الهندسة

ملخص قوانين

الصف الثالث الإعدادي

الفصل الدراسي الأول

قوانين الهندسة

القياس الستيني للزاوية تقاس الزاوية بالدرجات (°) والدقائق (´) والثواني (″)

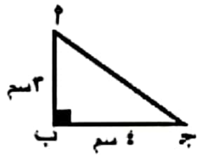
واحد درجة ١° = ٦٠´ دقيقة ، واحد دقيقة ١´ = ٦٠″ ثانية

فمثلاً : الزاوية التي قياسها ١٢ درجة ، ٤٠ دقيقة ، ٢٤ ثانية تكتب علي الصورة : ٢٤″ ٤٠´ ١٢°

تذكر : نظرية فيثاغورث

في المثلث القائم الزاوية : مربع طول الوتر = مجموع مربعي الضلعين الأخرين

مثال أوجد طول $\overline{\text{أ جـ}}$



∵ ق (∠ب) = ٩٠°

أ جـ = $\sqrt{(٣)^٢ + (٤)^٢}$ = ٥ سم

أوجد طول $\overline{\text{أب}}$

∵ ق (∠ب) = ٩٠°

أ ب = $\sqrt{(١٣)^٢ - (٥)^٢}$ = ١٢ سم

جيب الزاوية جا (sin) ، جيب تمام الزاوية جتا (cos) ، ظل الزاوية ظا (tan)

جيب الزاوية أ = جا أ = $\frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الوتر}}$ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$

جيب تمام الزاوية أ = جتا أ = $\frac{\text{طول الضلع المجاور}}{\text{طول الوتر}}$ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$

ظل الزاوية أ = ظا أ = $\frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الضلع المجاور}}$ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}}$

جيب الزاوية جـ = جا جـ = $\frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الوتر}}$ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$

جيب تمام الزاوية جـ = جتا جـ = $\frac{\text{طول الضلع المجاور}}{\text{طول الوتر}}$ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$

ظل الزاوية جـ = ظا جـ = $\frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الضلع المجاور}}$ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$

الهندسة التحليلية

البعد بين نقطتين

نفرض أن : أ ($س_١$ ، $ص_١$) ، ب ($س_٢$ ، $ص_٢$) نقطتين في المستوي الإحداثي فإن :

طول $\overline{\text{أ ب}}$ $\overset{\text{أو}}{=}$ البعد بين النقطتين أ ، ب = $\sqrt{(س_١ - س_٢)^٢ + (ص_١ - ص_٢)^٢}$

فمثلاً البعد بين النقطتين أ ($\overset{س}{٤}$ ، $\overset{ص}{٢}$) ، ب ($\overset{س}{٢}$ ، $\overset{ص}{١}$)

= $\sqrt{(٤ - ٢)^٢ + (٢ - ١)^٢}$ = $\sqrt{٥}$ وحدة طول

حالات خاصة :

(١) البعد بين أي نقطة في مستوي احداثي وليكن (س ، ص) ونقطة الأصل (٠ ، ٠) = $\sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}$

فمثلاً البعد بين النقطة (٨ ، ٦) ونقطة الأصل = $\sqrt{(٨)^{٢} + (٦)^{٢}}$ = ١٠ وحدة طول

(٢) بعد النقطة (س ، ص) عن محور السينات = $|ص|$ وحدة طول (نأخذ قيمة ص الموجبة)

فمثلاً بعد النقطة (−٣ ، −٥) عن محور السينات = $|-٥|$ = ٥ وحدة طول

(٣) بعد النقطة (س ، ص) عن محور الصادات = $|س|$ وحدة طول (نأخذ قيمة س الموجبة)

فمثلاً بعد بين النقطة (−٦ ، ٨) عن محور الصادات = $|-٦|$ = ٦ وحدة طول

ملاحظة (١) : لإثبات أن ثلاث نقط م ، ب ، جـ علي استقامة واحدة نوجد البعد بين كل نقطتين

* ثم نثبت أن : أكبر بعد = مجموع البعدين الآخرين (بقانون البعد)

* أو نثبت أن : ميل $\overleftrightarrow{م ب}$ = ميل $\overleftrightarrow{ب جـ}$ ، ب نقطة مشتركة (بقانون الميل)

∴ النقط م ، ب ، جـ علي استقامة واحدة

ملاحظة (٢) : لتعين نوع المثلث م ب جـ من حيث زواياه (وليكن م جـ أكبر ضلع طولاً)

(١) إذا كان : $(م جـ)^{٢} > (م ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}$ فإن المثلث " منفرج الزاوية ب "

