2025

Math United

فى

الرياضيات البحتة

الصف الثانى الثانوى

الفصل الدراسى الأول

إعداد

م : رامـــى رجــب عــوض اللّه

01021226004

الدوال الحقيقية

تعريف الدالة :

- علاقة رياضية بين متغيرين احدهما متغير تابع و الاخر متغير مستقل .

مثل : العلاقة بين مساحة المربع و طول الضلع فكلما زاد طول الضلع زادت المساحة و العكس صحيح .

- علاقة من المتغير س إلى المتغير ص يظهر فيها كل عنصر من س كمسقط أول مرة واحدة فقط مثل (١، ٢) ،(٥، ٦)
- علاقة تربط بين مجموعتين بحيث يرتبط كل عنصر من عناصر المجموعة الأولى بعنصر واحد فقط من عناصر المجموعة الثانية .

مدى الدالة :

- مجموعة جزئية من المجال المقابل .
- صور عناصر المجال بواسطة قاعدة الدالة .
- الفترة المقابلة لمنحنى الدالة على محور الصادات
- مجموعة قيم ص المرتبطة .

مجال الدالة :

- مجموعة العناصر التى يمكن التعويض في قاعدة الدالة و التى تكون عندها الدالة معرفة .
- الفترة المقابلة لمنحنى الدالة على محور السينات بحيث : يكون الناتج كمية معرفة .
- مجموعة العناصر التى يأخذها المتغير س .
- عناصر المجموعة الأولى في أى مخطط سهمى .

أطــراد الدالة :

- الدالة تزايدية :

كلما اتجهنا من اليسار إلى اليمين فإن : منحنى الدالة يصعد لأعلى .

- الدالة تناقصية :

كلما اتجهنا من اليمين إلى اليسار فإن : منحنى الدالة يهبط لأسفل .

- الدالة ثابتة : اذا كان منحنى الدالة خط مستقيم يوازى محور السينات .

متى تكون العلاقة دالة

العلاقة على صورة مخطط سهمى	العلاقة على صورة بيان ع
• اذا خرج من كل عنصر من عناصر المجموعة الأولى (س) سهم واحد فقط إلي المجموعة الثانية (ص) . فان : العلاقة تكون دالة • و اذا خرج من عنصر من عناصر المجموعة الأولى أكثر من سهم فان : العلاقة ليست دالة و أيضا اذا لم يخرج من أى عنصر من عناصر المجموعة الأولى سهم فإن : العلاقة أيضا ليست دالة .	• تكون العلاقة دالة اذا ظهر كل عنر من عناصر المجموعة الأولى (س) كمسقط أول مرة واحدة فقط . مثل : { (٢، ١) ، (٢، ٢) ، (٣، ٤) } العلاقة دالــة . { (٢، ١) ، (٢، ٣) ، (٣، ٤) } العلاقة ليســت دالــة .
اختبار الخط الرأســى	**العلاقة على الصورة الجبرية**
• اذا رسم خط يوازى محور الصادات و يقطع منحنى الدالة في نقطة واحدة فإنها تكون دالة . • اذا قطع الخط منحنى العلاقة في أكثر من نقطة فإن : العلاقة ليست دالة .	• اذا كان أس ص زوجى ليست دالة و اذا كان أس ص فردى فان : العلاقة تكون دالة . لماذا ... ؟ لأن جذر الأس الزوجى يكون له قيمتان أى أن ص يكون لها قيمتان أحدهما موجب و الاخرى سالبة و هو ما يخالف شرط الدالة و هى ارتباط كل عنصر من عناصر الــ س بعنصر واحد من عناصر الــ ص. بينما : الأس الفردى يكون جذره له قيمة واحدة و هو ما يتفق مع شرط الدالة فيكون لكل عنصر من عناصر الــ س قيمة واحدة في عناصر الــ ص .

قواعـد تحديد مجال الدالة

مجال الدالة الكسرية

• الدالة الكسرية :

اذا كان البسط و المقام دوال كثيرات الحدود

المجال = ح − أصفار المقام

أما اذا كان البسط و المقام دالتين مختلفتين أحدهما جذرية

و الأخرى من كثيرات الحدود مثلا .

المجال = مجال دالة البسط تقاطع مجالة دالة المقام فرق أصفار المقام

الدوال كثيرات الحدود :

ما لم تكن معرفة على فترة جزئية أخرى مجالها = ح .

مجال الدالة الجذرية

• اذا كان دليل الجذر فردى :

الجذر في البسط فان : المجال هو ح .

الجذر في المقام فان : المجال هو ح − أصفار المقام .

• اذا كان دليل الجذر زوجي :

الجذر في البسط فان : المجال هو ما تحت الجذر ≥ صفر

الجذر في المقام فان : المجال هو ما تحت الجذر > صفر

• اذا كانت الدالة كسرية : في البسط جذر و في المقام جذر فان :

المجال = مجال الدالة الأولى ∩ مجال الدالة الثانية − أصفار المقام

• اذا كان ما تحت الجذر دالة تربيعية :

فان : لحل متباينات الدرجة الثانية في متغير واحد في ح نتبع الآتى :

- نكتب الدالة التربيعية المناظرة للمتباينة .
- نبحث إشارة الدالة التربيعية .
- ثم نحدد الفترة التى تحقق المتباينة

مع مراعاة أن :

- < ٠ تقابل كلمة موجب في بحث إشارة الدالة .
- > ٠ تقابل كلمة سالب في بحث إشارة الدالة .
- ≤ ، ≥ فإننا نعكس الأقواس في مجموعة الحل بعد بحث الإشارة .

نـــوع الـــدالـــة

الدالةالزوجيـة

• الدالة الزوجية :

أن الدالة ص = د(س) إنها دالة زوجية اذا كان :

د(− س) = د(س) أو د (− س) − د(س) = ٠

نقول أن :

قيمة الدالة لا تتغير في حالة التعويض عن قيمة س لقيمة موجبة أو سالبة حيث تكون الدالة كما هى و لذلك لجميع قيم س في مجال د(س) .

بمعنى أن : إشارات الدالة تظل كما هى دون تغير في الدالة الأصلية و يكون منحنى الدالة متماثل حول محور الصادات .

