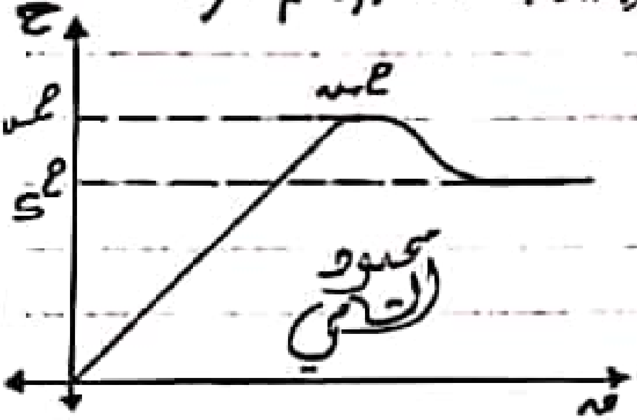
الاحتكاك

* خواص قوة الاحتكاك السكوني :

① تعمل قوة الاحتكاك السكوني (ح) على ممانعة "مقاومة" الانزلاق فتكون في اتجاه مضاد للاتجاه الذي يميل الجسم للانزلاق فيه .

② تكون قوة الاحتكاك السكوني (ح) مساوية فقط للقوة المماسية التي تعمل على تحريك الجسم فتكون أنها مساوية لها ولا يمكن أن تزيد قوة الاحتكاك عن القوة التي تحاول تحريك الجسم .

③ تتزايد قوة الاحتكاك السكوني كلما تزايدت القوة المماسية التي تحاول تحريك الجسم فتكون مساوية لها في المقدار ومضادة لها في الاتجاه مادام الجسم متزناً .



④ تتزايد قوة الاحتكاك إلى حد لا تتعداه وعند ذلك يكون الجسم على وشك الانزلاق ويسمى الاحتكاك في هذه الحالة بالاحتكاك السكوني النهائي ويرمز له "$ح_س$"

⑤ النسبة بين الاحتكاك السكوني النهائي "$ح_س$" ورد الفعل العمودي نسبة ثابتة وهي تتوقف على طبيعة الجسمين المتلامسين وليس على شكليهما أو كتلتيهما ، وهذه النسبة تسمى :
معامل الاحتكاك السكوني ورمزه "$م_س$" أي أن :

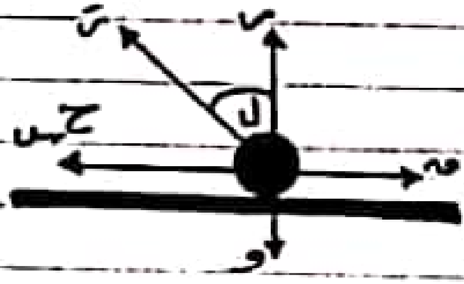
$$م_س = \frac{ح_س}{ر}$$ ومنها $$ح_س = م_س \cdot ر$$

*يلاحظ أن معامل الاحتكاك $م_س \in]0 , 1[$ في أغلب الأحيان، إلا أنه قد يزيد عن الواحد في حالات خاصة

* معامل الاحتكاك الحركي: م ك = ع ك / ر ∴ ع ك = م ك · ر

* رد الفعل المحصل (رَ): هو محصلة رد الفعل العمودي "ر" وقوة الاحتكاك ح

* زاوية الاحتكاك (ل): هي الزاوية المحصورة بين رد الفعل العمودي ورد الفعل المحصل عندما يكون الاحتكاك نهائياً



* العلاقة بين رد الفعل العمودي ورد الفعل المحصل، ح، حس:

* في حالة الاحتكاك السكوني (غير النهائي): رَ = √(ر² + ح²)

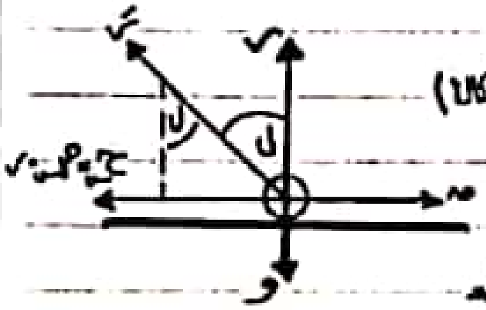
* في حالة الاحتكاك السكوني النهائي:

