١٠

الحل

ق١ = $\frac{\text{١٠ جا ٩٠°}}{\text{جا ١٥٠°}}$ = ٢٠ نيوتن

٦ فى الشكل الموضح :
ق١ = ...



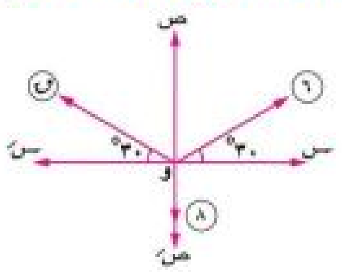
(١) ٧ (٢) ٨ (٣) ٩ (٤) ١٠

الحل

ق١ = $\frac{\text{١٢ جا ٣٠°}}{\text{جا ٧٥°}}$ = $\frac{٦}{\text{جا ٧٥°}}$ = ٦ قتا ٧٥°

الدرس الثالث : محصلة عدة قوى مستويه متلاقيه فى نقطة .

١ إذا كانت محصلة القوى الموضحة
بالشكل تؤثر فى محور الصادات
فإن : ق = ... نيوتن.

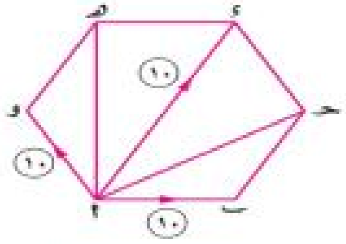


(١) ٦ (٢) ٨ (٣) ٩ (٤) ١٠

الحل

∵ محصلة القوى تؤثر فى محور الصادات
∴ محصلة القوى فى اتجاه محور السينات = صفر
∴ ٦ جتا ٣٠° + ق جتا ١٥٠° = صفر
∴ ق = ٦ نيوتن.

٢ اثرت ثلاث قوى متساوية فى المقدار ومقدار كل منها ١٠ نيوتن فى أحد رؤوس سداسى منتظم وفى الاتجاهات المبينة فى الشكل المقابل فإن محصلة هذه القوى = ...



① ٢٠ ② ٥ ③ ١٥ ④ ١٠

الحل

س = ١٠ جتا صفر° + ١٠ جتا ٦٠° + ١٠ جتا ١٢٠°

= ١٠ + ٥ − ٥ = ١٠

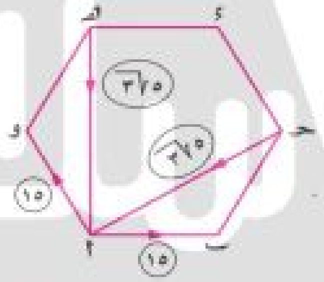
، ص = ١٠ جا صفر + ١٠ جا ٦٠° + ١٠ جا ١٢٠°

= $٥\sqrt{٣} + ٥\sqrt{٣} = ١٠\sqrt{٣}$

∴ ح = $\sqrt{(١٠)^٢ + (١٠\sqrt{٣})^٢}$ = ٢٠ نيوتن.

٣ فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء هـ و سداسى منتظم اثرت القوى ١٥ ، $٥\sqrt{٣}$ ، $٥\sqrt{٣}$ ، ١٥ نيوتن على الترتيب فى الاتجاهات $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{جـأ}$ ، $\overrightarrow{هـأ}$ ، $\overrightarrow{أو}$ فإن المحصلة ح = ... نيوتن.



① $١٠\sqrt{٣}$ ② ١٠ ③ ١٥ ④ صفر

الحل

∵ محصلة القوتين ١٥ ، ١٥ هى : ح = ٢ × ١٥ × جتا $\frac{١٢٠°}{٢}$ = ١٥ نيوتن فى اتجاه $\overrightarrow{أء}$

، محصلة القوتين $٥\sqrt{٣}$ ، $٥\sqrt{٣}$ هى

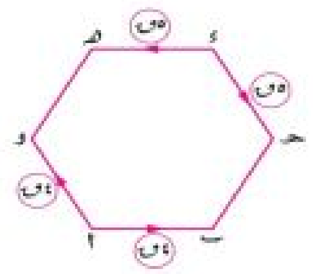
حَ = ٢ × $٥\sqrt{٣}$ جتا $\frac{٦٠°}{٢}$ = ١٥ نيوتن فى اتجاه $\overrightarrow{ءأ}$

∴ كلًا من ح ، حَ قوتان متساويتان فى اتجاهين متضادين

∴ محصلتهما = صفر

٤ فى الشكل المقابل :

إذا كان أ ب جـ ء هـ و شكل سداسى منتظم فإن محصلة القوى تكون فى اتجاه ....



① $\overrightarrow{ءأ}$ ② $\overrightarrow{ءهـ}$ ③ $\overrightarrow{ءجـ}$ ④ $\overrightarrow{ءو}$

الحل

إذا كانت ح محصلة القوتان ٤ ق ، ٤ ق

∴ ح = ٢ × ٤ ق × جتا $\frac{١٢٠°}{٢}$ = ٤ ق فى اتجاه $\overrightarrow{ءأ}$

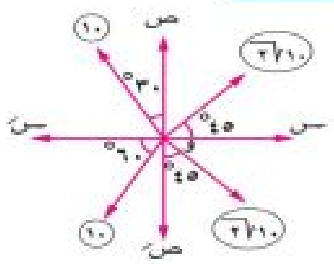
، إذا كانت حَ محصلة القوتان ٥ ق ، ٥ ق

∴ حَ = ٢ × ٥ ق × جتا $\frac{١٢٠°}{٢}$ = ٥ ق فى اتجاه $\overrightarrow{ءأ}$

∴ المحصلة الكلية = ٥ ق − ٤ ق = ق فى اتجاه $\overrightarrow{ءأ}$

٥ فى الشكل المقابل :

محصلة القوى ح = ... نيوتن.



① ١٠ في اتجاه $\overrightarrow{وس}$ ② $١٠\sqrt{٢}$ في اتجاه $\overrightarrow{وس}$ ③ ١٠ في اتجاه $\overrightarrow{وص}$ ④ $١٠\sqrt{٢}$ في اتجاه $\overrightarrow{وص}$

الحل

بفرض محصلة القوتان $١٠\sqrt{٢}$ ، $١٠\sqrt{٢}$

∴ $ح_١$ = ٢ × $١٠\sqrt{٢}$ × جتا $\frac{٩٠°}{٢}$ = ٢٠ فى اتجاه $\overrightarrow{وسَ}$

، $ح_٢$ محصلة القوتان ١٠ ، ١٠

∴ $ح_٢$ = ٢ × ١٠ جتا $\frac{١٢٠°}{٢}$ = ١٠ فى اتجاه $\overrightarrow{وس}$

∴ محصلة القوى ح = ٢٠ − ١٠ = ١٠ فى اتجاه $\overrightarrow{وسَ}$

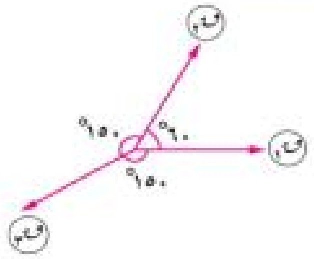
• يمكن أيضا الحل بطريقة الزوايا القطبية أو التحليل

الدرس الرابع: الاتزان

٦ ثلاث قوى مستوية ومتزنة تؤثر فى نقطة مادية قياس الزاوية بين القوتين الأولى والثانية ٦٠° ، وبين الثانية والثالثة ١٥٠° فإن النسبة بين مقادير القوى هى ....

① ١ : ٣ : ١ ② ٣ : ١ : ١ ③ ١ : ١ : ٣ ④ ١ : ١ : $\sqrt{٣}$

الحل



∵ $\frac{ق_١}{جا ١٥٠°} = \frac{ق_٢}{جا ١٥٠°} = \frac{ق_٣}{جا ٦٠°}$

∴ $ق_١ : ق_٢ : ق_٣$ = جا ١٥٠° : جا ١٥٠° : جا ٦٠°

= $\frac{١}{٢} : \frac{١}{٢} : \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ١ : ١ : $\sqrt{٣}$

٧ أقل عدد من القوى المستوية غير المتساوية المقدار يمكن أن يتزن هو ....

① ٢ ② ٣ ③ ٤ ④ ٥

الحل

أقل عدد من القوى يمكن أن يتزن هو قوتان متساويتان فى اتجاهين متضادين

ولكنه وضع شرط أن تكون القوى غير متساوية

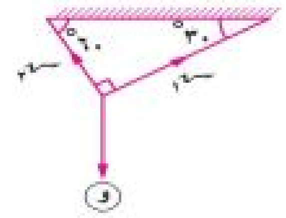
∴ أقل عدد من القوى غير المتساوية يمكن أن يتزن هو ٣

أ. مصطفى سلامة _ 01018047203
01005270744 عمرو خضر Amr Khadr

٨ فى الشكل المقابل :

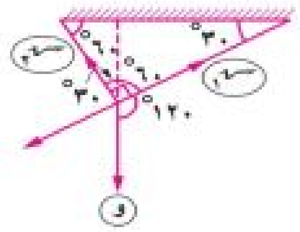
ثقل مقداره (و) معلق بخيطين يميلان على الأفقى بالزوايا الموضحة

فإن : $\frac{ش_١}{و}$ = ...



① ١ : ٢　　② ٢ : ١　　③ $\sqrt{٣}$: ١　　④ ١ : $\sqrt{٣}$

الحل



∵ الجسم متزن تحت تأثير ثلاث قوى

∴ $\frac{ش_١}{\text{حا } ١٥٠°} = \frac{و}{\text{حا } ٩٠°} = \frac{ش_٢}{\text{حا } ١٢٠°}$

∴ $\frac{ش_١}{و} = \frac{\text{حا } ١٥٠°}{\text{حا } ٩٠°} = \frac{١}{٢}$

أهم مسائل المقالى فى الإستاتيكا

١ وضع جسم وزنه ١٢ $\sqrt{٣}$ ث.جرام على مستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ° حفظ اتزان الجسم بواسطة قوة مقدارها ١٢ ث.جم تميل على المستوى لأعلى بزاوية قياسها هـ°

أوجد كلًا من : هـ ، رد فعل المستوى.

∵ الجسم متزن تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية فى نقطة

∴ يمكن تطبيق قاعدة لامى

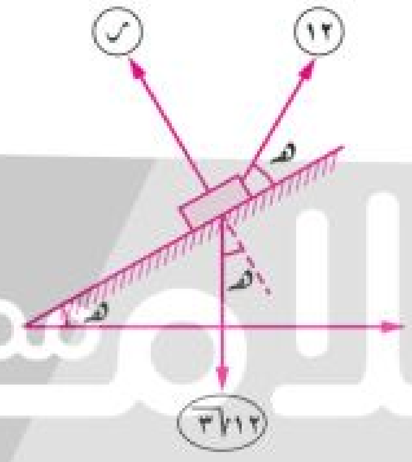
$$\frac{١٢\sqrt{٣}}{\text{جا}(٩٠^\circ - \text{هـ})} = \frac{١٢}{\text{جا}(١٨٠^\circ - \text{هـ})} = \frac{\text{ر}}{\text{جا}(٩٠^\circ + ٢\,\text{هـ})}$$

$$\therefore \frac{١٢\sqrt{٣}}{\text{جتا هـ}} = \frac{١٢}{\text{جا هـ}}$$

$$\therefore \text{ظا هـ} = \frac{١٢}{١٢\sqrt{٣}} = \frac{١}{\sqrt{٣}} \qquad \therefore \text{هـ}^\circ = ٣٠^\circ$$

$$\therefore \frac{١٢}{\text{جا }٣٠^\circ} = \frac{\text{ر}}{\text{جا}(٩٠^\circ + ٢ \times ٣٠^\circ)}$$

$$\therefore \text{ر} = \frac{١٢ \times \text{جا }١٥٠^\circ}{\text{جا }٣٠^\circ} = ١٢ \text{ ث.جم}$$



٢ علق ثقل مقداره ٢٠٠ ث.جم بخيطين طولاهما ٦٠ سم ، ٨٠ سم من نقطتين على خط أفقى واحد البعد بينهما ١٠٠ سم. **أوجد مقدار الشد فى كل من الخيطين.**

∵ الجسم متزن تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية فى نقطة

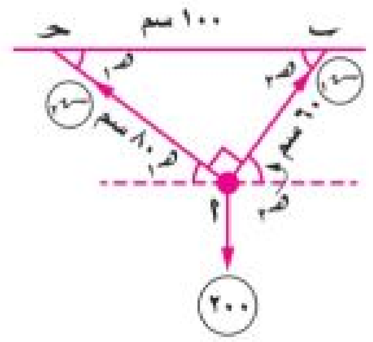
∴ من قاعدة لامى :

$$\frac{\text{ش}_١}{\text{جا}(٩٠^\circ + \text{هـ}_١)} = \frac{\text{ش}_٢}{\text{جا}(٩٠^\circ + \text{هـ}_٢)} = \frac{٢٠٠}{\text{جا }٩٠^\circ}$$

$$\therefore \frac{\text{ش}_١}{\text{جتا هـ}_١} = \frac{\text{ش}_٢}{\text{جتا هـ}_٢} = \frac{٢٠٠}{\text{جا }٩٠^\circ}$$

$$\therefore \text{ش}_١ = \frac{٢٠٠ \times \text{جتا هـ}_١}{\text{جا }٩٠^\circ} = \frac{٢٠٠ \times \frac{٨٠}{١٠٠}}{١} = ١٦٠ \text{ ث.جم.}$$

$$، \text{ش}_٢ = \frac{٢٠٠ \times \text{جتا هـ}_٢}{\text{جا }٩٠^\circ} = \frac{٢٠٠ \times \frac{٦٠}{١٠٠}}{١} = ١٢٠ \text{ ث.جم.}$$



٣ إذا كانت : $\overleftarrow{\text{ق}_١} = ٥\,\overleftarrow{\text{س}} - ٣\,\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_٢} = -٧\,\overleftarrow{\text{س}} + ٢\,\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_٣} = ٢\,\overleftarrow{\text{س}} + \overleftarrow{\text{ص}}$ **فأثبت أن مجموعة القوى** $\overleftarrow{\text{ق}_١}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_٢}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_٣}$ متزنة.

