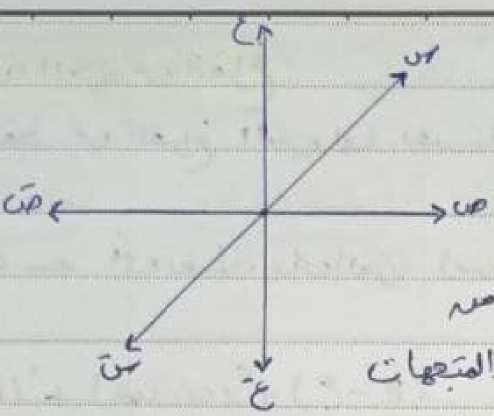
(هندسة فراغية)



أى نقطة فى الفراغ (س، ص، ع)

٣ محاور — ٣ مستويات

• تحوى عدد لا نهائي من المستقيمات والنقط والمتجهات

محور (س):
خط مستقيم
أى نقطة عليه
(س، ٠، ٠)

محور (ص):
خط مستقيم
أى نقطة عليه
(٠، ص، ٠)

محور (ع):
خط مستقيم
أى نقطة عليه
(٠، ٠، ع)

المستويات

س ص	س ع	ص ع
ع = ٠	ص = ٠	س = ٠
أى نقطة واقعة عليه	أى نقطة واقعة عليه	أى نقطة واقعة عليه
(س، ص، ٠)	(س، ٠، ع)	(٠، ص، ع)

النقط فى الفراغ أ (س١، ص١، ع١)

بعدها عن المحور
- عن محور س ← $\sqrt{\text{ص}_1^2+\text{ع}_1^2}$
- عن محور ص ← $\sqrt{\text{س}_1^2+\text{ع}_1^2}$
- عن محور ع ← $\sqrt{\text{س}_1^2+\text{ص}_1^2}$

بعدها عن المستوى
- س ص ← $|\text{ع}_1|$
- ص ع ← $|\text{س}_1|$
- س ع ← $|\text{ص}_1|$

عن النقطة ب (س٢، ص٢، ع٢)
البعد بين أ، ب هو
طول أب ←
$\sqrt{(\text{س}_2-\text{س}_1)^2+(\text{ص}_2-\text{ص}_1)^2+(\text{ع}_2-\text{ع}_1)^2}$

⇓

• إثبات مجموعة نقط على استقامة واحدة
• مربع
• مثلث متساوى الساقين الأضلاع

لاحظ

١) إحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة
• إذا كان ج منتصف أ ب
∴ ج = $\left(\frac{\text{أ}+\text{ب}}{2}\right)$

٢) نقطة تلاقى متوسطات المثلث
أ (س١، ص١، ع١)
ب (س٢، ص٢، ع٢)
جـ (س٣، ص٣، ع٣)

∴ م = $\left(\frac{\text{س}_1+\text{س}_2+\text{س}_3}{3}, \frac{\text{ص}_1+\text{ص}_2+\text{ص}_3}{3}, \frac{\text{ع}_1+\text{ع}_2+\text{ع}_3}{3}\right)$

معادلة الكرة فى الفراغ

هى جميع النقط فى الفراغ التى لها بعد ثابت (نق) عن نقطة ثابتة (المركز) ← (أ، ب، ج)

معادلة الكرة ← أى نقطة على الكرة (س، ص، ع)

$\sqrt{(س-أ)^2+(ص-ب)^2+(ع-ج)^2} = نق$

$(س-أ)^2+(ص-ب)^2+(ع-ج)^2 = نق^2$ ← الصورة القياسية

* قوة النقطة بالنسبة للكرة :-

$(س-أ)^2+(ص-ب)^2+(ع-ج)^2 = نق^2$ (تقع على سطح الكرة)

$(س-أ)^2+(ص-ب)^2+(ع-ج)^2 < نق^2$ (النقطة تقع داخل الكرة)

$(س-أ)^2+(ص-ب)^2+(ع-ج)^2 > نق^2$ (النقطة تقع خارج الدائرة)

* الصورة العامة لمعادلة الكرة (فك القياسية)

$س^2+ص^2+ع^2 + ٢ل س + ٢ك ص + ٢م ع + د = صفر$ ← الحد المطلق فى الصورة العامة

المركز (م) = $(-\frac{١}{٢}$ معامل س ، $\frac{-١}{٢}$ معامل ص ، $\frac{-١}{٢}$ معامل ع $)$ = (-ل، -ك، -م)

$نق = \sqrt{ل^2+ك^2+م^2-د}$

لاحظ شروط معادلة الكرة

١) معامل $س^2$ = معامل $ص^2$ = معامل $ع^2 \neq$.