رَ = √(ر² + حس²) = √(ر² + (مس ر)²) = √(ر² + مس² ر²)

∴ رَ = ر √(1 + (مس)²)

محمود الشامي

* العلاقة بين معامل الاحتكاك وزاوية الاحتكاك:



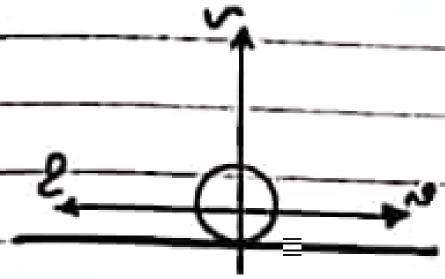
∴ حس / ر = مس ، ظا ل = حس / ر (حيث "ل" زاوية الاحتكاك)

∴ مس = ظا ل

أي أنه عندما يكون الاحتكاك نهائياً فإن معامل الاحتكاك = ظل زاوية الاحتكاك.

آلية حل المسائل

* أولاً: باتزان جسم على مستوى أفقي خشن:



متطلبات الاتزان:

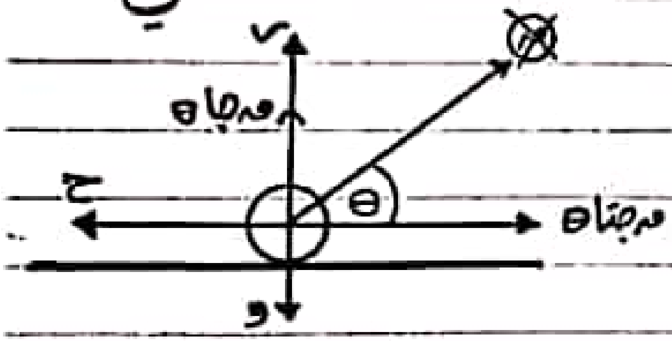
ر = و ، ق = ح

وفي حالة الاتزان النهائي "الجسم على وشك الحركة"

∴ ق = ح = م$_{س}$ ر .

* في حالة القوة تميل على الأفقي بزاوية θ :

* القوة لأعلى:

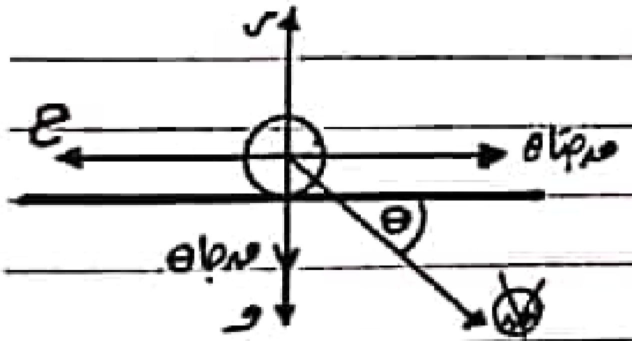


تحلل القوة كما بالرسم ويكون

ق جتا θ = ح ، ر + ق جا θ = و

ر = و − ق جا θ

* القوة لأسفل:

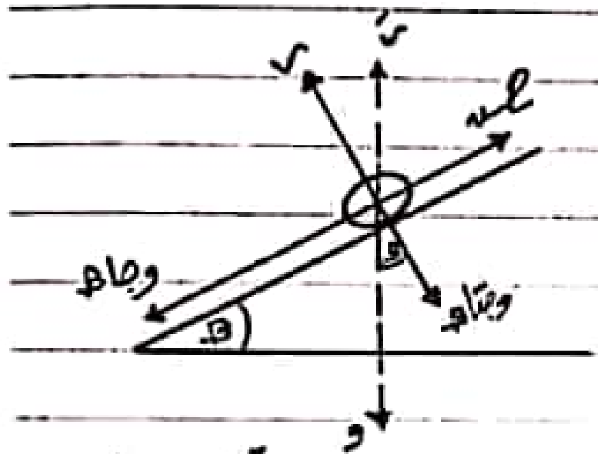


ق جتا θ = ح

ر = ق جا θ + و

ثانياً: اتزان جسم على مستو مائل خشن

ملحوظة: إذا وضع جسم على مستو مائل خشن وكان الجسم على وشك الحركة تحت تأثير وزنه فقط، فإن قياس زاوية الاحتكاك يساوي قياس زاوية ميل المستوى على الأفقي.