الحل

$$\overleftarrow{\text{ح}} = \overleftarrow{\text{ق}_١} + \overleftarrow{\text{ق}_٢} + \overleftarrow{\text{ق}_٣}$$

$$= (٥\,\overleftarrow{\text{س}} - ٣\,\overleftarrow{\text{ص}}) + (-٧\,\overleftarrow{\text{س}} + ٢\,\overleftarrow{\text{ص}}) + (٢\,\overleftarrow{\text{س}} + \overleftarrow{\text{ص}})$$

$$= (٥ - ٧ + ٢)\,\overleftarrow{\text{س}} + (-٣ + ٢ + ١)\,\overleftarrow{\text{ص}} = \overleftarrow{٠}$$

∴ المجموعة متزنة.

٤ وضع جسم وزنه (و) نيوتن على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ الجسم فى حالة توازن بتأثير قوة مقدارها ٣٦ نيوتن تعمل فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى. احسب مقدار وزن الجسم **ومقدار رد فعل المستوى.**

الحل

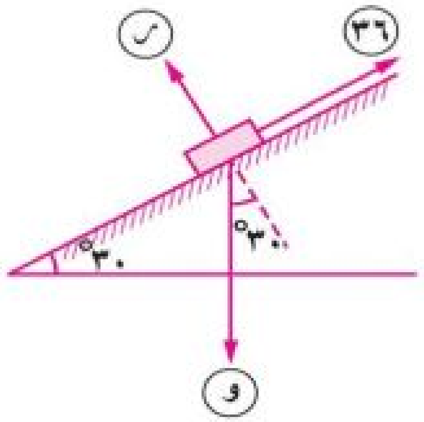
∵ الجسم متزن

∴ بتطبيق قاعدة لامى

$$\therefore \frac{٣٦}{\text{جا }١٥٠^\circ} = \frac{\text{ر}}{\text{جا }١٢٠^\circ} = \frac{\text{و}}{\text{جا }٩٠^\circ}$$

$$\therefore \text{ر} = \frac{٣٦ \times \text{جا }١٢٠^\circ}{\text{جا }١٥٠^\circ} = ٣٦\sqrt{٣} \text{ نيوتن.}$$

$$، \text{و} = \frac{٣٦ \times \text{جا }٩٠^\circ}{\text{جا }١٥٠^\circ} \text{ جا }٩٠^\circ = ٧٢ \text{ نيوتن.}$$



٥ أثرت قوتان فى نقطة مادية مقدارهما ٧ ، ق ث.كجم وقياس الزاوية بين خطى عملهما ١٢٠° فإذا كان مقدار محصلتهما ٧ $\sqrt{٣}$ ث.كجم.

أوجد مقدار ق وقياس الزاوية التى تميل بها المحصلة على اتجاه القوة الأولى.

أ. مصطفى سلامة _ 01018047203
01005270744 عمرو خضر Amr Khadr

الحل

$\text{ح}^2 = \text{ق}_1^2 + \text{ق}_2^2 + 2\,\text{ق}_1\,\text{ق}_2 \,\text{جتا}\, \text{ى}$

$(7\sqrt{3})^2 = 7^2 + \text{ق}^2 + 2 \times 7 \times \text{ق} \times \text{جتا}\, 120^\circ$

$147 = 49 + \text{ق}^2 - 7\,\text{ق}$ $\qquad \therefore \text{ق}^2 - 7\,\text{ق} - 98 = 0$

$\therefore \text{ق} = -7$ مرفوض أ، $\text{ق} = 14$ ث.كجم

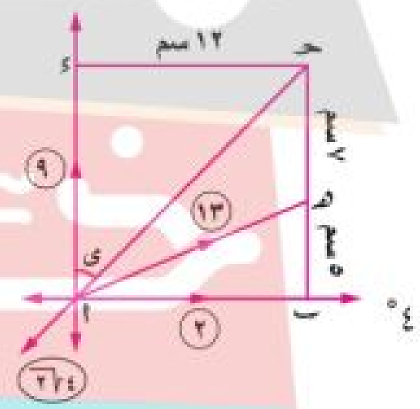
، $\text{ظا}\,\theta = \dfrac{14\,\text{جا}\,120^\circ}{7 + 14\,\text{جتا}\,120^\circ} = \dfrac{7\sqrt{3}}{\text{صفر}}$

$\therefore \theta = 90^\circ$ $\qquad$ ∴ المحصلة تكون عمودية على القوة الأولى

---

٦ أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ١٢ سم ، $\text{هـ} \in \overline{\text{ب حـ}}$ بحيث $\text{ب هـ} = 5$ سم أثرت قوى مقدارها ٢ ، ١٣ ، ٤ ، $4\sqrt{2}$ ، ٩ ث.جم فى الاتجاهات $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ هـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـ أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ على الترتيب. **أوجد محصلة هذه القوى واتجاهها.**

الحل



∵ Δ أ هـ ب قائم الزاوية فى ب

$\therefore \text{أ هـ} = \sqrt{(5)^2 + (12)^2} = 13$ سم

$\therefore \text{جا}(\angle \text{ب أ هـ}) = \dfrac{5}{13}$

، $\text{جتا}(\angle \text{ب أ هـ}) = \dfrac{12}{13}$

، ∵ $\overline{\text{أ حـ}}$ قطر فى المربع أ ب حـ ء $\qquad \therefore \text{ى} = 45^\circ$

وبفرض أ تقع على نقطة الأصل

، $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ فى اتجاه $\overrightarrow{\text{و س}}$

$\therefore \text{س} = 2 \times \text{جتا}\,0^\circ + 13 \times \text{جتا}(\angle \text{ب أ هـ}) + 9 \times \text{جتا}\,90^\circ + 4\sqrt{2} \times \text{جتا}\,225^\circ$

$= 2 \times 1 + 13 \times \dfrac{12}{13} + 9 \times \text{صفر} + 4\sqrt{2} \times \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = 10$

، $\text{ص} = 4 \times \text{جا}\,0^\circ + 13 \times \text{جا}(\angle \text{ب أ هـ}) + 9 \times \text{جا}\,90^\circ + 4\sqrt{2} \times \text{جا}\,225^\circ$

$= 4 \times \text{صفر} + 13 \times \dfrac{5}{13} + 9 \times 1 + 4\sqrt{2} \times \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = 10$

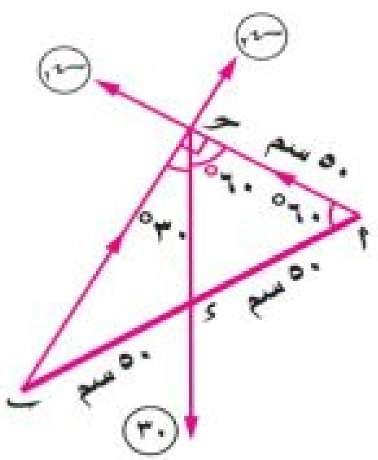
$\therefore \vec{\text{ح}} = \sqrt{(10)^2 + (10)^2} = 10\sqrt{2}$ ث.جم

---

٧ قضيب منتظم طوله ١٠٠ سم ووزنه ٣٠ نيوتن عُلق من طرفيه بواسطة خيطين متعامدين وثبتت نهايته فى مسمار فى السقف فإذا كان طول أحد الخيطين ٥٠ سم

أوجد مقدار الشد فى الخيطين فى حالة الاتزان.

الحل



∵ المجموعة متزنة

∴ خط عمل الوزن يمر بنقطة تقاطع

$\overrightarrow{\text{ش}_1}$ ، $\overrightarrow{\text{ش}_2}$ وهى حـ

$\therefore \text{أ حـ} = \dfrac{1}{2}\, \text{أ ب}$

، $\angle$ أ حـ ب قائمة

$\therefore \text{ق}(\angle \text{ب}) = 30^\circ$

$\therefore \text{ق}(\angle \text{أ}) = \text{ق}(\angle \text{أ حـ ء}) = 60^\circ$

∴ بتطبيق قاعدة لامى يكون :

$\dfrac{\text{ش}_1}{\text{جا}\,150^\circ} = \dfrac{\text{ش}_2}{\text{جا}\,120^\circ} = \dfrac{30}{\text{جا}\,90^\circ}$

$\therefore \text{ش}_1 = 30 \times \dfrac{1}{2} = 15$ نيوتن.

، $\text{ش}_2 = 30 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$ نيوتن.

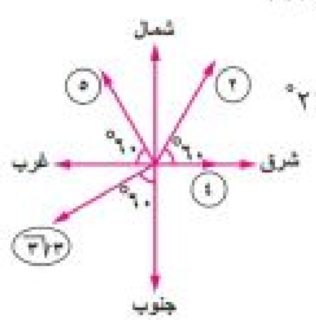
---

٨ أربع قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة مقاديرها ٤ ، ٢ ، ٥ ، $3\sqrt{3}$ نيوتن تعمل فى الاتجاهات : الشرق ٦٠° شمال الشرق ، ٦٠° شمال الغرب ، ٦٠° غرب الجنوب على الترتيب.

أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

$\therefore \text{س} = 4\,\text{جتا}\,0^\circ + 2\,\text{جتا}\,60^\circ + 5\,\text{جتا}\,120^\circ + 3\sqrt{3}\,\text{جتا}\,210^\circ$

$= 4 + 1 - \dfrac{5}{2} - \dfrac{9}{2} = -2$



، $\text{ص} = 4\,\text{جا}\,0^\circ + 2\,\text{جا}\,60^\circ + 5\,\text{جا}\,120^\circ + 3\sqrt{3}\,\text{جا}\,210^\circ$

$= 0 + \sqrt{3} + \dfrac{5\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

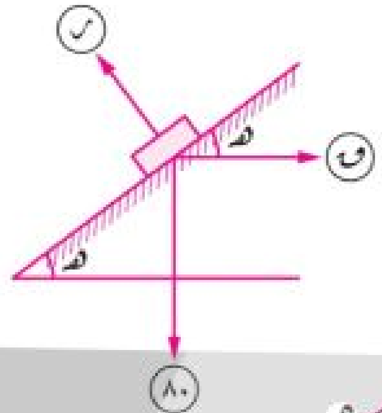
$\therefore \vec{\text{ح}} = (-2 ، 2\sqrt{3})$

$\therefore \text{ح} = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$ نيوتن.

، $\text{ظا}\,\text{هـ} = \dfrac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}$ $\qquad \therefore \text{هـ} = 120^\circ$ (فى اتجاه ٦٠° شمال الغرب)

---

٩ وضع جسم وزنه ٨٠ ث.جم على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ حيث :
جا هـ = ٠.٦ حفظ الجسم فى حالة اتزان بواسطة قوة أفقية ق
أوجد مقدار هذا القوى ورد فعل المستوى على الجسم.

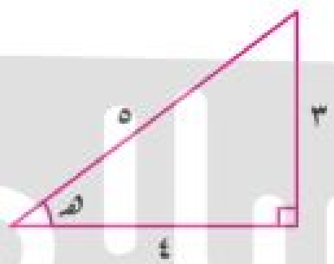


∵ الجسم متزن تحت تأثير ثلاثة قوى متلاقية فى نقطة

∴ يمكن استخدام قاعدة لامى

∴ $\dfrac{80}{\text{جا}\,(90^\circ + \text{هـ})} = \dfrac{\text{ق}}{\text{جا}\,(180^\circ - \text{هـ})} = \dfrac{\text{ر}}{\text{جا}\,90^\circ}$

∴ $\dfrac{80}{\text{جتا هـ}} = \dfrac{\text{ق}}{\text{جا هـ}} = \text{ر}$



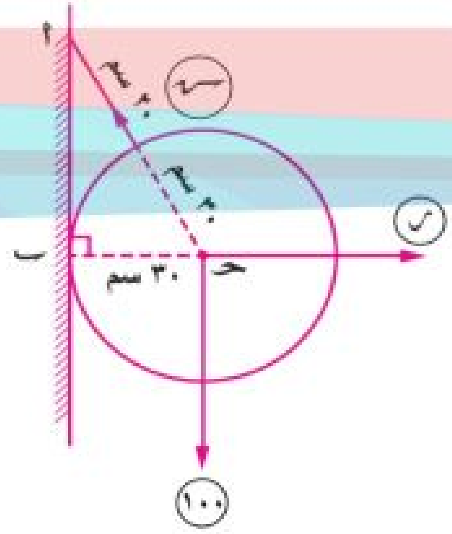
∴ $\text{ق} = \dfrac{80\ \text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}} = \dfrac{80 \times \frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = 60$ ث.جم.

$\text{ر} = \dfrac{80}{\text{جتا هـ}} = \dfrac{80}{\frac{4}{5}} = 100$ ث.جم.

١٠ كرة منتظمة ملساء وزنها ١٠٠ ث.جم وطول نصف قطرها ٣٠ سم معلقة من نقطة على سطحها بأحد طرفى خيط خفيف طوله ٢٠ سم ومثبت طرفه الآخر فى نقطة من حائط رأسى أملس.
أوجد فى وضع التوازن كلًا من الشد فى الخيط ورد فعل الحائط.