الدالة الفرديـة

• الدالة الفردية :

يقال أن الدالة ص = د(س) فردية اذا كانت :

د(− س) = − د(س) أو د(− س) + د(س) = ٠

أى أن : قيمة الدالة تتغير في حالة التعويض عن س بقيمة سالبة و تكون الدالة الناتجة عكس الدالة الأصلية و ذلك لجميع س في مجال د(س) .

بمعنى أن : الاشارات في الدالة الناتجة تتغير جميعا عن اشارات الدالة الأصلية . الدالة ليست زوجية و ليست فردية اذا كان :

د(س) ≠ − د (س) ≠ د س بمعنى تتغير معظم الاشارات و تظل معظم الاشارات دون تغيير مثل الدالة الكسرية و اللوغاريتمية .

● **الدالة الأحادية :**

اذا كان : د : س ⟵ ص ، ا ، ب ∈ ص و كان : د(ا) = د (ب) وهذا يعنى : أنه لا يوجد عنصران في الدالة لهما نفس الصورة

الدالة الأحادية بيانياً (اختبار الخط الأفقي)

اذا رسم خط مستقيم يوازى محور السينات و يقطع منحنى الدالة :

في نقطة واحدة فان : الدالة تكون أحادية

مثل الدالة الخطية و التكعيبية و الكسرية

في أكثر من نقطة فان : الدالة ليست أحادية

مثل الدالة الثابتة و التربيعية و دالة القيمة المطلقة

الدوال الزوجية بصفة عامة ليست أحادية

الدوال الفردية قد تكون أحادية أو غير أحادية

اذا كانت الدالة في تزايد مستمر أو في تناقص مستمر لجميع القيم التى تنتمى لمجال الدالة . فان : الدالة تكون أحادية .

الدوال الحقيقية

الدالة الثابتة :

الصورة العامة : د(س) = ا

المجال : ح

المدى : { ا }

الأطراد : الدالة ثابتة على مجالها .

النوع : الدالة زوجية و ليست أحادية .

الدالة الخطية

الصورة العامة : د(س) = ا س + ب

المجال : ح ما لم تكن الدالة معرفة على فترة جزئية أخرى

المدى : ح اذا كان المجال ح . و اذا كان المجال فترة فان المدى يكون فترة

الأطراد : الدالة تزايدية اذا كان معامل س > صفر

الدالة تناقصية اذا كان معامل س < صفر

النوع : اذا كان الجزء المقطوع من محور الصادات = صفر تكون الدالة فردية

اذا كان المقطوع من محور الصادات ≠ صفر الدالة ليست زوجية و ليست فردية (أحادية)

الدالة التربيعية :

الصورة العامة : د(س) = (س + ب)^{٢} + حـ

نقطة رأس المنحنى : (− ب ، حـ)

المجال : ح ما لم تكن الدالة معرفة على فترة جزئية أخرى

المدى :

اذا كان معامل س^{٢} > صفر المدى = [حـ ، ∞ [

اذا كان معامل س^{٢} < صفر المدى =] -∞ ، حـ]

الأطراد :

عندما يكون ا > صفر يكون منحنى الدالة لأعلى

و تكون الدالة تناقصية على] −∞ ، − ب]

و تزايدية على [− ب ، ∞ [

الدالة التكعيبية

الصورة العامة : د(س) = (س + ب)^{٣} + حـ

نقطة التماثل : (− ب ، حـ)

المجال : ح ما لم تكن الدالة معرفة على فترة جزئية أخرى

المدى : ح

الأطراد :

الدالة تزايدية على مجالها عندما يكون معامل س^{٣} > ٠

الدالة تناقصية على مجالها عندما يكون معامل س^{٣} < ٠

النوع :

الدالة فردية عندما تكون نقطة تماثلها (٠ ، ٠)

فيما عدا ذلك تكون الدالة ليست زوجية و ليست فردية .

عندما يكون ﺃ < صفر يكون منحنى الدالة لأسفل و تكون الدالة تزايدية على] −∞ ، − ب [و تناقصية على] − ب ، ∞ [

النوع : اذا كانت نقطة رأس المنحنى للدالة هى (٠، ٠) ، (٠ ، حـ) فالدالة تكون زوجية . فيما عدا ذلك فالدالة ليست زوجية و ليست فردية .

دالة المقياس :

الصورة العامة : د(س) = | س + ب | + حـ

نقطة تماثلها : (− ب ، حـ)

اذا كان المنحنى مفتوح لأعلى

المجال : ع المدى : [حـ ، ∞ [

الأطراد : الدالة تناقصية على] −∞ ، − ب [

و الدالة تزايدية على] − ب ، ∞ [

اذا كان المنحنى مفتوح لأسفل

المجال : ع المدى :] − ∞ ، حـ]

الأطراد : الدالة تزايدية على] −∞ ، − ب [

و الدالة تناقصية على] − ب ، ∞ [

النوع : الدالة زوجية عندما تكون نقطة تماثلها (٠ ، حـ) فيما عدا ذلك فهى ليست زوجية و ليست فردية و الدالة ليست أحادية .

الدالة الكسرية

الصورة العامة : د(س) = $\frac{ﺃ}{س + ب}$ + حـ

نقطة التماثل : (− ب ، حـ)

المجال : ع − { − ب }

المدى : ع − { حـ }

الأطراد :

اذا كان ﺃ > ٠ فان : الدالة تكون تناقصية على] −∞ ، − ب [،] − ب ، ∞ [

اذا كان ﺃ < ٠ فان : الدالة تزايدية على] −∞ ، − ب [،] − ب ، ∞ [

النوع : اذا كانت نقطة تماثل الدالة (٠، ٠) فان : الدالة تكون متماثلة حول نقطة الأصل و تكون الدالة فردية

اذا كانت نقطة تماثل الدالة لا تساوى (٠ ، ٠) فإن : الدالة تكون ليست زوجية و ليست فردية . الدالة أحادية

التحويلات الهندسية للدوال

إنعكاس الدالة

اذا كانت : ص = − د(س)

هى نفسها منحنى الدالة ص = د(س) انعكاس .