محمود الشامي

البرهان

معادلات الاتزان:

∵ ن = و ∴ ل = هـ

أو

مس ر = و جاهـ ، ر = و جتاهـ

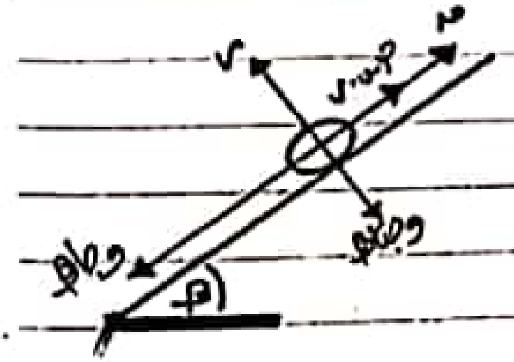
$\frac{\text{مس ر}}{\text{ر}} = \frac{\text{و جاهـ}}{\text{و جتاهـ}}$ ∴ مس = طاهـ ولكن مس = طال

∴ طال = طاهـ ∴ ل = هـ .

---

* بعض التطبيقات الهامة في المسائل:

① أقل قوة في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى، تحفظ توازن جسم موضوع على مستو مائل خشن هي التي تمنعه من الانزلاق لأسفل.

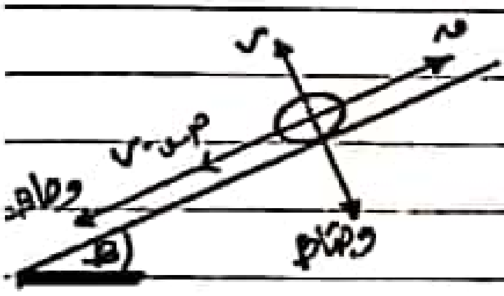


∵ مس ر تكون لأعلى

∴ معادلات الاتزان:

ق + مس ر = و جاهـ ، ر = و جتاهـ

٢ أكبر قوة في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى هي التي تجعل الجسم على وشك الحركة لأعلى المستوى.



∴ تكون م$_س$ ر لأسفل

∴ معادلات الاتزان:

ق = م$_س$ ر + و جا هـ ، ر = و جتا هـ

٣ إذا لم يذكر "أكبر قوة" أو "أقل قوة" وذكر "قوة تجعل الجسم على وشك الحركة"

∴ لابد من دراسة الاحتمالين.

٤ في حالة القوة مائلة على المستوى ولم يحدد القوة مائلة لأعلى أو لأسفل

∴ لابد من دراسة الاحتمالين.

٥ - عند المقارنة بين ل ، هـ حيث ل زاوية الاحتكاك ، هـ زاوية ميل المستوى على الأفقي

ل > هـ ∴ لا ينزلق الجسم ويظل مستقراً.

ل = هـ ∴ الجسم على وشك الانزلاق لأسفل.

ل < هـ ∴ الجسم متحرك بالفعل لأسفل.

محمود الشامي

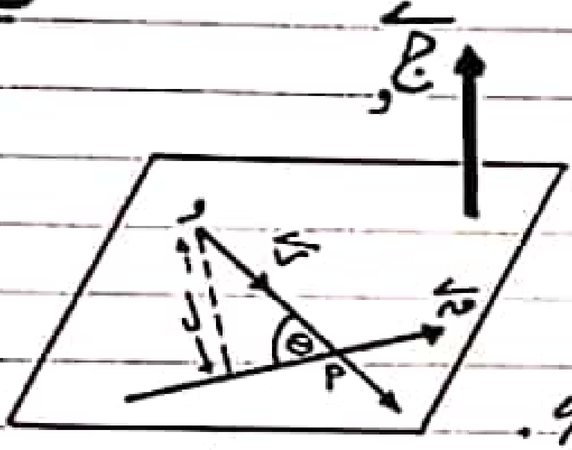
* الحالات السابقة عندما يكون الجسم تحت تأثير وزنه فقط.