∵ الكرة متزنة تحت تأثير ثلاثة قوى متلاقية فى نقطة

∴ يمكن استخدام مثلث القوى أ ب حـ



∴ $\dfrac{100}{\text{أب}} = \dfrac{\text{ش}}{\text{أحـ}} = \dfrac{\text{ر}}{\text{ب حـ}}$

∴ $\dfrac{100}{40} = \dfrac{\text{ش}}{50} = \dfrac{\text{ر}}{30}$

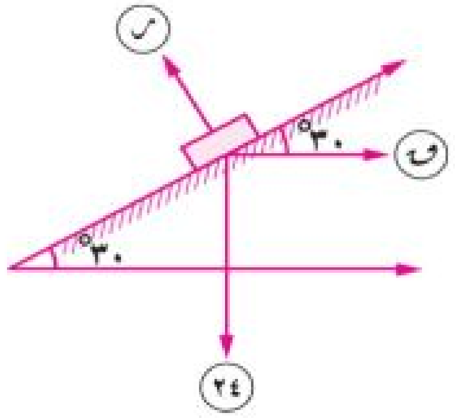
∴ $\text{ش} = \dfrac{100 \times 50}{40} = 125$ ث.جم

، $\text{ر} = \dfrac{100 \times 30}{40} = 75$ ث.جم.

١١ وضع جسم وزنه ٢٤ نيوتن على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠°
وحفظ توازن الجسم بواسطة قوة أفقية. **أوجد مقدار هذه القوة ورد فعل المستوى على الجسم.**

∵ الجسم متزن تحت تأثير ثابت
قوى متلاقية فى نقطة

∴ يمكن استخدام قاعدة لامى



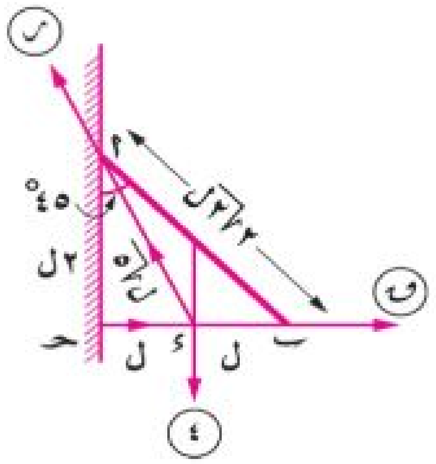
$\dfrac{24}{\text{جا}\,(90^\circ + 30^\circ)} = \dfrac{\text{ق}}{\text{جا}\,(90^\circ + 60^\circ)} = \dfrac{\text{ر}}{\text{جا}\,90^\circ}$

$\text{ق} = \dfrac{24\ \text{جا}\,150^\circ}{\text{جا}\,120^\circ} = 8\sqrt{3}$ نيوتن.

$\text{ر} = \dfrac{24\ \text{جا}\,90^\circ}{\text{جا}\,120^\circ} = 16\sqrt{3}$ نيوتن.

١٢ قضيب منتظم $\overline{\text{أب}}$ يتصل طرفه أ بمفصل مثبت فى حائط رأسى أثرت فى الطرف ب قوة أفقية فاتزن القضيب عندما كان يميل على الحائط بزاوية ٤٥° فإذا كان وزن القضيب ٤ ث.كجم ويؤثر فى منتصفه. **أوجد مقدار القوة ورد فعل المفصل على القضيب.**

من هندسة الشكل :



إذا كان طول أحـ = ٢ ل

∴ ءحـ = ل ، أء = ل $\sqrt{5}$

بتطبيق مثلث القوى أ حـ ء

$\dfrac{4}{2\,\text{ل}} = \dfrac{\text{ر}}{\text{ل}\sqrt{5}} = \dfrac{\text{ق}}{\text{ل}}$

∴ $\text{ر} = 2\sqrt{5}$ ث.كجم، $\text{ق} = 2$ ث.كجم

خد بالك هى مش سهلة وعمرها ماكانت ولا هتكون سهلة . بس النجاح والتميز طعمه حلو أوى .

أ. مصطفى سلامة _ 01018047203
01005270744 عمرو خضر Amr Khadr

١٣ أ ب ج د هـ و سداسى منتظم أثرت عليه القوى ٨ ، $٦\sqrt{٣}$ ، ٥ ، $٤\sqrt{٣}$ نيوتن فى $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أج}$ ، $\overleftarrow{أد}$ ، $\overleftarrow{أهـ}$

أوجد مقدار واتجاه المحصلة.

بفرض أ تقع على نقطة الأصل ، $\overleftarrow{أب}$ فى اتجاه $\overleftarrow{و س}$

∴ س = ٨ جتا ٠° + $٦\sqrt{٣}$ جتا ٣٠° + ٥ جتا ٦٠° + $٤\sqrt{٣}$ جتا ٩٠°

$= ٨ + ٩ + \frac{٥}{٢} + ٠ = ١٩,٥$

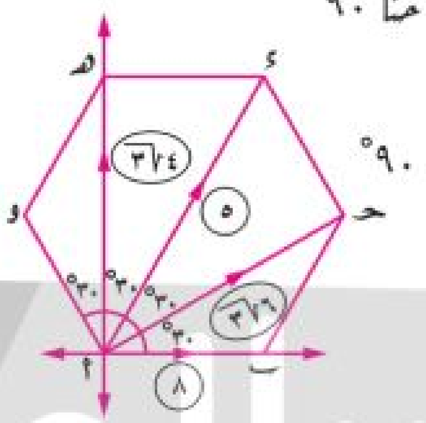
، ص = ٨ جا ٠° + $٦\sqrt{٣}$ جا ٣٠° + ٥ جا ٦٠° + $٤\sqrt{٣}$ جا ٩٠°

$= ٠ + ٣\sqrt{٣} + \frac{٥\sqrt{٣}}{٢} + ٤\sqrt{٣} = ٩,٥\sqrt{٣}$

∴ $\vec{ح} = (١٩,٥ ، ٩,٥\sqrt{٣})$

∴ $ح = \sqrt{(١٩,٥)^٢ + (٩,٥\sqrt{٣})^٢} = \sqrt{٦٥١}$ نيوتن.

ظا θ = $\frac{٩,٥\sqrt{٣}}{١٩,٥}$ ∴ θ = ٤٠° ٩َ ٣٠ً مع $\overleftarrow{أب}$



١٤ القوى $\vec{ق}_١ = (-٨ ، ٨\sqrt{٣})$ ، $\vec{ق}_٢ = (٤\sqrt{٣} ، ٩٠°)$ ، $\vec{ق}_٣ = (١٢\sqrt{٣} ، ١٥٠°)$ ، $\vec{ق}_٤ = (٣٦ ، ٣٠٠°)$ مقاسة بالنيوتن وتؤثر فى نقطة مادية ، عين مقدار واتجاه محصلتهما.

∵ $\vec{ق}_١ = (-٨ ، ٨\sqrt{٣})$

، $\vec{ق}_٢ = (٤\sqrt{٣} ، ٩٠°) = (٠ ، ٤\sqrt{٣})$

، $\vec{ق}_٣ = (١٢\sqrt{٣} ، ١٥٠°) = (-١٨ ، ٦\sqrt{٣})$

، $\vec{ق}_٤ = (٣٦ ، ٣٠٠°) = (١٨ ، -١٨\sqrt{٣})$

∵ $\vec{ح} = \vec{ق}_١ + \vec{ق}_٢ + \vec{ق}_٣ + \vec{ق}_٤ = -٨ \overleftarrow{س}$

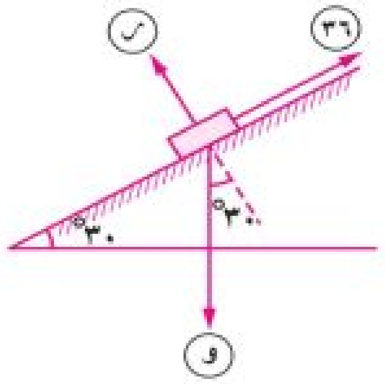
∴ ح = ٨ نيوتن.

، ظا θ = $\frac{٠}{-٨}$

∴ θ = ١٨٠°

∴ المحصلة تعمل فى اتجاه $\overleftarrow{و س}$

١٥ وضع جسم وزنه (و) نيوتن على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ الجسم فى حالة اتزان بتأثير قوة مقدارها ٣٦ نيوتن فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى ولأعلى. **أوجد مقدار وزن الجسم ومقدار رد فعل المستوى.**



الحل

بتطبيق قاعدة لامى

$\frac{و}{جا ٩٠°} = \frac{٣٦}{جا ١٥٠°} = \frac{ر}{جا ١٢٠°}$

∴ و = $\frac{٣٦ جا ٩٠°}{جا ١٥٠°}$ = ٧٢ نيوتن

ر = $\frac{٣٦ \times جا ١٢٠°}{جا ١٥٠°} = ٣٦\sqrt{٣}$ نيوتن.

١٦ حُللت قوة مقدارها $١٠\sqrt{٣}$ ثقل.كجم إلى مركبتين متعامدتين مقدار إحداهما ١٥ ثقل.كجم. **احسب مقدار المركبة الأخرى.**

بفرض أن المركبة الأولى تصنع زاوية θ مع القوة

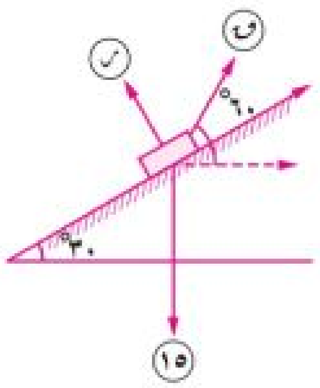
∴ ١٥ = $١٠\sqrt{٣}$ جتا θ

∴ جتا θ = $\frac{١٥}{١٠\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ θ = ٣٠°

∴ مقدار المركبة الثانية = $١٠\sqrt{٣}$ جا θ = $٥\sqrt{٣}$ ث.كجم.

١٧ جسم وزنه ١٥ ثقل.كجم وضع على مستوى مائل أملس يميل على المستوى الأفقى بزاوية قياسها $جا^{-١} \frac{١}{٢}$ ، قوة تؤثر على الجسم وتحفظه فى حالة اتزان وتحصر مع المستوى الأفقى زاوية مقدارها ٦٠° **احسب مقدار كل من هذه القوة ورد فعلها على هذا المستوى المائل.**



∵ بتطبيق قاعدة لامى

$\frac{١٥}{جا ٦٠°} = \frac{ق}{جا ١٥٠°} = \frac{ر}{جا ١٥٠°}$

∴ ق = ر = $\frac{١٥ \times جا ١٥٠°}{جا ٦٠°}$

= $٥\sqrt{٣}$ ث.كجم.

١٨ ثلاث قوى مقاديرها ١٠ ، ٢٠ ، ٣٠ نيوتن تؤثر فى نقطة مادية الأولى نحو الشرق والثانية تصنع زاوية ٣٠° غرب الشمال والثالثة تصنع زاوية ٦٠° جنوب الغرب.

أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

س = ١٠ حتا ٠° + ٢٠ حتا ١٢٠° + ٣٠ حتا ٢٤٠° = ١٠ − ١٠ − ١٥ = −١٥

ص = ١٠ حا ٠° + ٢٠ حا ١٢٠° + ٣٠ حا ٢٤٠°

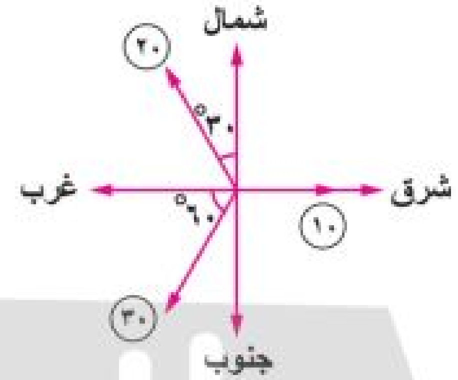
= ٠ + ١٠$\sqrt{٣}$ − ١٥$\sqrt{٣}$ = −٥$\sqrt{٣}$

∴ $\vec{ح}$ = (−١٥ ، −٥$\sqrt{٣}$)

∴ ح = $\sqrt{(-١٥)^٢ + (-٥\sqrt{٣})^٢}$ = ١٠$\sqrt{٣}$

ظا θ = $\frac{-٥\sqrt{٣}}{-١٥}$ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

∴ θ = ٢١٠° أى ٣٠° جنوب الغرب.



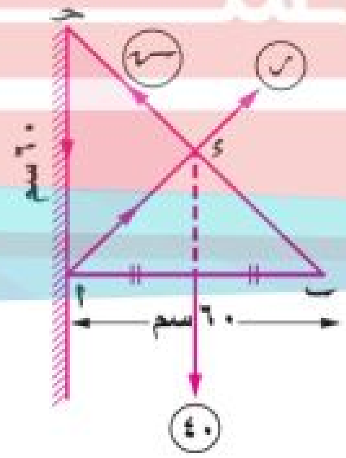
١٩ $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٦٠ سم ووزنه ٤٠ نيوتن متصل بمفصل فى حائط رأسى عند أ حفظ فى وضع أفقى بواسطة خيط خفيف يتصل بطرف القضيب عند ب وبنقطة حـ على الحائط تعلو أ رأسيًا بمسافة ٦٠ سم. **أوجد كلًا من الشد فى الخيط ورد فعل المفصل عند أ**

بتطبيق قاعدة مثلث القوى (أ حـ ء)

$\frac{٤٠}{٦٠}$ = $\frac{ر}{٣٠\sqrt{٢}}$ = $\frac{ش}{٣٠\sqrt{٢}}$

∴ ش = ر = $\frac{٤٠ \times ٣٠\sqrt{٢}}{٦٠}$

= ٢٠$\sqrt{٢}$ نيوتن.