٢) المعادلة لا تحتوي على س ص أو س ع أو ص ع

٣) $ل^2+م^2+ك^2-د > ٠$

- قانون حجم الكرة ← $\frac{٤}{٣} \pi نق^3$
- مساحة الكرة ← $٤\pi نق^2$
- المساحة الكلية للمكعب ← ٦ (طول الحرف)^2

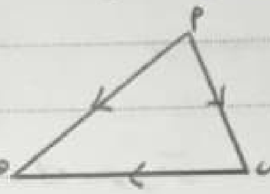
العمليات :-

١) ك $\overline{أ}$ = (ك س₁ ، ك ص₁ ، ك ع₁)

* إذا كان $\overline{أ}$ = $\overline{ب}$ ← متكافئان

∴ $س_1 = س_2$ ، $ص_1 = ص_2$ ، $ع_1 = ع_2$

٢)



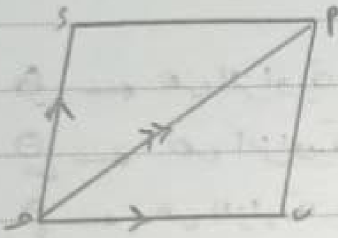
* $\overline{أجـ} = \overline{أب} + \overline{بجـ}$

له المحصلة في الاستاتيكا

* $\overline{أب} + \overline{بجـ} + \overline{جـأ}$ = صفر

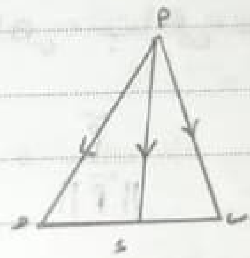
أجـ - أجـ = صفر

٣)



* $\overline{أجـ} = \overline{أب} + \overline{أد}$

٤)



* $\overline{أب} + \overline{أجـ} = ٢ \overline{أد}$

الضرب القياسي

$\overline{أ}$ (س₁ ، ص₁ ، ع₁) $\overline{ب}$ = (س₂ ، ص₂ ، ع₂)

والزاوية بينهم θ (زاوية بين اتجاههم) ∈ [٠ ، π]

$\overline{أ} \cdot \overline{ب}$ = س₁ س₂ + ص₁ ص₂ + ع₁ ع₂

$\overline{أ} \cdot \overline{ب}$ = ‖$\overline{أ}$‖ ‖$\overline{ب}$‖ جتا θ ← المحصورة بين المتجهين

* مع مراعاة *

لازم يكون المتجهين خارجين من نفس النقطة

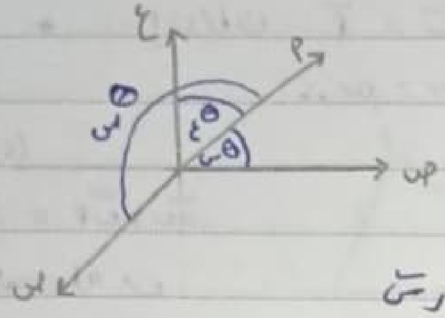
لازم يكون المتجهين داخلين نفس النقطة

لو غير كده نعمل امتداد لواحد فيهم وناخذ الزاوية الجديدة

* زوايا الاتجاه وجيوب تمام الاتجاه

هي الزوايا التي يصنعها المتجه مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الاحداثيات

$\theta_{\text{س}} ، \theta_{\text{ص}} ، \theta_{\text{ع}}$



حيث $\theta_{\text{س}} ، \theta_{\text{ص}} ، \theta_{\text{ع}} \in [\,0 ، \pi\,]$

$\theta_{\text{س}} \leftarrow$ هي الزاوية بين المتجه $\vec{\text{أ}}$ وأي متجه على محور س

$\theta_{\text{ص}} \leftarrow$ هي الزاوية بين المتجه $\vec{\text{أ}}$ وأي متجه على محور ص

$\theta_{\text{ع}} \leftarrow$ هي الزاوية بين المتجه $\vec{\text{أ}}$ وأي متجه على محور ع

* جيوب تمام زوايا الاتجاه للمتجه (جتا $\theta_{\text{س}}$ ، جتا $\theta_{\text{ص}}$ ، جتا $\theta_{\text{ع}}$)

