الفصل الاول : القـــوى

مقدمة :

علم الميكانيا : هو العلم الذى يقوم بدارسة حركة أو اتزان الاجسام المادية ذلك باستخدام القوانين الخاصة بها .

علم الاستاتيكا : (علم توازن الأجسام) يبحث فى سكون الاجسام تحت تأثير مجموعة من المؤثرات نسميها " القوى " و أيضا دراسة العلاقات بين هذه القوى و بهذا يظل الجسم ساكنا ، و يقال حينئذ لمجموعة هذه القوى بأنها مجموعة متوازنة .

مراجعة عامة على المتجهات :

* **الكمية القياسية :** هى الكمية التى تتعين تماما بمعرفة عدد حقيقى هو مقدارها فقط
مثل : الطول ، الكتلة ، الزمن ، الحجم ، الوزن ، ٠٠٠٠
* **الكمية المتجهة (المتجة):** هى الكمية التى تتعين تماما بمعرفة مقدارها و اتجاهها.
مثل : السرعة ، الازاحة ، القوة ، العجلة ، ٠٠٠
* **القطعة المستقيمة الموجهة (المتجه):** هى قطعة مستقيمة لها طول و لها اتجاه من نقطة البداية الى نقطة النهاية .

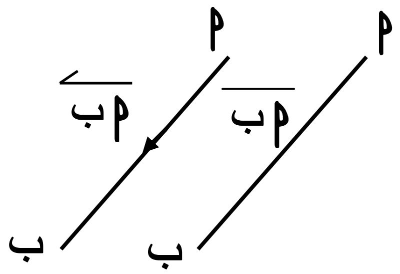
فى الشكل المقابل :

ﻡ نقطة بداية لقطعة مستقيمة ، ب نقطة نهاية لها

فإن القطعة الموجهة من ﻡ الى ب

يرمز لها بالرمز $\overleftarrow{\text{ﻡب}}$ تتحدد بـ :

١) نقطة بداية　　٢) نقطة نهاية　　٣) اتجاه من ﻡ الى ب



يقال لقطعتين موجهتين انهما متكافئتان إذا كان لهما نفس الطول و نفس الاتجاه

* **معيار المتجه :** إذا كان $\text{ﻡ} = (\text{س} ، \text{ص})$ فإن $\|\overleftarrow{\text{ﻡ}}\| = \sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2}$

* **المتجه الواصل بين نقطتين :** إذا كان $\overleftarrow{\text{ﻡ}} = (\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ ، $\overleftarrow{\text{ب}} = (\text{س}_2 ، \text{ص}_2)$

فإن $\overleftarrow{\text{ﻡب}} = \overleftarrow{\text{ب}} - \overleftarrow{\text{ﻡ}} = (\text{س}_2 - \text{س}_1 ، \text{ص}_2 - \text{ص}_1)$

القـــــوى

<u>* القوة</u> : هى تأثير أحد الاجسام الطبيعية على جسم طبيعى آخر .
هى كل مؤثر يغير أو يعمل على تغيير حالة الجسم من سكون أو حركة منتظمة .
هى متجه يتميز بأنه يمر بنقطة معلومة أو يعمل فى خط مستقيم معلوم

و يرمز للقوة التى مقدارها ق بالرمز $\overrightarrow{ق}$ ليدل على مقدارها و اتجاهها فى نفس الوقت
و إذا كانت القوة تصنع زاوية قياسها هـ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإنه يمكن كتابة القوة على صورة زوج مرتب (ق ، هـ) حيث ق = مقدار القوة ، هـ = قياس الزاوية

<u>* أنواع القوى</u> :

(١) قوى الشد (٢) قوى الضغط (٣) قوة الوزن (التثاقل)
(٤) قوة رد الفعل (٥) قوى الجذب و التنافر (مثل قوة حذب الأرض للأجسام)

<u>* خواص القوة</u> : يتوقف تأثير القوة على :

(١) مقدار القوة (٢) اتجاه القوة (٣) نقطة تأثير القوة و خط عملها

[١] <u>مقدار القوة</u> : هو مقدار ما تحتوية من وحدات القوة و اهم هذه الوحدات .

أولا : الوحدات التثاقلية : ١ ث كجم = ١٠٠٠ ث جم = ١٠ ^{٣} ث جم
ثانيا : الوحدات المطلقة : ١ نيوتن = ١٠٠٠٠٠ داين = ١٠ ^{٥} داين
ثالثا : ترتبط الوحدات التثاقلية بالوحدات المطلقة بالعلاقة :
١ ث كجم = ٩,٨ نيوين ، ١ ث جم = ٩٨٠ داين [مالم يذكر خلاف ذلك]

[٢] <u>اتجاه القوة</u> :
هو إتجاه المتجه الذى تمثله هذه القوة يتحدد بقياس الزاوية القطبية لمتجه القوة .

<u>الزاوية القطبية</u> : هى الزاوية التى يصنعها خط عمل القوة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات (هـ) و هى دائما فى عكس عقاب الساعة (اى دائما موجبة)

[٣] **نقطة التأثير و خط عملها** : لكل قوة نقطة تؤثر فيها و خط عمل تعمل فيه

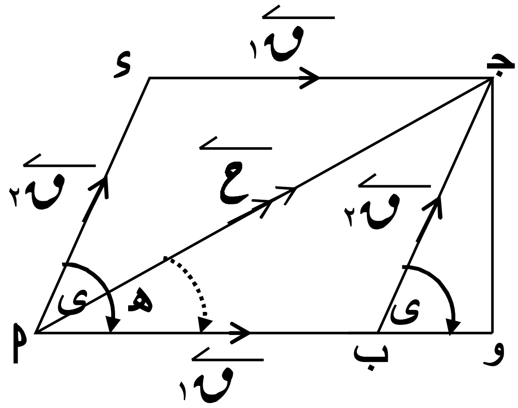
ملحوظة :
تأثير القوة على جسم يتوقف على موضع نقطة تأثيرها (مثل محاولة فتح باب ذو مفصلات)
و يسمى الخط المستقيم المار بنقطة تأثير القوة و الموازى لاتجاهها خط عمل القوة .

* **محصلة قوتين متلاقيتين فى نقطة :**

المحصلة : هى القوة التى تحُدث نفس التأثير الذى تحدثه (قوتين) أو عدة قوى على الجسم

تعيين المحصلة : لتعيين المحصلة تعييناً تاماً يجب تعين مقدارها و اتجاهها
و توجد طريقتان لتعيين المحصلة : ١) البيانية ٢) الجبرية (تحليلية)

[١] **الطريقة البيانية :**
إذا أثرت قوتان متلاقيتان فى نقطة و مثلهما تمثيلا تاماً ضلعان متجاوران من متوازى الأضلاع يبدأن من هذه النقطة فإن محصلتهما يمثلها تمثيلا تاما قطر متوازى الاضلاع الذى يبدأ من هذه النقطة .

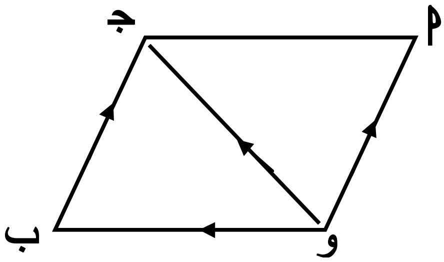


فى الشكل المقابل :
إذا كان $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أء}$ تمثلان $\overleftarrow{ق}_{1}$، $\overleftarrow{ق}_{2}$ تمثيلا تاماً (مقدارا واتجاهاً و خط عمل) فإن :

$$\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{ق}_{1} + \overleftarrow{ق}_{2} = (ح \text{ ، } هـ)$$

ح = مقدار المحصلة ، هـ هى الزاوية التى تصنعها المحصلة مع $ق_{1}$
بتطبيق قاعدة متوازى الاضلاع لجمع متجهين حيث هـ هى الزاوية الموجبة التى يصنعها $\overleftarrow{ح}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات (اتجاه $\overleftarrow{ق}_{1}$)

مثال : قوتان مقدارهما ٣٠ ، ٤٠ ث جم تؤثران فى نقطة مادية و قياس الزاوية بينهما ١١٠° أوجد بيانيا المحصلة و الزاوية بين المحصلة و القوة الاولى .
الحل :
بعمل مقياس رسم ١ سم لكل ١٠ ث جم
∴ و أ = ٣سم ، و ب = ٤ سم



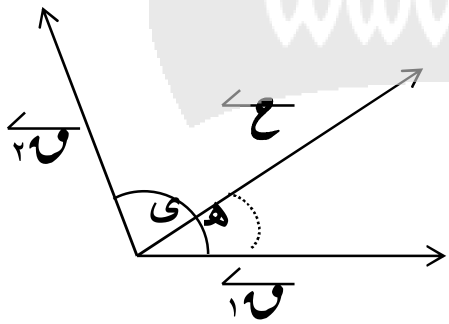
نكمل متوازى الاضلاع و بالقياس بالمسطرة

نجد أن : و جـ = ٤,٢ سم

∴ $\overline{\text{ح}}$ = ٤,٢ × ١٠ = ٤٢ ث جم ، ق($\widehat{\text{هـ}}$) = ٦٦°

[٢] **الطريقة الجبـــرية : [ايجاد محصلة قوتين متلاقيتين فى نقطة تحليليا (بالقانون):**

بفرض أن ق_1 ، ق_2 تؤثران فى جسم الزاوية بين خطى عملهما (ى) فإن محصلتهما تتعين من القانون :



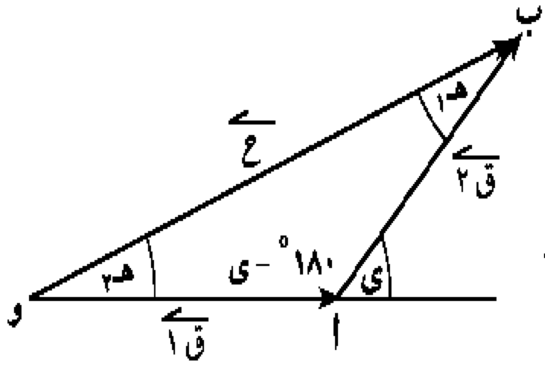
تعين المحصلة : $\text{ح}^2 = \text{ق}_1^2 + \text{ق}_2^2 + 2\,\text{ق}_1\,\text{ق}_2\ \text{حتا ى}$

تعين اتجاه المحصلة من القانون :

$$\text{ظا هـ} = \frac{\text{ق}_2\ \text{جا ى}}{\text{ق}_1 + \text{ق}_2\ \text{حتا ى}}$$

حيث هـ الزاوية بين المحصلة و القوة الاولى ق_1

طريقة آخرى : لايجاد زاوية ميل المحصلة على القوة ق_1 (استخدام قاعدة الجيب)

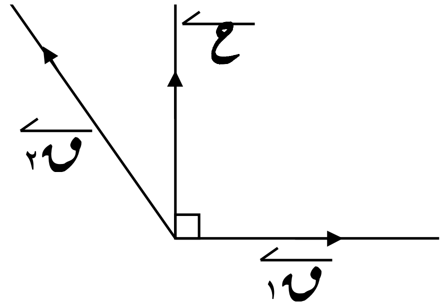


لاحظ أن: جا (١٨٠° - ى) = جاى

فإن: $\frac{\text{ق}_1}{\text{جا هـ}_1} = \frac{\text{ق}_2}{\text{جا هـ}_2} = \frac{\text{ح}}{\text{جا ى}}$ حيث ى = $\text{هـ}_1 + \text{هـ}_2$

وتستخدم هذه القاعدة لإيجاد زاوية ميل المحصلة على أى من $\overline{\text{ق}_1}$ ، $\overline{\text{ق}_2}$

لإيجاد زاوية ميل المحصلة مع $\overline{\text{ق}_1}$ نستخدم العلاقة: $\frac{\text{ق}_2}{\text{جا هـ}_2} = \frac{\text{ح}}{\text{جا ى}}$



*** شرط تعامد المحصلة $\overline{\text{ح}}$ على القوة $\overline{\text{ق}_1}$:**

إذا كان خط عمل المحصلة $\overline{\text{ح}}$ عموديا على القوة $\overline{\text{ق}_1}$

∴ $\text{ق}_1 + \text{ق}_2\ \text{حتا ى} = \text{صفر}$ ، $\text{ح}^2 = \text{ق}_2^2 - \text{ق}_1^2$

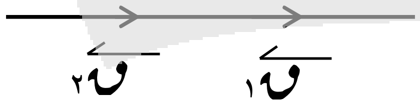
*** حالات خاصة :**

١- القوتان متساويتان فى المقدار : ق$_{١}$ = ق$_{٢}$ = ق ⟸ ح = ٢ق حتا $\frac{ى}{٢}$ ، هـ = $\frac{ى}{٢}$

أى أن ح تنصف الزاوية بين القوتين .

٢- القوتان متعامدتان : فى هذه الحالة ى = ٩٠° ، ح^{٢} = ق$^{٢}_{١}$ + ق$^{٢}_{٢}$ ، ظا هـ = $\frac{ق_{٢}}{ق_{١}}$

٣- القوتان لهما نفس خط العمل و فى نفس الاتجاه :

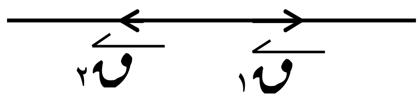


المحصلة لها قيمة عظمى (أو أكبر قيمة للمحصلة)

ح = ق$_{١}$ + ق$_{٢}$ ، ى = ٠

و اتجاه المحصلة هو اتجاه القوتين و نفس خط العمل

٤- القوتان لهما نفس خط العمل و فى اتجاهين متضادين :



المحصلة لها قيمة صغرى (أو أصغر قيمة للمحصلة)

ح = |ق$_{١}$ - ق$_{٢}$| ، ى = ١٨٠°

وتكون ح فى اتجاه القوة الأكبر مقدارا

* ملاحظة : ق$_{١}$ − ق$_{٢}$ ⩽ ح ⩽ ق$_{١}$ + ق$_{٢}$ أو [ق$_{١}$ − ق$_{٢}$ ، ق$_{١}$ + ق$_{٢}$]

مثال : أوجد مقدار و اتجاه المحصلة لكل زوج من القوى التالية :

(أ) ٥ نيوتن ، ٧ نيوتن و متعامدتان

(ب) ٣ نيوتن ، ٥ نيوتن و الزاوية بينهما ٦٠°

(جـ) ٥ نيوتن ، ٥ نيوتن و تحصران الزاوية ١٢٠°

الحل :

(أ) ∵ القوتان متعامدتان

∴ ح^{٢} = ق$^{٢}_{١}$ + ق$^{٢}_{٢}$ = (٥)^{٢} + (٧)^{٢} = ٧٤ ∴ ح = $\sqrt{٧٤}$ نيوتن

∵ ظا هـ = $\frac{ق_{٢}}{ق_{١}}$ = $\frac{٧}{٥}$ ∴ ق(هـ) = ٥٤° ٢٨′

(ب) ∵ ح^{٢} = ق$^{٢}_{١}$ + ق$^{٢}_{٢}$ + ٢ق$_{١}$ق$_{٢}$ حتا ى = (٣)^{٢} + (٥)^{٢} + ٢ × ٣ × ٥ حتا ٦٠ = ٤٩

∴ ح = ٧ نيوتن

∵ ظا هـ = $\frac{ق_{٢} حا ى}{ق_{١} + ق_{٢} حتا ى}$ = $\frac{٥ حا ٦٠}{٣ + ٥ حتا ٦٠}$ = ٠,٧٨٧٢٩٥٨

∴ ق(هـ) = ٣٨° ١٣′

(جـ) ∵ القوتان متساويتان ∴ $ح = ٢ق حتا \frac{ى}{٢} = ٢ × ٥ × حتا ٦٠ = ٥$ نيوتن

∴ $ق(\widehat{هـ}) = \frac{ى}{٢} = \frac{١٢٠}{٢} = ٦٠°$

مثال : أوجد الزاوية بين القوتين فى الحالات الاتية :

(أ) ٤ نيوتن ، ٨ نيوتن ، $ح = ٤\sqrt{٣}$

(ب) ٣ نيوتن ، ٥ نيوتن ، مقدار محصلتهما ٧ نيوتن .

(جـ) ٥ نيوتن ، ٦ نيوتن ، $ح = \sqrt{٦١}$ نيوتن

(ء) ٥٠ نيوتن ، ٥٠ نيوتن ، محصلتهما $= ٥٠\sqrt{٣}$ نيوتن

(هـ) ١٦ ث كجم ، ١٢ ث كجم ، محصلتهما $= ٤\sqrt{١٣}$ ث كجم

(و) ١٦ ث كجم ، ١٢ ث كجم ، محصلتهما = ٢٠ ث كجم

الحل :

(أ) ٤ نيوتن ، ٨ نيوتن ، $ح = ٤\sqrt{٣}$

∵ $ح^{٢} = ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢} + ٢ق_{١}ق_{٢}$ حتا ى ∴ ٤٨ = ١٦ + ٦٤ + ٢ × ٤ × ٨ حتا ى

∴ ٦٤ حتا ى = - ٣٢ ∴ حتا ى $= -\frac{١}{٢}$ $ق(\widehat{ى}) = ١٢٠°$

(ب) ٣ نيوتن ، ٥ نيوتن ، مقدار محصلتهما ٧ نيوتن .

∵ $ح^{٢} = ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢} + ٢ق_{١}ق_{٢}$ حتا ى ∴ ٤٩ = ٩ + ٢٥ + ٢ × ٣ × ٥ حتا ى

∴ ٣٠ حتا ى = ١٥ ∴ حتا ى $= \frac{١}{٢}$ $ق(\widehat{ى}) = ٦٠°$

(جـ) ٥ نيوتن ، ٦ نيوتن ، $ح = \sqrt{٦١}$ نيوتن

∵ $ح^{٢} = ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢} + ٢ق_{١}ق_{٢}$ حتا ى ∴ ٦١ = ٢٥ + ٣٦ + ٢ × ٥ × ٦ حتا ى

∴ ٦٠ حتا ى = ٠ ∴ حتا ى = ٠ $ق(\widehat{ى}) = ٩٠°$

(ء) ٥٠ نيوتن ، ٥٠ نيوتن ، محصلتهما $= ٥٠\sqrt{٣}$ نيوتن

∵ $ح = ٢ق حتا \frac{ى}{٢}$ ∴ $٥٠\sqrt{٣} = ٢ × ٥٠$ حتا $\frac{ى}{٢}$

∴ حتا $\frac{ى}{٢} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ $\frac{ى}{٢} = ٣٠$ ∴ $ق(\widehat{ى}) = ٦٠°$

(هـ) ١٦ ث كجم ، ١٢ ث كجم ، محصلتهما = ٤ $\sqrt{١٣}$ ث كجم

∵ $ح^{٢} = ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢} + ٢ ق_{١} ق_{٢}$ حتا ى ∴ ٢٠٨ = ٢٥٦ + ١٤٤ + ٢ × ١٦ × ١٢ حتاى

∴ ٣٨٤ حتا ى = - ١٩٢ ∴ حتا ى = - $\frac{١}{٢}$ ∴ ق($\widehat{ى}$) = ١٢٠ °

(و) ١٦ ث كجم ، ١٢ ث كجم ، محصلتهما = ٢٠ ث كجم

∵ $ح^{٢} = ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢} + ٢ ق_{١} ق_{٢}$ حتا ى ∴ ٤٠٠ = ٢٥٦ + ١٤٤ + ٢ × ١٦ × ١٢ حتاى

∴ ٣٨٤ حتا ى = ٠ ∴ حتا ى = ٠ ∴ ق($\widehat{ى}$) = ٩٠ °

مثال : قوتان مقدارهما ق ، ٢ق تؤثران فى نقطة مادية و محصلتهما تصنع زاوية قائمة مع القوة الأولى . أوجد الزاوية بين القوتين و كذلك أوجد مقدار محصلتهما .

الحل :

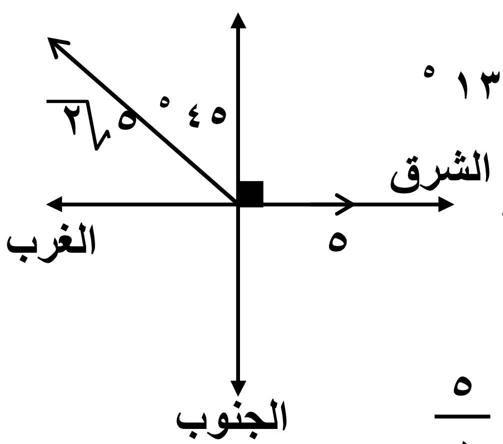
∵ المحصلة عمودية على القوة الأولى ∴ $ق_{١} + ق_{٢}$ حتا ى = ٠

∴ ق + ٢ق حتا ى = ٠ ∴ ٢ق حتا ى = - ق ∴ حتا ى = - $\frac{١}{٢}$ ∴ ق(ى) = ١٢٠

∵ $ح^{٢} = ق_{٢}^{٢} - ق_{١}^{٢}$

∴ $ح^{٢} = ٤ ق^{٢} - ق^{٢} = ٣ ق^{٢}$ ∴ ح = $\sqrt{٣}$ ق

مثال : قوتان مقدارهما ٥ ، ٥ $\sqrt{٢}$ ثقل كجم تؤثران فى نقطة الأولى نحو الشرق و الثانية فى اتجاه الشمال الغربى . أثبت أن محصلتهما مقدارها تساوى مقدار القوة الأولى و أوجد الزاوية التى تميل بها المحصلة على كل من القوتين



الحل :

$ق_{١}$ = ٥ ث كجم ، $ق_{٢}$ = ٥ $\sqrt{٢}$ ث كجم ، ى = ١٣٥ °

∵ $ح^{٢} = ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢} + ٢ ق_{١} ق_{٢}$ حتا ى

∴ $ح^{٢}$ = ٢٥ + ٥٠ + ٢ × ٥ × ٥ $\sqrt{٢}$ حتا١٣٥ = ٢٥

∴ ح = ٥ ث كجم = $ق_{١}$

∵ ظا هـ = $\frac{ق_{٢} \text{ حا ى}}{ق_{١} + ق_{٢} \text{ حتا ى}}$ = $\frac{٥\sqrt{٢} \text{ حا } ١٣٥}{٥ + ٥\sqrt{٢} \text{ حتا } ١٣٥}$ = $\frac{٥}{٠}$

∴ ظتا هـ = صفر ∴ ق($\widehat{هـ}$) = ٩٠

∴ المحصلة تميل بزاوية ٩٠ ° على القوة الاولى و بزاوية قدرها ٤٥ ° على القوة الثانية

مثال : إذا كانت الزاوية بين قوتان قائمة كانت محصلتهما $\sqrt{٣٤}$ نيوتن و إذا كانت الزاوية بينهما ٦٠° و كانت محصلتهما ٧ نيوتن أوجد مقدار كل من القوتين و كذلك أوجد النهايتين العظمى والصغرى لمحصلتهما .

الحل :

$\because$ القوتان متعامدتان $\therefore$ $ح^{2} = ق_{1}^{2} + ق_{2}^{2}$ $\therefore$ $ق_{1}^{2} + ق_{2}^{2} = ٣٤$ (١)

$\because$ $ح^{2} = ق_{1}^{2} + ق_{2}^{2} + ٢ ق_{1} ق_{2}$ حتا ى

$\therefore$ $٤٩ = ق_{1}^{2} + ق_{2}^{2} + ٢ ق_{1} ق_{2}$ حتا ٦٠

$\therefore$ $٤٩ = ق_{1}^{2} + ق_{2}^{2} + ق_{1} ق_{2}$ (٢)

و بحل المعادلتين (١) ، (٢) معاً : بطرح (١) من (٢) $\therefore$ $ق_{1} ق_{2} = ١٥$

$\therefore$ $ق_{1} = \frac{١٥}{ق_{2}}$ (٣) و بالتعويض فى (١)

$\therefore$ $٣٤ = \frac{٢٢٥}{ق_{2}^{2}} + ق_{2}^{2}$ بالضرب فى $ق_{2}^{2}$

$\therefore$ $٣٤ ق_{2}^{2} = ٢٢٥ + ق_{2}^{4}$ $\Leftarrow$ $ق_{2}^{4} - ٣٤ ق_{2}^{2} + ٢٢٥$

$\therefore$ $(ق_{2}^{2} - ٩)(ق_{2}^{2} - ٢٥) = ٠$ $\Leftarrow$ $ق_{2} = ٣$ ، $ق_{2} = ٥$ و بالتعويض فى (٣)

$\therefore$ $ق_{1} = ٥$ ، $ق_{1} = ٣$

$\therefore$ $ق_{1} = ٥$ نيوتن ، $ق_{2} = ٣$ نيوتن و باعتبار $ق_{1} > ق_{2}$

$\therefore$ القيمة العظمى للمحصلة $= ٥ + ٣ = ٨$ نيوتن

$\therefore$ القيمة الصغرى للمحصلة $= ٥ - ٣ = ٢$ نيوتن

مثال : قوتان مقدارهما $ق_{1}$ ، $ق_{2}$ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية محصلتهما ح حيث $ح \in [٢ ، ١٠]$ أوجد قيمة كل من $ق_{1}$ ، $ق_{2}$ ثم أوجد مقدار المحصلة عندما يكون قياس الزاوية بين خطى عملهما ١٢٠°

الحل :

$\because$ $ح \in [٢ ، ١٠]$ $\therefore$ $ق_{1} + ق_{2} = ١٠$ (١)

$\therefore$ $|ق_{1} - ق_{2}| = ٢$ $\therefore$ $ق_{1} - ق_{2} = ٢$ (٢) ، $ق_{1} - ق_{2} = -٢$ (٣)

من (١) ، (٢) ينتج : $ق_{1} = ٦$ نيوتن ، $ق_{2} = ٤$ نيوتن

من (١) ، (٣) ينتج : $ق_{1} = ٤$ نيوتن ، $ق_{2} = ٦$ نيوتن

$\because$ $ح^{2} = ق_{1}^{2} + ق_{2}^{2} + ٢ ق_{1} ق_{2}$ حتا ى

$\therefore$ $ح^{2} = ٣٦ + ١٦ + ٢ \times ٦ \times ٤$ حتا ١٢٠ $= ٢٨$ $\therefore$ $ح = ٢\sqrt{٧}$ نيوتن

مثال : جسم متزن يتأثير ثلاث قوى مستوية مقاديرها ٥ ، ١٠ ، $٥\sqrt{٣}$ ث كجم على الترتيب أوجد قياس الزاوية بين كل قوتين من هذه القوى .

الحل :

الحالة الاولى :

$\because ح^{٢} = ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢} + ٢ ق_{١} ق_{٢}$ حتا ى

$\therefore (٥\sqrt{٣})^{٢} = (٥)^{٢} + (١٠)^{٢} + ٢ \times ٥ \times ١٠$ حتا ى

$\therefore$ حتا ى $= -\frac{١}{٢}$ $\therefore$ ى $= ١٢٠^{\circ}$

$\therefore$ قياس الزاوية بين القوتين ٥ ، ١٠ ث كجم هو ١٢٠°

الحالة الثانية :

$\because ح^{٢} = ق_{٣}^{٢} + ق_{٢}^{٢} + ٢ ق_{٣} ق_{٢}$ حتا ل

$\therefore (٥)^{٢} = (٥\sqrt{٣})^{٢} + (١٠)^{٢} + ٢ \times ٥\sqrt{٣} \times ١٠$ حتا ل

$\therefore$ حتا ل $= -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ $\therefore$ ل $= ١٥٠^{\circ}$

$\therefore$ قياس الزاوية بين القوتين $٥\sqrt{٣}$ ، ١٠ ث كجم هو ١٥٠°

$\therefore$ قياس الزاوية بين القوتين ٥ ، $٥\sqrt{٣}$ ث كجم $= ٣٦٠ - (١٢٠ + ١٥٠) = ٩٠^{\circ}$

مثال : قوتان مقدارهما ق ، ٢ق ث كجم تؤثران فى نقطة مادية ، قياس الزاوية بينهما ١٢٠° فإذا كانت محصلتهما $٥\sqrt{٣}$ ث كجم أوجد مقدار القوتين .

الحل :

$\because ح^{٢} = ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢} + ٢ ق_{١} ق_{٢}$ حتا ى

$\therefore (٥\sqrt{٣})^{٢} = ق^{٢} + ٤ ق^{٢} + ٢ \times ق \times ٢ ق$ حتا ١٢٠

$\therefore ٧٥ = ٣ ق^{٢} \Leftarrow ق^{٢} = ٢٥ \Leftarrow ق = ٥$ ث كجم

$\therefore$ مقدار القوتان هما ٥ ، ١٠ ث كجم

مثال: قوتان متلاقيتان فى نقطة مقدارهما ق ، ٢ق ث كجم مقدار محصلتهما ح و إذا زاد مقدار القوة الأولى ٥ ث كجم و تضاعف مقدار القوة الثانية فإن اتجاه المحصلة لا يتغير أوجد قيمة ق

الحل : $\because$ اتجاه المحصلة لا يتغير

$\therefore$ هـ قياس زاوية ميل خط عمل المحصلة مع القوة الأولى لا يتغير

∴ هـ فى الحالة الأولى تساوى هـ فى الحالة الثانية .

$$\text{ظا هـ} = \frac{٢\text{و حا ى}}{\text{و} + ٢\text{و حتا ى}} = \frac{٤\text{و حا ى}}{(\text{و} + ٥) + ٤\text{و حتا ى}}$$

$$\therefore \frac{٢\text{و حا ى}}{\text{و} + ٢\text{و حتا ى}} = \frac{٤\text{و حا ى}}{(\text{و} + ٥) + ٤\text{و حتا ى}}$$

$$\therefore \frac{٢}{\text{و} + ٢\text{و حتا ى}} = \frac{٤}{(\text{و} + ٥) + ٤\text{و حتا ى}}$$

∴ $٢\text{و} + ٤\text{و حتا ى} = \text{و} + ٥ + ٤\text{و حتا ى}$ ∴ $٢\text{و} = \text{و} + ٥$ ∴ $\text{و} = ٥$ ث كجم

مثال : قوتان مقدارهما ق ، ٤ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° فإذا كان مقدار محصلتهما يساوى $٤\sqrt{٣}$ نيوتن فأوجد: مقدار $\overleftarrow{\text{ق}}$ وقياس الزاوية التى تصنعها المحصلة مع $\overleftarrow{\text{ق}_١}$.

الحل : بالتعويض عن: $\text{ق}_١ = \text{ق}$ ، $\text{ق}_٢ = ٤$ ، $\text{ح} = ٤\sqrt{٣}$ ، $\text{ى} = ١٢٠°$

فى القانون : $\text{ح}^٢ = \text{ق}_١^٢ + \text{ق}_٢^٢ + ٢\,\text{ق}_١\text{ق}_٢ \text{ جتا ى}$

$\therefore (٤\sqrt{٣})^٢ = \text{ق}^٢ + (٤)^٢ + ٢ \times \text{ق} \times ٤ \text{ جتا } ١٢٠°$

$\therefore \text{ق}^٢ - ٤\text{ق} - ٣٢ = ٠$ أىْ أنَّ: $(\text{ق} + ٤)(\text{ق} - ٨) = ٠$ ومنها ق = ٨ نيوتن

لإيجاد الزاوية بين $\overleftarrow{\text{ق}}$ ، $\overleftarrow{\text{ح}}$ نستخدم القانون: $\text{ظاهـ} = \frac{\text{ق}_٢ \text{ جا ى}}{\text{ق}_١ + \text{ق}_٢ \text{ جتا ى}}$

$$\therefore \text{ظاهـ} = \frac{٤ \times \text{جا } ١٢٠}{٨ + ٤ \times \text{جتا } ١٢٠} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$$

أى أن قياس الزاوية التى تصنعها المحصلة مع $\overleftarrow{\text{ق}_١} = ٣٠°$

<u>حل آخر للجزء الثانى:</u>

لإيجاد الزاوية بين $\overleftarrow{\text{ق}}$ ، $\overleftarrow{\text{ح}}$ نستخدم قانون الجيب: $\frac{\text{ق}_٢}{\text{جا هـ}_٢} = \frac{\text{ح}}{\text{جا ى}}$

$$\therefore \frac{٤}{\text{جا هـ}_٢} = \frac{٤\sqrt{٣}}{\text{جا } ١٢٠}$$

$\text{جا هـ}_٢ = \frac{١}{٢}$ بالاختصار والتبسيط

أىْ أنَّ قياس الزاوية التى تصنعها المحصلة مع $\overleftarrow{\text{ق}}$ تساوى ٣٠°

تمارين على القوى

[١] اختر الاجابة الصحيحة من بين الاقواس :

١) قوتان مقدارهما ٦ ، ٨ نيوتن و قياس الزاوية بينهما ٩٠ ° فإن مقدار محصلتهما تساوى .... نيوتن [١٠ أ، ٥ أ، ٧ أ، ١٢]

٢) قوتان متساويتان و مقدار كل منهما ٥ نيوتن و مقدار محصلتهما ٥ نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما تساوى .... [٠ ° أ، ٩٠ ° أ، ١٢٠ أ، ١٨٠ °]

٣) قوتان متساويتان فى المقدار و متعامدتان و محصلتهما ٨ نيوتن فإن مقدار كل قوة منهما يساوى .... نيوتن [٤ أ، ٨ أ، ٢ $\sqrt{٢}$ أ، ٤ $\sqrt{٢}$]

٤) قوتان مقدارهما ٤ ، ق نيوتن و قياس الزاوية بينهما ١٢٠ ° فإذا كانت محصلتهما عمودية على القوة الأولى فإن ق = ... نيوتن [٢ أ، ٤ أ، ٨ أ، ٤ $\sqrt{٣}$]

٥) قوتان مقدارهما ٨ ، ق ث جم و قياس الزاوية بينهما ∋] ٠ ، ط [و محصلتهما تنصف الزاوية بينهما فإن ق = ... ث جم [٤ أ، ٨ أ، ١٦ أ، ٢ $\sqrt{٢}$]

---

[٢] قوتان مقدارهما ١٥ ، ٨ ث كجم تؤثران فى نقطة مادية إذا كان مقدار محصلتهما ١٣ ث . كجم أوجد قياس الزاوية بين هاتين القوتين .

---

[٣] قوتان مقدارهما ١٢ ، ١٥ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية و ظل الزاوية بينهما يساوى $\frac{-٣}{٤}$ أوجد مقدار و محصلتهما و قياس زاوية ميلها على القوة الأولى .

---

[٤] قوتان ق ، ٢ ق تؤثران فى نقطة مادية و تحصران بينهما زاوية ظلها = - ١ و مقدار محصلتهما = ٤ نيوتن أوجد :

(أ) معيار ق (ب) زاوية ميل المحصلة على القوة الأولى .

---

[٥] قوتان مقدارهما ٢ ، ق نيوتن و الزاوية بينهما قياسها ١٢٠ ° أوجد قيمة ق من الحالات

(١) مقدار المحصلة تساوى ق [٢ نيوتن]

(٢) اتجاه المحصلة عمودى على القوة الثانية [١ نيوتن]

(٣) اتجاه المحصلة يميل بزاوية قياسها ٤٥ ° على القوة الثانية [$\sqrt{٣}$ + ١ نيوتن]

(٤) المحصلة تنصف الزاوية بين القوتين [٢ نيوتن]

---

[٦] قوتان متلاقيتان فى نقطة مقدارهما $ق_١$ ، $ق_٢$ ومقدار محصلتهما ح و الزاوية ١٢٠ °

و إذا عكس اتجاه $ق_٢$ فإن مقدار المحصلة يساوى ح$\sqrt{٣}$ أثبت أن $ق_١ = ق_٢$

و أن المحصلة فى الحالة الثانية يكون اتجاهها عمودية على اتجاه المحصلة فى الحالة الاولى

---

[٧] قوتان تؤاثران فى نقطة مادية و ظل الزاوية بينهما يساوى $\frac{-١}{\sqrt{٣}}$ إذا علم أن محصلتهما عمودية على الصغرى و أن مقدار القوة الكبرى يساوى ٣٠ نيوتن فما هو مقدار كل من القوة الأخرى و المحصلة .

[٨] أوجد مقدار كل من القوتين إذا كان:

(١) أكبر قيمة لمحصلتهما = ٢٠ نيوتن ، و أصغر قيمة لمحصلتهما = ٤ نيوتن

(٢) القوتان متعامدتان و أحدهما تساوى ثلاثة ارباع الاخرى و محصلتهما ٢٠ ث جم

---

[٩] قوتان النسبة بين مقدارهما ١ : $\sqrt{٢}$ و خط عمل محصلتهما يميل على القوة الكبرى بزاوية ٤٥ ° أوجد قياس الزاوية بينهما ثم أوجد مقدار كلاهما إذا علم أن مقدار محصلتهما ٣$\sqrt{٢}$

---

[١٠] قوتان مقدارهما ١٠ ، ٢٠ ث جم تؤاثران فى نقطة مادية خط عملهما على استقامة واحدة أوجد محصلهما إذا كانت :

(١) القوتان لهما نفس الاتجاه (٢) القوتان متضادتان فى الاتجاه

[١١] قوتان مقدارهما ١٥ ، ١٠ تؤاثران فى نقطة مادية و خط عملهما على استقامة واحدة أوجد :
(١) النهاية العظمى للمحصلة و اتجاهها (٢) النهاية الصغرى للمحصلة و اتجاهها

[١٢] قوتان مقدارهما ٤ ، ق نيوتن تؤاثران فى نقطة مادية الزاوية بيتهما ١٣٥ ° إذا كان اتجاه محصلتهما يميل بزاوية ٤٥ ° على القوة ق أوجد ق ومقدار محصلتهما

[يراعى الحلول المختلفة لبعض المسائل]

& **تمارين كتاب المدرسة :**

أكمل مايأتي:

① يتحدد تأثير قوة على جسم بالآتي ....

② متجه محصلة القوتين $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ يساوي ....

③ القيمة العظمى لمحصلة قوتين مقدارهما ٤ ، ٦ نيوتن متلاقيتان في نقطة يساوى ....

④ القيمة الصغرى لمحصلة قوتين مقدارهما ٥ ، ٩ نيوتن متلاقيتان في نقطة يساوى ....

⑤ ٢ ، ٣ نيوتن قوتان فإذا كان قياس الزاوية بينهما °٦٠ فإن مقدار محصلتهما تساوى ....

اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

⑥ مقدار محصلة القوتان ٣ ، ٥ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ٦٠° تساوى.

(أ) ٢ نيوتن (ب) ٦ نيوتن (ج) ٧ نيوتن (د) ٨ نيوتن

⑦ قوتان مقدارهما ٣ ، ٤ نيوتن ومقدار محصلتهما ٥ نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما تساوى

(أ) °٣٠ (ب) °٤٥ (ج) °٦٠ (د) °٩٠

(٨) قوتان متساويتان، مقدار كلٍّ منهما ٦ نيوتن ومقدار محصلتهما ٦ نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما تساوى

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

(٩) قوتان مقدارهما ٣ ، ق نيوتن وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° ، فإذا كانت محصلتهما عمودية على القوة الأولى فإن قيمة ق بالنيوتن تساوى:

(أ) ١,٥ (ب) ٣ (جـ) $٣\sqrt{٣}$ (د) ٦

(١٠) إذا كانت القوتان ٦ ، ٨ نيوتن متعامدتان فإن جيب زاوية ميل محصلتهما على القوة الأولى تساوى:

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

أجب عن الأسئلة الآتية:

(١١) قوتان مقدارهما ٥ ، ١٠ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وتحصران بينهما زاوية قياسها ١٢٠°. أوجد مقدار المحصلة وقياس الزاوية التى تصنعها المحصلة مع القوة الأولى.

(١٢) قوتان مقدارهما ٣ ، $٣\sqrt{٢}$ ث. كجم تُؤثِّران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ٤٥° أوجد مقدار واتجاه محصلتهما.

(١٣) قوتان مقدارهما ١٥ ، ٨ ث. كجم تؤثران فى نقطة مادية ، إذا كان مقدار محصلتهما ١٣ ث. كجم. فأوجد قياس الزاوية بين هاتين القوتين.

(١٤) قوتان مقدارهما ٨ ، ق نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° ، فإذا كان مقدار محصلتهما ق$\sqrt{٣}$ نيوتن فأوجد مقدار ق.

(١٥) قوتان مقدارهما ٤ ، ق نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٣٥° فإذا كان اتجاه محصلتهما يميل بزاوية ٤٥° على ق. أوجد مقدار ق.

(١٦) قوتان مقدارهما ٤ ، ق نيوتن تُؤثِّران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° ، إذا كانت محصلتهما عمودية على القوة الأولى. أوجد مقدار ق.

(١٧) قوتان مقدارهما ق ، ق$\sqrt{3}$ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية فإذا كان مقدار محصلتهما يساوى ٢ق نيوتن. فأوجد قياس الزاوية بين هاتين القوتين.

(١٨) قوتان مقدارهما ١٢ ، ١٥ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وجيب تمام الزاوية بينهما يساوى $\frac{-4}{5}$ أوجد مقدار محصلتهما وقياس زاوية ميلها على القوة الأولى.

(١٩) قوتان متساويتان مقدار كلٍّ منهما ق ث. كجم تَحصران بينهما زاوية قياسها ١٢٠° وإذا تضاعفت القوتان وأصبح قياس الزاوية بينهما ٦٠° زادت محصلتهما بمقدار ١١ ث. كجم عن الحالة الأولى. أوجد مقدار ق.

(٢٠) قوتان مقدارهما ١٢ ، ق ث. كجم تؤثران فى نقطة ، تعمل الأولى فى اتجاه الشرق وتعمل الثانية فى اتجاه ٦٠° جنوب الغرب. أوجد مقدار ق ومقدار المحصلة إذا عُلِمَ أنَّ خط عمل المحصلة يؤثر فى اتجاه ٣٠° جنوب الشرق.

(٢١) $ق_1$ ، $ق_2$ قوتان تؤثران فى نقطة مادية وتحصران بينهما زاوية قياسها ١٢٠° ومقدار محصلتهما $\sqrt{19}$ نيوتن. و إذا أصبح قياس الزاوية بينهما ٦٠° فإن مقدار المحصلة يساوى ٧ نيوتن. أوجد قيمة كل من $ق_1$ ، $ق_2$.

(٢٢) قوتان مقدارهما ق ، ٢ق ث. كجم تؤثران فى نقطة ما ، إذا ضُوعِفَ مقدار الثانية وزيد مقدار الأولى ١٥ ث. كجم لا يتغير اتجاه محصلتها. أوجد مقدار ق.

(٢٣) قوتان متساويتان فى المقدار ومتلاقيتان فى نقطة ومقدار محصلتهما يساوى ١٢ ث. كجم. و إذا عكس اتجاه إحداهما فإن مقدار المحصلة يساوى ٦ ث. كجم. أوجد مقدار كل من القوتين.

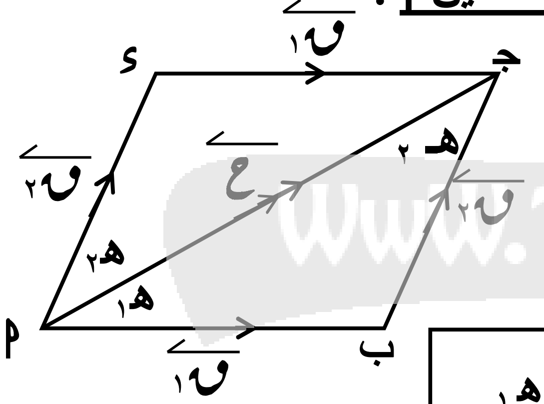
(٢٤) قوتان مقدارهما ك ، ق ومقدار محصلتهما ٢ك إذا كان قياس الزاوية بينهما هـ ، وإذا تغير قياس الزاوية وأصبحت (١٨٠° – هـ) فإن مقدار محصلتهما ينقص إلى النصف. أوجد مقدار كل من ك ، ق.

(٢٥) ق ، ٢ق قوتان تؤثران فى نقطة مادية وتحصران بينهما زاوية قياسها ى ومقدار محصلتهما يساوى $\sqrt{5}$ ق (م + ١) و إذا كان قياس الزاوية بينهما (٩٠° – ى) فإن مقدار المحصلة يساوى $\sqrt{5}$ ق (م - ١).

أثبت أن ظا ى = $\frac{م - ٢}{م + ٢}$

* تحليل قوة الى مركبتين*

(١) تحليل قوة معلومة فى اتجاهين معلومين [غير متعامدين] :



من الشكل المقابل :

بتطبيق قانون الجيب فى Δ ٢ب جـ :

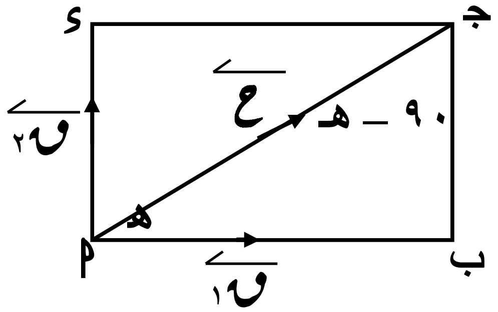
$$\frac{ق_١}{حا\ هـ_٢} = \frac{ق_٢}{حا\ هـ_١} = \frac{ح}{حا\ (هـ_١ + هـ_٢)}$$

ينتج : $$\boxed{ق_١ = \frac{ح\ حا\ هـ_٢}{حا\ (هـ_١ + هـ_٢)} \quad ، \quad ق_٢ = \frac{ح\ حا\ هـ_١}{حا\ (هـ_١ + هـ_٢)}}$$

$ق_١$ مقدار المركبة التى تميل على ح بزاوية $هـ_١$

، $ق_٢$ مقدار المركبة التى تميل على ح بزاوية $هـ_٢$

(٢) تحليل قوة معلومة فى اتجاهين متعامدين :



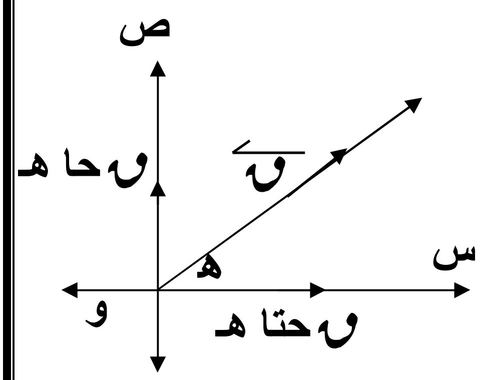
$$ق_١ = ح\ حتا\ هـ \quad ، \quad ق_٢ = ح\ حا\ هـ$$

ملاحظة :

مقدار المركبة المجاورة للزاوية هـ = ح حتا هـ

مقدار المركبة الاخرى للزاوية هـ = ح حا هـ

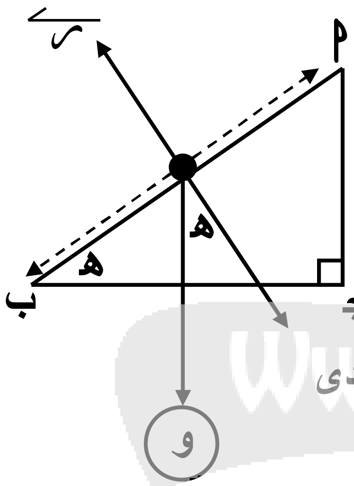
* تحليل قوة معلومة فى اتجاهى محورى الاحداثيات :



بفرض أن $\overleftarrow{ق}$ قوة تؤثر فى نقطة و فى نظام احداثى متعامد لها مقدار معلوم و اتجاه معلوم (زاوية معلومة هـ) فإنه يمكن كتابتها على الصورة : $\overleftarrow{ق} = (\overleftarrow{ق}\ ،\ هـ^{\circ})$

و تكتب : $= (ق\ حتا\ هـ\ ،\ ق\ حا\ هـ)$

$$\overleftarrow{ق} = ق\ حتا\ هـ\ \overleftarrow{س} + ق\ حا\ هـ\ \overleftarrow{ص}$$



*** المستوى المائل الأملس :**

عند وضع جسم على مستوى مائل أملس يميل على الافقى بزاوية قياسها هـ فتذكر ما يلى :

(١) قوة وزن الجسم (و) و هى تعمل فى اتجاه رأسي لأسفل

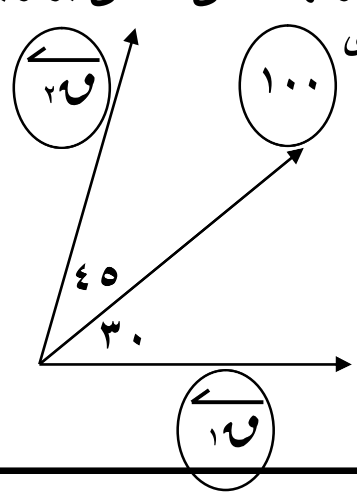
(٢) قوة رد فعل المستوى الأملس (ر) و تعمل فى اتجاه عمودى على المستوى الأملس .

(٣) الخط $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$ يسمى خط أكبر ميل

(٤) يمكن ايجاد قياس زاوية ميل المستوى على الافقى هـ حيث حا هـ = $\frac{\text{ارتفاع المستوى}}{\text{طول المستوى}}$

(٥) يمكن تحليل قوة وزن الجسم الى مركبتين الاولى فى اتجاه خط أكبر ميل لأسفل (وحاهـ) تكون الثانية فى اتجاه عمودى على المستوى لأسفل و تكون (و حتا هـ)

مثال : حُللت قوة مقدارها ١٠٠ نيوتن إلى مركبتين فى اتجاهين يميل أولهما على الافقى بزاوية قياسها ٣٠ ° و الاخرى بزاوية قياسها ٤٥ ° فى الناحية الاخرى أوجد مقدار هاتين المركبتين تحليا ً .



الحل : $ق_1 = \frac{ع \text{ حا } هـ_2}{\text{حا }(هـ_1 + هـ_2)} = \frac{١٠٠ \text{ حا } ٤٥}{\text{حا } ٧٥} = ٧٣,٢$ نيوتن

$ق_2 = \frac{ع \text{ حا } هـ_1}{\text{حا }(هـ_1 + هـ_2)} = \frac{١٠٠ \text{ حا } ٣٠}{\text{حا } ٧٥} = ٥١,٨$ نيوتن

مثال : حللت قوة مقدارها ١٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن إلى مركبتين متعامدين مقدار إحدهما ١٥ نيوتن فما مقدار المركبة الأخرى .

الحل : نفرض أن المركبة المعلومة المقدار (ق ١) تميل على إتجاه القوة بزاوية قياسها هـ

∴ $ق_1 = ١٠\sqrt{٣}$ حتا هـ

∴ $١٥ = ١٠\sqrt{٣} \times$ حتا هـ ∴ حتا هـ $= \frac{١٥}{١٠\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ هـ = ٣٠ °

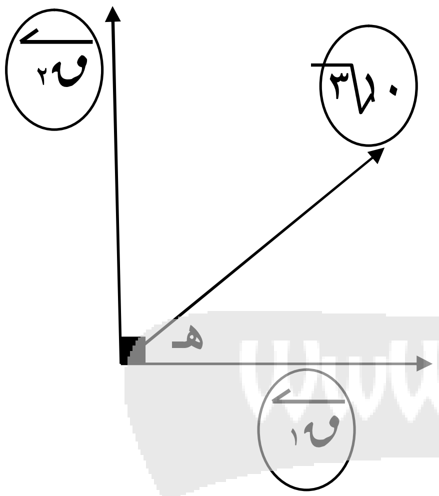
∴ مقدار المركبة الأخرى $ق_2 = ١٠\sqrt{٣}$ حتا ٣٠

$= ٥\sqrt{٣}$ نيوتن

حل آخر : $ح = \sqrt{ق_1^2 + ق_2^2}$

∴ $(١٠\sqrt{٣})^2 = (١٥)^2 + ق_2^2$

∴ $ق_2^2 = ٧٥$ ∴ $ق_2 = ٥\sqrt{٣}$ نيوتن

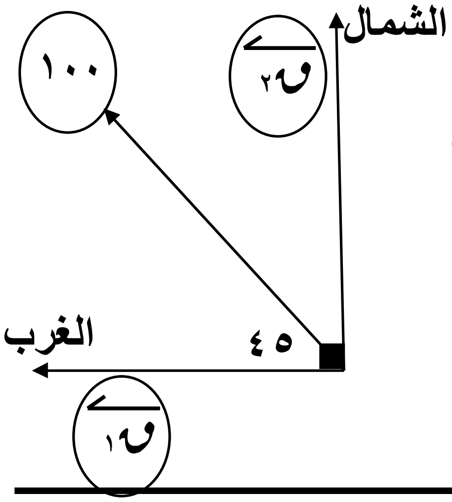


مثال : قوة مقدارها ١٠٠ ث جم تعمل فى اتجاه الشمال الغربى . احسب مركبتيهما فى اتجاهى الشمال و الغرب .

الحل :

$ق_1 =$ ١٠٠ حتا ٤٥ = ١٠٠ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = $٥٠\sqrt{٢}$ نيوتن

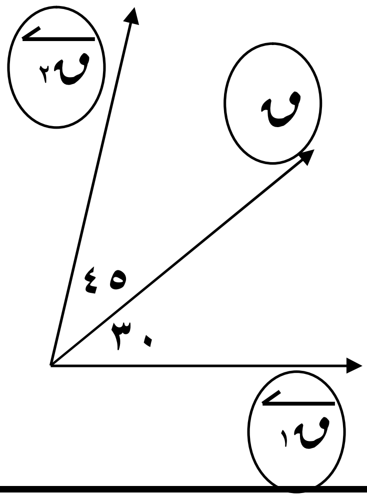
$ق_2 =$ ١٠٠ حا ٤٥ = ١٠٠ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = $٥٠\sqrt{٢}$ نيوتن



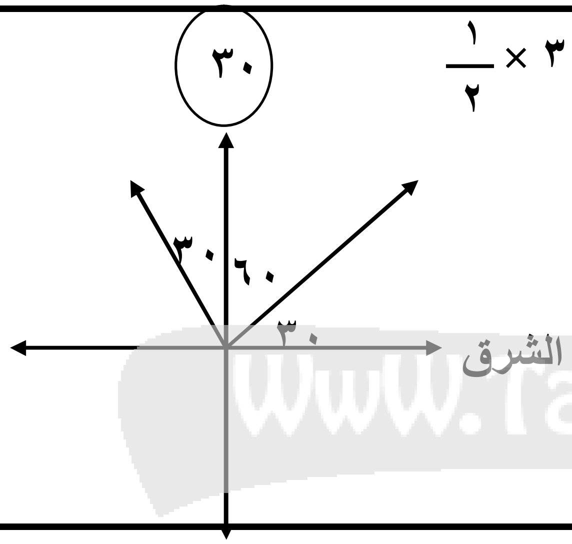
مثال : حلل قوة مقدارها ق نيوتن فى اتجاهين يميل أولهما على القوة بزاوية قياسها ٣٠ ° والأخر بزاوية قياسها ٤٥ ° فى الجهة الاخرى فإذا كان مقدار احدى المركبتين ٧,٣ نيوتن أوجد ق

الحل : ∵ $ق_1 = \frac{ق \text{ حا } هـ_2}{\text{حا } (هـ_1 + هـ_2)}$

$٧,٣ = \frac{ق \text{ حا } ٤٥}{\text{حا } ١٠٥}$ ∴ $ق = \frac{٧,٣ \text{ حا } ١٠٥}{\text{حا } ٤٥} \simeq ١٠$ نيوتن



مثال : حلل قوة مقدارها ٣٠ نيوتن تؤثر فى اتجاه الشمال الى مركبتين متعامدتين احداهما تعمل فى إتجاه شمال الشرق بزاوية قياسها ٣٠ °



الحل : المركبة فى الاتجاه المعلوم = ٣٠ حتا ٦٠ = ٣٠ × $\frac{١}{٢}$

= ١٥ نيوتن

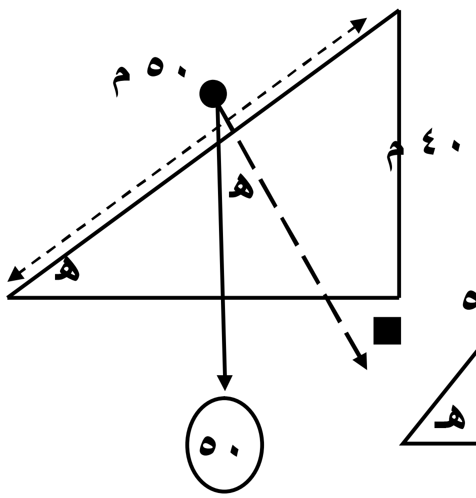
المركبة فى الاتجاه العمودى على الاتجاه المعلوم

= ٣٠ حا ٦٠ = ٣٠ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

= ١٥ $\sqrt{٣}$ نيوتن

مثال : مستوى مائل طوله ٥٠ م و ارتفاعه ٤٠ م وضع عليه جسم وزنه ٥٠ ث كجم
أوجد مقدار مركبتي الوزن فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى و الاتجاه العمودى عليه .

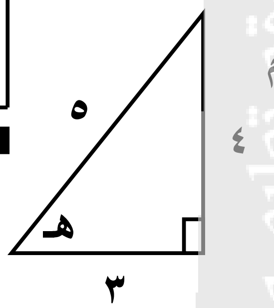
الحل :



المركبة فى اتجاه خط أكبر ميل = ٥٠ حا هـ

= ٥٠ × $\frac{٤}{٥}$

= ٤٠ ث كجم



المركبة فى الإتجاه العمودى = ٥٠ حتا هـ

= ٥٠ × $\frac{٣}{٥}$ = ٣٠ ث كجم

<u>تذكر أن</u> :

١) الجسم الجاسئ :
هو الجسم الذى يحتفظ بشكله دون تشوه إذا وقع تحت تأثير عوامل خارجية .

٢) مركز ثقل الجسم الجاسئ هى النقطة التى يمر بها دائما الخط الرأسي المار بنقطة التعليق عندما يعلق الجسم من أى نقطة عليه مثلا

أ) مركز ثقل جسم كرورى منتظم و متجانس هى النقطة التى يقع فيها مركز هذا الجسم
ب) مركز ثقل قضيب منتظم السمك و الكثافة هو منتصف هذا القضيب .

تمارين على تحليل قوة معلومة

[١] حلل قوة مقدارها ١٢ ث كجم تؤثر فى اتجاه الشمال الشرقى الى مركبتين إحداهما تؤثر نحو الشرق والاخرى نحو الشمال الغربى . أوجد مقدارهاتين المركبتين .

[٢] حلل قوة مقدارها ٤٠ نيوتن فى اتجاهين متعامدين احدهما يميل على الافقى بزاوية ٦٠° الى أسفل .

[٣] جسم مقدار وزنه ٢٠ نيوتن موضوع على مستوى يميل على الافقي بزاوية قياسها ٣٠ احسب مركبتي الوزن (و) فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى و الاتجاه العمودى علية

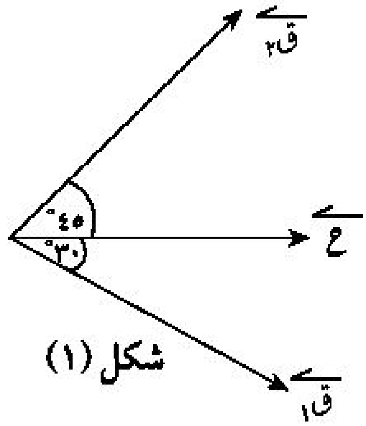
[٤] قوة مقدارها ق تؤثر فى اتجاه ٣٠ جنوب الشرق حللت الى مركبتين متعامدين احداهما تؤثر نحو الشرق و مقدارها ٢٥ $\sqrt{3}$ ث جم . أوجد ق و مقدار و اتجاه المركبة الاخرى

أكمل مايأتي:

(١) قوة مقدارها ٦ نيوتن تعمل فى اتجاه الشمال تم تحليلها الي مركبتين متعامدتين فإن مركبتها فى اتجاه الشرق تُساوى .... نيوتن.

(٢) قوة مقدارها ٤$\sqrt{2}$ نيوتن تعمل فى اتجاه الشرق تم تحليلها الي مركبتين متعامدتين فإن مركبتها فى اتجاه الشمال الشرقى تساوى .... نيوتن.

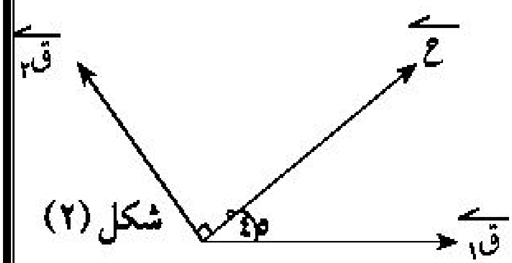
(٣) فى شكل (١):



شكل (١)

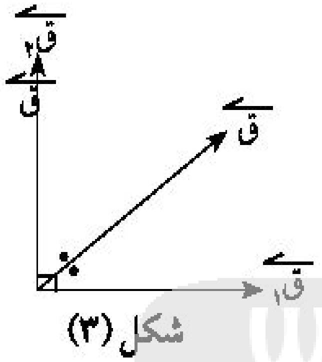
(أ) إذا حلَّلت القوة $\overrightarrow{ع}$ إلى مركبتين $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ اللتين تصنعان معها زاويتين قياساهما ٣٠° ، ٤٥° من جهتيها وكان $\|\overrightarrow{ع}\|$ = ١٢ نيوتن ، فإن: $ق_1$ = ... نيوتن ، $ق_2$ = ... نيوتن.

(٤) فى شكل (٢):



شكل (٢)

(أ) إذا حللت القوة $\overrightarrow{ع}$ إلى مركبتين $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ اللتين تصنعان معها زاويتين قياساهما ٤٥° ، ٩٠° من كلتا جهتيها وكان $\|\overrightarrow{ع}\|$ = ١٨ نيوتن ، فإن: $ق_1$ = ... نيوتن ، $ق_2$ = ... نيوتن

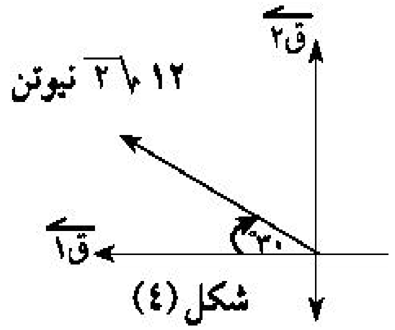


⑤ **فى شكل (٣):**

أ) إذا حلِّلت القوة $\overleftarrow{ق}$ إلى مركبتين متعامدتين $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ وكان متجه القوة ينصف الزاوية بين اتجاهى $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ وكان $\| \overleftarrow{ق} \| = ٦\sqrt{٢}$ ث كجم

فإن: $\| \overleftarrow{ق_1} \|$ =............... ث كجم ،

$\| \overleftarrow{ق_2} \|$ =............... ث كجم.



⑥ **فى شكل (٤):**

أ) قوة مقدارها $١٢\sqrt{٢}$ نيوتن تعمل فى اتجاه ٣٠° شمال الغرب.

- مقدار مركبة القوة فى اتجاه الغرب =............... نيوتن.
- مقدار مركبة القوة فى اتجاه الشمال =............... نيوتن.

⑦ قوة مقدارها ٦٠٠ ث جم تؤثّر فى نقطة مادية. أوجد مركبتيها فى اتجاهين يصنعان معها زاويتين ٣٠° ، ٤٥°.

⑧ قوة مقدارها ١٢٠ نيوتن تَعمل فى اتجاهِ الشمال الشرقى. أوجد مركبتيها فى اتجاه الشرق واتجاه الشمال.

⑨ حلِّل قوة أفقية مقدارها ١٦٠ ث جم فى اتجاهين متعامدين أحدهما يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° إلى أعلى.

⑩ قوة مقدارها ١٨ نيوتن تَعمل فى اتجاهِ الجنوب. أوجد مركبتيها فى اتجاهى ٦٠° شرق الجنوب، والأخرى فى اتجاه ٣٠° غرب الجنوب.

⑪ جسم جاسىء وزنه ٤٢ نيوتن موضوع على مستو يَميل على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠°. أوجد مركبتى وزن هذا الجسم فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى والاتجاه العمودى عليه.

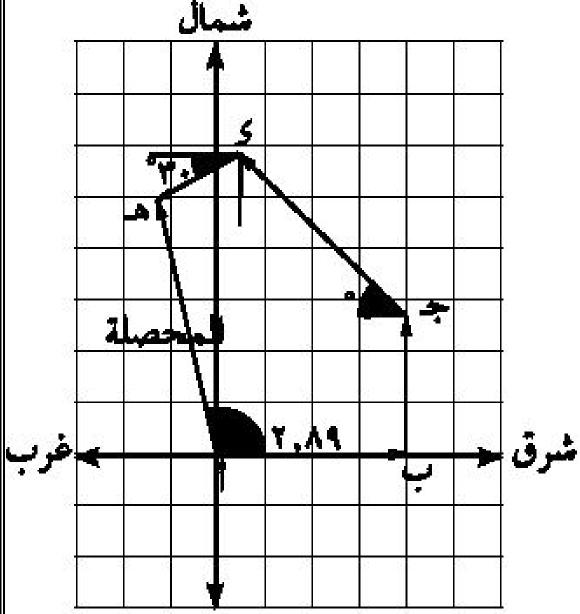
⑫ مستوى مائل طوله ١٣٠ سم وارتفاعه ٥٠ سم وضع عليه جسم جاسىء وزنه ٣٩٠ ث جم. أوجد مركبتى الوزن فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى والاتجاه العمودى عليه.

* **إيجاد محصلة عدة قوى بيانيا :** **استخدام برنامج (GeoGebra)**

مثال: ق١ ، ق٢ ، ق٣ ، ق٤ أربع قوى تؤثر فى نقطة من جسم جاسئ ، حيث ق١ = ٤٠٠ نيوتن وتعمل فى اتجاه الشرق ، ق٢ = ٣٠٠ نيوتن وتعمل فى اتجاه الشمال ، ق٣ = ٥٠٠ نيوتن وتعمل فى اتجاه الشمال الغربى ، ق٤ = ٢٠٠ نيوتن وتعمل بزاوية قياسها ٣٠° جنوب الغرب. أوجد محصلة هذه القوى.