العزوم

* عزم قوة بالنسبة لنقطة: هو مقدرة هذه القوة على إحداث حركة دورانية في الجسم الذي تؤثر عليه عند تثبيته عند هذه النقطة أو حول المحور المار بهذه النقطة".

محمود الشامي

* متجه عزم $\vec{ق}$ بالنسبة لنقطة "و":



$$\vec{ج}_و = \vec{ر} \times \vec{ق} \neq \vec{ق} \times \vec{ر}$$

ملاحظات

① $\vec{ر}$ هو متجه موضع أي نقطة على خط عمل $\vec{ق}$.
حيث $\vec{ر} = \vec{وأ} = أ - و$ = نقطة تأثير القوة - النقطة المنسوب لها العزم.
* إذا كانت "و" هي نقطة الأصل ∴ $\vec{ر} = \vec{أ}$

② $\vec{ج}_و$ متجه ليس نقطة تأثير محددة ولكن يعرف فقط بمعياره واتجاهه حيث أنه عمودي على المستوى الذي يحوي $\vec{ر}$ ، $\vec{ق}$ "حاصل ضرب اتجاهي".

③ إذا كان $\vec{ج}_و = \vec{0}$ فإن هناك ٣ احتمالات:

(i) $\vec{ق} = \vec{0}$

(ii) $\vec{ر} = \vec{0}$

(iii) $\vec{ر} \parallel \vec{ق}$

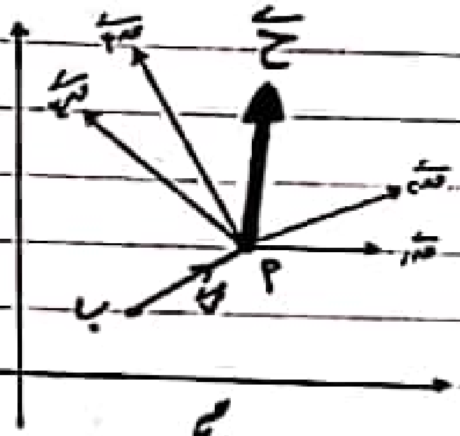
من (ii) ، (iii) يلاحظ أن "ق" تمر بالنقطة "و" ∴ إذا كانت و ∈ خط ق ∴ $\vec{ج} = \vec{0}$

* ينعدم عزم القوة بالنسبة لأي نقطة على خط عملها *

تعلم أن لا يتغير عزم القوة إذا نقلنا نقطة تأثيرها إلى أي نقطة على خط عملها.

* أي نقطة على خط عمل القوة هي نقطة تأثير لها.

النظرية العامة للعزوم :



مجموع متجهات عزوم عدة قوى متلاقية في نقطة بالنسبة لأي نقطة في الفراغ يساوي متجه عزم محصلة هذه القوى بالنسبة لنفس النقطة .

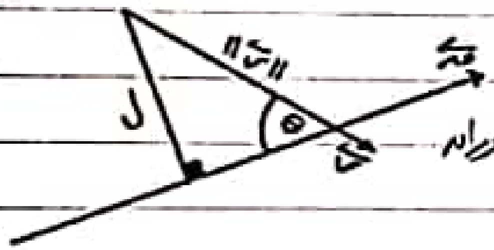
البرهان : $\vec{ج}_{ب} = \vec{ب م} \times \vec{ق_1} + \vec{ب م} \times \vec{ق_2} + \vec{ب م} \times \vec{ق_3} + \ldots$

$= \vec{ب م} \times (\vec{ق_1} + \vec{ق_2} + \vec{ق_3} + \ldots)$

$= \vec{ب م} \times \vec{ح}$.