٢٠ وضع جسيم وزنه ٣٠٠ ث.جم على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ومنع من الانزلاق بواسطة قوة تعمل فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى.

احسب مقدار القوة ورد فعل المستوى.

الحل

ظا هـ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

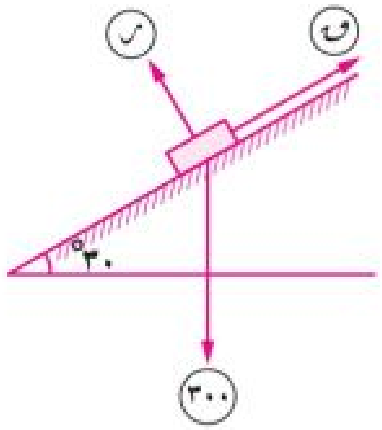
∴ هـ = ٣٠°

بتطبيق قاعدة لامى

$\frac{٣٠٠}{حا ٩٠°}$ = $\frac{ق}{حا ١٥٠°}$ = $\frac{ر}{حا ١٢٠°}$

ق = $\frac{٣٠٠ حا ١٥٠°}{حا ٩٠°}$ = ١٥٠ ث.جم

ر = $\frac{٣٠٠ حا ١٢٠°}{حا ٩٠°}$ = ١٥٠$\sqrt{٣}$ ث.جم



٢١ كرة منتظمة ترتكز على قضيبين متوازيين يقعان فى مستوى أفقى واحد والبعد بينهما يساوى طول نصف قطر الكرة.

أوجد الضغط على كل من القضيبين إذا كان وزن الكرة ١٠ نيوتن.

الحل

∵ القضيب مماس للكرة

، رد الفعل عمودى على المماس (القضيب)

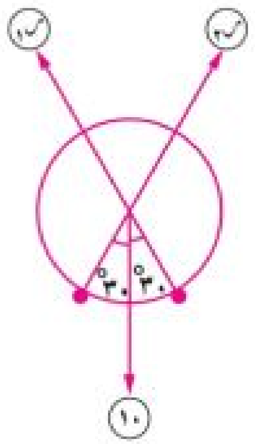
∴ $\vec{ر_١}$ ، $\vec{ر_٢}$ يمران بمركز الكرة

وبتطبيق قاعدة لامى :

∴ $\frac{ر_١}{حا ١٥٠°}$ = $\frac{ر_٢}{حا ١٥٠°}$ = $\frac{١٠}{حا ٦٠°}$

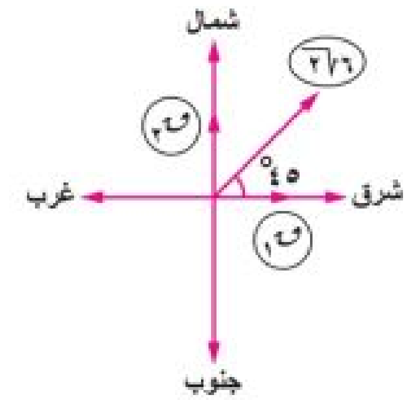
ر١ = ر٢ = $\frac{١٠ \times حا ١٥٠°}{حا ٦٠°}$

= $\frac{١٠\sqrt{٣}}{٣}$ نيوتن.



٢٢ حل قوة مقدارها ٦ $\sqrt{٢}$ نيوتن تعمل فى اتجاه الشمال الشرقى إلى مركبتين فى اتجاهى الشمال والشرق.

الحل



$ق_1$ = ٦ $\sqrt{٢}$ جتا ٤٥°

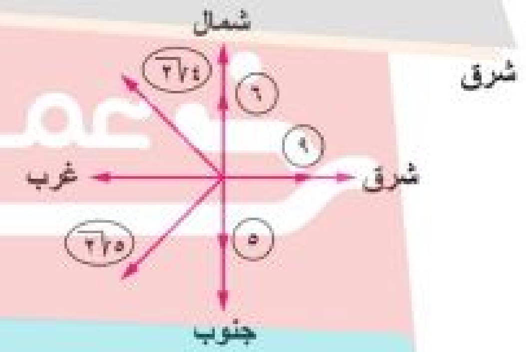
= ٦ نيوتن.

$ق_2$ = ٦ $\sqrt{٢}$ جا ٤٥° = ٦ نيوتن.

٢٣ خمس قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة مقاديرها ٩ ، ٦ ، ٤ $\sqrt{٢}$ ، ٥ $\sqrt{٢}$ ، ٥ نيوتن وتعمل فى اتجاهات الشرق ، الشمال ، الشمال الغربى ، الجنوب الغربى ، الجنوب على الترتيب.

أثبت أن : مجموعة القوى متزنة.

الحل



س = ٩ جتا ٠° + ٦ جتا ٩٠° + ٤ $\sqrt{٢}$ جتا ١٣٥°

\+ ٥ $\sqrt{٢}$ جتا ٢٢٥° + ٥ جتا ٢٧٠°

= ٩ + ٠ + (−٤) + (−٥) + ٠ = صفر

ص = ٩ جا ٠° + ٦ جا ٩٠° + ٤ $\sqrt{٢}$ جا ١٣٥°

\+ ٥ $\sqrt{٢}$ جا ٢٢٥° + ٥ جا ٢٧٠°

= ٠ + ٦ + ٤ + (−٥) + (−٥) = صفر

$\vec{ح}$ = (٠ ، ٠) ∴ المجموعة متزنه

٢٤ ثلاث قوى متزنة ومتلاقية فى نقطة مقاديرها ٧ ، ٨ ، ١٣ نيوتن

أوجد قياس الزاوية بين القوتين الأولى والثانية.

الحل

فى حالة الاتزان فإن محصلة القوى الأولى والثانية تساوى فى المقدار القوة الثالثة

، بفرض أن الزاوية بين أول قوتين ى

∴ ١٣² = ٧² + ٨² + ٢ × ٧ × ٨ × جتا ى

$$\therefore \text{جتا ى} = \frac{١٣^2 - ٧^2 - ٨^2}{٢ \times ٧ \times ٨} = \frac{١}{٢} \qquad \therefore ى = ٦٠°$$

٢٥ قوتان متلاقيتان فى نقطة مجموع مقدارهما ١٥ نيوتن ، وقياس الزاوية بينهما ٦٠° ، ومقدار محصلتهما ١٣ نيوتن. **أوجد مقدار كل من القوتين.**

الحل

∵ بفرض أن القوتين ق ، ١٥ − ق

∴ ١٣² = ق² + (١٥ − ق)² + ٢ × ق × (١٥ − ق) جتا ٦٠°

١٦٩ = ق² + ٢٢٥ − ٣٠ ق + ق² + ١٥ ق − ق²

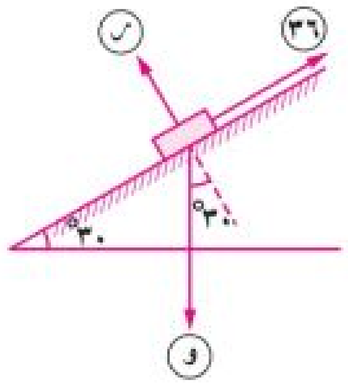
ق² − ١٥ ق + ٥٦ = ٠

∴ ق = ٧ ∴ الأخرى = ١٥ − ٧ = ٨ نيوتن.

أو ق = ٨ ، الأخرى = ١٥ − ٨ = ٧ نيوتن.

٢٦ وضع جسم وزنه (و) نيوتن على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ الجسم فى حالة اتزان بتأثير قوة مقدارها ٣٦ نيوتن تعمل فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى. **احسب** مقدار وزن الجسم **ومقدار رد فعل المستوى.**

الحل



∵ الجسم متزن

∴ يمكن تطبيق قاعدة لامى

$$\frac{٣٦}{\text{جا } ١٥٠°} = \frac{و}{\text{جا } ٩٠°} = \frac{ر}{\text{جا } ١٢٠°}$$

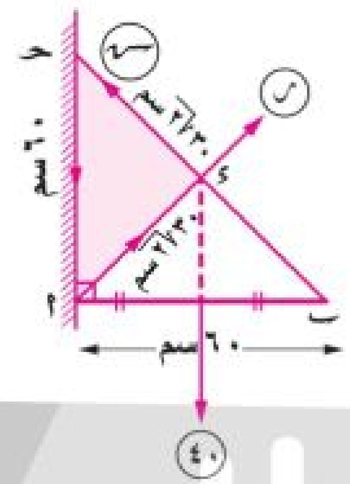
$$\therefore و = \frac{٣٦ \text{ جا } ٩٠°}{\text{جا } ١٥٠°} = ٧٢ \text{ نيوتن.}$$

$$، ر = \frac{٣٦ \text{ جا } ١٢٠°}{\text{جا } ١٥٠°} = ٣٦\sqrt{٣} \text{ نيوتن.}$$

على قدر حلمك تتسع الأرض

٢٧ $\overline{\text{أب}}$ قضيب منتظم طوله ٦٠ سم ووزنه ٤٠ نيوتن متصل بمفصل فى حائط رأسى عند أ حفظ فى وضع أفقى بواسطة خيط خفيف يتصل بطرف القضيب عند ب وبنقطة حـ على الحائط تعلو أ رأسيًا بمسافة ٦٠ سم ، **أوجد كلًا من الشد فى الخيط ورد فعل المفصل عند أ**

الحل



بتطبيق قاعدة مثلث القوى أ حـ ء

$$\frac{٤٠}{٦٠} = \frac{\text{ر}}{٣٠\sqrt{٢}} = \frac{\text{ش}}{٣٠\sqrt{٢}}$$

∴ ش = ر = $٢٠\sqrt{٢}$ نيوتن.

٢٨ القوى المستوى التى مقاديرها ٥ ، ٤ ، ق ، ٣ ، ك ، ٧ ث.كجم تؤثر فى نقطة مادية وقياس الزاوية بين كل قوتين متتاليتين ٦٠° ، عين قيمة : ق ، ك حتى تتزن المجموعة.

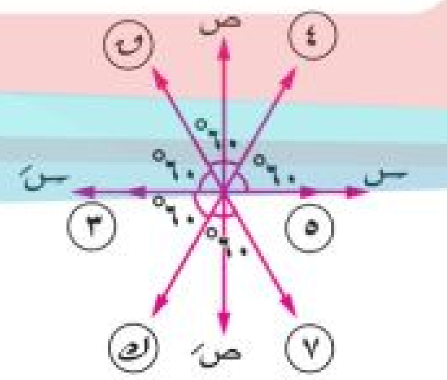
الحل

س = ٥ جتا ٠° + ٤ جتا ٦٠° + ق جتا ١٢٠°

+ ٣ جتا ١٨٠° + ك جتا ٢٤٠° + ٧ جتا ٣٠٠° = صفر

$∴ ٥ + ٢ - \frac{١}{٢}\text{ق} - ٣ - \frac{١}{٢}\text{ك} + \frac{٧}{٢} = ٠$

∴ ق + ك = ١٥ (١)



، ص = ٥ جا ٠° + ٤ جا ٦٠° + ق جا ١٢٠°

+ ٣ جا ١٨٠° + ك جا ٢٤٠° + ٧ جا ٣٠٠° = ٠

$∴ ٠ + ٢\sqrt{٣} + \frac{\text{ق}\sqrt{٣}}{٢} + ٠ - \frac{\text{ك}\sqrt{٣}}{٢} - \frac{٧\sqrt{٣}}{٢} = ٠$

ق − ك = ٣

بحل (١) ، (٢) ينتج أن :

ق = ٩ ث.كجم ، ك = ٦ ث.كجم

ثانياً: الهندسة الفراغية

الدرس الأول: المستقيمات والمستويات في الفراغ

١ إذا اشترك مستويين في نقطتين مختلفتين أ ، ب فإنهما ....

(١) يشتركان في نقطة ثالثة لا تقع على $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ (٢) متقاطعان في $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

(٣) متقاطعان في مستقيم يوازي $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ (٤) متوازيان

٢ أي نقطتين في الفراغ يمر بهما ....

(١) مستوى واحد فقط (٢) مستويان فقط (٣) ثلاث مستويات فقط (٤) عدد لا نهائي من المستويات

٣ في أي حالة مما يلي لا يتعين مستوى؟

(١) مستقيمين متقاطعين (٢) مستقيمين مختلفين ومتوازيين (٣) مستقيمين متخالفين (٤) مستقيم ونقطة خارجة

٤ أب جـ د أَ بَ جَ دَ متوازي مستطيلات كم مستقيم يحمل حرفًا من أحرف الشكل يكون مخالفًا للمستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ؟

(١) لا يوجد (٢) واحد (٣) اثنان (٤) أربعة

٥ إذا كانت: أ، ب، جـ ثلاث نقط تعين مستوى فإن: ....

(١) أب = ب جـ = جـ أ (٢) أب + ب جـ > أ جـ

(٣) أب + ب جـ = أب (٤) أب + ب جـ < أ جـ

٦ إذا كانت م لا تنتمي للمستوى الذي يضم النقط أ، ب، جـ فإن: $\overleftrightarrow{\text{أم}}$ ....

(١) يقع بأكمله داخل المستوى (٢) يقطع المستوى في نقطة

(٣) يقطع المستوى في نقطتين (٤) يوازي المستوى

٧ المستويان غير المتوازيين يتقاطعان في ....

(١) نقطة (٢) خط مستقيم (٣) مستوى (٤) شعاع

٨ إذا كانت: س ، ص ، ع مستويات في الفراغ بحيث س ∩ ص ∩ ع = {أ} ،

س ∩ ص = المستقيم ل أي الجمل الآتية غير صحيحة؟

(١) أ ∈ ل (٢) ل ∩ ع = {أ} (٣) ل // ع (٤) أ ∈ ع

٩ أي ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة تعين ....

