« مراجعة هندسة فراغية »

* البعد بين نقطتين في الفراغ :-

$$\text{أب} = \sqrt{(\text{س}_2 - \text{س}_1)^2 + (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)^2 + (\text{ع}_2 - \text{ع}_1)^2}$$

* لإثبات النقط أ، ب، حـ على استقامة واحدة :-
نوجد أب ، ب حـ ، أ حـ
إذا كان مجموع أصغر بعدين = البعد الأكبر فإن أ، ب، حـ على استقامة واحدة

* لمعرفة نوع المثلث بالنسبة للزوايا نوجد أطوال أضلاعه الثلاثة فإذا كان :-
1) مربع الضلع الأكبر = مجموع مربعي الضلعين الآخرين ← △ يكون قائم الزاوية
2) // // // > // // // ← △ يكون منفرج الزاوية
3) // // // < // // // ← △ يكون حاد الزوايا

* إحداثيات المنتصف (م) :-

$$\text{م} = \left(\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{2} ، \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{2} ، \frac{\text{ع}_1 + \text{ع}_2}{2}\right)$$

* معادلة الكرة في الفراغ :-
الصورة القياسية ← $(\text{س} - \text{ل})^2 + (\text{ص} - \text{ك})^2 + (\text{ع} - \text{ن})^2 = (\text{نق})^2$
الصورة العامة ← $\text{س}^2 + \text{ص}^2 + \text{ع}^2 + 2\text{ل س} + 2\text{ك ص} + 2\text{ن ع} + \text{د} = \text{صفر}$
← $\text{م} = (-\text{ل} ، -\text{ك} ، -\text{ن})$ ، $\text{نق} = \sqrt{\text{ل}^2 + \text{ك}^2 + \text{ن}^2 - \text{د}}$

* ملاحظات هامة
1) م = (أ ، ب ، حـ) ← تمس المستوى ص ع ← نق = |أ|
← // // س ع ← نق = |ب|
← // // س ص ← نق = |حـ|
2) الكرة التي تمس مستويات الإحداثيات الموجبة وطول نصف قطرها (نق) يكون مركزها (م) = (نق ، نق ، نق)

* $\|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{أ_س^2 + أ_ص^2 + أ_ع^2}$
* $\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}\| \leq \|\overrightarrow{أ}\| + \|\overrightarrow{ب}\|$

* $\|\overrightarrow{أ}\| = \|ك\,\overrightarrow{ب}\| \longleftarrow \|\overrightarrow{أ}\| = |ك|\,\|\overrightarrow{ب}\|$

* $\overrightarrow{ى}_{أ} = جتا\,\theta = \frac{المتجه}{معياره} = \frac{\overrightarrow{أ}}{\|\overrightarrow{أ}\|}$

* $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$
* $\overrightarrow{هء} = \overrightarrow{ء} - \overrightarrow{ب}$

* $جتا^2\theta_س + جتا^2\theta_ص + جتا^2\theta_ع = 1$

* $جتا\,2\theta = جتا^2\theta - جا^2\theta$
$= 2\,جتا^2\theta - 1$
$= 1 - 2\,جا^2\theta$

* $\overrightarrow{أ} \odot \overrightarrow{ب} = \|\overrightarrow{أ}\|\,\|\overrightarrow{ب}\|\,جتا\,هـ$ «الضرب القياسي»

* ملاحظات هامة :-
1. $\overrightarrow{أ} \odot \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{ب} \odot \overrightarrow{أ}$
2. $\overrightarrow{أ} \odot \overrightarrow{صفر} = صفر$
3. $\overrightarrow{أ} \odot \overrightarrow{أ} = \|\overrightarrow{أ}\|^2$
4. $م(\overrightarrow{أ} \odot \overrightarrow{ب}) = م\overrightarrow{أ} \odot \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{أ} \odot م\overrightarrow{ب}$
5. $(\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}) \odot \overrightarrow{ج} = \overrightarrow{أ} \odot \overrightarrow{ج} + \overrightarrow{ب} \odot \overrightarrow{ج}$
6. $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب} \longleftarrow \overrightarrow{أ} \odot \overrightarrow{ب} = صفر$
7. $\overrightarrow{س} \odot \overrightarrow{س} = \overrightarrow{ص} \odot \overrightarrow{ص} = \overrightarrow{ع} \odot \overrightarrow{ع} = 1$
8. $\overrightarrow{س} \odot \overrightarrow{ص} = \overrightarrow{ص} \odot \overrightarrow{ع} = \overrightarrow{ع} \odot \overrightarrow{س} = صفر$
9. ناتج الضرب القياسي كمية قياسية [+ حادة ، − منفرجة ، صفر قائمة]