الحل :

نرسم القطع المستقيمة الموجهة التى تمثل القوى بمقياس رسم ١: ١٠٠



فنرسم من نقطة الأصل المتجه أب الذي طوله ٤ وحدات فى اتجاه الشرق.

ثم نرسم من نقطة ب المتجه ب جـ الذي طوله ٣ وحدات فى اتجاه الشمال.

ثم نرسم من نقطة جـ المتجه جـ ء الذي طوله ٥ وحدات فى اتجاه الشمال الغربى.

ثم نرسم من ء المتجه ء هـ الذي طوله ٢ وحدة فى اتجاه ٣٠° جنوب الغرب.

فيكون المتجه أهـ يعبر عن المحصلة.

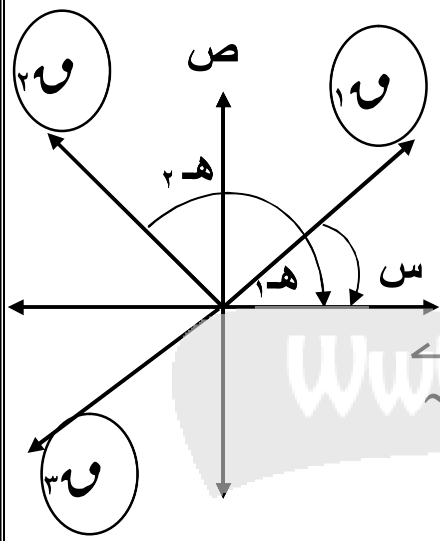
من الرسم || أهـ || = ٥,٦٨ وحدة طول.

مقدار المحصلة = ٥,٦٨ × ١٠٠ = ٥٦٨ نيوتن ، وتصنع المحصلة مع الشرق زاوية قياسها ١٠٢,٨٩°

تذكر أن :

مضلع القوى: إذا مُثلت مجموعة من القوى المستوية المتلاقيه في نقطة تمثيلًا بأطوال أضلاع مضلع مأخوذة فى ترتيب دورى واحد فإن محصلة هذه القوى تساوي طول الضلع الذى يقفل هذا المضلع فى الاتجاه الدورى المضاد.

* محصلة عدة قوى مستوية و متلاقية فى نقطة (تحليليا) :



إذا كانت القوى المعطاه :

$\overleftarrow{ق_1} = (ق_1 ، هـ_1)$ ، $\overleftarrow{ق_2} = (ق_2 ، هـ_2)$ ، ......

تحلل كل قوة من هذه القوى الى مركبتين فى الاتجاهين الموجبين لمحورى الاحداثيات و تكونان هما $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ على الترتيب

$$\overleftarrow{ح} = (\sum ق_ر حتا هـ_ر)\overleftarrow{س} + (\sum ق_ر حا هـ_ر)\overleftarrow{ص}$$

$$= س\,\overleftarrow{س} + ص\,\overleftarrow{ص} = (ح ، هـ)$$

أى أن : $ح^2 = س^2 + ص^2$ ، $ح = \sqrt{س^2 + ص^2}$

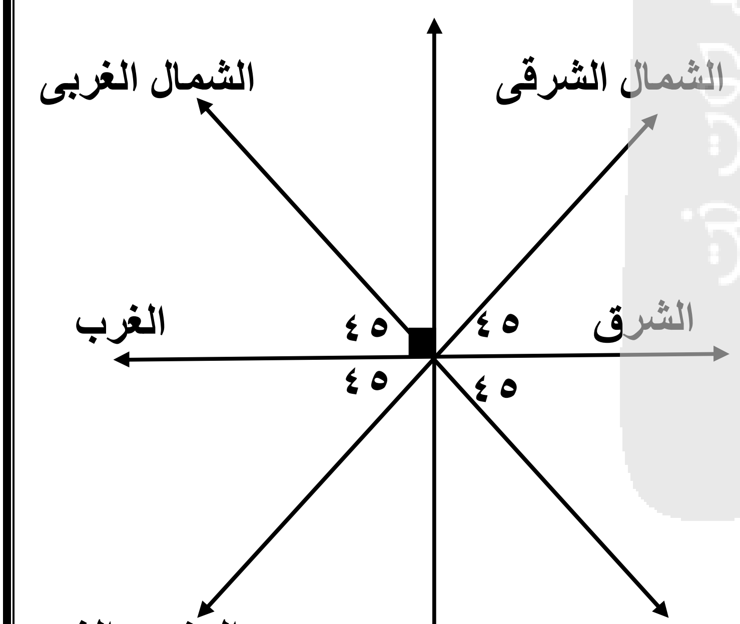
، $ظا هـ = \frac{ص}{س}$ حيث $هـ \in [\,٠ ، ٢ ط\,[$

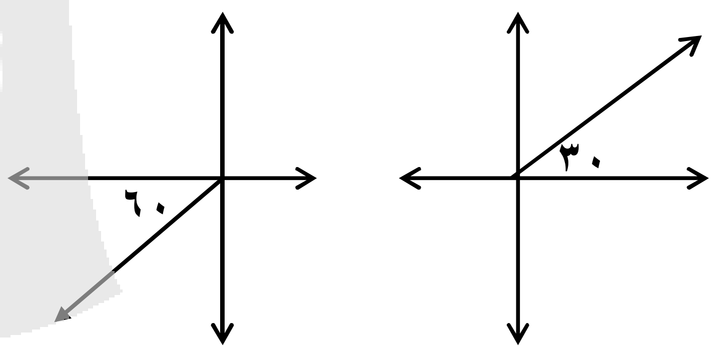
لاحظ : الفرق بين س ، $\overleftarrow{س}$

س = المجموع الجبرى لمركبات القوى فى الاتجاه الموجب لمحور السينات

$\overleftarrow{س}$ = هو متجه وحدة فى الاتجاه الموجب لمحور السينات و كذلك ص ، $\overleftarrow{ص}$

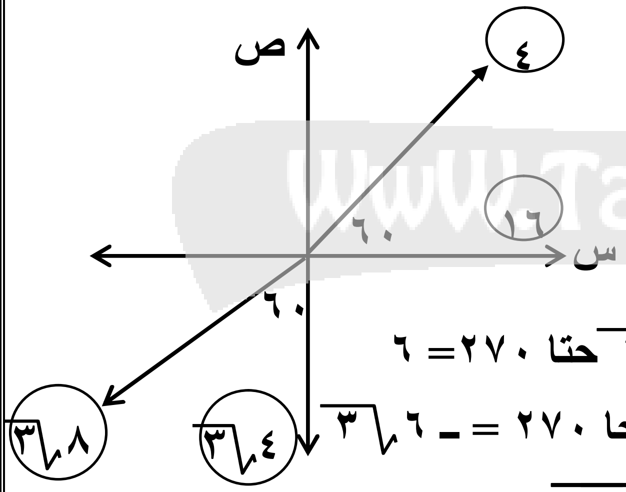
* تمثيل الاتجاهات الرئيسية و الفرعية :





مثال : أثرت قوى مقاديرها ١٦ ، ٤ ، ٨√٣ ، ٤√٣ نيوتن فى نقطة مادية فى اتجاهات الشرق ، ٦٠° شمال الشرق ، ٦٠° غرب الجنوب ، الجنوب على الترتيب
أوجد مقدار و اتجاه محصلة هذه القوى .

الحل :



القوة	١٦	٤	٨√٣	٤√٣
الزاوية	٠°	٦٠	٢١٠	٢٧٠

س = ١٦حتا ٠ + ٤حتا٦٠ + ٨√٣ حتا٢١٠ + ٤√٣ حتا ٢٧٠ = ٦

ص = ١٦حا ٠ + ٤حا٦٠ + ٨√٣ حا٢١٠ + ٤√٣ حا ٢٧٠ = − ٦√٣

ح = (٦ ، − ٦√٣) ∴ ح = √((٦)² + (− ٦√٣)²) = √١٤٤ = ١٢ نيوتن

ظا هـ = ص / س = − ٦√٣ / ٦ = − √٣

∵ س > ٠ ، ص < ٠ ∴ ق(هـ) = ٣٠٠

∴ المحصلة = ١٢ نيوتن وتصنع ٣٠٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

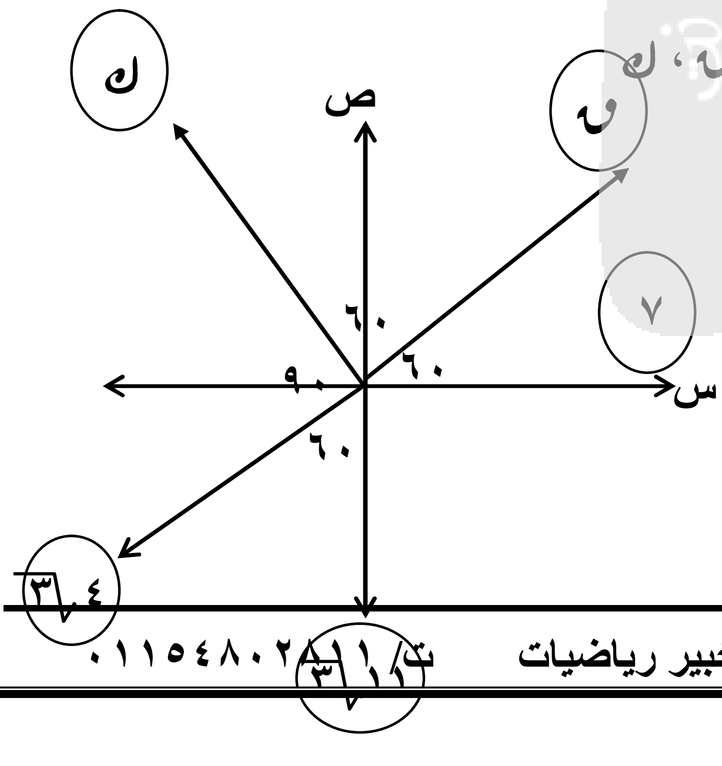
> يستخدم الآلة الحاسبة فى ايجاد الناتج

مثال : أثرت القوى ٧ ، ق ، ك ، ٤√٣ ، ١١√٣ ث كجم فى نقطة مادية و كان قياس الزاوية بين إتجاهي القوتين الأولى و الثانية ٦٠° ، بين الثانية و الثالثة ٦٠° ، بين الثالثة و الرابعة ٩٠° ، و بين الرابعة و الخامسة ٦٠° فإذا كانت هذه محصلة القوى تساوى ٤√٣ وتؤثر فى اتجاه الجنوب أوجد قيمة كل من ق ، ك

الحل :

∵ المحصلة تؤثر فى اتجاه الجنوب

∴ س = صفر ، ص = − ٤√٣



القوة	٧	ق	ك	٤√٣	١١√٣
الزاوية	٠°	٦٠	١٢٠	٢١٠	٢٧٠

س = ٧ حتا ٠ + ق حتا٦٠ + ك $\sqrt{٣}$ حتا١٢٠ + ٤$\sqrt{٣}$ حتا ٢١٠

+ ١١ $\sqrt{٣}$ حتا ٢٧٠ = صفر

∴ ق - ك = - ٢ (١)

ص = ٧ حا ٠ + ق حا٦٠ + ك $\sqrt{٣}$ حتا١٢٠ + ٤$\sqrt{٣}$ حتا ٢١٠ + ١١ $\sqrt{٣}$ حتا ٢٧٠

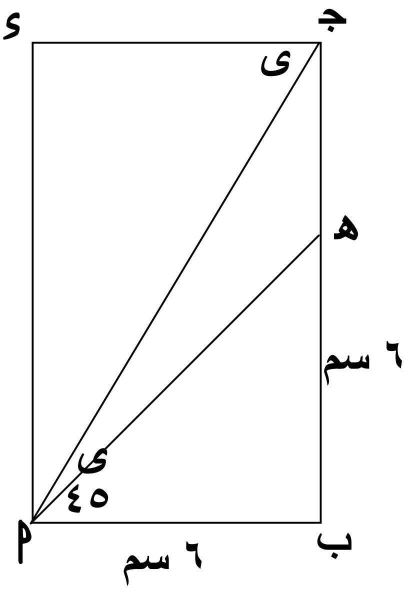
= - ٤$\sqrt{٣}$

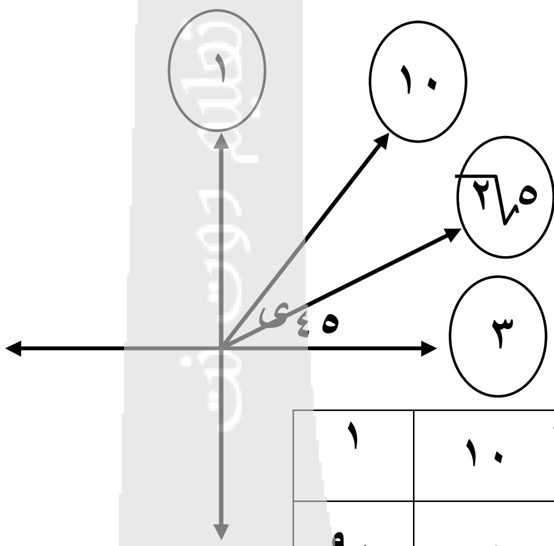
∴ ق + ك = ١٨ (٢) و بحل المعادلتين (١) ، (٢) نجد :

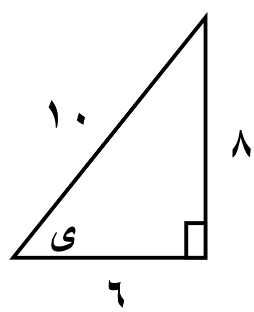
ق = ٨ ث كجم ، ك = ١٠ ث كجم

مثال : أب جـ د مستطيل فيه أب = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم أخذت نقطة هـ ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ بحيث ب هـ = ٦ سم ، أثرت قوى مقاديرها ١ ، ١٠ ، ٥$\sqrt{٢}$ ، ٣ ث جم فى $\overrightarrow{\text{أء}}$ ، $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{أهـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{أب}}$ على الترتيب أوجد مقدار محصلة هذه القوى .

الحل :







القوة	٣	٥$\sqrt{٢}$	١٠	١
الزاوية	٠°	٤٥	ى	٩٠

س = ٣ حتا ٠ + ٥$\sqrt{٢}$ حتا ٤٥ + ١٠ حتا ى + ١ × حتا ٩٠

= ٣ × ١ + ٥$\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ١٠ × $\frac{٦}{١٠}$ + ١ × ٠ = ١٤

ص = ٣ حا ٠ + ٥$\sqrt{٢}$ حا ٤٥ + ١٠ حا ى + ١ × حا ٩٠ = ١٤

∴ ح = (١٤ ، ١٤)　∴ ح = $\sqrt{(١٤)^{٢} + (١٤)^{٢}}$ = $\sqrt{١٩٦ \times ٢}$ = ١٤$\sqrt{٢}$

، ظا هـ = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{١٤}{١٤}$ = ١ ∵ س > ٠ ، ص > ٠　∴ هـ = ٤٥°

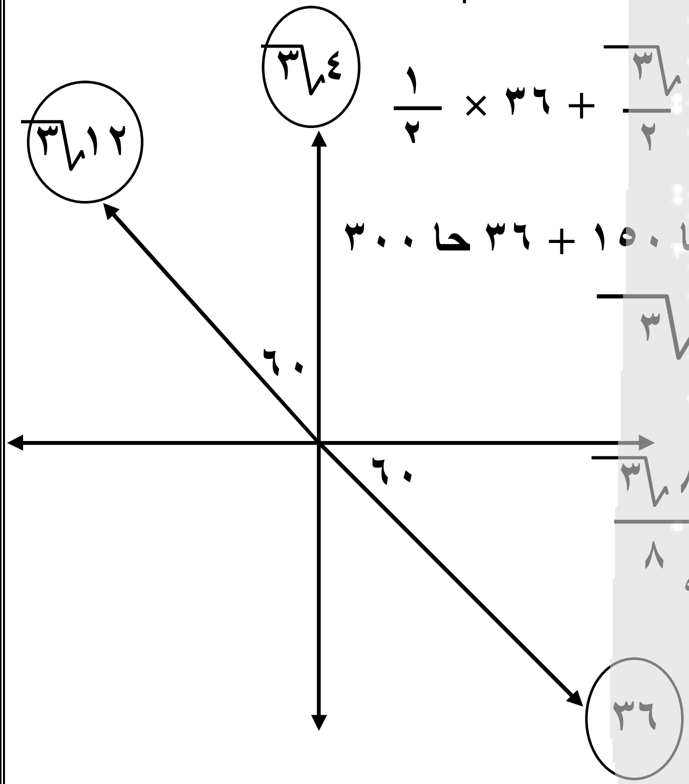
مثال : أثرت قوى مقاديرها ق ، ٤$\sqrt{٣}$ ، ١٢$\sqrt{٣}$ ، ٣٦ ث جم فى نقطة مادية و كانت الثلاث قوى الأخيرة فى اتجاهات الشمال ، ٦٠ غرب الشمال ، ٦٠ جنوب الشرق على الترتيب فإذا كانت محصلة هذه القوى = ٨ ث جم فى اتجاه الشرق فعين مقدار واتجاه ق

الحل:

القوة	ق	٤$\sqrt{٣}$	١٢$\sqrt{٣}$	٣٦
الزاوية	هـ	٩٠	١٥٠	٣٠٠

∵ ح = ٨ ث جم فى اتجاه الشرق　∴ ح = (٨ ، ٠)

∴ ٨ = ق حتا هـ + ٤$\sqrt{٣}$ حتا ٩٠ + ١٢$\sqrt{٣}$ حتا ١٥٠ + ٣٦ حتا ٣٠٠



٨ = ق حتا هـ + ٤$\sqrt{٣}$ × ٠ + ١٢$\sqrt{٣}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٣٦ × $\frac{١}{٢}$

∴ ق حتا هـ = ٨　(١)

، ٠ = ق حا هـ + ٤$\sqrt{٣}$ حا ٩٠ + ١٢$\sqrt{٣}$ حا ١٥٠ + ٣٦ حا ٣٠٠

∴ ٠ = ق حا هـ + ٤$\sqrt{٣}$ + ٦$\sqrt{٣}$ - ١٨$\sqrt{٣}$

∴ ق حا هـ = ٨$\sqrt{٣}$　(٢)

بقسمة (٢) على (١)　∴ $\frac{ق حا هـ}{ق حتا هـ}$ = $\frac{٨\sqrt{٣}}{٨}$

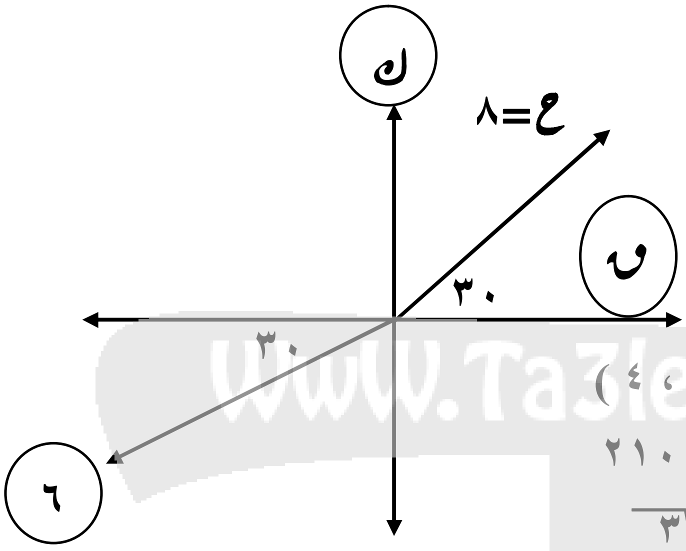
⟸ ظا هـ = $\sqrt{٣}$　∴ ق($\widehat{هـ}$) = ٦٠°

∴ ق حتا ٦٠ = ٨ ⟸ ق × $\frac{١}{٢}$ = ٨

∴ ق = ١٦

مثال : أثرت قوى مقاديرها ق ، ك ، ٦ نيوتن فى نقطة مادية فى اتجاهات الشرق ، الشمال ، ٣٠ جنوب الغرب على الترتيب فإذا كانت محصلة القوى = ٨ نيوتن و تعمل فى اتجاه ٣٠° شمال الشرق أوجد قيمة ق ، ك

الحل :



القوة	ق	ك	٦
الزاوية	٠	٩٠	٢١٠

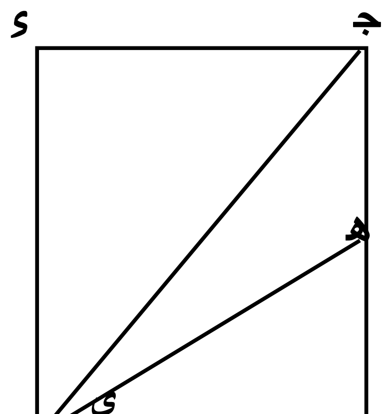
ح = (٨ حتا ٣٠ ، ٨ حا ٣٠) = (٤√٣ ، ٤)

٤√٣ = ق حتا ٠ + ك حتا ٩٠ + ٦ حتا ٢١٠

= ق − ٣√٣   ∴ ق = ٧√٣

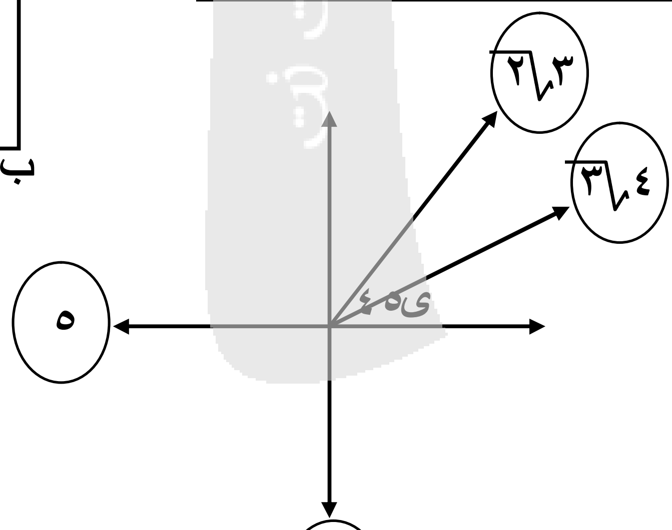
٤ = ق حا ٠ + ك حا ٩٠ + ٦ حا ٢١٠ = ٠ + ك − ٣   ∴ ك = ٧

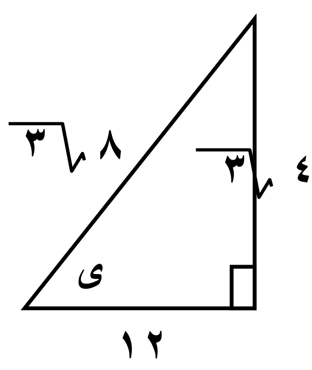
مثال : أب جـ ء مربع طول ضلعه ١٢ سم ، هـ ∈ ب جـ حيث ب هـ = ٤√٣ سم أثرت قوى ٥ ، ٤√٣ ، ٣√٢ ، ٢√٣ نيوتن فى نقطة مادية فى الاتجاهات ب أ ، أ هـ ، أ جـ ، ء أ على الترتيب . أوجد مقدار و اتجاه محصلة هذه القوى .



الحل :

القوة	٢√٣	٥	٣√٢	٤√٣
الزاوية	٢٧٠	١٨٠	٤٥	ى





س = ٢ $\sqrt{٣}$ حتا ٢٧٠ + ٥ حتا ١٨٠ + ٣ $\sqrt{٢}$ حتا ٤٥ + ٤ $\sqrt{٣}$ حتا ى

= ٢ $\sqrt{٣}$ × ٠ + ٥ × (- ١) + ٣ $\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ٤ $\sqrt{٣}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = - ٥ + ٣ + ٦ = ٤

ص = ٢ $\sqrt{٣}$ حا ٢٧٠ + ٥ حا ١٨٠ + ٣ $\sqrt{٢}$ حا ٤٥ + ٤ $\sqrt{٣}$ حا ى

= ٢ $\sqrt{٣}$ × (- ١) + ٥ × ٠ + ٣ $\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ٤ $\sqrt{٣}$ × $\frac{١}{٢}$

= - ٢ $\sqrt{٣}$ + ٣ + ٢ $\sqrt{٣}$ = ٣

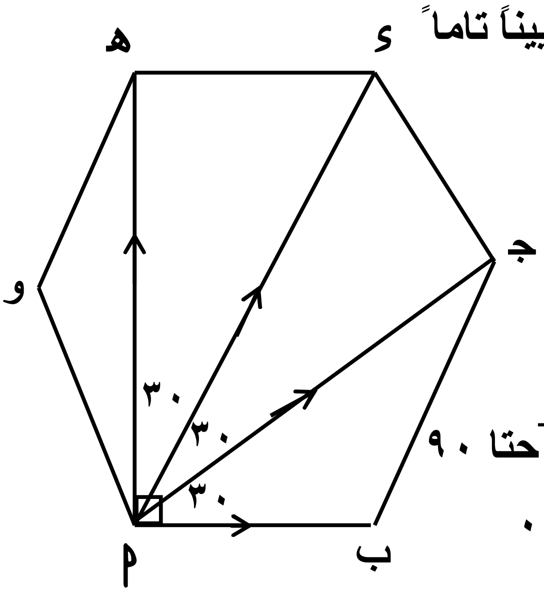
∴ ح = (٤ ، ٣) ∴ ح = $\sqrt{١٦ + ٩}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥

ظا هـ = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{٤}{٣}$ ، ق($\widehat{هـ}$) = ٥٢ / ٣٦ °

المحصلة = ٥ نيوتن و خط عملها يصنع زاوية قياسها ٥٢ / ٣٦ ° مع $\overleftarrow{مب}$

مثال : م ب جـ ء شكل منتظم أثرت قوى مقاديرها ٦ ، ٢ $\sqrt{٣}$ ، ٦ ، ٢ $\sqrt{٣}$ نيوتن فى الاتجاهات $\overleftarrow{مب}$ ، $\overleftarrow{مجـ}$ ، $\overleftarrow{مء}$ ، $\overleftarrow{مهـ}$ على الترتيب . عين المحصلة تعييناً تاماً

الحل :



القوة	٦	٢ $\sqrt{٣}$	٦	٢ $\sqrt{٣}$
الزاوية	٠	٣٠	٦٠	٩٠

س = ٦ حتا ٠ + ٢ $\sqrt{٣}$ حتا ٣٠ + ٦ حتا ٦٠ + ٢ $\sqrt{٣}$ حتا ٩٠

= ٦ × ١ + ٢ $\sqrt{٣}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٦ × $\frac{١}{٢}$ + ٢ $\sqrt{٣}$ × ٠

= ٦ + ٣ + ٣ + ٠ = ١٢

ص = ٦ حا ٠ + ٢ $\sqrt{٣}$ حا ٣٠ + ٦ حا ٦٠ + ٢ $\sqrt{٣}$ حا ٩٠

= ٦ × ٠ + ٢ $\sqrt{٣}$ × $\frac{١}{٢}$ + ٦ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٢ $\sqrt{٣}$ × ١

= ٠ + $\sqrt{٣}$ + ٣ $\sqrt{٣}$ + ٢ $\sqrt{٣}$ = ٦ $\sqrt{٣}$

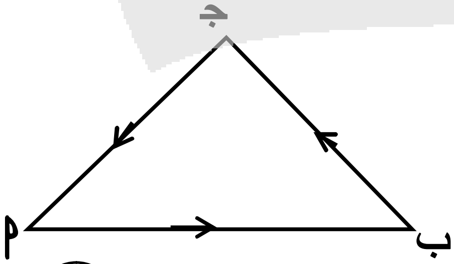
$\text{ح} = (\text{١٢} \text{ ، } \text{٦}\sqrt{\text{٣}})$ ∴ $\text{ح} = \sqrt{(\text{١٢})^{\text{٢}} + (\text{١٢})^{\text{٢}}} = \sqrt{\text{٢٥٢}} = \text{٦}\sqrt{\text{٧}}$

$\text{٦}\sqrt{\text{٣}}$

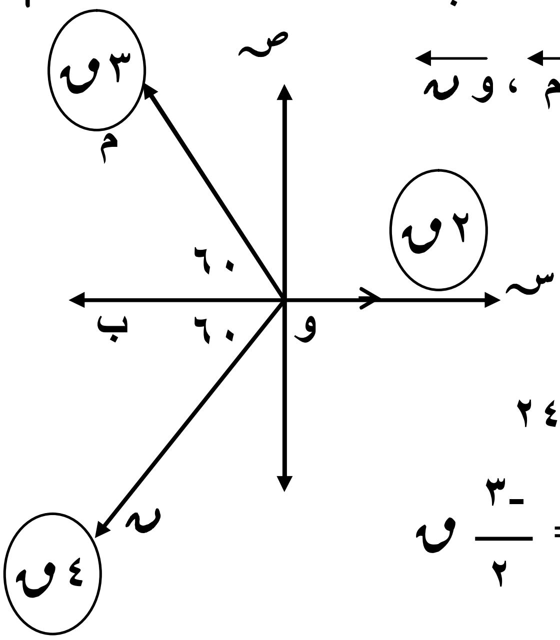
$\text{ظا هـ} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\text{٦}\sqrt{\text{٣}}}{\text{١٢}} = \frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}$ ∴ ق(هـ) ≃ ٤١ °

مثال : اثرت قوى مقاديرها ٢ ق ، ٣ ق ، ٤ ق نيوتن فى نقطة مادية فى اتجاهات موازية لأضلاع مثلث متساوى الاضلاع فى ترتيب دورى واحد أوجد محصلة هذه القوى مقدارا واتجاهاً

الحل:



القوة	٢ق	٣ق	٤ق
الزاوية	٠	١٢٠	٢٤٠



نفرض أن القوى تؤثر فى (و) فى الاتجاهات وس ، و م ، و ن

الموازية للاتجاهات ﻡب ، ب جـ ، جـ ﻡ على الترتيب

فى Δ ﻡب جـ المتساوى الاضلاع و بتحليل القوى

∴ س = ٢ ق حتا ٠ + ٣ ق حتا ١٢٠ + ٤ ق حتا ٢٤٠

$= \text{٢ ق} \times \text{١} + \text{٣ ق} \times \frac{\text{١-}}{\text{٢}} + \text{٤ ق} \times \frac{\text{١-}}{\text{٢}} = \frac{\text{٣-}}{\text{٢}} \text{ ق}$

، ص = ٢ ق حا ٠ + ٣ ق حا ١٢٠ + ٤ ق حا ٢٤٠

$= \text{٢ ق} \times \text{٠} + \text{٣ ق} \times \frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}} + \text{٤ ق} \times (-\frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}})$

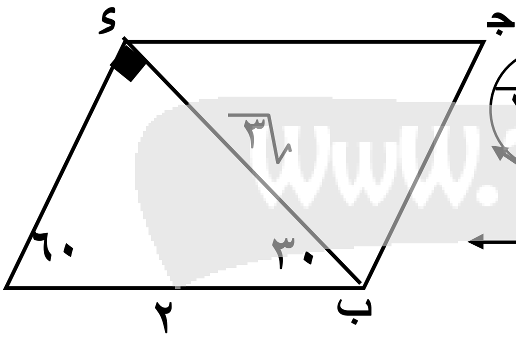
$= -\frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}} \text{ ق}$

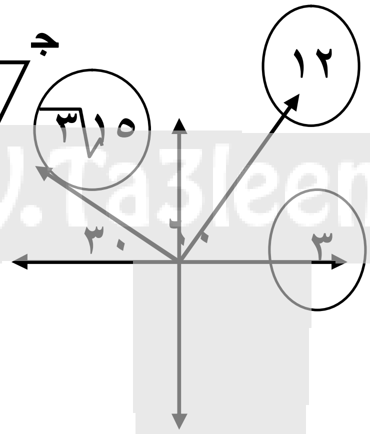
∴ $\text{ح}^{\text{٢}} = \text{س}^{\text{٢}} + \text{ص}^{\text{٢}} = (\frac{\text{٣-}}{\text{٢}} \text{ ق})^{\text{٢}} + (-\frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}} \text{ ق})^{\text{٢}} = \frac{\text{٩}}{\text{٤}} \text{ ق}^{\text{٢}} + \frac{\text{٣}}{\text{٤}} \text{ ق}^{\text{٢}} = \text{٣ ق}^{\text{٢}}$

∴ $\text{ح} = \sqrt{\text{٣}}$ ق نيوتن و تميل على ﻡب بزاوية قياسها ٢١٠ °

مثال : أب جـ ى متوازى أضلاع فيه ق(أ ى ب) = ٩٠° ، أب = ٢ أ ى أثرت القوى التى مقاديرها ٣ ، ١٢ ، ١٥ √٣ نيوتن فى ى جـ ، أ ى ، ب ى أوجد مقدار و اتجاه المحصلة .

الحل :





القوة	٣	١٢	١٥ √٣
الزاوية	٠	٦٠	١٥٠

أكمـــــل الحل ....

تمارين على محصلة عدة قوى

[١] إذا كانت ق١ = ٥ س + ٣ ص ، ق٢ = أ س + ٦ ص ، ق٣ = -١٤ س + ب ص ثلاث قوى مستوية و متلاقية فى نقطة و كانت المحصلة ح = (١٠ √٢ ، ١٣٥°)
أوجد قيمة أ ، ب

[٢] أثرت القوى التى مقاديرها ٧ ، ٤ √٣ ، ٨ ، ٦ ، ٩ √٣ ث جم فى نقطة مادية الاولى فى اتجاه الشرق ، الثانية فى اتجاه ٣٠° شمال الشرق ، الثالثة ٦٠° شمال الغرب ، الرابعة ٣٠° غرب الجنوب ، الخامسة فى اتجاه الجنوب أوجد المحصلة .

[٣] أثرت القوى المستوية التى مقاديرها ٣ ، ٦ ، ٩ √٣ ، ١٢ ث كجم فى نقطة مادية و كان قياس الزاوية بين الأولى و الثانية ٦٠ و بين الثانية و الثالثة ٩٠ وبين الثالثة و الرابعة ١٥٠ أوجد مقدار و اتجاه محصلة القوى الاربعة .

[٤] أب جـ مثلث متساوى الأضلاع ، م نقطة تلاقى متوسطاته أثرت القوى التى مقاديرها ٦ ، ٨ ، ١٠ نيوتن فى نقطة مادية فى الاتجاهات م جـ ، م ب ، م أ
أوجد مقدار و اتجاه محصلة هذه القوى .

[٥] أب جـ ى هـ و مسدس منتظم تؤثر القوى ٢ ، ٤ √٣ ، ٨ ، ٢ √٣ ، ٤ ث كجم فى نقطة مادية فى الاتجاهات أب ، أجـ ، أى ، أهـ ، أو على الترتيب أوجد محصلة هذه القوى

[٦] أ ب جـ ء هـ و مسدس منتظم ، م هى نقطة تقاطع أقطاره تؤثر القوى ٤ ، ١ ، ٤ ، ٥ ، ٢ ، ٣ ث جم فى نقطة مادية فى الاتجاهات م أ ، م ب ، م جـ ، م ء ، م هـ ، م و
أوجد مقدار محصلة هذه القوى و أثبت أنها تؤثر فى اتجاه م ء

[٧] أ ب جـ ء مستطيل فيه أ ب = ٤ سم ، ب جـ = ٣ سم أثرت القوى ٢ ، ٥ ، ٣ ث كجم فى نقطة مادية فى الاتجاهات أ ب ، أ جـ ، أ ء على الترتيب .
أوجد مقدار محصلة هذه القوى و قياس زاوية ميلها على أ ب

* تمارين من كتاب المدرسة :

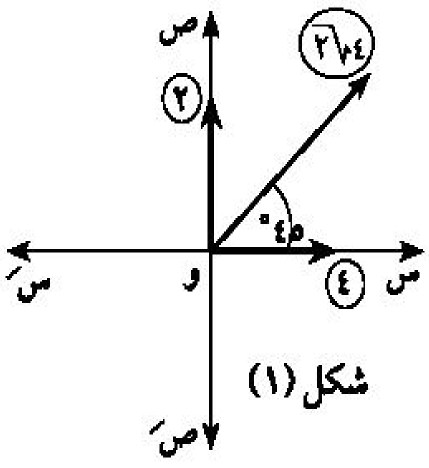
أكمل مايأتى:

(١) إذا كانت القوى $ق_١$ = ٢ س ، $ق_٢$ = س - ٢ ص ، $ق_٣$ = ٦ ص فإن:
مقدار محصلة القوى = __________ واتجاهها = __________

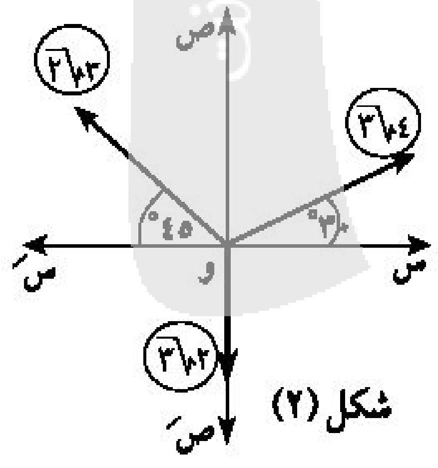
(٢) إذا كانت القوى $ق_١$ = ٢ س - ٢ ص ، $ق_٢$ = ٤ س - ٨ ص ، ح = ٢أ س - ٣ب ص
فإن: أ = __________ ، ب = __________

(٣) إذا كان $ق_١$ = ٣ س - ٢ ص ، $ق_٢$ = أ س - ص ، $ق_٣$ = ٤ س - ب ص ، ح = ٦ س - ٤ ص
فإن: أ = __________ ، ب = __________

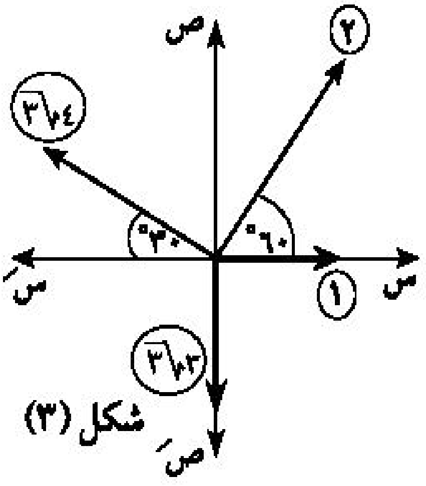
(٤) أوجد مقدار واتجاه محصلة القوى المبينة فى كل شكل من الأشكال الآتية:



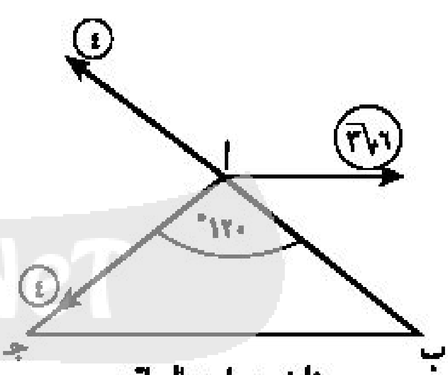
شكل (١)



شكل (٢)

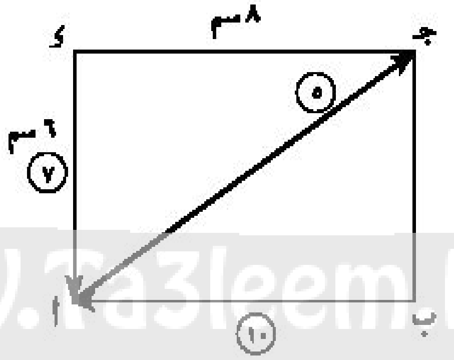


شكل (٣)



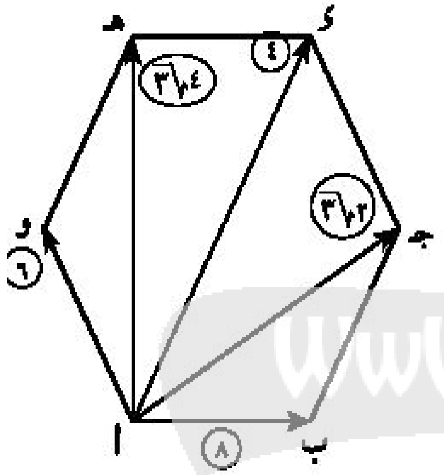
مثلث متساوى الساقين

شكل (٤)



مستطيل بعداه ٦سم ، ٨سم

شكل (٥)



سداسى منتظم

شكل (٦)

(٥) أثرت القوى ٣ ، ٦ ، ٩√٣ ، ١٢ ث كجم فى نقطة مادية وكان قياس الزاوية بين الأولى والثانية ٦٠° وبين الثانية والثالثة ٩٠° وبين الثالثة والرابعة ١٥٠°. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى

(٦) ثلاث قوى مقاديرها ١٠ ، ٢٠ ، ٣٠ نيوتن تؤثِّر فى نقطة مادية الأولى نحو الشرق والثانية تصنع زاوية ٣٠° غرب الشمال والثالثة تصنع ٦٠° جنوب الغرب. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

(٧) أربع قوى مقاديرها ١٠ ، ٢٠ ، ٣٠√٣ ، ٤٠ ث جم تؤثِّر فى نقطة مادية الأولى تؤثر فى اتجاه الشرق والثانية تؤثر فى اتجاه ٦٠° شمال الشرق والثالثة تؤثِّر فى اتجاه ٣٠° شمال الغرب والرابعة تؤثِّر فى اتجاهٍ يصنع ٦٠° جنوب الشرق. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

(٨) أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع ، م نقطة تَلاقى متوسطاته أثرت القوى التى مقاديرها ١٥ ، ٢٠ ، ٢٥ نيوتن فى نقطة مادية فى الاتجاهات $\overleftarrow{\text{م جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{م ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{م أ}}$. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

(٩) أ ب جـ ء مربع طول ضلعه ١٢سم ، هـ ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ بحيث ب هـ = ٥سم. أثرت قوى مقاديرها ٢ ، ١٣ ، ٤√٢ ، ٩ ث جم فى الاتجاهات $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ على الترتيب. أوجد محصلة هذه القوى.

(١٠) إذا كانت $\overleftarrow{\text{ق}_1}$ = ٥ $\overleftarrow{\text{س}}$ +٣ $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_2}$ = أ $\overleftarrow{\text{س}}$ +٦ $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_3}$ = -١٤ $\overleftarrow{\text{س}}$ +ب $\overleftarrow{\text{ص}}$ ثلاث قوى مستوية ومتلاقية في نقطة وكانت المحصلة $\overleftarrow{\text{ح}}$ = (١٠√٢ ، ١٣٥°). أوجد قيمتي أ ، ب.

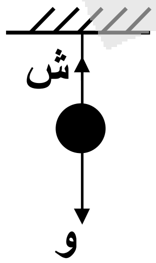
الفصل الثانى : الاتــزان

(١) اتزان جسم جاسئ تحت تأثير قوتين **تكون محصلة القوتين = صفر**

قاعدة : إذا اتزن جسم جاسئ تحت تأثير قوتين فقط كانت القوتان :

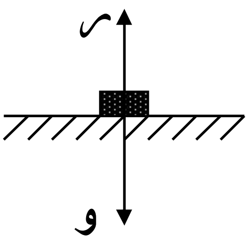
١) متساويتين فى المقدار ٢) متضادتين فى الاتجاه ٣) خط عملهما على استقامة واحدة

من أمثلة توازن جسم تحت تأثير قوتين:



(١) إذا علق ثقل (و) بحبل خفيف من نقطة فإنه يتزن

تحت تأثير قوتين هما وزن الجسم والشد فى الحبل



(٢) إذا وضع جسم على نضد أفقى أملس فإنه يتزن

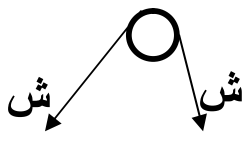
تحت تأثير قوتين هما الوزن ورد فعل النضد على الجسم

ملاحظات هامة :

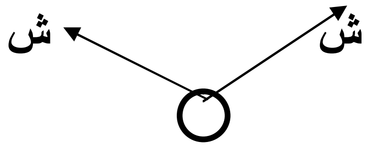
(١) إذا أثر على جسم متماسك قوتان متساويتان فى المقدار وفى إتجاهين متضادين وفى نفس الخط المستقيم فإنه لا يكون لهما أى تأثير على الجسم من ناحية السكون أو الحركة

(٢) القوى المتبادلة الناتجة عن تأثير جسم على أخر تكون دائما متساوية فى المقدار ومتضادة فى الاتجاه وهذا هو القانون الثالث لنيوتن والذى ينص على أنه

لكل فعل رد فعل مساو له فى المقدار ومضاد له فى الاتجاه



(٣) إذا مر خيط خفيف على بكرة ملساء فان مقدار الشد فى الخيط لا يتغير بمروره على البكرة



(٤) إذا مر خيط خفيف فى حلقة ملساء فإن مقدار الشد فى الخيط لا يتغير بمروره داخل الحلقة

مثال : إذا كانت القوة التى مقدارها ق تتزن مع قوتان مقدارهما ٥ ، ٣ نيوتن واللتان تحصران بينهما زاوية قياسها ٦٠° فأوجد قيمة ق؟

الحل : نوجد محصلة القوتان ٥ ، ٣ نيوتن من القانون:

$ح = \sqrt{ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢ جتا ى}$ $\therefore ح = \sqrt{٢٥ + ٩ + ٢ \times ٥ \times ٣ حتا ٦٠°}$

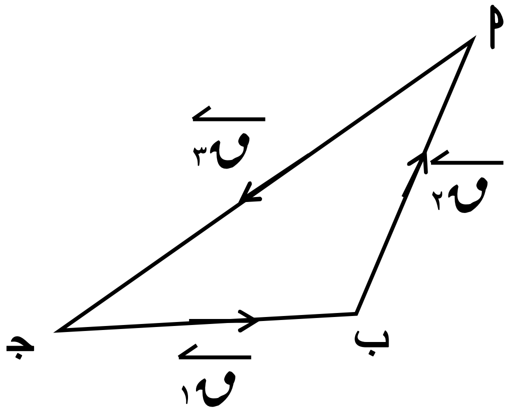
$\therefore ح = \sqrt{٢٥ + ٩ + ١٥} = \sqrt{٤٩} = ٧$ نيوتن

$\because$ القوة (ق) ومحصلة القوتان ٥ ، ٣ نيوتن فى حالة اتزان. $\therefore ق = ٧$ نيوتن

(٢) إتزان جسم تحت تأثير ثلاث قوى

قاعدة

إذا أمكن تمثيل ثلاث قوى مستوية و متلاقية فى نقطة بأضلاع مثلث مأخوذة فى اتجاه دورى واحد فإن هذه القوى تكون متزنة .



$\because$ $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ ، $\overleftarrow{ق_٣}$ ثلاث قوى فى اتجاه دورى واحد

$\therefore$ القوى الثلاث متزنة

*** ملاحظات :**

١) لكى تتزن القوى الثلاث يجب أن تكون مقاديرها تصلح لأن تكون أطوال لأضلاع مثلث مثلا : القوى الثلاث التى مقاديرها ٤ ، ٣ ، ٧ وحدة قوة لا يمكن أن تتزن لأن الاعداد ٤ ، ٣ ، ٧ لا تصلح لأن تكون أطوالا لأضلاع مثلث لأن ٤ + ٣ > ٧

٢) إذا إتزنت ثلاث قوى متلاقية فى نقطة فإن متجه محصلتها هو المتجه الصفرى

$\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{ق_١} + \overleftarrow{ق_٢} + \overleftarrow{ق_٣} = \overleftarrow{٠}$

٣) إذا إتزنت ثلاث قوى مستوية و متلاقية فى نقطة فإن محصلة أى قوتين منها تكون مساوية فى المقدار لمقدار القوة الثالثة و مضادة لها فى الاتجاه و لهما نفس خط العمل .

قاعدة مثلث القوى

إذا أتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية فى نقطة ورسم مثلث أضلاعه توازى خطوط عمل القوى وفى أتجاه دورى واحد فإن أطوال أضلاع المثلث تكون متناسبة مع مقادير القوى المناظرة

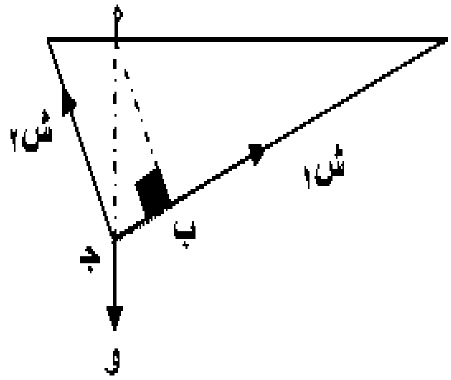
يلاحظ أنه تستخدم إذا أمكن معرفة مقدار إحدى القوى الثلاث وعلمت أطوال أضلاع مثلث القوى (أو النسبة بين أطوال أضلاع مثلث القوى)

$$\frac{\text{ق}_1}{\text{ب ج}} = \frac{\text{ق}_2}{\text{أ ب}} = \frac{\text{ق}_3}{\text{أ ج}}$$

فى الشكل المقابل :

أب جـ مثلث القوى :

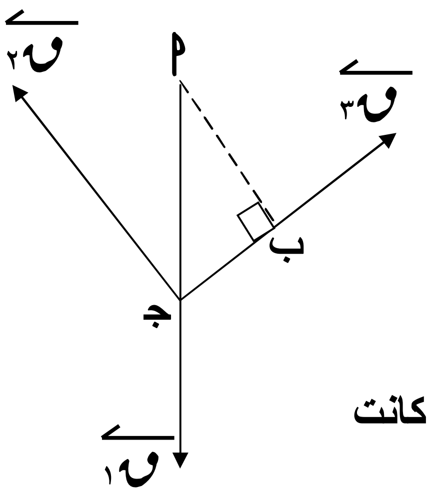
$$\frac{\text{ش}_1}{\text{جـ ب}} = \frac{\text{ش}_2}{\text{أ ب}} = \frac{\text{و}}{\text{أ جـ}}$$



ملاحظات هامة :

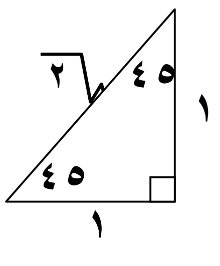
١) المثلث الذى أضلاعه توازى خطوط عمل القوى الثلاث يسمى (مثلث القوى)

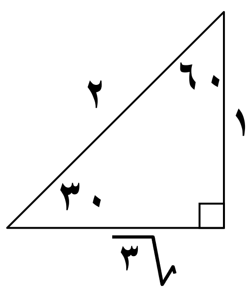
٢) من الممكن رسم مثلث القوى بحيث يكون ضلعان من أضلاعه محمولين على خطى عمل قوتين و الضلع الثالث يوازى خط عمل القوة الثالثة .



٣) إذا كان مثلث القوى لثلاث قوى متزنة هو مثلث ثلاثينى ستينى كانت النسبة بين أطوال أضلاعه ١ : ٢ : $\sqrt{٣}$

٤) إذا كان مثلث القوى قائم الزاوية و متساوى الساقين فالنسبة بين أضلاعه ١ : ١ : $\sqrt{٢}$

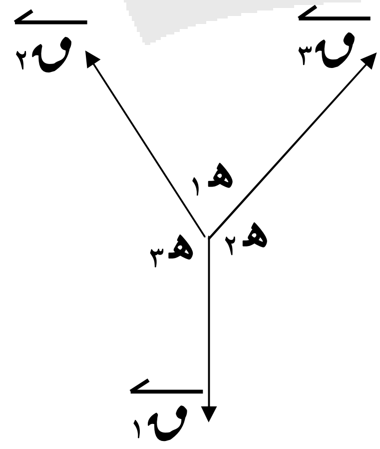




قاعدة لامى

إذا أتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية فى نقطة فان مقدار كل قوة يتناسب مع جيب الزاوية المحصورة بين القوتين الاخريين.

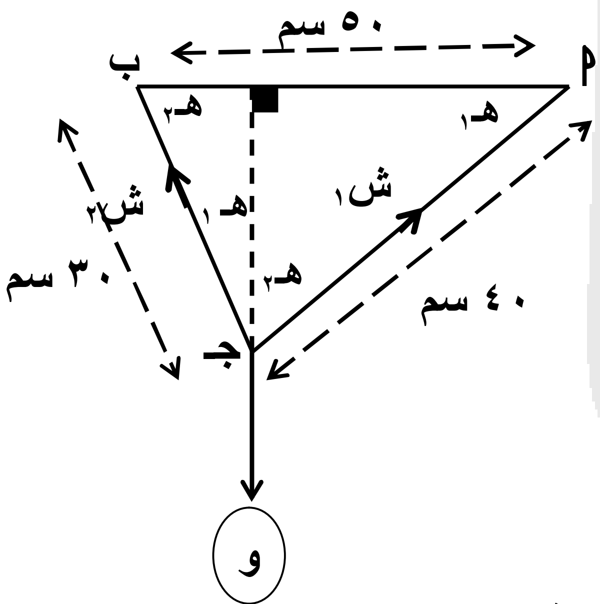
يلاحظ أنه تستخدم إذا أمكن معرفة قياسات الزوايا بين خطوط القوى الثلاث



إذا أثرت القوى ق١ ، ق٢ ، ق٣ الثلاث فى نقطة مادية و كانت هـ١ ، هـ٢ ، هـ٣ هى قياسات الزوايا المقابلة لها على الترتيب فإن :

$$\frac{\text{ق}_{1}}{\text{حا هـ}_{1}} = \frac{\text{ق}_{2}}{\text{حا هـ}_{2}} = \frac{\text{ق}_{3}}{\text{حا هـ}_{3}}$$

مثال : علق ثقل مقداره ١٠٠ ث جم بخيطين طوليهما ٣٠سم ، ٤٠ سم و ثبت الطرفان الآخران للخيطان فى نقطتين من خط أفقى بحيث كان الخيطان متعامدين . أوجد مقدار الشد فى كلا من الخيطين



الحل : ∵ ق(أجب) = ٩٠°

∴ $(\text{أب})^2 = (\text{أج})^2 + (\text{بج})^2$

∵ $(\text{أب})^2 = (٤٠)^2 + (٣٠)^2$ ∴ أب = ٥سم

∴ $\text{حا هـ}_1 = \frac{٣٠}{٥٠} = \frac{٣}{٥}$ ، $\text{حا هـ}_2 = \frac{٤٠}{٥٠} = \frac{٤}{٥}$

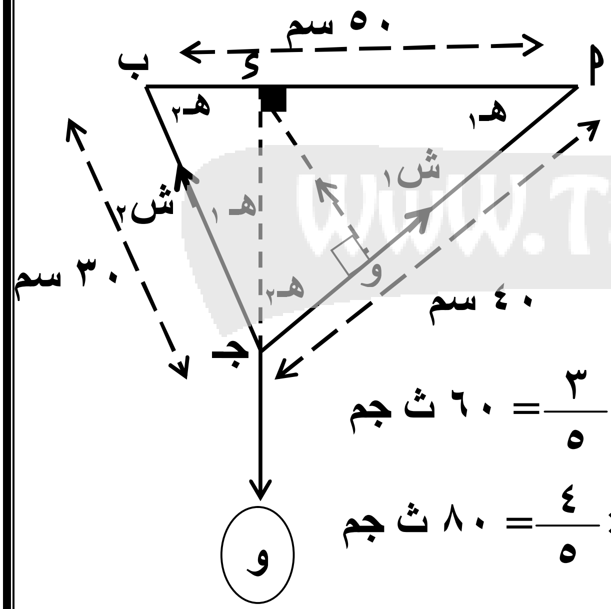
باستخدام قاعدة لامى :

$$\frac{\text{ش}_1}{\text{حا هـ}_1} = \frac{\text{ش}_2}{\text{حا هـ}_2} = \frac{\text{و}}{\text{حا(هـ}_1 + \text{هـ}_3)}$$

$$\frac{\text{ش}_1}{\text{حا هـ}_1} = \frac{\text{ش}_2}{\text{حا هـ}_2} = \frac{١٠٠}{\text{حا } ٩٠}$$

$$\therefore \text{ش}_1 = \frac{١٠٠\,\text{حا هـ}_1}{\text{حا } ٩٠} = \frac{١٠٠ \times \frac{٣}{٥}}{١} = ٦٠ \text{ ث جم}$$

، $ش_٢ = \frac{١٠٠ حا هـ_٢}{حا ٩٠} = \frac{١٠٠ \times \frac{٤}{٥}}{١} = ٨٠$ ث جم



حل أخر : باستخدام قاعدة مثلث القوى :

نرسم $\overline{ءو} // \overline{ب جـ}$

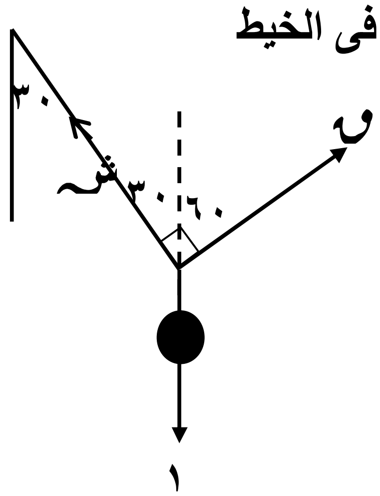
فيكون Δ ءوجـ مثلث القوى

$\frac{ش_١}{جـ و} = \frac{ش_٢}{و ء} = \frac{١٠٠}{ءجـ}$

∴ $ش_١ = ١٠٠ \times \frac{جـ و}{ءجـ} = ١٠٠ \times حا هـ_١ = ١٠٠ \times \frac{٣}{٥} = ٦٠$ ث جم

، ∴ $ش_٢ = ١٠٠ \times \frac{ء و}{ءجـ} = ١٠٠ \times حا هـ_٢ = ١٠٠ \times \frac{٤}{٥} = ٨٠$ ث جم

مثال: أزيحت كرة بندول وزنها ١ نيوتن حتى صار الخيط يصنع ٣٠° مع الرأسى تحت تأثير قوة على الكرة فى أتجاه عمودى على الخيط أوجد القوة والشد فى الخيط



الحل :

باستخدام قاعدة لامى

$\frac{ق}{جا ١٥٠} = \frac{ش}{جا ١٢٠} = \frac{١}{جا ٩٠}$

$ق = ١ \times جا ١٥٠ = ١ \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$ نيوتن

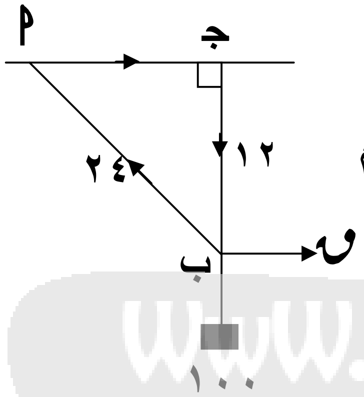
$ش = ١ \times جا ١٢٠ = ١ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ نيوتن

مثال : خيط خفيف طوله ٢٤سم ثبت طرفه م فى نقطة ثابتة وعلق وزن مقداره ١٠٠ ث جم من طرفه الاخر ب أوجد مقدار القوة اللازمة لحفظ الوزن على بعد ١٢سم من الخط الافقى المار بنقطة م فى الحالتين الاتيتين:

(١) إذا كانت القوة المؤثرة أفقية (٢) إذا كان اتجاه القوة متعامدا مع $\overleftarrow{م ب}$

الحل :

<u>الحالة الاولى</u> : القوة المؤثرة أفقية :



$(\text{أجـ})^2 = (24)^2 - (12)^2 = 432$ ∴ أجـ $= 12\sqrt{3}$ سم

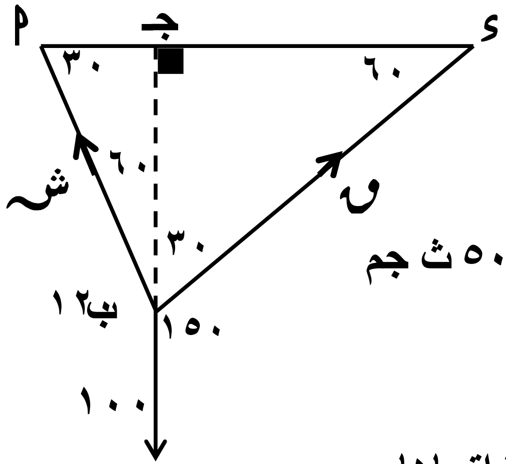
Δ أ ب جـ مثلث القوى

∴ $\frac{\text{ق}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{ش}}{\text{ب أ}} = \frac{100}{\text{جـ ب}}$

∴ $\frac{\text{ق}}{12\sqrt{3}} = \frac{\text{ش}}{24} = \frac{100}{12}$

∴ ق $= \frac{100}{12} \times 12\sqrt{3} = 100\sqrt{3}$ ث جم ، ش $= \frac{100}{12} \times 24 = 200$ ث جم

<u>الحالة الثانية</u> : إذا كان اتجاه القوة متعامدا مع $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$



باستخدام قاعدة لامى :

$\frac{\text{ق}}{\text{حا } 120} = \frac{\text{ش}}{\text{حا } 150} = \frac{100}{\text{حا } 90}$

∴ ق $= \frac{100 \text{ حا } 120}{\text{حا } 90} = 50\sqrt{3}$ ، ش $= \frac{100 \text{ حا } 150}{\text{حا } 90} = 50$ ث جم

<u>حل أخر</u> : للحالة الثانية : (بالتحليل)

∵ القوى متزنة ∴ محصلة ق ، ش = ١٠٠ و تضادها اتجاها

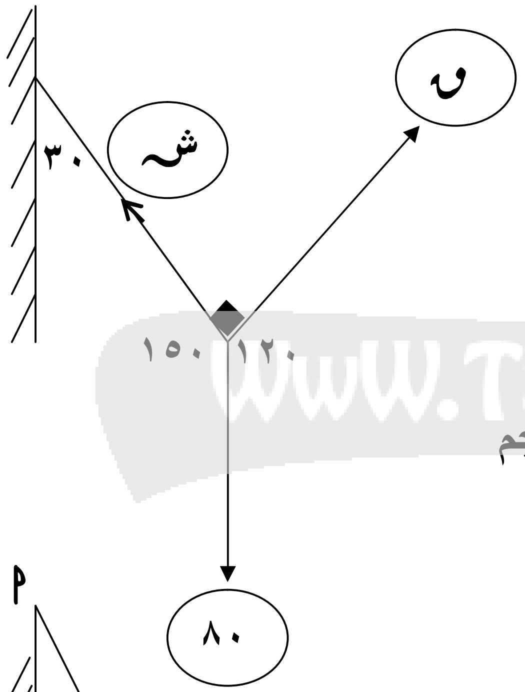
∴ ق $= 100$ حتا $30 = 100 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}$ ث جم

، ش $= 100$ حا $30 = 100 \times \frac{1}{2} = 50$ ث جم

مثال : علق ثقل مقداره ٨٠ ث جم فى طرف خيط مثبت طرفه الأخر فى حائط رأسي ، أزيح الثقل بقوة عمودية على الخيط حتى أصبح الخيط مائلا على الحائط بزاوية قياسها ٣٠° أوجد فى وضع الاتزان مقدار القوة و كذلك الشد فى الخيط عندئذ

الحل :

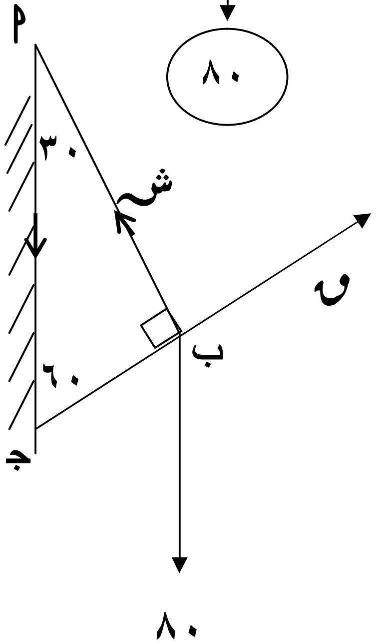
حسب قاعدة لامى :



و / حا ١٥٠ = ش / حا ١٢٠ = ٨٠ / حا ٩٠

∴ و = ٨٠ حا ١٥٠ = ٨٠ × ١/٢ = ٤٠ ث جم

ش = ٨٠ حا ١٢٠ = ٨٠ × √٣ / ٢ = ٤٠ √٣ ث جم



حل أخر :

باستخدام مثلث القوى أبجـ :

و / ب جـ = ش / ب أ = ٨٠ / أ جـ

∵ Δ أجب ثلاثينى ستينى ∴ ب جـ : ب أ : أ جـ = ١ : √٣ : ٢

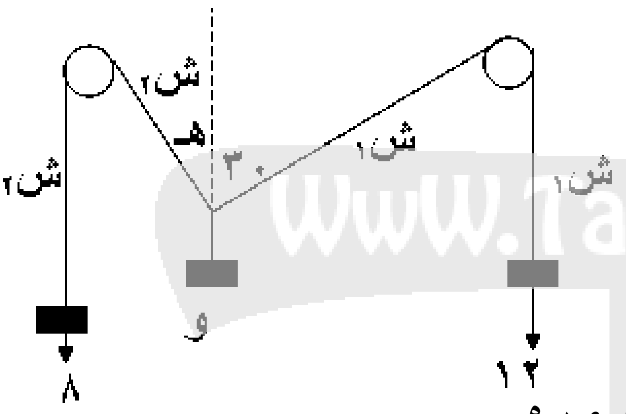
∴ و / ١ = ش / √٣ = ٨٠ / ٢

∴ و = ٤٠ ث جم ، ش = ٤٠ √٣ ث جم

مثال : علق وزن و نيوتن بواسطة خيطين يميل أولهما على الرأسي بزاوية هـ و يمرعلى بكرة صغيرة ملساء و يحمل فى نهايته الاخرى وزنا مقدارة ٨ نيوتن و يميل الثانى على الراسي بزاوية ٣٠ ° و يمر على بكرة صغير ملساء و يحمل فى نهايتة الاخرى وزنا مقدارة ١٢ نيوتن . أوجد مقدار الوزن و ، قيمة هـ

الحل :

لاحظ أنه عندما تكون البكرة ملساء يتساوى الشد فى فرعى الخيط المائل حول البكرة



بتطبيق قاعدة لامى

$$\frac{ش_1}{جا(١٨٠ - هـ)} = \frac{ش_2}{جا ١٥٠} = \frac{و}{جا(٣٠+هـ)}$$

$$\frac{٨}{جا هـ} = \frac{١٢}{جا ١٥٠} = \frac{و}{جا(٣٠+هـ)}$$

$\therefore$ حا هـ $= \frac{٨ حا ٣٠}{١٢} = \frac{١}{٣}$ $\therefore$ ق(هـ) $= ٢٨' \; ١٩°$

$\therefore$ ٣٠ + هـ = ٣٠ + ٢٨' ١٩° = ٢٨' ٤٩°

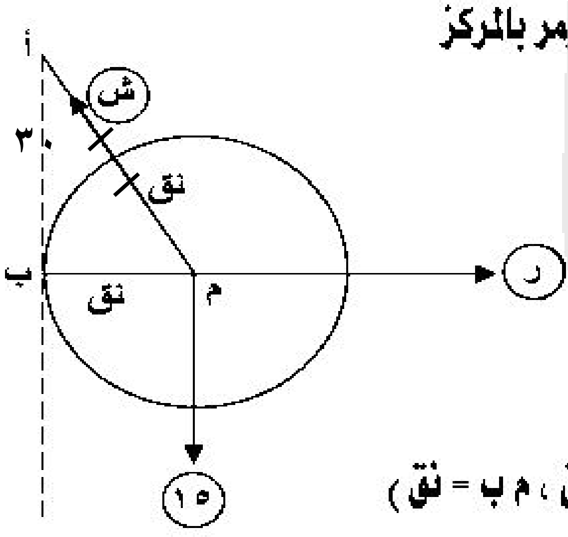
$\therefore$ و $= \frac{١٢ جا ٢٨' ٤٩°}{حا ١٥٠} = ١٨,٤$ نيوتن

مثال : كرة ملساء وزنها ١٥ نيوتن تستند على حائط أملس و معلقة بخيط مثبت أحد طرفية فى نقطة على سطحها و طرفه الاخر مربوط فى حائط فى نقطة ؟ أعلى نقطة تماس الكرة تماما . فإذا كان طول الخيط يساوى طول نصف قطر الكرة . أوجد الضغط على الحائط و الشد فى الخيط

الحل :

لاحظ أنه فى حالة الاتزان خط عمل الشد يمر بالمركز

$\because$ الحائط املس $\therefore$ رد فعل الحائط $\perp$ علية اى يمر بالمركز



الكرة متزنة تحت تاثير القوى الثلاث :

(١) الوزن ١٥ نيوتن راسى لاسفل

(٢) الشد (ش) فى الخيط م ؟

(٣) رد فعل (ر) الحائط عمودي علية

م ؟ ب هو مثلث القوى (وهو مثلث ثلاثيني ستيني لأن م ؟ = ٢ نق ، م ب = نق)

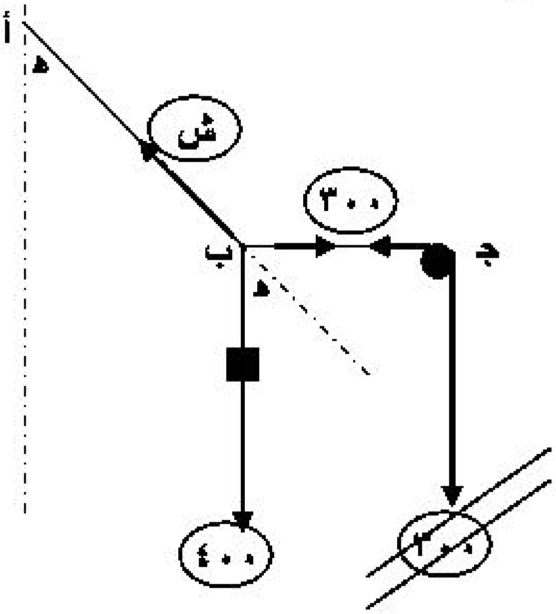
وبتطبيق قاعدة مثلث القوى ينتج لنا :

$$\frac{ر}{مب} = \frac{ش}{مم} = \frac{١٥}{مب} \quad \therefore \quad \frac{ر}{ن} = \frac{ش}{٢ن} = \frac{١٥}{ن\sqrt{٣}} \quad \therefore \quad \frac{ر}{١} = \frac{ش}{٢} = \frac{١٥}{\sqrt{٣}}$$

$\therefore$ ر $= \frac{١٥}{\sqrt{٣}} = ٥\sqrt{٣}$ نيوتن ، ش $= \frac{٣٠}{\sqrt{٣}} = ١٠\sqrt{٣}$ نيوتن

مثال : جسم وزنة ٤٠٠ ثقل جرام معلق من نقطة أ بواسطة خيط . ربط خيط فى نقطة ب من الخيط وشد افقيا بخيط ثان $\overline{بجـ}$ يمر على بكرة صغيرة ملساء مثبتة ويتدلى فى نهايته ثقل مقدارة ٣٠٠ ثقل جرام .