(١) مستوى واحد (٢) مستويين (٣) ثلاث مستويات (٤) أربع مستويات

١٠ إذا وقعت نقطة أ في مستويين مختلفين س ، ص فإن: ....

(١) أ ∈ س فقط (٢) أ ∈ خط التقاطع (٣) أ ∈ ص فقط (٤) أ خارج المستويين

١١ إذا كان المستقيم ل ∩ المستقيم م = Ø ، ل لا يوازي م فإن ل ، م ....

(١) متوازيان (٢) متخالفان (٣) يجمعهما مستوى واحد (٤) متعامدان

١٢ إذا كان: $ل_1 \cap ل_2 = \emptyset$ فإن: ....

(١) $ل_1 // ل_2$ (٢) $ل_1 \perp ل_2$

(٣) $ل_1$ ، $ل_2$ متخالفان (٤) $ل_1$ ، $ل_2$ إما متوازيان أو متخالفان

١٣ أقل عدد من المستويات يمكن أن يحدد سطح مجسم هو ....

(١) ١ (٢) ٢ (٣) ٣ (٤) ٤

١٤ ينطبق المستويين إذا اشتركا في ....

(١) نقطة (٢) نقطتين (٣) مستقيم (٤) ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة

١٥ المستقيمات الرأسية في الفراغ تكون ....

(١) متوازية (٢) متخالفة (٣) في مستوى واحد (٤) متقاطعة

الدرس الثاني: الهرم

١ هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ٦ سم وارتفاعه ١٠ سم

فإن حجمه = ... سم^3

(١) ١٢٠ (٢) ٢٢٥٠ (٣) ٧٥٠ (٤) ٦٠٠

الحل

حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{1}{3}$ × (٦ × ٦) × ١٠ = ١٢٠ سم^3

أ. مصطفى سلامة _ 01018047203
01005270744
عمرو خضر Amr Khadr

٢ ارتفاع الهرم

① بُعد رأس الهرم عن مستوى قاعدته ② بُعد رأس الهرم عن أحد رؤوس قاعدته
③ بُعد رأس الهرم عن أحد أضلاع قاعدته ④ البُعد بين رأسين غير متتاليين في القاعدة

٣ هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته = ارتفاعه الجانبى فإن النسبة بين مساحته الجانبية : مساحته الكلية = ...

① ٢ : ٣ ② ١ : ٢ ③ ٣ : ٤ ④ ٣ : ٥

الحل

بفرض أن طول ضلع القاعدة = الارتفاع الجانبى = ل سم

المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ × محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

= $\frac{١}{٢}$ × (٤ ل) × ل = ٢ ل^{٢}

، المساحة الكلية = مساحة القاعدة + المساحة الجانبية

= ل^{٢} + ٢ ل^{٢} = ٣ ل^{٢}

∴ $\frac{\text{المساحة الجانبية}}{\text{المساحة الكلية}} = \frac{٢ ل^{٢}}{٣ ل^{٢}} = \frac{٢}{٣}$

٤ حجم هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته س وارتفاعه يساوى طول ضلعه فإن حجمه = ...

① $\frac{١}{٣}$ س^{٣} ② $\frac{١}{٢}$ س^{٣} ③ س^{٣} ④ $\frac{١}{٣}$ س^{٢}

الحل

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × ع

= $\frac{١}{٣}$ × س^{٢} × س

= $\frac{١}{٣}$ س^{٣}

٥ هرم ثلاثى منتظم الوجوه طول حرفه = ١٢ سم فإن حجمه = ... سم^{٣}

① ٣٦ $\sqrt{٣}$ ② ٣٦ $\sqrt{٢}$ ③ ٧٢ $\sqrt{٢}$ ④ ١٤٤ $\sqrt{٢}$

الحل

حجم الهرم المنتظم الوجوه = $\frac{\sqrt{٢}}{١٢}$ ل^{٣} = $\frac{\sqrt{٢}}{١٢}$ × (١٢)^{٣}

= ١٤٤ $\sqrt{٢}$ سم^{٣}

٦ إذا كان حجم هرم رباعى منتظم ١٢سم^{٣} وارتفاعه ٤ سم فإن طول حرف قاعدته يساوى .... سم

① ١ ② ٢ ③ ٣ ④ ٤

∵ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × ع

∴ ١٢ = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × ٤

∴ مساحة القاعدة = ٩ سم^{٢}

∴ طول حرف القاعدة = ٣ سم

٧ مسقط رأس الهرم الثلاثى المنتظم يقع في نقطة تلاقى كل مما يأتى ما عدا ....

① متوسطات قاعدة الهرم ② ارتفاعات قاعدة الهرم
③ منصفات الزوايا الداخلة للقاعدة ④ منتصف ارتفاع قاعدة الهرم

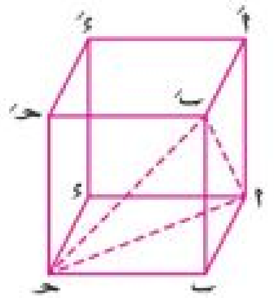
∵ قاعدة الهرم الثلاثى المنتظم عبارة عن مثلث متساوى الأضلاع

∴ نقطة تلاقى متوسطات المثلث هى نفسها نقطة تلاقى الارتفاعات هى نفسها نقطة تلاقى منصفات الزوايا الداخلة المثلث

∴ الإجابة الخطأ هى منتصف ارتفاع قاعدة الهرم.

٨ أ ب جـ ء أَ بَ جَ ءَ مكعب طول حرفه = ٦ سم فإن حجم الهرم بَ أ ب جـ = ... سم^{٣}

① ٣٦ ② ٧٢ ③ ٣٦ $\sqrt{٣}$ ④ ١٨ $\sqrt{٣}$

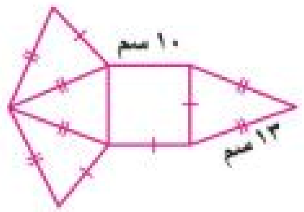


الحل

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ (مساحة القاعدة) × الارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ × $\left(\frac{١}{٢} × ٦ × ٦\right)$ × ٦ = ٣٦ سم^{٣}

٩ تصنع عبوات منتجات أحد المصانع من الورق المقوى على شبكة المجسم المقابلة. فإن مساحة الورق المقوى المستخدم لإنتاج ١٠٠٠ عبوة تساوى .... م^{٢}



① ٣٤٠ ② ٣٤ ③ ٣٤٠٠ ④ ٣٤٠٠٠٠

الشكل بعد طيه يعطى هرم رباعى منتظم ارتفاعه الجانبى

= $\sqrt{(١٣)^{٢} - (٥)^{٢}}$ = ١٢ سم

∴ مساحة العبوة الواحدة = $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ١٠ × ١٢ + (١٠)^{٢}

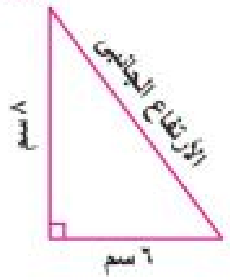
= ٢٤٠ + ١٠٠ = ٣٤٠ سم^{٢}

∴ مساحة ١٠٠٠ عبوة = ٣٤٠٠٠٠ سم^{٢}

= ٣٤ م^{٢}

١٠ المساحة الجانبية لهرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ١٢ سم وارتفاعه ٨ سم يساوى .... سم²

① ٣٦٠ ② ٩٦ ③ ١٤٤ ④ ٢٤٠



الحل

الارتفاع الجانبى = $\sqrt{(٨)^2 + (٦)^2}$ = ١٠ سم

، المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

= $\frac{١}{٢}$ × (٤ × ١٢) × ١٠ = ٢٤٠ سم²

١١ النسبة بين طول حرف الهرم الثلاثى المنتظم الوجوه : ارتفاعه = ...

① $\sqrt{٢}$: $\sqrt{٣}$ ② $\sqrt{٣}$: ٢ ③ $\sqrt{٦}$: ٢ ④ $\sqrt{٣}$: ٣

الحل

∵ العلاقة بين طول حرف الهرم المنتظم الوجوه (ل) وارتفاعه (ع) هى ٢ ل² = ٣ ع²

∴ $\frac{ل^2}{ع^2} = \frac{٣}{٢}$ ∴ $\frac{ل}{ع} = \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٦}}{٢}$

١٢ إذا كان مجموع أطوال أحرف هرم ثلاثى منتظم الوجوه يساوى ١٨ سم فإن مساحته الكلية = ... سم²

① ٦٫٧٥ $\sqrt{٢}$ ② ٦٫٧٥ $\sqrt{٣}$ ③ ١٣٫٥ $\sqrt{٢}$ ④ ٩ $\sqrt{٣}$

الحل

طول حرف الهرم الثلاثى = $\frac{١٨}{٦}$ = ٣ سم

∴ المساحة الكلية = ل² $\sqrt{٣}$ = ٩ $\sqrt{٣}$ سم²

١٣ إذا قطعنا هرم رباعى منتظم بمستوى يوازى قاعدته فإن المقطع الحادث يكون ....

① مثلث ② مربع ③ مستطيل ④ دائرة

أى مستوى يوازى القاعدة المربعة ويقطع الهرم يكون المقطع الحادث مربع أيضًا.

١٤ م أ ب ح هرم ثلاثى رأسه م على بعد ٤ $\sqrt{٥}$ سم من قاعدته أ ب ح حيث أ ب = ٧ سم، ب ح = ٨ سم، أ ح = ٩ سم فإن حجم الهرم = ... سم³

① ٤٠ ② ٨٠ ③ ٨٠ $\sqrt{٣}$ ④ ٨٠ $\sqrt{٥}$

الحل

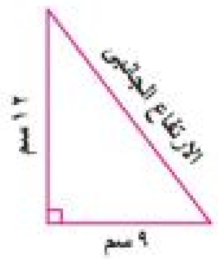
∴ محيط Δ أ ب ح = ٧ + ٨ + ٩ = ٢٤ سم   ∴ نصف المحيط = ١٢ سم

∴ مساحة المثلث أ ب ح = $\sqrt{١٢ (١٢ - ٧)(١٢ - ٨)(١٢ - ٩)}$ = ١٢ $\sqrt{٥}$ سم²

∴ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع = $\frac{١}{٣}$ × ١٢ $\sqrt{٥}$ × ٤ $\sqrt{٥}$ = ٨٠ سم³

١٥ هرم رباعى منتظم طول ضلعه قاعدته ١٨ سم فإذا كان حجمه ١٢٩٦ سم³ فإن مساحته الجانبية= .... سم³

① ٣٢٠ ② ٤٦٠ ③ ٥٤٠ ④ ٦٢٠



حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × ع

١٢٩٦ = $\frac{١}{٣}$ × (١٨)² × ع

∴ ع = ١٢ سم

∴ الارتفاع الجانبى (ل) = $\sqrt{٩^2 + ١٢^2}$ = ١٥ سم

∴ المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × ل

= $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ١٨ × ١٥ = ٥٤٠ سم²

١٦ إذا كان الارتفاع الجانبى لهرم ثلاثى منتظم الوجوه يساوى ٥ $\sqrt{٣}$ سم فإن مجموع مساحات أوجهة = ... سم²

① ١٠٠ $\sqrt{٣}$ ② ٢٥ $\sqrt{٣}$ ③ ٥٠ $\sqrt{٣}$ ④ ٧٥ $\sqrt{٣}$

طول ضلع المثلث = $\frac{٥\sqrt{٣}}{جا ٦٠^\circ}$ = ١٠ سم

∴ مساحة الوجه الواحد = $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ١٠ × جا ٦٠° = ٢٥ $\sqrt{٣}$

∴ مجموع مساحات أوجهه = ٤ × ٢٥ $\sqrt{٣}$ = ١٠٠ $\sqrt{٣}$ سم²

الدرس الثالث : المخروط

١ مخروط دائرى قائم طول نصف قطر قاعدته ٩ سم، وطول راسمه ١٥ سم فإن حجمه = ... π سم³

① ٣٢٤ ② ٢٩٧ ③ ٢١٦ ④ ٩٧٢

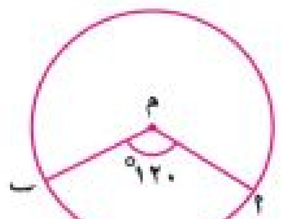
∵ ارتفاع المخروط = $\sqrt{(١٥)^2 - (٩)^2}$ = ١٢ سم

∴ حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ × π نق² ع

= $\frac{١}{٣}$ × π × (٩)² × ١٢ = ٣٢٤ π سم³

٢ الشكل المقابل يوضح قطاعين دائريان يمثلان شبكتى مخروطين

فإن $\frac{\text{المساحة الجانبية للمخروط الأصغر}}{\text{المساحة الجانبية للمخروط الأكبر}}$ = ...