الإزاحة الرأسية

اذا كانت : ص =د(س) + ﺃ

هى نفسها الدالة ص = د(س) و لكن حدث لها إزاحة رأسية مقدارها | ﺃ |

لأعلى : اذا كان ﺃ > ٠

لأسفل : اذا كان ﺃ < ٠

الإزاحة الأفقية

اذا كانت : ص =د(س + ﺃ)

هى نفسها الدالة ص = د(س)

ولكن حدث لها إزاحة أفقية مقدارها | ﺃ |

يساراً : اذا كان ﺃ > ٠

يميناً : اذا كان ﺃ < ٠

القيمة المطلقة

خواص القيمة المطلقة :

- |س| = ﺃ ∴ س = ± ﺃ ، ﺃ > ٠
- |س| ≥ ٠
- |س ص| = |س| × |ص|
- |س − ﺃ| = |ﺃ − س|
- |س| = ٠ اذا و فقط س = ٠
- |س| = | − س |
- | س + ص | ≤ |س| + |ص|
- |ﺃ^٢| = |ﺃ|^٢ = ﺃ^٢

المهندس رامى رجب عوض الله ٠١٠٢١٢٢٦٠٠٤

✍ √(أ²) = |أ|

✍ |س| < أ ⟸ −أ < س < أ

✍ |أ/ب| = |أ| / |ب|

✍ |س| > أ ← س > أ ، س < −أ

معادلات القيمة المطلقة :

✍ عند حل معادلات القيمة المطلقة (أى اذا كان ما بداخل القيمة المطلقة مقدار مجهول غير معلوم هل اشارته موجبة أو سالبة)

فإننا : نضع القيمة المطلقة في طرف و باقى الحدود في طرف ثم بعد ذلك هناك طريقتان لحل المعادلة :

الطريقة الأولى : نربع الطرفين للتخلص من القيمة المطلقة و نحل المعادلة الناتجة .

الطريقة الثانية : تلغى القيمة المطلقة و نضع لأحد طرفي المعادلة اشارتى ± و نحل المعادلة الناتجة

ملاحظات :

- بعد حل معادلة القيمة المطلقة يجب أن نتحقق من أن أى قيمة تم ايجادها تحقق معادلة القيمة المطلقة وذلك بالتعويض بهذه القيم في معادلة القيمة المطلقة .
- اذا كانت معادلة القيمة المطلقة تحتوى على قيمتين مطلقتين مجموعتين أو مطروحتين . فإننا نضع كل قيمة مطلقة في طرف ثم نطبق أحد الطريقتين السابقتين .
- اذا كان المقدار الذى بداخل القيمة المطلقة مقدارا موجبا معلوم الاشارة فإننا لا نحتاج لحل المعادلة إلى أحد الطريقتين وانما نكتفى بالغاء القيمة المطلقة فقط .
- اذا كان : |أس + ب| = حـ فإن : أس + ب = ± حـ .
- اذا كان : |أس + ب| = حـس + ء فإن : أس + ب = ± (حـس + ء)
- اذا كان : |أس + ب| = |حـس + ء| فإن : أس + ب = ± (حـس + ء)

متباينات القيمة المطلقة :

الصورة الأولى	الصورة الثانية	الصورة الثالثة	الصورة الرابعة
اذا كان : |س| > أ	اذا كان : |س| ≥ أ	اذا كان : |س| < أ	اذا كان : |س| ≤ أ
فإن : س > أ ، س < −أ	فإن : س ≥ أ ، س ≤ −أ	فإن : −أ < س < أ	فإن : −أ ≤ س ≤ أ
م.ح = ع − [−أ ، أ]	م.ح = ع −]−أ ، أ[	م.ح =]−أ ، أ[	م.ح = [−أ ، أ]

- اذا كان : |س| ≤ ٠ فإن : |س| = ٠ ⟸ س = ٠
- اذا كان : |س| < −١ فإن : مجموعة الحل = ∅
- اذا كان : |س| > −١ فإن : مجموعة الحل = ع
- اذا كان : |س| < ٠ فإن : مجموعة الحل = ∅
- |أ| ≥ |ب| ⟺ (أ + ب) (أ − ب) ≥ ٠
- ١/|أ| ≤ ١/|ب| فان : |أ| ≥ |ب|

القاعدة الأولى

اذا كانت متباينة القيمة المطلقة على الصورة

|أ| + |ب| ≥ حـ

يتم تحويل هذه الصورة باستخدام المتباينة المثلثية :

|أ + ب| ≤ |أ| + |ب|

إلى الصورة |أ + ب| ≤ |أ| + |ب| ≥ حـ

و يكون حل المتباينة كالاتى : |أ + ب| ≥ حـ

القاعدة الثانية

اذا كانت متباينة القيمة المطلقة على الصورة

|أ| − |ب| ≤ حـ

يتم تحويل هذه الصورة باستخدام المتباينة المثلثية :

|أ − ب| ≤ |أ| − |ب|

إلى الصورة |أ − ب| ≤ |أ| − |ب| ≤ حـ

و يكون حل المتباينة كالاتى : |أ − ب| ≤ حـ

القاعدة الثالثة

اذا كانت متباينة القيمة المطلقة على الصورة

|أ| + |ب| = حـ

يتم تحويل هذه الصورة باستخدام المتباينة المثلثية :

|أ + ب| ≤ |أ| + |ب|

إلى الصورة |أ + ب| ≤ |أ| + |ب| = حـ

و يكون حل المتباينة كالاتى : |أ + ب| ≥ حـ

الحل البيانى :

تعتمد فكرة الحل على تقسيم المعادلة أو المتباينة إلى دالتين و تمثيل كلا منهما على حدة و تكون مجموعة الحل هي الاحداثيات السينية

الدالة الآسية

الدالة الجبرية

هى الدالة التى يكون فيها المتغير المستقل س هو الأساس و الأس يكون عدد حقيقي مثل : د(س) = س^{٢} + ٥

الدالة الأسية

هى الدالة التى يكون فيها المتغير المستقل هو الأس و الأساس يكون عدد حقيقي مثل : د(س) = ٢ ^{س}

- اذا كان : د : ح ← ح$^{+}$ و كان : أ عدد حقيقي موجب ، أ ≠ ١

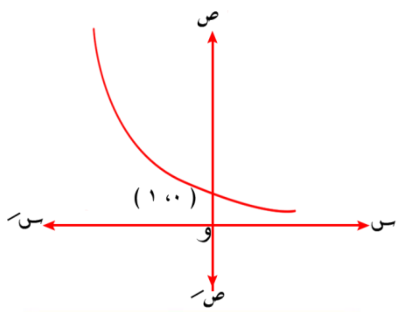
فان : د(س) = أ ^{س} دالة أســية مجالها ح و أسها المتغير س و أساسها أ ∈ ح$^{+}$ − { ١ } .