ملاحظات هامة

* (جتا $\theta_{\text{س}}$ ، جتا $\theta_{\text{ص}}$ ، جتا $\theta_{\text{ع}}$) $= \hat{\text{ي}}_{\text{أ}} = \dfrac{\vec{\text{أ}}}{\|\vec{\text{أ}}\|}$

* جتا² $\theta_{\text{س}}$ + جتا² $\theta_{\text{ص}}$ + جتا² $\theta_{\text{ع}}$ = 1

* إذا كان $\vec{\text{أ}} \parallel \vec{\text{ب}}$ وفي نفس الاتجاه

∴ $\vec{\text{أ}}$ ، $\vec{\text{ب}}$ لهم نفس زوايا الاتجاه

* إذا كان $\vec{\text{أ}} \parallel \vec{\text{ب}}$ وفي اتجاهين متضادين

∴ زوايا الاتجاه $\vec{\text{ب}}$ = (π - زوايا الاتجاه للمتجه $\vec{\text{أ}}$)

* إذا كانت $\theta_{\text{س}} + \theta_{\text{ص}} = 90$

∴ $\theta_{\text{ع}} = 90$ والمتجه يقع في المستوى س ص

* (جتا $\theta_{\text{س}}$ ، جتا $\theta_{\text{ص}}$ ، جتا $\theta_{\text{ع}}$) $= \dfrac{\vec{\text{أ}}}{\|\vec{\text{أ}}\|} = \dfrac{(\text{أ}_{\text{س}} ، \text{أ}_{\text{ص}} ، \text{أ}_{\text{ع}})}{\|\vec{\text{أ}}\|}$

∴ جتا $\theta_{\text{س}} = \dfrac{\text{أ}_{\text{س}}}{\|\vec{\text{أ}}\|}$

∴ جتا $\theta_{\text{ص}} = \dfrac{\text{أ}_{\text{ص}}}{\|\vec{\text{أ}}\|}$ ∴ جتا $\theta_{\text{ع}} = \dfrac{\text{أ}_{\text{ع}}}{\|\vec{\text{أ}}\|}$

★ الصور المختلفة للمتجهات :-

★ الاحداثية

$\overrightarrow{A}$ (١ ، -٢ ، ٥)

★ نعبر عنها

★ $\overrightarrow{س} - ٢\overrightarrow{ص} + ٥\overrightarrow{ع}$

★ بدلالة متجهي الوحدة الاساسية (الجبرية)

$\overrightarrow{س}$ (١ ، ٠ ، ٠)

$\overrightarrow{ص}$ (٠ ، ١ ، ٠)

$\overrightarrow{ع}$ (٠ ، ٠ ، ١)

★ معيار المتجه :-

$\overrightarrow{A}$ (س ، ص ، ع) $\longrightarrow \|\overrightarrow{A}\| = \sqrt{س^2 + ص^2 + ع^2}$

لاحظ :- ★ $\|\overrightarrow{بجـ}\|$ ← يعبر عن البعد بين النقطتين ب ، جـ

★ $\|\overrightarrow{بجـ}\| = \|\overrightarrow{جـب}\|$

★ $\|\overrightarrow{A}\| \geq ٠$ المتجه الوحيد الذى معياره صفر هو $\overrightarrow{و}$ (٠ ، ٠ ، ٠)

★ $\overrightarrow{بجـ} = -\overrightarrow{جـب}$

★ $\|ك\overrightarrow{A}\| = |ك| \|\overrightarrow{A}\|$

لـ ك ∈ ح

★ $\|\overrightarrow{A} + \overrightarrow{ب}\| \neq \|\overrightarrow{A}\| + \|\overrightarrow{ب}\|$

★ $\|\overrightarrow{A} + \overrightarrow{ب}\| \leq \|\overrightarrow{A}\| + \|\overrightarrow{ب}\|$

★ متجه الوحدة :-

ما هو إلا متجه معياره ١

★ متجه الوحدة فى اتجاه معلوم $\overrightarrow{A}$ $(\overrightarrow{ي}_A) = \frac{\overrightarrow{A}}{\|\overrightarrow{A}\|}$