* المسقط الجبري (المركبة الجبرية) لمتجه في اتجاه آخر :-
أ ⊙ ب = ||أ|| ||ب|| جتا هـ

* المسقط الجبري لمتجه أ في اتجاه المتجه ب :-
(أ ⊙ ب) / ||ب|| = ||أ|| جتا هـ

* المركبة الاتجاهية للمتجه أ في اتجاه ب :-
(أ ⊙ ب) / ||ب|| × ب / ||ب|| = ((أ ⊙ ب) / ||ب||²) × ب

* شغ = ق × ف
شغل = قوة × إزاحة
جول = نيوتن . م
إرج = داين . سم

* أ × ب = (||أ|| ||ب|| جا هـ) ى «الضرب الاتجاهي»

* أ × ب = - ب × أ

* جا هـ = ||أ × ب|| / (||أ|| ||ب||)

* شروط توازي متجهين أ ، ب :-
١) أ = ك ب
٢) أ × ب = و
٣) أس / بس = أص / بص = أع / بع

* أ ب ج على استقامة واحدة ← أب × ب ج = و
أب // ب ج

* $م_\Delta = \frac{1}{2} \left(\| \overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} \| \right)$

* $\overrightarrow{س} \times \overrightarrow{س} = \overrightarrow{ص} \times \overrightarrow{ص} = \overrightarrow{ع} \times \overrightarrow{ع} = \overrightarrow{صفر}$

* $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ أ_1 & أ_2 & أ_3 \\ ب_1 & ب_2 & ب_3 \end{vmatrix}$

* $\text{جتا}\,\theta = \frac{|\overrightarrow{هـ_1} \cdot \overrightarrow{هـ_2}|}{\|\overrightarrow{هـ_1}\| \, \|\overrightarrow{هـ_2}\|} = |ل_1 ل_2 + م_1 م_2 + ن_1 ن_2|$

* $\overrightarrow{هـ} = (أ ، ب ، جـ)$

$\overrightarrow{هـ} = ك (ل ، م ، ن)$

$(أ ، ب ، جـ) = ك (ل ، م ، ن)$

* $ل^2 + م^2 + ن^2 = 1$

* معادلة المستقيم المار بنقطة ومتجه اتجاهه معلوم :-

[1] الصورة المتجهة ← $\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{أ} + ك \, \overrightarrow{هـ}$

[2] المعادلات البارامترية

← $س = س_1 + ك \, أ$

← $ص = ص_1 + ك \, ب$

← $ع = ع_1 + ك \, جـ$

[3] الصورة العامة للمعادلات الإحداثية ← $\frac{س - س_1}{أ} = \frac{ص - ص_1}{ب} = \frac{ع - ع_1}{جـ}$

* $\overrightarrow{أ} = (س_1 ، ص_1 ، ع_1)$ ، $\overrightarrow{ب} = (س_2 ، ص_2 ، ع_2)$

$\overrightarrow{هـ} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = (س_2 - س_1 ، ص_2 - ص_1 ، ع_2 - ع_1)$

* إذا كان $أ = صفر$ ← الصورة الإحداثية تكتب

← $س = س_1$ ، $\frac{ص - ص_1}{ب} = \frac{ع - ع_1}{جـ}$

* $\vec{ن} = (أ ، ب ، جـ)$ ، $\vec{ا} = (س_1 ، ص_1 ، ع_1)$ ، $\vec{ر} = (س ، ص ، ع)$

الصورة المتجهة لمعادلة المستوى :-

$$\vec{ن} \cdot \vec{ر} = \vec{ن} \cdot \vec{ا}$$

$$(أ ، ب ، جـ) \cdot (س ، ص ، ع) = (أ ، ب ، جـ) \cdot (س_1 ، ص_1 ، ع_1)$$

* الصورة القياسية للمستوى :-

$$أ(س - س_1) + ب(ص - ص_1) + جـ(ع - ع_1) = صفر$$

* الصورة العامة للمستوى :-

$$أ س + ب ص + جـ ع + د = صفر$$

* $(س_1 ، ص_1 ، ع_1)$ ، $(س_2 ، ص_2 ، ع_2)$ ، $(س_3 ، ص_3 ، ع_3)$ ليست على استقامة واحدة تكون معادلته على الصورة :-

$$\begin{vmatrix} س - س_1 & ص - ص_1 & ع - ع_1 \\ س_2 - س_1 & ص_2 - ص_1 & ع_2 - ع_1 \\ س_3 - س_1 & ص_3 - ص_1 & ع_3 - ع_1 \end{vmatrix} = صفر$$