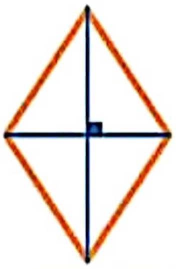
(٢) إذا كان : $(م جـ)^{٢} < (م ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}$ فإن المثلث " حاد الزاويا"

(٣) إذا كان : $(م جـ)^{٢} = (م ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}$ فإن المثلث " قائم الزاوية ب "

ملاحظة (٣) لإثبات أن الشكل م ب جـ د متوازي أضلاع نثبت أن :

- كل ضلعان متقابلان متساويان في الطول . (بقانون البعد)
- أو كل ضلعان متقابلان متوازيان . (بقانون الميل)
- أوضلعان متقابلان متساويان في الطول ومتوازيان. (بقانون البعد وقانون والميل)
- أو القطران ينصف كل منهما الأخر (بقانون المنتصف)

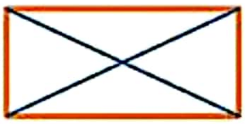
ملاحظة (٤) لإثبات أن الشكل م ب جـ د معين نثبت أن :



- جميع أطوال اضلاعه متساويان في الطول . (بقانون البعد)
- أو القطران متعامدان . (بقانون الميل)

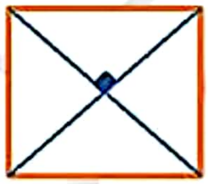
مساحة المعين = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولا القطرين

ملاحظة (٥) لإثبات أن الشكل م ب جـ د مستطيل:



- نثبت أن الشكل متوازي أضلاع و القطران متساويان في الطول . (بقانون البعد)
- أو كل ضلعان متقابلان متوازيان وإحدي زواياه قائمة . (بقانون الميل)

ملاحظة (٦) لإثبات أن الشكل م ب جـ د مربع نثبت أن :



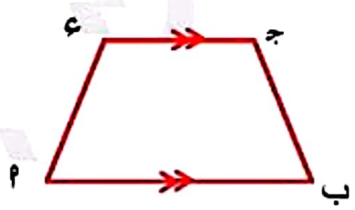
- جميع أطوال اضلاعه متساويان في الطول والقطران متساويان. (بقانون البعد)
- أو القطران متساويان في الطول ومتعامدان . (بقانون البعد وقانون والميل)

ملاحظة (٧) لإثبات أن الشكل م ب جـ د شبه منحرف نثبت أن :

- ضلعان متقابلان متوازيان وغيرمتساويان في الطول. (بقانون الميل وقانون البعد)

نثبت أن : $\overline{\text{م ب}}$ // $\overline{\text{جـ ء}}$

، م ب ≠ جـ ء



CamScanner

إحداثيا منتصف قطعة مستقيمة

إذا كانت $\overline{\text{م ب}}$ قطعة مستقيمة حيث : م ($س_١$ ، $ص_١$) ، ب ($س_٢$ ، $ص_٢$) ، جـ هي منتصف $\overline{\text{م ب}}$

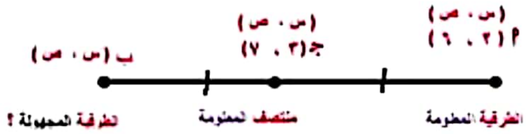
فإن إحداثي منتصف $\overline{\text{م ب}}$:

$$\text{جـ (س ، ص)} = \left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} \right)$$

أو إحداثي جـ (س ، ص) كالآتي:

$$س = \frac{س_١ + س_٢}{٢} \qquad ص = \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}$$

إيجاد إحداثي نقطة طرفية مجهولة



س = ٢ × س − س (الطرفية المجهولة = ٢ × منتصف المعلومة − الطرفية المعلومة)

∴ س = ٢ × ٣ − ٢

∴ س = ٤ الطرفية المجهولة

ص = ٢ × ص − ص (الطرفية المجهولة = ٢ × منتصف المعلومة − الطرفية المعلومة)

∴ ص = ٢ × ٧ − ٦

∴ ص = ٨ الطرفية المجهولة

ميل الخط المستقيم

(١) ميل الخط المستقيم (م) بمعلومية نقطتين واقعتين علية :

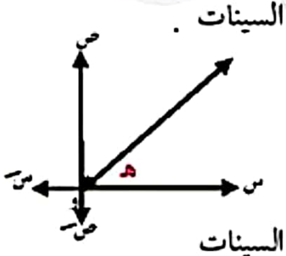
ميل الخط المستقيم (م) المار بالنقطتين : م ($س_١$ ، $ص_١$) ، ب ($س_٢$ ، $ص_٢$) هو :

$$م = \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}} = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{ص_١ - ص_٢}{س_١ - س_٢}$$

أو $م = \dfrac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ ، $س_١ \neq س_٢$

(٢) ميل الخط المستقيم م بمعلومية الزاوية :

ميل الخط المستقيم م هو ظل الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .



أي أن : ميل الخط المستقيم م = ظا هـ

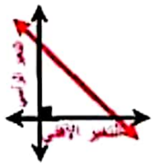
حيث هـ هي الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

فمثلاً : ميل الخط المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

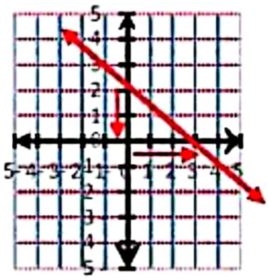
م = ظا ٤٥° = ١

(٣) ميل الخط المستقيم م بمعلومية الزاوية :

يمكن إيجاد ميل مستقيم بيانيا عن طريق القانون م = $\frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$



مثال : ميل الخط المستقيم = $\frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$ = $\frac{-٢}{٣}$



---

(٤) إيجاد ميل الخط المستقيم وطول الجزء المقطوع من محور الصادات من (المعادلة العامة)

المعادلة العامة التي علي الصورة : أ س + ب ص + جـ = ٠ (لازم المعادلة تكون صفرية)

ميل الخط المستقيم = $\frac{\text{- معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{-\text{أ}}{\text{ب}}$

مثال : ميل الخط المستقيم الذي معادلتة : ٢ س + ٣ ص + ٦ = ٠ هو م = $\frac{\text{- معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{-٢}{٣}$

ملاحظات (١) ميل محور السينات وأي مستقيم يوازية (المحور الأفقي) = صفر

(٢)ميل محور الصادات وأي مستقيم يوازية (المحور الرأسي) غير معرف

(٣)إذا كان الميل عدداً موجباً فإن المستقيم يصنع زاوية حادة مع الإتجاه الموجب لمحور السينات .

(٤)إذا كان الميل عدداً سالباً فإن المستقيم يصنع زاوية منفرجة مع الإتجاه الموجب لمحور السينات .

(٥) إذا كان الميل = صفر فإن المستقيم يوازي محور السينات .

(٦)إذا كان الميل غير معرف فإن المستقيم يوازي محور الصادات .

(٧) ميل المستقيم يكون عدد حقيقي موجب أو سالب أو صفر

(٨) ميل أي مستقيم أفقي (يوازى محور السينات) = صفر وهو المستقيم الذى معادلته (ص = عدد ثابت)

(٩) ميل أي مستقيم رأسي(يوازى محور الصادات) = $\frac{١}{٠}$ (غير معرف) وهو المستقيم الذى معادلته ، (س = عدد ثابت)

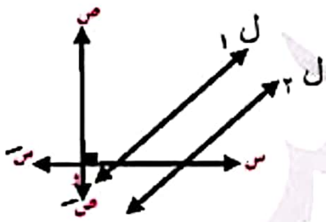
(١٠) إذا كان ميل المستقيم موجب يكون شكله () أما إذا كان الميل سالب يكون شكله()

أما إذا كان ميله = صفر يكون شكله () وإذا كان ميله غير معرف يكون شكله ()

(١١) يمكن إيجاد ميل مستقيم بيانيا عن طريق القانون م = $\frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$

(١٢) يمكن استخدام فكرة الميل لإثبات أن ء ، ب ، ج تقع على استقامة واحدة نثبت أن الميل باستخدام النقطتين ء ، ب يساوى الميل باستخدام النقطتين ب ، ج ، (ب نقطة مشتركة)

العلاقة بين ميلي المستقيمين المتوازيين

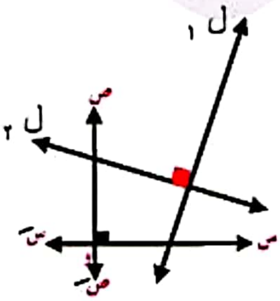


في الشكل المقابل: ل١ ، ل٢ مستقيمين ميلاهما م١ ، م٢ علي الترتيب :

وكان: ل١ // ل٢ فإن: م١ = م٢ (إذا توازي مستقيمان فإن ميلاهما يكونان متساويان)

إذا كان: م١ = م٢ فإن: ل١ // ل٢ (إذا تساوي ميلا مستقيمين كان المستقيمان متوازيان)

العلاقة بين ميلي المستقيمين المتعامدين



إذا كان: ل١ ، ل٢ مستقيمين ميلاهما م١ ، م٢ علي الترتيب :