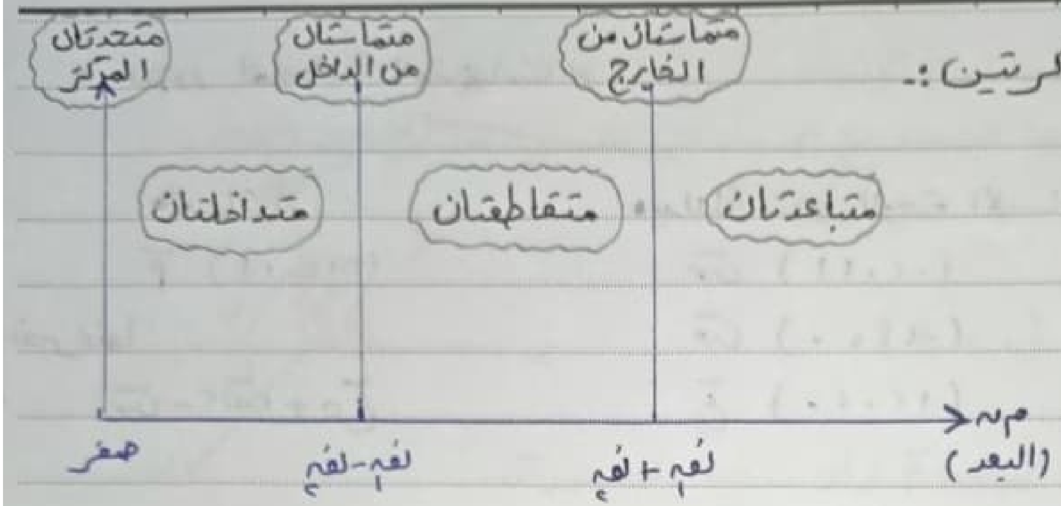
لاحظ

★ إذا كان المتجه $\overrightarrow{ب}$ يعمل فى اتجاه $\overrightarrow{A}$ فإنه $\overrightarrow{ب} = \|\overrightarrow{ب}\| \overrightarrow{ي}_A$

★ إذا كانت $\overrightarrow{ق}$ قوة تعمل فى اتجاه $\overrightarrow{بد}$

فإنه $\overrightarrow{ق} = \|\overrightarrow{ق}\| \overrightarrow{ي}_{بد} = \|\overrightarrow{ق}\| \times \frac{\overrightarrow{بد}}{\|\overrightarrow{بد}\|}$

* العلاقة بين كرتين :-



* الكرة التي مركزها (أ، ب، جـ) وتمس

ص ع	س ع	س ص
نق = |س| = |أ|	نق = |ص| = |ب|	نق = |ع| = |جـ|

* الكرة التي نصف قطرها نق وتمس

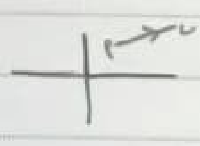
- المحاور الموجبة: م = $\left(\frac{نق}{\sqrt{2}} ، \frac{نق}{\sqrt{2}} ، \frac{نق}{\sqrt{2}}\right)$
- مستويات الإحداثيات الموجبة: م = (نق، نق، نق)

المتجهات في الفراغ

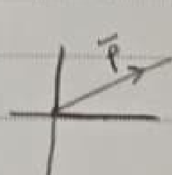
المتجه ← هو عبارة عن قطعة مستقيمة لها اتجاه
↳ القطعة المستقيمة الموجهة

المتجهات

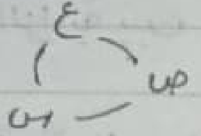
- متجه بحرفين: المتجه العادي $\overrightarrow{أب}$



- متجه بحرف: متجه موضع بدايته هي نقطة الأصل ونهايته $\overrightarrow{أ}$



• $\overrightarrow{س} \times \overrightarrow{ص} = +\overrightarrow{ع}$ • $\overrightarrow{ص} \times \overrightarrow{س} = -\overrightarrow{ع}$



• $\overrightarrow{س} \times \overrightarrow{ع} = -\overrightarrow{ص}$ • $\overrightarrow{ع} \times \overrightarrow{س} = +\overrightarrow{ص}$

• $\overrightarrow{ص} \times \overrightarrow{ع} = +\overrightarrow{س}$ • $\overrightarrow{ع} \times \overrightarrow{ص} = -\overrightarrow{س}$

«مع عقارب الساعة سالب ، لا عكس عقارب الساعة موجب»

• $\overrightarrow{ع} \times \overrightarrow{ع} = \overrightarrow{و}$ • $\overrightarrow{ص} \times \overrightarrow{ص} = \overrightarrow{و}$ • $\overrightarrow{س} \times \overrightarrow{س} = \overrightarrow{و}$