- د(س) = أ ^{س} ، ٠ < أ < ١
- المنحنى يقع بأكمله أعلى محور السينات و يقطع محور الصادات في النقطة (٠ ، ١)

المجال = ح ، المدى = ح$^{+}$

الأطراد : الدالة تناقصية على المجال .

النوع : ليست زوجية و ليست فردية . الدالة أحادية .



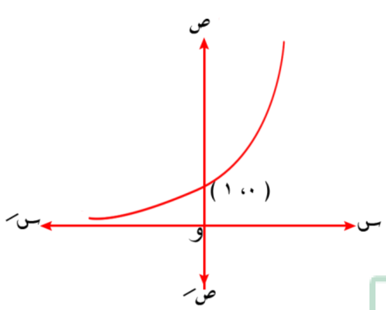
- د(س) = أ ^{س} ، أ > ١

المنحنى يقع بأكمله أعلى محورالسينات و يقطع محور الصادات في النقطة (٠ ، ١)

المجال = ح ، المدى = ح$^{+}$

الأطراد : الدالة تزايدية على المجال .

النوع : ليست زوجية و ليست فردية . الدالة أحادية .



• $د(س) = أ^{س}$ ، $أ > ١$

• $د(س) = أ^{س}$ ، $٠ < أ < ١$

يتقاطع المنحنيان في النقطة (٠ ، ١)

و يمر بهما كمحور تماثل لهما محور الصادات

الذى معدلته س = صفر

• $د(س) = -أ^{س}$ ، $٠ < أ < ١$

المنحنى يقع بأكمله أسفل محورالسينات و يقطع محور الصادات

في النقطة (٠ ، −١)

المجال = ح ، المدى = $ح^{-}$

الأطراف : الدالة تزايدية على المجال .

النوع : ليست زوجية و ليست فردية . الدالة أحادية .

• $د(س) = -أ^{س}$ ، $أ > ١$

• المنحنى يقع بأكمله أسفل محور السينات و يقطع محور الصادات في النقطة (٠ ، −١)

المجال = ح ، المدى = $ح^{-}$ الأطراف : الدالة تناقصية على المجال ..

النوع : ليست زوجية و ليست فردية . الدالة أحادية .

المدى للدالة الأسـية التي تكون على الصورة : $\boxed{د(س) = ء\, أ^{س+ب} + حـ}$ هو

اذا كان : ء موجب فان : المدى =] حـ ، ∞ [اذا كان : ء سالب فان : المدى =] −∞ ، حـ [

مثال اذا كانت : $د(س) = ٢^{س}$ فاثبت أن : $\frac{د(٣س+٣) - د(٣س+١)}{٤د(٣س) - ٦د(٣-١)} = ٦$

جميعا نعرف طريقة الحل المعتادة فدعنا نرى الجديد :

ضع س = ١ أو أى عدد أخر في المقدار $\frac{د(٣س+٢) - (٣س+١)}{٤د(٣س) - ٦د(٣-١)} = ٦$

$$\frac{د(٦) - د(٤)}{٤د(٣) - ٦د(٢)} = \frac{٢^{٢} - ٢^{٤}}{٤ \times ٢^{٣} - ٦ \times ٢^{٣}} = ٦$$

خلى بالك

- $أ^{ن} = ١$ حيث : $أ \neq ٠$
- $أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$
- $(أ^{ن})^{م} = (أ)^{نم}$
- $\frac{أ^{م}}{أ^{ن}} = أ^{م-ن}$
- $(أب)^{ن} = أ^{ن}ب^{ن}$
- $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{-ن} = \left(\frac{ب}{أ}\right)^{ن}$
- $\sqrt[ن]{أ^{ن}} = |أ|$ حيث ن عدد زوجى
- $\sqrt[ن]{أ^{ن}} = أ$ حيث ن عدد فردى
- $\sqrt[ن]{أ^{م}} = أ^{\frac{م}{ن}}$
- $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{ن} = \frac{أ^{ن}}{ب^{ن}}$
- $(-أ)^{ن} = أ^{ن}$ حيث ن عدد زوجى
- $\sqrt[ن]{أ \times ب} = \sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[ن]{ب}$
- $(أ \pm ب)^{ن} \neq أ^{ن} \pm ب^{ن}$
- اذا كان : $س^{\frac{م}{ن}} = أ$ ∴ $س = أ^{\frac{ن}{م}}$ حيث م عدد فردى

المهندس رامى رجب عوض الله ٠١٠٢١٢٢٦٠٠٤

- اذا كان : $س^{\frac{م}{ن}} = أ$ ∴ $س = \pm أ^{\frac{ن}{م}}$ حيث م عدد زوجي
- $(أ)^{\frac{1}{ن}} = \sqrt[ن]{أ}$
- $(أ)^{\frac{م}{ن}} = (\sqrt[ن]{أ})^م = \sqrt[ن]{أ^م}$
- اذا كان : $أ^ن = 1$ فان : $ن = صفر$
- اذا كان : $أ^ن = أ^م$ فان : $ن = م$
- اذا كان : $أ^ن = ب^ن$ و كان : ن عددا فرديا فان : $أ = ب$
  - و كان : ن عددا زوجياً فان : $أ = \pm ب$
  - و كان : $أ \neq ب$ فان : $ن = ٠$

دالة النمو الأســـى

◂ هى دالة تستخدم في تمثيل النمو الأســـى بنسبة مئوية ثابتة فى فترات زمنية متساوية (ن)

$د(ن) = أ(1 + ر)^ن$

دالة التضاؤل الأسى

◂ هى دالة تستخدم في تمثيل التضاؤل الأســـى بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية (ن)