أوجد ميل $\overline{أب}$ على الرأسى و الشد فى كل من الخيطين $\overline{أب}$ ، $\overline{بجـ}$.



الحل :

محصلة القوتين ٣٠٠ ، ٤٠٠ المتعامدتين = ح

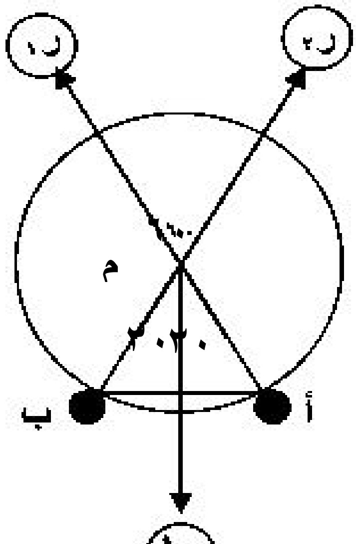
ح^{٢} = (٣٠٠)^{٢} + (٤٠٠)^{٢} $\therefore$ ح = ٥٠٠ ث جم

وهى تساوى فى المقدار ش وتضاده فى الاتجاه

$\therefore$ ش = ٥٠٠ ث جم

ظا هـ = $\frac{٣٠٠}{٤٠٠}$ $\therefore$ ق($\hat{هـ}$) = ٥٢ ٣٦°

مثال : كرة مصمتة ترتكز على قضيبين متوازيين يقعان فى مستوى أفقى واحد والبعد بينهما يساوى طول نصف قطر الكرة . أوجد الضغط على كلا من القضيبين إذا كان وزن الكرة يساوى ١٠ نيوتن .



الحل :

Δ أمب متساوى الاضلاع $\therefore$ ق($\widehat{أمب}$) = ٦٠ ، خط الوزن ينصفها

الكرة متزنة تحت تأثير القوى :

(١) الوزن ١٠ نيوتن رأسي لأسفل

(٢) ر$_{١}$ رد فعل القضيب أ

(٣) ر$_{٢}$ رد فعل القضيب ب

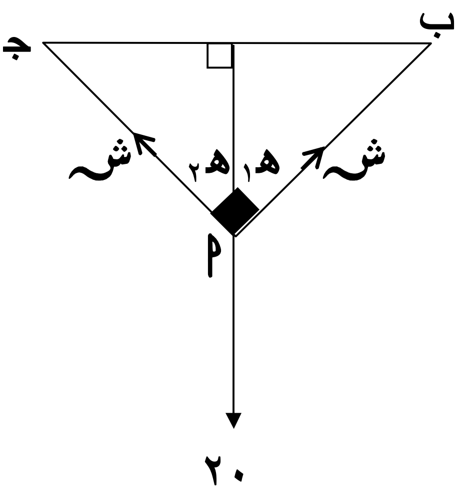
بتطبيق قاعدة لامى : $\frac{\text{ر}_1}{\text{جا}١٥٠} = \frac{\text{ر}_2}{\text{جا}١٥٠} = \frac{١٠}{\text{جا}٦٠}$

$\frac{\text{ر}_1}{\text{جا}٣٠} = \frac{\text{ر}_2}{\text{جا}٣٠} = \frac{١٠}{\text{جا}٦٠}$

$\therefore \text{ر}_1 = \text{ر}_2 = \frac{١٠ \text{جا } ٣٠}{\text{جا } ٦٠} = \frac{١٠\sqrt{٣}}{٣} = ٥{,}٨$ نيوتن

مثال : خيط خفيف ربط من طرفيه فى نقطتين ب ، جـ بحيث كان $\overline{\text{ب جـ}}$ افقيا ثم انزلقت على الخيط حلقة صغيرة ملساء وزنها ٢٠ ث جم فأصبح قياس الزاوية بين فرعى الخيط عند وضع التوازن ٩٠ ° أثبت أن فرعى الخيط متساويان فى الطول ثم أوجد قيمة الشد فى كل منهما

الحل :



$\because$ الحلقة ملساء $\therefore$ الشد فى فرعى الخيط متساوى

و باستخدام قاعدة لامى :

$\therefore \frac{\text{ش}}{\text{جاهـ}_2} = \frac{\text{ش}}{\text{جاهـ}_1} = \frac{٢٠}{\text{جا}٩٠}$ $\therefore$ جا هـ$_1$ = حا هـ$_2$

$\therefore$ هـ$_1$ = هـ$_2$ = $\frac{٩٠}{٢} = ٤٥$ ° $\therefore \text{ش} = \frac{٢٠ \text{جاهـ}_1}{\text{جا } ٩٠}$

$\therefore \text{ش} = ١٠\sqrt{٢}$

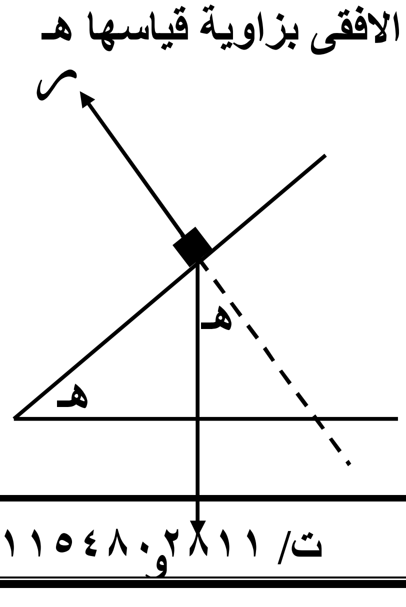
$\because \overline{\text{أ د}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ ، ق($\widehat{\text{هـ}_1}$) = ق($\widehat{\text{هـ}_2}$) $\therefore$ أب = أجـ

$\therefore$ فرعا الخيط متساويان فى الطول

---

(٣) اتزان جسم على مستو مائل أملس

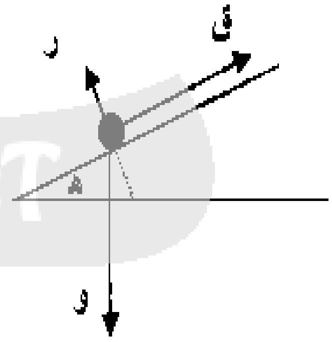
إذا وضع جسم وزنه (و) على مستو مائل أملس يميل على الافقى بزاوية قياسها هـ فإن الجسم يكون تحت تأثير قوتين :



١) قوة الوزن (و) واتجاهها رأسي الى أسفل

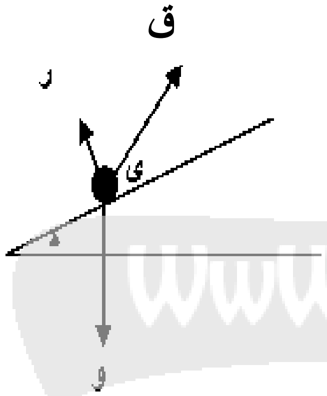
٢) قوة رد فعل المستوى الاملس (ر) عمودى على المستوى لأعلى

و لكى يتزن الجسم لابد من وجود قوة ثالثة تؤثر على الجسم فى أحد الحالات الاتية :



جسم وزنة (و) موضوع على مستوى مائل وتؤثر علية قوة ق فى اتجاة خط اكبر ميل

جسم وزنة (و) موضوع على مستوى مائل وتؤثر علية قوة افقية ق



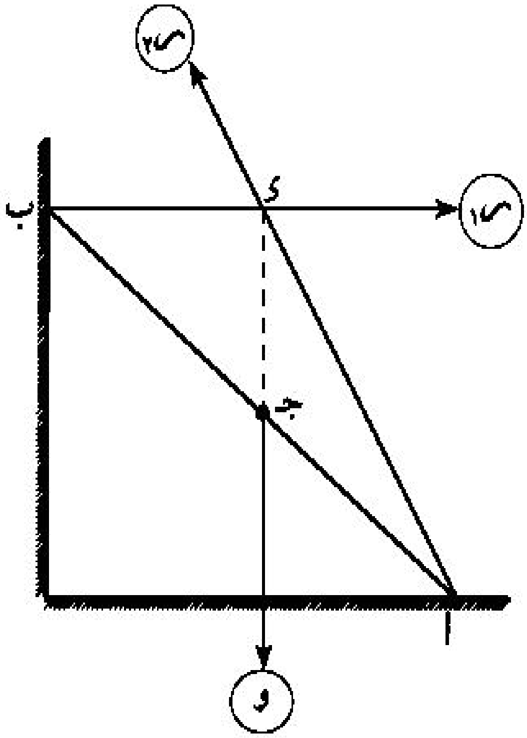
جسم وزنة (و) موضوع على مستوى مائل وتؤثر علية قوة ق فى اتجاة يميل بزاوية (ى) لأعلى المستوى

نظرية القوى الثلاث:

إذا اتزن جسم جاسئ تحت تأثير ثلاث قوى غير متوازية ومستوية فإن خطوط عمل هذه القوى تتلاقى فى نقطة واحدة.

مثال: إذا اتزن قضيب منتظم السمك والكثافة وزنه (و) على حائط رأسى أملس وأرض أفقية خشنة فإن:

- مركز ثقل وزن القضيب يعمل فى منتصفه واتجاهه رأسيًا لأسفل.
- رد فعل الحائط الرأسي ($ر_1$) يكون عموديًّا على الحائط ويعمل فى اتجاه $\overleftarrow{ب ى}$.
- رد فعل الأرض الأفقية الخشنة ($ر_2$) غير محدد الاتجاه ولتحديد اتجاهه نرسم $\overleftarrow{أ ى}$ الذى يمر بالنقطة ى (نقطة تلاقى خطى عمل $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ر_1}$) كما فى الشكل.



*** <u>ملاحظات</u> :**

(١) القضيب المنتظم : هو القضيب الذى وزنه يؤثر فى منتصفه .

(٢) رد فعل المفصل أو النقطة التى عندها يكون القضيب معلق تعليقاً حراً أو المستوى الخشن يكون مجهول الاتجاه و نحدد اتجاهه بواسطة القاعدة .
(إذا تلاقى خطى عمل قوتين فى نقطة فإن خط عمل القوة الثالثة لابد أن يمر بنفس النقطة)

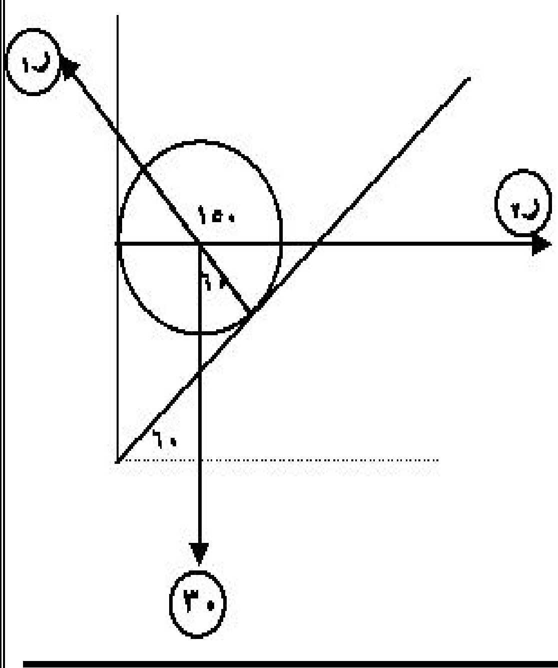
(٣) نقطة تأثير وزن القضيب لابد أن تكون خط رأسي واحد مع نقطة التعليق الحر للقضيب

(٤) إذا طلب منا الوضع الذى يتزن فيه القضيب فهذا معناه ايجاد زاوية ميل القضيب على الرأسي أو الأفقى (بإختيارك)

(٥) مركز ثقل الكرة المنتظمة يقع فى مركزها الهندسي

مثال : كرة ملساء من الحديد وزنها ٣٠ نيوتن مستقرة بين حائط رأسي أملس و مستوى أملس يميل على الافقى بزاوية ٦٠ ° أوجد الضغط على كل من الحائط و المستوى ،

الحل :



بتطبيق قاعدة لامى

$$\frac{ر_١}{\text{جا}\,١٢٠} = \frac{ر_٢}{\text{جا}\,٩٠} = \frac{٣٠}{\text{جا}\,١٥٠}$$

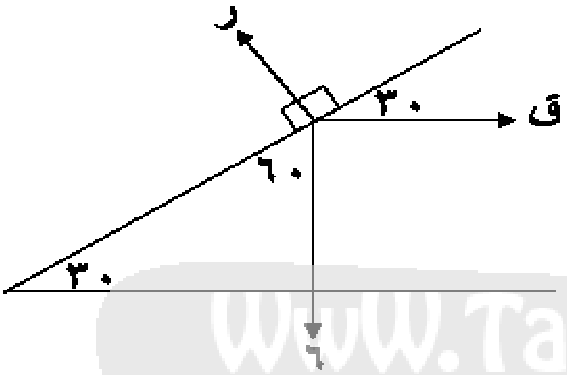
$$ر_١ = \frac{٣٠\,\text{جا}\,١٢٠}{\text{جا}\,١٥٠} = \frac{٣٠ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}}{\frac{١}{٢}} = ٣٠\sqrt{٣}\ \text{نيوتن}$$

$$ر_٢ = \frac{٣٠\,\text{جا}\,٩٠}{\text{جا}\,١٥٠} = \frac{٣٠ \times ١}{\frac{١}{٢}} = ٣٠ \times ٢ = ٦٠\ \text{نيوتن}$$

مثال:وضع جسم وزنه ٦ ث كجم على مستوى مائل أملس يميل على الافقى بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ توازنه بواسطة قوة أوجد هذه القوة ورد فعل المستوى فى الحالتين الاتيتين :

(أولا) القوة أفقية (ثانيا) القوة تميل على المستوى بزاوية قياسها ٣٠°

الحل :

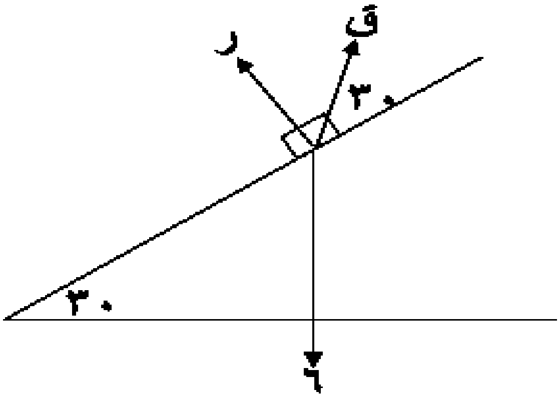


(أولا) بتطبيق قاعدة لامى

$$\frac{\text{ق}}{\text{جا}١٥٠} = \frac{\text{ر}}{\text{جا}٩٠} = \frac{٦}{\text{جا}١٢٠}$$

$$\text{ق} = \frac{٦\ \text{جا}١٥٠}{\text{جا}١٢٠} = \frac{٦ \times \frac{١}{٢}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} = \frac{٦}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = ٢\sqrt{٣}$$

$$\text{ر} = \frac{٦\ \text{جا}٩٠}{\text{جا}١٢٠} = \frac{٦ \times ١}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} = \frac{١٢}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \frac{١٢\sqrt{٣}}{٣} = ٤\sqrt{٣}$$



(ثانيا) بتطبيق قاعدة لامى

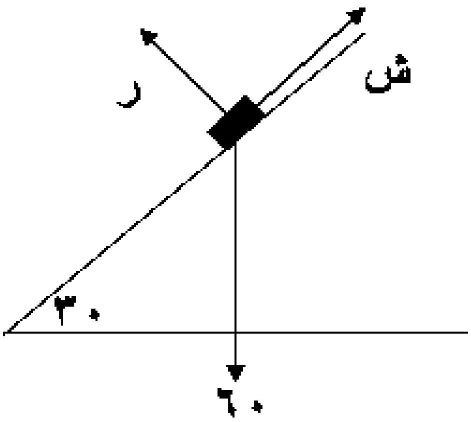
$$\frac{\text{ق}}{\text{جا}١٥٠} = \frac{\text{ر}}{\text{جا}١٥٠} = \frac{٦}{\text{جا}٦٠}$$

$$\text{ق} = \frac{٦\ \text{جا}١٥٠}{\text{جا}٦٠} = \frac{٦ \times \frac{١}{٢}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} = \frac{٦}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = ٢\sqrt{٣}$$

$$\text{ر} = \frac{٦\ \text{جا}١٥٠}{\text{جا}٦٠} = \frac{٦ \times \frac{١}{٢}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} = \frac{٦}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = ٢\sqrt{٣}$$

مثال: وضع جسم وزنه ٦٠ نيوتن على مستوى أملس يميل على الافقى بزاوية قياسها ٣٠° وشد الى أعلى المستوى بخيط فى أتجاه خط أكبر ميل للمستوى لاعلى أوجد مقدار الشد فى الخيط و رد فعل المستوى

الحل :



بتطبيق قاعدة لامى

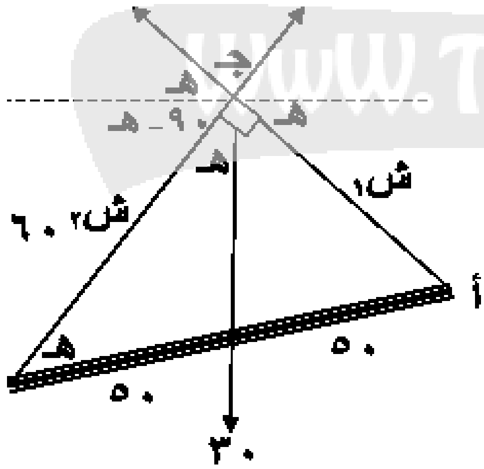
$$\frac{\text{ش}}{\text{جا}١٥٠} = \frac{\text{ر}}{\text{جا}١٢٠} = \frac{٦٠}{\text{جا}٩٠}$$

$$\text{ش} = ٦٠\ \text{جا}١٥٠ = ٦٠ \times \frac{١}{٢} = ٣٠ \text{ ث جم}$$

$$\text{ق} = ٦٠\ \text{جا}١٢٠ = ٦٠ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = ٣٠\sqrt{٣}$$

مثال : علق قضيب منتظم طوله متر ووزنه ٣٠ نيوتن من طرفيه بخيطين ثبت طرفاهما فى نقطة واحدة فى السقف فإذا كان الخيطين متعامدين وكان طول أحدهما ٦٠ سم فما هو مقدار الشد فى كلا من الخيطين عندما يكون القضيب معلقا تعليقا مطلقا وفى حالة أتزان

الحل :



بتطبيق قاعدة لامى

$$\frac{ش_1}{جا(٩٠+هـ)} = \frac{ش_2}{جا(١٨٠ - هـ)} = \frac{٣٠}{جا ٩٠}$$

$$\frac{ش_1}{جتا هـ} = \frac{ش_2}{جا هـ} = ٣٠$$

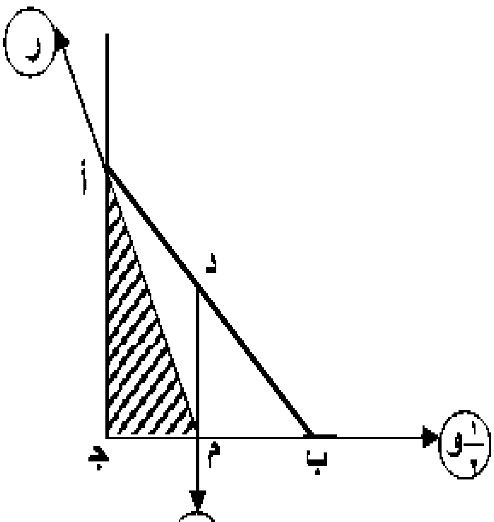
$$ش_1 = ٣٠ \text{ جتا هـ} = ٣٠ \times \frac{٨٠}{١٠٠} = ٢٤ \text{ ث جم}$$

$$ش_2 = ٣٠ \text{ جا هـ} = ٣٠ \times \frac{٦٠}{١٠٠} = ١٨ \text{ ث جم}$$

$(أجـ)^2 = (١٠٠)^2 - (٦٠)^2$
$= ٦٤٠٠$
أ جـ = ٨٠ سم

مثال : ساق منتظمة قابلة للحركة حول أحد طرفيها شدت جانبا بقوة أفقية تؤثر فى طرفها الاخر وتساوى نصف ثقل الساق أوجد قياس زاوية ميل الساق على الرأسى عندما تتزن وكذلك رد الفعل عند الطرف الاول

الحل :



الساق متزنة تحت تأثير القوى

(١) الوزن (و) رأسى لأسفل ويؤثر فى منتصفها د (لأن الساق منتظمة)

(٢) القوة الافقية $\frac{١}{٢}$ و

(٣) ر رد فعل عند الطرف ؟

∵ الوزن والقوة تتلاقيان فى نقطة م

∴ القوة الثالثة ر تمر بالنقطة م

$\triangle$ ﻫ م جـ هو مثلث القوى

$$\frac{ر}{ﻫ م} = \frac{و}{ﻫ جـ} = \frac{\frac{1}{2} و}{م جـ}$$

ﻫ جـ = ٢ م جـ = ٢ س

فى $\triangle$ ﻫ م جـ

$$ﻫ م = \sqrt{(ﻫ جـ)^2 + (م جـ)^2} = \sqrt{(2 س)^2 + (س)^2} = \sqrt{4س^2 + س^2} = \sqrt{5 س^2} = \sqrt{5} س$$

$\because \frac{ر}{\sqrt{5} س} = \frac{و}{2س}$ $\therefore$ $ر = \frac{\sqrt{5}}{2} و$

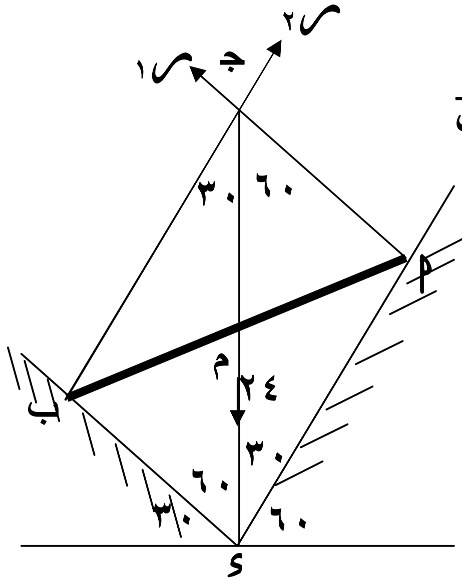
$\because$ د منتصف $\overline{ﻫ ب}$ ، $\overline{د م} // \overline{ﻫ جـ}$ $\therefore$ م منتصف $\overline{ب جـ}$ $\therefore$ ب م = م جـ

$\therefore$ ﻫ جـ = ب جـ $\therefore$ ق (ب $\hat{ﻫ}$ جـ) = ق (ﻫ $\hat{ب}$ جـ) = ٤٥°

اى ان الساق تميل على الرأسى بزاوية ٤٥° فى وضع التوازن ، $ر = \frac{1}{2} \sqrt{5}$ و

مثال: وضع قضيب منتظم وزنه ٢٤ نيوتن على مستويين أملسين متقابلين ويميلان على الافقى بالزاويتين ٣٠° ، ٦٠° بحيث يقع القضيب وخطا أكبر ميل للمستويين فى مستوى واحد أوجد: مقدار الضغط على كلا من المستويين وكذا زاوية ميل القضيب على الافقى فى حالة التوازن.

الحل :



القضيب متزن بتأثير ثلاث قوى :

١) الوزن ٢٤ نيوتن راسيا لأسفل و يؤثر فى منتصف $\overline{ﻫ ب}$

٢) رد فعل المستوى الاول $ر_1$

٣) رد فعل المستوى الاول $ر_2$

بتطبيق قاعدة لامى :

$$\frac{ر_1}{جا ١٥٠} = \frac{ر_2}{جا ١٢٠} = \frac{٢٤}{جا ٩٠}$$

$\therefore$ $ر_1 = \frac{٢٤ جا ١٥٠}{جا ٩٠}$ = ١٢ نيوتن ، $ر_2 = ١٢ \sqrt{٣}$

(٤) اتزان جسم تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية المتلاقية فى نقطة

قاعدة

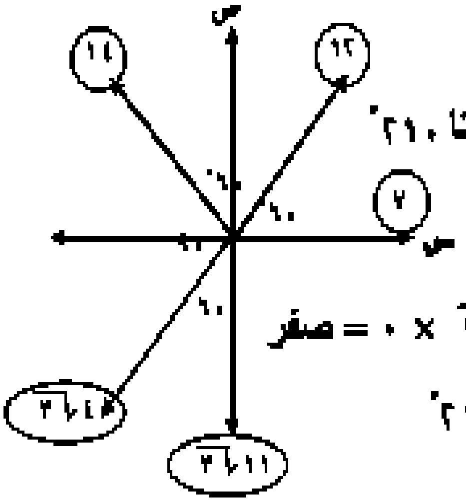
شرط اتزان جسم تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية المتلاقية فى نقطة هو أن يتلاشى المجموع الجبرى للمركبات الجبرية لهذه القوى فى الاتجاهين المتعامدين .

نحلل كل قوة من القوى المعطاة الى مركبتين فى الاتجاهين الموجبين لمحورى الاحداثيات و تكون هما سـ ، صـ على الترتيب ثم نضع سـ = ٠ ، صـ = ٠ ثم نوجد المطلوب

*** نتيجة :**

شرط اتزان جسم تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية المتلاقية فى نقطة هو أن يتلاشى المجموع الجبرى للمركبات الجبرية لهذه القوى فى أى اتجاه .

مثال : أثرت القوى ٧ ، ١٢ ، ١٤ ، ٤ $\sqrt{٣}$ ، ١١ $\sqrt{٣}$ ث كجم فى نقطة مادية و كان قياس الزاوية بين إتجاهى القوتين الأولى و الثانية ٦٠° ، بين الثانية و الثالثة ٦٠° ، بين الثالثة و الرابعة ٩٠° ، و بين الرابعة و الخامسة ٦٠° اثبت أن هذه القوى متزنة



الحل

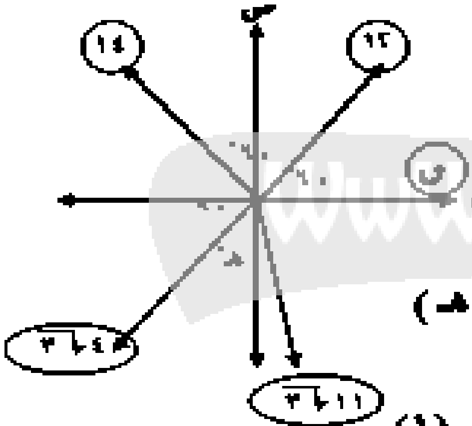
سـ = ٧ حتا ٠° + ١٢ حتا ٦٠° + ١٤ حتا ١٢٠° + ٤ $\sqrt{٣}$ حتا ٢١٠° + ١١ $\sqrt{٣}$ حتا ٢٧٠° = ٧ × ١ + ١٢ × $\frac{١}{٢}$ + ١٤ × ($-\frac{١}{٢}$) + ٤ $\sqrt{٣}$ × ($-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) + ١١ $\sqrt{٣}$ × ٠ = صفر

صـ = ٧ حا ٠° + ١٢ حا ٦٠° + ١٤ حا ١٢٠° + ٤ $\sqrt{٣}$ حا ٢١٠° + ١١ $\sqrt{٣}$ حا ٢٧٠°

صـ = ٧ × ٠ + ١٢ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ١٤ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٤ $\sqrt{٣}$ × ($-\frac{١}{٢}$) + ١١ $\sqrt{٣}$ × ($-$ ١) = صفر

∴ ح = صفر ∴ القوى متزنة

أثرت القوى ق ، ١٢ ، ١٤ ، $٤\sqrt{٣}$ ، $١١\sqrt{٣}$ ث كجم في نقطة مادية و كان قياس الزاوية بين إتجاهي القوتين الأولى و الثانية ٦٠° ، بين الثانية و الثالثة ٦٠° ، بين الثالثة و الرابعة ٩٠° ، و بين الرابعة و الخامسة هـ° فإذا كانت هذه القوى متزنة أوجد قيمة كل من : ق ، هـ حيث : هـ حادة موجبة



الحل

∵ القوى متزنة ∴ ح = صفر

∴ س = صفر ، ص = صفر

∴ ق × ١ + ١٢ × $\frac{١}{٢}$ + ١٤ × ($-\frac{١}{٢}$)

+ $٤\sqrt{٣}$ × ($-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) + $١١\sqrt{٣}$ × حتا (٢١٠° + هـ)

= صفر

∴ ق + $١١\sqrt{٣}$ × حتا (٢١٠° + هـ) = ٧ (١)

، ص = ق × ٠ + ١٢ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ١٤ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + $٤\sqrt{٣}$ × ($-\frac{١}{٢}$)

+ $١١\sqrt{٣}$ × حا (٢١٠° + هـ) = صفر

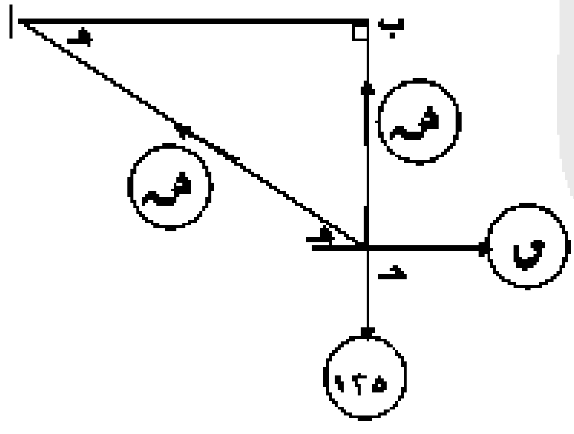
∴ $١١\sqrt{٣}$ + $١١\sqrt{٣}$ × حا (٢١٠° + هـ) = صفر

∴ حا (٢١٠° + هـ) = −١ ∴ ٢١٠° + هـ = ٢٧٠° ∴ هـ = ٦٠°

من (١) ينتج: ق + $١١\sqrt{٣}$ × حتا ٢٧٠° = ٧

∴ ق + $١١\sqrt{٣}$ × ٠ = ٧ ∴ ق = ٧ ث كجم

خيط طوله ٢٥ سم مثبت من نهايته في مسمارين أ ، ب يقعان على خط مستقيم أفقي واحد ، أ ب = ١٥ سم لضمت حلقة صغيرة ملساء وزنها ١٢٥ ث جم في الخيط ثم جذبت بقوة أفقية ق حتى أتزنت رأسياً أسفل النقطة ب أوجد مقدار الشد في كل من فرعي الخيط عندئذ و مقدار ق



الحل

نفرض أن : ب حـ = س ∴ أ حـ = ٢٥ − س

∴ من Δ أ ب حـ : $(٢٥ - س)^2 = س^2 + (١٥)^2$

∴ س = ب حـ = ٨ سم ∴ أ حـ = ١٧ سم

في وضع الإتزان س = ٠ ، ص = ٠

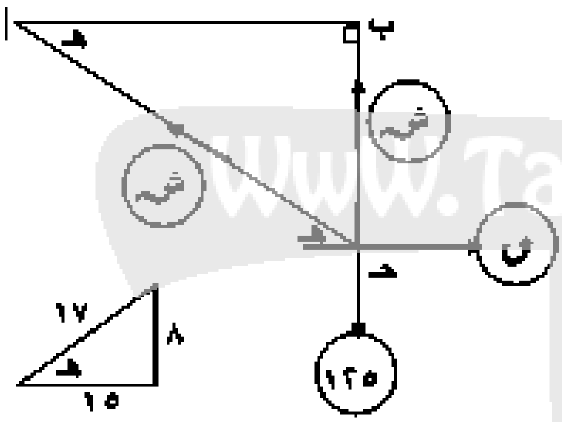
∴ ش + ش حا هـ = ١٢٥

∴ ش + ش × $\frac{٨}{١٧}$ = ١٢٥ ∴ ش = ٨٥ ث جم

، ق − ش حتا هـ = ٠

∴ ق − ٨٥ × $\frac{١٥}{١٧}$ = ٠ ∴ ق = ٧٥ ث جم

حلقة ملساء وزنها ١٢٥ ث جم يمر خلالها خيط خفيف مثبت طرفاه فى نقطتين أ ، ب على خط أفقى ولحد حيث أ ب = ١٥ سم ، أثرت على الحلقة قوة أفقية ق فاتزنت رأسياً أسفل ب فإذا كان الخيط مشدوداً و مقداره يساوى ٨٠ ث جم أوجد طول الخيط و ق



الحل

فى وضع الإتزان مجـ س = ٠ ، مجـ ص = ٠

∴ ق − ٨٠ حتا هـ = ٠ (١)

، ٨٠ + ٨٠ حا هـ = ١٢٥

∴ حا هـ = $\frac{٨}{١٧}$

من (١) ∴ ق = ٨٠ × $\frac{١٥}{١٧}$ = ٧٥ ث جم

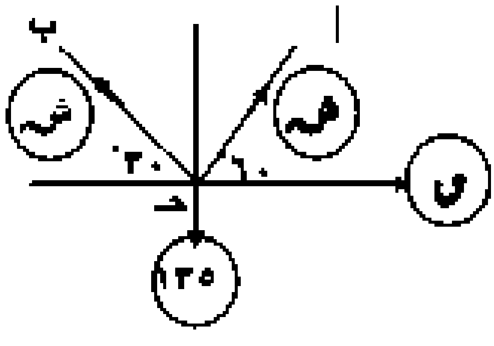
من ∆ أ ب حـ حيث أ ب = ١٥ سم

ب حـ = أ ب × ظا هـ = ١٥ × $\frac{٨}{١٥}$ = ٨ سم

أ حـ = أ ب × قا هـ = ١٥ × $\frac{١٧}{١٥}$ = ١٧ سم

∴ طول الخيط = ٨ + ١٧ = ٢٥ سم

تنزلق حلقة ملساء وزنها ١٣٥ ث جم على خيط ثابت الطول طرفاه مربوطان فى نقطتين أ ، ب أثرت قوة أفقية مقدارها ق على الحلقة فاتزنت عند نقطة حـ على الخيط عندما كان ق(∠ أ حـ ب) = ٩٠° و كان $\overleftarrow{\text{أ حـ}}$ يصنع مع الأفقى زاوية قياسها ٦٠° أوجد مقدار كل من الشد فى الخيط ، ق



الحل

فى وضع الإتزان مجـ س = ٠ ، مجـ ص = ٠

∴ ق + ش حتا ٦٠° − ش حتا ٣٠° = ٠

∴ ق + ش × $\frac{١}{٢}$ − ش × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٠ (١)

، ش حا ٦٠° + ش حا ٣٠° − ١٣٥ = ٠

∴ ش × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ش × $\frac{١}{٢}$ = ١٣٥

∴ ش = ($\sqrt{٣}$ + ١) = ٢٧٠

∴ ش ≃ ٩٨,٨٣ ث جم   بالتعويض فى (١) ق ≃ ٣٦,١٧ ث جم

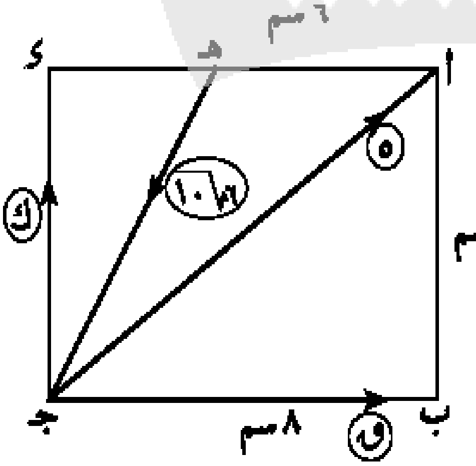
إذا كانت القوى ق$_1$ = ٤ س – ٣ ص، ق$_2$ = - م س – ٢ ص، ق$_3$= - ٦ س + ب ص
متلاقية فى نقطة و متزنة فأوجد قيمة من م ، ب

الحل :

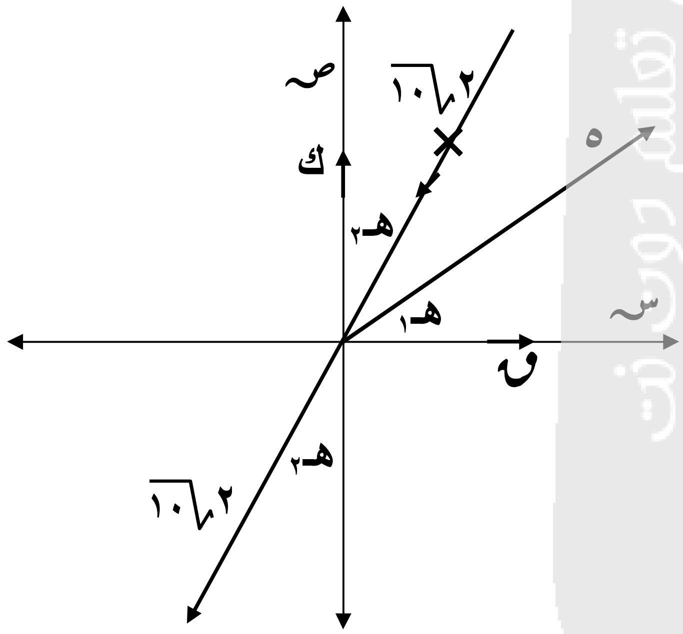
∵ القوى متلاقية و متزنة

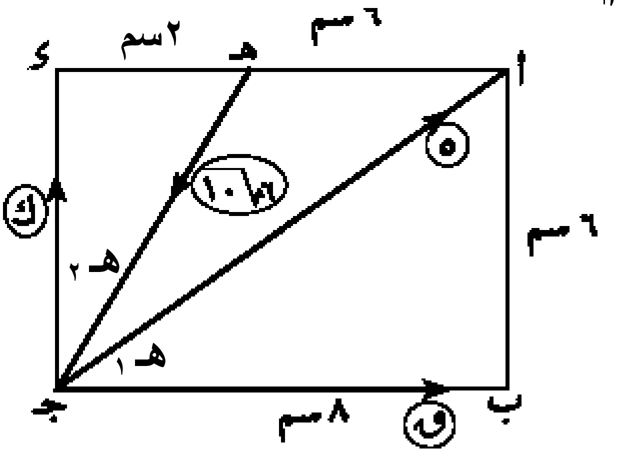
∴ مجموع المركبات فى اتجاة س = ٠ ، مجموع المركبات فى اتجاة ص= ٠

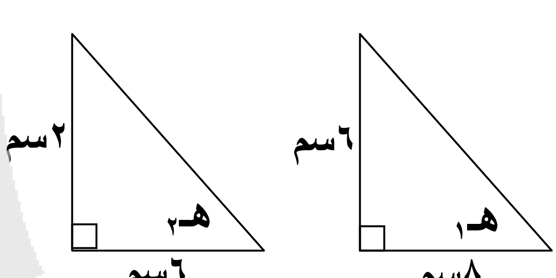
∴ ٤ – م – ٦ = ٠ ∴ م = – ٢ ، – ٣ – ٢ + ب = ٠ ∴ ب = ٥



الشكل المقابل: يمثل القوى التى مقاديرها ق ، ٥ ، ك ، ٦ $\sqrt{١٠}$ نيوتن والمتزنه والتى تؤثر فى المستطيل أ ب جـ ى فى الإتجاهات $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ ى}}$ ، $\overleftarrow{\text{هـ جـ}}$ حيث أ ب = ٦سم ، ب جـ = ٨سم ، أ هـ = ٦سم. أوجد قيمة ق ، ك.







∵ القوى متزنة ∴ س = ٠ ، ص = ٠ أكمــل ....

∴ ق = ٢ نيوتن ، ك = ١٥ نيوتن

تمارين على اتزان جسم تحت تأثير مجموعة من القوى

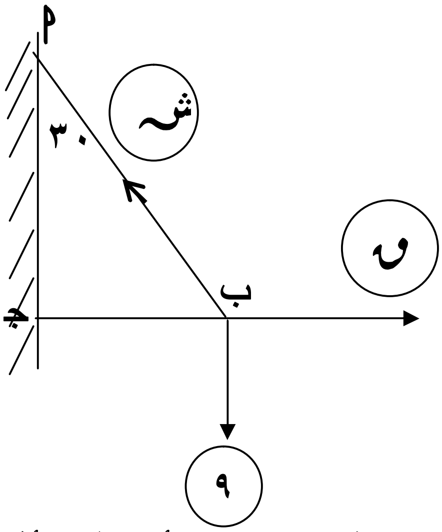
[١] أكمـــــل ما يأتى :

١) إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى مستوية متلاقية فى نقطة فإن محصلة أى قوتين منها تساوى فى المقدار .... و تكون على استقامتها فى .... المضاد .

٢) إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية فى نقطة و رسم مثلث أضلاعه توازى خطوط عمل القوى الثلاثة و فى اتجاه دورى واحد فإن أطوال أضلاع المثلث تكون ....

٣) فى الشكل المقابل :

جسم وزنه ٩ نيوتن معلق فى نهاية خيط اتزن بتأثير قوة أفقية مقدارها ق عندما كان الخيط يميل على الرأسي بزاوية قياسها ٣٠ °

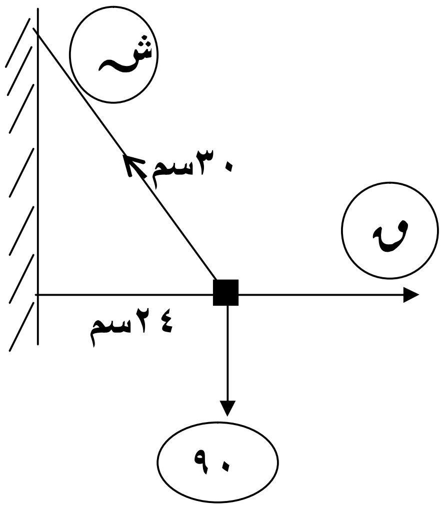


أ) $\frac{ق}{.....} = \frac{شـ}{......} = \frac{٩}{.....}$

ب) ق = ... نيوتن ، شـ = ... نيوتن

٤) فى الشكل المقابل :

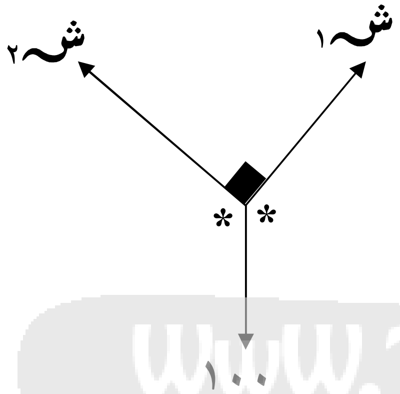
جسم وزنه ٩٠ ث جم معلق فى نهاية خيط طوله ٣٠ سم جذب الجسم بتأثير قوة أفقية حتى اتزن و هو على بعد ٢٤ سم من الحائط فإن :



أ) $\frac{ق}{.....} = \frac{شـ}{......} = \frac{٩}{.....}$

ب) ق = ... ث جم ، شـ = ... ث جم

٥) فى الشكل المقابل :
خيط خفيف يمر خلال حلقة ملساء
وزنها ١٠٠ داين ، $\vec{ش}_١ \perp \vec{ش}_٢$
فإن : $\vec{ش}_١$ = ... داين
، $\vec{ش}_٢$ = ... داين



[٢] ثلاث قوى مستوية مقاديرها ٨ ، ١٠ ، ١٢ نيوتن تؤثر فى نقطة مادية ، فإذا كانت القوى متزنة . فما قياس الزاوية بين القوتين الأخرتين ؟

[٣] ثلاث قوى مستوية و متلاقية فى نقطة مقاديرها $ق_١$ = ٨ ث جم ، $ق_٢$ = $٤\sqrt{٣}$ ث جم
، $ق_٣$ = ٤ ث جم . أوجد قياسات الزوايا الثلاثة بين خطوط عمل القوى الثلاثة علما بأن المجموعة متزنة .

[٤] علق ثقل مقداره ٣٤٠ ث جم بواسطة خيطين طولاهما ١٦ سم ، ٣٠ سم من نقطتين فى خط أفقى البعد بينهما ١٠٠ سم أوجد الشد فى كل من الخيطين .

[٥] علق جسم وزنه ٦,٥ نيوتن بواسطة خيطين طول أحدهما ٠,٥ متر و طول الاخر ١,٢ متر وربط الخيطان فى نقطتين من مستقيم أفقى بحيث كانا متعامدين .
أوجد مقدار الشد فى كل من الخيطين .

[٦] علق ثقل مقداره ٢٠٠ ث جم من طرف خيط مثبت طرفه الأخر فى سقف حجرة ثم جذب الثقل بقوة أفقية حتى أصبح الخيط مائلا على الرأسي بزاوية قياسها ٣٠ °
عين مقدار كل من القوة الأفقية و الشد فى الخيط

[٧] علق وزن مقداره ٧٢ ثقل جرام فى أحد طرفى خيط و ثبت الطرف الثانى للخيط فى نقطة م على حائط رأسي ز ربط خيط ثأن عند نقطة ب من الخيط الأول تبعد عن م بمقدار ٢٥ سم و شد فى اتجاه افقى حتى صارت النقطة ب تبعد عن الحائط ٧ سم .
أوجد قوة الشد فى الخيط الافقى و فى كل من جزأى الخيط الثانى

[٨] علق جسم وزنه ٢٠٠ ث جم بواسطة خيطين خفيفين يميل أحدهما على الرأسي بزاوية قياسها هـ و يميل الخيط الأخر على الرأسي بزاوية ٣٠ ° ، فإذا كان مقدار الشد فى الخيط الأول يساوى ١٠٠ ث جم ، فأوجد هـ ، مقدار الشد فى الخيط الثانى.

---

[٩] علق وزن (و) نيوتن بواسطة خيطين يميل أولهما على الرأسي بزاوية قياسها هـ ويمر على بكرة صغيرة ملساء و يحمل فى نهايته الأخرى وزنا مقداره ١٢ نيوتن و يميل الثانى على الرأسي بزاوية قياسها ٣٠ ° و يمر على بكرة صغيرة ملساء و يحمل فى نهايته الأخرى وزنا مقداره ٨ نيوتن ز أوجد مقدار الوزن و قيمة هـ

---

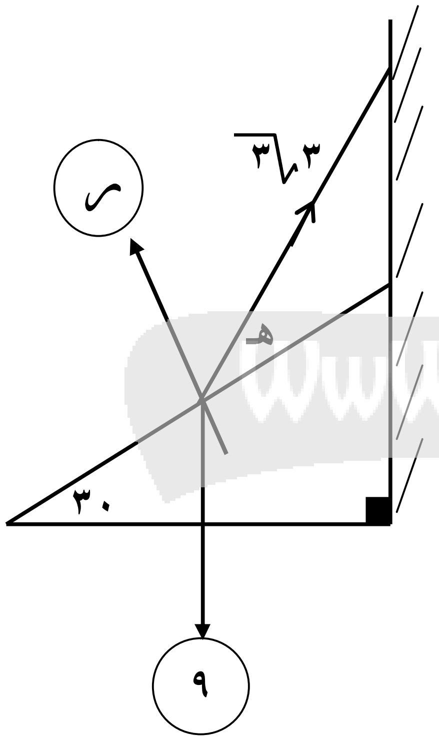
[١٠] جسم وزنه ٤٠٠ ثقل جرام معلق من نقطة ؟ بواسطة خيط ، ربط خيط فى نقطة ب من الخيط و شد أفقيا بخيط ثان $\overline{ب حـ}$ يمر على بكرة صغيرة ملساء مثبته و يتدلى فى نهايته ثقل مقداره ٣٠٠ ثقل جرام . أوجد ميل $\overline{؟ب}$ على الرأسي و الشد فى كل من الخيطين $\overline{؟ب}$ ، $\overline{ب حـ}$

<u>مسائل على اتزان جسم على مستو مائل أملس :</u>

[١] وضع جسم على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠ ° إذا حفظ الجسم فى حالة توازن بواسطة قوة ق تعمل فى اتجاه أكبر ميل للمستوى الى أعلى و مقدارها ٢٠٠ ث جم فأوجد وزن الجسم و رد فعل المستوى على الجسم .

---

[٢] وضع جسم وزنه ٦ نيوتن على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ و حفظ توازنه بواسطة قوة مقدارها ٢ $\sqrt{٣}$ نيوتن و تميل على خط أكبر ميل للمستوى بزاوية لها نفس القياس هـ لأعلى . أوجد قيمة هـ و رد فعل المستوى على الجسم .



[٣] جسم وزنه ٩ ث كجم موضوع على مستوى مائل أملس يميل على الافقى بزاوية ٣٠ ° و حفظ توازنه بواسطة قوة شد شـ مقدارها ٣√٣ ث كجم تعمل فى خيط مثبت من أحد طرفيه بالجسم و الطرف الآخر فى حائط رأسي .
أوجد قياس الزاوية التى يصنعها الخيطمع الافقى و مقدار رد فعل المستوى على الجسم .

---

[٤] وضع جسم وزنه ٩٠ ث جم على مستوى أملس يميل على الافقى بزاوية قياسها ٣٠ ° و إذا حفظ الجسم فى حالة توازن بواسطة قوة . أوجد هذه القوة و رد فعل المستوى :
(١) إذا كانت أفقية (٢) إذا كانت تصنع زاوية قياسها ٦٠ ° مع الافقى

<u>مسائل على تلاقى خطوط عمل ثلاث قوى متزنة :</u>

[١] كرة ملساء طول نصف قطرها ٦ سم و وزنها ٢٤ نيوتن يؤثر فى مركزها مستندة على حائط رأسي أملس و معلقة بخيط طوله ٤ سم . ثبت أحد طرفيه فى نقطة على سطحها و ثبت الطرف الآخر فوق نقطة تماس الكرة بالحائط تماماً . أوجد رد فعل الحائط و الشد فى الخيط

[٢] كرة ملساء وزنها ١٥ نيوتن تستند على حائط أملس و معلقة بخيط مثبت أحد طرفيه فى نقطة على سطحها و طرفه الاخر مربوط فى الحائط فى نقطة ﻫ على نقطة تماس الكرة تماما فإذا كان طول الخيط يساوى طول نصف قطر الكرة . أوجد الضغط على الحائط و الشد فى الخيط

[٣] علق قضيب منتظم طوله ١٣٠ سم ووزنه ٢٦ نيوتن من طرفيه تعليقا مطلقا فى خيطين مربوطين فى نقطة واحدة و كان طول أحدهما ٥٠ سم و طول ١٢٠ سم . ما هو الوضع الذى يكون فيه القضيب متزنا ؟ ز ما هو مقدار الشد فى كل من الخيطين ؟

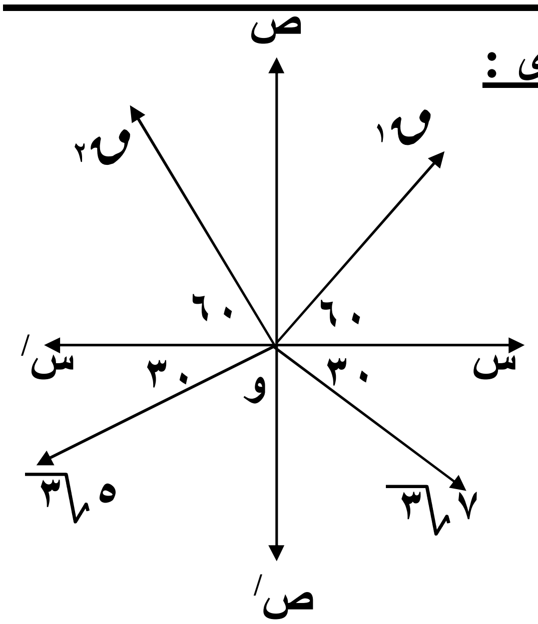
[٤] كرة مصمتة ترتكز على قضيبين متوازيين يقعان فى مستوى أفقى واحد و البعد بينهما يساوى طول نصف قطر الكرة . أوجد الضغط على كل من القضيبين إذا كان وزن الكرة يساوى ١٠ نيوتن

[٥] قضيب منتظم طوله ٨٠ سم ووزنه ١٢ نيوتن يؤثر فى منتصفه علق من طرفيه بحبلين ثبت طرفاهما فى مسمار فى السقف فإذا كان الحبلان متعامدين و طول أحدهما ٤٨ سم فما مقدار الشد فى كل من الحبلين عندما يكون القضيب معلقاً تعليقاً مطلقاً و فى حالة توازن

[٦] قضيب منتظم $\overline{\text{ا ب}}$ يمكنه الدوران بغير عائق فى مستوى رأسي حول مفصل فى ا ، ربط طرفه الاخر ب بخيط يمر على بكرة ملساء عند جـ أعلى ا تماماً و يحمل ثقلا يساوى نصف ثقل القضيب . أوجد قياس زاوية ميل القضيب على الافقى فى حالة التوازن إذا علم أن اجـ = اب

[٧] $\overline{\text{ا ب}}$ قضيب منتظم طوله ٤٠ سم ووزنه ١٢ نيوتن يسند بطرفه ا على حائط رأسي أملس و محمول بواسطة خيط خفيف مربوط أحد طرفيه فى نقطة جـ من نقط القضيب حيث ب ج = ١٠ سم و مربوط طرفه الاخر فى نقطة ء تقع على الحائط راسياً فوق ا إذا كان القضيب يميل على الرأسي بزاوية ٦٠ ° فى وضع التوازن فأوجد مقدار الشد فى الخيط ، رد فعل الحائط .

مسائل على اتزان جسم تحت تأثير مجموعة من القوى :



[١] فى الشكل المقابل :
قوى مقاديرها ق١ ، ق٢ ، ٥ $\sqrt{3}$ ، ٧ $\sqrt{3}$ نيوتن
تؤثر فى النقطة (و) و تصنع مع محور السينات زوايا قياساتها مبينة بالشكل .
أوجد ق١ ، ق٢ علما بأن المجموعة متزنة

[٢] أثرت القوى ٧ ، ق ، ك ، ٤ $\sqrt{3}$ ، ١١ $\sqrt{3}$ ث كجم فى نقطة مادية و كان قياس الزاوية بين إتجاهى القوتين الأولى و الثانية ٦٠° ، بين الثانية و الثالثة ٦٠° ، بين الثالثة و الرابعة ٩٠° ، و بين الرابعة و الخامسة ٦٠° فإذا كانت هذه القوى متزنة
أوجد قيمة كل من : ق ، ك

* تمارين من كتاب المدرسة *

أكمل مايأتي:

(١) الشرط اللازم والكافى لاتزان مجموعة من القوى المستوية والمتلاقية فى نقطة هو أن تمثل هندسيًا بـ ....

(٢) الطريقة التحليلية لاتزان مجموعة من القوى المستوية المتلاقية فى نقطة هى أن تكون ....، ....

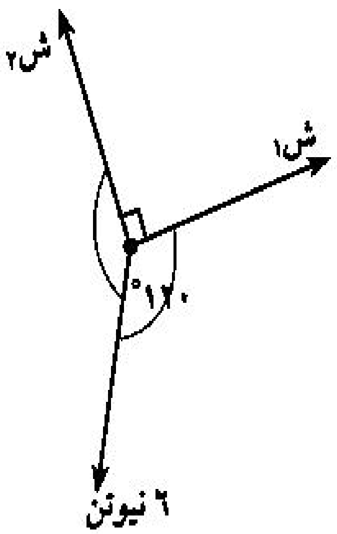
(٣) إذا كانت $\overrightarrow{\text{ق}_1} = ٤\,\overrightarrow{\text{س}} + \text{ب}\,\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_2} = -٧\,\overrightarrow{\text{س}} - ٢\,\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_3} = \text{أ}\,\overrightarrow{\text{س}} - ٣\,\overrightarrow{\text{ص}}$ متزنة فإن:

أ = ... ، ب = ...

(٤) إذا كانت القوة التى مقدارها ق متزنة مع قوتان متعامدتان مقدارهما ٣ ، ٤ نيوتن فإن مقدار ق = ...

(٥) إذا مُثلت ثلاث قوى مستوية ومتزنة ومأخوذه فى اتجاه دورى واحد بأضلاع مثلث فإن أطوال أضلاع المثلث تكون متناسبة مع ....

(٦) إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة فإن مقدار كل قوة يتناسب مع ....



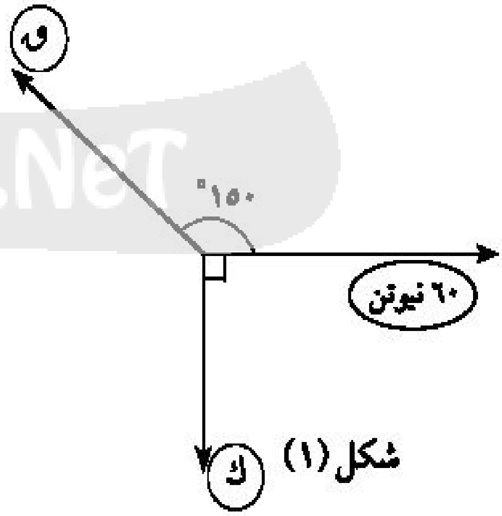
(٧) إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى غير متوازية ومستوية فإن خطوط عمل هذه القوى ....

(٨) ثلاث قوى متساوية فى المقدار ومتلاقية فى نقطة ومتزنة فإن قياس الزاوية بين أى قوتين يساوي ....

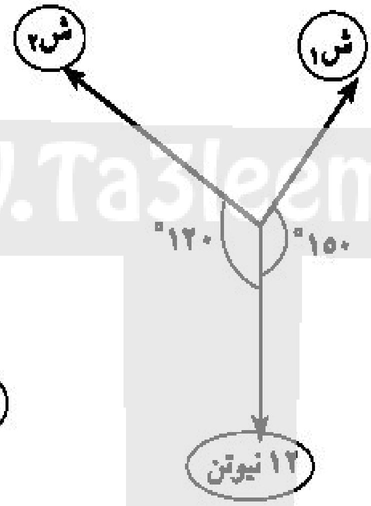
(٩) فى الشكل المقابل: مجموعة القوى متزنة ومتلاقية فى نقطة

ش_1 = ... نيوتن ، ش_2 = ... نيوتن.

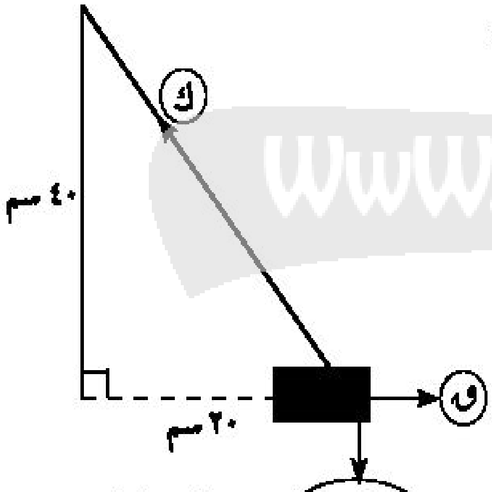
⑩ يمثل كل شكل من الأشكال الآتية مجموعة من القوى المستوية المتزنة والمتلاقية فى نقطة. أوجد القيمة المجهولة سواء كانت قوة أو قياس زاوية.



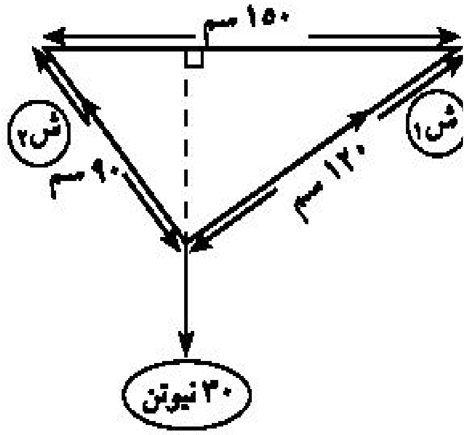
شكل (١)



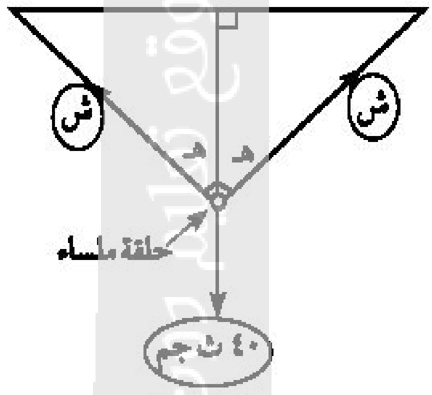
شكل (٢)



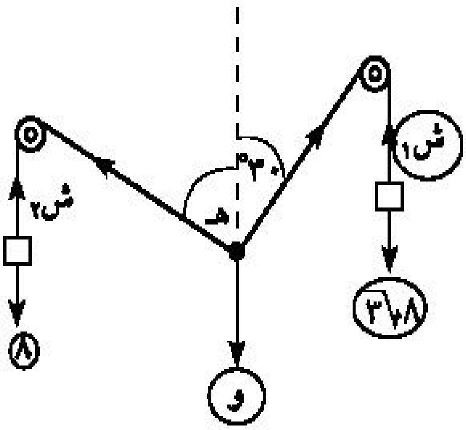
شكل (٣)



شكل (٤)



شكل (٥)



شكل (٦)

⑪ علق ثقل مقدار وزنه ٦٠ ث جم من أحد طرفى خيط طوله ٢٨سم مثبت طرفه الآخر فى نقطة فى سقف حجرة، أثرت على الجسم قوة فاتزن الجسم وهو على بعد ١٤سم رأسيًا أسفل السقف ، فإذا كانت القوة فى وضع الاتزان عمودية على الخيط فأوجد مقدار كل من القوة والشد فى الخيط.