* $$جتا\theta = \frac{|\vec{ن_1} \cdot \vec{ن_2}|}{\|\vec{ن_1}\| \, \|\vec{ن_2}\|}$$

* ملاحظات هامة :-

1. المستويان متوازيان إذا كان $\vec{ن_1} \parallel \vec{ن_2}$ أي أن $\left(\frac{أ_1}{أ_2} = \frac{ب_1}{ب_2} = \frac{جـ_1}{جـ_2}\right)$
2. المستويان متعامدان إذا كان $\vec{ن_1} \cdot \vec{ن_2}$ أي أن $(أ_1 أ_2 + ب_1 ب_2 + جـ_1 جـ_2 = صفر)$

* (طول العمود)(البعد العمودي)(ل) $= \frac{|\vec{اب} \cdot \vec{ن}|}{\|\vec{ن}\|} = \frac{|أ س_1 + ب ص_1 + جـ ع_1 + د|}{\sqrt{أ^2 + ب^2 + جـ^2}}$

الصورة المتجهة ، الصورة الإحداثية

* م Δ = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب أي ضلعين × جا θ

* $أس + بص + جـع = د$ (÷ د)

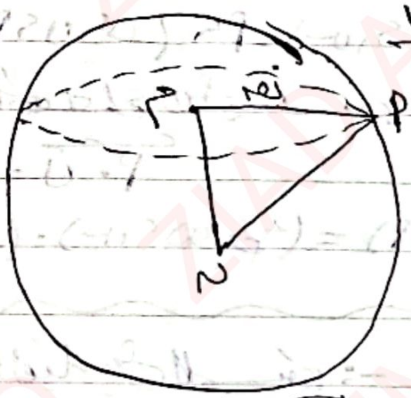
$\frac{أس}{د} + \frac{بص}{د} + \frac{جـع}{د} = \frac{د}{د}$

مثال

$٣س + ٢ص + ٤ع = ١٢$ (÷ ١٢)

$\frac{س}{٤} + \frac{ص}{٦} + \frac{ع}{٣} = ١$

أ (٤، ٠، ٠)
ب (٠، ٦، ٠)
جـ (٠، ٠، ٣)



م ن = ل (طول العمود) ، م = ن د

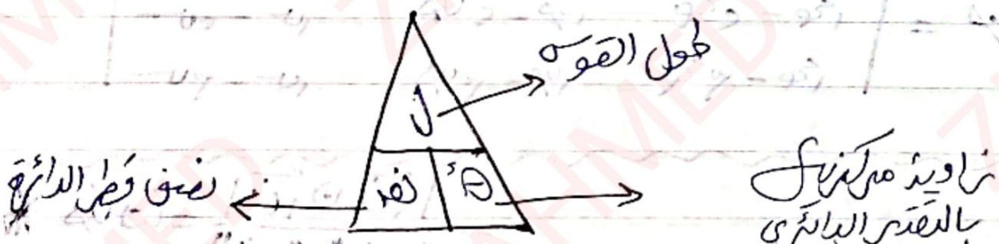
نق = أ م = $\sqrt{(أن)^2 - (من)^2}$ (المقطع)

م المقطع الناتج = ط نق²

نق = أ ن = $\sqrt{\square}$ (الكرة)

* م ○ = ط نق²
* محيط ○ = ٢ ط نق
* الكرتان متماستان من الخارج ⟸ م₁م₂ = نق₁ + نق₂

* $\frac{س^\circ}{١٨٠^\circ} = \frac{\theta^د}{ط}$
* $\theta^د = \frac{ل}{نق}$



* حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ ط نق³
* مساحة سطح الكرة = ٤ ط نق²

* محيط القطاع = ٢ نق + ل
* مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ ل نق
* مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ $\theta^د$ نق²
* مساحة القطاع = $\frac{س^\circ}{٣٦٠}$ × ط نق²

* حجم متوازي المستطيلات = |أ . ب × جـ|
* مساحة متوازي الأضلاع = $\frac{١}{٢}$ ||أجـ × ب د||

* م القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق² ($\theta^د$ − جا θ)
* محيط القطعة الدائرية = ل + الوتر
* مساحة الشكل المنتظم = $\frac{ن س^2}{٤ ظا \frac{١٨٠}{ن}}$

ن ← عدد الأضلاع
س ← طول الضلع

* محيط المضلع المنتظم = ن س