(توازي المتجهات) $\overrightarrow{ا} \,//\, \overrightarrow{ب}$

- $\overrightarrow{ا} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{و}$
- $\overrightarrow{ا} = ك\, \overrightarrow{ب}$
  - ك > ٠ : في نفس الاتجاه
  - ك < ٠ : متضادين
- $\frac{ا_س}{ب_س} = \frac{ا_ص}{ب_ص} = \frac{ا_ع}{ب_ع}$

مثال: $\overrightarrow{هـ} = -٣\, \overrightarrow{د}$

- $\overrightarrow{هـ} \,//\, \overrightarrow{د}$
- متضادين في الاتجاه
- $\|\overrightarrow{هـ}\| = ٣ \|\overrightarrow{د}\|$

الضرب الثلاثي القياسي (الناتج منه رقم)

$\overrightarrow{ا} \cdot \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{جـ}$

- اضرب الاتجاهي الاول ثم القياسي.
- $\begin{vmatrix} ا_س & ا_ص & ا_ع \\ ب_س & ب_ص & ب_ع \\ جـ_س & جـ_ص & جـ_ع \end{vmatrix}$

• استخداماته:

١) حجم متوازي السطوح * ٦ متوازي أضلاع

$ح = |\overrightarrow{ا} \cdot \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{جـ}|$

٢) للكشف عن لو فيه ٣ متجهات في مستوى واحد أم لا؟

$\overrightarrow{ا} \cdot \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{جـ} = صفر$

٣) أربع نقاط في مستوى واحد ولا لا ؟ ا ، ب ، جـ ، د

$\overrightarrow{اب} \cdot \overrightarrow{اجـ} \times \overrightarrow{اد} =$

• خواص الضرب الثلاثي القياسي:

(ا) $\overrightarrow{ا} \cdot \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{جـ} = \overrightarrow{جـ} \cdot \overrightarrow{ا} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{ب} \cdot \overrightarrow{جـ} \times \overrightarrow{ا}$

(ب) يمكن تبديل علامتي الضرب القياسي والاتجاهي.

$\overrightarrow{ا} \cdot \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{جـ} = \overrightarrow{ا} \times \overrightarrow{ب} \cdot \overrightarrow{جـ}$

٤) الزاوية بين متجهين :-

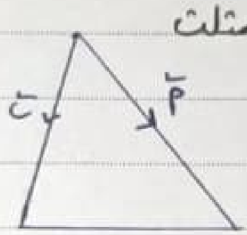
$$\|\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}}\| = \|\vec{\text{أ}}\|\,\|\vec{\text{ب}}\| \text{ جا } \theta$$

$$\therefore \text{ جا } \theta = \frac{\|\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}}\|}{\|\vec{\text{أ}}\|\,\|\vec{\text{ب}}\|} \longrightarrow (1) \qquad \text{جتا } \theta = \frac{\vec{\text{أ}} \cdot \vec{\text{ب}}}{\|\vec{\text{أ}}\|\,\|\vec{\text{ب}}\|} \longrightarrow (2)$$

من ١، ٢

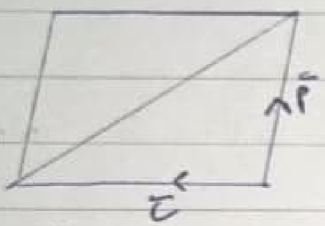
$$\# \quad \therefore \text{ ظا } \theta = \frac{\|\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}}\|}{\vec{\text{أ}} \cdot \vec{\text{ب}}}$$

٣) إيجاد مساحة المثلث



$$\text{م} = \tfrac{1}{2}\,\|\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}}\|$$

٤) مساحة متوازي الأضلاع



$$\text{م} = \|\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}}\|$$

- إيجاد مساحة أي شكل رباعي متى عُلِم قطران فيه ممثلين بمتجهات

$$\text{م} = \tfrac{1}{2}\,\|\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}}\|$$

- « توازي متجهين »

$$\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}} = \vec{\text{و}}$$

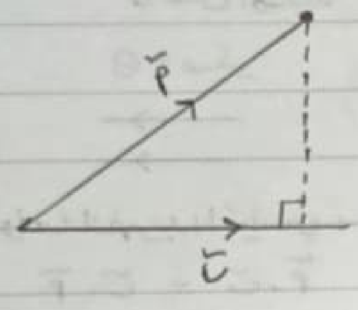
$\vec{\text{أ}} = \vec{\text{و}}$ أو $\vec{\text{ب}} = \vec{\text{و}}$ ، $\vec{\text{أ}} \parallel \vec{\text{ب}}$