⑫ علق ثقل مقداره ٢٠٠ ث جم بخيطين طولاهما ٦٠سم ، ٨٠سم من نقطتين على خط أفقى واحد البعد بينهما ١٠٠سم. أوجد مقدار الشد فى كل من الخيطين.

(١٣) علق جسيم وزنه ٢٠٠ ث جم بواسطة خيطين خفيفين يميل أحدهما على الرأسى بزاوية قياسها هـ ويميل الخيط الآخر على الرأسى بزاوية قياسها ٣٠° ، فإذا كان مقدار الشد فى الخيط الأول يساوى ١٠٠ ث جم. فأوجد هـ ومقدار الشد في الخيط الثاني.

(١٤) وضع جسم وزنه ٨٠٠ ث جم على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ حيث حا هـ = ٠,٦ وحفظ الجسم فى حالة توازن بواسطة قوة أفقية أوجد مقدار هذه القوة ورد فعل المستوى على الجسم.

(١٥) وضع جسم وزنه (و) نيوتن على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ الجسم فى حالة توازن بتأثير قوة مقدارها ٣٦ نيوتن تعمل فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى. احسب مقدار وزن الجسم ومقدار رد فعل المستوى.

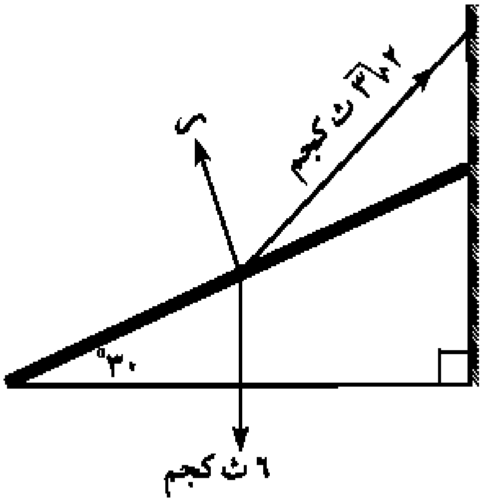
(١٦) كرة معدنية منتظمة ملساء وزنها ٣ نيوتن مستقرة بين حائط رأسى أملس ومستوى أملس يميل على الحائط الرأسى بزاوية قياسها ٣٠°. أوجد الضغط على كل من الحائط الرأسى والمستوى المائل

(١٧) علق قضيب منتظم طوله ٥٠سم ووزنه ٢٠ نيوتن من طرفيه بواسطة خيطين ثبت طرفاهما فى نقطة واحدة. فإذا كان طولا الخيطين ٣٠سم ، ٤٠سم على الترتيب فأوجد الشد فى كل من الخيطين.

(١٨) خمس قوى مقاديرها ق ، ٦ ، ٤$\sqrt{٢}$ ، ٥$\sqrt{٢}$ ، ك ث كجم متزنة وتؤثر فى نقطة مادية فى اتجاهات الشرق والشمال والشمال الغربى والجنوب الغربى والجنوب على الترتيب. أوجد مقدار كل من ق ، ك.

(١٩) أثرت القوى المستوية ٥ ، ٤ ، ق ، ٣ ، ك ، ٧ ث كجم فى نقطة مادية والزاوية بين كل قوتين متتاليتين منها ٦٠°. أوجد مقدار كل من ق ، ك حتى تكون المجموعة فى حالة اتزان.

(٢٠) فى الشكل المقابل جسم وزنه ٦ ث كجم موضوع على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠ وحفظ توازنه بواسطة قوة شد ش مقدارها ٢$\sqrt{٣}$ ث كجم تعمل فى خيط مثبت أحد طرفيه بالجسم والآخر فى حائط رأسى. أوجد قياس الزاوية التى يصنعها الخيط مع المستوى ومقدار رد فعل المستوى على الجسم.



تمارين عامة (الوحدة الأولى)

اكمل ما يأتي:

(١) قوتان مقدارهما ٤ ، ق داين وقياس الزاوية بينهما $\in]0 ، \pi[$ ، محصلتها تنصف الزاوية بينهما فإن ق = ... ث جم.

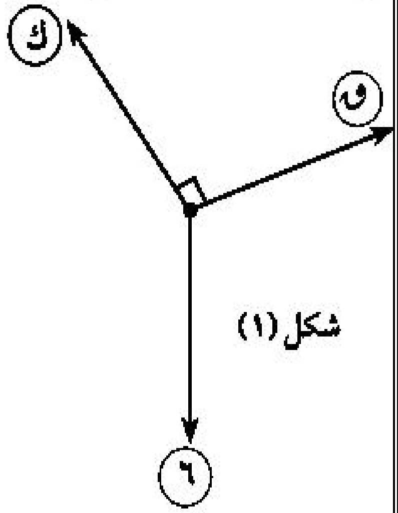
(٢) قوتان تؤثران فى نقطة مادية مقدارهما ٥ ، ٨ نيوتن فإن أكبر قيمة للمحصلة = ... نيوتن ، أصغر قيمة للمحصلة = ... نيوتن.

(٣) إذا وضع جسم وزنه (و) على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية هـ فإن مركبة وزنه فى اتجاه المستوى تساوى ....

(٤) إذا اتزنت القوة $\overrightarrow{ق}$ مع قوتين متعامدتين مقدارهما ٦ ، ٨ ث كجم فإن مقدار القوة ق يساوى .... ث كجم.

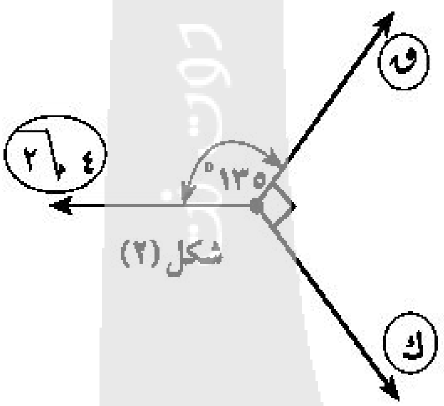
(٥) إذا كانت القوى $\overrightarrow{ق_1} = أ\,\overrightarrow{س} - ٦\,\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2} = -٣\,\overrightarrow{س} + ٤\,\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_3} = ٩\,\overrightarrow{س} + ب\,\overrightarrow{ص}$ متزنة فإن أ = ... ، ب = ...

(٦) كل شكل مما يأتى مكون من ثلاث قوى متزنة ومتلاقية فى نقطة. أكمل ما يأتى:



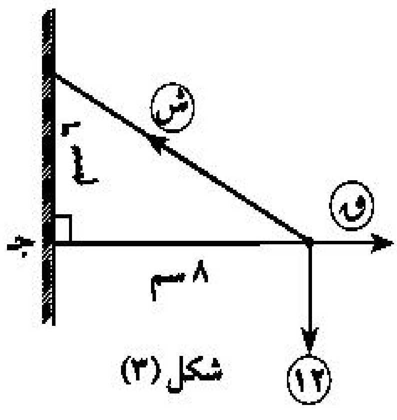
شكل (١)

ق = ...
ك = ...



شكل (٢)

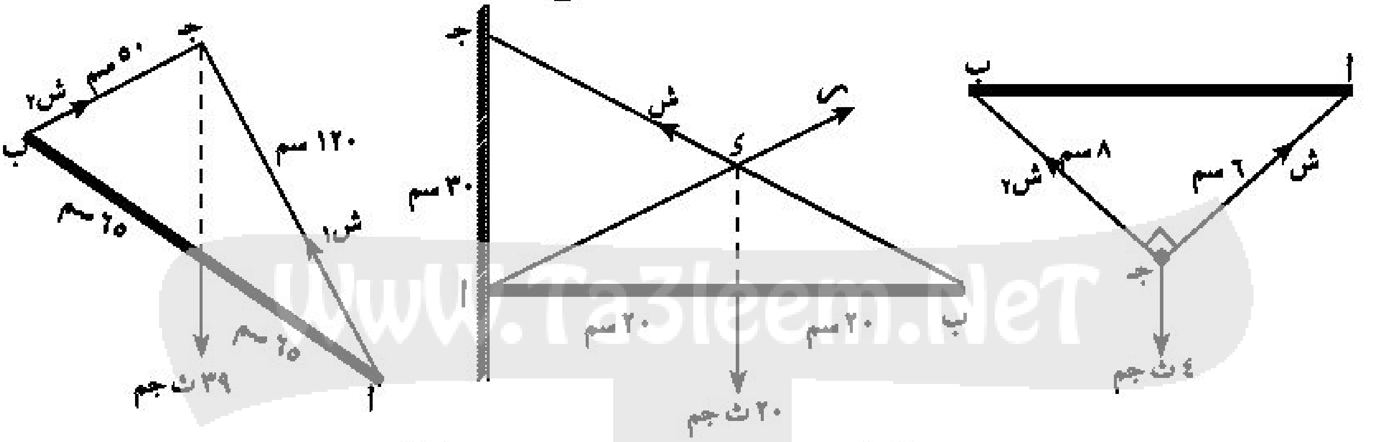
ق = ...
ك = ...



شكل (٣)

ق = ...
ك = ...

⑦ $\overline{أب}$ قضيب متزن تحت تأثير ثلاث قوى مستوية كما هو موضح فى كل شكل. **أكمل:**



(أ) ش$_١$ = ... ث جم. (ب) ش = ... ث جم. (ج) ش$_١$ = ... ث جم.

(د) ش$_٢$ = ... ث جم. (هـ) ر = ... ث جم. (و) ش$_١$ = ... ث جم.

⑧ إذا كانت $\overrightarrow{ع}$ هى محصلة القوتين $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ اللذين ينحصران بينهما زاوية قياسها ى وكان قياس زاوية ميل المحصلة على $\overrightarrow{ق_١}$ يساوى هـ فأوجد:

(أ) مقدار $\overrightarrow{ع}$ ، عندما ق$_١$ = ٨ نيوتن ، ق$_٢$ = ١٥ نيوتن ، ى = ٩٠°.

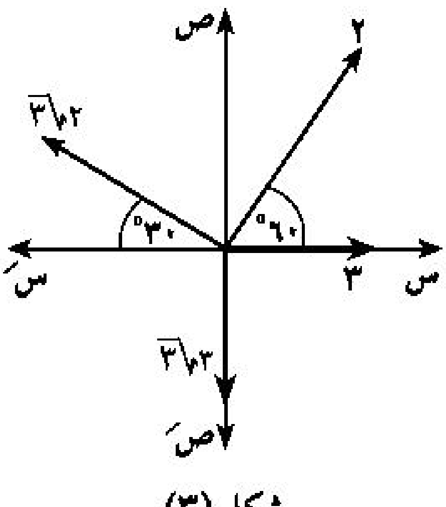
(ب) مقدار $\overrightarrow{ع}$ وقياس زاوية هـ عندما ق$_١$ = ق$_٢$ = ٦٠ داين ، ى = ٦٠°

(ج) مقدار $\overrightarrow{ع}$ وقياس زاوية هـ عندما ق$_١$ = ٦ نيوتن ، ق$_٢$ = ٣ نيوتن والمحصلة عمودية على ق$_٢$.

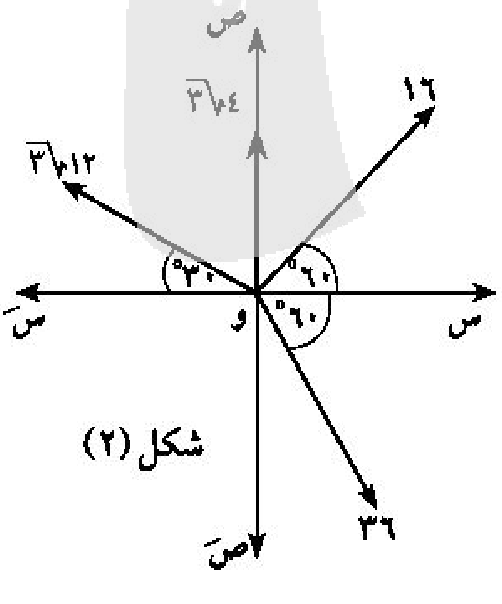
(د) مقدار $\overrightarrow{ع}$ وقياس زاوية ى إذا كان ق$_١$ = ٣$\sqrt{٣}$ نيوتن ، ق$_٢$ = ٦ نيوتن والمحصلة عمودية على ق$_١$.

(هـ) قيمة ق$_١$ عندما ع = ١٢ نيوتن ، ق$_٢$ = ١٢$\sqrt{٣}$ نيوتن ، ى = ١٥٠°

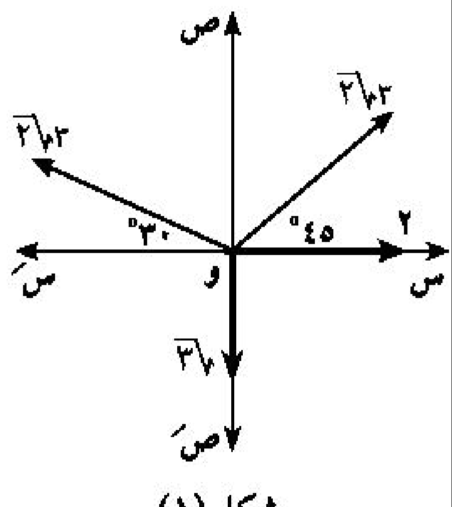
⑨ أوجد مقدار المحصلة وزاوية ميلها مع محور السينات فى كل شكل من الأشكال الآتية:



شكل (٣)

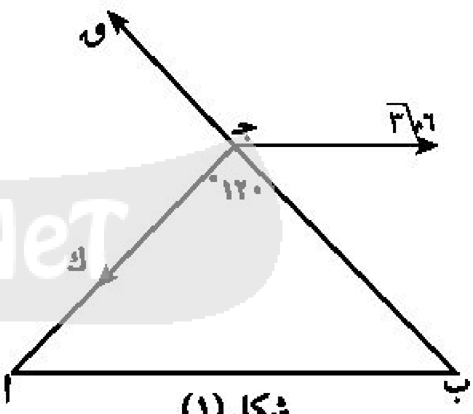


شكل (٢)

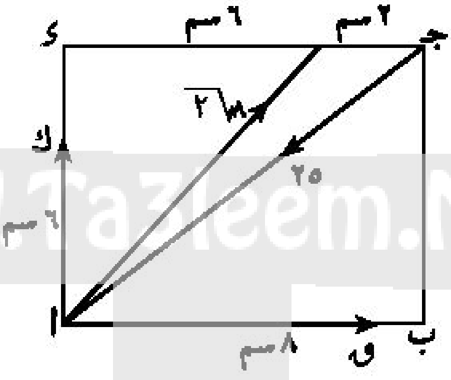


شكل (١)

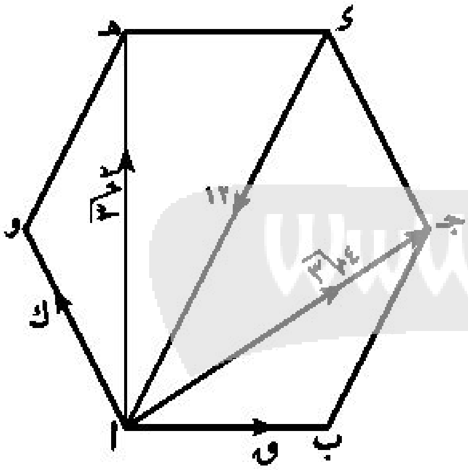
⑩ أوجد مقدار كل من ق ، ك بحيث تصبح كل مجموعة مما يأتى متزنة.



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

اختبار تراكمى

① قوتان مقدارهما ٨√٣ ، ٨ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وتحصران بينهما زاوية قياسها ١٥٠°. أوجد مقدار محصلتهما وقياس الزاوية التى تصنعها مع القوة الأولى.

② قوتان مقدارهما ٣٠ ، ١٦ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية ، إذا كان مقدار محصلتهما ٢٦ نيوتن. أوجد قياس الزاوية بين هاتين القوتين.

③ قوتان مقدارهما ٢ ، ق نيوتن وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° أوجد ق عندما:

(أ) مقدار المحصلة يساوى ق. (ب) اتجاه المحصلة عمودى على القوة الثانية.

(جـ) المحصلة تنصف الزاوية بين القوتين.

④ حَلِّل قوة مقدارها ٩٠ فى خيط قوة إلى قوتين متساويتين فى المقدار وقياس الزاوية بين اتجاهيهما ٦٠°.

⑤ أوجد مقدار المركبتين المتعامدتين، لوزن جسم موضوع على مستوى أفقي ومقداره ٨٠ نيوتن إذا عُلِمَ أنَّ إحداهما تميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° إلى أسفل.

⑥ ثلاث قوى مقاديرها ٢ق ، ٤ق ، ٦ق تؤثر فى نقطة مادية فى اتجاهات موازية لأضلاع مثلث متساوى الأضلاع مأخوذة فى ترتيب دورى واحد أوجد مقدار واتجاه المحصلة.

⑦ أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = ٨سم ، ب جـ = ٦سم ، و ∈ $\overline{\text{جـ د}}$ بحيث و د = ٦سم. أثرت قوى مقاديرها ٦ ، ٢٠ ، ١٢√٣ ، ٢ نيوتن فى $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـ أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ و}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ د}}$ على الترتيب. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

(٨) علق ثقل مقداره ٨٠ ث جم فى طرف خيط مثبت طرفه الآخر فى حائط رأسى أزيح الثقل بقوة عمودية على الخيط حتى أصبح الخيط مائلًا على الحائط بزاوية قياسها ٣٠°. أوجد فى وضع الاتزان مقدار القوة، وكذلك الشد فى الخيط.

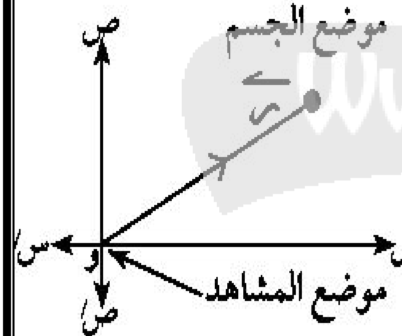
(٩) وضع ثقل قدره ٢٠ ث كجم على مستو مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية ى، حيث حتا ى = $\frac{٤}{٥}$ ومنع من الانزلاق بتأثير قوة أفقية مقدارها (ق) أوجد ق وكذلك رد فعل المستوى.

(١٠) قضيب منتظم يرتكز بطرفيه على مستويين أملسين مائلين يصنعان مع الأفقى زاويتين قياساهما ٦٠°، ٣٠°. أوجد قياس الزاوية التى يصنعها القضيب مع الأفقى فى وضع الاتزان، وإذا كان مقدار وزن القضيب يساوى ٢٤ نيوتن عين مقدار رد الفعل لكل من المستويين.

الوحدة الثانية :

* الديناميكا *

هى علم يختص بدراسة حركة الأجسام الناتجة عن تعرضها لمجموعة من المؤثرات نطلق عليها اسم القوى و تبحث فى خصائص الحركة من الوجهة الهندسية .

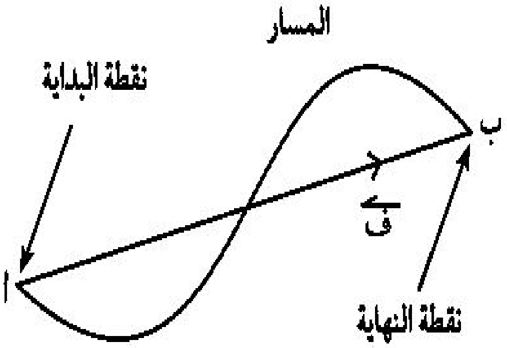


* **الحركة المستقيمة :**

متجه الموضع $\overleftarrow{ر}$:

هو المتجه الذي بدايته موضع الراصد ونهايته موضع الجسم المرصود.

متجه الازاحة $\overleftarrow{ف}$:



هو انتقال جسم من موضع (٩) ابتدائى فى لحظة معينة

إلى موضع أخر له (ب) فى لحظة تالية

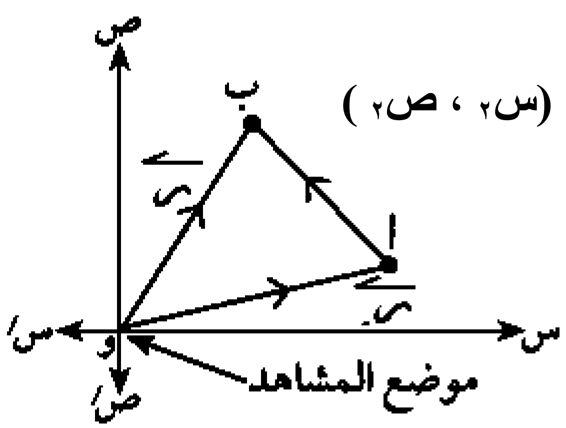
و يمثل بالقطعة المستقيمة $\overleftarrow{٩\ ب}$

معيار الإزاحة (مقدار المسافة):

|| $\overleftarrow{٩\ ب}$ || هو طول القطعة المستقيمة $\overleftarrow{٩\ ب}$ و لكنه قد يساوى أو لا يساوى المسافة الحقيقية التى قطعها الجسم بانتقاله من (٩) إلى (ب) لان ذلك يتوقف على حركة الجسم

وحدات معيار الازاحة : مم - سم – م - كم

* **العلاقة بين متجهى الموضع و الازاحة :**



إذا كانت (و) هى موضع المشاهد ، ٩(س$_{١}$ ، ص$_{١}$) ، ب (س$_{٢}$ ، ص$_{٢}$)
هما موضعا الجسيم عند لحظتين متتاليتين فإن
$\overleftarrow{٩ب}$ هو متجة الازاحة للجسيم و ليكن $\overleftarrow{ف}$

$$\overleftarrow{ف} = \overleftarrow{ر} - \overleftarrow{ر}.$$

، || $\overleftarrow{ف}$ || = $\sqrt{(س_{٢} - س_{١})^{٢} + (ص_{٢} - ص_{١})^{٢}}$

∴ $\overleftarrow{ف}$ = || $\overleftarrow{ف}$ || $\overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ى}$ متجة وحدة فى اتجاه $\overleftarrow{ف}$ (اتجاه الحركة)

مثال : يتحرك جسيم بحيث كان متجة موضعه $\overrightarrow{\text{ر}}$ يعطى كدالة فى الزمن بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين سـ ، صـ بالعلاقة : $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (٣ ن + ٢) $\overrightarrow{\text{سـ}}$ + (٤ ن – ١) $\overrightarrow{\text{صـ}}$

أوجد المسافة المقطوعة حتى اللحظة ن = ٤

[فى نفس المثال أوجد ف من ن = ١ الى ن = ٣]

الحل : $\overrightarrow{\text{ر}}$ (٠) = ٢ $\overrightarrow{\text{سـ}}$ - $\overrightarrow{\text{صـ}}$

، $\overrightarrow{\text{ر}}$ (٤) = (٣ × ٤ + ٢) $\overrightarrow{\text{سـ}}$ + (٤ × ٤ – ١) $\overrightarrow{\text{صـ}}$ = ١٤ $\overrightarrow{\text{سـ}}$ + ١٥ $\overrightarrow{\text{صـ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{ف}}$ = $\overrightarrow{\text{ر}}$ (٤) - $\overrightarrow{\text{ر}}$ (٠) = (١٤ ، ١٥) - (٢ ، - ١) = ١٢ $\overrightarrow{\text{سـ}}$ + ١٥ $\overrightarrow{\text{صـ}}$

∴ || $\overrightarrow{\text{ف}}$ || = $\sqrt{(١٢)^٢ + (١٥)^٢}$ = ٢٠ وحدة مسافة

فى نفس المثال : $\overrightarrow{\text{ر}}$ (١) = ٥ $\overrightarrow{\text{سـ}}$ - ٣ $\overrightarrow{\text{صـ}}$ ، ر (٣) = ١١ سـ + ١١ صـ

∴ ف = ر (٣) - ر (١) = (١١ ، ١١) - (٥ ، - ٣) = ٦ سـ + ١٤ صـ

∴ || ف || = $\sqrt{(٦)^٢ + (١٤)^٢}$ = ٢ $\sqrt{٥٨}$ وحدة مسافة

مقدارالسرعة : إذا كانت سرعة سيارة ٥٠ كم فى الساعة (تكتب ٥٠ كم / س) ويقصد بذلك أن مقدار السرعة بالمسافة المقطوعة خلال فترة زمنية محددة

وفى كثير من الاحيان لا يكفى مقدار السرعة فقط بل يلزم تحديد إتجاهها .

متجه سرعة:

متجه سرعة الجسيم هو المتجه الذى معياره يساوى قيمة السرعة وينطبق اتجاهه على اتجاه الحركة .

وحدات قياس معيار السرعة : كم / ساعة ، متر/ ث ، سم / ث

التحويل من وحدات كبيرة الى صغير نضرب و العكس نقسم

١ كم / س = $\frac{٥}{١٨}$ م / ث ⟷ ١ م / ث = $\frac{١٨}{٥}$ كم / س

، ١ كم / س = $\frac{٢٥٠}{٩}$ سم / ث ⟷ ١ سم / ث = $\frac{٩}{٢٥٠}$ كم / س

مثلا : ٩٠ كم / س = ٩٠ × $\frac{٥}{١٨}$ = ٢٥ م / ث ، ١٥ م / ث = ١٥ × $\frac{١٨}{٥}$ = ٥٤ كم / س

* الحركة المنتظمة :

هى الحالة التى يكون فيها كل من معيار واتجاه متجة السرعة ثابتاً (أى الجسيم يتحرك فى اتجاه ثابت حيث يقطع مسافات متساوية فى فترات زمنية متساوية)

و تكون العلاقة بين ف ، ع : $\boxed{ف = ع\ ن}$ أو $\overleftarrow{ف} = \overleftarrow{ع}\ ن$

مقدار السرعة المتوسطة:

إذا كانت سيارة تتحرك بسرعات متفاوتة بين مدينتين و كانت المسافة بين المدينتين ف و كان الزمن المقطوع خلال الرحلة ن فإن

$$\boxed{\text{السرعة المتوسطة } ع_{م} = \frac{\text{المسافة الكلية}}{\text{الزمن الكلى}}}$$

مثال :إذا كان عداد المسافات فى إحدى السيارات يشير إلى الصفر ، و بعد ربع ساعة أصبح يشير إلى ١٨ كم . فأحسب السرعة المتوسطة . علماً بأن السيارة تحركت فى اتجاه ثابت

الحل :

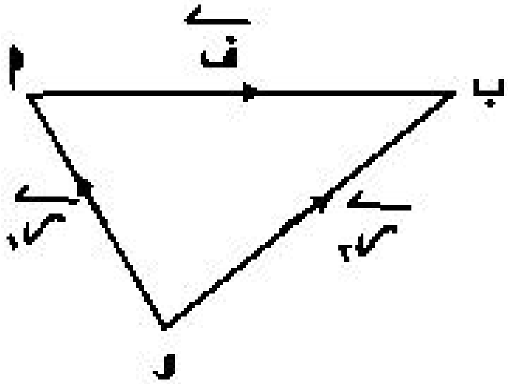
$$\text{السرعة المتوسطة } ع_{م} = \frac{\text{المسافة الكلية}}{\text{الزمن الكلى}} = \frac{١٨}{٠,٢٥} = ٧٢ \text{ كم / س}$$

متجه السرعة المتوسطة :

متجه السرعة المتوسطة للجسم بين لحظتين زمنيتين متتاليتين $ن_{١}$ ، $ن_{٢}$ ونرمز له $\overleftarrow{ع}_{م}$ على أنه خارج قسمة متجه إزاحة الجسم بين هاتين اللحظتين على الفترة الزمنية ($ن_{٢} - ن_{١}$)

إذا كان : $\overleftarrow{ر}_{١}$ متجه موضع الجسم عند اللحظة $ن_{١}$

$\overleftarrow{ر}_{٢}$ متجه موضع الجسم عند اللحظة $ن_{٢}$



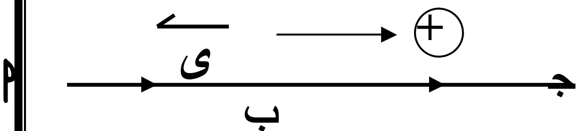
$$\boxed{\overleftarrow{ع}_{م} = \frac{\overleftarrow{ف}}{ن_{٢} - ن_{١}} = \frac{\overleftarrow{ر}_{٢} - \overleftarrow{ر}_{١}}{ن_{٢} - ن_{١}}}$$

وعلى ذلك :

١) السرعة المتوسطة : $\overleftarrow{ع}_{م} = \frac{\overleftarrow{ف}}{ن} = \frac{ف\ \overleftarrow{ى}}{ن}$

$$\oplus \longrightarrow \qquad \frac{ف\ \overleftarrow{ى}}{ن}$$

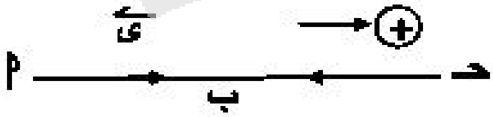
٢) الحالات المختلفة لحركة جسم من (أ) مسافة $ف_١$ إلى (ب) ثم إلى (جـ) مسافة $ف_٢$ خلال الفترتين الزمنيتين $ن_١$ ، $ن_٢$ على الترتيب :



*** فى اتجاه واحد :** $\overleftarrow{ع}_م = \dfrac{ف_١ + ف_٢}{ن_١ + ن_٢}\ \overleftarrow{ى}$

*** إذا توقف الجسم عند (ب) فى فترة زمنية $ن_٣$ فإن :** $\overleftarrow{ع}_م = \dfrac{ف_١ + ف_٢}{ن_١ + ن_٢ + ن_٣}\ \overleftarrow{ى}$

*** فى إتجاهين متضادين :**



$\overleftarrow{ع}_م = \dfrac{ف_١ - ف_٢}{ن_١ + ن_٢}\ \overleftarrow{ى}$

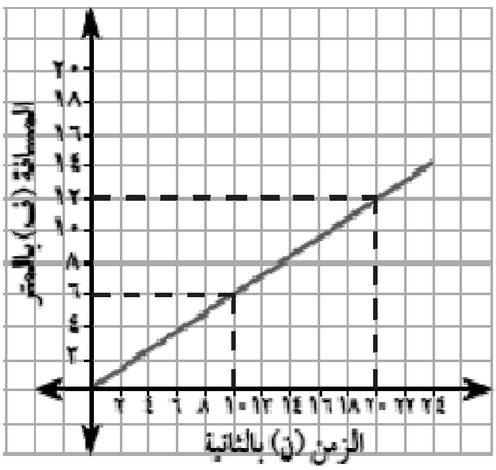
ملاحظة هامة : ١- يجب تحديد $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة له نفس إتجاه $ف_١$

٢- متجة السرعة المتوسطة قد يكون موجب إذا كان فى اتجاه الحركة و سالب إذا كان فى عكس اتجاه الحركة

٣-إذا عاد الجسم إلى نقطة البداية فإن : $\overleftarrow{ف_١} = \overleftarrow{ف_٢} = \overleftarrow{ف}$

، $\overleftarrow{ع}_م = \overleftarrow{٠}$ ، المسافة المقطوعة = ٢ ف

يبين الشكل المقابل العلاقة بين الزمن والمسافة لحركة راكب دراجة ، فى خط مستقيم من نقطة و أوجد:



(أ) متجه السرعة المتوسطة. (ب) مقدار السرعة المتوسطة.

(أ) نوجد متجه السرعة المتوسطة باستخدام نقطتين على الخط البياني.

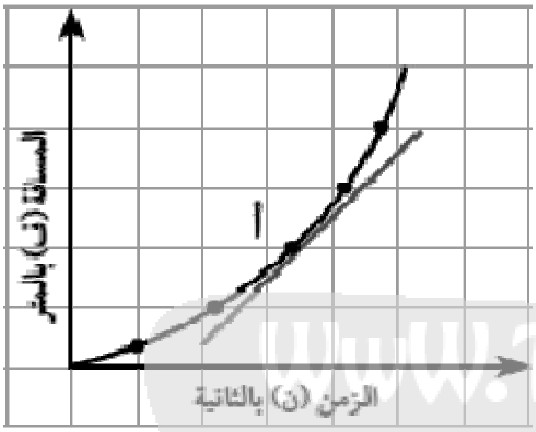
حيث $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى إتجاه الحركة

$\overleftarrow{ع}_م = \dfrac{\overleftarrow{ف_٢} - \overleftarrow{ف_١}}{ن_٢ - ن_١}$ بالتعويض عن: $ف_٢ = ١٢$ ، $ن_٢ = ٢٠$ ، $ف_١ = ٦$ ، $ن_١ = ١٠$

$\overleftarrow{ع}_م = \dfrac{١٢ - ٦}{٢٠ - ١٠}\ \overleftarrow{ى} = \dfrac{٦}{١٠}\ \overleftarrow{ى} = ٠,٦\ \overleftarrow{ى}$

(ب) مقدار السرعة المتوسطة تساوى القيمة المطلقة لمتجه السرعة المتوسطة

أىْ أنَّ $ع_م = ٠,٦$ م / ث.



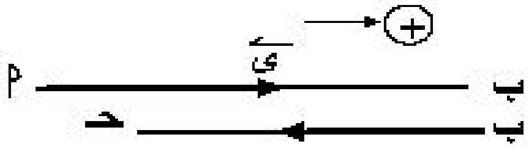
متجه السرعة اللحظية :

إذا كانت الفترة الزمنية ($\text{ن}_٢ - \text{ن}_١$) صغيرة جدًا ومتوسطها اللحظة ن فإن متجه السرعة فى هذه الحالة يعرف بمتجه السرعة اللحظية عند اللحظة ن ويرمز له بالرمز ع

$$\text{ميل المماس (السرعة اللحظية)} = \frac{\text{التغير فى المسافة}}{\text{التغير فى الزمن}} \text{ (عندما تقترب } \triangle\text{ن من الصفر)}$$

ملاحظة : إذا تحرك جسيم حركة منتظمة فى فترة محددة فإن متجه السرعة المتوسطة هو نفسه متجه السرعة المنتظمة لها .
مثلا : عداد السرعة للسيارة يعطى قيمة السرعة اللحظية بالكم / س

مثال: قطعت سيارة مسافة ٨٠ كم على طريق مستقيم بسرعة ٦٠ كم / س ثم عادت فقطعت مسافة ٦٠ كم بسرعة ٤٥ كم / س فى الاتجاه المضاد.
أوجد سرعتها المتوسطة خلال الرحلة كلها .



الحل :

نفرض $\overleftarrow{\text{ى}}$ متجه وحدة له نفس إتجاه $\overleftarrow{\text{أ ب}}$

$\text{ن}_١ = \frac{٨٠}{٦٠} = \frac{٤}{٣}$ ساعة ، $\text{ن}_٢ = \frac{٦٠}{٤٥} = \frac{٤}{٣}$ ساعة

$\text{ن} = \text{ن}_١ + \text{ن}_٢ = \frac{٤}{٣} + \frac{٤}{٣} = \frac{٨}{٣}$ ساعة

$\overleftarrow{\text{ف}} = ٨٠\,\overleftarrow{\text{ى}} - ٦٠\,\overleftarrow{\text{ى}} = ٢٠\,\overleftarrow{\text{ى}}$

$\therefore \text{ع}_\text{م} = \frac{\overleftarrow{\text{ف}}}{\text{ن}} = ٢٠\,\overleftarrow{\text{ى}} \times \frac{٣}{٨} = ٧,٥\,\overleftarrow{\text{ى}}$

أى أن : سرعة السيارة المتوسطة مقدارها ٧,٥ كم / س فى إتجاه حركتها الأولى

مثال : قطع قطار المسافة من المدينة أ إلى المدينة ب فى ٣٦ دقيقة بسرعة متوسطة ٧٠ كم / ساعة فإذا قطع الـ ١٥ كم الأولى بسرعة ٧٥ كم / ساعة ، الـ ١٥ كم التالية بسرعة ٦٠ كم / ساعة . فما سرعته المتوسطة فى المسافة الباقية .

الحل :

المسافة بين المدينتين = السرعة المتوسطة × الزمن $= ٧٠ \times \frac{٣٦}{٦٠} = ٤٢$ كم

∴ المسافة الباقية $= ٤٢ - (١٥ + ١٥) = ١٢$ كم

$ن_{١} = \frac{١٥}{٧٥} = \frac{١}{٥}$ ساعة $= \frac{١}{٥} \times ٦٠ = ١٢$ دقيقة

$ن_{٢} = \frac{١٥}{٦٠} = \frac{١}{٤}$ ساعة $= \frac{١}{٤} \times ٦٠ = ١٥$ دقيقة

∴ زمن المسافة الباقية $= ٣٦ - (١٢ + ١٥) = ٩$ دقيقة $= \frac{٩}{٦٠} = \frac{٣}{٢٠}$ ساعة

∴ السرعة المتوسطة فى المسافة الباقية $= ١٢ \div \frac{٣}{٢٠} = ٢ \times \frac{٢٠}{٣} = ٨٠$ كم / ساعة

مثال: قام طالب برحلة على دراجة فقطع النصف منها بسرعة ١٢ كم/ساعة ثم استراح لمدة $\frac{١}{٢}$ ساعة ثم قطع النصف الثانى بسرعة ٨ كم / ساعة . فإذا استغرق فى الرحلة كلها ٣ ساعات . أوجد المسافة الكلية .

الحل: نفرض أن المسافة = ٢ ف كم

زمن قطع النصف الأول $= \frac{ف}{١٢}$ ساعة

زمن قطع النصف الثانى $= \frac{ف}{٨}$ ساعة

زمن الاستراحة $= \frac{١}{٢}$ ساعة

∴ $\frac{ف}{١٢} + \frac{ف}{٨} + \frac{١}{٢} = ٣$ ∴ $\frac{٨ف + ١٢ف}{١٢ \times ٨} = \frac{٥}{٢}$

∴ $ف = \frac{١٢ \times ٨}{٢٠} \times \frac{٥}{٢} = ١٢$ كم ∴ المسافة الكلية = ٢٤ كم

مثال: تتحرك سيارتان أ ، ب على طريق مستقيم مسافة ٢٧ كم بسرعة ١٨ كم/س ثم قطع مسافة ٩ كم بسرعة ١٢ كم/س . أوجد السرعة المتوسطة خلال الرحلة كلها إذا كانت:

(١) الازاحتان فى أتجاه واحد (٢) الازاحتان فى أتجاهين متضادين

الحل :

إذا كانت الازاحتان فى أتجاه واحد

ف = ٢٧ + ٩ = ٣٦ كم

الزمن الكلى = $\frac{٢٧}{١٨} + \frac{٩}{١٢}$ = ٢,٢٥ ساعة

ع (المتوسطة) = $\frac{\text{الازاحة الكلية}}{\text{الزمن الكلى}} = \frac{٣٦}{٢,٢٥}$

= ١٦ كم/ س

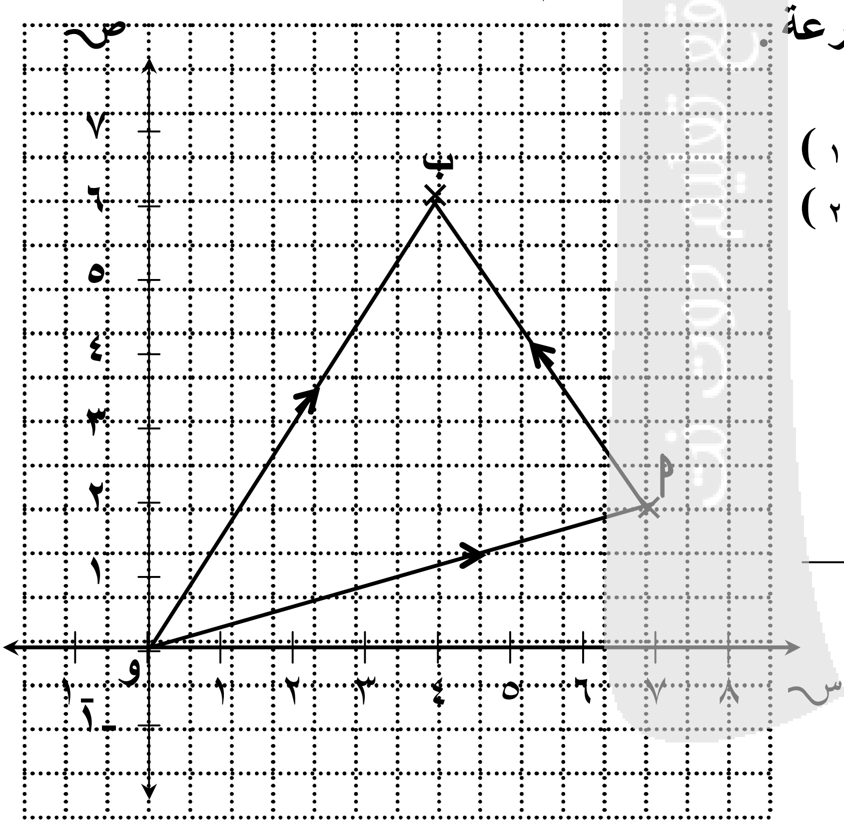
إذا كانت الازاحتان فى أتجاهين متضادين

ف = ٢٧ – ٩ = ١٨ كم

الزمن الكلى = $\frac{٢٧}{١٨} + \frac{٩}{١٢}$ = ٢,٢٥

ع(المتوسطة) = $\frac{\text{الازاحة الكلية}}{\text{الزمن الكلى}} = \frac{١٨}{٢,٢٥}$ = ٨كم/س

مثال : تواجد جسيم عند لحظتين زمنيتين ٣ ، ٨ ثوان عند الموضعين أ (٧ ، ٢) ، ب(٤ ، ٦) على الترتيب . أوجد متجة السرعة المتوسطة للجسيم خلال هذه الفترة الزمنية ، ثم أوجد معيار و اتجاه هذه السرعة .



الحل :

متجة الموضع الابتدائى $\overleftarrow{\text{و أ}}$ ($\overleftarrow{ر_١}$)

متجة الموضع النهائى $\overleftarrow{\text{و ب}}$ ($\overleftarrow{ر_٢}$)

متجة الازاحة $\overleftarrow{\text{أب}}$ ($\overleftarrow{ف}$)

$\overleftarrow{ف} = \overleftarrow{ر_٢} - \overleftarrow{ر_١}$

= (٤ ، ٦) – (٧ ، ٢)

= (٣ ، -٤)

∵ $\overleftarrow{ع_م} = \frac{\overleftarrow{ف}}{ن_٢ - ن_١} = \frac{(٣ ، -٤)}{٨ - ٣}$

= $\frac{١}{٥}$ (٣ ، -٤)

= ($\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{-٤}{٥}$)

$\| \overleftarrow{ع_م} \| = \sqrt{(\frac{٣}{٥})^٢ + (\frac{-٤}{٥})^٢} = ١$ وحدة سرعة ، ظا$^{-١}$ $\frac{-٤}{٣}$ = ١٢″ ٥٢′ ١٢٦°

* السرعة النسبية *

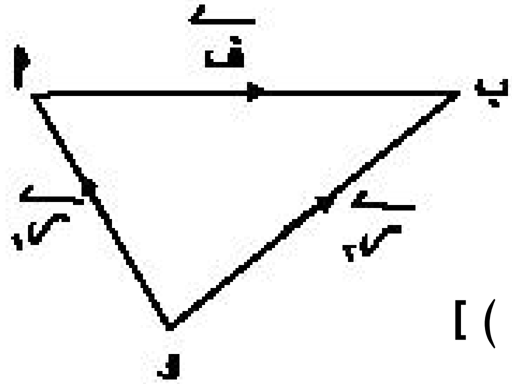
الحركة مفهوم نسبى قد يتغير وصفها بتغير المشاهد . فمن منا لم يتخيل ولو مرة واحدة أن أعمدة الإنارة تبدو وكأنها تتحرك بينما هو جالس فى قطار بدأ حركته من المحطة ببطء أما إذا نظرت من خلال نافذة القطار إلى السيارات المتحركة فى نفس اتجاه حركة القطار نفسها فإنها تبدو لك أنها متحركة ببطء شديد بينما يحدث العكس لو أن السيارة تتحرك فى عكس الاتجاه لحركة القطار . وهذه الظواهر تؤكد مفهوم نسبية الحركة .

مفهوم السرعة النسبية :

السرعة النسبية لجسيم (م) بالنسبة لجسيم آخر (ب) هى السرعة التى يبدو للجسيم (م) أن يتحرك بها لو اعتبرنا الجسيم (ب) فى حالة سكون .

متجه السرعة النسبية :

نعتبر الجسمين م ، ب وأن $\overleftarrow{ع}_{م}$ ، $\overleftarrow{ع}_{ب}$ متجهى سرعتى الجسمين بالنسبة لمشاهد (و) على سطح الأرض فإذا فرضنا أن شخصًا موجودًا على الجسيم م متحرك معه ورصد حركة الجسيم ب وأنه وجد أن متجه سرعة الجسيم ب هى $\overleftarrow{ع}_{بم}$ حيث تسمى متجه سرعة ب بالنسبة إلى م



وتكون العلاقة بين $\overleftarrow{ع}_{م}$ ، $\overleftarrow{ع}_{ب}$ ، $\overleftarrow{ع}_{بم}$ هى :

$$\overleftarrow{ع}_{بم} = \overleftarrow{ع}_{ب} - \overleftarrow{ع}_{م} \qquad (١)$$

سرعة ب بالنسبة الى م [الراصد (م) ، المرصود (ب)]

$$\overleftarrow{ع}_{مب} = \overleftarrow{ع}_{م} - \overleftarrow{ع}_{ب}$$

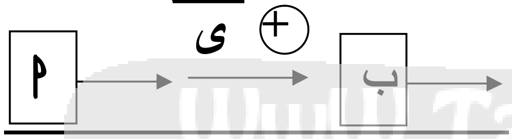
سرعة م بالنسبة الى ب [الراصد (ب) ، المرصود (م)]

<u> الحالات المختلفة لحركة الجسمين (م) و (ب) :</u>**

<u>السرعة النسبية لجسمين إذا كانا يتحركان فى اتجاه واحد</u>:

أى أن متجه سرعة ب بالنسبة إلى م = متجه سرعة ب – متجه سرعة م

$\overrightarrow{ع}_{بم} = \overrightarrow{ع}_{ب} - \overrightarrow{ع}_{م}$ **(١)**

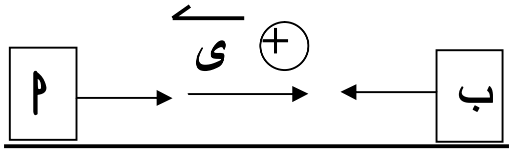


وبالتالى تكون

$\overrightarrow{ع}_{ب} = \overrightarrow{ع}_{م} + \overrightarrow{ع}_{بم}$ **(٢)**

<u>ملاحظة</u> : إذا كان $\overrightarrow{ع}_{م} = \overrightarrow{ع}_{ب}$ فإن $\overrightarrow{ع}_{مب} = \overrightarrow{٠}$ ، $\overrightarrow{ع}_{بم} = \overrightarrow{٠}$

<u>إذا كان الجسمين يتحركان فى اتجاهين متضادين</u> :



فإن: $\overrightarrow{ع}_{بم} = \overrightarrow{ع}_{ب} - (- \overrightarrow{ع}_{م})$

أى أن : $\overrightarrow{ع}_{بم} = \overrightarrow{ع}_{ب} + \overrightarrow{ع}_{م}$

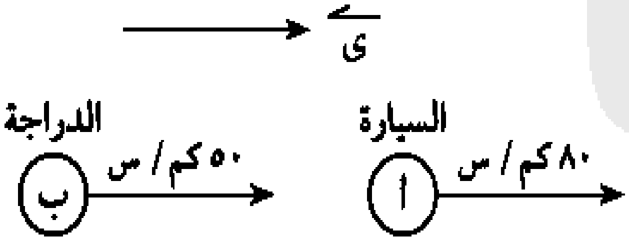
<u>ملاحظة</u> : إذا كان $\overrightarrow{ع}_{م} = \overrightarrow{ع}_{ب}$ فإن $\overrightarrow{ع}_{مب} = ٢ \overrightarrow{ع}_{م} = ٢ \overrightarrow{ع}_{ب}$

تتحرك سيارة على طريق مستقيم بسرعة ٨٠ كم/س. فإذا تحركت على نفس الطريق دراجة بخارية بسرعة ٥٠ كم / س. أوجد السرعة النسبية للدراجة البخارية بالنسبة للسيارة عندما تكون:

(أ) الدراجة تتحرك فى نفس اتجاه حركة السيارة. (ب) الدراجة تتحرك عكس اتجاه حركة السيارة.

الحل :

نرمز للسيارة بالرمز أ وللدراجة بالرمز ب وبفرض أن $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه حركة السيارة.



(أ) عندما تتحرك الدراجة فى نفس اتجاه حركة السيارة

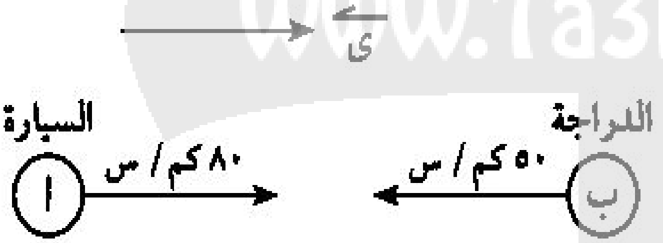
$\overrightarrow{ع}_{ب} = ٥٠ \overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ع}_{أ} = ٨٠ \overrightarrow{ى}$ ، **سرعة الدراجة بالنسبة للسيارة** $\overrightarrow{ع}_{بأ} = ؟$

$\because \overleftarrow{ع}_{با} = \overleftarrow{ع}_{ب} - \overleftarrow{ع}_{ا}$ $\therefore \overleftarrow{ع}_{با} = ٥٠ \overleftarrow{ى} - ٨٠ \overleftarrow{ى} = -٣٠ \overleftarrow{ى}$

أىْ أنَّ الدراجة تبدو لراكب السيارة وكأنها متحركة مبتعدة عن السيارة بسرعة مقدارها ٣٠ كم / س.

(ب) عندما تتحرك الدراجة فى عكس اتجاه السيارة:

$\overleftarrow{ع}_{ب} = -٥٠ \overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ع}_{ا} = ٨٠ \overleftarrow{ى}$ ،



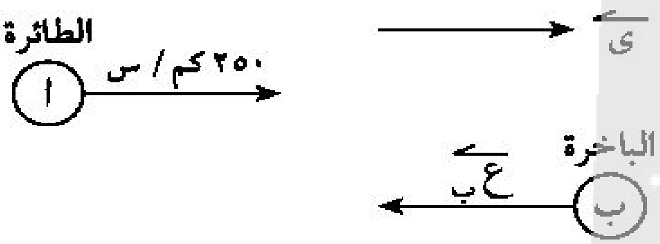
$\because \overleftarrow{ع}_{با} = \overleftarrow{ع}_{ب} - \overleftarrow{ع}_{ا}$

$\therefore \overleftarrow{ع}_{با} = -٥٠ \overleftarrow{ى} - ٨٠ \overleftarrow{ى} = -١٣٠ \overleftarrow{ى}$

أىْ أنَّ الدراجة تبدو لراكب السيارة وكأنها متحركة نحوه بسرعة ١٣٠ كم/ س.

تتحرك باخرة فى مسار مستقيم نحو ميناء ولما صارت على مسافة ١٠٠ كم منه مرت فوقها طائرة حراسة فى الاتجاه المضاد بسرعة ٢٥٠ كم / س ورصدت حركة الباخرة فبدت لها متحركة بسرعة ٣٠٠ كم / س. احسب الزمن الذى يمضى من لحظة الرصد حتى وصول الباخرة إلى الميناء.

الحل :



نرمز للباخرة بالرمز ب وللطائرة بالرمز ا ونفرض أن $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة له نفس اتجاه حركة الطائرة.

وأن السرعة الفعلية للباخرة $\overleftarrow{ع}_{ب}$ (فى اتجاه مضاد لحركة الطائرة)

$\because \overleftarrow{ع}_{ا} = ٢٥٠ \overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ع}_{با} = -٣٠٠ \overleftarrow{ى}$

$\because \overleftarrow{ع}_{با} = \overleftarrow{ع}_{ب} - \overleftarrow{ع}_{ا}$ $\therefore -٣٠٠ \overleftarrow{ى} = \overleftarrow{ع}_{ب} - ٢٥٠ \overleftarrow{ى}$

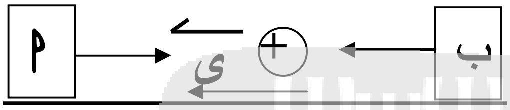
أىْ أنَّ $\overleftarrow{ع}_{ب} = -٥٠ \overleftarrow{ى}$

أىْ أنَّ السرعة الفعلية للباخرة مقدارها ٥٠ كم / س ويعمل فى الاتجاه المضاد لحركة الطائرة.

$$\text{الزمن} = \frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}} = \frac{١٠٠}{٥٠} = ٢ \text{ ساعة}$$

مثال: تتحرك سيارة الرادار المخصصة لمراقبة السرعة على الطرق الصحراوية بسرعة ٣٠ كم/ساعة راقبت هذه السيارة حركة شاحنة قادمة فى الاتجاه المضاد فبدت وكأنها تتحرك بسرعة ١١٠ كم / ساعة . فما هى السرعة الفعلية لحركة الشاحنة .

الحل :



بفرض $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه حركة الشاحنة وأن سرعتها $\overleftarrow{ع}_{ب}$

وبالتالى متجه سرعة سيارة الرادار $\overleftarrow{ع}_{أ} = -٣٠ \overleftarrow{ى}$

$\because \overleftarrow{ع}_{ب أ} = \overleftarrow{ع}_{ب} - \overleftarrow{ع}_{أ}$ $\therefore ١١٠ \overleftarrow{ى} = \overleftarrow{ع}_{ب} - (-٣٠ \overleftarrow{ى})$

$\therefore \overleftarrow{ع}_{ب} = ١١٠ \overleftarrow{ى} - ٣٠ \overleftarrow{ى} = ٨٠ \overleftarrow{ى}$ $١١٠ \overleftarrow{ى} = \overleftarrow{ع}_{ب} + ٣٠ \overleftarrow{ى}$

مثال : تتحرك سيارتين ٢ ، ب على نفس طريق مستقيم بالسرعتين ٦٠ كم/س ، ٩٠ كم/س وفى أتجاه $\overleftarrow{ب٢}$ أوجد : (١) سرعة ب بالنسبة الى ٢ (٢) سرعة ٢ بالنسبة لـ ب

وإذا كانت المسافة بينهما ١٠ كم فبعد كم دقيقة يمكن أن يلتقيا

الحل :

$ع_{ب ٢} = ع_{ب} - ع_{٢} = ٩٠ - ٦٠ = ٣٠$ كم/س

أى أن : السيارة ٢ تشعر و كأن السيارة ب تسير أمامها و تسبقها بسرعة ٣٠ كم / س

$ع_{٢ ب} = ع_{٢} - ع_{ب} = ٦٠ - ٩٠ = -٣٠$ كم/س

أى أن : السيارة ب تشعر و كأن السيارة ٢ تسير نحوها (تتقهقر) بسرعة ٣٠ كم/س

الزمن اللازم للالتقاء $= \frac{المسافة}{السرعة} = \frac{١٠}{٣٠} = \frac{١}{٣}$ ساعة $= ٢٠$ دقيقة

مثال : تتحرك سيارتان على نفس الخط المستقيم فى أتجاهين متضادين فإذا كانت المسافة بينهما ٤ كم وسرعة أحدى السيارتين ٧٠ كم / س وتقابلتا بعد دقيقتين فما هى السرعة الفعلية للسيارة الاخرى .

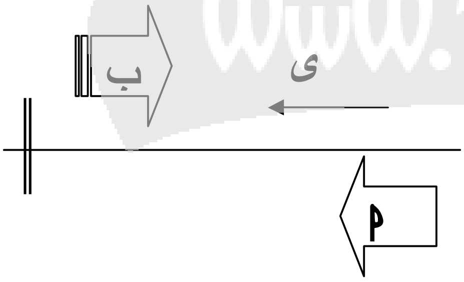
الحل :

$ع_{ب ٢} = \frac{المسافة}{الزمن} = ٤ \div \frac{٢}{٦٠} = ٤ \times ٣٠ = ١٢٠$ كم/ س

$\text{ع}_{\text{ب}} + \text{ع}_{\text{أ}} = ١٢٠$ ∴ $\text{ع}_{\text{ب}} + ٧٠ = ١٢٠$ ∴ $\text{ع}_{\text{ب}} = ١٢٠ - ٧٠ = ٥٠$ كم/ س

مثال : تتحرك باخرة فى مسار مستقيم نحو ميناء ولما صارت على بعد ٤٥ كم من الميناء مرت فوقها طائرة فى الاتجاه المضاد بسرعة ٢٥٠ كم/س ورصدت حركة الباخرة فبدت لها متحركة بسرعة ٢٦٥ كم/س أحسب كم من الوقت يمضي حتى وصول الباخرة إلى الميناء.

الحل :



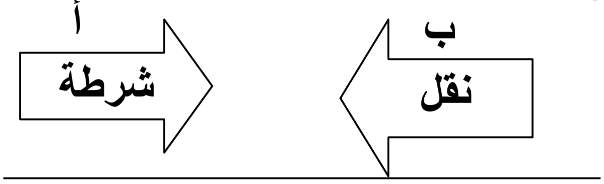
$\text{ع}_{\text{الباخرة بالنسبة للطائرة}} = \text{ع}_{\text{الطائرة}} + \text{ع}_{\text{الباخرة}}$

$٢٦٥ = ٢٥٠ + \text{ع}_{\text{الباخرة}}$

$\text{ع}_{\text{الباخرة}} = ٢٦٥ - ٢٥٠ = ١٥$ كم / س

$\text{الزمن} = \dfrac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}} = \dfrac{٤٥}{١٥} = ٣$ ساعات

مثال : قامت سيارة شرطة متحركة على خط مستقيم بقياس سرعة سيارة نقل قادمة فى الاتجاه المضاد وعلى نفس الطريق فوجدتها ١٨٠كم/س ولما خفضت سيارة الشرطة سرعتها الى ثلثى سرعتها السابقة وأعادت قياس السرعة النسبية لسيارة النقل فوجدتها ١٥٠ كم/س . أحسب السرعة الفعلية لكلا من السيارتين.



الحل : بفرض $\text{ع}_{\text{أ}}$ سرعة سيارة الشرطة

$\text{ع}_{\text{ب}}$ سرعة سيارة النقل

$\text{ع}_{\text{ب أ}} = ١٨٠$ ∴ $\text{ع}_{\text{ب}} + \text{ع}_{\text{أ}} = ١٨٠$ (١)

$\text{ع}_{\text{ب أ}} = ١٥٠$ ∴ $\text{ع}_{\text{ب}} + \dfrac{٢}{٣}\text{ع}_{\text{أ}} = ١٥٠$ (٢)

بطرح ٢ من ١ نجد :

$\dfrac{١}{٣}\text{ع}_{\text{أ}} = ٣٠$ ∴ $\text{ع}_{\text{أ}} = ٩٠$ كم / س

∴ $\text{ع}_{\text{ب}} = ١٨٠ - ٩٠ = ٩٠$ كم / س

تدريب : قامت سيارة أ متحركة على طريق مستقيم وبقياس السرعة النسبية لسيارة ب قادمة فى الاتجاه المضاد فوجدتها ١٤٠ كم / ساعة . ولما خفضت السيارة أ سرعتها إلى النصف وأعادت القياس وجدت أن السرعة النسبية للسيارة ب أصبحت ١٢٠ كم/ساعة فما السرعة الفعلية لكل من السيارتين ؟

تمارين على السرعة النسبية

أكمل مايأتي:

(١) ٢٠م / ث = ــــــ كم / س (٢) ٩٠ كم / س = ــــــ م / ث

(٣) تتحرك سيارة بسرعة منتظمة مقدارها ٧٢ كم / س لمدة ربع ساعة فإن المسافة المقطوعة = ــــــ كم.

(٤) إذا كان $\overrightarrow{\text{ع}}_{\text{أ}}$ = ١٥ $\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ع}}_{\text{ب}}$ = ٢٢ $\overrightarrow{\text{س}}$ فإن $\overrightarrow{\text{ع}}_{\text{بأ}}$ = ــــــ

(٥) إذا كان $\overrightarrow{\text{ع}}_{\text{أب}}$ = ٦٥ $\overrightarrow{\text{ى}}$ ، $\overrightarrow{\text{ع}}_{\text{أ}}$ = ٥٠ $\overrightarrow{\text{ى}}$ فإن $\overrightarrow{\text{ع}}_{\text{ب}}$ = ــــــ

(٦) يتحرك راكب دراجة أ على طريق مستقيم بسرعة ١٥ كم / س ويتحرك فى نفس الاتجاه راكب آخر ب بسرعة ١٢ كم / س فإن سرعة ب بالنسبة إلى أ تساوى ــــــ كم / س.

اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(٧) إذا تحركت سيارة بسرعة منتظمة مقدارها ٧٥ كم / س لمدة ٢٠ دقيقة فإن المسافة المقطوعة بـ كم تس

(أ) ١٥ (ب) ٢٠ (جـ) ٢٥ (د) ٣٠

(٨) الزمن بالساعة الذي تستغرقه سيارة تتحرك بسرعة ٢٠ متر / ث فى قطع مسافة ١٨٠ كم يساوى:

(أ) $1\frac{1}{2}$ (ب) ٢ (جـ) $2\frac{1}{2}$ (د) ٣

(٩) إذا كان $\overrightarrow{\text{ع}}_{\text{أب}}$ = ١٥ $\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ع}}_{\text{أ}}$ = ٣٥ $\overrightarrow{\text{س}}$ فإن $\overrightarrow{\text{ع}}_{\text{ب}}$ تساوى:

(أ) - ٥٠ $\overrightarrow{\text{س}}$ (ب) - ٢٠ $\overrightarrow{\text{س}}$ (جـ) ٢٠ $\overrightarrow{\text{س}}$ (د) ٥٠ $\overrightarrow{\text{س}}$

(١٠) إذا كان متجه موضع جسيم يتحرك فى خط مستقيم من نقطة و يعطى كدالة فى الزمن ن بالعلاقة:

$\overrightarrow{\text{م}}$ = (٢ ن^{٢} + ٣) $\overrightarrow{\text{ى}}$ فإن معيار متجه الإزاحة $\overrightarrow{\text{ف}}$ بعد ٢ ثانية يساوى:

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١١

⑪ دخل قطار طوله ١٥٠ مترًا نفقًا مستقيمًا طوله ف متر فاستغرق عبوره بالكامل من النفق فى زمن قدره ١٥ ثانية أوجد طول النفق إذا كانت سرعة القطار منتظمة وتساوى ٩٠ كم / س.

⑫ قطع راكب دراجة ٣٠ كم على طريق مستقيم بسرعة ١٥ كم / س ثم عاد فقطع ١٠ كم فى الاتجاه المعاكس بسرعة ١٠ كم / س أوجد متجه سرعته المتوسطة خلال الرحلة كلها.

⑬ سار رجل على طريق مستقيم فقطع ٨٠٠ متر بسرعة ٩ كم / س، وقطع نفس المسافة فى نفس الاتجاه بسرعة ٤,٥ كم / س. أوجد مقدار السرعة المتوسطة للرجل خلال الرحلة كلها.

⑭ مدينتان أ ،ب على الطريق الساحلى المسافة بينهما ١٢٠ كم، تحركت سيارة من المدينة أ متجهه إلى المدينة ب بسرعة ٨٨ كم / س. وفى نفس اللحظة قامت سيارة أخرى من المدينة ب متجهة إلى المدينة أ بسرعة ٧٢ كم / س أوجد متى وأين تتقابل السيارتان.

⑮ تتحرك سيارة أ على طريق مستقيم بسرعة ٦٠ كم / س وتتحرك سيارة ب على نفس الطريق بسرعة ٩٠ كم / س. أوجد سرعة السيارة أ بالنسبة للسيارة ب إذا كانت:

(أ) السيارتان تتحركان فى اتجاه واحد. (ب) السيارتان تتحركان فى اتجاهين متضادين.

⑯ قامت سيارة شرطة متحركة بسرعة منتظمة على طريق أفقى بقياس السرعة النسبية لشاحنة تتحرك أمامها وفى نفس الاتجاه فوجدتها ٦٠ كم / س ولما زيدت سرعة سيارة الشرطة إلى الضعف وأعادت القياس فبدت الشاحنة وكأنها ساكنة.

أوجد السرعة الفعلية لكل من سيارة الشرطة والشاحنة.