$د(ن) = أ(1 - ر)^ن$

دالة الربح المركب

◂ عند حساب مبلغ أصله أ يعطى ربحا سنويا مركبا كنسبة مئوية لعدد من السنوات بفترات تقسيم العائد السنوى الي فترات زمنية

$$\boxed{ج = أ\left(1 + \frac{ر}{س}\right)^{ن س}}$$

المعادلة

$س^ن = أ$ حيث : $أ \in ح$ ، $ن \in ص^+$ لها ن من الجذور

اذا كان : ن عدداً زوجيا $أ > ٠$

فان المعادلة $س^ن = أ$ لها جذران حقيقيان أحدهما موجب و الأخر سالب و باقى الجذور مركبة غير حقيقية (عندما $ن > 2$) و يرمز للجذرين الحقيقيين بالرمزين $\sqrt[ن]{أ}$ ، $-\sqrt[ن]{أ}$ و يسمى الجذر النونى الذى له نفس اشارة أ بالجذر النونى الأساسى للعدد أ .

اذا كان : ن عدداً زوجيا $أ < ٠$

فان المعادلة $س^ن = أ$ ليس لها جذور حقيقية وجذورها أعداد مركبة غير حقيقية

اذا كان : ن عدداً فرديا $أ \in ح - \{٠\}$

فان المعادلة $س^ن = أ$ لها جذر حقيقي وحيد هو $\sqrt[ن]{أ}$ و باقى الجذور أعداد مركبة غير حقيقية

اذا كان : $ن \in ص^+$ ، $أ = ٠$

فان المعادلة $س^ن = ٠$ لها حل حقيقي وحيد هو $س = ٠$ و يكون عدد جذور المعادلة يساوى ن و كل منها يساوى صفر وذلك عند $ن > 1$.

الدالة اللوغاريتمية

الدالة اللوغاريتمية :

- هى الدالة العكسية للدالة الأسية و يعرف لوغاريتم عدد ما بالنسبة لأساس ما بأنه الأس المرفوع على الأساس و الذى سينتج ذلك العدد .
- فعلى سبيل المثال : لوغاريتم ١٠٠٠ بالنسبة للأساس ١٠ هو ٣ لأن : ١٠٠٠ = ١٠ × ١٠ × ١٠ = $١٠^{٣}$

و عموما يمكن القول أنه : اذا كان : س = $م^{ص}$ فان : لوغاريتم س بالنسبة للأساس م هو ص

ويعبر عن ذلك رياضيا بالعلاقة : $\boxed{\text{لــو}_{م}\ \text{س} = \text{ص}}$

ص = $\text{لــو}_{م}$ س $\Leftrightarrow$ س = $م^{ص}$ حيث : م $\in$ $ح^{+}$ – { ١ } ، س $\in$ $ح^{+}$ ، ص $\in$ ح .

- لا معنى للحديث عن لوغاريتم عدد غير موجب فكل من : $\text{لــو}_{٣}$ –١ ، $\text{لــو}_{٢}$ ٠ لا معنى له .
- الأساس م يجب أن يكن عددا موجبا يختلف عن الواحد الصحيح و يترتب على ذلك أن كلا من : $\text{لــو}_{٣}$ –١ ، $\text{لــو}_{٢}$ ٠ لا معنى له .

$\text{لـو}_{م}$ س = عدد حقيقى	$\text{لـو}_{م}$ م = ١ ، $\text{لـو}_{م}$ ١ = صفر
$\text{لـو}_{م}$ س + $\text{لـو}_{م}$ ص = $\text{لـو}_{م}$ س ص	$\text{لـو}_{م}$ ب = جـ $\leftrightarrow$ $م^{جـ}$ = ب
$\text{لـو}_{م}$ س – $\text{لـو}_{م}$ ص = $\text{لـو}_{م}\frac{س}{ص}$	$م^{\text{لـو}\ ب}$ = $ب^{\text{لـو}\ م}$
$\text{لـو}_{م}$ $س^{ن}$ = ن $\text{لـو}_{م}$ س	$\text{لـو}_{ب}$ م = $\text{لـو}_{ب^{ن}}$ $م^{ن}$
$\text{لـو}_{م}$ س × $\text{لـو}_{م}$ ص $\neq$ $\text{لـو}_{م}$ س ص	$\text{لـو}_{ب}$ م = $\frac{\text{لـو}_{جـ}\ م}{\text{لـو}_{جـ}\ ب}$
$\text{لـو}_{ب}$ م = $\frac{١}{\text{لـو}_{م}\ ب}$	$م^{\text{لـو}_{م}\ س}$ = س
$\text{لـو}_{م}$ ٠ غير معرف	$\text{لـو}_{م}$ س × $\text{لـو}_{م}$ ص $\neq$ $\text{لـو}_{م}$ س ص
$\text{لـو}_{ب}$ م = $\frac{١}{\text{لـو}_{م}\ ب}$	$\text{لـو}_{م}$ $\text{لـو}_{ب}$ س $\neq$ $\text{لـو}_{ب}$ $\text{لـو}_{م}$ س
$\text{لـو}_{ب}$ م = $\text{لـو}_{\frac{١}{ب}}$ $(\frac{١}{م})$	$\text{لـو}_{م}$ س = $\text{لـو}_{م}$ ص

- اللوغاريتم المعتاد الذى أساس ١٠ وقد اتفق على حذف هذا الأساس .
- عند كتابة اللوغاريتم مثل : $\text{لــو}_{١٠}$ ٨ نكتب : لــو ٨
- في تركيب دالتين اذا اعطى دالة التركيب و كانت الدالة الثانية دالة أسية فان : الدالة الأولى تكون لوغاريتمية على الصورة $\text{لــو}_{\text{الأساس}}$.