- خواص الضرب الاتجاهي :-

- $\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}} = -\,\vec{\text{ب}} \times \vec{\text{أ}}$ (الضرب ليس إبدالي)
- $\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{أ}} = \vec{\text{و}}$
- $(\text{ك}\,\vec{\text{أ}}) \times (\text{م}\,\vec{\text{ب}}) = \text{ك م}\,(\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}})$
- $\vec{\text{أ}} \times (\vec{\text{ب}} + \vec{\text{ه}}) = \vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}} + \vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ه}}$
- $(\vec{\text{ب}} + \vec{\text{ه}}) \times \vec{\text{أ}} = \vec{\text{ب}} \times \vec{\text{أ}} + \vec{\text{ه}} \times \vec{\text{أ}}$

/ /

رابعاً: إيجاد المركبة الجبرية والاتجاهية



• المركبة الجبرية :-

مركبة (مسقط) $\vec{a}$ في اتجاه $\vec{b}$

$$a_b = \|a\| \cos\theta$$

$$= \|a\| \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$$

* المركبة الاتجاهية :-

$\vec{a}_b$ تعمل في اتجاه $\vec{b}$ (متجه وحدة)

$$\vec{a}_b = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|} \times \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} = \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}\right)\vec{b}$$

الضرب الاتجاهي

$\vec{a}$ (س، ص، ع) ، $\vec{b}$ = (س، ص، ع)

$\vec{a}\times\vec{b}$

$$\begin{vmatrix} س & ص & ع \\ س_1 & ص_1 & ع_1 \\ س_2 & ص_2 & ع_2 \end{vmatrix}$$

$\vec{a}\times\vec{b}$

$\pm \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin\theta$

$\|\vec{a}\times\vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin\theta$

• $\vec{a}\times\vec{b}$ عبارة عن متجه عمودي على المستوى الذي يحوي $\vec{a}$، $\vec{b}$

• $\vec{a}\times\vec{b}$ = (س₁ ص₁) × (س₂ ص₂) = (س₁ ص₂) - (س₂ ص₁)

* استخدامات الضرب القياسي :-

١) متجه الوحدة العمودي على المستوى :-

$$\vec{n} = \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{\pm\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\sin\theta} = \pm\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{\|\vec{a}\times\vec{b}\|}$$

$\overline{أ} \parallel \overline{ب}$

في نفس الاتجاه — متضادين

$\theta =$ صفر — $\theta = 180^\circ$

* خواص الضرب القياسي :-

1) $\overline{أ} . \overline{ب} = \overline{ب} . \overline{أ}$ الضرب إبدالي
2) $\overline{أ} . (\overline{ب} + \overline{جـ}) = \overline{أ} . \overline{ب} + \overline{أ} . \overline{جـ}$
3) $(ك \overline{أ}) . (م \overline{ب}) = (ك م) (\overline{أ} . \overline{ب})$
4) $\overline{أ} . \overline{أ} = \| \overline{أ} \|^2$

$\| \overline{أ} + \overline{ب} \|^2 = (\overline{أ} + \overline{ب}) . (\overline{أ} + \overline{ب})$

5) $\overline{أ} . \overline{ب} =$ صفر

$\overline{أ} \perp \overline{ب}$ — $\overline{أ} = \overline{و}$ أو $\overline{ب} = \overline{و}$

* $\overline{س} . \overline{ص} =$ صفر $= \overline{و}$ ، $\overline{ص} . \overline{ع} =$ صفر $= \overline{و}$ ، $\overline{س} . \overline{ع} =$ صفر $= \overline{و}$
* $\overline{س} . \overline{س} = \| \overline{س} \|^2 = 1$ ، $\overline{ص} . \overline{ص} = \| \overline{ص} \|^2 = 1$ ، $\overline{ع} . \overline{ع} = \| \overline{ع} \|^2 = 1$

* استخدامات الضرب القياسي

أولاً: إيجاد الزاوية بين متجهين

$$جتا \theta = \frac{\overline{أ} . \overline{ب}}{\| \overline{أ} \| \| \overline{ب} \|}$$

ثانياً: تحديد نوع الزاوية

حادة — قائمة — منفرجة

$\overline{أ} . \overline{ب} > 0$ — $\overline{أ} . \overline{ب} =$ صفر — $\overline{أ} . \overline{ب} < 0$

ثالثاً: حساب الشغل المبذول من القوة :

$ش = \overline{ق} . \overline{ف} = \| \overline{ق} \| . \| \overline{ف} \|$ جتاهـ