اللهم نسألك عملا صالحا يقربنا اليك
و ينفعنا به فى الدنيا و الاخرة
ورضى الوالدين علينا

اعداد الاستاذ / خالد المنفلوطى معلم خبير رياضيات ت/ ٠١١١٥٤٨٠٢٨١١

الحركة المستقيمة ذات العجلة المنتظمة

تعريف

الحركة المستقيمة المتغيرة: هى الحركة التى يحدث فيها تغيير فى قيمة السرعة بمرور الزمن يسمى بالتسارع (العجلة) ووحدة قياسه هى م / ث^2.

$$\text{التسارع (جـ)} = \frac{\text{السرعة النهائية - السرعة الابتدائية}}{\text{الزمن}}$$

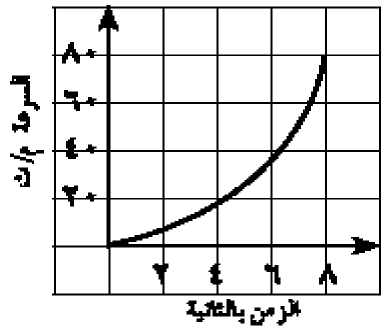
ووحدات قياسه = م / ث^2 أو سم / ث^2 أو كم / س^2

كما يلاحظ أن:

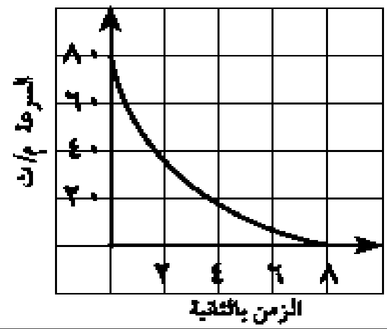
إذا كان التغير فى السرعة عند لحظة زمنية محددة فيسمى التسارع اللحظي.

* منحنى (السرعـة – الزمن) :

يرتبط مفهوم التسارع (العجلة) بتغير السرعة



فى الشكل المقابل :
تزداد قيمة السرعة مع الزمن و تكون الحركة متسارعة
و يكون التسارع (العجلة) موجباً (باعتبار السرعة موجبة)



فى الشكل المقابل :
تناقص قيمة السرعة مع الزمن و تكون الحركة تقصيرية
ويكون التسارع سالباً (باعتبار السرعة سالبة)

وإذا كانت السرعة ثابتة مع الزمن تكون الحركة منتظمة .

تذكر انواع الحركة :

*الحركة المنتظمة :

هى الحالة التى يكون فيها كل من معيار واتجاه متجة السرعة ثابتاً (أى الجسيم يتحرك فى اتجاه ثابت حيث يقطع مسافات متساوية فى فترات زمنية متساوية) و تكون العجلة = صفر

و تكون العلاقة بين ف ، ع : $\boxed{\text{ف} = \text{ع ن}}$

* **الحركة المتغيرة:**

هى الحركة التى يتغير فيها متجه سرعة الجسيم فى المقدار أو فى الاتجاه أو فى كليهما من لحظة إلى أخرى .فإننا نقول أن هذا الجسيم يتحرك حركة متغيرة أو أنه يتحرك بعجلة متغيرة

* **الحركة منتظمة التغير :**

يقال أن الجسم يتحرك حركة منتظمة التغير أو بتسارع (عجلة) منتظم إذا كان متجة العجلة ثابتاً مقداراً واتجاهاً لجميع الأزمنة .

مثال : إذا تغيرت سرعة سيارة (أ) تتحرك فى خط مستقيم من ٢٤ كم / س إلى ٣٦ كم / س خلال ٥ ثوانى ، و تغيرت سرعة سيارة (ب) تتحرك فى نفس الخط المستقيم من ١٢ كم / س الى ٣٠ كم / س خلال نفس المدة . أيهما يتحرك بتسارع أكبر ؟ فسر ذلك

الحل :

الزيادة فى سرعة السيارة أ= ٣٦ ـ ٢٤ = ١٢ كم / س = ٣,٣ م / ث

الزيادة فى سرعة السيارة ب = ٣٠ ـ ١٢ = ١٨ كم / س = ٥ م / ث

جـ للسيارة أ= $\frac{\text{التغير فى السرعة}}{\text{الزمن}} = \frac{٣,٣}{٥} =$ ٠,٦٦ م / ث^{٢}

جـ للسيارة ب = $\frac{٥}{٥}$ = ١ م / ث^{٢}

واضح أن سرعة السيارة ب تزيد عن سرعة السيارة أ

و بالتالى السيارة ب تتحرك بعجلة أكبر من السيارة أ

معادلات الحركة منتظمة التغير

توجد ثلاث معادلات أساسية تربط بين المسافة والسرعة والعجلة والزمن فى الحركة المنتظمة

أولاً: العلاقة بين السرعة والزمن:

إذا تحرك جسيم فى خط مستقيم بمتجه سرعة ابتدائية $\overleftarrow{ع_{.}}$ ومتجه عجلة ثابتة $\overleftarrow{جـ}$ وأصبح متجه سرعته $\overleftarrow{ع}$ بعد فترة زمنية (ن) فإن:

$$\overleftarrow{جـ} = \frac{\overleftarrow{ع} - \overleftarrow{ع_{.}}}{ن} \quad \text{أىْ أنَّ:} \quad \boxed{\overleftarrow{ع} = \overleftarrow{ع_{.}} + \overleftarrow{جـ}\ ن}$$

بأخذ القياس الجبري تكون. $\boxed{ع = ع_{.} + جـ\ ن}$

ملاحظات هامة :

- العلاقة تربط بين أربعة مجاهيل يمكن إيجاد إحداها بمعلومية الثلاثة الآخرين.
- إذا بدأ الجسم حركته من سكون فإن $ع_0 = 0$ وتكون $ع = جـ ن$
- إذا كان $جـ = 0$ فإن $ع = ع_0$ أىْ أنَّ الجسم يتحرك بسرعة منتظمة.

مثال : بدأ جسيم حركته فى اتجاه ثابت بسرعة ٢٠ سم / ث و بعجلة منتظمة ٥ سم / ث^2 تعمل فى نفس اتجاه متجه السرعة الابتدائية . أوجد :
(أ) سرعته فى نهاية دقيقة واحدة من بدأ الحركة .
(ب) الزمن الذى يمضى من بدء الحركة حتى تصبح سرعته ١٨ كم / س

الحل :

نفرض الاتجاه الموجب هو اتجاه حركة الجسيم

$ع_0 = ٢٠$ سم / ث ، $جـ = ٥$ سم / ث^2 ، $ن = ٦٠$ ثانية

(أ) $\because ع = ع_0 + جـ ن \quad \therefore ع = ٢٠ + ٥ \times ٦٠ = ٣٢٠$ سم / ث

(ب) $ع_0 = ٢٠$ سم / ث ، $ع = ١٨ \times \frac{٢٥٠}{٩} = ٥٠٠$ سم / ث ، $جـ = ٥$ سم / ث^2

$\because ع = ع_0 + جـ ن \quad \therefore ٥٠٠ = ٢٠ + ٥ \times ن \quad \therefore ٥ ن = ٤٨٠$

$\therefore ن = ٩٦$ ثانية

مثال : يتحرك جسيم فتغيرت سرعته من ٥٤ كم / س الى ٣ م / ث فى زمن قدره نصف دقيقة. أوجد مقدار عجلة الحركة. هل يمكن لهذا الجسيم أن يسكن لحظياً ؟ فسر إجابتك.

الحل : ٥٤ كم / س $= ٥٤ \times \frac{٥}{١٨} = ١٥$ م / ث

$ع_0 = ١٥$ م / ث ، $ع = ٣$ م / ث ، $ن = ٣٠$ ثانية

$\because ع = ع_0 + جـ ن \qquad \therefore ٣ = ١٥ + ٣٠ جـ$

$\therefore ٣٠ جـ = -١٢ \qquad \therefore جـ = -٠{,}٤$ م / ث^2

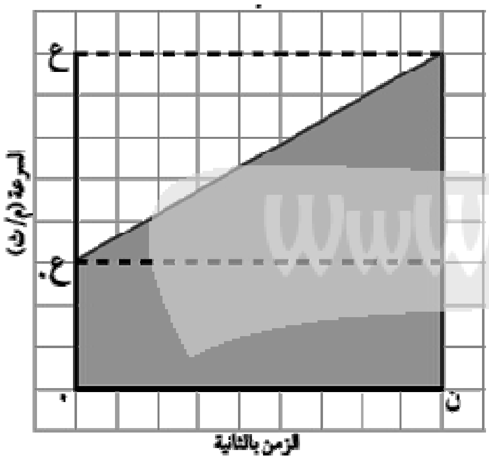
$\because جـ < ٠$ يمكن لهذا الجسيم أن يسكن لحظيًا لأن يتحرك حركة تقصيرية.

تدريب: بدأ جسيم حركته فى خط مستقيم بعجلة منتظمة ٥ سم / ث^2 وبسرعة ابتدائية ٢٠ سم / ث فى عكس اتجاه العجلة . أوجد سرعته بعد :
(١) مرور ثلاث ثوانى (٢) مرور خمس ثوانى

ثانيا العلاقة بين المسافة و الزمن :

يتحرك جسيم بعجلة منتظمة بسرعة ابتدائية ع. بعد زمن ن أصبحت سرعته ع فإن :

$$\boxed{ف = ع_. ن + \frac{١}{٢} جـ ن^٢}$$



المساحة تحت منحنى (السرعة – الزمن) = ازاحة الجسيم

ملاحظات هامة :

١) إذا كان الجسيم يتحرك من سكون فإن : $ف = \frac{١}{٢} جـ ن^٢$

٢) إذا كان جـ = ٠ فإن : ف = ع ن أى العجلة منتظمة

٣) ثلاث ادوات تؤثر على سرعة سيارة دواسة الوقود و دواسة الفرامل ثم عجلة القيادة فى تحديد اتجاه الحركة

٤) عندما يقف الجسم تكون ع = ٠

٥) إذا تحرك جسيم بتقصير منتظم فإنه يستمر فى الحركة لفترة زمنية محدودة ثم يتوقف أو بعدها يتحرك حركة متسارعة فى الاتجاه المضاد

مثال : سيارة تتحرك بسرعة ٩٠ كم / س ، ضغط السائق على دواسة الفرامل بحيث تناقصت السرعة بمعدل ثابت حتى توقفت بعد مرور ٥ ثوان . احسب :

(أ) عجلة السيارة خلال تناقص السرعة .

(ب) المسافة التى قطعتها السيارة حتى توقفت حركتها تماماً

الحل :

(أ) ٩٠ كم /س $= ٩٠ \times \frac{٥}{١٨} = ٢٥$ م / ث

ع. = ٢٥ م / ث ، ع = ٠ ، ن = ٥ ثوان

∵ $ع = ع_. + جـ ن$ ∴ $٠ = ٢٥ + جـ \times ٥$ ∴ جـ = ـ ٥ م / ث^٢

أى أن السيارة تتحرك بتقصير منتظم مقداره ٥ م / ث^٢

(ب) ∵ $ف = ع_. ن + \frac{١}{٢} جـ ن^٢$ ∴ $ف = ٢٥ \times ٥ + \frac{١}{٢} \times (-٥) \times (٥)^٢ = ٦٢,٥$ متر

مثال : قذفت كرة صغيرة بسرعة ٢٠ م / ث أفقياً فتحركت فى خط مستقيم حركة تقصيرية بعجلة منتظمة $\frac{١}{٢}$ م / ث^{٢} عين موضع الكرة ، و سرعتها بعد مرور ٢ ثانية من بدء الحركة

الحل :

ع. = ٢٠ م / ث ، جـ = ـ $\frac{١}{٢}$ م / ث^{٢} ، ن = ٢ ثانية ، ف = ؟ ، ع = ؟

ف = ع. ن + $\frac{١}{٢}$ جـ ن^{٢} = ٢٠ × ٢ + $\frac{١}{٢}$ × ـ $\frac{١}{٢}$ × (٢)^{٢}

= ٤٠ ـ ١ = ٣٩ مترا

الكرة تكون على بعد ٣٩ مترا من بدء الحركة .

ع = ع. + جـ ن = ٢٠ ـ $\frac{١}{٢}$ × ٢ = ١٩ م / ث

سرعة الكرة بعد ٢ ثانية تساوى ١٩ م / ث

ثالثا : العلاقة بين السرعة و الازاحة :

∵ ع = ع. + جـ ن بتربيع الطرفين

∴ ع^{٢} = ع^{٢}. + ٢ ع. ن + جـ^{٢} ن^{٢} = ع^{٢}. + ٢ جـ (ع. + $\frac{١}{٢}$ جـ ن^{٢})

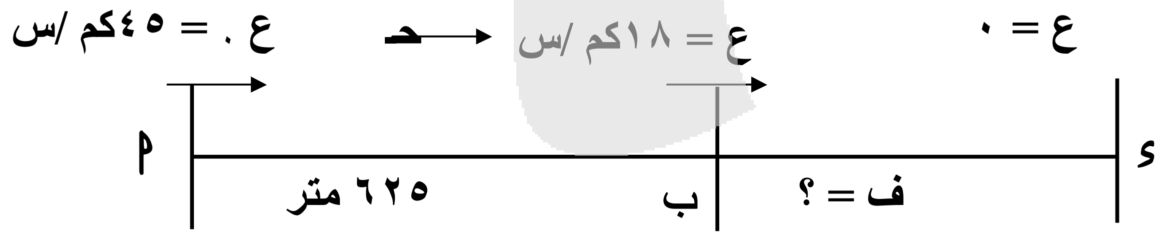
بالتعويض فى العلاقة: ف = ع. ن + $\frac{١}{٢}$ جـ ن^{٢}

$\boxed{∴ ع^{٢} = ع^{٢}. + ٢ جـ ف}$

ع. السرعة الابتدائية ، ع السرعة النهائية ، جـ العجلة المنتظمة

مثال : نقصت سرعة سيارة بانتظام من ٤٥ كم / س الى ١٨ كم / س بعد أن قطعت مسافة ٦٢٥ مترا . أوجد المسافة التى تقطعها بعد ذلك حتى تسكن .

الحل:



الحالة الاولى : ع. = ٤٥ × $\frac{٥}{١٨}$ = ١٢,٥ م / ث ، ع = ١٨ × $\frac{٥}{١٨}$ = ٥ م / ث

∵ ع ^{٢} = ع$_{.}^{٢}$ + ٢ جـ ف ∴ (٥)^{٢} = (١٢,٥)^{٢} + ٢ × جـ × ٦٢٥

∴ جـ = ـ ٠,١٠٥ م / ث^{٢}

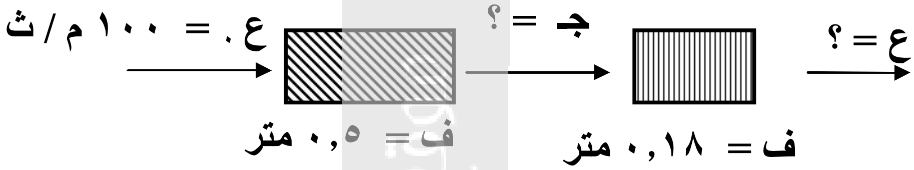
الحالة الثانية : ع . = ٥ م / ث ، ع = ٠ ، جـ = ـ ٠,١٠٥ م / ث^{٢}

∵ ع ^{٢} = ع$_{.}^{٢}$ + ٢ جـ ف ∴ ٠ = (٥)^{٢} ـ ٢ × ٠,١٠٥ ف

∴ ف = ١١٩,٠٤ مترا

مثال : أطلقت رصاصة أفقيا على كتلة خشبية بسرعة ١٠٠ م / ث فغاصت فيها مسافة ٥٠ سم أوجد العجلة التى تتحرك بها الرصاصة إذا علم أن العجلة منتظمة و إذا تم إطلاقها على كتلة خشبية أخرى مماثلة للاولى سمكها ١٨ سم . فما هى السرعة التى تخرج بها الرصاصة من الكتلة الخشبية .

الحل:



نفرض اتجاه حركة الرصاصة هو الاتجاه الموجب

الحالة الاولى : ع = ٠ ، ع. = ١٠٠ م / ث ، ف = ٥٠ سم = ٠,٥ م

∵ ع ^{٢} = ع$_{.}^{٢}$ + ٢ جـ ف ∴ ٠ = (١٠٠)^{٢} + ٢ جـ × ٠,٥

∴ جـ = ـ ١٠٠٠٠ م / ث^{٢}

الحالة الثانية : ع. = ١٠٠ م / ث ، جـ = ـ ١٠٠٠٠ م / ث^{٢} ، ف = ٠,١٨ م

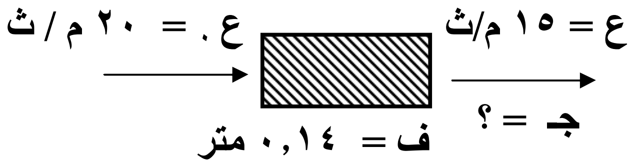
∵ ع ^{٢} = ع$_{.}^{٢}$ + ٢ جـ ف ∴ ع^{٢} = (١٠٠)^{٢} ـ ٢ × ١٠٠٠٠ × ٠,١٨

∴ ع^{٢} = ٦٤٠٠ ∴ ع = ٨٠ م / ث هى السرعة التى تخرج بها الرصاصة

مثال : أطلقت رصاصة بسرعة ٢٠م/ث فى اتجاه عمودى على حائط رأسى سمكه ١٤سم فخرجت منه بسرعة ١٥م/ث. أوجد مقدار العجلة التقصيرية ، وإذا أطلقت الرصاصة بنفس السرعة على حائط رأسى آخر مماثل فأوجد المسافة التى تغوصها حتى تسكن، علمًا بأن العجلة التى تتحرك بها الرصاصة واحدة فى الحالتين.

الحل:

نفرض اتجاة حركة الرصاصة هو الاتجاه الموجب

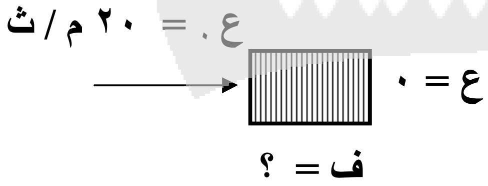


الحالة الاولى : ∵ ع ^{٢} = ع^٢. + ٢ جـ ف

∴ (١٥)^٢ = (٢٠)^٢ + ٢ جـ × ٠,١٤

∴ جـ = ـ ٦٢٥ م / ث^٢

الحالة الثانية :



∵ ع ^{٢} = ع^٢. + ٢ جـ ف

∴ ٠ = (٢٠)^٢ ـ ٢ × ٦٢٥ ف

∴ ف = ٠,٣٢ مترا

∴ الرصاصة تغوص فى الحائط مسافة ٣٢ سم حتى يسكن

---

* السرعة خلال الثانية النونية :

ملحوظة:

السرعة المتوسطة لجسيم خلال فترة زمنية = سرعته اللحظية فى منتصف هذه الفترة الزمنية

مثلا : السرعة المتوسطة خلال الثانية الرابعة = ع . + ٣,٥ جـ

السرعة المتوسطة خلال الثانيتين الثامنة و التاسعة = ع . + ٨ جـ

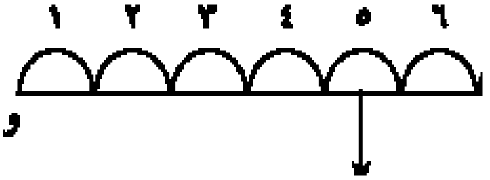
السرعة المتوسطة خلال الثوانى السابعة و الثامنة و التاسعة = ع . + ٧,٥ جـ

مثال : بدأ جسيم حركته فى اتجاه ثابت بسرعة ١٢ سم / ث وعجلة منتظمة ٦ سم / ث^٢ فى اتجاه سرعته . أحسب :

أولا : المسافة التى يكون الجسيم قد قطعها خلال الثانية الخامسة فقط

ثانيًا : المسافة التى يكون الجسيم قد قطعها خلال الثانيتين السابعة والثامنة معًا .

الحل :



نعتبر الاتجاه الموجب هو اتجاه الحركة

ع. = ١٢ سم / ث ، جـ = ٦ سم / ث^٢

أولا : **لإيجاد المسافة التى يكون الجسيم قد قطعها خلال الثانية الخامسة فقط** .

السرعة المتوسطة للثانية الخامسة = السرعة فى منتصف هذه الفترة الزمنية

= السرعة بعد ٤.٥ ثانية من بدء الحركة

∵ $ع_م = ع_. + جـ ن$ ∴ $ع_م$ = ١٢ + ٦ × ٤.٥ = ١٢ + ٢٧ = ٣٩ سم / ث

المسافة = السرعة المتوسطة × الزمن

ف = ٣٩ × ١ = ٣٩ سم

ثانيًا : **لإيجاد المسافة التى يكون الجسيم قد قطعها خلال الثانيتين السابعة والثامنة معًا** .

السرعة المتوسطة للثانيتين السابعة والثامنة معًا = السرعة فى منتصف هذه الفترة الزمنية أى تساوى السرعة بعد مضى ٧ ثوانى من بدء الحركة

$ع_م = ع_. + جـ ن$

$ع_م$ = ١٢ + ٦ × ٧ = ١٢ + ٤٢ = ٥٤ سم / ث

∴ المسافة = السرعة المتوسطة × الزمن

∴ ف = ٥٤ × ٢ = ١٠٨ سم

مثال : بدأ جسيم حركته فى اتجاه ثابت بسرعة ٣٠ سم / ث و بعجلة منتظمة ٦ سم / $ث^٢$

تعمل فى نفس اتجاه سرعته احسب :

أولا : المسافة المقطوعة بعد ٥ ثوان من بدء الحركة .

ثانيا: المسافة المقطوعة فى الثانية الخامسة فقط .

الحل :

أولا : المسافة المقطوعة بعد ٥ ثوان من بدء الحركة

$ف = ع . ن + \frac{١}{٢} جـ ن^٢ = ٣٠ × ٥ + \frac{١}{٢} × ٦ × (٥)^٢ = ٢٢٥$ سم

ثانيا: المسافة المقطوعة فى الثانية الخامسة فقط.

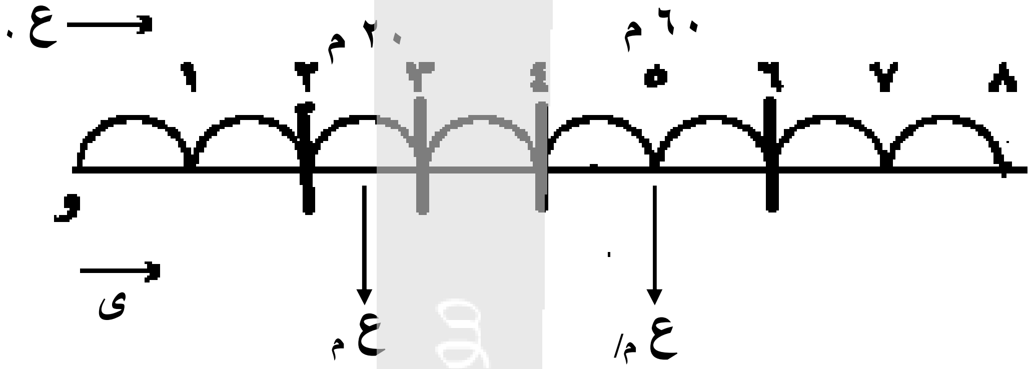
سرعة الجسيم المتوسطة = سرعته بعد ٤,٥ ثانية من بدء الحركة

ع م = ع. + جـ ن = ٣٠ + ٦ × ٤,٥ = ٥٧ سم / ث

∴ المسافة = ع م × ن = ٥٧ × ١ = ٥٧ سم / ث

مثال : تحرك جسيم بسرعة ابتدائية ما فى اتجاه ثابت و بعجلة منتظمة ، فإذا قطع فى الثانية الثالثة من حركته مسافة ٢٠ مترا ، ثم قطع فى الثانيتين الخامسة و السادسة معاً مسافة ٦٠ مترا . احسب العجلة التى تحرك بها الجسيم و سرعته الابتدائية .

الحل:



نفرض الاتجاه الموجب هو اتجاه السرعة الابتدائية فيكون اتجاه العجلة موجب ايضا

السرعة المتوسطة خلال الثانية الثالثة = $\frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}} = \frac{٢٠}{١} =$ ٢٠ م / ث

= سرعته بعد ٢.٥ ثانية من بدء الحركة

السرعة المتوسطة خلال الثانيتين الخامسة و السادسة = $\frac{٦٠}{٢} =$ ٣٠ م / ث

= سرعته بعد ٥ ثوان من بدء الحركة

∵ العجلة = $\frac{\text{التغير فى السرعة}}{\text{الفترة الزمن}} = \frac{ع_١ - ع_٢}{ن_١ - ن_٢} = \frac{٢٠ - ٣٠}{٥ - ٢,٥} =$ ـ ٤ م / ث^٢

الجسيم يتحرك حركة تقصيرية بعجلة ٤ م / ث^٢

∵ ع = ع. + جـ ن　∴ ٢٠ = ع. ـ ٤ × ٢.٥　∴ ع . = ٣٠ م / ث

الجسيم يتحرك بسرعة ابتدائية ٣٠ م / ث

مثال : يتحرك جسم بعجلة منتظمة فقطع فى الثانية الرابعة والخامسة معًا مسافة ٦٠ سم وقطع فى الثلاث ثوان التالية لها ١٢٠ سم . أوجد عجلة الجسم وسرعته الابتدائية

الحل :

السرعة المتوسطة فى الثانية الرابعة والخامسة $= \frac{٦٠}{٢} = ٣٠$ **سم / ث**

وهى سرعة الجسم بعد ٤ ث من بدء الحركة

السرعة المتوسطة فى الثانية السادسة والسابعة والثامنة $= \frac{١٢٠}{٣} = ٤٠$ **سم / ث**

وهى سرعة الجسم بعد ٦.٥ ث من بدء الحركة.

$\because$ ع = ع$_{٠}$ + جـ ن

$\therefore$ $٤٠ = ٣٠ +$ جـ $\times \frac{٥}{٢}$ $\Leftarrow$ جـ $= ١٠ \times \frac{٢}{٥}$ سم / ث^{٢}

$\therefore$ جـ = ٤ سم / ث^{٢}

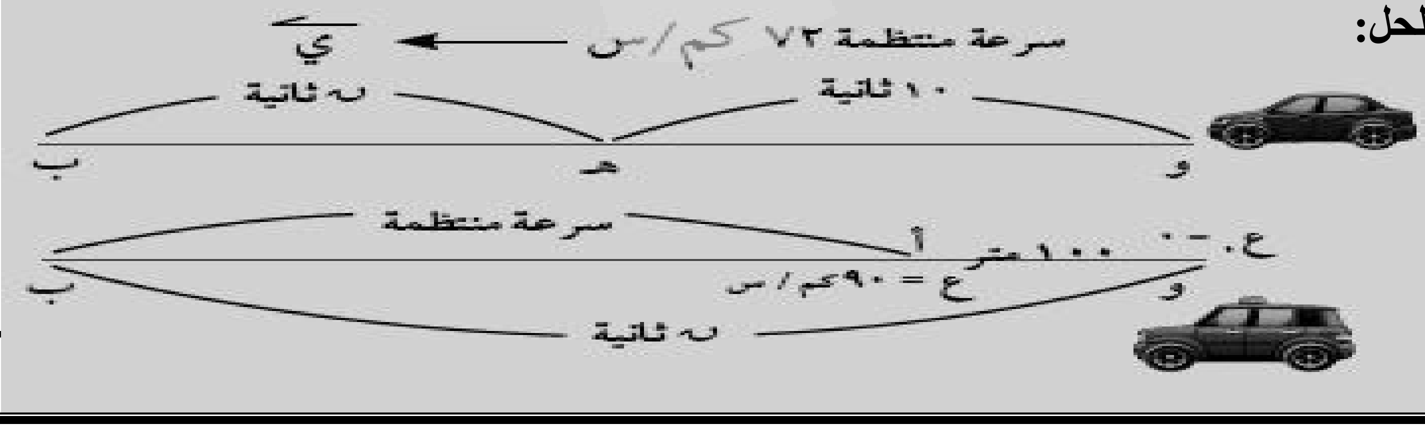
$\because$ ع = ع$_{٠}$ + جـ ن $\therefore$ ٣٠ = ع$_{٠}$ + ٤ × ٤

$\therefore$ ع$_{٠}$ = ٣٠ − ١٦ = ١٤ سم / ث

*** تطبيقات على قوانين الحركة بعجلة منتظمة :**

مثال : تتحرك سيارة بسرعة منتظمة ٧٢ كم / س . مرت بسيارة ساكنة فبدأت سيارة الشرطة فى متابعتها بعد ١٠ ثوان من مرورها متحركة بعجلة منتظمة مسافة ١٠٠ مترحتى بلغت سرعتها٩٠ كم/ س ، ثم سارت بهذه السرعة حتى لحقت بالسيارة الأولى .
أوجد الزمن الذى استغرقته عملية المطاردة منذ لحظة تحرك سيارة الشرطة والمسافة التى قطعتها هذه السيارة .

الحل:



نعتبر الاتجاه الموجب هو اتجاه السرعة المنتظمة و أن سيارة الشرطة كانت ساكنة عند نقطة و ثم قطعت مسافة ١٠٠ متر حتى وصلت الى أ حيث أصبحت سرعتها ٩٠ كم / س ثم سارت بها بانتظام حتى لحقت بالسيارة الاولى عند ب .

٧٢ كم / س = ٧٢ × $\frac{٥}{١٨}$ = ٢٠ م / ث ، ٩٠ كم / س = ٩٠ × $\frac{٥}{١٨}$ = ٢٥ م / ث

بالنسبة لسيارة الشرطة فى الفترة من و الى أ: ع. = ٠ ، ع = ٢٥ م / ث ، ف = ١٠٠ متر

∵ $ع^{٢}$ = $ع.^{٢}$ + ٢ جـ ف ∴ $(٢٥)^{٢}$ = ٠ + ٢ × جـ × ١٠٠ ∴ جـ = $\frac{٢٥}{٨}$ م / $ث^{٢}$

∵ ع = ع. + جـ ن ∴ ٢٥ = ٠ + $\frac{٢٥}{٨}$ ن ∴ ن = ٨ ثانية

∴ المسافة التى تتحركها سيارة الشرطة بسرعة منتظمة = ٢٥ × (ن – ٨) متر

، تكون السيارة المطادرة قطعت المسافة و ب فى زمن قدره = (ن + ١٠) ثانية

، تكون سيارة الشرطة قطعت نفس المسافة و ب فى زمن قدره = ن ثانية

∴ ٢٠ (ن + ١٠) = ١٠٠ + ٢٥ (ن – ٨) ∴ ن = ٦٠ ثانية

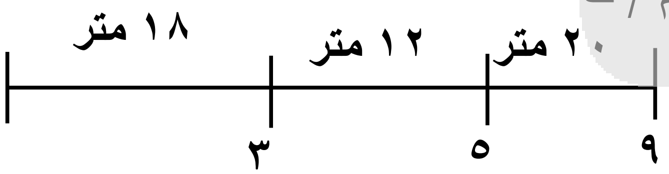
∴ المسافة المقطوعة = ٢٠ × ٧٠ = ١٤٠٠ متر

مثال:تحرك جسيم فى اتجاه ثابت فقطع ١٨ مترًا فى الثوانى الثلاثة الأولى من حركته ١٢ مترًا فى الثانية الخامسة ٢٠ مترًا فى الثانية التاسعة . اثبت أن هذه المسافات تتفق والفرض بأن هذا الجسيم يتحرك بعجلة منتظمة و احسب سرعته عند بدء الحركة .

الحل :

السرعة المتوسطة خلال الفترة الأولى = $\frac{١٨}{٣}$ = ٦ م / ث

(السرعة عند منتصف الزمن) $ع_{١.٥ ث}$ = ٦ م / ث



السرعة المتوسطة خلال الثانية الخامسة :

$ع_{٤.٥}$ = $\frac{١٢}{١}$ = ١٢ م /ث

السرعة المتوسطة خلال الثانية التاسعة :

$$ع_{٨.٥} = \frac{٢٠}{١} = ٢٠ \text{ م /ث}$$

من ن = ١.٥ ث إلى ن = ٤.٥ ث

∴ معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن = العجلة

$$جـ = \frac{ع_{٤.٥} - ع_{١.٥}}{٤.٥ - ١.٥} = \frac{١٢ - ٦}{٢} = ٢ \text{ م / ث}^٢$$

من ن = ٤.٥ ث إلى ن = ٨.٥ ث

∴ معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن $= \frac{ع_{٨.٥} - ع_{٤.٥}}{٨.٥ - ٤.٥} = \frac{٢٠ - ١٢}{٤} = \frac{٨}{٤} = ٢ \text{ م/ث}^٢$

∴ السرعة تتغير بمعدل ثابت بالنسبة للزمن

∴ الجسم يتحرك بعجلة منتظمة جـ = ٢ م / ث^٢

∴ $ع = ع_٠ + جـ ن$

∴ $ع_{١.٥} = ع_٠ + ٢ \times ١.٥$ ∴ $٦ = ع_٠ + ٣$

∴ $ع_٠ = ٣$ م / ث **السرعة عند بدء الحركة**

تمارين على قوانين الحركة المنتظمة

(١) أكمل مايأتي:

(أ) يتحرك جسيم فى خط مستقيم من السكون بعجلة منتظمة مقدارها ٤م / ث^٢ فإن سرعته بعد ٦ ثوان من بدء الحركة = ______ م / ث.

(ب) المسافة التى يقطعها جسيم يتحرك في اتجاه ثابت من السكون بعجلة مقدارها ٥سم / ث^٢ فى زمن قدره ٤ ثوان = ______ سم.

(جـ) السرعة المتوسطة لجسيم يتحرك بسرعة ابتدائية $ع_٠$ وعجلة منتظمة جـ خلال الثانية السادسة من حركته = ___

(د) السرعة المتوسطة لجسيم يتحرك بسرعة ابتدائية ع٠ وعجلة منتظمة جـ خلال الثوانى السابعة والثامنة والتاسعة = ______

(هـ) يتحرك جسيم من السكون فى خط مستقيم بعجلة منتظمة فقطع ٢٤ مترًا فى الثوانى الأربع الأولى من حركته ، فإن مقدار عجلته = ______

(و) بدأ جسيم حركته من السكون فى خط مستقيم بعجلة منتظمة مقدارها ٢سم / ث^2 فقطع مسافة ٢٥سم ، فإن سرعته فى نهاية تلك المسافة = ______ سم / ث.

---

(٢) انطلقت سيارة من السكون بتسارع مقداره ٤م / ث^2. ما المسافة التى تقطعها السيارة عندما تصبح سرعتها ٢٤م / ث؟

(٣) تسير سيارة سباق فى الحلبة بسرعة ٤٤م / ث ثم تناقصت سرعتها بمعدل ثابت حتى أصبحت ٢٢م / ث خلال ١١ ثانية. أوجد المسافة التى قطعتها السيارة خلال هذا الزمن.

(٤) تتسارع سيارة بمعدل ثابت من ١٥م / ث إلى ٢٥م / ث. ما الزمن الذى تستغرقه لتصل إلى هذه السرعة علمًا بأنها قطعت مسافة ١٢٥ مترًا؟

(٥) يتحرك راكب دراجة بعجلة منتظمة حتى صارت سرعته ٧,٥ م / ث خلال ٤,٥ ثانية. فإذا كانت إزاحة الدراجة خلال فترة التسارع تساوى ١٩ مترًا. أوجد السرعة الابتدائية للدراجة.

(٦) يتدرب كريم على ركوب الدراجة يدفعه والده فيكتسب تسارعًا ثابتًا مقداره $\frac{1}{2}$م / ث^2 لمدة ٦ ثوان وبعد ذلك يقود كريم الدراجة بمفرده بسرعة ٣م / ث لمدة ٦ ثوان أخرى قبل أن يسقط أرضًا. أوجد مقدار المسافة التى يقطعها كريم.

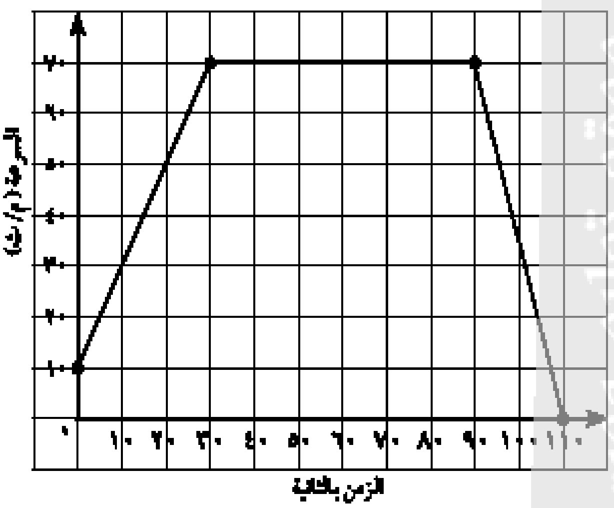
(٧) هبط راكب دراجة من قمة تل منحدرًا بعجلة ثابتة مقدارها ٢م / ث^2 وعندما وصل إلى قاعدة التل بلغت سرعته ١٨م / ث ثم استخدم الفرامل حتى يحافظ على هذه السرعة لمدة دقيقة واحدة. أوجد المسافة الكلية التى قطعها راكب الدراجة.

(٨) قائد سيارة يتحرك بسرعة ثابتة مقدارها ٢٤م / ث ، شاهد فجأة طفل يمر فى الشارع ، فإذا كان الزمن اللازم لاستجابة الفرامل هو $\frac{1}{2}$ ثانية تحركت فيه السيارة بتقصير منتظم مقدارها ٩,٦م / ث^2 حتى وقفت أوجد المسافة الكلية التى تحركتها السيارة قبل أن تقف مباشرة.

(٩) بدأ جسم حركته من السكون فى خط مستقيم أفقى بعجلة منتظمة مقدارها ٤سم / $ث^٢$ لمدة ٣٠ ثانية ثم تحرك بالسرعة التى اكتسبها لمدة ٤٠ ثانية أخرى أوجد مقدار سرعته المتوسطة.

(١٠) يتحرك جسم فى خط مستقيم بعجلة منتظمة على مستوى أفقى أملس فقطع ٢٦ مترًا خلال الثانية الرابعة من بدء الحركة ، ٥٦ مترًا خلال الثانية التاسعة، أوجد سرعته الابتدائية ومقدار عجلته.

(١١) س ، ص نقطتان على طريق مستقيم أفقى بدأت سيارة أ الحركة من س نحو ص من السكون وبعجلة منتظمة ١٠م / $ث^٢$ وفي نفس اللحظة كانت تتحرك سيارة أخرى ب من ص نحو س بسرعة منتظمة مقدارها ٥٤ كم / س ، فإذا كانت السرعة النسبية للسيارة أ بالنسبة للسيارة ب لحظة التقائهما تساوى ١٦٢ كم / س. أوجد الزمن الذى تأخذه كل من السيارتين من لحظة تحركها معًا حتى لحظة التقائهما.



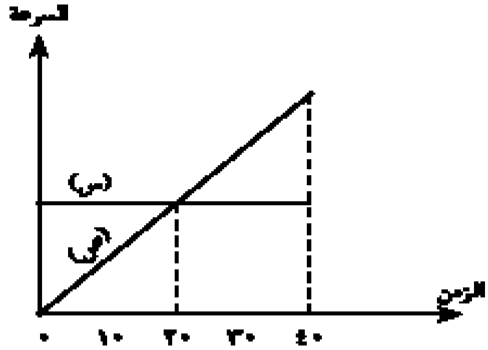
(١٢) الشكل المقابل يمثل منحنى (السرعة - الزمن) لجسم بدأ التحرك بسرعة ابتدائية مقدارها ١٠م / ث وحتى سكن بعد زمن قدره ١١٠ ثانية. أوجد:

(أ) عجلة التسارع.

(ب) مقدار التقصير المنتظم للجسم حتى يسكن.

(جـ) المسافة الكلية التى تحركها الجسم.

(١٣) مصعد ساكن بقاع منجم ، أخذ المصعد فى الارتفاع بعجلة مقدارها ١٢٠سم/$ث^٢$ مسافة ٥٤٠سم، ثم بسرعة منتظمة مسافة ٣٦٠ سم ثم بتقصير منتظم مسافة ٧٢٠سم حتى سكن عند فوهة المنجم. احسب الزمن الذى استغرقه المصعد فى الصعود من قاع المنجم إلى فوهته.



(١٤) الشكل المقابل يمثل منحنى (السرعة - الزمن) لحركة سيارتين س ، ص أوجد الزمن الذى تتقابل فيه السيارتان (فسر إجابتك).

* السقوط الحـــر*

الحركة الرأسية تحت تأثير الجاذبية الأرضية

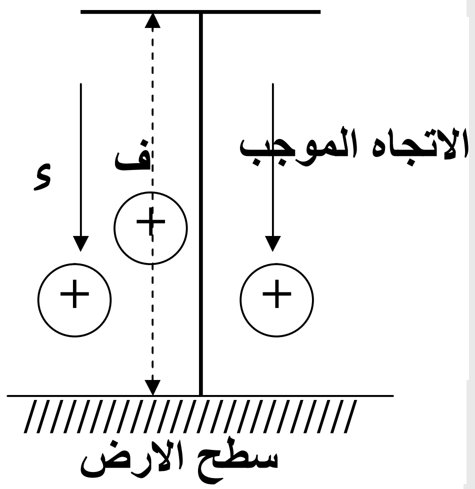
الأجسام المتحركة رأسيًا حركة حرة تكون حركتها بعجلة منتظمة معيارها

ء = ٩.٨ متر / ث^{٢} أ، ء = ٩٨٠ سم / ث^{٢} ، ء تدل على عجلة الجاذبية الأرضية

وبالتالى فهى تخضع لنفس قوانين الحركة المستقيمة ذات العجلة المنتظمة وبالتالى :

أولا : إذا كان الجسيم ساقطاً أو مقذوفاً إلى أسفل :

مكان السقوط
أو القذف لاسفل



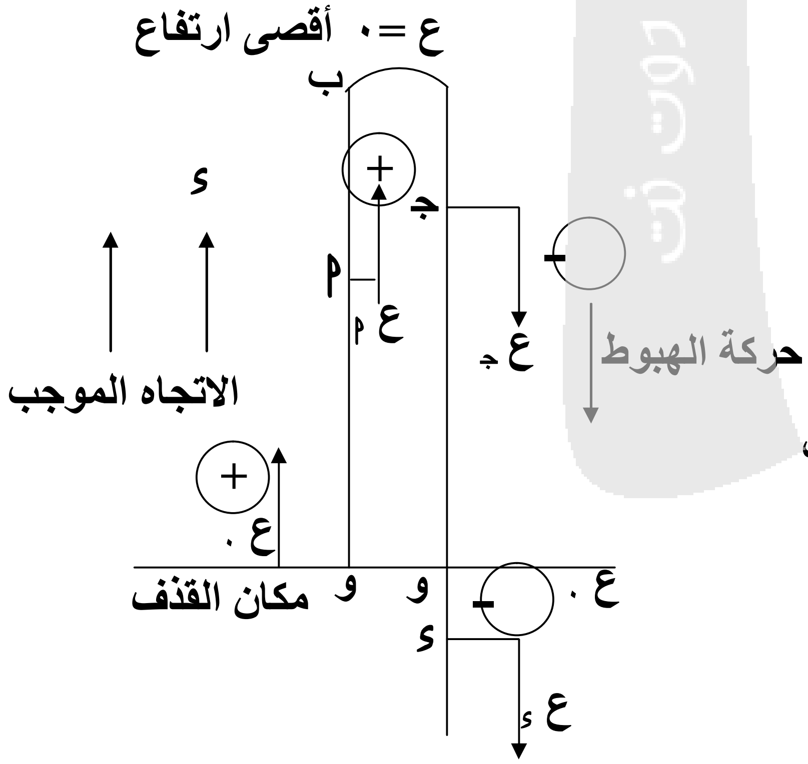
ع = ع. + ء ن

ف = ع. ن + $\frac{١}{٢}$ ء ن^{٢}

ع^{٢} = ع^{٢}. + ٢ ء ف

بفرض اتجاه الحركة هو الاتجاه الموجب

ثانيا : إذا كان الجسيم مقذوفا إلى أعلى :



ع = ع. ـ ء ن

ف = ع. ن ـ $\frac{١}{٢}$ء ن^{٢}

ع^{٢} = ع^{٢}. ـ ٢ ء ف

بفرض اتجاه الحركة هو الاتجاه الموجب

إيجاد زمن و مسافة أقصى ارتفاع لجسيم مقذوف راسيا إلى أعلى :

زمن الوصول لاقصى ارتفاع :

$ع = ع_{٠} - ء ن$ عند أقصى ارتفاع ع = صفر

$\therefore ع_{٠} = ء ن \quad \therefore ن = \frac{ع_{٠}}{ء} = \frac{\text{مقدار سرعة القذف}}{\text{مقدار عجلة الجاذبية الأرضية}}$

مسافة أقصى ارتفاع : $٠ = ع_{٠}^{٢} - ٢ ء ف$

$ف = \frac{ع_{٠}^{٢}}{٢ ء} = \frac{\text{مربع سرعة القذف}}{\text{ضعف عجلة الجاذبية الأرضية}}$

ملاحظات :

إذا قذف جسيم رأسيًا إلى أعلى فإن :

(١) زمن الصعود = زمن الهبوط

(٢) مقدار السرعة التى يعود بها الجسيم إلى نقطة القذف = مقدار سرعة القذف بإشارتين مختلفتين [مقدار سرعة الجسيم عند أى نقطة وهو صاعد تكون مساوية لمقدار سرعته عند مروره بنفس النقطة وهو هابط مع اختلاف اتجاهى السرعتين]

(٣) فى حالة الاجسام المقذوفة راسيا لاعلى ليس من الضرورى تكون الازاحة فى فترة زمنية ما مساوية للمسافة التى قطعها الجسم خلال الفترة .

(٤) سرعة الجسيم وهو صاعد تكون موجبةع > ٠ وهو هابط تكون سالب ع < ٠

مثال : أسقط عامل بناء قطعة خرسانية من سقالة (منصة) عالية .
(أ) ما سرعة قطعة البناء بعد نصف ثانية .
(ب) ما المسافة التى تقطعها كتلة البناء خلال هذا الزمن .

الحل :

(أ) صيغة القانون: $ع = ع_. + د ن$

بالتعويض عن $ع_. = ٠$ ، $د = ٩,٨$ م/ث^٢ ، $ن = \frac{١}{٢}$ ثانية.

$ع = ٠ + ٩,٨ \times \frac{١}{٢} = ٤,٩$ م/ث

(ب) صيغة القانون: $ف = ع_. ن + \frac{١}{٢} د ن^٢$

بالتعويض عن $ع_. = ٠$ ، $د = ٩,٨$ م/ث^٢ ، $ن = \frac{١}{٢}$ ثانية.

$ف = ٠ + \frac{١}{٢} \times ٩,٨ \times \frac{١}{٤} = ١\frac{٩}{٤٠}$ متر.

مثال: سقطت تفاحة من شجرة وبعد ثانية واحدة ارتطمت بالأرض.

(أ) احسب سرعة التفاحة لحظة ارتطامها بسطح الأرض، ثم احسب السرعة المتوسطة لحظة ارتطامها بسطح الأرض.

(ب) ما هو بعد التفاحة عن سطح الأرض لحظة بداية سقوطها؟

الحل:

(أ) سرعة التفاحة لحظة ارتطامها بالارض : $ع_. = ٠$ ، $د = ٩,٨$ م / ث^٢ ، $ن = ١$ ثانية

$\because ع = ع_. + د ن \quad \therefore ع = ٠ + ٩,٨ \times ١ = ٩,٨$ م / ث^٢

السرعة المتوسطة خلال الثانية = سرعة التفاحة بعد نصف ثانية

$= ٩,٨ \times ٠,٥ = ٤,٩$ م / ث^٢

(ب) $ف = ع_. ن + \frac{١}{٢} د ن^٢ = ٠ + \frac{١}{٢} \times ٩,٨ \times (١)^٢ = ٩,٨$ مترا

مثال : قذف حجر صغير فى بئر بسرعة ٤م/ث فوصل الى قاعه بعد ٢ ثانية أوجد عمق البئر وسرعة الحجر عند اصطدامه بالقاع

الحل :

$\because ف = ع_. ن + \frac{١}{٢} د ن^٢ = ٤ \times ٢ + \frac{١}{٢} \times ٩,٨ \times ٤ = ٢٧,٦$ م

$\therefore ع = ع_. + د ن = ٤ + ٩,٨ \times ٢ = ٢٣,٦$ م/ث

مثال : قذف جسيم رأسيا لاعلى بسرعة ١٩,٦ م/ث أوجد زمن وصوله الى أقصى أرتفاع والمسافة التى وصل اليها

الحل :

ع. = ١٩,٦ ، ع = ٠ ، ى = ٩,٨

∴ ع = ع. ـ ى ن ∴ ٠ = ١٩,٦ ـ ٩,٨ ن

٩,٨ ن = ١٩,٦ ∴ ن = ٢ ثانية

∴ زمن الوصول الى أقصى ارتفاع = ٢ ثانية

لايجاد المسافة التى وصل اليها:

ف = ع. ن ـ $\frac{١}{٢}$ ى ن^{٢} = ١٩,٦ × ٢ ـ $\frac{١}{٢}$ × ٩,٨ × ٤ = ١٩,٦ مترا

مثال : قذف جسيم رأسيا لاعلى بسرعة ٢٤,٥ م/ث فبعد كم ثانية يعود الى نقطة القذف

الحل :

نوجد زمن الوصول لاقصى أرتفاع

ع . = ٢٤,٥ ، ع = ٠ ، ى = ٩,٨

∵ ع = ع. ـ ى ن ∴ ٠ = ٢٤,٥ ـ ٩,٨ ن ∴ ٩,٨ ن = ٢٤,٥

∴ ن = ٢,٥ ثانية ∴ زمن الصعود والهبوط = ٢ × ٢,٥ = ٥ ثوان

مثال : قذف جسيم رأسيا لاعلى بسرعة ١٤م/ث أوجد الزمن الذى يأخذه حتى يصل الى نقطة تبعد ٣٥٠ م أسفل نقطة القذف

الحل :

ف = ـ ٣٥٠

ع. ن + $\frac{١}{٢}$ ى ن^{٢} = ـ ٣٥٠

١٤ ن + $\frac{١}{٢}$ × ـ ٩,٨ ن^{٢} = ـ ٣٥٠

١٤ ن ـ ٤,٩ ن^{٢} = ـ ٣٥٠ × ١٠

٤٩ ن^{٢} ـ ١٤٠ ن ـ ٣٥٠٠ = ٠ ÷ ٧

٧ ن^{٢} ـ ٢٠ ن ـ ٥٠٠ = ٠

(٧ ن + ٥٠)(ن ـ ١٠) = ٠

∴ ن = ١٠ ، ن = ـ $\frac{٥٠}{٧}$ مرفوض

مثال : قذف حجر صغير بسرعة ١٩.٦ متر / ث رأسيًا إلى أعلى من قمة برج ارتفاعه ١٥٦.٨ متر عن سطح الأرض . متى يصل الحجر إلى سطح الأرض ؟ وما هى سرعته عندئذ

الحل :

عند أقصى ارتفاع ع = ٠

ف = $\frac{ع_٠^٢}{٢ ء}$ = $\frac{(١٩.٦)^٢}{٢ \times ٩.٨}$ = ١٩.٦ متر

∴ أقصى مسافة = ١٥٦.٨ + ١٩.٦ = ١٧٦.٤ متر

∵ ف = ع. ن + $\frac{١}{٢}$ ء ن^٢ حيث ع. سرعته الابتدائية فى حالة الهبوط .

١٧٦.٤ = ٠ × ن + $\frac{١}{٢}$ × ٩.٨ ن^٢

١٧٦.٤ = ٤.٩ ن^٢ ∴ ن^٢ = $\frac{١٧٦,٤}{٤,٩}$ = ٣٦ ∴ ن = ٦ ث

، زمن الوصول لاقصى ارتفاع = $\frac{١٩,٦}{٩,٨}$ = ٢ ث

∴ زمن الوصول إلى سطح الأرض من لحظة القذف = ٦ + ٢ = ٨ ث

∵ ع = ع. + ء ن

∴ ع = ٠ + ٩.٨ × ٦ = ٥٨.٨ متر / ث

مثال : قذفت كرة صغيرة رأسيًا إلى أعلى من نافذة أحد المنازل ، وشوهدت الكرة وهى هابطة أمام النافذة بعد ٤ ثوانى من قذفها ثم وصلت إلى سطح الأرض بعد ٥ ثوانى من لحظة القذف . أوجد ارتفاع النافذة عن سطح الأرض .

الحل : فى حالة الصعود : ع = ع. − ء ن

فى حالة أقصى ارتفاع صفر = ع. − ٩.٨ × ٢

∵ زمن الصعود = زمن الهبوط ∴ زمن الصعود = $\frac{٤}{٢}$ = ٢ ث

الكرة وصلت إلى سطح الأرض بعد ٥ ثوانى من لحظة القذف

الكرة تأخذ ١ ث من أمام النافذة حتى سطح الأرض أثناء الهبوط .

$\because$ ف = ع. ن + $\frac{١}{٢}$ ء ن^{٢}

$\therefore$ ف = ١٩.٦ × ١ + $\frac{١}{٢}$ × ٩.٨ (١)^{٢}

ف = ١٩.٦ + ٤.٩ = ٢٤.٥ متر (ارتفاع النافذة)

مثال : قذف جسيم رأسيًا إلى أعلى بسرعة ١٩.٦ متر / ث من نقطة على سطح الأرض متى يكون الجسيم على ارتفاع ١٤.٧ متر فوق سطح الأرض

وما هى سرعته عندئذ فسر معنى الجوابين ؟

الحل : $\because$ ف = ع. ن − $\frac{١}{٢}$ ء ن^{٢} (الجسيم صاعدًا)

$\therefore$ ١٤.٧ = ١٩.٦ ن − $\frac{١}{٢}$ × ٩.٨ ن^{٢}

١٤.٧ = ١٩.٦ ن − ٤.٩ ن^{٢} بالقسمة على ٤.٩

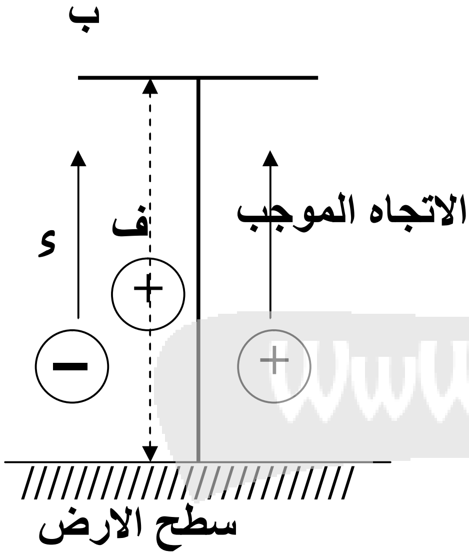
٣ = ٤ ن − ن^{٢} $\therefore$ ن^{٢} − ٤ ن + ٣ = ٠

(ن −٣) (ن − ١) = ٠ ⟵ ن = ٣ ث ، ن = ١ ث

ن = ١ ث أى أن الجسيم يأخذ زمن مقداره ١ ث فى حالة الصعود من لحظة القذف ن = ٣ ث أى أن الجسيم يستمر فى الصعود حتى بعد هذا الارتفاع ويصل إلى أقصى ارتفاع ثم يعود الجسيم فى الهبوط مرة أخرى ليصل إلى الارتفاع ١٤.٧ متر مرة أخرى بعد مضى ٣ ث من لحظة القذف

مثال : قذف جسيم رأسيا إلى أعلى بسرعة ١٤.٧ متر/ ث من نقطة عند سطح الأرض احسب سرعة الجسيم عندما يكون على ارتفاع ٩.٨ متراً عن سطح الأرض

و فسر معنى الجوابين .



الحل : بفرض الاتجاه الموجب الى أعلى

∴ ع . = ١٤.٧ متر/ ث ، ف = ٩.٨ مترا

∵ $ع^٢ = ع.^٢ - ٢ ء ف$

$= (١٤,٧)^٢ - ٢ × ٩,٨ × ٩,٨ = ٢٤,٠١$

∴ ع = ± ٤,٩ متر / ث

و تكون ع = ٤,٩ متر/ث عندما الجسيم صاعدا

، ع = ـ ٤,٩ متر/ث عندما الجسيم هابطاً

و معنى أن هذا الجسيم يكون على ارتفاع ٩,٨ مترا عن الارض مرتين :

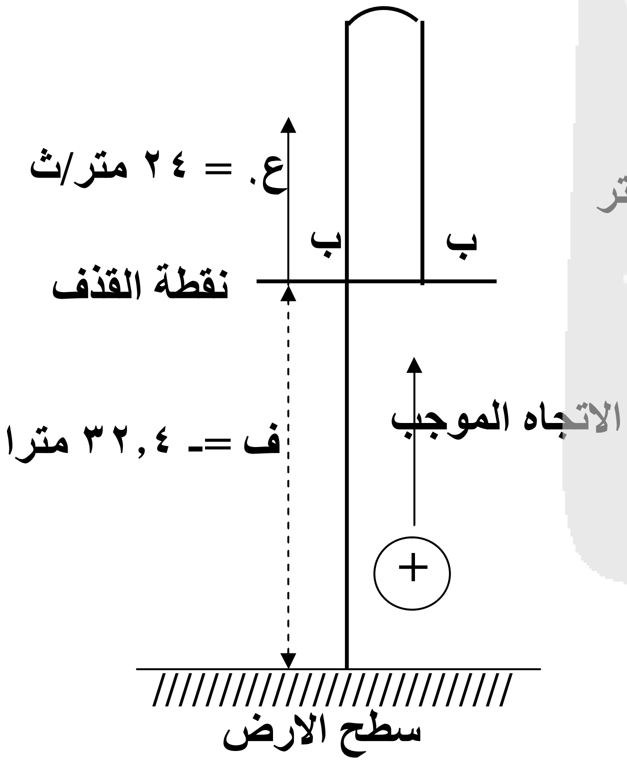
الاولى : وهو صاعد بسرعة ٤.٩ متر/ث عند ب

و الثانية : و هو هابط بنفس السرعة عن ب (التى فى محاذاة ب)

مثال : قذف جسيم رأسيا إلى أعلى بسرعة ٢٤ متر / ث من نقطة أعلى سطح الأرض .

أوجد الزمن الذى يأخذه حتى يصل إلى نقطة تبعد ٣٢.٤ متراً أسفل نقطة القذف.

الحل :



نتخذ الاتجاه الرأسي الى أعلى اتجاه موجباً

∴ ع. = + ٢٤متر/ث ، ف = ـ ٣٢.٤ متر

∵ $ف = ع . ن - \frac{١}{٢} ء ن^٢$

∴ $- ٣٢,٤ = ٢٤ ن - \frac{١}{٢} × ٩,٨ ن^٢$

∴ $٤.٩ ن^٢ - ٢٤ ن - ٣٢.٤ = ٠$

∴ $٤٩ ن^٢ - ٢٤٠ ن - ٣٢٤ = ٠$

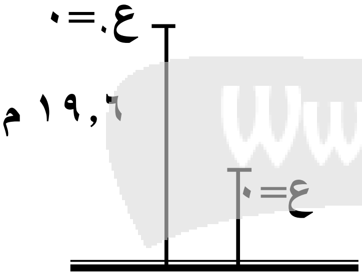
∴ $(ن - ٦)(٤٩ ن + ٥٤) = ٠$

∴ ن = ٦ أ، $ن = - \frac{٥٤}{٤٩}$ (مرفوض)

الزمن المطلوب = ٦ ثوان

مثال : سقطت كرة من المطاط من ارتفاع ١٩.٦ متر على سطح أرض افقية صلبة فأرتدت الى أعلى فأوجد اقصى ارتفاع تصل إليه الكرة علما بأن الكرة فقدت نصف سرعتها نتيجة التصادم

الحل: قبل الاصطدام بالارض :



∵ ع^2 = ع.^{2} + ٢ ءف ∴ ع^2 = ٠ + ٢ × ٩,٨ × ١٩,٦

∴ ع = ١٩,٦ م / ث

∴ سرعة الكرة قبل الاصطدام مباشرة = ١٩,٦ م / ث

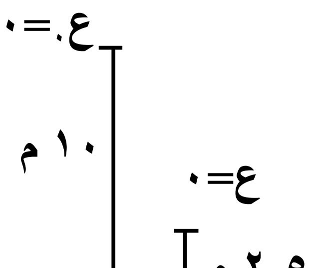
∴ سرعة الكرة بعد الاصطدام مباشرة = ٩,٨ م / ث

بعد الاصطدام بالارض :

أقصى ارتفاع = $\frac{\text{ع}.^2}{\text{٢ د}}$ = $\frac{(\text{٩.٨})^2}{\text{٢} \times \text{٩.٨}}$ = ٤.٩ مترا

مثال: سقطت كرة من المطاط من ارتفاع ١٠ متر فاصطدمت بالارض وارتدت رأسيا الى أعلى مسافة $\frac{1}{2}$ ٢ متر . احسب سرعة الكرة قبل و بعد اصطدامها بالارض مباشرة

الحل: قبل الاصطدام بالارض :



∵ ع^2 = ع.^{2} + ٢ ءف ∴ ع^2 = ٠ + ٢ × ٩,٨ × ١٠

∴ ع = ١٤ م / ث

أى ان السرعة قبل الاصطدام مباشرة = ١٤ م / ث

بعد الاصطدام بالارض :

∵ ع^2 = ع.^{2} − ٢ ءف ∴ ٠ = ع.^{2} - ٢ × ٩,٨ × ٢,٥

∴ ع. = ٧ م / ث

أى أن السرعة بعد الاصطدام مباشرة = ٧ م / ث

مثال: سقط حجر من السكون من ارتفاع ١٠ متر فوق كومة من الرمل فغاص فيها مسافة ١٩٦ سم أوجد العجلة التى تحرك بها الجسم داخل الرمل.

الحل : $ع_. = ٠$ ، $ف = ١٠$ متر ، $ء = ٩,٨$ م / $ث^٢$

$\because ع^٢ = ع_.^٢ + ٢ ء ف \quad \therefore ع^٢ = ٠ + ٢ \times ٩,٨ \times ١٠ = ١٩٦$

$\therefore ع = ١٤$ م / ث

بعد الغوص فى الرمل : $ع_. = ١٤$ م / ث ، $ع = ٠$ ، $ف = ١,٩٦$ م

$ع^٢ = ع_.^٢ + ٢ جـ ف \quad \therefore صفر = (١٤)^٢ + ٢ جـ \times ١,٩٦$

$\therefore جـ = - \frac{(١٤)^٢}{٢ \times ١.٩٦} = - ٥٠$ م / $ث^٢$

تمارين على الحركة الرأسية تحت تأثير الجاذبية الأرضية

(١) طفل يُسقط كرة من نافذة ترتفع ٣,٦م عن الرصيف. ما سرعتها لحظة ملامستها الرصيف؟

(٢) سقطت كرة رأسيًا إلى أسفل. ما سرعتها بعد ٦ ثوان من لحظة سقوطها.

(٣) سقط جسم رأسيًا لأسفل من ارتفاع ٤٩٠م عن سطح الأرض أوجد:

(أ) زمن الوصول إلى سطح الأرض.

(ب) سرعته بعد ٥ ثوان من بدء الحركة.

(٤) سقطت كرة من المطاط من ارتفاع ١٠ أمتار فاصطدمت بالأرض وارتدت رأسيًا إلى أعلى مسافة $٢\frac{١}{٢}$متر. احسب سرعة الكرة قبل وبعد اصطدامها بالأرض مباشرة.

(٥) يتدرب طالب على ركل كرة القدم رأسيًا إلى أعلى في الهواء، ثم تعود الكرة أثر كل ركلة فتصدم بقدمه. فإذا استغرقت الكرة من لحظة ركلها وحتى اصطدامها بقدمه ٣,٠ ثانية.

(أ) أوجد السرعة الابتدائية.

(ب) الارتفاع الذى وصلت إليه الكرة بعد أن ركلها الطالب.

⑥ قذف جسم من أعلى تل ارتفاعه ٩,٨ أمتار رأسيًا إلى أعلى بسرعة ٤,٩ م/ث أوجد:

(أ) سرعة الجسم عند لحظة وصولة إلى أسفل التل.

(ب) الزمن الذى استغرقة للوصول إلى أسفل التل.

⑦ قُذف حجر فى بئر بسرعة ٤ م/ث رأسيًا لأسفل فوصل إلى قاع البئر بعد ٢ ثانية. أوجد:

(أ) عمق البئر.

(ب) سرعة الحجر عند تصادمه بقاع البئر.

⑧ قذف جسيم رأسيًا إلى أعلى بسرعة ١٤ م/ث من نقطة على ارتفاع ٢٥٠م عن سطح الأرض. أوجد الزمن الذى يأخذه الجسم حتى يصل إلى سطح الأرض.

⑨ قذفت كرة رأسيًا إلى أعلى من نافذة فوصلت إليها بعد ٤ ثوان من لحظة القذف ووصلت إلى سطح الأرض بعد ٥ ثوان من لحظة القذف. أوجد

(أ) سرعة قذف الكرة.

(ب) أقصى ارتفاع وصلت إليه الكرة من نقطة القذف.

(جـ) ارتفاع النافذة عن سطح الأرض.

⑩ من قمة برج ارتفاعه ٨٠,٥ مترًا قذف جسم رأسيًا لأعلى بسرعة ٨,٤ م/ث. أوجد :

(أ) أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم من نقطة القذف.

(ب) الزمن الذى يستغرقه الجسم وهو هابط حتى تصبح سرعته ١١,٢م/ث.

(جـ) زمن وصول الجسم إلى نقطة القذف.

(د) زمن وصول الجسم إلى سطح الأرض.

⑪ قذفت كرة من أعلى تل ارتفاعه ١٤٠م رأسيًا إلى أعلى ، فوجد أنها قطعت فى الثانية الثالثة مسافة ١٠,٥ أمتار.

أوجد: (أ) السرعة التى قذفت بها الكرة.

(ب) أقصى ارتفاع وصلت إليه الكرة.

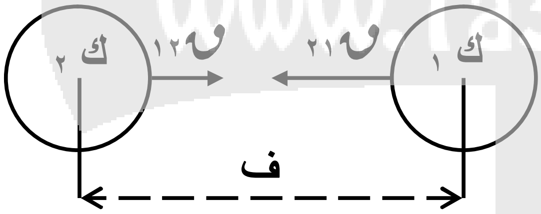
(جـ) الزمن الذى استغرقته الكرة فى الوصول إلى سطح الأرض.