بعض خواص الدالة اللوغاريتمية :

- د : د (س) = $\text{لــو}_{م}$ س المجال : $ح^{+}$ المدى : ح

الدالة اللوغاريتمية تزايدية عندما م > ١ و تناقصية عندما ٠ < م < ١

جميع منحنيات الدوال اللوغاريتمية لأى أساس موجب ≠ ١ تمر بالنقطة (١ ، ٠)

الدالة اللوغاريتمية هى دالة أحادية أى أنه اذا كان : $\text{لو}_{م}$ س = $\text{لو}_{م}$ ص فان س = ص

- $\text{لو}_{م}$ (س + ص) ≠ $\text{لو}_{م}$ س × $\text{لو}_{م}$ ص
- $\text{لو}_{م}$ (س + ص) ≠ $\text{لو}_{م}$ س + $\text{لو}_{م}$ ص
- اذا كان : $\text{لو}_{م}$ $\text{لو}_{ب}$ $\text{لو}_{جـ}$ .... $\text{لو}_{ن}$ د(س) = ل فان : د(س) = ن

م ب جـ . . ل

- أوجد مجال الدالة الأتية د(س) = $\text{لــو}_{٣-س}$ س

الحل

الدالة معرفة لجميع قيم س التي تحقق أن

س > ٠	٣ – س > ٠	٣ – س ≠ ١

أي تحقق أن

س > ٠	س < ٣	س ≠ ٢

∴ مجال الدالة د =]٠، ٣[– {٢}

الدالة العكسية

الدالة العكسية :

- اذا كانت الدالة د(س) أحادية من المجموعة س إلى المجموعة ص

فان : الدالة د $^{-1}$ (س) تسمى دالة عكسية للدالة د(س) من ص إلى س لكل (س ، ص) ∈ د (س) ، (ص ، س) ∈ د $^{-1}$ (س)

- منحنى الدالة د(س) هو منحنى الدالة د $^{-1}$ (س) بالانعكاس حول المستقيم س = ص
- لكى تكون الدالة لها دالة عكسية يجب أن تكون الدالة أحادية و اذا لم تكن أحادية فإنه لا يوجد لها دالة عكسية .
- تكون الدالة د(س) دالة عكسية للدالة ر(س) ، ر(س) دالة عكسية للدالة د(س) اذا كان :

(د o ر) (س) = (ر o د) (س) = س

الدالة العكسية للدالة الكسرية :

- اذا كان د(س) = (اس + ب) / (جـ س + ء)

فان : د $^{-1}$ (س) = (ء س − ب) / (−جـ س + ا)

- نقطة التماثل = (أصفار المقام ، معامل س / معامل س)

= (−ء/جـ ، ا/جـ)

اذا كان : ا/جـ > صفر (أول و ثالث)

اذا كان : ا/جـ < صفر (ثانى و رابع)

إيجاد الدالة العكسية :

- نضع ص مكان د(س)
- نستبدل كل س بـ ص و كل ص بـ س
- نحصل على ص بدلالة س .
- و يكون مجال الدالة الأصلية = مدى الدالة العكسية

و مدى الدالة الاصلية = مجال الدالة العكسية .

(النهايات)

أنواع الكميات

- **الكميات المعينة** : هى الكميات التى لها ناتج محدد مثلا : ٣ × ٣ = ٩
- **الكميات الغير معرفة** : هى الكميات التى ليس لها قيمة أو ليس لها معنى مثل : $\frac{\text{ا}}{٠}$ حيث : ا ≠ ٠
- **الكميات الغير معينة** : هى الكميات التى ليس لها ناتج محدد و يكون لها عدد لا نهائى من الحلول .

$\frac{٠}{٠}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\infty - \infty$	١^{∞}
$\infty \times ٠$	$\infty^{٠}$	$٠^{٠}$	
		١^{∞}	

نهاية الدالة جبرياً

- **نهاية الدالة الثابتة** : هى الثابت نفسه   مثال : $\underset{\text{س} \leftarrow \text{ا}}{\text{نهـــا}}$ ك = ك
- **نهاية الدوال كثيرات الحدود** : التعويض في الدالة بالقيمة التى تؤول اليها س   مثال : $\underset{}{\text{نهـــا}}$ د(س) = د (ا)
- **نهاية الدالة الكسرية** : $\underset{\text{س} \leftarrow \text{ا}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{ء(س)}}{\text{ر(س)}}$

التعويض في الدالة بالقيمة التى تؤول اليها . فان قيمة النهاية تكون على إحدى صور ثلاثة :

كمية معينة	كمية غير معرفة	كمية غير معينة
هي قيمة النهاية	النهاية غير موجودة	الدالة لها نهاية و نحصل عليها باختزال العامل الصفرى و ذلك بالاتى :

التحليل

مسائل التحليل نجد البسط أو المقام أو كلاهما يمكن تحليله فنختزل العامل الصفرى من البسط و المقام ونوجد قيمة النهاية

العامل الصفرى س ← ا (س – ا) أحد عوامل البسط و المقام .

القسمة المطولة و التركيبية

في بعض الأمثلة التى يكون فيها درجة البسط أو المقام أو كليهما أعلى من الدرجة الثانية يجد الطالب صعوبة في تحليل هذه المقادير إلى عواملها الأولية فلذلك نتبع مجموع من الطرق المختلفة للوصول إلى الحل

الضرب في المرافــق

في بعض مسائل النهايات يوجد مقدار مكون من حدين في البسط و المقام أحداهما أو كليهما يوجد به جذر أو جذرين بينهما إشارة سالب ولإيجاد قيمة النهاية نستخدم مرافق الجذر التربيعي :

مرافق الجذر التربيعى

المقدار	مرافقه
$\sqrt{\text{ا}}$ – ب	$\sqrt{\text{ا}}$ + ب

مرافق الجذر التكعيبى

المقدار	مرافقه
$\sqrt[٣]{\text{ا}}$ – ب	$(\text{ا})^{\frac{٢}{٣}} + (\text{ا})^{\frac{١}{٣}}\text{ب} + \text{ب}^{٢}$
$\sqrt[٣]{\text{ا}}$ + ب	$(\text{ا})^{\frac{٢}{٣}} - (\text{ا})^{\frac{١}{٣}}\text{ب} + \text{ب}^{٢}$

طريقة بديلة

في مسائل النهايات يكون هناك في البسط أو المقام مقدار من الدرجة الثالثة يصعب تحليله .