① ١ : ٢ ② ١ : ٣ ③ ١ : ٤ ④ ١ : ٥

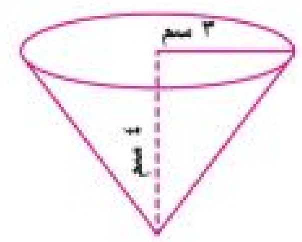
∵ ق (∠ أ م ب) = ١٢٠°   ∴ ق (∠ أ م ب) المنعكسة = ٢٤٠°

∴ مساحة القطاع الأصغر = $\frac{١}{٢}$ مساحة القطاع الأكبر

، ∵ $\frac{\text{المساحة الجانبية للمخروط الأصغر}}{\text{المساحة الجانبية للمخروط الأكبر}} = \frac{\text{مساحة القطاع الأصغر}}{\text{مساحة القطاع الأكبر}} = \frac{١}{٢}$

٣ في الشكل المقابل :

طول راسم المخروط = ... سم



(١) ٢ (٢) ٣ (٣) ٤ (٤) ٥

الحل

ل = $\sqrt{(٣)^2 + (٤)^2}$ = ٥ سم

٤ طول نصف قطر قاعدة مخروط دائرى قائم مساحته الكلية ٦١٦ π سم^2 وطول راسمه ٣٠ سم يساوى .... سم

(١) ١١ (٢) ١٢ (٣) ١٤ (٤) ١٦

∵ المساحة الكلية = π نق (ل + نق)

٦١٦ π = π نق (٣٠ + نق)

∴ نق^2 + ٣٠ نق − ٦١٦ = ٠

(نق + ٤٤) (نق − ١٤) = ٠

∴ نق = −٤٤ مرفوض أ، نق = ١٤

٥ مخروط دائرى قائم طول نصف قطر قاعدته ٦ سم وارتفاعه ١٠ سم

فإن حجمه = ...سم^3

(١) ٦٠ π (٢) ٤٨ π (٣) ١٢٠ π (٤) ٩٦ π

الحجم = $\frac{1}{3}$ π نق^2 ع

= $\frac{1}{3}$ π × (٦)^2 × ١٠

= ١٢٠ π سم^3

٦ طويت قطعة من الورق المقوى على شكل قطاع دائرى طول نصف قطر دائرته ٣٦ سم وقياس زاويته ٢١٠° لتصنع مخروطًا دائريًا قائمًا فإن ارتفاع المخروط = ... سم.

(١) ٢١ (٢) ٢٦ (٣) ٣ $\sqrt{١٩٣}$ (٤) ٣ $\sqrt{٩٥}$

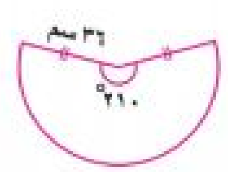
∵ طول قوس القطاع = نق × هـ^{ء} = ٣٦ × $\frac{٢١٠ \pi}{١٨٠}$

= ٤٢ π

∵ ٢ π نق = ٤٢ π ∴ نق = ٢١ سم

، ∵ طول راسم المخروط = ٣٦ سم

∴ ارتفاع المخروط = $\sqrt{(٣٦)^2 - (٢١)^2}$ = ٣ $\sqrt{٩٥}$ سم



٧ مخروط دائرى قائم مساحة قاعدته ٣٦ π سم^2 ، وطول راسمه ١٠ سم

فإن مساحته الكلية = ... سم^2

(١) ٢٤ π (٢) ٤٨ π (٣) ٩٦ π (٤) ١٩٢ π

∵ مساحة القاعدة = π نق^2

∴ ٣٦ π = π نق^2

∴ نق = ٦ سم.

∴ المساحة الكلية = π نق (نق + ل)

= π × ٦ (٦ + ١٠) = ٩٦ π سم^2

٨ مخروط دائرى قائم طول نصف قطر دائرته ٣ سم وارتفاعه ٤ سم

فإن مساحته الجانبية = ...

(١) ١٥ π سم^2 (٢) ١٥ π سم (٣) ١٢ π سم (٤) ١٢ π سم^2

∵ طول الراسم ل = $\sqrt{(٤)^2 + (٣)^2}$ = ٥ سم

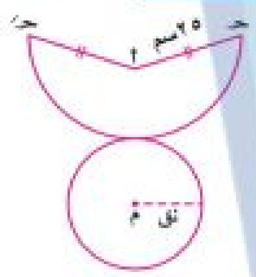
المساحة الجانبية = π نق ل

= π × ٣ × ٥ = ١٥ π سم^2

٩ باستخدام الشبكة في الشكل المقابل :

إذا كان طول القوس $\overset{\frown}{حَ حَ}$ = ٣٠ π سم

فإن حجم المجسم الناتج = ... سم^3



(١) ٦٠٠ π (٢) ٨٠٠ π (٣) ١٢٠٠ π (٤) ١٥٠٠ π

المجسم الناتج هو مخروط

∵ طول القوس $\overset{\frown}{حَ حَ}$ = ٣٠ π

∴ ٢ π نق = ٣٠ π

∴ نق = ١٥ سم

، ∵ طول الراسم = ٢٥ سم

∴ ارتفاع المخروط = $\sqrt{(٢٥)^2 - (١٥)^2}$ = ٢٠ سم

∴ حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ × π (١٥)^2 × ٢٠ = ١٥٠٠ π سم^3

١٠ مخروط دائرى قائم حجمه (ح) ، إذا زاد طول نصف قطر قاعدته بنسبة ٥٠ ٪ وزاد ارتفاعه بنسبة ٥٠ ٪ وكان حجمه بعد الزيادة (حَ) فإن : ....

(١) حَ = ١٥٠٪ ح (٢) حَ = ٢٢٥٪ ح (٣) حَ = ٣٣٧,٥٪ ح (٤) حَ = ٤٥٠٪ ح

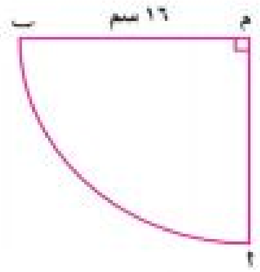
بعد الزيادة نقَ = $\frac{3}{2}$ نق ، عَ = $\frac{3}{2}$ ع

∴ حَ = $\frac{1}{3}$ π نقَ^{2} عَ = $\frac{1}{3}$ π ($\frac{3}{2}$ نق)^2 ($\frac{3}{2}$ ع)

= $\frac{1}{3}$ π نق^2 ع × $(\frac{3}{2})^3$ = ح × $\frac{27}{8}$

∴ حَ = ٣,٣٧٥ ح ∴ حَ = ٣٣٧,٥٪ ح

١١ إذا كان لدينا ربع دائرة نصف قطرها ١٦ سم فإن طول نصف قطر قاعدة المخروط الذى يمكن تكوينه من قوس ربع الدائرة = ... سم



(١) ١٦ (٢) ٨ (٣) ٤ (٤) ٢

طول قوس القطاع = نق × هـ = ١٦ × $\frac{\pi}{٢}$ = ٨ π

وبفرض طول نصف قطر قاعدة المخروط = نقَ

∴ ٢ π نقَ = ٨ π ∴ نقَ = ٤ سم

١٢ مخروط دائرى قائم مساحته الجانبية ٦٥ π سم^{٢} وطول راسمه ١٣ سم فإن حجمه = ... سم^{٣}.

(١) ٥٠ π (٢) ٧٥ π (٣) ١٠٠ π (٤) ١٢٥ π

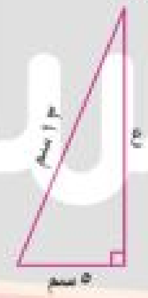
الحل

∵ المساحة الجانبية = ٦٥ π ∴ π نق ل = ٦٥ π

١٣ × نق = ٦٥ ∴ نق = ٥ سم

، ع = $\sqrt{(١٣)^{٢} - (٥)^{٢}}$ = ١٢ سم.

∴ الحجم = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع = $\frac{١}{٣}$ π (٥)^{٢} × ١٢ = ١٠٠ π سم^{٣}



١٣ المساحة الجانبية لمخروط دائرى قائم طول قطر قاعدته ١٢ سم وارتفاعه ٨ سم = ... سم^{٢}

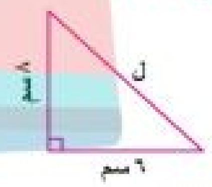
(١) ٦٠ π (٢) ٤٨ π (٣) ٩٦ π (٤) ١٩٢ π

الحل

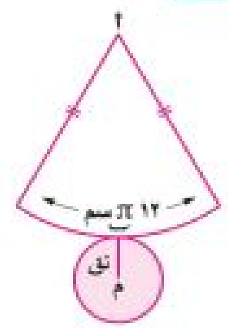
طول الراسم ل = $\sqrt{(٨)^{٢} + (٦)^{٢}}$ = ١٠ سم

المساحة الجانبية للمخروط = π نق ل = π × ٦ × ١٠

= ٦٠ π سم^{٢}



١٤ الشبكة فى الشكل المقابل نصف مجسم حجمه ٩٦ π سم^{٣} مساحته الكلية = ... سم^{٢}



(١) ٤٨ π (٢) ٧٢ π (٣) ٩٦ π (٤) ١١٢ π

٢ π نق = ١٢ π نق = ٦ سم

، ∵ الحجم = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع

∴ ٩٦ π = $\frac{١}{٣}$ π × ٣٦ × ع

∴ ع = ٨ سم ، ل = $\sqrt{(٦)^{٢} + (٨)^{٢}}$ = ١٠ سم

المساحة الكلية = π نق (ل + نق)

= π × ٦ (١٠ + ٦) = ٩٦ π سم^{٢}

١٥ مخروط دائرى قائم ، إذا نقص طول نصف قطر قاعدته بمقدار النصف وزاد ارتفاع المخروط إلى الضعف فإن ....

(١) حجم المخروط لا يتغير (٢) حجم المخروط يتضاعف

(٣) حجم المخروط يقل النصف (٤) حجم المخروط يقل الثلث

بفرض أن المخروط الأصلى نصف قطره = نق ، ارتفاعه ع وحجمه ح

∴ ح = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع

* عندما نقَ = $\frac{١}{٢}$ نق ، عَ = ٢ ع

∴ حَ = $\frac{١}{٣}$ π $(\frac{١}{٢}$ نق$)^{٢}$ × (٢ ع) = $\frac{١}{٦}$ π نق^{٢} ع

∴ حجم المخروط (حَ) يقل إلى النصف

١٦ النسبة بين حجم هرم رباعى منتظم وحجم أكبر مخروط يمكن وضعه بداخل الهرم تساوى ....

(١) ٢ : π (٢) ٤ : π (٣) ٦ : π (٤) ٨ : π

الحل

نفرض أن طول قاعدة الهرم المربعة = ٢ ل سم

∴ طول نصف قطر قاعدة المخروط = ل سم

ويفرض أن ارتفاع الهرم = ارتفاع المخروط = ع

∴ $\frac{\text{حجم الهرم}}{\text{حجم أكبر مخروط بداخل الهرم}} = \frac{\frac{١}{٣} \times (٢ل)^{٢} \times ع}{\frac{١}{٣} \times \pi (ل)^{٢} \times ع}$

$= \frac{٤ ل^{٢}}{\pi ل^{٢}} = \frac{٤}{\pi}$

الدرس الرابع : الدائرة

١ الدائرة التى معادلتها : (س + ٢)^{٢} + ص^{٢} + ٢ ص = ٠ مركزها هو النقطة ....

(١) (−٢ ، ١) (٢) (−٢ ، −١) (٣) (٢ ، −١) (٤) (١ ، −٢)

معادلة الدائرة

(س + ٢)^{٢} + ص^{٢} + ٢ ص + ١ = ١

أى أن : (س + ٢)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ١

∴ المركز = (−٢ ، −١)

٢ محيط الدائرة التى معادلتها (س − ٣)^٢ + ص^٢ + ٤ ص = ٤٥ يساوى ....

① ٧ π ② ١٤ π ③ ٢١ π ④ ٢٨ π

من معادلة الدائرة

س^٢ − ٦ س + ٩ + ص^٢ + ٤ ص − ٤٥ = ٠

أى أن : س^٢ + ص^٢ − ٦ س + ٤ ص − ٣٦ = ٠

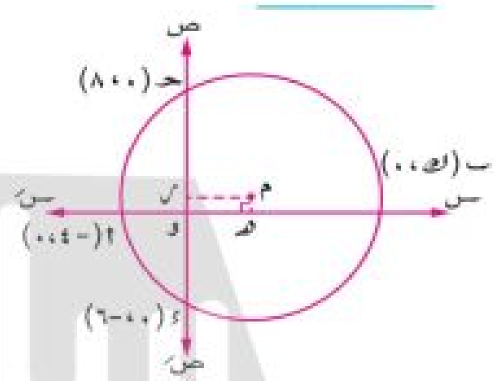
∴ مركزها (٣ ، −٢)

∴ نق = $\sqrt{٩ + ٤ - (-٣٦)}$ = ٧ وحدات طول.

∴ محيطها = ٢ × π × ٧ = ١٤ π وحدات طول.

٣ فى الشكل المقابل :

معادلة الدائرة م هى ....



① (س − ٤)^٢ + (ص − ١)^٢ = ٦٥ ② (س + ٤)^٢ + (ص + ١)^٢ = ٦٥

③ (س − ٤)^٢ + (ص − ١)^٢ = $\sqrt{٦٥}$ ④ (س − ٤)^٢ + (ص − ١)^٢ = ٣٢,٥

∵ و أ × و ب = و حـ × و ء

∴ ٤ × و ب = ٨ × ٦ ∴ و ب = ١٢

∴ ب = (١٢ ، ٠) ∴ هـ = (٤ ، ٠) ، ى = (٠ ، ١)

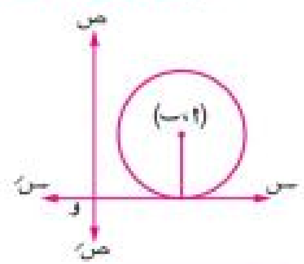
∴ م = (٤ ، ١) ∴ نق = م ب = $\sqrt{(١٢ - ٤)^٢ + (٠ - ١)^٢}$ = $\sqrt{٦٥}$

∴ معادلة الدائرة هى : (س − ٤)^٢ + (ص − ١)^٢ = ٦٥

٤ الدائرة التى معادلتها (س − أ)^٢ + (ص − ب)^٢ = ب^٢ حيث : (أ ≠ ب) ....