⑫ سقط جسم من ارتفاع ٦٠ مترًا من سطح الأرض وفى نفس اللحظة قذف جسم آخر رأسيًا لأعلى من سطح الأرض بسرعة ٢٠م / ث فتقابل الجسمان بعد فترة زمنية أوجد هذا الزمن، ثم أوجد المسافة التى قطعها كل من الجسمين خلال هذه الفترة الزمنية.

قانون الجذب العام

كل الاجسام فى الكون تتجاذب مع الاجسام الآخرى بتأثير قوة مباشرة تتناسب طرديا مع كتلتيهما و عكسيا مع مربع المسافة بين مركزيهما

$$ق = ث \times \frac{ك_١ \times ك_٢}{ف^٢}$$



ق قوة ناتجة عن التجاذب

، ث ثابت الجذب العام $= ٦,٦٧ \times ١٠^{-١١}$ نيوتن . م^٢ / كجم^٢

ك ١ هى كتلة الجسم الأول ، ك ٢ هى كتلة الجسم الثانى

ف هو البعد (المسافة) بين الجسمين

* **تعريف**

ثابت الجذب العام :

هو قوة الجذب المتبادلة بين كتلتين مقدار كل منهما ١ كيلو جرام و المسافة بين مركزيهما ١متر و يساوى $٦,٦٧ \times ١٠^{-١١}$ نيوتن . م^٢ / كجم^٢ .

* **العوامل التى تتوقف عليها قوة التجاذب بين جسمين :**

١) كتل الاجسام المتجاذبة ٢) المسافة الفاصلة بين الكتل

ملاحظات :

١ـ قوة الجذب موجودة بين الاجسام بغض النظر عن الوسط بين الاجسام و لكنها تنقص سريعا بزيادة المسافة بين الجسمين .

٢ـ يسمى قانون الجذب العام بقانون التربيع العكسي لان القوة تتناسب عكسيا مع مربع المسافة بين مركزى الكتلتين .

٣- هناك فرق بين عجلة الجاذبية (خاصة بالارض و تتغير من مكان الى مكان أخر)
وثابت الجذب (ثابت طبيعى عام بالنسبة للاجسام الصغيرة أو الاجرام السماوية)
وتختلف وحدتى الثابتان . عجلة الجذبية م / ث^{٢} أما ثابت الجذب نيوتن . م^{٢}/كجم^{٢}

مثال : احسب قوة الجذب بين كرتين كتلتاهما ١٠ كجم ، ٥ كجم و المسافة بين مركزيهما ٠,٥ متر . علماً بأن ثابت الجذب العام ٦,٦٧ × ١٠ $^{-١١}$ نيوتن . م^{٢} / كجم^{٢} .

الحل :

$ك_{١}$ = ١٠ كجم ، $ك_{٢}$ = ٥ كجم ، ف = ٠,٥ م ، ث = ٦,٦٧ × ١٠ $^{-١١}$ نيوتن . م^{٢}/ كجم^{٢}

قانون الجذب العام :

$$ق = ث \times \frac{ك_{١} \times ك_{٢}}{ف^{٢}} = ٦,٦٧ \times ١٠^{-١١} \times \frac{١٠ \times ٥}{(٠,٥)^{٢}} = ١,٣٣٤ \times ١٠^{-٨} \text{ نيوتن}$$

<u>ملحوظة</u> : نستخدم الالة فى الحساب و هذا اسهل

مثال : كرتين كتلتيهما ٥,٢ كجم ، ٠,٢٥ كجم وضعت الكرتان بحيث كانت المسافة بين مركزيهما ٥٠ سم . احسب قوة التجاذب بينهما . علما بأن ث = ٦,٦٧ × ١٠ $^{-١١}$ ن ٠م^{٢} /كجم^{٢}

الحل :

ف = ٥٠ سم = ٠,٥ متر ، $ك_{١}$ = ٥,٢ كجم ، $ك_{٢}$ = ٠,٢٥ كجم

قانون الجذب العام : $ق = ث \times \frac{ك_{١} \times ك_{٢}}{ف^{٢}}$

$$= ٦,٦٧ \times ١٠^{-١١} \times \frac{٥,٢ \times ٠,٢٥}{(٠,٥)^{٢}}$$

= ٣,٤٦٨٤ × ١٠ $^{-١٠}$ نيوتن (هى قوة صغيرة جدا)

مثال : إذا علمت أن كتلة الارض ٦ × ١٠ ^{٢٤} كجم و كتلة القمر ٧ × ١٠ ^{٢٢} كجم و المسافة بينهما ٣ × ١٠ ^{٦} متر و ثابت الجذب العام ٦,٦٧ × ١٠ $^{-١١}$ نيوتن . م^{٢} / كجم^{٢}
أوجد قوة جذب الارض للقمر .

الحل :

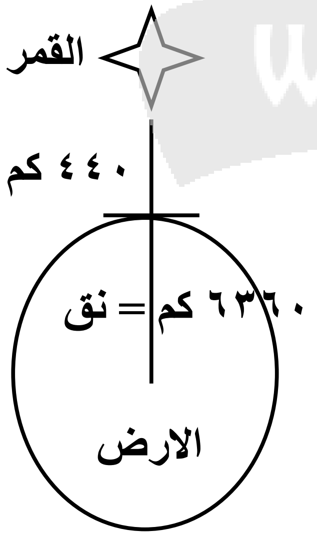
قانون الجذب العام : $ق = ث \times \frac{ك_{١} \times ك_{٢}}{ف^{٢}}$

$$= ٦,٦٧ \times ١٠^{-١١} \times \frac{٦ \times ١٠^{٢٤} \times ٧ \times ١٠^{٢٢}}{(٣ \times ١٠^{٦})^{٢}}$$

= ٣,١١٢٦ × ١٠ ^{٢٤} نيوتن (هى قوة كبيرة)

مثال : قمر صناعي كتلته ك كجم يدور على ارتفاع ٤٤٠ كم من سطح الارض التى كتلتها ٦ × ١٠ ^{٢٤} كجم و نصف قطرها ٦٣٦٠ كم . أوجد قيمة ك لأقرب كجم .علماً بأن ثابت الجذب العام يساوى ٦,٦٧ × ١٠ $^{-١١}$ نيوتن . م^{٢} / كجم^{٢}، قوة جذب الارض للقمر هى ١٧٣١٠ نيوتن .

الحل :



$ك_{١}$ للقمر = ك كجم ، $ك_{٢}$ للارض = ٦ × ١٠ ^{٢٤} كجم

، ف = (٦٣٦٠ + ٤٤٠) × ١٠٠٠ متر = ٦٨٠٠ × ١٠٠٠ م

قانون الجذب العام : ق = ث × $\frac{ك_{١} \times ك_{٢}}{ف^{٢}}$

$$١٧٣١٠ = ٦,٦٧ \times ١٠^{-١١} \times \frac{ك \times ٦ \times ١٠^{٢٤}}{(٦٨٠٠ \times ١٠٠٠)^{٢}}$$

$$\therefore \text{ك (كتلة القمر)} = \frac{١٧٣١٠ \times (٦٨٠٠ \times ١٠٠٠)^{٢}}{٦,٦٧ \times ١٠^{-١١} \times ٦ \times ١٠^{٢٤}}$$

$$= ٢٠٠٠,٣٥٩٨٢$$

$$\simeq ٢٠٠٠ \text{ كجم}$$

ملحوظة :

إذا كان الجسم يبعد مسافة قدرها س فوق سطح الارض أو مسافة ف عن مركز الارض فإن : ف = س + نق حيث نق نصف قطر الارض

---

* حساب كتلة الارض و عجلة الجاذبية الارضية ء :

تذكر أن : قوة جذب الارض لجسم كتلته ك

هى $\boxed{ق = ك \times ء}$ حيث ء عجلة الجاذبية الارضية و تساوى ٩,٨ م / ث^{٢}

غالبا عجلة الجاذبية ثابتة بالنسبة للارض و تختلف على سطح القمر

مثال : احسب كتلة الارض بوحدة كجم بفرض أن جسيما كتلته ١ كجم وضع فوق سطحها علماً بأن طول نصف قطر الارض ٦٣٦٠ كم ، ث = ٦,٦٧ × ١٠ $^{-١١}$ نيوتن

الحل :

بفرض أن كتلة الجسم $ك_{١}$ = ١ كجم ، كتلة الارض $ك_{٢}$ = ك

قوة جذب الارض للجسم ق = $ك_{١}$ × ء = ١ × ٩,٨ = ٩,٨ نيوتن

$$\because ق = ث \times \frac{ك_{١} \times ك_{٢}}{ف^{٢}} \quad \therefore ٩,٨ = ٦,٦٧ \times ١٠^{-١١} \times \frac{١ \times \text{ك للارض}}{(٦٣٦٠ \times ١٠٠٠)^{٢}}$$

∴ $ك = \frac{٩,٨ \times (٦٣٦٠ \times ١٠٠٠)^٢}{٦,٦٧ \times ١٠^{-١١}} = ٦ \times ١٠^{٢٤}$ كجم

مثال : فى نفس المثال السابق إذا كانت كتلة الجسم ١٠٠٠ كجم فإن :
قوة جذب الارض للجسم = ٩٨٠٠ نيوتن و كتلة الارض = ٦×١٠^{١٧} كجم

مثال : احسب عجلة الجاذبية الارضية بوحدة م / $ث^٢$ لجسم كتله ١ كجم وضع فوق سطحها علماً بأن كتلة الارض تساوى ٦×١٠^{٢٤} كجم ، نصف قطر الارض ٦٣٦٠ كم .

الحل :

∵ قوة جذب الارض للجسم ق = ك × ء = ١ × ء = ء

∵ $ق = ث \times \frac{ك_١ \times ك_٢}{ف^٢}$ ∴ $ء = ٦,٦٧ \times ١٠^{-١١} \times \frac{١ \times ٦ \times ١٠^{٢٤}}{(٦٣٦٠ \times ١٠٠٠)^٢}$

∴ $ء \simeq ٩,٨٩٣٧٩$ م / $ث^٢$

المقارنة بين عجلتى الجاذبية على سطحى كوكبين :

$$\frac{ء_١}{ء_٢} = \frac{ك_١}{ك_٢} \times \frac{نق_٢^٢}{نق_١^٢}$$

حيث $ء_١$، $ء_٢$ عجلتى الجاذبية لكل من الكوكبين
، $ك_١$ ، $ك_٢$ كتلتيهما بالكجم
$نق_١$ ، $نق_٢$ نصفى قطريهما بالمتر على الترتيب

مثال : إذا كانت كتلة الارض قدر كتلة القمر ٨١ مرة و قطريهما ٦٣٧٨ كم ، ١٧٣٨ كم على الترتيب . فإذا كانت عجلة الجاذبية للارض ٩,٨ م / $ث^٢$ فكم يكون تسارع الجاذبية على سطح القمر .

الحل :

بفرض أن كتلة القمر = ك كجم فإن كتلة الارض = ٨١ ك كجم

$نق_١ = ٦٣٧٨$ كم ، $نق_٢ = ١٧٣٨$ كم ، $ء_١ = ٩,٨$ م / $ث^٢$ ، $ء_٢ = ؟$

$\frac{ء_١}{ء_٢} = \frac{ك_١}{ك_٢} \times \frac{نق_٢^٢}{نق_١^٢}$ ∴ $\frac{٩,٨}{ء_٢} = \frac{٨٠ ك}{ك} \times \left(\frac{١٧٣٨}{٦٣٧٨}\right)^٢$

$ء_٢$ للقمر $= \frac{٥,٩٤٠٤٦}{٩,٨} \simeq ١,٦٣$ م / $ث^٢$

مثال : إذا علمت أن كتلة الارض ٥,٩٧ × ١٠ ^{٢٤} كجم و نصف قطرها ٦,٣٤ × ١٠ ^{٦} متر و كتلة القمر ٧,٣٦ × ١٠ ^{٢٢} كجم و نصف قطره ١,٧٤ × ١٠ ^{٦} متر فأوجد النسبة بين الجاذبية على سطح القمر الى سطح الارض .

الحل :

$$\frac{د_١}{د_٢} = \frac{ك_١}{ك_٢} \times \frac{نق_٢^٢}{نق_١^٢} = \frac{٧,٣٦ \times ١٠^{٢٢}}{٥,٩٧ \times ١٠^{٢٤}} \times \left(\frac{٦,٣٤ \times ١٠^{٦}}{١,٧٤ \times ١٠^{٦}}\right)^٢$$

$$= \frac{١٨٤}{١٤٩٢٥} \times ١٣,٢٧٦٣٩ = ٠,١٦ \text{ تقريباً}$$

تمارين على الجذب العام

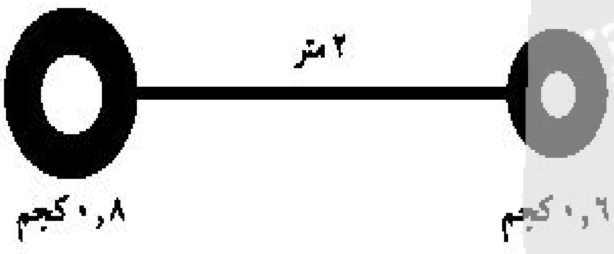
تنبية : اعتبر ثابت الجذب العام لنيوتن : ث = ٦,٦٧ × ١٠ $^{-١١}$ نيوتن . م^{٢} / كجم^{٢}

[١] اختر الاجابة الصحيحة :

كوكب لديه قمران متساويا الكتلة، القمر الأول فى مدار دائرى نصف قطره ن، القمر الثانى فى مدار دائرى نصف قطره ٢ن. إن مقدار قوة الجاذبية التى يوثر بها الكوكب على القمر الثانى هى:

(أ) أكبر أربع مرات من القوة الموثرة على القمر الأول.
(ب) أكبر مرتين من القوة الموثرة على القمر الأول.
(ج) تساوى القوة المؤثرة على القمر الأول.
(د) نصف القوة المؤثرة على القمر الأول.
(هـ) ربع القوة المؤثرة على القمر الأول.

[٢] فى الشكل المقابل:



إذا كان البعد بين مركزى كرتين ٢م وكانت كتلة إحداهما ٠,٨ كجم وكتلة الأخرى ٠,٦ كجم فما قوة التجاذب بينهما؟

[٣] كرتان متماثلتان كتلة كل منهما ٦,٨ كجم والبعد بين مركزيهما ٢١,٨ سم ما قوة التجاذب بينهما؟

[٤] احسب قوة التجاذب بين جسمين كتلتيهما ١٠ كجم ، ١٥ كجم والمسافة بينهما ٢ أمتار.

[٥] قمر صناعى كتلته ٢٠٠٠ كجم يدور على ارتفاع ٤٤٠ كم من سطح الأرض التى كتلتها ٦ × ١٠^٢٤ كجم. أوجد قوة جذب الأرض للقمر علمًا بأن نصف قطر الأرض ٦٣٦٠ كم.

[٦] إذا كانت عجلة الجاذبية الأرضية (ى) هى ١٠ م / ث^٢ ونصف قطر الأرض يساوى ٦,٣٦ × ١٠^٦ م. احسب كتلة الأرض.

[٧] احسب قوة التجاذب المتبادلة بين الشمس والأرض إذا علمت أن الأرض تسير فى مدار شبه دائرى حول الشمس وأن كتلة الأرض تساوى ٦ × ١٠^٢٤ كجم وكتلة الشمس تساوى ٩ × ١٠^٣١ كجم والمسافة بينهما تساوى ١,٥ × ١٠^١١ متر.

[٨] إذا علمت أن كتلة الأرض تساوى ٥,٩٧ × ١٠^٢٤ ونصف قطرها ٦,٣٤ × ١٠^٦ م وكتلة القمر تساوى ٧,٣٦ × ١٠^٢٢ كجم فأوجد طول نصف قطر القمر إذا كانت الجاذبية على سطح الأرض ستة أمثالها على سطح القمر.

[٩] إذا علمت أن كتلة الأرض ٦,٠٦ × ١٠^٢٤ ونصف قطرها ٦,٣٦ × ١٠^٦ م فأوجد شدة مجال الجاذبية الأرضية.

[١٠] كوكب كتلته مساوية ثلاث مرات كتلة الأرض وقطره يساوى ثلاث مرات قدر قطر الأرض احسب النسبة بين عجلة الجاذبية على سطح هذا الكوكب وسطح الأرض.

[١١] أوجد قوة الجذب العام بين كوكبين كتلة الأول ١٠^٢١ × ٢ طن وكتلة الثاني = ١٠^٢٥ × ٤ طن والمسافة بينهما ١٠^٦ × ٢ كم.

[١٢] وضعت قطعة من الحديد على بعد ٥٠ سم من أخرى من النيكل كتلتها ٢٥ كجم فكانت قوى التجاذب بينهما ١٠^-٨ × ٦ فكم تكون كتلة الكرة الحديد.

مع تمنيات عاشق الرياضيات

بالتوفيق و النجاح الباهر

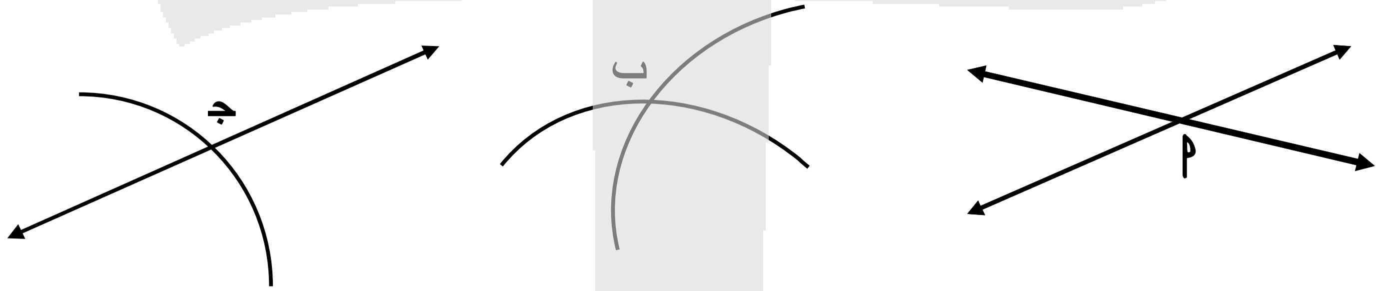
فهم + جهد + حل = نجاح

الوحدة الثالثة : الهندسة و القياس

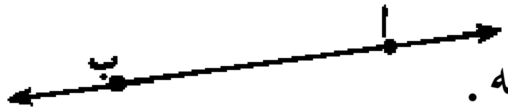
المستقيمات و المستويات فى الفراغ

تذكر أن :

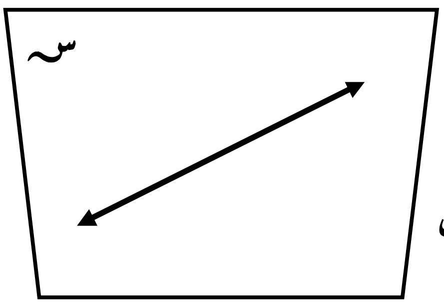
١) **النقطة** هى مكان ناتج من تقاطع خطين مستقيمين أو منحنين أو مستقيم و منحنى .



٢) **الخط المستقيم** : مجموعة من النقط غير المنتهية ممتد من جهتية يتعين بنقطتين عليه .
و يقرأ مب المستقيم $\overleftrightarrow{\text{مب}}$



٣) **المستوى** : مجموعة من النقط غير المنتهية ينطبق علية المستقيم فى جميع حالاته و ممتد من جميع جهاته بلا نهاية و يتعين بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة.
و يقرأ بثلاث نقاط عليه على الاقل أو نرمز له بأحد الحروف الكبيرة س ، ص، .....



٤) **الفراغ (الفضاء)** : مجموعة من النقط غير المنتهية و يعتبر المجموعة الشاملة التى تحتوى على المستقيمات و المستويات و المجسمات .

*** مفاهيم و مسلمات :**

(١) أى نقطتين مختلفتين يمر بهما مستقيم وحيد .

(٢) كل ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة يمر بها مستوى وحيد .

(٣) إذا اشترك مستقيم و مستوى فى أكثر من نقطة فإن المستقيم يقع بأكمله فى المستوى .

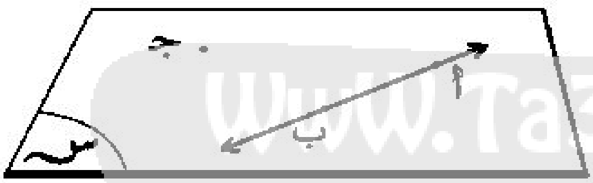
❋ تعيين المستوى:

يتعين المستوى بأي من الحالات الآتية:

(١)

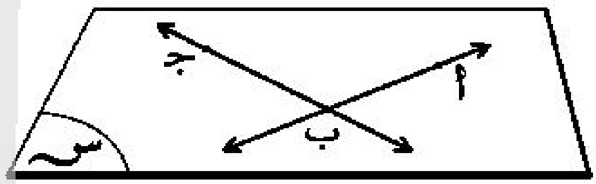
«ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة»

(٢)



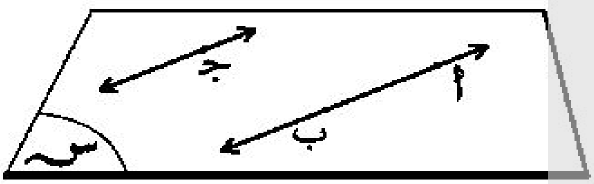
«مستقيم ونقطة خارجه»

(٣)



«مستقيمين متقاطعين»

(٤)



«مستقيمين متوازيين»

ملاحظات :

١ـ أى نقطة فى المستوى يمر بها عدد لا نهائى من المستقيمات .

٢ـ أى نقطة فى الفراغ يمر بها عدد لا نهائى من المستويات .

٣ـ أى مستقيم فى الفراغ يمر بها عدد لا نهائى من المستويات .

٤ـ كل ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة يمر بها مستو واحد و واحد فقط

مثال : تأمل الشكل الذى أمامك ثم أجب

١ـ كم عدد المستقيمات بالشكل ؟

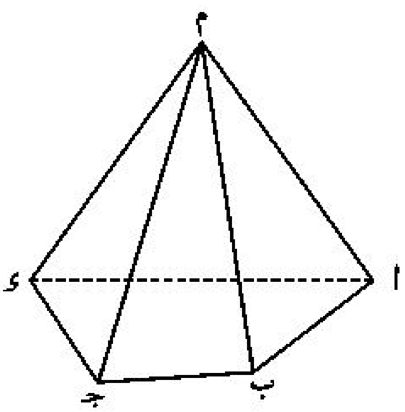
٢ـ اذكر المستقيمات التى تمر بنقطة م ، نقطة ب

٣ـ كم عدد المستويات بالشكل ؟

٤ـ اذكر ثلاثة مستويات تمر بالنقطة م

٥ـ اذكر المستقيمات التى تمر بنقطة م، ب معا

٦ـ اذكر المستويات التى تمر بالنقطة م ، ب معا



الحل : ١- عدد المستقيمات بالشكل = ٩

٢- المستقيمات التى تمر بنقطة م هى $\overleftrightarrow{\text{م أ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{م جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{م د}}$

المستقيمات التى تمر بنقطة ب هى $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$

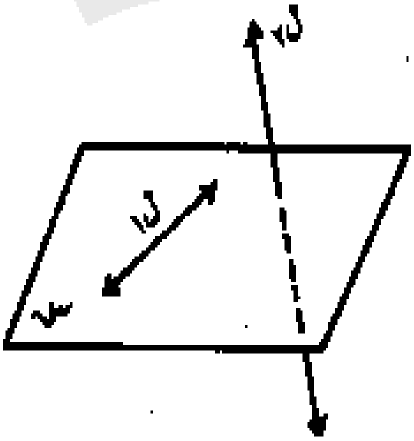
٣- عدد المستويات بالشكل = ٥

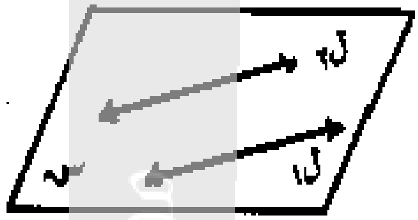
٤- ثلاثة مستويات تمر بالنقطة أ هى م أ د ، م أ ب ، أ ب جـ د

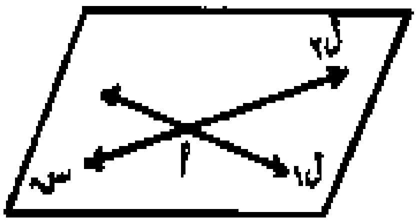
٥- المستقيمات التى تمر بنقطة أ ، ب معا هى $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

٦- المستويات تمر بالنقطة أ ، ب معا هى م أ ب ، أ ب جـ د

* العلاقة بين مستقيمين فى الفراغ :







الشكل (٣) الشكل (٢) الشكل (١)

توجد ثلاث حالات مختلفة للأوضاع النسبية لمستقيمين $ل_1$ ، $ل_2$ فى الفراغ هى :

(١) **المستقيمان متقاطعان :** و فى هذه الحالة يمكن أن يحتويهما مستوى واحد .

فى الشكل (١) : $ل_1 \cap ل_2 = \{أ\}$ ، $ل_1$ ، $ل_2$ يقعان فى مستوى واحد

(٢) **المستقيمان متوازيان :** و فى هذه الحالة يمكن أن يحتويهما مستوى واحد .

فى الشكل (٢) : $ل_1 \cap ل_2 = \emptyset$ ، $ل_1$ ، $ل_2$ يقعان فى مستوى واحد

(٣) **المستقيمان متخالفان :** وفى هذه الحالة لا يمكن أن يحتويهما مستوى واحد .

فى الشكل (٣) : $ل_1 \cap ل_2 = \emptyset$ ، $ل_1$ جزء من س ويقال أنهما متخالفان أو غير مستويين

ملاحظة :

١- إذا كان $ل_1 \cap ل_2 = \emptyset$ و يمكن أن يحتويهما مستوى واحد فإن : $ل_1 // ل_2$

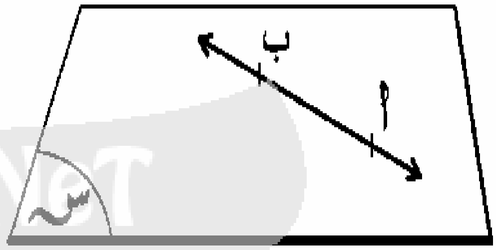
٢- إذا كان $ل_1 \cap ل_2 = \emptyset$ ولا يمكن أن يحتويهما مستوى واحد فإن : $ل_1$ ، $ل_2$ متخالفان

٣- المستقيمان الموزيان لثالث فى الفراغ متوازيان

٤- أى مستقيمان فى الفراغ إما أن يكونا مستويين معا فى مستوى واحد (متوازيان أو متقاطعين) أو غيرمستويين معا لا يقعان فى مستوى واحد (متخالفين)

* العلاقة بين مستقيم و مستوى فى الفراغ :

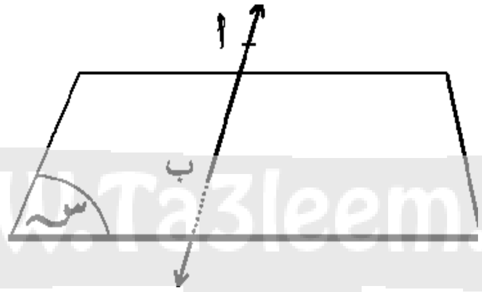
للمستقيم و المستوى فى الفراغ ثلاث أوضاع هى :



«المستقيم يقع بأكمله داخل المستوى»

س ∩ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ = $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ⊂ س

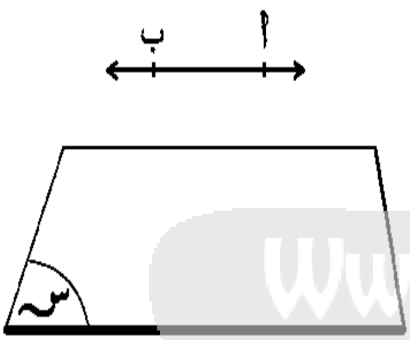
[المستقيم محتوى فى المستوى]



«المستقيم يقطع المستوى في نقطة»

س ∩ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ = {ب}

[المستقيم قاطع للمستوى]



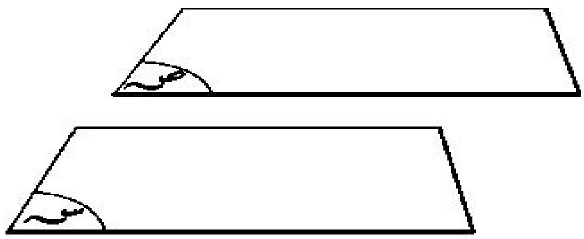
«المستقيم يوازي المستوى»

س ∩ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ = ∅ أي $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // س

[المستقيم مواز للمستوى]

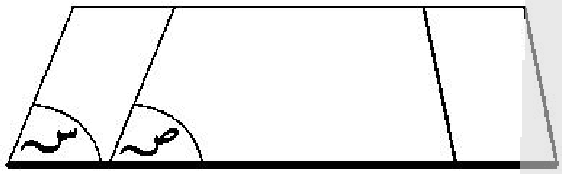
* الاوضاع النسبية لمستويين فى الفراغ :

يوجد لمستويين مختلفين ثلاثة أوضاع فى الفراغ هى :



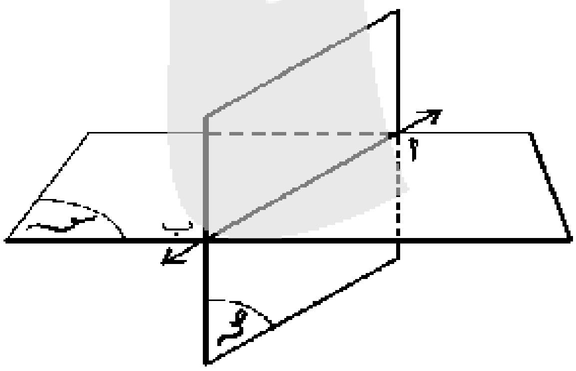
«المستويان متوازيان»

س ∩ ص = ∅ أي س // ص



«المستويان متطابقان»

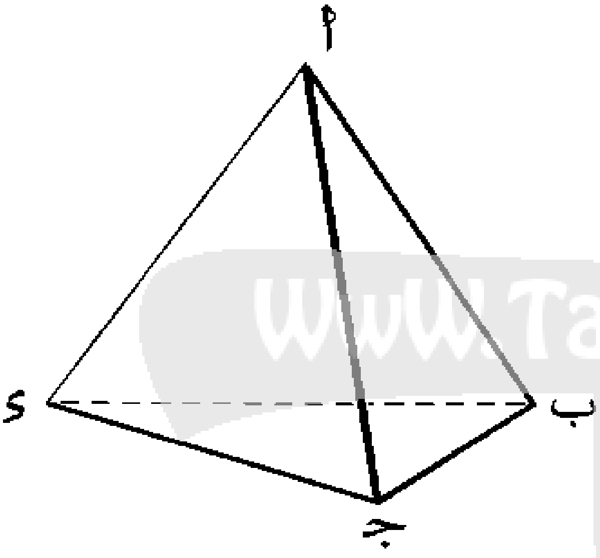
س = ص كما يمكننا القول أن س // ص



«المستويان متقاطعان»

س ∩ ص = $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

اعداد الاستاذ / خالد المنفلوطى معلم خبير رياضيات ت/ ٠١١٥٤٨٠٢٨١١



مثال: في الشكل المقابل: أ ∉ المستوى ب جـ ء

أولاً: أكمل ما يأتي

أ) $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ∩ المستوى ب جـ ء = {ء}

ب) $\overleftrightarrow{\text{ءجـ}}$ ∩ المستوى أءب = {ء}

جـ) $\overleftrightarrow{\text{ءب}}$ ∩ المستوى أءجـ = {ء}

ء) المستوى ب جـ ء ∩ المستوى أءب = $\overleftrightarrow{\text{بء}}$

هـ) المستوى ب جـ ء ∩ المستوى أءجـ = $\overleftrightarrow{\text{جـء}}$

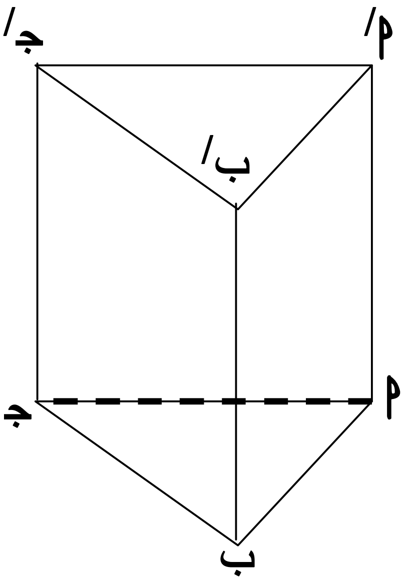
و) المستوى أءب ∩ المستوى أءجـ = $\overleftrightarrow{\text{أء}}$

ز) المستوى أءب ∩ المستوى أءجـ ∩ المستوى ب جـ ء = {ء}

ثانيًا: أذكر ثلاثة أزواج من المستقيمات المتخالفة.

($\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـء}}$) ، ($\overleftrightarrow{\text{أجـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{بء}}$) ، ($\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{بجـ}}$)

مثال : تأمل الشكل المقابل ثم أكمل ما يأتى :



(أ) المستوى أ ب ب/ أ/ ∩ المستوى ب جـ جـ/ ب/ = $\overleftrightarrow{\text{ب ب/}}$

(ب) المستوى أ ب جـ ∩ المستوى أ/ ب/ جـ/ = ∅

(جـ) $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{أ/ جـ/}}$ **= ∅**

(د) $\overleftrightarrow{\text{ب ب/}}$ **∩ المستوى أ ب جـ = { ب }**

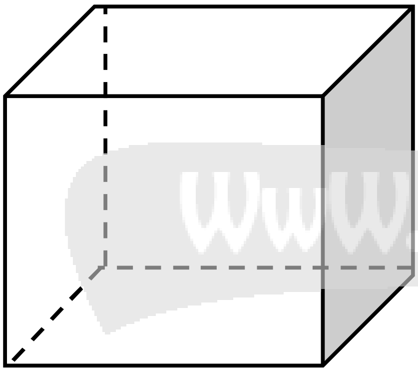
(هـ) $\overleftrightarrow{\text{ب ب/}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ **= ∅**

(ط) المستوى أ/ أ ب ب/ ∩ المستوى أ ب جـ = $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

(و) المستوى أ ب جـ ∩ المستوى أ جـ جـ/ أ/ ∩ المستوى أ ب ب/ أ/ = { أ }

بعض الملاحظات الهامة:

تأمّل حجرة الدراسة ولاحظ الآتي:



(١) جميع المستقيمات الرأسية متوازية فيما بينها.

(٢) جميع المستويات الأفقية متوازية فيما بينها.

(٣) ليس من الضروري أن تتوازى المستقيمات الأفقية.

(٤) ليس من الضروري أن تتوازى المستويات الرأسية.

(٥) المستقيمان المتوازيان أو المتقاطعان يجمعهما مستوى واحد.

تمارين على المستقيمات و المستويات

[١] أكمل ما يأتى :

١) إذا كان المستقيم ل // المستوى س فإن ل $\cap$ س = ...

٢) إذا كان المستقيم ل $\subset$ المستوى س فإن ل $\cap$ س = ...

٣) إذا كان المستقيم $ل_1$ // المستقيم $ل_2$ فإن $ل_1 \cap ل_2$ = ...

٤) إذا كان س ، ص مستويان حيث س $\cap$ ص = $\varnothing$ فإن س ..... ص

٥) المستقيمان المتخالفان هما مستقيمان ليسا .... أو ....

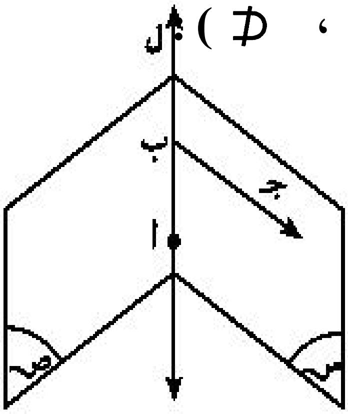
[٢] اذكر عدد المستويات التى تمر بكل من :

أ) نقطة واحدة معلومة ب) نقطتين مختلفتين .

جـ) ثلاث نقط على استقامة واحدة د) ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة

هـ) أربع نقط ليست فى مستوى واحد و) ثلاث نقط ليست فى مستوى واحد

[٣] تأمل الشكل المقابل ثم أكمل باستخدام أحد الرموز ($\in$ ، $\notin$ ، $\subset$ ، $\not\subset$) :



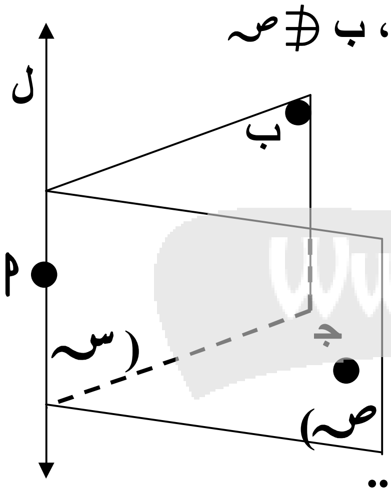
أ) ل .... س ب) ا .... س

جـ) جـ .... ص ى) ب جـ .... ص

[٤] فى الشكل المقابل :

س ، ص مستويان متقاطعان فى المستقيم ل ، أ ∈ ل ، ب ∈ س ، ب ∉ ص

جـ ∈ ص ، جـ ∉ س أكمل ما يأتى :



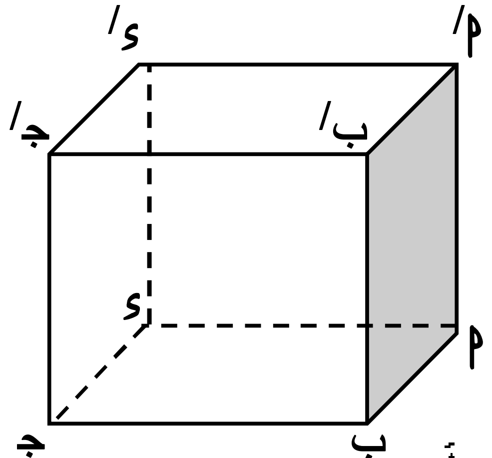
١) المستوى س ∩ المستوى أ ب جـ = ...

٢) المستوى ص ∩ المستوى أ ب جـ = ...

٣) المستوى س ∩ المستوى أ ب جـ = ...

٤) المستوى س ∩ المستوى ص ∩ المستوى أ ب جـ = ...

[٥] تأمل الشكل المقابل ثم أكمل مايأتى:



(أ) المستوى أ ب جـ ء // المستوى ______

(ب) المستوى ب جـ جـَ بَ // المستوى ______

(جـ) المستوى أ ب بَ أَ ∩ المستوى أ ب جـ ء = ______

(د) المستوى أ ب بَ أَ ∩ المستوى ء جـ جـَ ءَ = ______

(هـ) المستوى ء جـ جـَ ءَ ∩ المستوى أ ب جـ ء ∩ المستوى أ ء ءَ أَ = ____

[٦] ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة و علامة (✗) أمام العبارات الخاطئة فيما يلي بفرض أن $ل_١$ ، $ل_٢$ مستقيمان، س،ص مستويان:

(أ) إذا كان $ل_١ \cap ل_٢ = \phi$ فإن $ل_١ // ل_٢$ أو $ل_١$ ، $ل_٢$ متخالفان

(ب) إذا كان $ل_١ \cap س = \phi$ فإن $ل_١ // س$ (جـ) إذا كان $ل_٢ \cap س = ل_٢$ فإن $ل_٢ \subset س$

(د) إذا كان $ل_٢ \subset ص$ فإن $ل_٢ \cap ص = \phi$ (هـ) إذا كان $س \cap ص = \phi$ فإن $س // ص$

(و) إذا كان س = ص فإن س ، ص منطبقان

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتى :

١) أى أربع نقط ليست فى مستوى واحد تعين لنا :
أ) مستويان ب) ثلاث مستويات جـ) اربع مستويات د) لا تعين مستو

٢) إذا اشترك مستويان فى نقطتين ٢، ب فإنهما :
أ) متطابقان ب) متقاطعان فى $\overleftrightarrow{ⲁب}$
جـ) متقاطعان فى مستقيم مواز $\overleftrightarrow{ⲁب}$ د) يشتركان فى نقطة ثالثة لا تقع على $\overleftrightarrow{ⲁب}$

٣) $\overleftrightarrow{ⲁب}$ توازى المستوى س إذا كان :
أ) ⲁ ب ∩ س = ∅ ب) ⲁب ∩ س = ∅
جـ) ⲁ، ب على بعدين مختلفين من المستوى س
د) ⲁ، ب تقعان فى جهتين مختلفتين من س

[٤] المستقيمان $ل_١$ ، $ل_٢$ متوازيان إذا كانا :
أ) $ل_١ \cap ل_٢ = \emptyset$ ب) $ل_١ \cup ل_٢$ يقعان فى مستوى واحد
جـ) إذا كان $ل_١ \cap ل_٢ = \emptyset$ ، $ل_١$ ، $ل_٢$ يجمعهما مستوى واحد
د) إذا كان $ل_١ \cap ل_٢ = \emptyset$ ، $ل_١$ ، $ل_٢$ لا يجمعهما مستوى واحد

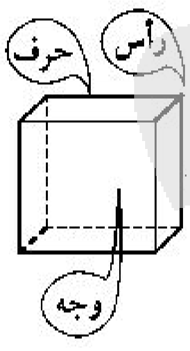
[٥] يكون المستقيمان متخالفين إذا كانا :
أ) غير متوازيين . ب) غير منطبقين .
جـ) لا يجمعهما مستوى واحد د) يقعان فى مستوى واحد

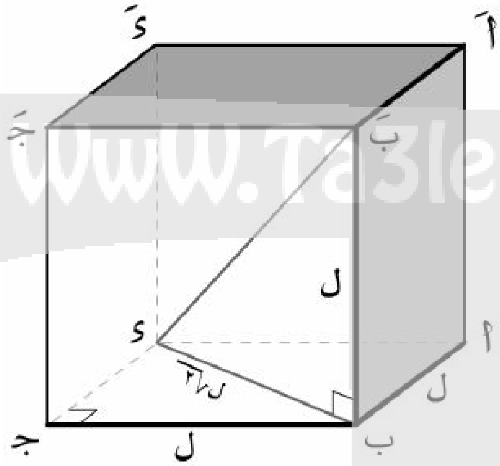
[٦] سؤال للتفكير :
بين بالرسم أنه إذا تقاطعت ثلاثة مستويات مثنى مثنى فإن مستقيمات تقاطعها إما أن تتوازى أو تتلاقى فى نقطة واحدة .

كل الأمانى ممكنة
طالما الحلم قائم
بالتوفيق و النجاح الباهر
عاشق الرياضيات المنفلوطى

الهـــــرم و المخروط

تذكر أن :



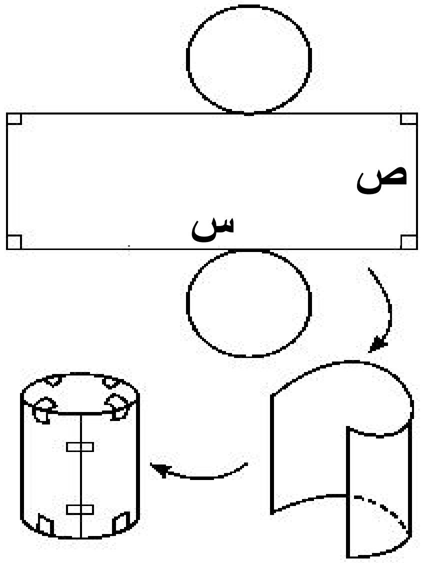


١) **المكعب** : هو متوازى مستطيلات تساوت أبعاده الثلاثة ، طول كل منها ل

* كل وجة من أوجهه السته مربع
* مساحته الجانبية = ٤ $ل^{٢}$
* مساحته الكلية = ٦ $ل^{٢}$
* حجمـه = $ل^{٣}$ * طول قطـره = ل $\sqrt{٣}$

٢) **شبكة المجسم** : هو الشكل الذى يمكن طيه لتكوين المجسم .

و يمكن رسم أكثر من شبكة للمجسم .

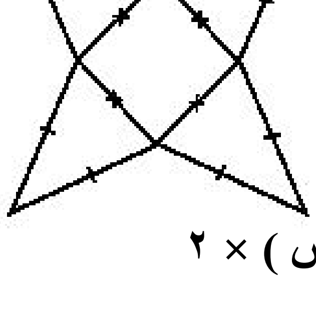


٣) **الاسطوانة الدائرية القائمة** :

الشكل المقابل شبكة اسطوانة دائرية قائمة .
أ – قاعدتا الاسطوانة متطابقتين و كل منهما على شكل دائرة

ب- السطح الجانبى للاسطوانة قبل طيه هو مستطيل بعداه س ، ص ، ارتفاع الاسطوانة ص وحدة طول

٤) **المضلع المنتظم** هو مضلع أضلاعه متساوية الطول و زواياه متساوية القياس مركزه هو مركز الدائرة المرسومة داخله أو خارجه



٥) المجسم الذى يمكن تكوينه من طى الشبكة المقابلة هو هرم رباعى

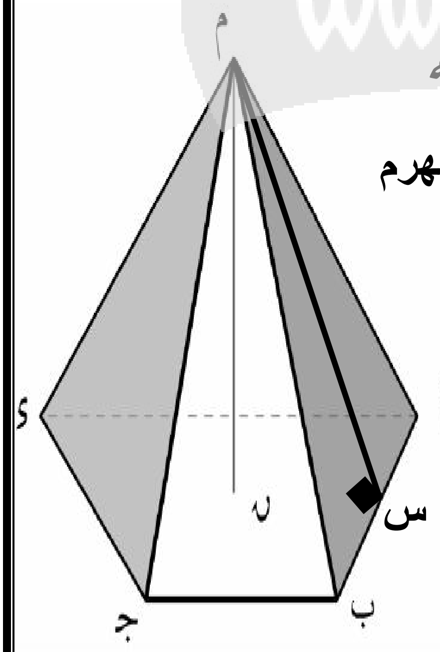
٦) مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الارتفاع المناظر

٧) مساحة المربع = مربع طول ضلعه = $\frac{١}{٢}$ مربع طول ضلعه
محيطه = ٤ × طول ضلعه

٨) مساحة المستطيل = الطول × العرض ، محيطه = (الطول + العرض) × ٢

الهـــــرم

هو مجسم له قاعدة واحدة و جميع أوجهة الأخرى مثلثات تشترك فى رأس واحدة و يسمى حسب عدد أضلاع مضلع قاعدته ثلاثى أو رباعى أو ٠٠٠٠ .



*** تسمى النقطة م رأس الهرم و يقرأ الهرم و يكتب ابتداء من رأسه**

*** تسمى القطع $\overline{\text{م أ}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$ ، $\overline{\text{م ج}}$ ، $\overline{\text{م ى}}$ ، ٠٠٠٠ الأحرف الجانبية للهرم**

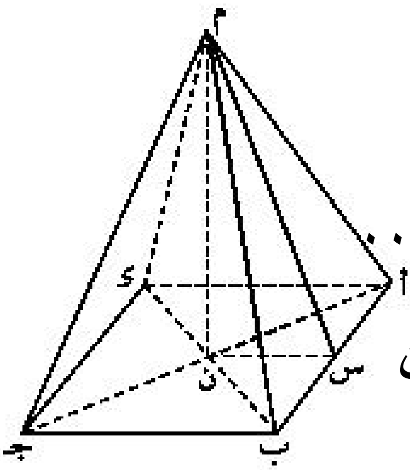
*** كل وجه من أوجه الهرم الجانبية عبارة عن مثلث .**

*** ارتفاع الهرم هو بعد رأس الهرم عن مستوى قاعدته . مثل $\overline{\text{م ن}}$**

*** ارتفاع الوجة الجانبى هو بعد رأس الهرم عن أحد أضلاع قاعدته مثل $\overline{\text{م س}}$**

الهرم المنتظم

هو الهرم الذى قاعدته مضلع منتظم مركزه موقع العمود المرسوم من رأس الهرم عليها



*** <u>خواص الهرم المنتظم</u> :**

١ـ أحرفه الجانبية متساوية الطول .

٢ـ أوجهه الجانبية سطوح مثلثات متساوية الساقين و متطابقة

٣ـ الارتفاعات الجانبية متساوية فى الطول .

٤ـ قاعدة الهرم مضلع منتظم (مثلث متساوى الاضلاع ، مربع ، ٠٠

<u>ملحوظة هامة</u> :

المستقيم العمودى من رأس الهرم على مستوى قاعدته يكون عموديا على أى مستقيم فيها .

فى الشكل المقابل : إذا كان $\overline{\text{م ن}}$ عمودى على مستوى القاعدة فإن :

$\overline{\text{م ن}} \perp \overline{\text{أ ج}}$ ، $\overline{\text{م ن}} \perp \overline{\text{ب ى}}$ ، $\overline{\text{م ن}} \perp \overline{\text{ن س}}$ ، و يكون المثلث م س ن قائم الزاوية فى ن

ملحوظة : مركز المثلث المتساوى الاضلاع هو نقطة تقاطع متوسطاته. و مركز المربع هو نقطة تقاطع قطريه .

*** الهرم القائم** يكون الهرم قائما إذا و فقط كان موقع العمود المرسوم من رأس الهرم على قاعدته يمر بمركزها الهندسي .

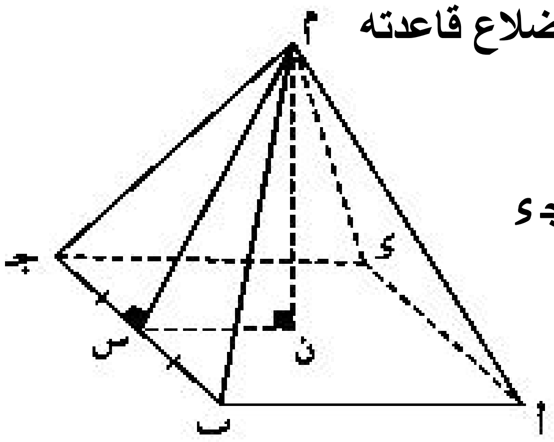
ملاحظات :

١- الهرم المنتظم قائم لان موقع العمود المرسوم من رأسه على قاعدته يمر بمركزها الهندسي

٢- و إذا تزايد عدد أضلاع مضلع قاعدة هرم منتظم و اقترب إلى عدد غير منته تصبح القاعدة دائرة و يصبح السطح الجانبي مخروطى و يكون المجسم مخروط دائرى قائم

مثال: م ٮب جـ ء هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعته ٮب جـ ء يساوى ١٠ سم وارتفاعه ١٢ سم أوجد ارتفاعه الجانبى و ارسم إحدى شبكاته.

الحل :



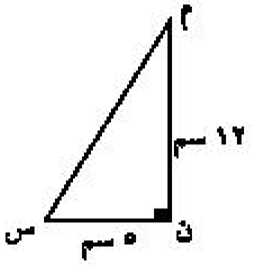
م ن = ١٢ سم ارتفاع الهرم ، ٮب = ١٠ سم أحد أضلاع قاعدته

، ن نقطة تقاطع قطرى المربع ٮب جـ ء

$\because$ الهرم رباعى منتظم $\therefore$ $\overline{\text{م ن}} \perp$ المستوى ٮب جـ ء

بفرض س منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ $\therefore$ $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$

و يكون م س ارتفاع جانبى للهرم المنتظم .



فى Δ ء ب جـ: ن منتصف $\overline{\text{ء ب}}$ ، س منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$

$\therefore$ ن س $= \frac{١}{٢}$ ء جـ $= \frac{١}{٢} \times ١٠ = ٥$ سم

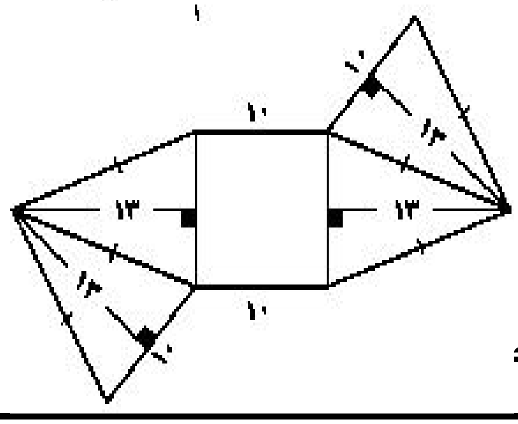
$\because$ $\overline{\text{م ن}} \perp$ المستوى ٮب جـ ء

$\therefore$ Δ م ن س قائم الزاوية فى ن

$\therefore$ (م س)^٢ = (م ن)^٢ + (ن س)^٢

$= (١٢)^٢ + (٥)^٢ = ١٦٩$

$\therefore$ الارتفاع الجانبى للهرم = ١٣ سم



و الشكل المقابل يوضح إحدى شبكات الهرم م ٮب جـ

مثال : م أب جـ ء هرم رباعى منتظم ارتفاعه ٢٠ سم ، و ارتفاعه الجانبى ٢٥ سم

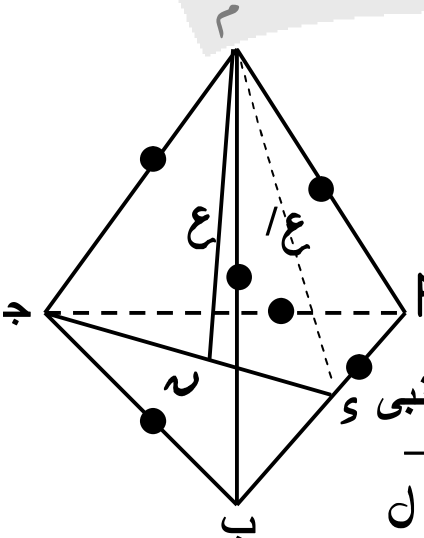
أوجد طول ضلع الهرم ، و ارسم شكلا يوضح إحدى شبكاته.

الحل:

بنفس الطريقة السابقة نقوم بالحل

* **قاعدة أويلر :** عدد الأوجه + عدد الرؤوس = عدد الأحرف + ٢

* **الهرم الثلاثى المنتظم :** هو هرم قائم أوجهه الاربعة سطوح مثلثات متساوية الأضلاع .



* **خواصه :**

١ـ يمكن إعتبار أى وجه من أوجهه قاعدة

٢ـ الارتفاعات الجانبية متساوية فى الطول

٣ـ أطوال أحرفه الستة متساوية فى الطول

فى الشكل المقابل :

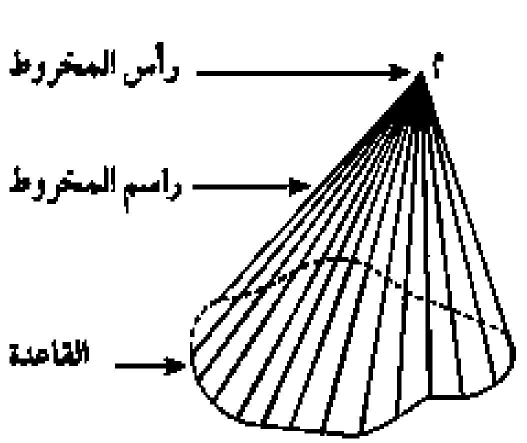
هرم ثلاثى منتظم طول حرفه = ل ، ارتفاعه ع ، ع/ ارتفاعه الجانبى

جـ ء = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ل ، ء ن = $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ل ، جـ ن = $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ل ، م ء = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ل

، ارتفاعه (ع) = م ن = $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ل ، ارتفاعه الجانبى ع/ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ل

[∴ ٣ ع^{٢} = ٢ ل^{٢} ، ٤ ع/^{٢} = ٣ ل^{٢}]

المخــروط

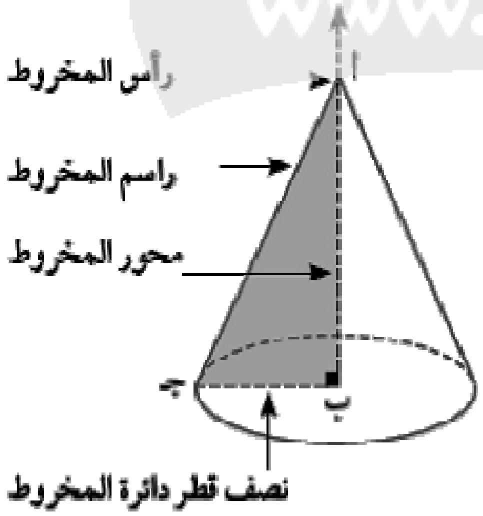


هو مجسم له قاعدة واحدة على شكل منحنى مغلق و رأس واحدة و يتكون سطحه الجانبى من جميع نقط القطع المستقيمة المرسومة من رأسه إلى منحنى قاعدته و التى يعرف كل منها براسم المخروط .

المخروط الدائرى القائم

هو الجسم الذى ينشأ من دوران مثلث قائم الزاوية دورة كاملة حول أحد ضلعى القائمة كمحور

* خواص المخروط الدائرى القائم :

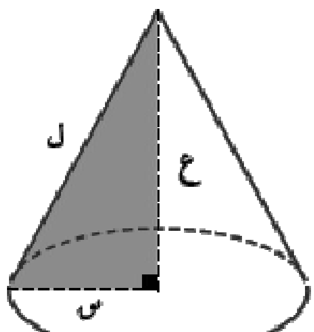


يوضح الشكل المقابل مخروط دائرى قائم ناشئ من دوران المثلث القائم الزاوية فى ب دورة كاملة حول $\overleftrightarrow{أب}$ كمحور فنجد:

١- $\overline{أجـ}$ راسم المخروط ، أ رأس المخروط ، النقطة جـ ترسم أثناء الدوران دائرة مركزها نقطة ب وطول نصف قطرها يساوى طول $\overline{بجـ}$ وسطح الدائرة هو قاعدة المخروط.

٢- $\overleftrightarrow{أب}$ محور المخروط عمودى على مستوى القاعدة ، ارتفاع المخروط يساوى طول $\overline{أب}$.

مثال : أوجد بدلالة π محيط و مساحة قاعدة مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٢٤ سم و طول راسمه ٢٦ سم .



الحل : بفرض طول الراسم = ل ، ارتفاع المخروط = ع ،

طول نصف قطر دائرة المخروط = نق

$\because$ نق^٢ = ل^٢ − ع^٢ $\therefore$ نق^٢ = $(٢٦)^٢ - (٢٤)^٢ = ١٠٠$

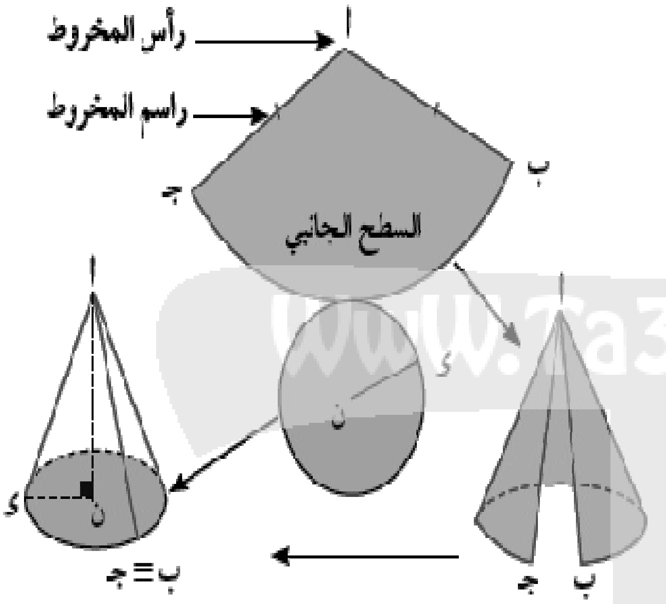
$\therefore$ نق = ١٠ سم

محيط قاعدة المخروط القائم = ٢ π نق = ٢ π × ١٠ = ٢٠ π

مساحة القاعدة = π نق^٢ = π × $(٢٤)^٢$ = ٥٧٦ π سم^٢

فكر : أب‌جـ مثلث ، أب = أجـ ، ى منتصف $\overline{بجـ}$. إذا دار المثلث أب‌جـ نصف دورة كاملة حول $\overleftrightarrow{أى}$ كمحور فإنه ينشأ مخروط دائرى قائم قاعدته دائرة طول نصف قطرها $\overline{بى}$ ارتفاعه $\overline{أى}$ ، طول راسمه $\overline{أب}$

تذكر أن : مساحة القطاع الدائرى = $\frac{١}{٢}$ ل نق حيث ل طول قوسه ، نق نصف قطر دائرته



* **شبكة المخروط القائم :**

يمكن طى شبكة المخروط القائم لتكوين عبوات مخروطية الشكل .

فى الشكل المقابل :

١- ؁ب = ؁جـ = ل (طول راسم المخروط)

٢- القطاع ؁ب جـ يمثل السطح الجانبي للمخروط

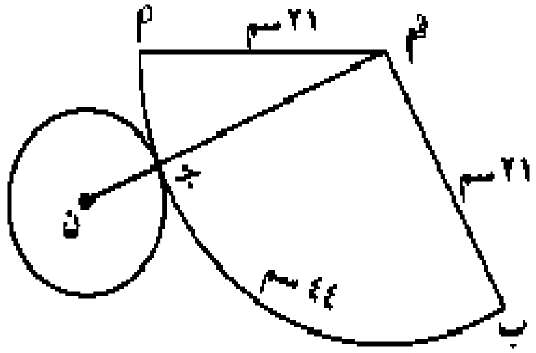
، طول $\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$ = ٢ π نق

حيث نق طول نصف قطر قاعدة المخروط

٣- ارتفاع المخروط = طول $\overline{\text{؁ن}}$

مثال : الشكل المقابل يوضح شبكة مخروط قائم مستعينا بالبيانات المعطاه . أوجد إرتفاعه.

الحل :

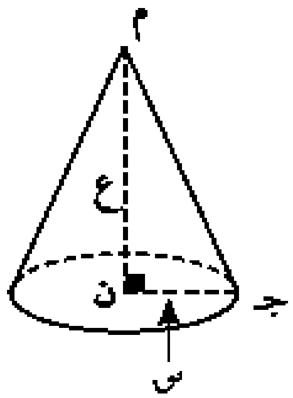


من شبكة المخروط نلاحظ أن :

طول راسم المخروط = طول $\overline{\text{م ؁}}$ = ٢١ سم

محيط قاعدة المخروط = طول $\overset{\frown}{\text{؁ب}}$ = ٤٤ سم

طول نصف قطر قاعدة المخروط = طول $\overline{\text{جـ ن}}$ = نق



عند طى شبكة المخروط نحصل على الشكل المقابل

فيكون ارتفاع المخروط = طول $\overline{\text{م ن}}$ = ع

∵ محيط قاعدة المخروط = ٤٤ سم ∴ ٢ π نق = ٤٤

∴ ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × نق = ٤٤ ∴ نق = ٧ سم

∵ ع^{٢} = ل^{٢} − نق^{٢} ∴ ع^{٢} = (٢١)^{٢} − (٧)^{٢} = ٣٩٢ ∴ ع = ١٤ $\sqrt{٢}$ سم

∴ ارتفاع المخروط الدائرى القائم = ١٤ $\sqrt{٢}$ سم

تمارين على مفهوم الهرم و المخروط

[١] فى الهرم الخماسى المنتظم:

(أ) ما عدد أوجهه الجانبية (ب) ما عدد الأوجه

(ج) ما عدد أحرف الجانبية (د) ما عدد أحرفه

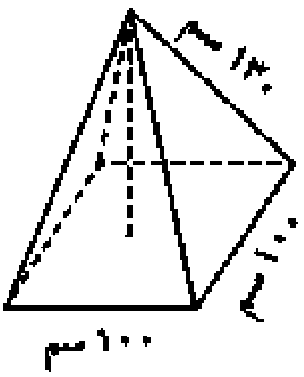
(هـ) للهرم رأس واحدة خلاف رؤوس القاعدة. ما عدد جميع رؤوس الهرم الخماسى؟

هل تحقق إجابتك علاقة أويلر لأى مجسم قاعدته منطقة مضلعه.

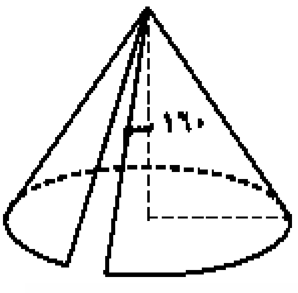
[٢] فى الهرم المنتظم ، رتب الأطوال التالية من الأصغر إلى الأكبر

(أ) طول الحرف الجانبى (ب) ارتفاع الهرم

(ج) الارتفاع الجانبى



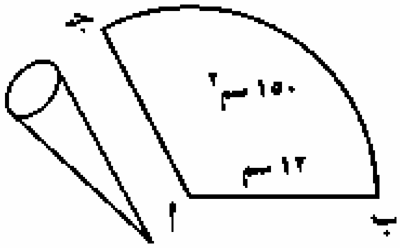
[٣] يوضح الشكل المقابل خزان مياه على شكل هرم رباعى منتظم مستعينًا بالبيانات المعطاه أوجد كل من ارتفاع الوجه الجانبى وارتفاع الخزان ثم ارسم شبكته.



[٤] خيمة على شكل مخروط دائرى قائم ارتفاعها ١٦٠سم ومحيط قاعدتها ٧٥٣,٦سم احسب طول راسم مخروط الخيمة.