الحل : اذا كان : ل ، م ، ن هى جذور مقدار الدالة الثالثة

$\text{ا س}^{٣} + \text{ب س}^{٢} + \text{حـ س}^{٢} + \text{ء}$

و لنفترض أن الجذر ن معلوم القيمة = العدد الذى تؤول اليه س

$\text{ل} + \text{م} + \text{ن} = \frac{-\text{ب}}{\text{ا}}$ $\text{ل م ن} = \frac{-\text{ء}}{\text{ا}}$

(س – ن) [س٬ – (ل – م) س + ل م]

$(\text{س} - \text{ن})\,[\,\text{س}^{٢} - (\text{ل} - \text{م})\,\text{س} + \text{ل م}\,]$

المهندس رامى رجب عوض الله
٠١٠٢١٢٢٦٠٠٤

نظرية (٤) القانون

شروط النظرية

- أن يكون عدد حدود البسط مساوية لعدد حدود المقام
- أن تكون أسس البسط متساوية و أسس المقام متساوية
- أن تكون الإشارة بين الحدين في البسط و المقام سالب .

نتائج

- $\underset{س \to ا}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{ن} - ا^{ن}}{س - ا} = ن \, (ا)^{ن-1}$
- $\underset{س \to ا}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{ن} - ا^{ن}}{س^{م} - ا^{م}} = \dfrac{ن}{م} \times (ا)^{ن-م}$
- $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(س+ا)^{ن} - ا^{ن}}{س} = ن \times (ا)^{ن-1}$

- إياك أن تحفظ سوى هذه الثلاث قوانين . فان استعصى عليك الحل فلابد من زرع المقام فيكون الحل .

مثال أوجد قيمة : $\underset{س \to ٩}{\text{نهـا}} \sqrt{س - ٩}$

الحل عند التعويض المباشر نجد أن قيمة النهاية = صفر

و هنا لا نسلم بقيمة النتائج هذا و إنما نقوم ببحث مجال الدالة و هى دالة جذرية دليلها زوجي

اذا مجالها ما تحت الجذر $\geq$ صفر فنجد أن : المجال [٩ ، ∞ [

فنجد أن النقطة التى سنقوم بالتعويض لها نقطة حدية في المجال و بالتالى تكون النهية فير موجودة .

لإيجاد المجاهيل : $\underset{س \to ل}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{2} + اس + ب}{س - ل} = م$ فأوجد قيمة ا ، ب

الحل الجذر الأول للبسط = العدد الذى تؤول إليه . ، الجذر الثاني للبسط = الجذر الأول − قيمة النهاية

ملحوظة هامة

اذا كان : $\underset{س \to ا}{\text{نهـا}} \sqrt[ن]{د(س)}$ حيث : ن عدد زوجي

فإننا نوجد $\underset{س \to ا}{\text{نهـا}} د(س)$ فاذا كانت : $\underset{س \to ا}{\text{نهـا}} د(س) = ٠$

فإننا ندرس مجال الدالة . فاذا كانت النقطة التى تؤول اليها من نقطة حدية في المجال أى بداية المجال أو نهايته

فإن : النهاية تكون غير موجودة .

نهاية الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة :

$$\underset{س \to ا^{+}}{\text{نهـا}} ر(س) = \underset{س \to ا^{-}}{\text{نهـا}} ك(س) = \text{عدداً حقيقياً}$$

- هذا النوع من الدوال له نهايتان : عند القيمة التى يتغير عندها تعريف الدالة

احداهما النهاية اليمنى و يرمز لها بالرمز $\underset{س \to ا^{+}}{\text{نهـا}} ر(س)$ وفي هذه الحالة نعين نهاية القاعدة ر(س) = الموجودة امام علامة أكبر من

و الاخرى نهاية يسرى و يرمز لها بالرمز $\underset{س \to ا^{-}}{\text{نهـا}} ك(س)$ و في هذه الحالة نعين نهاية القاعدة الموجودة أمام علامة اصغر و نقوم بتعيين قيمة الدالة من القاعدة ه (س) و لكى تكون نهاية الدالة موجودة لابد أن يتحقق : $\underset{س \to ا^{+}}{\text{نهـا}} ر(س) = \underset{س \to ا^{-}}{\text{نهـا}} ك(س) = \text{عدداً حقيقياً}$.

● هذا النوع من الدوال له نهايتان : عند القيمة التى يتغير عندها تعريف الدالة و لكن دائما النهاية اليمنى تساوى النهاية اليسرى في هذا النوع من الدوال

$$: \lim_{س \to أ^{+}} ر(س) = \lim_{س \to أ^{-}} ى(س)$$

أى نحسب النهاية من عند الدالة التى يكون عندها علامة لا تساوى

و اذا كانت : الدالة على صورة القيمة المطلقة $\lim_{س \to أ} |د(س)|$ و في هذه الحالة نعيد تعريف دالة القيمة المطلقة . الي دالة معرفة بأكثر من قاعدة كما ذكرنا في الحالات الثلاثة السابقة

نـهاية الدالة عند ما لا نـهاية

شرط حل المسألة :

● في هذا النوع من المسائل اذا كانت الدالة على الصورة القياسية نقوم بقسمة البسط و المقام على المتغير ذا أكبر أس في المسألة .

و اذا كانت غير قياسية : نقوم بالضرب في مرافق البسط بسطا و مقاماً

الصورة القياسية	الصورة الغير قياسية
$\lim_{س \to \infty} \frac{س^{٢} + ٥س + ٤}{س^{٣} + س}$	$\lim_{س \to \infty} \sqrt{س^{٢} + ١} - س$

اذا كانت المسألة :

$\lim_{س \to \infty} \frac{١}{س} = ٠$	$\lim_{س \to \infty} \frac{أ}{س} = ٠$
$\lim_{س \to \infty} \frac{أ}{س^{ن}} = ٠$	$\lim_{س \to \infty} س^{ن} = \infty$

● في هذا النوع من المسائل الى تؤول فيه النهاية الي ∞ فإننا :

نقسم البسط و المقام على المتغير ذا أكبر أس موجود في المسألة .

الاتصال :

● يقال للدالة أنها متصلة عند النقطة س = أ اذا حققت الشروط التالية

– الدالة معرفة : أى أن د(أ) لها وجود

– الدالة لها نهاية : أى ان $\lim_{س \to أ} د(س)$ = لها وجود

– قيمة الدالة = قيمة النهاية

اذا كانت المسألة تحتوى على جذور :

● نخرج المتغير من تحت الجذر و نقارنه بالمتغيرات التى توجد خارج الجذر لمعرفة أى الأس أكبر .