① تمس محور السينات ② تمس محور الصادات

③ تمس محورى الإحداثيات ④ لا تمس أى محورى الإحداثيات



∵ الدائرة مركزها (أ ، ب)

، طول نصف قطرها = |ب|

، أ ≠ ب

∴ الدائرة تمس محور السينات

٥ الصورة العامة لمعادلة الدائرة التى مركزها (٥ ، ٤) وتمس المستقيم س = ٢ هى ....

① س^٢ + ص^٢ − ١٠ س − ٨ ص − ٣٢ = ٠ ② س^٢ + ص^٢ − ١٠ س − ٨ ص + ٣٢ = ٠

③ س^٢ + ص^٢ − ٥ س − ٤ ص + ٣٢ = ٠ ④ س^٢ + ص^٢ + ١٠ س + ٨ ص + ٣٢ = ٠

∵ الدائرة تمس المستقيم س = ٢

∴ بعد المركز عن المستقيم = نق ∴ نق = ٣ وحدات

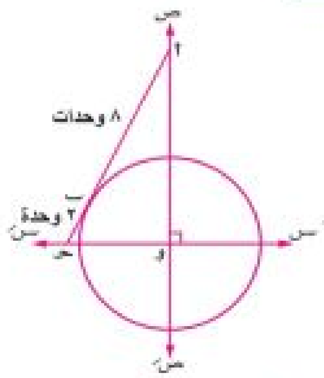
معادلة الدائرة (س − ٥)^٢ + (ص − ٤)^٢ = ٩

س^٢ − ١٠ س + ٢٥ + ص^٢ − ٨ ص + ١٦ − ٩ = ٠

الصورة العامة : س^٢ + ص^٢ − ١٠ س − ٨ ص + ٣٢ = ٠

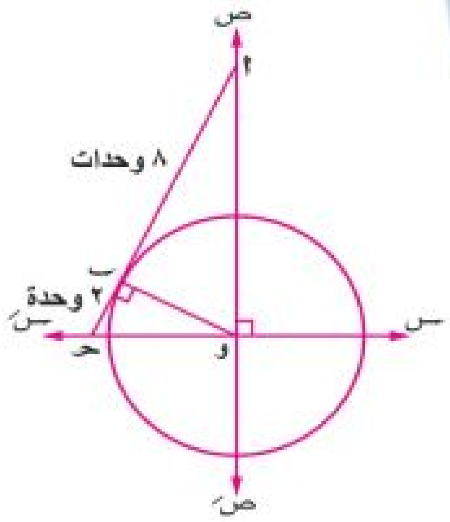
٦ فى الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{\text{أحـ}}$ يمس الدائرة (و) عند ب فإن معادلة الدائرة هى ....



① س^٢ + ص^٢ = ٦٤ ② س^٢ + ص^٢ = ١٦ ③ س^٢ + ص^٢ = ٤ ④ س^٢ + ص^٢ = ١٠٠

الحل



∵ $\overline{\text{أحـ}}$ يمس الدائرة عند ب

∴ $\overline{\text{و ب}} \perp \overline{\text{أحـ}}$ ، ∵ $\overline{\text{أو}} \perp \overline{\text{و حـ}}$

∴ (و ب)^٢ = ٢ × ٨ = ١٦

∴ و ب = ٤ وحدات

∴ نصف قطر الدائرة = ٤ وحدات

، ∵ مركز الدائرة هو (٠ ، ٠)

∴ معادلة الدائرة هى س^٢ + ص^٢ = ١٦

٧ إذا كان المستقيم ل : ٣ س + ٤ ص + ٩ = ٠ يمس الدائرة

س^٢ + ص^٢ − ٢٢ س − ٤ ص + حـ = ٠ فإن : حـ = ...

① ١٥ ② −٢٠ ③ −٢٥ ④ ٢٥

∵ معادلة الدائرة هى : س^٢ + ص^٢ − ٢٢ س − ٤ ص + حـ = ٠

∴ مركز الدائرة هو (١١ ، ٢)

، ∵ ل يمس الدائرة

∴ نق = $\frac{|٣ \times ١١ + ٤ \times ٢ + ٩|}{\sqrt{(٣)^٢ + (٤)^٢}}$ = ١٠ سم

∴ حـ = (١١)^٢ + (٢)^٢ − (١٠)^٢

∴ حـ = ٢٥

٨ محيط الدائرة التى معادلتها : س^{٢} + ص^{٢} = ٨ يساوى .... سم.

① ٨ π ② ٦٤ π ③ ٣ $\sqrt{٣}$ π ④ ٤ $\sqrt{٢}$ π

نصف قطر الدائرة = $\sqrt{٨}$ = ٢ $\sqrt{٢}$ سم

∴ محيط الدائرة = ٢ π نق = ٢ π × ٢ $\sqrt{٢}$

= ٤ $\sqrt{٢}$ π

٩ الصورة العامة لمعادلة الدائرة التى $\overline{أب}$ قطر فيها حيث :

أ = (٣ ، −٧) ، ب = (٥ ، ١) هى ....

① س^{٢} + ص^{٢} − ٨ س + ٦ ص + ٨ = ٠ ② س^{٢} + ص^{٢} + ٨ س − ٦ ص + ٨ = ٠

③ س^{٢} + ص^{٢} − ٤ س + ٣ ص + ٨ = ٠ ④ س^{٢} + ص^{٢} + ٨ س − ٦ ص − ٨ = ٠

مركز الدائرة = منتصف $\overline{أب}$

= $\left(\frac{٣ + ٥}{٢} ، \frac{−٧ + ١}{٢}\right)$ = (٤ ، −٣)

نصف قطر الدائرة = $\frac{١}{٢}$ (أب) = $\frac{١}{٢}$ $\sqrt{(٥ − ٣)^{٢} + (١ + ٧)^{٢}}$

= $\frac{١}{٢}$ × ٢ $\sqrt{١٧}$ = $\sqrt{١٧}$ وحدة طول.

∴ معادلة الدائرة هى :

(س − ٤)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ١٧

∴ س^{٢} − ٨ س + ١٦ + ص^{٢} + ٦ ص + ٩ − ١٧ = ٠

∴ س^{٢} + ص^{٢} − ٨ س + ٦ ص + ٨ = ٠

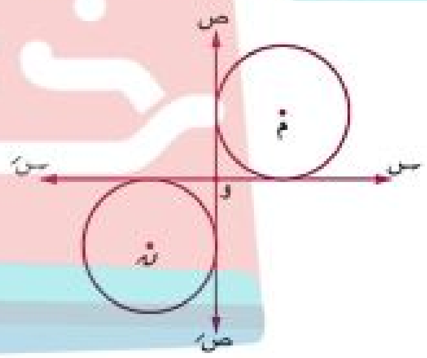
١٠ فى الشكل المقابل :

م ، ن دائرتان متطابقتان

فإذا كانت معادلة الدائرة م هى

س^{٢} + ص^{٢} − ٤ س − ٤ ص + ٤ = ٠

فإن معادلة الدائرة ن هى ....



① س^{٢} + ص^{٢} = ٤ ② س^{٢} + ص^{٢} + ٤ س + ٤ ص = ٠

③ س^{٢} + ص^{٢} + ٤ س + ٤ ص + ٤ = ٠ ④ س^{٢} + ص^{٢} + ٤ س − ٤ = ٠

∵ مركز الدائرة م تساوى (٢ ، ٢) ، نق = $\sqrt{٤ + ٤ − ٤}$ = ٢

∴ مركز الدائرة ن تساوى (−٢ ، −٢) ، نق = ٢

∴ معادلة الدائرة ن هى

(س + ٢)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ٤

أى أن : س^{٢} + ص^{٢} + ٤ س + ٤ ص + ٤ = ٠

١١ العلاقة بين المستقيم ص = س − ٧ والدائرة التى معادلتها (س + ٢)^{٢} + ص^{٢} = ٣٢

هى ....

① مماس ② قاطع ③ خارج عن الدائرة ④ يمر بمركز الدائرة

∵ معادلة الدائرة : (س + ٢)^{٢} + ص^{٢} = ٣٢

∴ مركز الدائرة (−٢ ، ٠) ، نق = $\sqrt{٣٢}$ = ٤ $\sqrt{٢}$

، ∵ طول العمود المرسوم من مركز الدائرة للمستقيم (س − ص − ٧ = ٠)

= $\frac{|١ (−٢) − ١ (٠) − ٧|}{\sqrt{(١)^{٢} + (−١)^{٢}}}$ = ٤,٥ $\sqrt{٢}$

∵ طول العمود المرسوم من مركز الدائرة للمستقيم > نق

∴ المستقيم يقع خارج الدائرة.

١٢ إذا كان المستقيم ص = م س يمس الدائرة : (س − ٢)^{٢} + (ص − ٦)^{٢} = ٤

فإن : م = ...

① $\frac{٢}{٣}$ ② $\frac{١}{٣}$ ③ $\frac{٤}{٣}$ ④ − $\frac{٤}{٣}$

∵ مركز الدائرة = (٢ ، ٦) ، نق = ٢

∴ نق = طول العمود المرسوم من (٢ ، ٦) إلى المماس ص − م س = ٠

∴ ٢ = $\frac{|٦ − ٢ م|}{\sqrt{١ + م^{٢}}}$ ∴ |٦ − ٢ م| = ٢ $\sqrt{١ + م^{٢}}$

٣٦ − ٢٤ م + ٤ م^{٢} = ٤ (١ + م^{٢})

٢٤ م = ٣٢ ∴ م = $\frac{٣٢}{٢٤}$ = $\frac{٤}{٣}$

١٣ إذا كانت : س^{٢} + (طا هـ) ص^{٢} + ٦ س − ٨ ص = ٠ تمثل

معادلة دائرة فإن ق (د هـ) = ... °

حيث : ن ∈ ص

① $\frac{٣π}{٤}$ + ن π ② − $\frac{π}{٤}$ + ن π ③ − $\frac{π}{٤}$ ④ $\frac{٣π}{٤}$

∵ المعادلة تمثل دائرة

∴ معامل س^{٢} = معامل ص^{٢}

∴ طا هـ = ١

∴ ق (د هـ) = $\frac{π}{٤}$ + ن π

١٤ الصورة العامة لمعادلة الدائرة التى مركزها (−٢ ، ٣) ومساحة سطحها ١٦ π سم^{٢}

هى ....

① س^{٢} + ص^{٢} − ٤ س + ٦ ص − ٣ = ٠ ② س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س − ٣ ص − ٣ = ٠

③ س^{٢} + ص^{٢} − ٤ س − ٦ ص − ٣ = ٠ ④ س^{٢} + ص^{٢} + ٤ س − ٦ ص − ٩ = ٠

مساحة سطح الدائرة = ١٦ π

∴ π نق^{٢} = ١٦ π ∴ نق^{٢} = ١٦

∴ نق = ٤ سم

∴ معادلة الدائرة (س + ٢)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ٤^{٢}

∴ الصورة العامة :

سـ^{٢} + ٤ سـ + ٤ + ص^{٢} − ٦ ص + ٩ = ١٦

∴ سـ^{٢} + ص^{٢} + ٤ سـ − ٦ ص − ٣ = ٠ .

١٥ محيط الدائرة التى معادلتها (سـ + ٢)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ٢٥ يساوى .... وحدة طول.

① ٢ π ② ٣ π ③ ٥ π ④ ١٠ π

∵ نق = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدة طول

∴ محيط الدائرة = ٢ π نق = ٢ π × ٥

= ١٠ π وحدة طول.

١٦ الصورة العامة لمعادلة الدائرة التى مركزها النقطة (−١ ، ٥) وتمر بالنقطة (٣ ، ٢) هى ....

① سـ^{٢} + ص^{٢} − ٢ سـ + ١٠ ص + ١ = ٠ ② سـ^{٢} + ص^{٢} + ٢ سـ − ١٠ ص + ١ = ٠

③ سـ^{٢} + ص^{٢} + ٢ سـ − ١٠ ص + ٢٥ = ٠ ④ سـ^{٢} + ص^{٢} + سـ − ٥ ص + ١ = ٠

نصف قطر الدائرة = $\sqrt{(٣ − (−١))^{٢} + (٢ − ٥)^{٢}}$

= $\sqrt{١٦ + ٩}$ = ٥ وحدة طول.

∴ الصورة القياسية للمعادلة (سـ + ١)^{٢} + (ص − ٥)^{٢} = ٢٥

منها سـ^{٢} + ٢ سـ + ١ + ص^{٢} − ١٠ ص + ٢٥ = ٢٥

الصورة العامة : سـ^{٢} + ص^{٢} + ٢ سـ − ١٠ ص + ١ = ٠ .

١٧ إذا مست أى دائرة محورى الاحداثيات وكانت مرسومة في الربع الأول فإن مركزها يقع على المستقيم ....

① ص = سـ + ١ ② ص = سـ − ١ ③ ص = سـ ④ ص = − سـ

أى دائرة تمس محورى الإحداثيات فى الربع الأول يكون مركزها (نق ، نق)

أى الإحداثى السينى = الإحداثى الصادى

∴ المركز يقع على المستقيم ص = سـ

١٨ معادلة دائرة تمر بنقطة الأصل هى :

أ سـ^{٢} + ٢ ص^{٢} + ٤ سـ + (ب + أ) سـ ص − ٨ ص + حـ − ٢ = ٠ .

فإن : أ − ب + ٢ حـ = ...