محمود الشامي

* عزوم القوى المستوية "بالقياسات الجبرية" :



$\|\vec{ج}_{و}\| = \|\vec{ر}\| . \|\vec{ق}\|$ جا هـ ، ل = $\|\vec{ر}\|$ جا هـ

∴ $ج_{و} = ق . ل$ وطبقاً للقاعدة عقارب الساعة لاتجاه الدوران

$ج_{و} = (\pm)\ ق . ل$

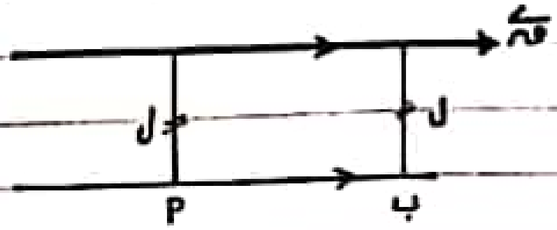
معيار القوة

طول العمود الساقط من محور العزم إلى خط عمل القوة .

(+) الدوران عكس اتجاه حركة عقارب الساعة

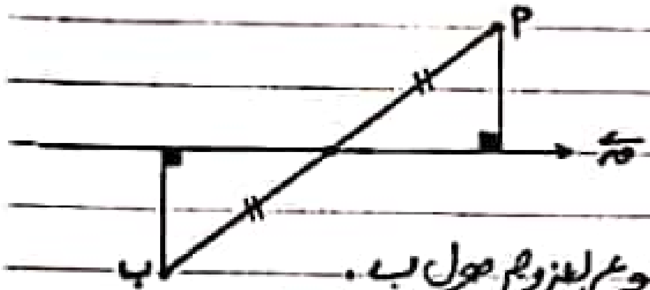
(−) الدوران مع اتجاه حركة عقارب الساعة

حيث : ل $= \dfrac{\|\vec{ج}_{و}\|}{\|\vec{ق}\|} = \dfrac{\text{معيار العزم}}{\text{معيار القوة}}$.



(1) إذا كان م ب // خط عمل ق فإن $ج_{م} = ج_{ب}$ والعكس صحيح *

* لإثبات أن خط عمل محصلة عدة قوى يوازي م ب نثبت أن : مجموع عزوم القوى حول م = مجموع عزوم القوى حول ب .



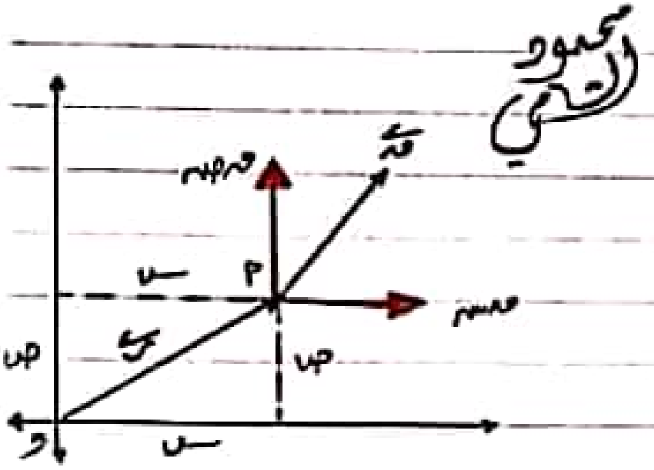
② إذا كان خط عمل ق ينصف أب

فإن ج_أ = - ج_ب «والعكس صحيح»

* لإثبات أن خط عمل محصلة عدة قوى ينصف أب

نثبت أن: مجموع عزوم القوى حول أ = - مجموع العزوم حول ب.

* قاعدة فارينون:



عزم القوة ق بالنسبة لنقطة يساوي مجموع عزوم مركبات هذه القوة بالنسبة لنفس النقطة.