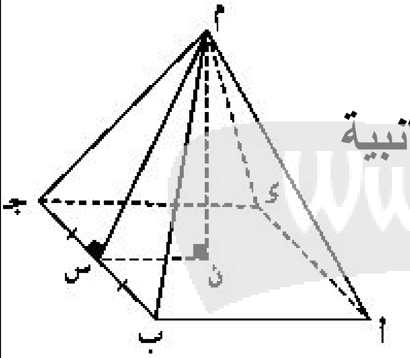
[٥] تغلف الألبان المثلجة في مخروط دائرى قائم بطي قطعة من الورق العازل للحرارة على شكل قطاع دائرى طول نصف قطر دائرته ١٢سم ومساحته ١٥٠سم^2 بحيث يتلامس نصفا قطرى دائرته $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$.

أوجد ارتفاع المخروط.



المساحة الجانبية و الكلية للهرم المنتظم القائم و المخروط الدائرى

[١] الهرم المنتظم القائم :

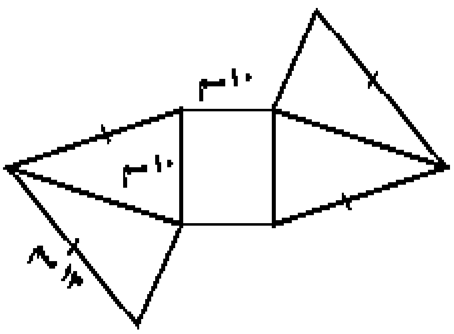


المساحة الجانبية للهرم القائم = مجموع مساحات أوجهه الجانبية

= $\frac{١}{٢}$ محيط قاعدته × ارتفاعه الجانبى

المساحة الكلية للهرم = مساحته الجانبية + مساحة قاعدته

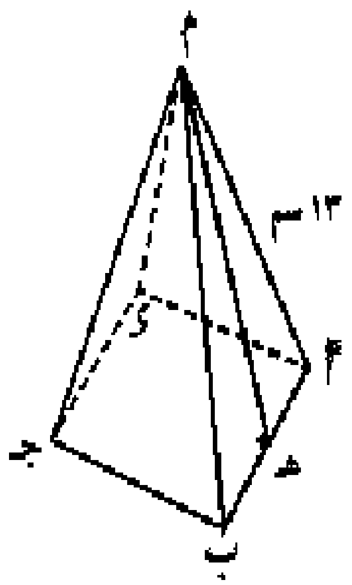
مثال : باستخدام الشبكة التى أمامك صف المجسم و أوجد مساحته الكلية .



الحل :

الشبكة لهرم رباعى منتظم.

قاعدته مربعة الشكل طول ضلعها ١٠سم ، طول حرفه الجانبى = ١٣سم.



∵ الوجه الجانبى م أ ب متساوى الساقين ، $\overline{\text{م هـ}}$ ارتفاع جانبى.

∴ هـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ أى أن أ هـ = ٥سم

فى △ م هـ أ القائم الزاوية فى هـ نجد أن $(\text{م هـ})^٢ = (\text{أم})^٢ - (\text{أهـ})^٢$

$(\text{م هـ})^٢ = (١٣)^٢ - (٥)^٢ = ١٤٤$

∴ م هـ = ١٢سم

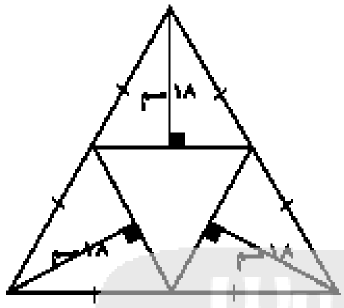
∵ المساحة الجانبية للهرم المنتظم = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

∴ المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ × (١٠ × ٤) × ١٢ = ٢٤٠ سم^٢

∵ مساحة قاعدة الهرم = $(١٠)^٢$ = ١٠٠سم^٢

∴ المساحة الكلية للهرم = ٢٤٠ + ١٠٠ = ٣٤٠سم^٢

مثال : باستخدام الشبكة التى أمامك صف المجسم وأوجد مساحته الكلية.



الحل :

المجسم هرم ثلاثى منتظم قائم

طول حرفه ل = $\sqrt{١٨^{٢} - ٩^{٢}} = ٩\sqrt{٣}$ سم

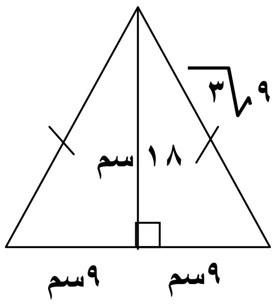
ارتفاعه الجانبى = ١٨ سم

محيط قاعدته (مثلث متساوى الاضلاع) = $٣ \times ٩\sqrt{٣} = ٢٧\sqrt{٣}$ سم

مساحة قاعدته = $\frac{١}{٢}$ القاعدة × الارتفاع = $\frac{١}{٢} \times ٩\sqrt{٣} \times ١٨ = ٨١\sqrt{٣}$ سم^{٢}

مساحة الهرم الجانبية = $\frac{١}{٢}$ محيط قاعدته × الارتفاع الجانبي

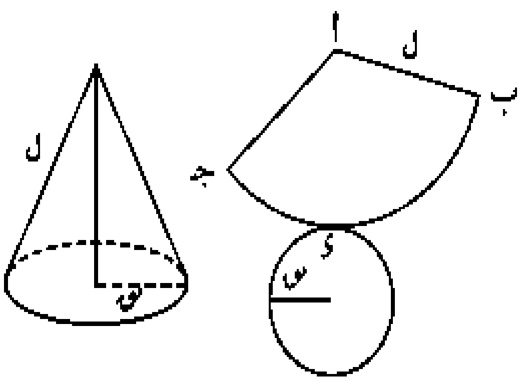
= $\frac{١}{٢} \times ٢٧\sqrt{٣} \times ١٨ = ٤٢٠,٩$ سم^{٢}



مساحته الكلية = مساحته الجانبية + مساحة قاعدته

= $٤٢٠,٩ + ٨١\sqrt{٣} = ٥٦١,٢$ سم^{٢}

[٢] المخروط :



بفرض ل طول راسمه ، نق طول نصف قطر دائرته.

المساحة الجانبية للمخروط القائم = π ل نق

المساحة الكلية للمخروط القائم = π ل نق + π نق^{٢}

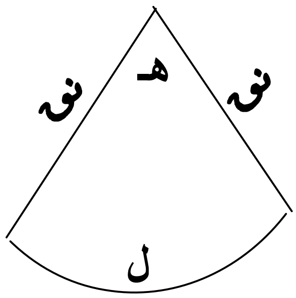
= π نق (ل + نق)

تذكر أن : فى القطاع الدائرى هـ^{ء} = $\frac{\text{ل}}{\text{نق}}$

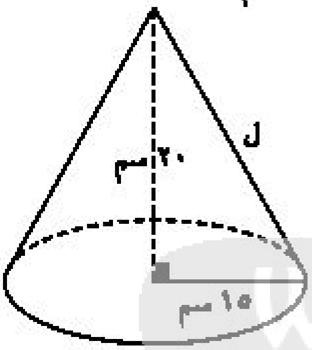
حيث هـ^{ء} زاوية القطاع بالدائرى ، ل طول قوسه ، نق طول نصف قطر دائرته

مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ ل نق = $\frac{١}{٢}$ هـ^{ء} نق^{٢}

محيط القطاع = ٢ نق + ل



مثال : أوجد المساحة الجانبية لمخروط قائم طول نصف قطر قاعدته ١٥سم ، وارتفاعه ٢٠سم.



الحل

لإيجاد طول راسم المخروط ل

∵ ل^{٢} = (٢٠)^{٢} + (١٥)^{٢} = ٦٢٥

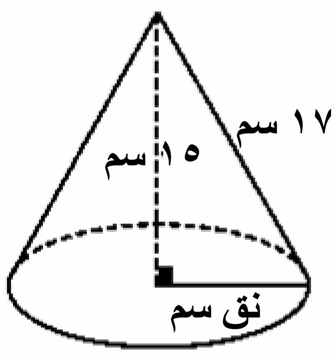
∴ ل = ٢٥سم

∵ المساحة الجانبية للمخروط القائم = π ل نق ، نق = ١٥سم

∴ المساحة الجانبية للمخروط القائم = ٢٥ × ١٥ π = ٣٧٥ π سم^{٢}

مثال: أوجد المساحة الكلية لمخروط قائم طول راسمه ١٧ سم و ارتفاعه ١٥ سم

الحل:



∵ نق^{٢} = (١٧)^{٢} – (١٥)^{٢} = ٦٤ ∴ نق = ٨ سم

∴ المساحة الجانبية = π ل نق = π × ١٧ × ٨ = ١٣٦ π سم^{٢}

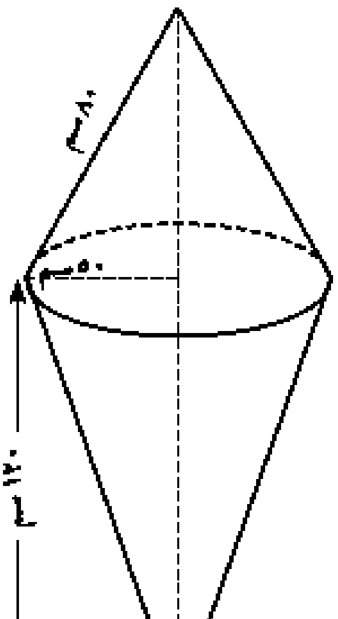
∴ المساحة الكلية = π نق (ل + نق) = ٨ π (١٧ + ٨)

= ٨ π × ١٥ = ١٢٠ π سم^{٢}

مثال : يوضح الشكل المقابل علامة ارشادية (شمندورة) لتحديد المجرى الملاحى وهى على هيئة مخروطان قائمان لهما قاعدة مشتركة.

أوجد تكاليف طلاؤه بمادة مقاومة لعوامل التعرية

، علمًا بأن تكاليف المتر المربع الواحد منها ٣٠٠ جنيهًا.



الحل

مساحة سطح العلامة الارشادية = المساحة الجانبية للمخروط الأول

+ المساحة الجانبية للمخروط الثانى.

المخروط الأول: ل = ٨٠سم ، نق = ٥٠سم

∴ المساحة الجانبية = ٥٠ × ٨٠π

= ٤٠٠٠π سم^{٢}

المخروط الثاني: ع = ١٢٠سم، نق = ٥٠ سم ∴ ل = $\sqrt{(١٢٠)^٢+(٥٠)^٢}$ = ١٣٠سم

∴ المساحة الجانبية = ٥٠ × ١٣٠π = ٦٥٠٠ π سم^٢

مساحة سطح العلامة الارشادية = (٤٠٠٠ + ٦٥٠٠)π = ١٠٥٠٠ π سم^٢

≃ ٣,٢٩٩ متر مربع

تكاليف الطلاء = ٣,٢٩٩ × ٣٠٠ = ٩٨٩,٧ جنيهاً

مثال : غطاء مصباح على شكل مخروط قائم محيط دائرته ٨٨سم وارتفاعه ٢٠سم، احسب مساحته لأقرب سنتيمتر مربع.

الحل :

بفرض نق نصف قطر دائرته ، ل طول الحرف الجانبى ، ع الارتفاع

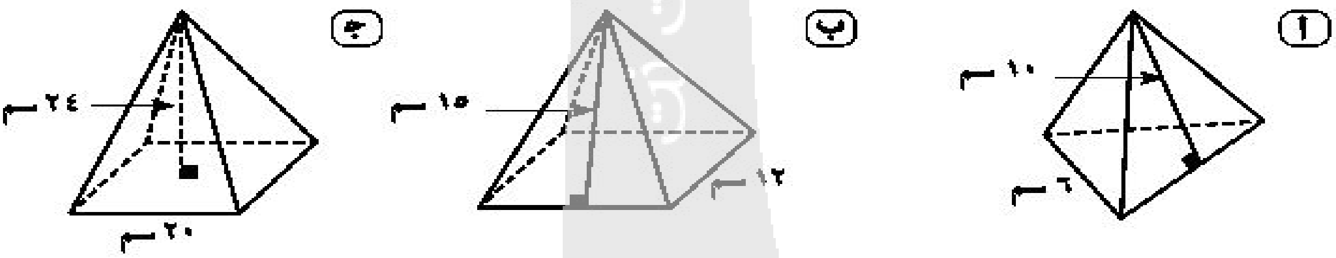
∵ محيط دائرته = ٨٨ ∴ ٢ π نق = ٨٨ ∴ نق = ١٤ سم

∵ ل^٢ = (٢٠)^٢ + (١٤)^٢ = ٥٩٦ ∴ ل = ٢٤,٤ سم

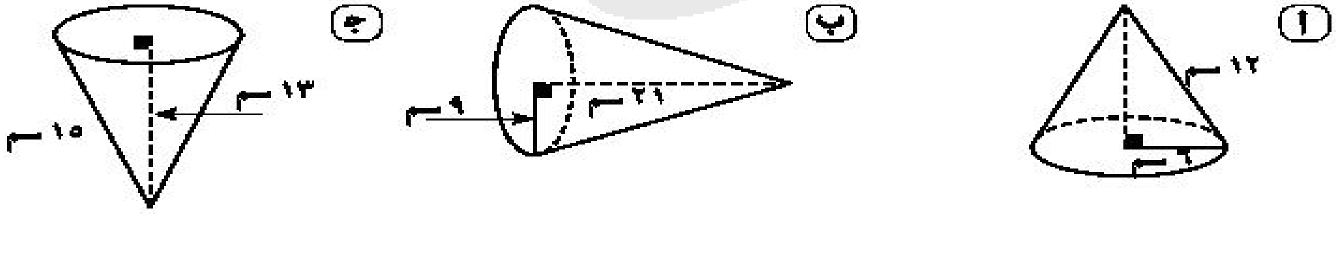
مساحة غطاء المصباح = π ل نق = π × ٢٤,٤ × ١٤ = ١٠٧٣,٢ سم^٢

تمارين على المساحات للهرم و المخروط

(١) أوجد المساحة الجانبية والمساحة الكلية لكل هرم منتظم حسب البيانات المعطاه



(٢) أوجد المساحة الجانبية والمساحة الكلية لكل مخروط القائم حسب البيانات المعطاه.

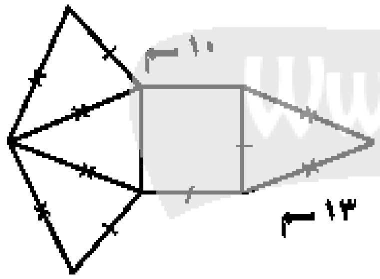


③ هرم سداسى منتظم طول ضلع قاعدته ١٢سم وارتفاعه الجانبى $١٠\sqrt{٣}$ سم. أوجد:

(أ) مساحته الجانبية

(ب) مساحته الكلية

④ تصنع عبوات منتجات أحد المصانع من الورق المقوى بطى شبكة المجسم المقابلة.



(أ) أوجد مساحة الورق المقوى المستخدم لإنتاج ١٠٠٠ عبوه .

(ب) إحسب تكاليف الورق المقوى المستخدم إذا كان تكلفة المتر المربع الواحد منه ١٥ جنيهًا.

⑤ طويت قطعة من الورق المقوى على شكل قطاع دائرى طول نصف قطر دائرته ٣٦سم وقياس زاويته ٢١٠° لتصنع مخروطًا دائريًا قائمًا له أكبر مساحة. أوجد ارتفاع المخروط.

(مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} هـ، نق طول نصف قطر دائرة القطاع ، هـ قياس زاويته بالراديان)

⑥ أوجد طول نصف قطر دائرة مخروط قائم، إذا كان طول راسمه ١٥سم، ومساحته الكلية ١٥٤π سم٢.

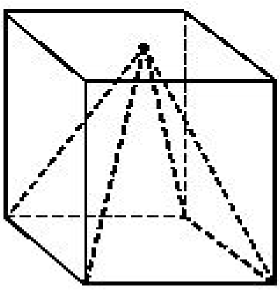
حجم الهرم والمخروط القائم

<u>تذكر أن</u> : ١- حجم المنشورالقائم = مساحة القاعدة × الارتفاع
قاعدته مثلث أو مربع أو شكل رباعى أو ٠٠٠٠٠

٢- حجم الاسطوانة القائمة = مساحة القاعدة × الارتفاع
قاعدتها دائرة طول نصف قطرها نق

٣- مساحة سطح المضلع المنتظم = $\frac{ن}{٤}$ س^{٢} ظتا $\frac{\pi}{ن}$

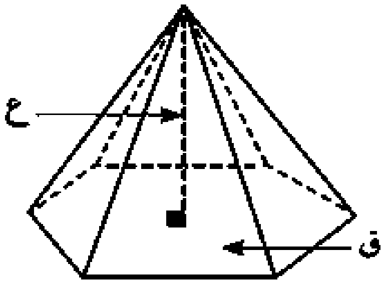
حيث ن عدد اضلاعه ، س طول ضلعه ، π = ١٨٠°



<u>العلاقة بين حجم الهرم و المنشور المشتركتان فى نفس القاعدة و الارتفاع :</u>

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ حجم المنشور = $\frac{١}{٣}$ مساحة قاعدته × ارتفاعه

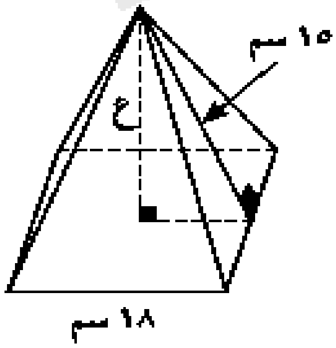
* حجم الهـــرم :



حجم الهرم = ثلث مساحة قاعدته × ارتفاعه = $\frac{١}{٣}$ ق × ع

حيث (ق) مساحة القاعدة ، (ع) ارتفاع الهرم

مثال : احسب حجم هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ١٨سم وارتفاعه الجانبى ١٥سم.

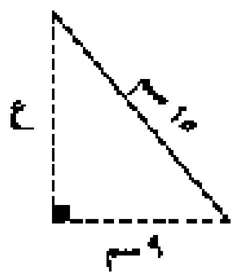


أولاً: حساب مساحة قاعدة الهرم (ق)

∵ الهرم رباعى منتظم ∴ قاعدته مربعة الشكل

مساحة قاعدة الهرم (ق) = ١٨ × ١٨ = ٣٢٤ سم^{٢}

ثانيًا: حساب ارتفاع الهرم (ع)



∵ ع^{٢} + (٩)^{٢} = (١٥)^{٢} فيثاغورث

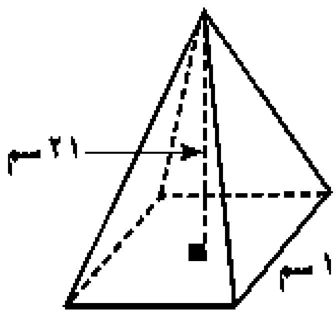
∴ ع^{٢} = (١٥)^{٢} - (٩)^{٢} = ١٤٤ ، ع = ١٢ سم

∵ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ ق × ع

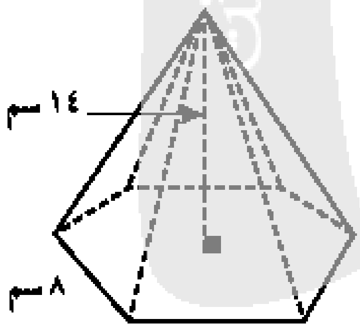
∴ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × ٣٢٤ × ١٢ = ١٢٩٦سم^{٣}

مثال : أوجد حجم الهرم المنتظم الموضح بالشكل مستخدمًا البيانات المعطاه.

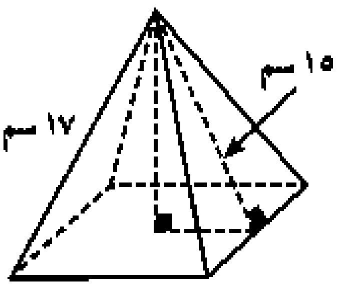
(أ)



(ب)



(جـ)



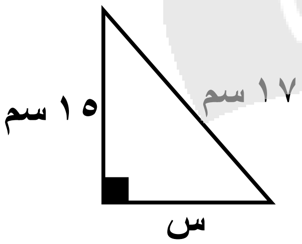
الحل : فى الشكل (أ) : مساحة القاعدة = ١٠ × ١٠ = ١٠٠ سم^{٢}

حجم الهرم الرباعى المنتظم = $\frac{١}{٣}$ ق × ع = $\frac{١}{٣}$ × ١٠٠ × ٢١ = ٧٠٠ سم^{٣}

فى الشكل (ب) : مساحة القاعدة (خماسي منتظم) = $\frac{ن}{٤}$ س^{٢} ظتا $\frac{\pi}{ن}$

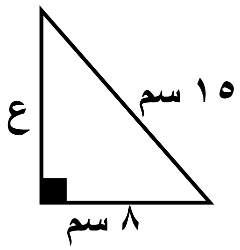
= $\frac{٥}{٤} \times (٨)^{٢}$ ظتا $\frac{\pi}{٥}$ = ١١٠ سم^{٢}

حجم الهرم الخماسي المنتظم = $\frac{١}{٣}$ ق × ع = $\frac{١}{٣}$ × ١١٠ × ١٤ = ٥١٣,٣ سم^{٣}



فى الشكل (جـ) : س = $\sqrt{(١٧)^{٢} - (١٥)^{٢}}$ = ٨

طول ضلع القاعدة = ٢ × ٨ = ١٦ سم

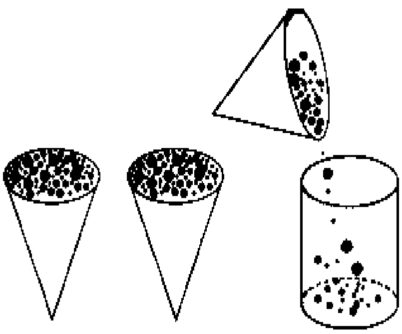


ع = $\sqrt{(١٥)^{٢} - (٨)^{٢}} = \sqrt{١٦١}$ سم

مساحة القاعدة = ١٦ × ١٦ = ٢٥٦ سم^{٢}

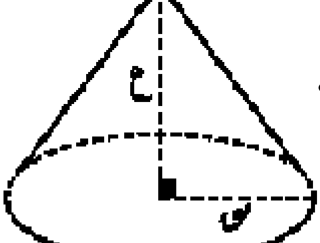
حجم الهرم الرباعى المنتظم = $\frac{١}{٣}$ ق × ع = $\frac{١}{٣}$ × ٢٥٦ × $\sqrt{١٦١}$ = ١٠٨٢,٧ سم^{٣}

فكر : العلاقة بين حجم مخروط قائم و حجم اسطوانة دائرية قائمة:



حجم المخروط القائم = $\frac{١}{٣}$ حجم الاسطوانة الدائرية القائمة

*** حجم المخروط القائم :**

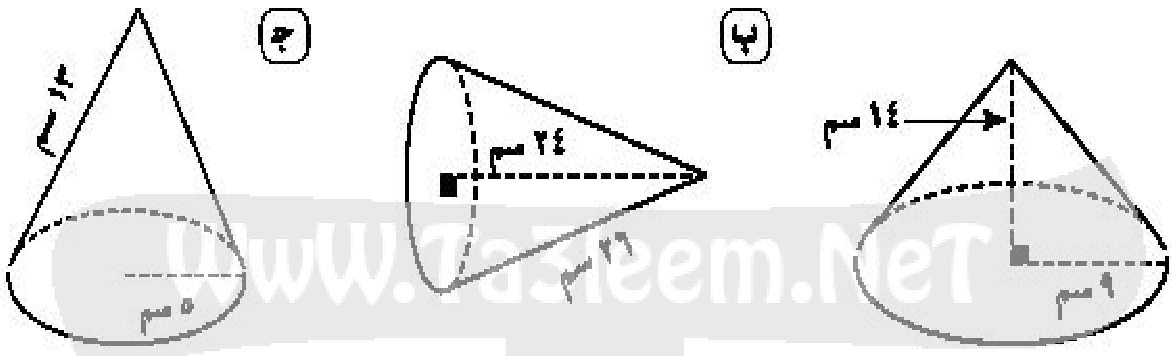


حجم المخروط = ثلث حاصل ضرب مساحة قاعدته فى ارتفاعه .

= $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع

حيث (نق) طول نصف قطر دائرة المخروط ، (ع) ارتفاع المخروط

مثال : أوجد حجم المخروط القائم الموضح بالشكل مستخدمًا البيانات المعطاه.



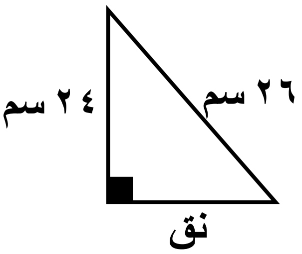
الحل :

في الشكل (أ) : نق = ٩ سم ، ع = ١٤ سم

∴ حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢}ع = $\frac{١}{٣}$ × π × (٩)^{٢} × ١٤ = ١١٨٧,٥ سم^{٣}

في الشكل (ب) : ع = ٢٤ سم ، ل = ٢٦ سم ، نق = ؟

نق = $\sqrt{(٢٦)^{٢} - (٢٤)^{٢}}$ = ١٠ سم

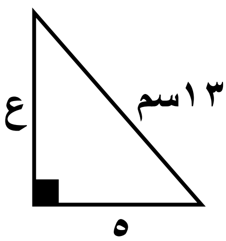


∴ حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢}ع = $\frac{١}{٣}$ × π ×(١٠)^{٢} × ٢٤

= ٢٥١٣,٣ سم^{٣}

في الشكل (جـ) : ل = ١٣ سم ، نق = ٥ سم ، ع = ؟

ع = $\sqrt{(١٣)^{٢} - (٥)^{٢}}$ = ١٢ سم



∴ حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢}ع = $\frac{١}{٣}$ × π ×(٥)^{٢} × ١٢

= ٣١٤,٢ سم^{٣}

مثال: سبيكة من الذهب الخالص على هيئة مخروط قائم إرتفاعه ٤,٢سم وطول نصف قطر دائرته ١,٥سم. أوجد كثافة الذهب إذا كان كتلة السبيكة ١٩١جم.

الحل: ∵ حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢}ع ، نق = ١,٥سم ، ع = ٤,٢سم

∴ حجم الذهب في السبيكة = $\frac{\pi}{٣}$ (١,٥)^{٢} (٤,٢) = ٩,٨٩٦ سم^{٣}

∵ الكثافة = $\frac{\text{الكتلة}}{\text{الحجم}}$ ∴ كثافة الذهب = $\frac{١٩١}{٩,٨٩٦}$ ≃ ١٩,٣ جم/سم^{٣}

مثال : قطعة من الشيكولاته على هيئة مخروط قائم حجمه ٢٧ π سم^{٣} و محيط قاعدته ٦ π سم أوجد ارتفاعه .

الحل :

$\because$ محيط قاعدته = ٦ π سم $\therefore$ ٢ π نق = ٦ π $\therefore$ نق = ٣ سم

$\because$ حجم المخروط = ٢٧ π سم^{٣} $\therefore$ $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع = ٢٧ π

$\therefore$ $\frac{١}{٣}\pi \times (٣)^{٢} \times$ ع = ٢٧ π $\therefore$ ع = ٩ سم $\therefore$ الارتفاع = ٩ سم

مثال : هرم خماسي منتظم من النحاس، طول ضلع مضلع قاعدته ١٠سم وارتفاعه ٤٢سم، صهر وحول إلى مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته ١٥سم. فإذا علم أن ١٠٪ من النحاس فقد أثناء عمليتي الصهر والتحويل، أوجد إرتفاع المخروط لأقرب رقم عشري واحد.

الحل :

$\because$ مساحة الخماسي المنتظم = $\frac{٥}{٤}$ س^{٢} ظتا $\frac{\pi}{٥}$ حيث س طول ضلعه

$\therefore$ مساحة قاعدة الهرم = $\frac{٥}{٤} \times ١٠ \times ١٠$ ظتا ٣٦° = $\frac{١٢٥}{\text{ظا}٣٦°} \simeq ١٧٢$سم^{٣}

$\because$ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع = $\frac{١٧٢}{٣} \times ٤٢ = ٢٤٠٨$سم٢

$\therefore$ حجم النحاس فى المخروط = $\frac{٩٠}{١٠٠} \times ٢٤٠٨ = ٢١٦٧{,}٢$سم^{٣}

$\frac{\pi}{٣}(١٥)^{٢}$ ع = ٢١٦٧,٢ حيث ع ارتفاع المخروط القائم

$\therefore$ ع = $\frac{٣ \times ٢١٦٧{,}٢}{٢٢٥\pi} \simeq ٩{,}٢$سم

ملاحظة هامة : سعة حاوية تقدر بحجم السائل الذى تحتويه ، ولحساب سعتها تستخدم نفس قوانين حساب الحجوم ووحدة قياس السعة اللتر

١ لتر = ١٠٠٠ ملليمتر = ١٠٠٠ سم^{٣}

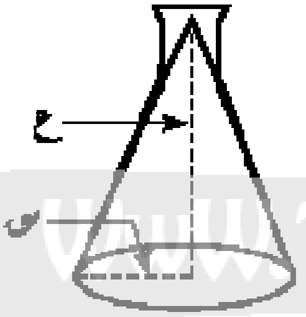
تذكر أن :

١- السعة هى حجم الفراغ الداخلى لأى جسم أجوف

٢- حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣} ، مساحة سطح الكرة = ٤ π نق^{٢}

مثال : دورق مخروطي الشكل سعته ١٥٤ مل، ارتفاعه ١٢سم

أوجد طول نصف قطر قاعدته ($\pi \simeq \frac{٢٢}{٧}$)



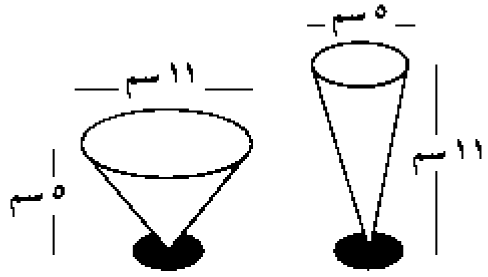
الحل

سعة الدورق = حجم المخروط القائم = ١٥٤سم^٣

$\frac{١}{٣} \times \frac{٢٢}{٧} \times$ س$^٢ \times ١٢ = ١٥٤ \quad \therefore$ س$^٢ = \frac{٤٩}{٤}$

$\therefore$ س = ٣,٥ سم

مثال : ٱ ، ب كأسان للشراب . ايهما سعته أكبر ؟ أوجد الفرق بين سعتيهما .



الحل :

الكأس الأول : نق= ٢,٥ سم ، ع = ١١ سم

حجم الكأس الاول ٱ= $\frac{١}{٣}$ π نق^٢ ع

= $\frac{١}{٣}$ π × (٢,٥)^٢ × ١١ = ٧٢ سم^٣

الكأس الثانى : نق = ٥,٥ سم ، ع = ٥ سم

حجم الكأس الثانى ب = $\frac{١}{٣}$ π نق^٢ × ع = $\frac{١}{٣}$ π × (٥,٥)^٢ × ٥ = ٥٠,٤ سم^٣

الفرق بين سعتيهما = ٧٢ – ٥٠,٤ = ٢١,٦ سم^٣ [تذكر أن : الحجم = السعة]

تمارين على حجم المخروط و الهرم

(١) أوجد حجم هرم رباعى منتظم طول ضلع مضلع قاعدته ٢٠سم وارتفاعه ٣٦سم.

(٢) احسب لأقرب رقم عشرى واحد، حجم هرم خماسي منتظم طول ضلع قاعدته ٤٠سم وارتفاعه ١٠سم.

(٣) هرم رباعى منتظم ارتفاعه ٩سم وحجمه ٣٠٠سم^٣. أوجد طول ضلع مضلع قاعدته.

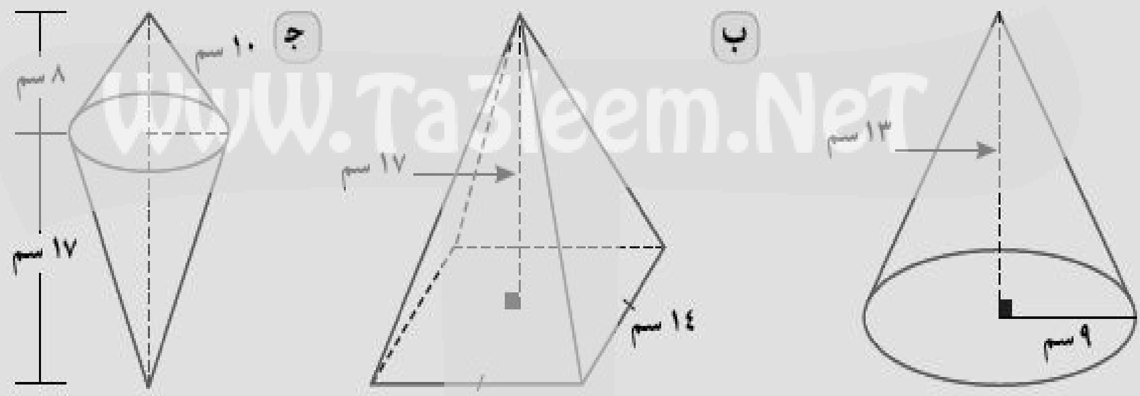
(٤) هرم رباعى منتظم مساحة قاعدته ٧٠٠سم^٢ وارتفاعه الجانبى ٢٠سم أوجد حجمه.

(٥) أيهما أكبر حجمًا؟ مخروط قائم طول نصف قطر قاعدته ١٥سم وارتفاعه ٢٠سم ، أم هرم رباعى منتظم ارتفاعه ٤٠سم ومحيط قاعدته ٤٨سم.

٦) أوجد حجم مخروط قائم محيط قاعدته ٤٤سم وارتفاعه ٢٥سم.

٧) أوجد حجم مخروط قائم مساحته الجانبية ٢٢٠سم وطول راسمه ١٤سم.

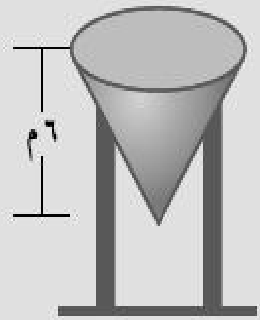
٨) رتب المجسمات التالية من الأصغر حجمًا إلى الأكبر حجمًا.



٩) الربط بالسياحة: صنع نموذج للهرم الأكبر من سبيكة معدنية كثافتها ٣,٢جم/سم^3. إذا كان طول ضلع قاعدة النموذج ١١,٥سم وارتفاعه ٧سم ، فإحسب كتلته لأقرب رقم عشرى واحد.

١٠) الربط بالفيزياء: إناء أسطوانى الشكل به ماء، غمر فيه جسم معدنى على شكل مخروط قائم ارتفاعه ١٢سم وطول نصف قطر قاعدته ٢سم غمرا كاملًا ، فإرتفع سطح الماء فى الإناء بمقدار ١سم . أوجد طول قطر قاعدة الإناء.

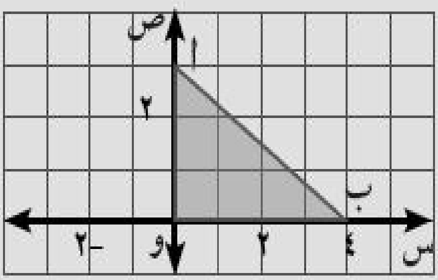
١١) هندسة مدنية: صهريج مياه على شكل مخروط قائم حجمه ٣٢ π م^3 وارتفاعه ٦م.
أوجد طول نصف قطر قاعدته ومساحته الكلية.



١٢) يوضح الشكل المقابل مستوى إحداثى متعامد إحسب بدلالة π حجم الجسم الناشئ عند دوران المثلث أ ب و ، دورة كاملة حول:

أ) محور السينات

ب) محور الصادات

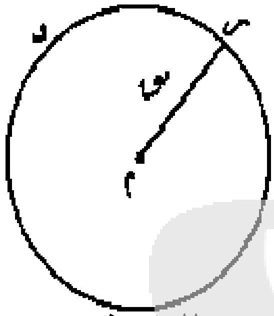


١٣) تفكير ناقد: مخروط دائرى قائم حجمه ١٠٠سم^3. أوجد حجمه عندما:

أ) يتضاعف ارتفاعه ب) يتضاعف طول نصف قطره.

ج) يتضاعف ارتفاعه وطول نصف قطره. ماذا تستنتج؟ فسر إجابتك.

معادلة الدائرة



*** تذكر أن :**

١- الدائرة : هى مجموعة نقط المستوى التى تكون على نفس البعد الثابت من نقطة ثابتة فى المستوى.

حيث تسمى م النقطة الثابتة مركز الدائرة و نصف قطرها نق و نرمز للدائرة بـ د

٢- البعد بين النقطتين $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ ، $(\text{س}_2 ، \text{ص}_2) = \sqrt{(\text{س}_2 - \text{س}_1)^2 + (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)^2}$

مربع البعد $= (\text{س}_2 - \text{س}_1)^2 + (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)^2$

٣- صورة النقطة $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ بالانتقال (م ، ن) هى النقطة $(\text{س}_1 + \text{م} ، \text{ص}_1 + \text{ن})$

صورة النقطة (- ٢ ، ٤) بالانتقال (٤ ، ١) هى النقطة (٢ ، ٥)

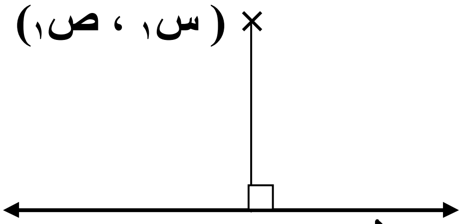
٤- إحداثى منتصف المسافة بين النقطتين $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ ، $(\text{س}_2 ، \text{ص}_2)$

$$= \left(\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{2} ، \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{2} \right)$$

٥- مساحة اى مضلع منتظم $= \frac{\text{ن}}{2} \, \text{نق}^2 \, \text{حا} \frac{360}{\text{ن}}$

حيث نق نصف قطر الدائرة المار برؤوسه ، ن عدد أضلاع المضلع .

٦- طول العمود من نقطة $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ لا تنتمى لمستقيم $\text{أ س} + \text{ب ص} + \text{جـ} = 0$



أ س + ب ص + جـ = ٠

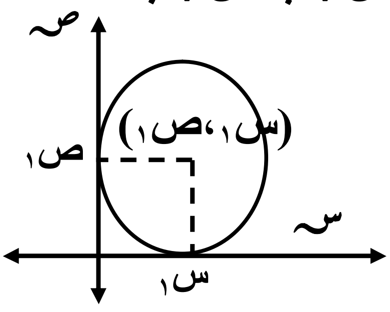
طول العمود ل $= \frac{|\text{أ س}_1 + \text{ب ص}_1 + \text{جـ}|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}}$

ملحوظة : البعد بين النقطة $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$

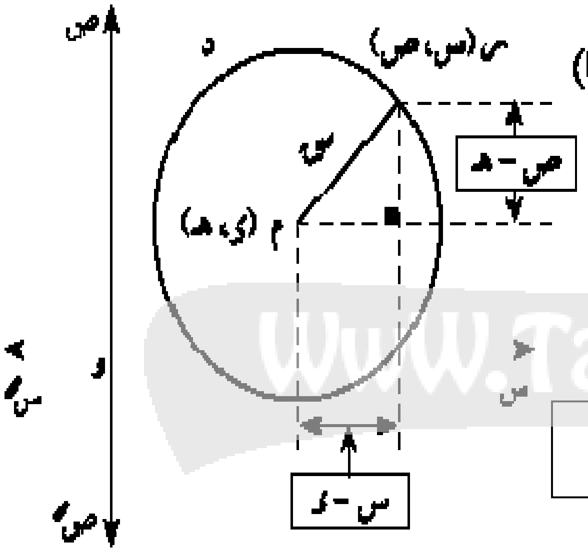
، المستقيم س = ٠ (محور الصادات) $= |\text{س}_1|$

، البعد بين $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$

و المستقيم ص = ٠ (محور السينات) $= |\text{ص}_1|$



٧- تتطابق دائرتان إذا تساوى طولا نصفى قطريهما $\text{نق}_1 = \text{نق}_2$



معادلة الدائرة (بدلالة إحداثيي مركزها وطول نصف قطرها)

في مستوى احداثي متعامد:

إذا كانت النقطة ر (س ، ص) تنتمي إلى دائرة د مركزها النقطة (ى ، هـ) وطول نصف قطرها يساوي نق من الوحدات فإن معادلة الدائرة د هي:

$$\boxed{(س - ى)^2 + (ص - هـ)^2 = نق^2}$$

حيث م (ى ، هـ) مركز الدائرة ، نق نصف قطر الدائرة

مثال : اكتب معادلة الدائرة إذا كان مركزها م (٤ ، - ٣) و طول نصف قطرها يساوى ٥ وحدات

الحل :

بفرض أن النقطة ر (س ، ص) ∈ الدائرة د

∵ مركز الدائرة (٤ ، - ٣) ، طول نصف قطر الدائرة = ٥ وحدات

∴ ى = ٤ ، هـ = -٣ ، نق = ٥ وحدات

∴ تكون المعادلة هي $(س - ٤)^2 + (ص + ٣)^2 = (٥)^2$

اى : $(س - ٤)^2 + (ص + ٣)^2 = ٢٥$

مثال : اكتب معادلة الدائرة إذا كان مركزها م (٢ ، ٠) و طول قطرها $\sqrt{٢٨}$ فى الوحدات

الحل : م (٢ ، ٠) ، نق = $\frac{\sqrt{٢٨}}{٢}$ وحدة

∵ $(س - ى)^2 + (ص - هـ)^2 = نق^2$

∴ المعادلة $(س - ٢)^2 + (ص - ٠)^2 = \left(\frac{\sqrt{٢٨}}{٢}\right)^2$

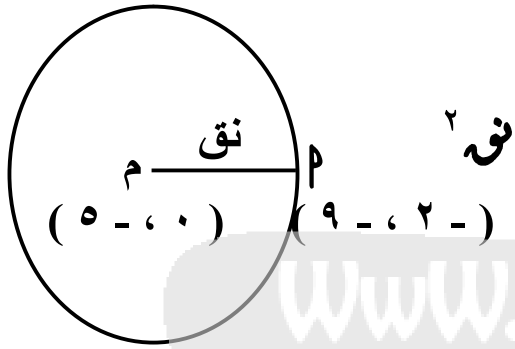
∴ معادلة الدائرة هى $(س - ٢)^2 + ص^2 = ٧$

مثال : اكتب معادلة الدائرة إذا كان مركزها (٠ ، - ٥) و تمر بالنقطة أ (- ٢ ، - ٩)

الحل : مربع البعد بين ﻡ، م = (م ﻡ)^{٢} =

نق^{٢} = (- ٢ – ٠)^{٢} + (- ٩ + ٥)^{٢} = ٢٠

، م (٠ ، - ٥) مركز الدائرة



∴ معادلة الدائرة هى (س – ى)^{٢} + (ص – هـ)^{٢} = نق^{٢}

∴ المعادلة هى (س – ٠)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = ٢٠

اى : س^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = ٢٠

اكتب معادلة الدائرة إذا كان مركزها نقطة الاصل و طول نصف قطرها يساوى نق من الوحدات

الحل :

∵ م (٠ ، ٠) ، طول نصف قطر الدائرة = نق

∴ معادلة الدائرة هى (س – ٠)^{٢} + (ص – ٠)^{٢} = نق^{٢}

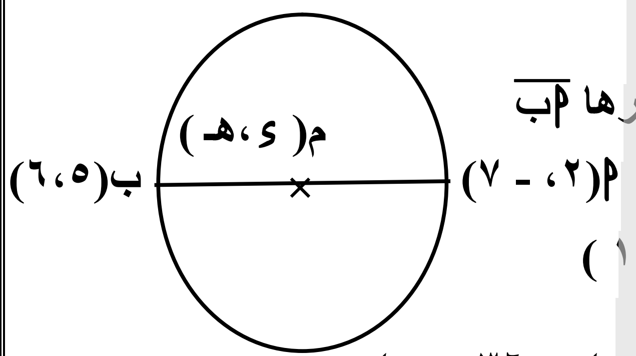
اى معادلة الدائرة التى مركزها نقطة الاصل و نصف قطرها نق وحدة

هى: $\boxed{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = \text{نق}^{٢}}$

مثال : اكتب معادلة الدائرة التى قطرها $\overline{\text{ﻡب}}$ حيث ﻡ (٢ ، - ٧) ، ب (٦ ، ٥)

الحل :

بفرض النقطة م (ى، هـ) مركز للدائرة التى قطرها $\overline{\text{ﻡب}}$



و هى منتصف $\overline{\text{ﻡب}}$

∴ م (ى، هـ) = ($\frac{٢ + ٦}{٢}$ ، $\frac{-٧ + ٥}{٢}$) = (٤ ، - ١)

نق^{٢} = (م ﻡ)^{٢} = (٢ – ٤)^{٢} + (- ٧ + ١)^{٢} = ٤ + ٣٦ = ٤٠

تكون معادلة الدائرة : (س – ٤)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٤٠

<u>ملاحظة هامة</u> : بفرض النقطة (س$_{١}$، ص$_{١}$) فى مستوى الدائرة د التى معادلتها (س – ى)^{٢} + (ص – هـ)^{٢} = نق^{٢} فإنه :

١- إذا كان (س – ى)^{٢} + (ص – هـ)^{٢} > نق^{٢} فإن النقطة تقع خارج الدائرة

٢- إذا كان (س – ى)^{٢} + (ص – هـ)^{٢} < نق^{٢} فإن النقطة تقع داخل الدائرة

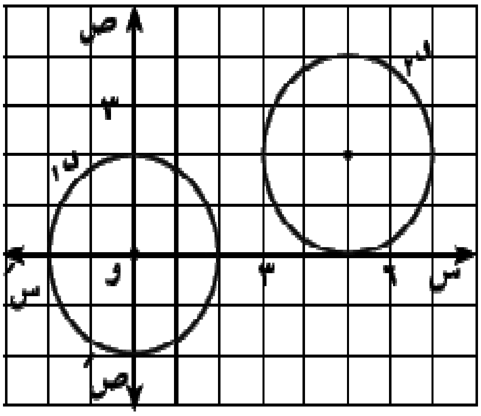
٣- إذا كان (س – ى)^{٢} + (ص – هـ)^{٢} = نق^{٢} فإن النقطة تقع الدائرة

مثال : حدد موضع النقط التالية تنتمى الى الدائرة د التى معادلتها
(س – ٦)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٢٥ حيث النقط ﻡ(٩ ، ٣) ، ب(٧ ، ٥) ، جـ (٢ ، - ٣)

الحل : بالتعويض عن ﻡ فى المعادلة المعطاه نجد :
الطرف الايمن = (٩ – ٦)^{٢} + (٣ + ١)^{٢} = ٩ + ١٦ = ٢٥ = الطرف الايسر
∴ النقطة ﻡ(٩ ، ٣) ∈ الدائرة د

بالتعويض عن ب فى المعادلة المعطاه نجد :
الطرف الايمن = (٧ – ٦)^{٢} + (٥ + ١)^{٢} = ١ + ٣٦ = ٣٧ > الطرف الايسر
∴ النقطة ب تقع خارج الدائرة

بالتعويض عن جـ فى المعادلة المعطاه :
الطرف الايمن = (٢ – ٦)^{٢} + (- ٣ + ١)^{٢} = ١٤ + ٤ = ١٨ < الطرف الايسر
∴ النقطة جـ تقع داخل الدائرة .



مثال : الشكل المقابل فيه د ١ ، د ٢ دائرتان
أثبت أن الدائرتان متطابقتان ثم أوجد معادلة كل منهما
الحل :
تتطابق الدائرتان إذا تساوى طولا نصفى قطريهما
∵ نق$_{١}$ = نق$_{٢}$ = ٢ وحدة
∴ الدائرتان متطابقتان

∵ الدائرة د ١ : مركزها (٠ ، ٠) ، نق$_{١}$ = ٢ وحدة
∴ معادلة الدائرة د ١ : س^{٢} + ص^{٢} = ٤

∵ الدائرة د ٢ : مركزها (٥ ، ٢) ، نق$_{٢}$ = ٢ وحدة
∴ معادلة الدائرة د ٢ : (س – ٥)^{٢} + (ص – ٢)^{٢} = ٤

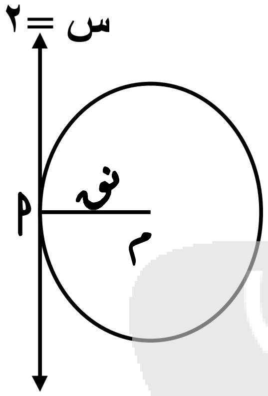
و يلاحظ من الرسم أن الدائرة د$_{٢}$ هى صورة الدائرة د$_{١}$ بالانتقال (٥ ، ٢)

مثال : أكمــل ما ياتى :
إذا كانت الدائرة د$_{١}$: س^{٢} + ص^{٢} = ٤ ، الدائرة د$_{٢}$ هى صورة الدائرة د$_{١}$ بالانتقال (-٤ ، ٣)

فإن معادلة الدائرة د$_{٢}$ هى (س + ٤)^{٢} + (ص – ٣)^{٢} = ٤

مثال : اكتب معادلة الدائرة التى مركزها النقطة (٥ ، ٤) و تمس المستقيم س = ٢

الحل :



∵ مركز الدائرة م(٥ ، ٤) ، نق طول نصف قطرها

و من قانون طول العمود من نقطة م الى المستقيم س ـ ٢ = ٠

حيث ﻫ = ١ ، ب = ٠ ، جـ = ـ ٢

∴ نق = م ﻫ = $\frac{|ﻫ س_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{ﻫ^٢ + ب^٢}}$ = | ٥ ـ ٢ | = |٣| = ٣

∴ معادلة الدائرة هى (س ـ ى)^٢ + (ص ـ ﻫ)^٢ = نق^٢

∴ المعادلة هى (س ـ ٥)^٢ + (ص ـ ٤)^٢ = (٣)^٢ = ٩

*** ايجاد مركز و طول نصف قطر دائرة من معادلة دائرة :**

مثال : أوجد إحداثيا المركز و طول نصف قطر كل من الدوائر الآتية :

(أ) (س ـ ٢)^٢ + (ص + ٣)^٢ = ١٧ (ب) (س + ١)^٢ = ١٦ ـ ص^٢

الحل :

(أ) بمقارنة كل مقدار جبرى فى المعادلة المعطاه و نظيره فى المعادلة

(س ـ ى)^٢ + (ص ـ هـ)^٢ = نق^٢

حيث النقطة (ى ، هـ) مركز الدائرة ، نق طول نصف قطرها

∴ س ـ ى = س ـ ٢ ∴ ى = ٢

، ص ـ هـ = ص + ٣ ∴ هـ = ـ ٣

∵ نق^٢ = ١٧ ∴ نق = $\sqrt{١٧}$

فيكون مركز الدائرة النقطة (٢ ، ـ ٣) و طول نصف قطرها يساوى $\sqrt{١٧}$ وحدة

(ب) يجب وضع المعادلة فى الصورة الاحداثية أولا ثم بمقارنة كل مقدار جبرى فى المعادلة المعطاه (س+١)^٢ + ص^٢ = ١٦ و نظيره فى المعادلة

(س ـ ى)^٢ + (ص ـ هـ)^٢ = نق^٢

حيث النقطة (ى ، هـ) مركز الدائرة ، نق طول نصف قطرها

∴ س ـ ى = س + ١ ∴ ى = ـ ١

، ص ـ هـ = ص ∴ هـ = صفر

∵ نق^٢ = ١٦ ∴ نق = ٤

فيكون مركز الدائرة النقطة (-١ ، ٠) و طول نصف قطرها يساوى ٤ وحدة

الصورة العامة لمعادلة الدائرة

∵ معادلة الدائرة التى مركزها (ى ، هـ) وطول نصف قطرها يساوى نق من الوحدات
هى (س – ى)^{٢} + (ص – هـ)^{٢} = نق^{٢} بفك الاقواس
∴ س^{٢} + ص^{٢} ـ ٢ ى س ـ ٢ هـ ص + ى^{٢} + هـ^{٢} ـ نق^{٢} = ٠
∵ ى ، هـ ، نق ثوابت ∴ المقدار ى^{٢} + هـ^{٢} ـ نق^{٢} = مقدارا ثابتا
و بوضع ل = ـ ى ، ك = ـ هـ ، جـ = ى^{٢} + هـ^{٢} ـ نق^{٢} تصبح المعادلة على الصورة

الصورة العامة لمعادلة دائرة : س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص + جـ = ٠

مركزها (ـ ل ، ـ ك) و طول نصف قطرها يساوى نق حيث

نق = $\sqrt{\text{ل}^{٢} + \text{ك}^{٢} - \text{جـ}}$ ، ل^{٢} + ك^{٢} ـ جـ > ٠

مثال : اكتب الصورة العامة لمعادلة الدائرة إذا كان مركزها النقطة م (٦، ـ ٣) و طول نصف قطرها يساوى ٥ وحدات .

الحل :
∵ مركز الدائرة (ـ ل ، ـ ك) فى الصورة العامة لمعادلة الدائرة
، مركز الدائرة (٦ ، -٣) معطى
∴ ل = ـ ٦ ، ك = ٣
∵ نق = ٥ ، جـ = ل^{٢} + ك^{٢} ـ نق^{٢} ∴ جـ = (ـ ٦)^{٢} + (٣)^{٢} ـ (٥)^{٢} = ٢٠
و تكون الصورة العامة لمعادلة الدائرة هى : س^{٢} + ص^{٢} – ١٢ س + ٦ ص + ٢٠ = ٠

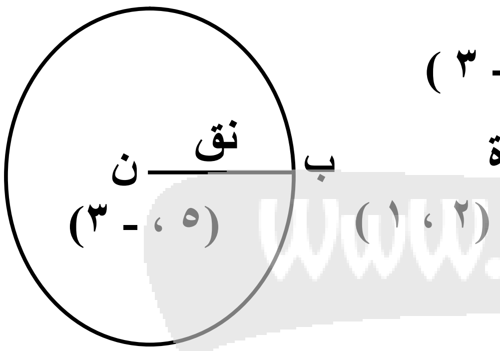
<u>ملحوظة :</u>

يمكن التحقق من صحة الحل باستخدام معادلة الدائرة (س ـ ٦)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ٢٥ ثم تبسيطها و مقارنة النتائج

مثلا : باختصار المعادلة (س ـ ٦)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ٢٥ نجد ك
س^{٢} ـ ١٢ س + ٣٦ + ص^{٢} + ٦ ص + ٩ – ٢٥ = ٠
س^{٢} + ص^{٢} ـ ١٢ س + ٦ ص + ٢٠ = ٠ و هذه معادلة الصورة العامة

مثال : اكتب الصورة العامة لمعادلة الدائرة إذا كان مركزها النقطة ن (٥ ، - ٣) و تمر بالنقطة ب (٢ ، ١) .

الحل :



نفرض نق نصف قطر الدائرة المعطاه ،مركزها ن(٥ ، - ٣)

نق = (ب ن) = $\sqrt{(٢ - ٥)^{٢} + (١ + ٣)^{٢}}$ = ٥ وحدة

∴ مركز الدائرة (- ل ، - ك) فى الصورة العامة

∴ ل = - ٥ ، ك = ٣ ، نق = ٥

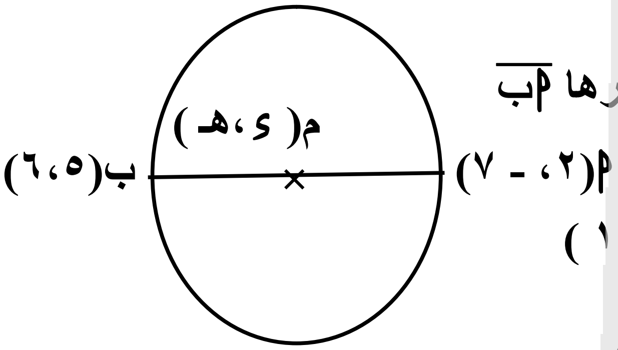
∴ جـ = ل^{٢} + ك^{٢} - نق^{٢} = (- ٥)^{٢} + (٣)^{٢} - (٥)^{٢} = ٩

و تكون الصورة العامة لمعادلة الدائرة : س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص + جـ = ٠

∴ س^{٢} + ص^{٢} - ١٠ س + ٦ ص + ٩ = ٠

مثال : اكتب الصورة العامة لمعادلة الدائرة التى قطرها $\overline{أب}$ حيث أ (٢ ، - ٧) ، ب (٦ ، ٥)

الحل :



بفرض النقطة م (ى ، هـ) مركز للدائرة التى قطرها $\overline{أب}$

و هى منتصف $\overline{أب}$

∴ م (ى ، هـ)= ($\frac{٢ + ٦}{٢}$ ، $\frac{-٧ + ٥}{٢}$) = (٤ ، - ١)

∴ مركز الدائرة (- ل ، - ك) فى الصورة العامة

∴ ل = - ٤ ، ك = ١

∵ نق^{٢} = (م أ)^{٢} = (٢ - ٤)^{٢} + (- ٧ + ١)^{٢} = ٤ + ٣٦ = ٤٠ ∴ نق = ٢ $\sqrt{١٠}$

، جـ = ل^{٢} + ك^{٢} - نق^{٢} = (- ٤)^{٢} + (١)^{٢} - ٤٠ = - ٢٣

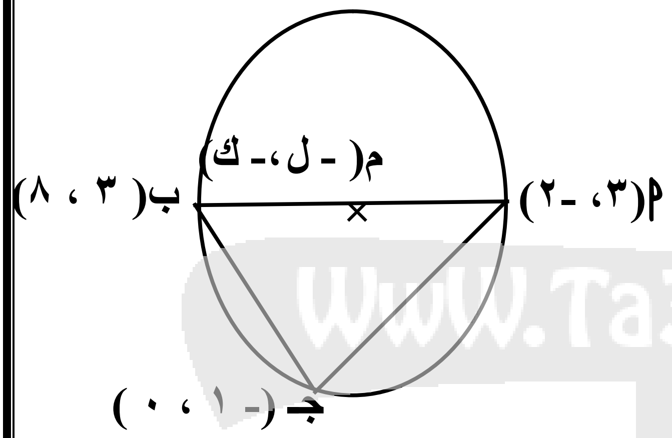
و تكون الصورة العامة لمعادلة الدائرة : س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص + جـ = ٠

اى س^{٢} + ص^{٢} - ٨ س + ٢ ص - ٢٣ = ٠

مثال : إذا كانت النقط أ (٣ ، - ٢) ، ب(٣ ، ٨) ، جـ (- ١ ، ٠) تنتمى الى دائرة واحدة فأثبت أن $\overline{أب}$ قطر فيها ثم اكتب الصورة العامة لمعادلتها .

الحل : (يراعى الحلول الاخرى)

الحل :



∵ ميل $\overleftrightarrow{اجـ}$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{-٢ - ٠}{٣ + ١}$ = $\frac{-١}{٢}$

، ميل $\overleftrightarrow{ب جـ}$ = $\frac{٨ - ٠}{٣ + ١}$ = ٢

∴ ميل $\overleftrightarrow{اجـ}$ × ميل $\overleftrightarrow{ب جـ}$ = $\frac{-١}{٢}$ × ٢ = -١

∴ $\overleftrightarrow{اجـ}$ ⊥ $\overleftrightarrow{ب جـ}$ ∴ ق ($\widehat{جـ}$) = ٩٠ ° محيطية مرسومة فى نصف دائرة

∴ اب قطر فى الدائرة .

∴ م (- ل ، - ك) مركز الدائرة منتصف $\overline{اب}$ قطر الدائرة

∵ م (- ل ، - ك) = ($\frac{٣ + ٣}{٢}$ ، $\frac{-٢ + ٨}{٢}$) = (٣ ، ٣) ∴ ل = - ٣ ، ك = - ٣

، نق^٢ = (ا م)^٢ = (٣ - ٣)^٢ + (- ٢ - ٣)^٢ = ٠ + ٢٥ = ٢٥

، جـ = ل^٢ + ك^٢ - نق^٢ = (- ٣)^٢ + (- ٣)^٢ - ٢٥ = - ٧

∴ الصورة العامة لمعادلة الدائرة : س^٢ + ص^٢ + ٢ ل س + ٢ ك ص + جـ = ٠

أى س^٢ + ص^٢ - ٦ س - ٦ ص - ٧ = ٠

---

* **<u>الشروط اللازمة لتصبح معادلة الدائرة فى الصورة العامة :</u>**

س^٢ + ص^٢ + ٢ ل س + ٢ ك ص + جـ = ٠ يجب تحقق الشروط الثلاثة الأتية معا :

١- المعادلة من الدرجة الثانية فى س ، ص

٢- معامل س^٢ = معامل ص^٢ = الوحدة

٣- خالية من الحد الذى يحتوى س ص أى معامل س ص = ٠ ، ل^٢ + ك^٢ - جـ > ٠

لتعيين إحداثى مركز دائرة و طول نصف قطرها من الصورة العامة لمعادلتها

١) تحقق أولا من وضع المعادلة فى الصورة العامة حيث : معامل $س^2$ معامل $ص^2 = ١$

٢) إحداثيا المركز (ـ ل ، ـ ك) أى $\left(\frac{-\text{معامل س}}{٢} ، \frac{-\text{معامل ص}}{٢} \right)$

٣) طول نصف قطر الدائرة يتعين من العلاقة : $نق = \sqrt{ل^2 + ك^2 - جـ}$

حيث $ل^2 + ك^2 - جـ > ٠$

مثال: أى المعادلات الآتية تمثل دائرة وإذا كانت معادلة دائرة .
أوجد مركزها و طول نصف قطرها:

١) $س^2 + ص^2 - ٦ س + ٤ ص + ١٧ = ٠$　　٢) $٤ س^2 + ٤ ص^2 = ٤٩$

٣) $س^2 + ص^2 + ٤ س - ٢ ص = ٠$　　٤) $س^2 + ص^2 + ٢ س ص + ٣ = ٠$

٥) $س^2 + ص^2 + ٤ س + ٢٥ = ٠$　　٦) $٣ س^2 + ٢ ص^2 + ٦ س - ٨ ص = ٠$

الحل :

١) $س^2 + ص^2 - ٦ س + ٤ ص + ١٧ = ٠$

معامل $س^2$ = معامل $ص^2$ = الوحدة

، خالية من الحد المحتوى على س ص

، ل = ـ ٣ ، ك = ٢ ، جـ = ١٧

$\because ل^2 + ك^2 - جـ = ٩ + ٤ - ١٧ = -٤ < ٠$

$\therefore$ المعادلة ليست دائرة

٣) $س^2 + ص^2 + ٤ س - ٢ ص = ٠$

معامل $س^2$ = معامل $ص^2$ = الوحدة

، المعادلة خالية من الحد المحتوى على س ص

، ل = ٢ ، ك = ـ١ ، جـ = ٠

، $ل^2 + ك^2 - جـ = ٤ + ١ - ٠ = ٥ > ٠$

$\therefore نق = \sqrt{٥}$

المعادلة تمثل دائرة مركزها (ـ ٢ ، ١)

، طول نصف قطرها $= \sqrt{٥}$

٢) $٤ س^2 + ٤ ص^2 = ٤٩$ بالقسمة على ٤

$\therefore س^2 + ص^2 - \frac{٤٩}{٤} = ٠$

معامل $س^2$ = معامل $ص^2$ = الوحدة

، المعادلة خالية من الحد المحتوى على س ص

، ل = ٠ ، ك = ٠ ، جـ = ـ

، $ل^2 + ك^2 - جـ = ٠ + ٠ - \left(- \frac{٤٩}{٤}\right) > ٠$

$نق = \frac{٧}{٢}$　المعادلة دائرة مركزها (٠ ، ٠)

٤) $س^2 + ص^2 + ٢ س ص + ٣ = ٠$

معامل $س^2$ = معامل $ص^2$ = الوحدة

و المعادلة تحتوى على على س ص

$\therefore$ المعادلة ليست دائرة

٥) $س^٢ + ص^٢ + ٤ س + ٢٥ = ٠$
معامل $س^٢$ = معامل $ص^٢ = ١$
، المعادلة خالية من الحد المحتوى على س ص
، ل = ٢ ، ك = ٠ ، جـ = ٢٥
، $ل^٢ + ك^٢ - جـ = ٤ + ٠ - ٢٥ = -٢٤ < ٠$
∴ المعادلة ليست دائرة

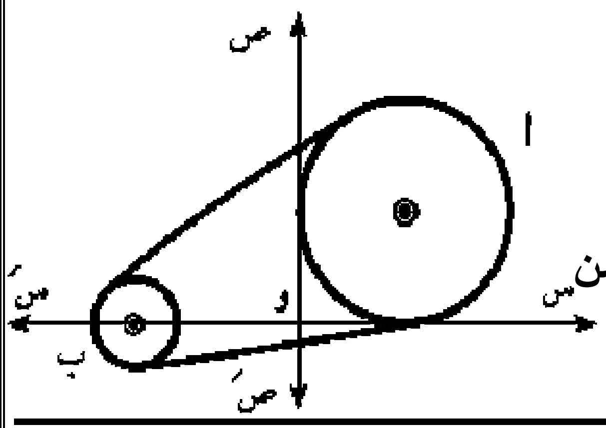
٦) $٣ س^٢ + ٢ ص^٢ + ٦ س - ٨ ص = ٠$
∵ معامل $س^٢ \neq$ معامل $ص^٢$
∴ المعادلة ليست دائرة

مثال : هل الدائرتين $د_١ : س^٢ + ص^٢ - ١٠ س - ٨ ص + ١٦ = ٠$
، $د_٢ : س^٢ + ص^٢ + ١٤ س + ١٠ ص - ٢٦ = ٠$
متماستان من الخارج ؟ فسر إجابتك .