① ٢ ② ٤ ③ −٢ ④ ٨

∵ معادلة الدائرة تكون خالية من الحد سـ ص

∴ أ + ب = ٠ (١)

فى معادلة الدائرة معامل سـ^{٢} = معامل ص^{٢}

أ = ٢ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ ب = −٢

(٠ ، ٠) تقع على الدائرة ∴ تحققها

∴ حـ − ٢ = ٠ ∴ حـ = ٢

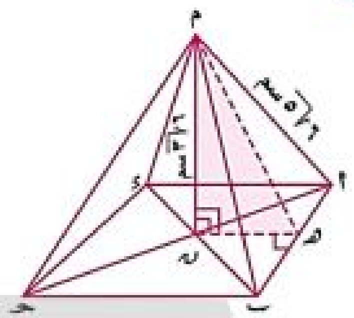
∴ أ − ب + ٢ حـ = ٢ + ٢ + ٤ = ٨

أهم أسئلة المقالى على الهندسة الفراغية

١ م أ ب حـ ء هرم رباعى قائم قاعدته على شكل مربع أ ب حـ ء فإذا كان طول حرفه الجانبى $٦\sqrt{٥}$ سم وارتفاع الهرم = $٦\sqrt{٣}$ سم

أوجد : (١) المساحة الكلية للهرم. (٢) حجم الهرم.

الحل



فى Δ أ ن م :

∴ $أن = \sqrt{(٦\sqrt{٥})^٢ - (٦\sqrt{٣})^٢} = ٦\sqrt{٢}$ سم

∴ طول ضلع قاعدة الهرم = $٦\sqrt{٢} \times \sqrt{٢} = ١٢$ سم

فى Δ م ن هـ :

∴ $مهـ = \sqrt{(٦\sqrt{٣})^٢ + (٦)^٢} = ١٢$ سم

∴ المساحة الكلية للهرم = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

$= \frac{١}{٢}(٤ \times ١٢) \times ١٢ + (١٢)^٢ = ٤٣٢$ سم²

، حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × ع

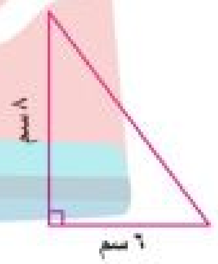
$= \frac{١}{٣} \times (١٢)^٢ \times ٦\sqrt{٣}$

$= ٢٨٨\sqrt{٣}$ سم³

٢ هرم رباعى منتظم مساحة قاعدته ١٤٤ سم² ، حجمه ٣٨٤ سم³

احسب : (١) ارتفاعه. (٢) ارتفاعه الجانبى. (٣) مساحته الجانبية.

الحل



(١) حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × ع

$٣٨٤ = \frac{١}{٣} \times ١٤٤ \times ع$

ع = ٨ سم

(٢) ∵ مساحة القاعدة = ١٤٤

∴ ل² = ١٤٤

∴ ل = ١٢ سم

∴ طول ارتفاع الجانبى = $\sqrt{٨^٢ + ٦^٢} = ١٠$ سم

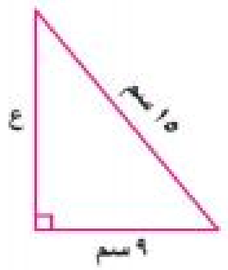
(٣) المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ (محيط القاعدة) × الارتفاع الجانبى

$= \frac{١}{٢} \times ٤ \times ١٢ \times ١٠ = ٢٤٠$ سم²

٣ مخروط قائم محيط قاعدته ١٨ π سم ، وطول راسمه ١٥ سم

أوجد بدلالة π مساحة سطحه الجانبية وحجمه.

الحل



∵ محيط القاعدة = ٢ π نق

∴ ١٨ π = ٢ π نق ∴ نق = ٩ سم

∴ مساحة سطح المخروط الجانبية = π نق ل = π × ٩ × ١٥

= ١٣٥ π سم²

∴ ارتفاعه = $\sqrt{١٥^٢ - ٩^٢} = ١٢$

∴ حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق² ع

$= \frac{١}{٣} \times \pi \times ٩^٢ \times ١٢ = ٣٢٤\pi$ سم³

٤ مخروط دائرى قائم طول راسمه ١٧ سم وارتفاعه ١٥ سم ،

أوجد مساحته الكلية ثم أوجد حجمه.

الحل

∵ طول الراسم = ١٧ سم ، ارتفاعه = ١٥ سم

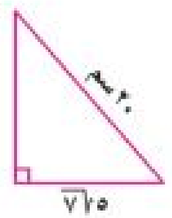
∴ طول نصف قطر قاعدته = $\sqrt{١٧^٢ - ١٥^٢} = ٨$

∴ مساحته الكلية = π نق (ل + نق) = π × ٨ (١٧ + ٨) = ٢٠٠ π سم²

حجمه = $\frac{١}{٣}$ π نق² ع = $\frac{١}{٣} \pi \times ٨^٢ \times ١٥ = ٣٢٠\pi$ سم³

٥ هرم رباعى منتظم مساحة قاعدته ٧٠٠ سم² وارتفاعه الجانبى ٢٠ سم. أوجد حجمه.

الحل



مساحة القاعدة = ٧٠٠ سم²

∴ طول ضلع القاعدة = $١٠\sqrt{٧}$ سم

∴ نصف طول القاعدة = $٥\sqrt{٧}$ سم

∴ ارتفاع الهرم = $\sqrt{(٢٠)^٢ - (٥\sqrt{٧})^٢} = ١٥$ سم

∴ حجم الهرم = $\frac{١}{٣} \times ٧٠٠ \times ١٥ = ٣٥٠٠$ سم³.

٦ هرم رباعى منتظم ارتفاعه ٩ سم وحجمه ٣٠٠ سم³

احسب طول ضلع قاعدته ومساحته الجانبية.

الحل

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

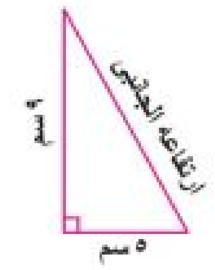
$٣٠٠ = \frac{١}{٣} \times ل^٢ \times ٩$ ∴ $ل^٢ = ١٠٠$ ∴ ل = ١٠ سم

∴ ارتفاعه الجانبى = $\sqrt{٥^٢ + ٩^٢} = \sqrt{١٠٦}$

∴ مساحته الجانبية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

$= \frac{١}{٢} \times ٤ \times ١٠ \times \sqrt{١٠٦} = ٢٠\sqrt{١٠٦}$

$= ٢٠٥{,}٩$ $سم^٢$



٧ أثبت أن الدائرتين :

$س^٢ + ص^٢ + ٦س - ٢ص + ٦ = ٠$ ، $(س - ١)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ٩$

متماستان من الخارج.

الحل

الدائرة الأولى : مركزها $م_١ = (-٣ ، ١)$ ، نصف قطرها $نق_١$

$نق_١ = \sqrt{٩ + ١ - ٦} = ٢$ وحدة طول

الدائرة الثانية : $م_٢ = (١ ، ٤)$

$نق_٢ = \sqrt{٩} = ٣$ وحدة طول

$م_١م_٢ = \sqrt{(-٣ - ١)^٢ + (١ - ٤)^٢} = ٥$ وحدات طول.

∴ $م_١م_٢ = نق_١ + نق_٢ = ٥$ وحدة طول

∴ الدائرتان متماستان من الخارج.

٨ أيهما أكبر حجمًا ؟ مخروط دائرى قائم طول نصف قطر قاعدته ٧ سم وطول راسمه ٢٥ سم ، أم هرم رباعى منتظم ارتفاعه ٤٠ سم ومحيط قاعدته ٤٨ سم.

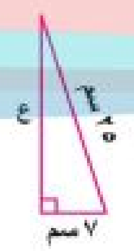
الحل

المخروط :

ارتفاعه = $\sqrt{٢٥^٢ - ٧^٢} = ٢٤$ سم

∴ حجم المخروط = $\frac{١}{٣} \pi (٧)^٢ \times ٢٤ = ٣٩٢\pi$ $سم^٣$

$= ١٢٣١{,}٥$ $سم^٣$



الهرم : محيط القاعدة = ٤٨ ∴ ٤ ل = ٤٨

∴ ل = ١٢ سم

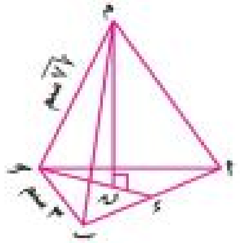
∴ الحجم = $\frac{١}{٣} ل^٢ ع = \frac{١}{٣} \times (١٢)^٢ \times ٤٠ = ١٩٢٠$ $سم^٣$

∴ حجم الهرم > حجم المخروط

٩ م أ ب حـ هرم ثلاثى منتظم قاعدته أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٣ سم فإذا كان طول حرفه الجانبى = $\sqrt{٧}$ سم

فأوجد ارتفاع الهرم.

الحل



∆ أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع

∴ حـ ء = $\sqrt{٣^٢ - (١{,}٥)^٢} = \frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$

∴ حـ ن = $\frac{٢}{٣} \times \frac{٣}{٢}\sqrt{٣} = \sqrt{٣}$

∆ م حـ ن

م ن = $\sqrt{(\sqrt{٧})^٢ - (\sqrt{٣})^٢} = ٢$ سم

∴ ارتفاع الهرم = ٢ سم

١٠ مخروط دائرى قائم طول راسمه ٢٥ سم ومحيط قاعدته ١٤ π

أوجد حجم المخروط ومساحته الجانبية.

الحل

∵ محيط القاعدة = ١٤ π

∴ ٢ π نق = ١٤ π ∴ نق = ٧ سم

∴ ارتفاع المخروط = $\sqrt{(٢٥)^٢ - ٧^٢} = ٢٤$ سم

∴ حجم المخروط = $\frac{١}{٣} \times \pi$ $نق^٢ \times ع$

$= \frac{١}{٣} \times \pi \times ٧^٢ \times ٢٤$

$= ٣٩٢\pi$ $سم^٣$

المساحة الجانبية = π نق ل = π × ٧ × ٢٥

$= ١٧٥\pi$ $سم^٢$

١١ هرم رباعى منتظم حجمه ٤٠٠ $سم^٣$ ، والنسبة بين طول ضلع قاعدته : ارتفاعه = ٥ : ٦

أوجد مساحته الجانبية.

الحل

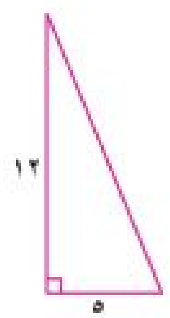
بفرض أن طول ضلع القاعدة = ٥ م ، ارتفاعه = ٦ م

∴ حجم الهرم = $\frac{١}{٣} (٥م)^٢ \times ٦م = ٥٠م^٣ = ٤٠٠$

∴ $م^٣ = \frac{٤٠٠}{٥٠} = ٨$ منها م = ٢ سم

∴ طول ضلع قاعدته = ٥ × ٢ = ١٠ سم

، ارتفاعه = ٦ × ٢ = ١٢ سم



∴ ارتفاعه الجانبى = $\sqrt{١٢^٢ + ٥^٢} = ١٣$ سم

∴ المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢} \times (٤ \times ١٠) \times ١٣ = ٢٦٠$ $سم^٢$

١١ خزان مياه على شكل مخروط قائم ، حجمه ١٢ π م^{٣} ، وارتفاعه ٤ م
أوجد طول نصف قطر قاعدته ومساحته الكلية .

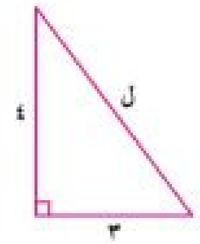
الحل

∵ حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع

١٢ π = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} × ٤

∴ نق^{٢} = ٩

∴ نق = ٣ سم



طول الراسم = ل

= $\sqrt{٣^{٢} + ٤^{٢}}$ = ٥ سم

∴ مساحة المخروط الكلية = π نق (نق + ل)

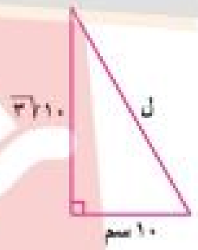
= π × ٣ (٣ + ٥) = ٢٤ π سم^{٢}

١٢ هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ٢٠ سم وارتفاعه ١٠ $\sqrt{٣}$ سم
أوجد المساحة الجانبية للهرم وحجمه.

الحل

الارتفاع الجانبى للهرم = $\sqrt{١٠^{٢} + (١٠\sqrt{٣})^{٢}}$

ل = ٢٠ سم



∴ المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

= $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٢٠ × ٢٠

= ٨٠٠ سم^{٢}

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × ع

= $\frac{١}{٣}$ × (٢٠)^{٢} × ١٠ $\sqrt{٣}$

= $\frac{٤٠٠٠}{٣}$ $\sqrt{٣}$ سم^{٢}

١٣ أوجد معادلة الدائرة التى طول نصف قطرها ٥ وحدات وتمس محور الصادات عند النقطة (٠ ، ٣)

الحل

بفرض أن مركز الدائرة (أ ، ب)

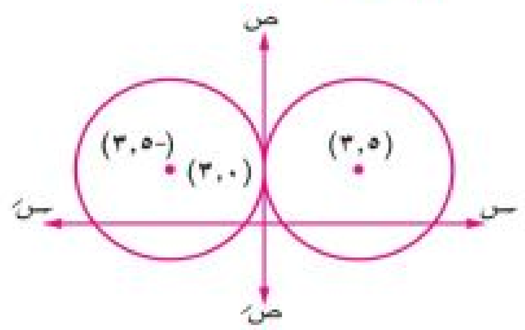
∵ |أ| = ٥ ∴ أ = ± ٥

∵ نقطة التماس (٠ ، ٣) ∴ ب = ٣

∴ معادلة الدائرة هى :

(س − ٥)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ٢٥

أو (س + ٥)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ٢٥



تمت بحمد الله ;