بفرض القوة ق = (ق س ، ق ص) تؤثر في نقطة أ متجه موضعها بالنسبة لنقطة الأصل ر = (س ، ص) فإن

ج_و = ر × ق = (س ، ص) × (ق س ، ق ص) = (س ق ص + ص ق س) ع

عزم ق ص حول و — عزم ق س حول و

* تستخدم قاعدة فارينون إذا لم نستطيع إيجاد العمود الواصل من محور العزم إلى خط عمل القوة، فنقوم بتحليل القوة إلى مركبتين متعامدتين، ونأخذ مجموع عزمي المركبتين عوضاً عن القوة.

الخلاصة

① إذا كان المطلوب عزم ق والمعطى متجه القوة والنقطة المطلوب العزم بالنسبة لها نتبع الآتي:

(1) إيجاد ر حيث ر متجه بدايته مركز العزم إلى نقطة على خط عمل القوة

إذا كان ر = (أ ، ب) ، ق = (ق س ، ق ص)

(2) ج = ر × ق = (أ ، ب) × (ق س ، ق ص) = (أ ق ص − ب ق س) ع

② إذا ذكر أن $ج_م = صفر$ ∴ خط عمل المحصلة يمر بـ م ، والعكس صحيح .

③ إذا ذكر أن $ج_م = ج_ب$ ∴ خط عمل المحصلة يوازي $\overline{مب}$ ، العكس صحيح .

④ إذا ذكر أن $ج_م = - ج_ب$ ∴ خط عمل المحصلة ينصف $\overline{مب}$ ، العكس صحيح .

⑤ إذا كان المطلوب طول العمود الساقط من نقطة م إلى خط عمل القوة

$ل = \frac{\|ج_م\|}{\|ق\|}$ طول العمود = $\frac{\text{معيار العزم}}{\text{معيار القوة}}$.

محمود الشامي

⑥ لإثبات أن محصلة القوى تساوي صفر ∴ نثبت أن مجموع عزوم القوى حول ٣ نقط ليست على استقامة واحدة يساوي صفر .

⑦ لإيجاد معادلة خط عمل $\overrightarrow{ق}$: يجب أن يكون معلوماً نقطة تأثيرها $(س_1 ، ص_1)$ و $\overrightarrow{ق} = (م ، ن)$ ← متجه القوة .

وتكون المعادلة : * $\overrightarrow{ر} = (س_1 ، ص_1) + ل (م ، ن)$ ← الصورة المتجهة .

* $(ص - ص_1) = \frac{ن}{م} (س - س_1)$ ← الصورة الإحداثية .

• أو يكون معلوم المتجه $\overrightarrow{ق} = (\; ، \;)$ وعزمها بالنسبة لنقطة م .

فيكون : $ج_م = (س - س_م ، ص - ص_م) \times (م ، ن) = ل \overrightarrow{ع}$

بالفك ومساواة مركبات المتجه $\overrightarrow{ع}$ نحصل على المعادلة .

⑧ في الأشكال الهندسية : لإيجاد مجموع عزوم القوى حول نقطة نتبع الآتي:

(١) تحديد القوى التي تمر بـ "م" وبالتالي يتلاشى عزمها .

(٢) تحديد القوى التي لها عزم وترتيبها ترتيباً دورياً أثناء حساب العزم .

(٣) إيجاد العمود الساقط من "م" إلى خط عمل كل قوة (ل) .

(٤) احتساب إشارة الدوران من قاعدة عقارب الساعة ⊕ ضد ، ⊖ مع

(٥) حساب العزم عن طريق $ج = \pm ق . ل$.

عزم قوة حول نقطة في الفراغ 3D :

إذا كانت القوة $\overrightarrow{ق} = (ق_س ، ق_ص ، ق_ع)$ وتؤثر في النقطة أ (س، ص، ع) التي متجه موضعها بالنسبة إلى نقطة الأصل و هو $\overrightarrow{ر} = (س ، ص ، ع)$ فإن عزم القوة $\overrightarrow{ق}$ حول النقطة و هو

$\overrightarrow{ج_و} = \overrightarrow{ر} \times \overrightarrow{ق}$ ومنه تعريف الضرب الاتجاهي لمتجهين في الفراغ .