نـهاية الدالة بمجرد النظر :

الشرط	قيمة النهاية
إذا كانت درجة البسط تساوى درجة المقام	معامل أكبر أس فى البسط / معامل أكبر أس فى المقام
إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام	صفر
إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام	$\pm\infty$

نـهاية الدوال المثلثية

$\lim_{س \to ٠} \frac{جاس}{س} = ١$	$\lim_{س \to ٠} \frac{ظاس}{س} = ١$	$\lim_{س \to ٠} جتاس = ١$
$\lim_{س \to ٠} \frac{جاأس}{س} = أ$	$\lim_{س \to ٠} \frac{ظاأس}{س} = أ$	$\lim_{س \to ٠} \frac{جتاس}{س} = \frac{١}{٠}$
$\lim_{س \to ٠} \frac{جاأس}{بس} = \frac{أ}{ب}$	$\lim_{س \to ٠} \frac{ظاأس}{بس} = \frac{أ}{ب}$	$\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتاس}{س} = ٠$
$\lim_{س \to ٠} \frac{جاأس^{ن}}{بس^{ن}} = \frac{أ}{ب}$	$\lim_{س \to ٠} \frac{ظاأس^{ن}}{بس^{ن}} = \frac{أ}{ب}$	$\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتاأس}{أس} = ٠$
$\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتاأس}{أس^{٢}} = \frac{أ}{٢}$	$\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتاأس}{س^{٢}} = \frac{أ^{٢}}{٢}$	$\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتاس}{س^{٢}} = \frac{١}{٢}$
$\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتاس}{أس^{٢}} = \frac{١}{٢أ}$	$\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا^{ن} س}{س^{٢}} = \frac{١}{٢} ن$	$\lim_{س \to ٠} \frac{١ - \sqrt{جتاس}}{س^{٢}} = \frac{١}{٤}$

ويكفى عدم تحقق شرط واحد من الشروط الثلاثة السابقة للحكم على عدم اتصال الدالة عند النقطة س = أ .

حساب المثلثات

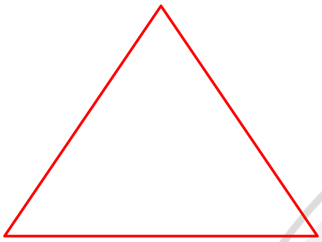
قانون الجيب :

في أى مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المناظرة لها .

صيغة القانون :

$$\frac{أَ}{جا أ} = \frac{بَ}{جا ب} = \frac{جـَ}{جا جـ} = \frac{أَ+بَ+جـَ}{جا أ+جا ب+جا جـ} = ٢ نق$$

$$= \frac{محيط المثلث}{جا أ+جا ب+جا جـ}$$



استنتاج القانون :

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب أى ضلعين في جيب الزاوية بينهما .

$$= \frac{١}{٢} بَ جـَ جا أ = \frac{١}{٢} أَ جـَ جا ب = \frac{١}{٢} أَ بَ جا حـ$$

بالقسمة على : أَ بَ جـَ

$$\frac{بَ جـَ جا أ}{أَ بَ جـَ} = \frac{أَ جـَ جا ب}{أَ بَ جـَ} = \frac{أَ بَ جا جـ}{أَ بَ جـَ}$$

$$\frac{جا أ}{أَ} = \frac{جا ب}{بَ} = \frac{جا جـ}{جـَ}$$

$$\therefore \frac{أَ}{جا أ} = \frac{بَ}{جا ب} = \frac{جـَ}{جا جـ}$$

محيط المثلث = أَ + بَ + جـَ

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع

$$= \frac{١}{٢} بَ جـَ جا أ = \frac{١}{٢} أَ جـَ جا ب = \frac{١}{٢} أَ بَ جا حـ$$

$$= \sqrt{ع(ع-أَ)(ع-بَ)(ع-جـَ)}$$

حيث : ع هى نصف المحيط

محيط الدائرة = ٢ π نق

مساحة الدائرة = π نق^{٢}

جيب التمام

قانون جيب التمام :

ايجاد الزاوية المحصورة بين ضلعين بمعلومية اضلاع المثلث

$$جتا أ = \frac{بَ^{٢}+جـَ^{٢}-أَ^{٢}}{٢بَ جـَ}$$

$$جتا ب = \frac{أَ^{٢}+جـَ^{٢}-بَ^{٢}}{٢أَ جـَ}$$

$$جتا حـ = \frac{أَ^{٢}+بَ^{٢}-جـَ^{٢}}{٢أَ بَ}$$

قوانين جيب التمام

$$أَ^{٢} = بَ^{٢} + جـَ^{٢} - ٢ جـَ بَ جتا \theta$$

$$بَ^{٢} = أَ^{٢} + جـَ^{٢} - ٢أَ جـَ جتا \theta$$

$$جـَ^{٢} = أَ^{٢} + جـَ^{٢} - ٢أَ بَ جتا \theta$$

لايجاد قياس زاوية داخل مثلث يفضل استخدام قانون جيب التمام ؟ لان : جيب التمام يوضح نوع الزاوية فاذا كان :

- جيب التمام (موجب) فان الزاوية تكون حادة
- جيب التمام يساوى (صفر) فان الزاوية تكون قائمة
- جيب التمام يساوى (سالب) فان الزاوية تكون منفرجة

لاثبات أن الشكل متوازى أضلاع :

لابد من اثبات أن :

- كل ضلعين متقابلين متساويان في الطول .
- كل زاويتان متقابلتان متساويتان في القياس
- زاويتين متتاليتان متكاملتان
- القطران كل منهما ينصف الأخر

لاثبات أن الشكل رباعى دائرى :

لابد من اثبات أن :

- زاويتان متقابلتين متكاملتان .
- زاوية خارجة عن الشكل = قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها .
- زاويتان مرسومتان على نفس القاعدة و فى جهة واحدة
- زاويتان مرسومتان على نفس القاعدة و فى جهة واحدة متساويتان في القياس

تذكر أن اذا كان : جتا θ = − جتا $\varnothing$ فان : $\theta + \varnothing$ = ١٨٠° .