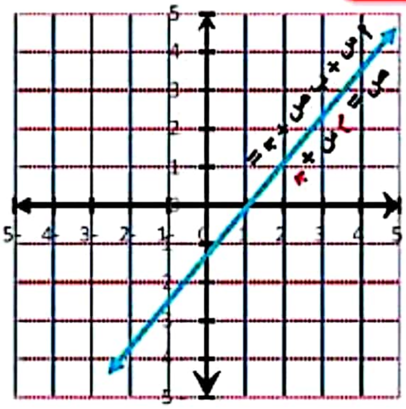
❋ و كان: ل١ ⊥ ل٢ فإن: م١ × م٢ = -١ أو م١ = $\frac{-١}{م٢}$ أو م٢ = $\frac{-١}{م١}$

(حاصل ضرب ميلي المستقيمين المتعامدين= - ١)

❋ إذا كان: م١ × م٢ = - ١ فإن: ل١ ⊥ ل٢

(إذا كان حاصل ضرب ميلي المستقيمين المتعامدين = -١ كان المستقيمان متعامدان)

معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله وطول الجزء المقطوع من محور الصادات



معادلة الخط المستقيم: (المعادلة الخاصة)

المعادلة هي : $\boxed{\text{ص} = \text{م س} + \text{ج}}$ حيث م ، ج ∈ ح

، (م) هي ميل الخط المستقيم (معامل س)

، (ج) الجزء المقطوع من محور الصادات (ممكن موجب أو سالب)

| ج | طول الجزء المقطوع من محور الصادات (الطول دائما موجب)

فمثلاً : من المعادلة $\boxed{\text{ص} = ٣ \text{ س} - ٥}$

الميل = ٣

الجزء المقطوع من محور الصادا ت = – ٥ (المستقيم يقطع ٥ وحدات من محور الصادات السالب)

طول الجزء المقطوع من محور الصادات = | – ٥ | = ٥

إيجاد ميل الخط المستقيم وطول الجزء المقطوع من محور الصادات من (المعادلة العامة)

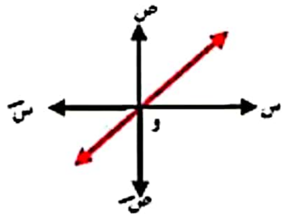
المعادلة العامة التي علي الصورة : أ س + ب ص + ج = ٠ (لازم المعادلة تكون صفرية)

❋ ميل الخط المستقيم = $\frac{-\text{ معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-\text{ أ}}{\text{ب}}$

❋ طول الجزء المقطوع بالمستقيم من محور الصادات = $\left|\frac{-\text{ الحد المطلق}}{\text{معامل ص}}\right| = \left|\frac{-\text{ ج}}{\text{ب}}\right|$

❋ المستقيم يقطع محور الصادات في النقطة (٠ ، $\frac{-\text{ ج}}{\text{ب}}$)

حالات خاصة

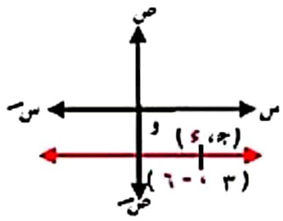


(١) إذا كان المستقيم يمر بقطة الأصل (٠، ٠) فإن : جـ = ٠

وتكون معادلة الخط المستقيم هي $\boxed{ص = م س}$

فمثلاً : إذا كان ميل المستقيم يساوي $\frac{٣}{٤}$ والمستقيم يمر بنقطة الأصل فإن معادلة المستقيم هي: $\boxed{ص = \frac{٣}{٤} س}$

(٢) إذا كان الخط المستقيم موازياً لمحور السينات ويمر بالنقطة (جـ ، ء)



فإن معادلته هي: $\boxed{ص = ء}$ ويكون ميله = صفر

على محور الصادات س = صفر

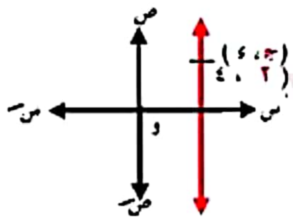
والخط المستقيم يقطع محور الصادات في النقطة : (٠، ء)

خود قيمة ص

فمثلاً : إذا كان المستقيم موازياً محور السينات و يمر بالنقطة (٣ ، −٦)

فإن معادلة المستقيم هي : ص = −٦

(٣) إذا كان الخط المستقيم موازياً لمحور الصادات ويمر بالنقطة (جـ ، ء)



فإن معادلته هي: س = جـ ويكون ميله غير مُعرف

على محور السينات ص = صفر

والخط المستقيم يقطع محور السينات في النقطة : (جـ ، ٠)

خود قيمة س

فمثلاً : إذا كان المستقيم موازياً محور الصادات و يمر بالنقطة (٢ ، ٤)

فإن معادلة المستقيم هي : س = ٢