$$\overrightarrow{ج_و} = \overrightarrow{ر} \times \overrightarrow{ق} = \begin{vmatrix} \hat{س} & \hat{ص} & \hat{ع} \\ س & ص & ع \\ ق_س & ق_ص & ق_ع \end{vmatrix} = \hat{س}\,(ص\,ق_ع - ع\,ق_ص) - \hat{ص}\,(س\,ق_ع - ع\,ق_س) + \hat{ع}\,(س\,ق_ص - ص\,ق_س) .$$

محمود الشامي

(1) طول العمود الساقط من و على خط عمل $\overrightarrow{ق}$ ← $ل = \dfrac{\|\overrightarrow{ج_و}\|}{\|\overrightarrow{ق}\|}$.

(2) إذا كانت $\overrightarrow{ق}$ تؤثر في نقطة أ فإن عزم القوة $\overrightarrow{ق}$ حول نقطة ب ← $\overrightarrow{ج_ب} = \overrightarrow{ب أ} \times \overrightarrow{ق}$.

(3) مركبات عزم $\overrightarrow{ق}$ حول نقطة الأصل في اتجاهات المحاور كالآتي :

* مركبة العزم في اتجاه محور س ← $ج_س = ص\,ق_ع - ع\,ق_ص$.

$ج_ص = ع\,ق_س - س\,ق_ع$.

$ج_ع = س\,ق_ص - ص\,ق_س$.

* ينعدم عزم $\overrightarrow{ق}$ حول محور في حالتين : (1) إذا اشترك خط عمل القوة مع المحور في نقطة الأصل (2) إذا كانت القوة توازي المحور .

(4) $\overrightarrow{ق} = \|\overrightarrow{ق}\| \cdot \dfrac{\overrightarrow{أ}}{\|\overrightarrow{أ}\|}$ حيث $\overrightarrow{أ}$ متجه في اتجاه القوة .

* متجه القوة = معيار القوة × متجه وحدة في اتجاهها * . متجه الوحدة = $\dfrac{\text{المتجه}}{\text{معياره}}$.

ملاحظات

① إذا كان ق١ ، ح معلومتين ومتضادتين في الاتجاه فيكون:

* ق١ ، ق٢ متضادتين في الاتجاه

* ق٢ > ق١ "لاحظ أن المحصلة في اتجاه ق٢".

* ح = ق٢ − ق١ ∴ ق٢ = ق١ + ح .

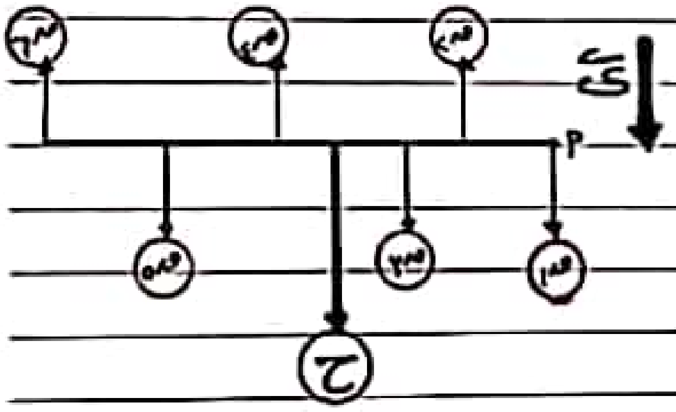
② إذا كان ق١ ، ح معلومتين وفي نفس الاتجاه:

* ح > ق١ ∴ ق١ ، ق٢ متحدتا الاتجاه.

* ح < ق١ ∴ ق١ ، ق٢ متضادتين في الاتجاه.

محمود الشامي

* محصلة عدة قوى مستوية متوازية:



① نفرض متجه وحدة ى في اتجاه اختياري.

فيكون القياس الجبري للقوى:

في اتجاه ى ⊕

ضد اتجاه ى ⊖

② ح = (القوى التي في اتجاه ى) − (القوى التي ضد ى) وتحدد اتجاه ح من إشارتها

ح ⊕ في اتجاه ى ، ح ⊖ ضد اتجاه ى

③ لتحديد نقطة تأثير المحصلة نتبع الآتي:

* نفرض أن نقطة تأثير ح هي نقطة تبعد س عن نقطة معلومة "ولتكن أ" حيث س

* ونكون مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول أ = عزم المحصلة حول أ ومنه نحصل على س.