الحل :

بفرض $نق_١$ ، $نق_٢$ طولا نصفى قطري $د_١$ ، $د_٢$ على الترتيب .
$م_١ (- ل_١ ، - ك_١)$ مركز الدائرة $د_١$ ، $م_٢ (- ل_٢ ، - ك_٢)$ مركز الدائرة $د_٢$
∵ $د_١ : س^٢ + ص^٢ - ١٠ س - ٨ ص + ١٦ = ٠$
∴ $ل_١ = -٥$ ، $ك_١ = -٤$ ، جـ = ١٦ ∴ $ل^٢_١ + ك^٢_١ - جـ = ٢٥ + ١٦ - ١٦ = ٢٥$
∴ نق = ٥ وحدة ، مركز الدائرة $د_١$ هو $م_١(٥ ، ٤)$ .... [١]
∵ $د_٢ : س^٢ + ص^٢ + ١٤ س + ١٠ ص - ٢٦ = ٠$
∴ $ل_٢ = ٧$ ، $ك_٢ = ٥$ ، جـ = -٢٦ ∴ $ل^٢_٢ + ك^٢_٢ - جـ = ٤٩ + ٢٥ + ٢٦ = ١٠٠ > ٠$
∴ $نق_٢ = ١٠$ وحدة ، مركز الدائرة $د_٢$ هو $م_٢(-٧ ، -٥)$ .... [٢]
من ١ ، ٢ نجد : $نق_١ + نق_٢ = ٥ + ١٠ = ١٥$
طول خط المركزين = $م_١ م_٢ = \sqrt{(-٧ - ٥)^٢ + (-٥ - ٤)^٢} = ١٥$
∵ $م_١ م_٢ = نق_١ + نق_٢$ ∴ الدائرتان متماستان من الخارج

مثال : يوضح الشكل المقابل بكرة أ فى آلة تمس محورى الاحداثيات تدور بواسطة سير يمر على بكرة صغيرة ب معادلة دائرتها : $س^٢ + ص^٢ + ١٤ س + ٤٥ = ٠$



أوجد :
(أ) معادلة دائرة البكرة أ إذا كان طول نصف قطرها يساوى ٥ وحدات
(ب) البعد بين مركزى البكرتين إذا كان كل وحدة من المستوى الاحداثى تمثل ٦ سم

الحل : (أ) ∵ البكرة أ تمس محورى الاحداثيات ، وطول نصف قطرها يساوى ٥ وحدات

∴ مركز دائرتها النقطة م(٥ ، ٥) أى ل = -٥ ، ك = -٥

∵ جـ = ل^{٢} + ك^{٢} - نق^{٢} ∴ جـ = (-٥)^{٢} + (-٥)^{٢} - (٥)^{٢} = ٢٥

وتكون معادلتها: س^{٢} + ص^{٢} - ١٠س - ١٠ص + ٢٥ = صفر

(ب) ∵ معادلة دائرة البكرة ب: س^{٢} + ص^{٢} + ١٤س + ٤٥ = ٠

∴ ل = ٧ ك = ٠ جـ = ٤٥ نق = $\sqrt{٤٩ - ٤٥}$ = ٢

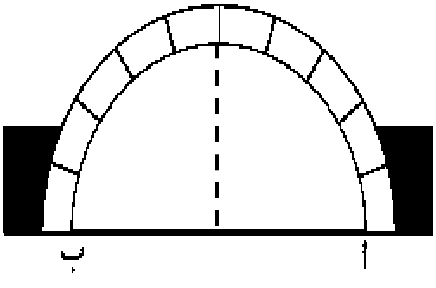
ويكون مركزها النقطة ن (-٧ ، ٠) وطول نصف قطرها يساوى ٢ وحدة

∴ البعد بين مركزى البكرتين = م ن = $\sqrt{(٥ + ٧)^{٢} + (٥)^{٢}}$ = ١٣ وحدة

∵ كل وحدة فى المستوى الإحداثى تمثل ٦سم

∴ البعد بين البكرتين = ١٣ × ٦ = ٧٨سم

مثال : يوضح الشكل المقابل مقطعا رأسيا فى أحد الانفاق الدائرية لمرور السيارات معادلة دائرته : س^{٢} + ص^{٢} – ٤ س – ٦ ص – ١٢ = ٠ ، $\overline{أب}$ قطر فيها . أوجد أقصى ارتفاع للنفق إذا كانت وحدة الأطوال فى المستوى الاحداثى تمثل ٧٠ سم .



الحل :

∵ معادلة الدائرة س^{٢} + ص^{٢} – ٤ س – ٦ ص – ١٢ = ٠

∴ ل = - ٢ ، ك = - ٣ ، جـ = - ١٢

∴ ل^{٢} + ك^{٢} – جـ = ٤ + ٩ + ١٢ = ٢٥ > ٠ ∴ نق = ٥ وحدة

∴ أقصى ارتفاع للنفق = نق = ٥ × ٧٠ = ٣٥٠ سم

تمارين على معادلة الدائرة

اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاه

(١) النقطة (٢ ، ٠) تقع على
(أ) محور السينات (ب) محور الصادات (ج) المستقيم ص = ٢س (د) الدائرة س^2 + ص^2 = ٩

(٢) إذا كانت أ(٣ ، -٧) ، ب(-٣ ، ٥) فإن إحداثيي النقطة التى تنصف $\overline{\text{أب}}$ هما
(أ) (٠ ، ١) (ب) (١ ، ٠) (ج) (٠ ، -١) (د) (-١ ، ٠)

(٣) المسافة بين النقطتين (٢ ، ٤) ، (١٠ ، -٢) تساوى
(أ) ٩ (ب) ١٠ (ج) ٣$\sqrt{١٠}$ (د) ٦

(٤) الدائرة س^2 + ص^2 = ٢٥ مركزها (٠ ، ٠) وتمر بالنقطة
(أ) (١ ، ٤) (ب) (٥ ، ٠) (ج) (٢٥ ، ٠) (د) (٥ ، ١)

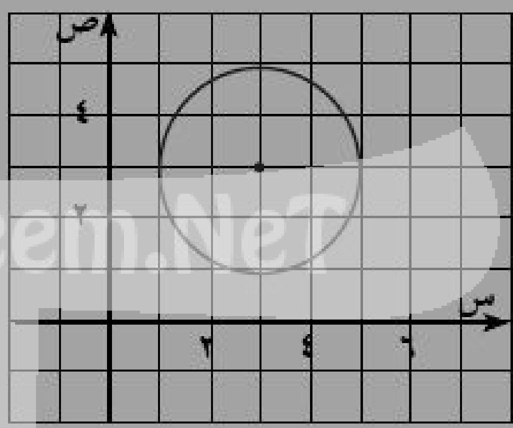
(٥) معادلة الدائرة التى مركزها (٣ ، -٥) وطول نصف قطرها يساوى ٧ وحدات هى:-
(أ) (س - ٣)^2 + (ص - ٥)^2 = ٤٩ (ب) (س + ٣)^2 + (ص - ٥)^2 = ٤٩
(ج) (س + ٣)^2 + (ص - ٥)^2 = ٤٩ (د) (س - ٣)^2 + (ص + ٥)^2 = ٤٩

(٦) محيط الدائرة التى معادلتها س^2 + ص^2 = ٨
(أ) ٨ π (ب) ٦٤ π (ج) ٢$\sqrt{٢}$ π (د) ٤$\sqrt{٢}$ π

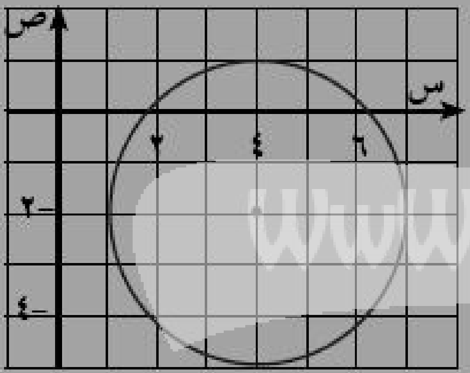
(٧) أكتب معادلة الدائرة التى مركزها م وطول نصف قطرها نق إذا كان:
(أ) م (٢،٣) ، نق = ٥ (ب) م(٠ ، ٠) ، نق = ٤
(ج) م (٣،٠) ، نق = ٦ (د) م(٤ ، -٥) ، نق = $\sqrt{٧}$
(هـ) م (٠،-١) ، نق = ٢$\sqrt{٣}$ (و) م(-٤ ، -٣) ، نق = $\frac{٣}{٢}$

٨ اكتب معادلة الدائرة التى يمثلها الرسم المعطى

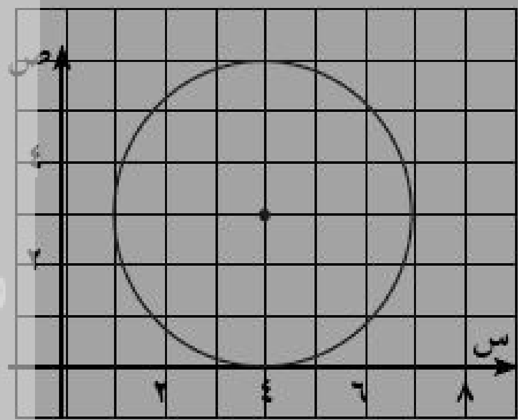
أ



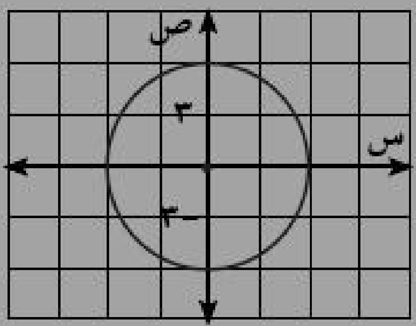
ب



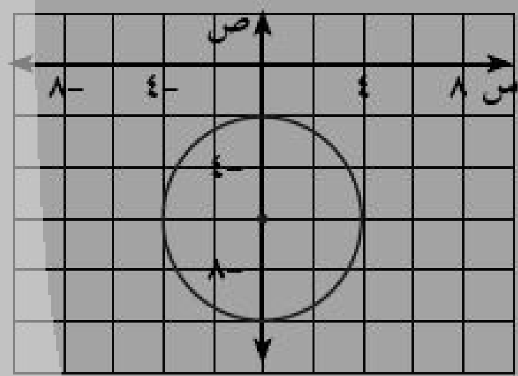
ج



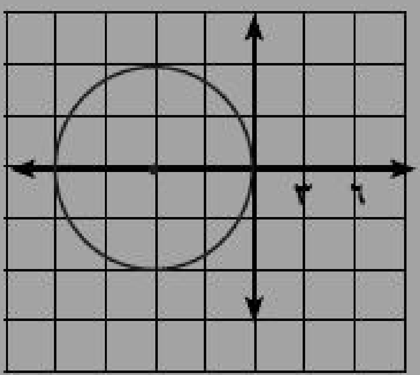
د



هـ



و



٩ أوجد معادلة الدائرة إذا كان:

أ مركزها النقطة م (٧ ، -٥)، وتمر بالنقطة أ(٣ ، ٢).

ب $\overline{\text{أب}}$ قطر فى الدائرة حيث أ(٦ ، -٤) ، ب(٠ ، ٢).

ج مركزها النقطة (٥ ، -٣)، وتمس محور السينات.

(١٠) **أوجد إحداثيا المركز، وطول نصف القطر لكل من الدوائر الآتية:**

(أ) $س^٢ + ص^٢ = ٢٧$ (ب) $(س + ٣)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ٤٩$

(ج) $(س - ٢)^٢ + ص^٢ = ١٦$ (د) $س^٢ + (ص + ٧)^٢ = ٢٤$

(١١) **اكتب الصورة العامة لمعادلة الدائرة فى الحالات الآتية:**

(أ) مركزها م(٣ ، ١)، وطول قطرها يساوى ٨. (ب) مركزها م (٠ ، ٠)، وتمر بالنقطة أ (-١ ، ٣)

(ج) مركزها م (-٥ ، ٠)، وتمر بالنقطة ب (٣ ، ٤) (د) $\overline{أب}$ قطر فيها حيث أ(٣ ، -٧) ، ب(٥ ، ١

(١٢) **أوجد احداثيا المركز، وطول نصف القطر لكل من الدوائر الآتية**

(أ) $س^٢ + ص^٢ - ٤س + ٦ص - ١٢ = ٠$ (ب) $س^٢ + ص^٢ + ٢س = ٨$

(ج) $س^٢ + ص^٢ - ٦س + ١٠ص = ٠$ (د) $س^٢ + ص^٢ - ٨س = ١٢$

(١٣) **بين أى دائرتين مما يلى متطابقتان**

(أ) $س^٢ + ص^٢ - ٢س + ٤ص - ٣ = ٠$ ، $س^٢ + ص^٢ + ٦س - ١١ = ٠$

(ب) $س^٢ + ص^٢ - ١٤س + ٣٧ = ٠$ ، $س^٢ + ص^٢ + ١٠س + ١٣ = ٠$

(١٤) **بين أى المعادلات الآتية لدائرة ، ثم أوجد مركزها وطول نصف قطرها:**

(أ) $س^٢ + ص^٢ + ٨س - ١٦ص - ١ = ٠$ (ب) $س^٢ + ٢ص^٢ + ٦س - ٥ص = ٠$

(ج) $\frac{١}{٤}س^٢ + \frac{١}{٤}ص^٢ + س - ٨ = ٠$ (د) $س^٢ + ص^٢ + ٢س ص - ١٢ = ٠$

(هـ) $س^٢ + ص^٢ - ٢س + ٤ص + ٧ = ٠$ (و) $٢س^٢ + ٢ص^٢ + ٣ص - ٨ = ٠$

(١٥) الملاحة البحرية: يقع رادار عند الموقع أ(٧ ، -٩) ويغطى منطقة دائرية طول نصف قطرها يساوى ٣٠ وحدة طول. اكتب معادلة الدائرة التى تحد مجال عمل الرادار فى المستوى الإحداثى. هل يمكن للرادار رصد سفينة فى الموقع ب (٢٥ ، -٣٠)؟ فسر إجابتك.

(١٦) التصميم المعمارى: صمم مهندس معمارى مبنى على شكل ثمانى منتظم تمر رؤوسه بالدائرة $س^٢ + ص^٢ - ٤س + ١٢ص - ٦٠ = ٠$ إحسب مساحة المبنى لأقرب وحدة مربعة.

(١٧) تفكير ابداعى: أوجد معادلة الدائرة التى تمر بالنقطتين أ(١ ، ٣) ، ب(٢ ، -٤) ويقع مركزها على محور السينات.

الوحدة الرابعة : الاحتمـال

* **حساب الاحتمال :**

مفاهيم و مصطلحات

م	المصطلح أو المفهوم	التعـــــــــريف
١	التجـــــربة العشوائية	هى تجربة نستطيع أن نحدد جميع النواتج الممكنة لها قبل إجرائها وإن كنا لا نستطيع تحديد أى هذه النواتج سيتحقق فعلاً عند اجرائها.
٢	فضــــــاء العينــــة	هو مجموعة كل النواتج الممكنة الحدوث لهذه التجربة ويرمز لها عادة بالرمز (ف) .
٣	الأعــــــداد الأولية	هى أعداد لا تقبل القسمة إلا على نفسها أو على الواحد الصحيح مثل : (٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، . . . الخ) .

* **أمثلة على التجربة العشوائية :**

١- إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين وملاحظة تتابع الصور والكتابات.
٢- سحب بطاقة واحدة من حقيبة بها ٢٠ بطاقة متماثلة مرقمة من ١ إلى ٢٠ وملاحظة العدد الذى يظهر على البطاقة المسحوبة.
٣- إلقاء حجر نرد منتظم وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى.
٤- إلقاء قطعة نقود معدنية وملاحظة ما يظهر على الوجه العلوى.
٥- سحب كرة من كيس به أربع كرات متماثلة فى الحجم والوزن، الأولى بيضاء ، الثانية سوداء، الثالثة حمراء، الرابعة خضراء، وملاحظة لون الكرة

* **أمثلة على فضاء العينة :**

(١) تجربة إلقاء قطعة نقود مرة واحدة و ملاحظة الوجه الظاهر :
ف = { ص ، ك }   حيث : ن (ف) = ٢

(٢) تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتالتين" قطعتى نقود متمايزتين مرة واحدة " و ملاحظة تتابع ظهور الصور و الكتابات :

ف = { (ص ، ص) ، (ص ، ل) ، (ل ، ص) ، (ل ، ل) }

حيث : ں (ف) = ٢^{٢} = ٤

(٣) تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية " ثلاث قطع متمايزة نقود مرة واحدة " و ملاحظة تتابع ظهور الصور و الكتابات :

ف = { (ص ، ص ، ص) ، (ص ، ص ، ل) ، (ص ، ل ، ص) ، (ص ، ل ، ل) ، (ل ، ص ، ص) ، (ل ، ص ، ل) ، (ل ، ل ، ص) (ل ، ل ، ل) }

حيث : ں (ف) = ٢^{٣} = ٨

(٤) تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة و ملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى :

ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } حيث : ں (ف) = ٦

(٥) تجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتالتين " حجرى نرد متمايزين مرة واحدة " (اى مختلفتان فى الشكل أو الحجم) و ملاحظة الأعداد الظاهرة على الوجه العلوى :

ف = { (١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، ..... ، (٦ ، ٦) } حيث : ں (ف) = ٦^{٢} = ٣٦

طريقة الحصول على ف

مثلا : القاء قطعة نقود منتظمة مرتين

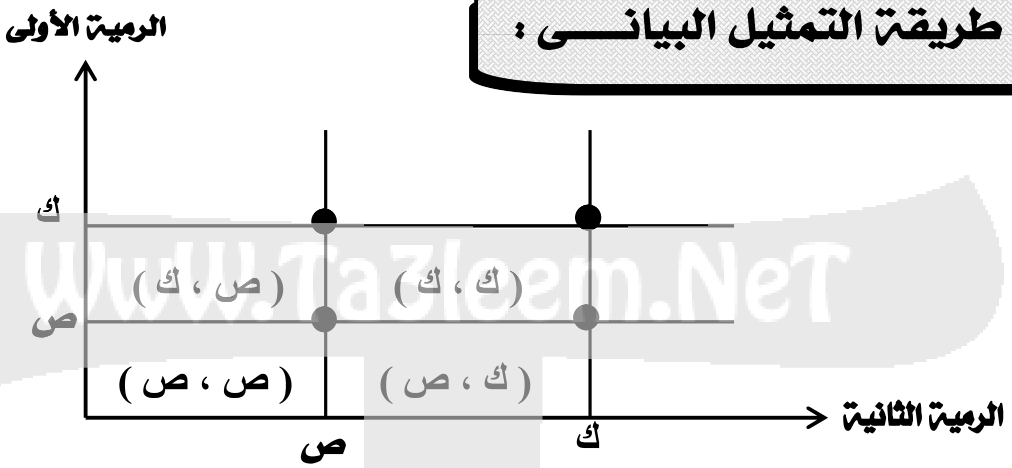
أولا : طريقة الحاصل الديكارتى :

ف = { ص ، ك } × { ص ، ك } = { (ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ك) ، (ك ، ص) }

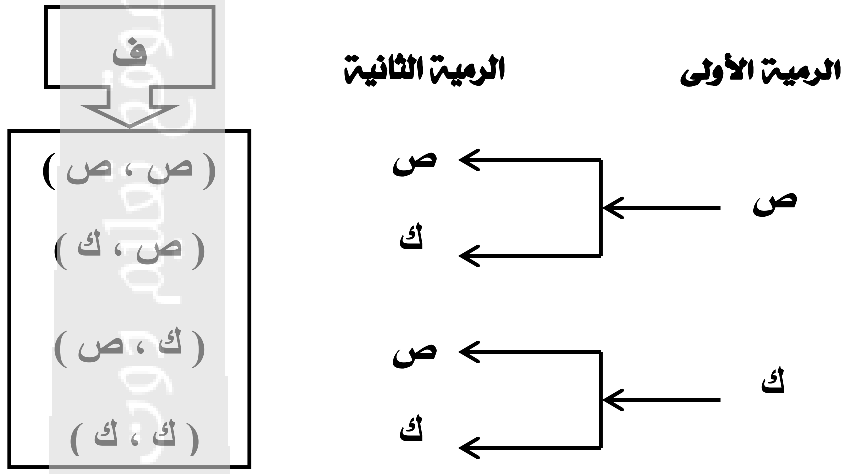
ثانيا : طريقة الجـــــــدول :

الرمية الثانية / الرمية الأولى	ص	ك
ص	(ص ، ص)	(ص ، ك)
ك	(ك ، ص)	(ك ، ك)

ثالثا : طريقة التمثيل البيانـــى :



رابعا : طريقة الشجرة البيانيـــة :



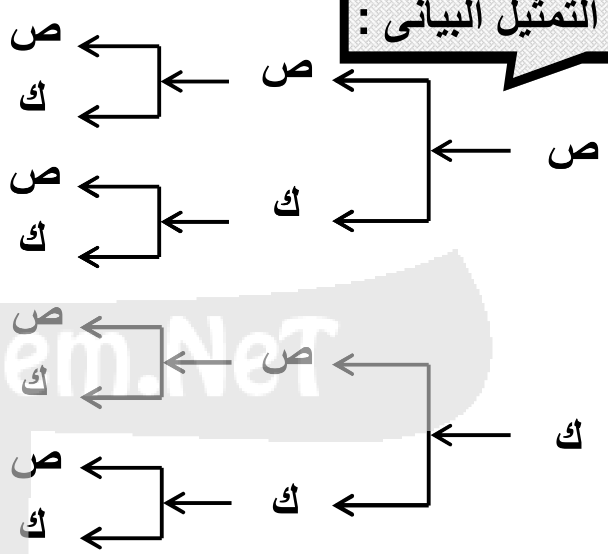
نلاحظ فى هذا المثال أن كل ناتج من النواتج يظهر فى شكل زوج مرتب :
(الرمية الأولى ، الرمية الثانية) .

مثال : فى تجربة إلقاء قطعة نقود ٣ مرات متتالية أو ٣ قطع نقود مرة واحدة وملاحظة النواتج وتمثيلها بيانيا .

الحل :

ف = { (ص ، ص ، ص) ، (ص ، ص ، ك) ، (ص ، ك ، ص) ، (ك ، ص ، ص) ، (ص ، ك ، ك) ، (ك ، ص ، ك) ، (ك و ك ، ص) ، (ك ، ك ، ك) }

التمثيل البيانى :



خلى بالك

الشجرة البيانية أفضل طريقة لتمثيل التجربة المحتوية على أكثر من عمليتين بعكس الشبكة البيانية حيث تفضل فى حالة التجربة المحتوية على عمليتين

ملاحظات هامة :

١) فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين هى نفسها فضاء النواتج عند رمى قطعتين من النقود متمايزتين مرة واحدة (معا) .
عدد عناصر ف فى هذه الحالة = $ف_{١} \times ف_{٢}$

٣) عدد عناصر ف فى حالة إجراء ٣ عمليات = $ف_{١} \times ف_{٢} \times ف_{٣}$ وهكذا .

٤) عند إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين أو حجرين مرة واحدة وملاحظة الأعداد التى تظهر على الوجه العلوى نجد أن : ف = عدد عناصر الرمية الأولى ٦ × عدد عناصر الرمية الثانية ٦ = $٦^{٢}$ = ٣٦ عنصرا .

٥) عند رمى قطعة نقود م من المرات المتتالية يكون ن (ف) = $٢^{م}$
، (ص ، ك) $\neq$ (ك ، ص)

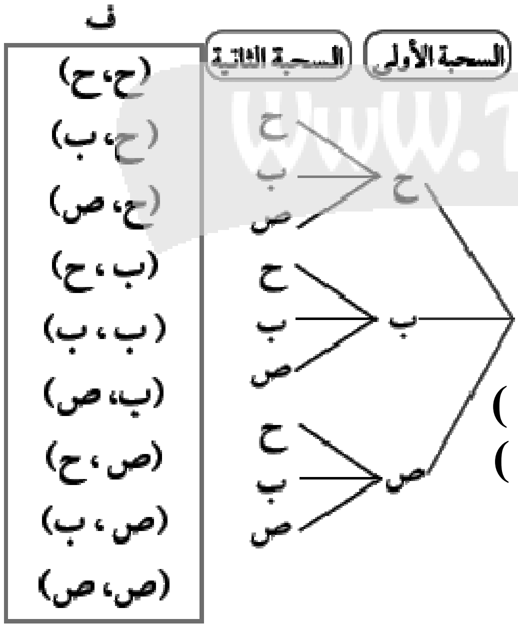
٦) يكون فضاء العينة منهيا إذا كان عدد عناصره محدوداً أو غير منتهه إذا كان عدد عناصره غير محدود وسندرس فقط فضاء النواتج المنته .

٧) إذا سحبت الكرة دون إحلال فهذا يعنى عدم إعادة الكرة الى الكيس بعد سحبها وبذلك لن يكون هناك فرص لظهورها فى السحبة الثانية

مثال : كيس به ثلاث كرات متماثلة الأولى حمراء والثانية بيضاء والثالثة صفراء . اكتب فضاء العينة إذا سحبت كرتان الواحدة بعد الآخرى مع إعادة الكرة المسحوبة قبل سحب الكرة الثانية (مع الإحلال) و ملاحظة تتابع الألوان .

الحل :

نرمز الى الكرة الحمراء (ح) و الكرة البيضاء (ب) و الكرة الصفراء (ص) .

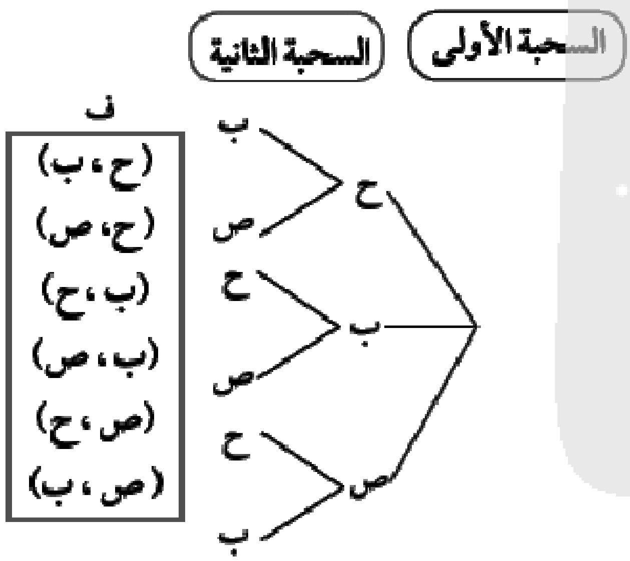


الشكل المقابل يمثل الشجرة البيانية لفضاء العينة حيث ن (ف) = ٣ ٢ = ٩

ف = { (ح ، ح) ، (ح ، ب) ، (ح ، ص) ، (ب ، ح) ، (ب ، ب) ، (ب ، ص) ، (ص ، ح) ، (ص ، ب) ، (ص ، ص) }

مثال : كيس به ثلاث كرات متماثلة الأولى حمراء والثانية بيضاء والثالثة صفراء . اكتب فضاء العينة إذا سحبت كرتين الواحدة بعد الآخرى بدون إحلال و ملاحظة تتابع الألوان .

الحل :



يقصد بعبارة (دون إحلال) عدم إعادة الكرة إلى الكيس بعد سحبها وبذلك لن يكون هناك فرصة لظهورها في السحبة الثانية

∴ ن (ف) = ٣ × ٢ = ٦

ف = {(ح ، ب) ، (ح، ص) ، (ب ، ح) ، (ب ، ص) ، (ص ، ح) ، (ص ، ب) }

مثال: صندوق به ثلاث كرات متماثلة و مرقمة من ١ إلى ٣ سحبت كرتان الواحدة بعد الأخرى مع الإحلال و ملاحظة رقم الكرة . اكتب فضاء العينة و بين عدد عناصره .

الأحداث

الحدث: هو مجموعة جزئية من فضاء العينة

فإذا كان : ٩ حدث فى ف فإن : ٩ ⊂ ف

و عدد عناصره هو : ن (٩) أى عدد فرص وقوع الحدث ٩

فمثلا : إذا كان ٩ هو حدث ظهور رقم زوجى عند إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة وملاحظة الرقم الظاهر على الوجه العلوى فإن : ٩ = { ٢ ، ٤ ، ٦ }

لاحظ أن : ٩ = { ٢ ، ٤ ، ٦ } ⊂ ف

الحدث المستحيل: هو الحدث الذى لا يمكن وقوعه " ∅ "
هو الحدث الخالى من أى عنصر

الحدث المؤكد: هو حدث لابد أن يقع عند إجراء التجربة العشوائية
و هو الحدث الذى عناصره هى عناصر فضاء العينة ف

الحدث البسيط (الحدث الآولى): هو هو مجموعة جزئية من فضاء العينة ف تحتوى على عنصر واحد فقط .

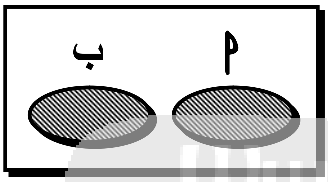
الحدث المركب: هو حدث يتكون من أكثر من عنصر و يسمى حدث غير بسيط

الحدثان المتنافيان: هما حدثان لا يمكن وقوعهما معاً أى أن:هما حدثان تقاطعهما = ∅

* ملاحظة هامة : الأحداث البسيطة فى فضاء العينة تكون متنافية مثنى مثنى

الأحداث المتنافية

* يقال لحدثين أ ، ب من فضاء عينة ف أنهما متنافيان إذا كان أ $\cap$ ب = $\varnothing$ والعكس صحيح .



* هذا يعنى أن الحدثين المتنافيين لا يمكن أن يقعا معاً فى نفس الوقت أى أن وقوع أحدهما ينفى وقوع الآخر .

*** ملاحظات هامة :**

- فى حالة الأحداث المتنافية لا يوجد تقاطع : (أ $\cap$ ب = $\varnothing$)
- على الأقل معناها الحدث نفسه والذى بعده .
- على الأكثر معناها الحدث نفسه والذى قبله .
- يقال لعدة أحداث أ، ب ، جـ إنها متنافية فقط فى حالة إذا كانت متنافية مثنى مثنى .

  فإن : أ $\cap$ ب = $\varnothing$ ، ب $\cap$ جـ = $\varnothing$ ، أ $\cap$ جـ = $\varnothing$
- الاتحاد $\cup$ معناه (أو) (على الأقل) .
- التقاطع $\cap$ معناه (و) (على الأكثر) .
- ل (ف) = ١ .
- أى حدث أ و مكمله أ/ هما حدثان متنافيان .
- الأحداث البسيطة (الأولية) فى أة تجربة عشوائية تكون متنافية .

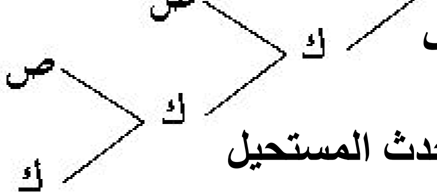
مثال : عند إلقاء قطعة نقود عدة مرات تتوقف التجربة عند ظهور صورة أو ٣ كتابات .

اكتب فضاء النواتج ف، ثم عين الأحداث الآتية:

أ "حدث ظهور صورة على الأكثر" ج "حدث ظهور كتابتين على الأقل"

ب "حدث ظهور صورة على الأقل" د "حدث ظهور صورتين على الأقل"

الحل: من الرسم نجد أن :



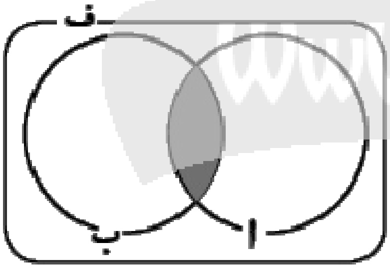
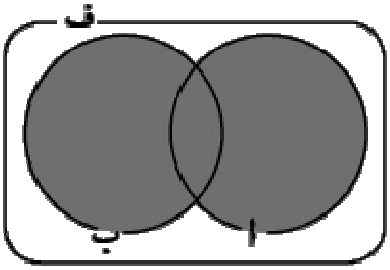
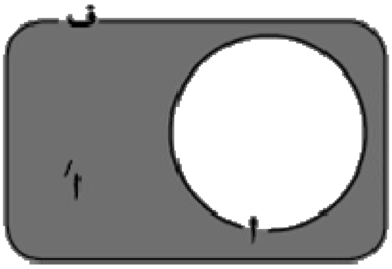
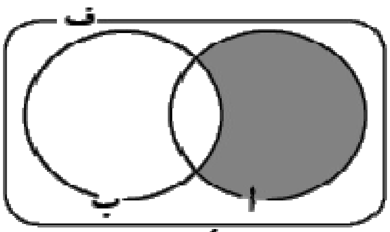
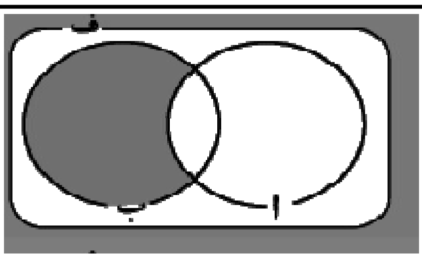
ف = { ص ، (ك ، ص) ، (ك ، ك ، ص) ، (ك ، ك ، ك) }

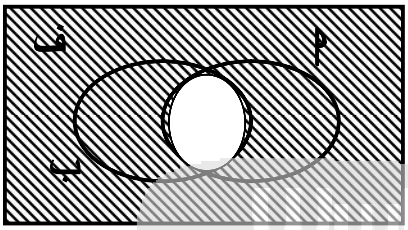
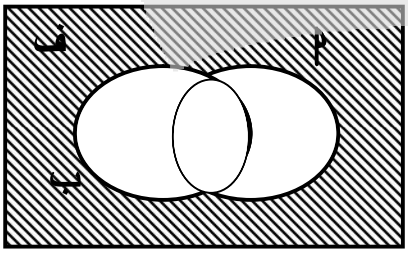
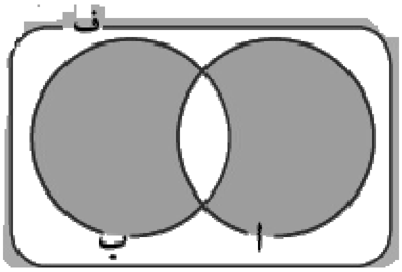
أ = { ص ، (ك ، ص) ، (ك ، ك ، ص) ، (ك ، ك ، ك) }= ف

ب = { ص ، (ك ، ص) ، (ك ، ك ، ص) }

ج = { (ك ، ك ، ص) ، (ك ، ك ، ك) } ، د = { } = $\varnothing$ الحدث المستحيل

العمليات على الاحداث

الحدث	التعبير عنه لفظياً	تمثيله بشكل فن
عملية التقاطع $أ \cap ب$	حدث وقوع أ ، ب معاً	 أ∩ب
عملية الاتحاد $أ \cup ب$	حدث وقوع أ أو ب أو كليهما أو حدث وقوع أحدهما على الأقل	 أ∪ب
عملية الاكمال $أ^{/} = ف - أ$	الحدث المكمل للحدث أو حدث عدم وقوع الحدث أ	
عملية الفرق $أ - ب$ $= أ \cap ب^{/}$ $= أ - (أ \cap ب)$	حدث وقوع أ وعدم وقوع ب أو حدث وقوع أ فقط	 $أ-ب = أ \cap ب^{/} = أ-(أ \cap ب)$
$ب - أ$ $= ب \cap أ^{/}$ $= ب - (أ \cap ب)$	وقوع الحدث ب فقط أو وقوع ب وعدم وقوع أ	

الحدث	التعبير عنه لفظيا	تمثيله بشكل فن
$(\text{أ} \cap \text{ب})' = \text{أ}' \cup \text{ب}'$	حدث عدم وقوع الحدثين معا أو وقوع أحدهما على الأكثر	
قانونا دى مورجان $(\text{أ} \cup \text{ب})' = \text{أ}' \cap \text{ب}'$	حدث عدم وقوع أى من الحدثين أو عدم وقوع أ وعدم وقوع ب	
$(\text{أ} - \text{ب}) \cup (\text{ب} - \text{أ}) =$ $(\text{أ} \cup \text{ب}) - (\text{أ} \cap \text{ب})$	إحتمال وقوع أحد الحدثين فقط أو إحتمال وقوع أحد الحدثين دون الآخر	

<u>تذكر أن</u> : لاى مجموعتين أ ، ب يكون $\text{أ} - \text{ب} = \text{أ} \cap \text{ب}' = \text{ب}' - \text{أ}'$

$\text{أ} \cup \text{أ}' = \text{ف}$ ، $\text{أ} \cap \text{أ}' = \varnothing$

فى تجربة إلقاء حجرى نرد متمايزن و ملاحظة العددين الظاهرين على الوجهين العلويين لها

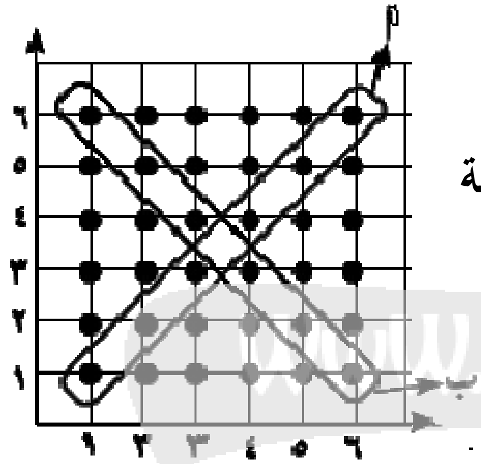
١) مثل فضاء العينة هندسيا و اكتب كلا من الحدثين الآتيين .

٢) الحدث أ " ظهور نفس العدد على الوجهين "

٣) الحدث ب " ظهور عددين مجموعهما ٧ "

٤) هل الحدثان أ ، ب متنافيان ؟ فسر إجابتك .

الحل :



ن (ف) = $٦^{٢}$ = ٣٦

١) الشكل المقابل هو التمثيل الهندسى (البيانى) لفضاء العينة

٢) أ = { (١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٤)
، (٥ ، ٥) ، (٦ ، ٦) }

٣) ب = { (٦ ، ١) ، (٥ ، ٢) ، (٤ ، ٣) ، (٣ ، ٤)
، (٢ ، ٥) ، (١ ، ٦) }

٤) أ ∩ ب = ∅ ∴ أ ، ب حدثان متنافيان .

---

* **<u>حساب الاحتمال</u> : الحدث مجموعة جزئية من فضاء العينة ف**

إذا كان أ حدث جزئى من فضاء متساو الامكانات فان:

ل (أ) = $\dfrac{\text{عدد النواتج التى تؤدى لوقوع الحدث (أ)}}{\text{عدد جميع النواتج الممكنة}}$ = $\dfrac{\text{ن (أ)}}{\text{ن (ف)}}$

مثال : سحبت كرة عشوائيا من صندوق به ١٠ كرات متماثلة منها ٥ كرات بيضاء ، كرتان لونهما أحمر ، الباقى باللون الأخضر ، احسب احتمال الأحداث الآتية :

١) أ حدث أن تكون الكرة المسحوبة حمراء .
٢) ب حدث أن تكون الكرة المسحوبة حمراء أو خضراء
٣) ج حدث أن تكون الكرة المسحوبة ليست خضراء .
٤) د حدث أن تكون الكرة المسحوبة حمراء أو بيضاء
٥) هـ حدث أن تكون الكرة المسحوبة حمراء أو بيضاء أو خضراء

الحل :

عدد عناصر فضاء العينة : ن (ف) = ١٠ ، عدد الكرات البيضاء = ٥
، عدد الكرات الحمراء = ٢ ، عدد الكرات الخضراء = ٣

١) احتمال أن تكون الكرة حمراء = ل (أ) = $\dfrac{\text{ن (أ)}}{\text{ن (ف)}}$ = $\dfrac{٢}{١٠}$ = $\dfrac{١}{٥}$ = ٠,٢

٢) احتمال أن تكون الكرة حمراء أو خضراء = $\frac{٢ + ٣}{١٠} = \frac{٥}{١٠} = \frac{١}{٢} =$ ٠,٥

٣) احتمال أن تكون الكرة ليست خضراء = $\frac{٧}{١٠} =$ ٠,٧

حل آخر : احتمال أن تكون الكرة ليست خضراء = ١ ـ احتمال الكرة خضراء

= ١ ـ $\frac{٣}{١٠} = \frac{٧}{١٠} =$ ٠,٧

٤) احتمال أن تكون الكرة حمراء أو بيضاء = $\frac{٢ + ٥}{١٠} = \frac{٧}{١٠} =$ ٠,٧

٥) احتمال أن تكون الكرة حمراء أو بيضاء أو خضراء = $\frac{٢ + ٥ + ٣}{١٠} = \frac{١٠}{١٠} =$ ١

---

* **مسلمات الاحتمال :**

إذا كان : أ حدثاً من أحداث فضاء العينة لتجربة عشوائية ما أى أ $\subset$ ف

فإن : إحتمال الحدث أ " ل (أ) " هو عدد حقيقى يحقق ما يأتى :

(١) ل (أ) = $\frac{\text{عدد عناصر الحدث}}{\text{عدد عناصر فضاء}} = \frac{ن(أ)}{ن(ف)}$

حيث : ٠ $\le$ ل (أ) $\le$ ١ أى : ل (أ) $\in$ [٠ ، ١]

أى أن : إحتمال وقوع أى حدث هو عدد حقيقى موجب لا يزيد عن الواحد الصحيح

(٢) ل (ف) = ١ أى أن : إحتمال الحث المؤكد = ١

(٣) ل ($\varnothing$) = صفر أى أن : إحتمال الحدث المستحيل = صفر

(٤) إذا كان : أ ، ب حدثين متنافين من فضاء عينة فإن :

ل (أ $\cap$ ب) = صفر

، ل (أ $\cup$ ب) = ل (أ) + ل (ب)

(٥) إذا كان : ف = { $أ_١$ ، $أ_٢$ ، $أ_٣$ ، ... ، $أ_ن$ }

فإن : ل ($أ_١$) + ل ($أ_٢$) + ل ($أ_٣$) + ... ل ($أ_ن$) = ١

مجموع الاحتمالات للأحداث الآولية = ١

(٦) إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة ، أ ⊂ ب

فإن : ل (أ ∩ ب) = ل (أ) ، ل (أ ∪ ب) = ل (ب) ، ل (أ) ⩽ ل (ب)

---

* **نتائج هامة :**

(١) ل (∅) = ٠

(٢) ل (أ′) = ١ − ل (أ) ، ل (أ) + ل (أ′) = ١

(٣) ل (أ − ب) = ل (أ) − ل (أ ∩ ب)

(٤) ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

ل (أ ∩ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∪ ب)

(٥) إحتمال عدم وقوع الحدثين أ و ب معاً ∴ ل (أ ∩ ب)′ = ١ - ل (أ ∩ ب)

(٦) إحتمال عدم وقوع أحد الحدثين أ أو ب على الأقل أو عدم وقوع كلاهما

ل (أ ∪ ب)′ = ١ - ل (أ ∪ ب) = ل (أ′ ∩ ب′)

(٧) احتمال وقوع أحدهما على الاكثر = (أ ∩ ب)′ = ١ − ل (أ ∩ ب) = ل (أ′ ∪ ب′)

(٨) ل (أ′ ∪ ب) = ل (أ ∩ ب′)′ = ١ − ل (أ ∩ ب′) = ١ − ل (أ − ب)

(٩) قانونا دى مورجان : ل (أ′ ∩ ب′) = ل (أ ∪ ب)′ ، ل (أ′ ∪ ب′) = ل (أ ∩ ب)′

مثال : إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة عشوائية حيث :

ل (أ) = $\frac{٣}{٨}$ ، ل (ب) = $\frac{٣}{٤}$ ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٤}$ احسب :

١) ل (أ ∪ ب) ٢) ل (أ′) ٣) ل (أ − ب)

٤) ل (أ′ ∩ ب′) ٥) ل (أ′ ∪ ب′) ٦) ل (أ ∪ ب)′

الحل : ١) ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) ـ ل (أ ∩ ب) = $\frac{٣}{٨} + \frac{٣}{٤} - \frac{١}{٤} = \frac{٧}{٨}$

٢) ل (أ$^{/}$) = ١ ـ ل (أ) = ١ ـ $\frac{٣}{٨} = \frac{٥}{٨}$

٣) ل (أ ـ ب) = ل (أ) ـ ل (أ ∩ ب) = $\frac{٣}{٨} - \frac{١}{٤} = \frac{١}{٨}$

٤) ل (أ$^{/}$ ∩ ب$^{/}$) = ل (أ ∪ ب)$^{/}$ = ١ ـ ل(أ ∪ ب) = ١ ـ $\frac{٧}{٨} = \frac{١}{٨}$

٥) ل (أ$^{/}$ ∪ ب$^{/}$) = ل (أ ∩ ب)$^{/}$ = ١ ـ ل (أ ∩ ب) = ١ ـ $\frac{١}{٤} = \frac{٣}{٤}$

٦) ل (أ ∪ ب)$^{/}$ = ١ ـ ل (أ ∪ ب) = ١ ـ $\frac{٧}{٨} = \frac{١}{٨}$

مثال : إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ف و كان ل (أ$^{/}$) = $\frac{١}{٣}$ ل (أ) ، ل (ب) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (أ$^{/}$ ∪ ب$^{/}$) = $\frac{٥}{٨}$ فأوجد :

أ) احتمال وقوع أحد الحدثين على الاقل ب) احتمال وقوع أحد الحدثين على الأكثر

جـ) احتمال وقوع الحدث ب فقط د) احتمال وقوع أحد الحدثين فقط

الحل : ∵ ل (أ$^{/}$ ∪ ب$^{/}$) = $\frac{٥}{٨}$ ∴ ل (أ ∩ ب)$^{/}$ = ١ ـ ل (أ ∩ ب) = $\frac{٥}{٨}$ ∴ ل (أ ∩ ب) = $\frac{٣}{٨}$

∵ ل (أ$^{/}$) = $\frac{١}{٣}$ ل (أ) ∴ ١ ـ ل (أ) = $\frac{١}{٣}$ ل (أ) ∴ $\frac{٤}{٣}$ ل (أ) = ١ ∴ ل (أ) = $\frac{٣}{٤}$

أ) احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل = ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) ـ ل (أ ∩ ب)

= $\frac{٣}{٤} + \frac{١}{٢} - \frac{٣}{٨} = \frac{٧}{٨}$

ب) احتمال وقوع أحد على الأكثر = ل (أ ∩ ب)$^{/}$ = ل (أ$^{/}$ ∪ ب$^{/}$) = $\frac{٥}{٨}$

جـ) احتمال وقوع الحدث ب فقط = ل (ب ـ أ) = ل (ب) ـ ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٢} - \frac{٥}{٨} = \frac{١}{٨}$

د) احتمال وقوع أحد الحدثين فقط = ل (أ ∪ ب) ـ ل (أ ∩ ب) = $\frac{٧}{٨} - \frac{٥}{٨} = \frac{٢}{٨} = \frac{١}{٤}$

مثال :إذا كان أ ، ب حدثين من ف ، ل(أ) = $\frac{٣}{٥}$ ، ل(أ ∪ ب) = $\frac{٣}{٤}$

أوجد ل(ب) إذا كان :

[١] أ ، ب حدثين متنافيين [٢] أ ⊃ ب

الحل:

[١] ∵ أ ، ب حدثين متنافيين

∴ ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب)

∴ $\frac{٣}{٤}$ = $\frac{٣}{٥}$ + ل (ب)

∴ ل (ب) = $\frac{٣}{٤}$ − $\frac{٣}{٥}$ = $\frac{٣}{٢٠}$

[٢] ∵ أ ⊃ ب ∴ ل (أ ∪ ب) = ل (ب) ∴ ل (ب) = $\frac{٣}{٤}$

مثال : إذا كان أ ⊃ ف ، ف فضاء عينة عشوائية ، $\frac{ل(أ')}{ل(أ)}$ = $\frac{٣}{٧}$ أوجد ل (أ)

الحل: ∵ $\frac{ل(أ')}{ل(أ)}$ = $\frac{٣}{٧}$ ∴ ل (أ') = $\frac{٣}{٧}$ ل(أ)

∵ ل(أ') + ل (أ) = ١ ∴ $\frac{٣}{٧}$ل(أ) + ل(أ) = ١ ∴ $\frac{١٠}{٧}$ ل (أ) = ١

∴ ل (أ) = $\frac{٧}{١٠}$ = ٠,٧

مثال : إذا كان احتمال نجاح طالب فى امتحان الفيزياء يساوى ٠,٨٥ و احتمال نجاحه فى امتحان الرياضيات فى أحد الامتحانين معاً ٠,٨ أوجد احتمال :

أ) نجاح الطالب فى أحد الامتحانين على الأقل

ب) نجاح الطالب فى امتحان الرياضيات فقط

جـ) عدم نجاح الطالب فى الامتحانين معا.

الحل : ليكن أ حدث نجاح الطالب في امتحان الفيزياء ، ب حدث نجاح الطالب فى الرياضيات

فيكون : ل (أ) = ٠,٨٥ ، ل (ب) = ٠,٩ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٨

(أ) احتمال نجاح الطالب فى أحد الامتحانين على الأقل = ل (أ ∪ ب)

∴ ل (أ ∪ ب)= ل (أ) + ل (ب) - ل (أ ∩ ب) = ٠,٨٥ + ٠,٩ - ٠,٨ = ٠,٩٥

(ب) احتمال نجاح الطالب فى امتحان الرياضيات فقط يعنى احتمال نجاحه فى امتحان الرياضيات وعدم نجاحه فى امتحان الفيزياء أى ل (ب - أ)

∴ ل (ب - أ) = ل (ب) - ل (ب ∩ أ) = ٠,٩ - ٠,٨ = ٠,١

(ج) حدث عدم نجاح الطالب فى الامتحانين معًا = (أ ∩ ب)´ وهو حدث مكمل للحدث (أ ∩ ب)

∴ ل(أ ∩ ب)´= ١ - ل (أ ∩ ب) = ١ - ٠,٨ = ٠,٢

مثال: ألقى حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين و لوحظ العدد الظاهر على الوجة العلوى فى كل مرة احسب احتمال :

١) أ حدث أن يكون " مجموع العددين الظاهرين أقل من أو يساوى ٤ "

٢) ب حدث أن يكون " أحد العددين ضعف الآخر "

٣) ج حدث أن يكون " الفرق المطلق للعددين يساوى ٢ "

٤) د حدث أن يكون " مجموع العددين أكبر من ١٢ "

٥) هـ حدث " العددان الظاهران متساويان "

٦) ط حدث " العدد فى الرمية الأولى فردى و فى الرمية الثانية زوجى :

الحل : ن (ف) = $٦^٢$ = ٣٦ ، ف لرمية واحدة = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

١) أ = { (١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (٢ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ١) }

ن (أ) = ٦ ∴ ل (أ) = $\frac{٦}{٣٦}$ = $\frac{١}{٦}$

٢) ب = { (١ ، ٢) ، (٢ ، ١) ، (٢ ، ٤) ، (٤ ، ٢) ، (٣ ، ٦) ، (٦ ، ٣) }

ن (ب) = ٦ ∴ ل(ب) = $\frac{٦}{٣٦}$ = $\frac{١}{٦}$

٣) ج = { (١ ، ٣) ، (٣ ، ١) ، (٢ ، ٤) ، (٤ ، ٢) ، (٣ ، ٥) ، (٥ ، ٣) ،

(٤ ، ٦) ، (٦ ، ٤) }

ن (ج) = ٨ ∴ ل (ج) = $\frac{٨}{٣٦}$ = $\frac{٢}{٩}$

٤) حيث انه لا يمكن أن يظهر عددان مجموعهما أكبر من ١٢ ∴ د = $\varnothing$ ∴ ل(د) = ٠

٥) هـ = { (١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٤) ، (٥ ، ٥) ، (٦ ، ٦) }

ن (هـ) = ٦ ∴ ل (هـ) = $\frac{٦}{٣٦}$ = $\frac{١}{٦}$

٦) ط = { (١ ، ٢) ، (١ ، ٤) ، (١ ، ٦) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٦) ،

(٥ ، ٢) ، (٥ ، ٤) ، (٥ ، ٦) }

ن (ط) = ٩ ∴ ل (ط) = $\frac{٩}{٣٦}$ = $\frac{١}{٤}$

مثال :ألقيت نقود ثلاث مرات متتالية و لوحظ تتابع الصور و الكتابات احسب احتمالات الاحداث الآتية :

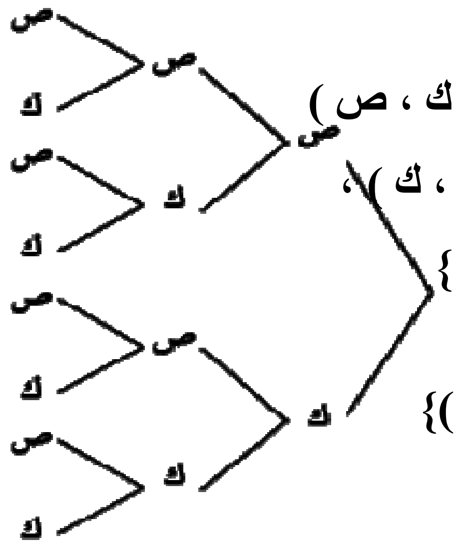
١) ٲ حدث ظهور صورة واحدة فقط ٢) ب حدث ظهور صورتين على الأقل

٣) ج حدث ظهور صورتين بالضبط ٤) س حدث ظهور نفس الوجة فى الرميات الثلاث

٥) ص حدث ظهور صورة على الأكثر ٦) ع حدث ظهور عدد فردى من الصور

٧) هـ حدث ظهور عدد من الصور يساوى نفس العدد من الكتابات

٨) ط حدث ظهور كتابة على الأقل



الحل: ف = { (ص ، ص ، ص) ، (ص ، ص ، ك) ، (ص ، ك ، ص)

، (ص ، ك ، ك) ، (ك ، ص ، ص) ، (ك ، ص ، ك) ،

، (ك ، ك ، ص) ، (ك ، ك ، ك) }

ن (ف) = ٨

١) ٲ = { (ص ، ك ، ك) ، (ك ، ص ، ك) ، (ك ، ك ، ص)}

ن (ٲ) = ٣ ∴ ل (ٲ) = $\frac{٣}{٨}$

٢) ب حدث ظهور صورتين على الاقل (أى إما صورتان أو ثلاث صور)

ب = { (ص ، ص ، ك) ، (ص ، ك ، ص) ، (ك ، ص ، ص) ، (ص ، ص ، ص) }

ن (ب) = ٤ ∴ ل (ب) = $\frac{٤}{٨}$ = $\frac{١}{٢}$

٣) ج = { (ص ، ص ، ك) ، (ص ، ك ، ص) ، (ك ، ص ، ص) }

ن(ج) = ٣ ∴ ل (ج) = $\frac{٣}{٨}$

٥)س حدث ظهور نفس الوجه فى الرميات الثلاث = { (ص ، ص ، ص) ، (ك ، ك ، ك)}

ن (س) = ٢ ∴ ل (س) = $\frac{٢}{٨}$ = $\frac{١}{٤}$

٦) ص حدث ظهور صورة على الأكثر

ص = { (ص ، ك ، ك) ، (ك ، ص ، ك) ، (ك ، ك ، ص) ، (ك ، ك ، ك) }

ن (ص) = ٤ ∴ ل (ص) = $\frac{٤}{٨}$ = $\frac{١}{٢}$

٧) هـ حدث ظهور عدد من الصور يساوى نفس العدد من الكتابات

هـ = $\varnothing$ ∴ ل (هـ) = صفر

مثال : إذا كان ۟أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية جميع نواتجها متساوية الامكانات و كان ل (۟أ ∪ ب) = $\frac{٥}{٦}$ ، ل (ب) = $\frac{٧}{١٢}$ فإذا كان عدد النواتج التى تؤدى الى وقوع الحدث ۟أ يساوى ١٣ و عدد جميع النواتج الممكنة يساوى ٣٦ فأوجد :

أولا : احتمال وقوع ۟أ و ب معا ثانيا : احتمال وقوع ۟أ و عدم وقوع ب

الحل :

ن (۟أ) = ١٣ ، ن (ف) = ٣٦ ∴ ل (۟أ) = $\frac{١٣}{٣٦}$ = $\frac{١}{٣}$

أولا : احتمال وقوع ۟أو ب معا ∴ ل (۟أ ∩ ب) = ل (۟أ) + ل (ب) − ل (۟أ ∪ ب)

= $\frac{١}{٣}$ + $\frac{٧}{١٢}$ − $\frac{٥}{٦}$ = $\frac{١}{١٢}$

ثانيا : احتمال وقوع ۟أ وعدم وقوع ب ∴ ل (۟أ ∩ ب′) = ل (۟أ − ب)

= ل(۟أ) − ل(۟أ ∩ ب)

= $\frac{١}{٣}$ − $\frac{١}{١٢}$ = $\frac{١}{٤}$

تمارين على الاحتمال

[١] يرغب طالب فى شراء حقيبة ويمكنه إختيارها من ثلاث أنواع بأحد حجمين، وقد يكون لون الحقيبة أسود أو بنى، مثل فضاء العينة فى هذا الموقف بالشجرة البيانية.

[٢] ألقيت قطعة نقود مرتين متتاليتين ولوحظ الوجهان الظاهران، اكتب فضاء النواتج، ثم عين كلًا من الأحداث الآتية:

- الحدث ا «ظهور كتابة واحدة فقط». - الحدث ب «ظهور نواتج متشابهة».
- الحدث ج «ظهور كتابة على الأكثر». - الحدث د «ظهور أكثر من صورتين».

[٣] فى تجربة القاء قطعة نقود ثم حجر نرد وملاحظة ما يظهر على وجهيهما العلويين.

(أ) اكتب فضاء العينة المرتبطة بهذه التجربة ثم عين كلًا من الأحداث الآتية.

- الحدث ا «ظهور صورة وعدد فردى». - الحدث ب «ظهور كتابة وعدد زوجى».
- الحدث ج «ظهور عدد أولى». - الحدث د «ظهور عدد يقبل القسمة على ٣».

[٤] فى تجربة القاء حجر نرد مرتين متتاليتين وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى.

(أ) عين كلًا من الأحداث التالية:

- الحدث ا «ظهور عددين متساويين». - الحدث ب «ظهور عددين مجموعهما ٩».
- الحدث ج «ظهور عددين مجموعهما ١٣». - الحدث د «ظهور العدد ٣ مرة واحدة على الأقل».

(ب) أى الاحداث السابقة متنافيه مثنى مثنى.

(ج) عبر لفظيًا عن الاحداث التالية ثم عين كل منها.

أَ ، جَ ، ا ∪ ب ، ا ∩ د ، د - ا ، ب ∩ جَ

[٥] من مجموعة الأرقام {١، ٢، ٣، ٤} كون عددًا من رقمين مختلفين. مثل فضاء النواتج ف بشكل شجرة، ثم اكتب ف وعيِّن منها الأحداث الآتية :

- أ حدث أن يكون رقم الآحاد فرديًا. - ب حدث أن يكون رقم العشرات فرديًا.
- ج حدث أن يكون كلا الرقمين فرديًا. - د حدث أن يكون رقم الآحاد أو رقم العشرات فرديًا.

[٦] حقيبة بها ٢ بطاقة متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٢٠ سحبت بطاقة واحدة عشوائيًا ولوحظ العدد المسجل على البطاقة المسحوبة اكتب الأحداث الآتية :

أ حدث " العدد المسجل زوجى وأكبر من ١٠" ب حدث " العدد المسجل عامل من عوامل ١٢"

ج حدث " العدد المسجل فردى ويقبل القسمة على ٣" د حدث " العدد المسجل مضاعف للعددين ٢، ٥ "

هـ حدث " العدد المسجل أولى"

و حدث " العدد المسجل يحقق المتباينة ٥س-٣ ≥ ١٧ "

[٧] سحبت بطاقتان الواحدة بعد الاخرى من بين ٨ بطاقات متماثلة و مرقمة من ١ الى ٨ مع إعادة البطاقة أولا قبل البطاقة الثانية ، ما عدد عناصر فضاء العينة ؟ و إذا كان :
ﻡ حدث " العدد فى السحبة الثانية ثلاثة أمثال العدد فى السحبة الأولى "
ب حدث " مجموع العددين أكبر من ١٣ "
اكتب كلا من ﻡ، ب ، هل ﻡ، ب حدثان متنافيان ؟ فسر ذلك .

[٨] فى تجربة إلقاء قطعة ثلاث مرات متتالية و ملاحظة تتابع الصور و الكتابات مثل فضاء النواتج بشكل شجرى ، ثم عين الأحداث الآتية :
ﻡ حدث " ظهور كتابتين على الاقل "
ب حدث " ظهور كتابتين على الأكثر
ج حدث " ظهور صورة فى الرمية الأولى
د حدث " عدم ظهور صورة فى الرميات الثلاث "

[٩] ألقيت قطعة نقود ثم حجر نرد و ملاحظة الوجه العلوى لقطعة النقود و العدد الظاهر على الوجة العلوى لحجر النرد ، مثل فضاء العينة بشكل شجرى ثم أوجد الآتية :
ﻡ حدث " ظهور كتابة و عدد زوجى " ب حدث " ظهور صورة و عدد فردى "
ج حدث " عدم وقوع ﻡ أو عدم وقوع ب د حدث " وقوع الحدث ﻡ فقط "
هـ حدث " وقوع الحدث ﻡ و وقوع الحدث ب "

[١٠] اختر الإجابة الصحيحة من الإجابات المعطاة :

١) إذا ألقى حجر نرد منتظم مرة واحدة فإن احتمال الحصول على عدد فردى أقل من ٥ :
[$\frac{٢}{٥}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٦}$]

٢) فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرتين متتالين فإن احتمال الحصول على عدد زوجى فى الرمية الأولى و عدد أولى فى الرمية الثانية هو : [$\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٦}$ ، $\frac{١}{٩}$ ، $\frac{١}{٤}$]

٣) إذا سحبت كرة عشوائيا من صندوق به ٣ كرات بيضاء ، ٥ كرات حمراء ، ٧ كرات خضراء فإن احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء أو خضراء هو :

[$\frac{١}{٥}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٧}{١٥}$ ، $\frac{١}{٢}$]

٤) يحتوى صندوق على تسع بطاقات متماثلة تحمل الأرقام من ١ إلى ٩ اختيرت بطاقة عشوائيا فإن احتمال أن تحمل البطاقة المسحوبة رقم يقسم العدد ٩ أو رقما فرديا هو :

[$\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٧}{٩}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٥}{٩}$]

٥) إذا كان ٲ ، ب حدثين من ف فضاء النواتج لتجربة عشوائية و كان ب ⊂ ٲ

، ل (ٲ) = ٢ ل (ب) = ٠,٦ فإن ل (ٲ – ب) يساوى :

[٠,٦ ، ٠,٣ ، ٠,٤ ، ٠,٢]

[١١] ألقى حجر نرد منتظم كتب على أوجهه الأعداد ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ ، ١٣ و لوحظ العدد على الوجه العلوى :

(أ) احسب احتمال كل من الأحداث التالية :

* ٲ " حدث ظهور عدد فردى " * ب " حدث ظهور عدد أولى "

* ج " حدث ظهور عدد زوجى " * د " حدث ظهور عدد أكبر من ١٢ "

* هـ " حدث ظهور عدد مكون من رقمين "

* و " حدث ظهور عدد مكون من رقم واحد "

(ب) احسب : ل (ٲ∪ج) ، ل (هـ∪و) ، ل (ب ∩ د)

[١٢] إذا كان ف = { ٲ ، ب ، ج ، د } فضاء عينة لتجربة عشوائية أوجد :

ل (ٲ) ، ل (ب) ، إذا كان ل (ٲ) = ٣ ل(ب) ، ل (ج) = ل (د) = $\frac{٧}{١٨}$

[١٣] إذا كان ٲ ، ب حدثين متنافين من فضاء عينة لتجربة عشوائية و كان :

ل (ٲ∪ب)= ٠,٦ ، ل(ٲ− ب) = ٠,٢٥ احسب ل(ٲ) ، ل (ب)

[١٤] إذا كان ٲ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية و كان ل (ٲ) = $\frac{١}{٣}$ ، ل(ب) = $\frac{١}{٨}$

، ل (ٲ∩ب) = $\frac{١}{٤}$ أوجد :

أ) ل (ٲ/) ب) ل(ٲ∪ب) جـ) ل (ٲ− ب) د) ل (ٲ/∩ب/)

[١٥] إذا كان ٲ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، حيث ل (ٲ) = ٠,٤
، ل (ب/) = ٣ ل (ب) ، ل (ٲ∩ب) = ٠,٢ احسب احتمال :
أ) وقوع ٲ فقط ب) وقوع ٲ أو ب جـ) وقوع ٲ و عدم وقوع ب

[١٦] صندوق به كرات متماثلة و ملونه منها ٤ حمراء ، ٦ زرقاء ، ٥ صفراء سحبت منه كرة واحدة عشوائية . احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة :
أ) حمراء ب) زرقاء أو صفراء جـ) ليست زرقاء د) ليست حمراء و لا صفراء

[١٧] مجموعة بطاقات متماثلة و مرقمة من ١ إلى ٣٠ سحبت منها بطاقة واحدة عشوائيا و لوحظ العدد المدون عليها . احسب احتمال أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل :
أ) عددا يقبل القسمة على ٣ ب) عددا يقبل القسمة على ٥
جـ) عددا يقبل القسمة على ٣ و ٥ د) عددا يقبل القسمة على ٣ أو ٥

[١٨] ألقيت ثلاث قطع نقود متمايزة مرة واحدة. احسب احتمال كل من الأحداث التالية:

- أ حدث ظهور صورة واحدة أو صورتين.
- ب حدث ظهور صورة واحدة على الأقل.
- ج حدث ظهور صورة على الأكثر.
- د حدث ظهور كتابتين متتاليتين على الأقل.

[١٩] فى تجربه إلقاء حجر نرد مرتين و ملاحظه العدد الذى يظهر على الوجه العلوى فى كل مرة . احسب احتمال كل من الأحداث التالية :

١) حدث ظهور العدد ٤ فى الرمية الأولى

٢) حدث مجموع العددين فى الرميتين يساوى ٨

٣) حدث مجموع العددين فى الرميتين أقل من أو يساوى ٥