تذكر: المجموع الجبري لعزوم عدة قوى مستوية متوازية حول أي نقطة في مستويها = عزم المحصلة حول نفس النقطة.

* إذا كانت ح تؤثر في ج حيث ج تقسم المسافة بين أ ، ب بنسبة م١ : م٢

حيث أ(س١ ، ص١) ، ب(س٢ ، ص٢) نقطتي تأثير قوتين ∴ ج $\left(\frac{م_1 س_2 + م_2 س_1}{م_1 + م_2} ، \frac{م_1 ص_2 + م_2 ص_1}{م_1 + م_2}\right)$

اتزان جسم تحت تأثير مجموعة من القوى المتوازية

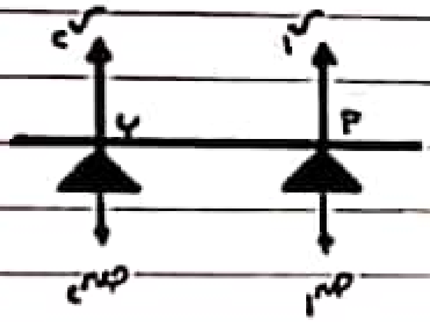
محمود الشامي

* شروط اتزان مجموعة من القوى المتوازية:

① مجموع القياسات الجبرية لهذه القوى منعدم أي أن ح = صفر

② مجموع عزوم القوى حول أي نقطة اختيارية فيما مستواها منعدم

ملاحظات



① عند وضع قضيب على حامل أملس يوجد ضغط "ض" على الحامل يقابله رد فعل "ر" عمودي على القضيب.
وهما متساويان في المقدار ومتضادان في الاتجاه وعلى نفس خط العمل.

② سنقوم بدراسة القوى المؤثرة على القضيب لذلك سنتعامل مع رد الفعل وليس الضغط.

③ عندما يكون القضيب على وشك الدوران حول أحد الحاملين يكون الضغط على الحامل الآخر مساوياً للصفر.

④ أكبر ثقل يمكن تعليقه من أحد طرفي القضيب "الأيمن" يجعله على وشك الدوران حول الحامل القريب منه "م" ويكون الضغط عند "ب" منعدم.

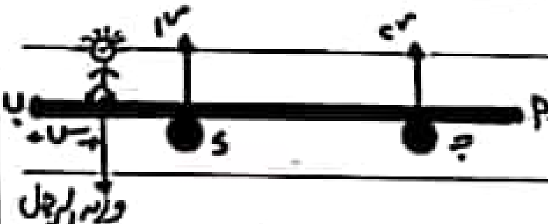
⑤ عندما يكون قضيب (منتظم أو متماثل أو متجانس) فهذا يعني أن وزنه يؤثر عند منتصفه.

محمود الشامي

٦ عندما يكون الضغط عند الحامل أ = $\frac{٢}{٣}$ الضغط عند الحامل ب مثلاً
نفرض أن رد الفعل عند أ = ٢ر ، عند ب = ٣ر

٧ لإيجاد وزن قضيب بواسطة ميزانين زنبركيين نأخذ مجموع قراءة الميزانين وهما الشد في الزنبركين.

٨ لتعيين أقصى مسافة يستطيع أن يتحركها رجل على لوح مرتكز على حاملين دون أن ينقلب اللوح.



* نفرض نقطة يقف عندها الرجل وتبعد عن أحد الأطراف مسافة قدرها (س)
* عندما تكون أقصى مسافة دون أن ينقلب اللوح
∴ القضيب على وشك الدوران حول (ء) ∴ الضغط عند (جـ) منعدم
أي أن ر٢ = صفر
* بأخذ العزوم عند (ء) نقطة ويكون مساوياً للصفر ومن ثم إيجاد قيمة (س).