الوحدة الأولي

الاستاتيكا

الدرس الأول: محصلة قوتين متلاقيتين في نقطة

القوانين

١ محصلة قوتين

$$ح = \sqrt{ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢ \text{ جتاى}}$$

أو

$$ح^٢ = ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢ \text{ جتاى}$$

٢ زاوية ميل المحصلة على $ق_١$

$$\text{ظا هـ} = \frac{ق_٢ \text{ جاى}}{ق_١ + ق_٢ \text{ جتاى}}$$

مثال(١) قوتان مقدارهما ٥ ، ٣ نيوتن تؤثران في نقطة مادية والزاوية بينهم ٦٠° أوجد مقدرا واتجاه المحصلة.

الحـــــــل

$ق_١$ =٥نيوتن $ق_٢$ =٣نيوتن

ى=٦٠°

$$ح = \sqrt{ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢ \text{ جتاى}}$$

$$\therefore \sqrt{٥^٢ + ٣^٢ + ٢ \times ٥ \times ٣ \times \text{ جتا }٦٠°} = ٧ \text{ نيوتن}$$

$$\text{ظا هـ} = \frac{ق_٢ \text{ جاى}}{ق_١ + ق_٢ \text{ جتاى}}$$

$$\text{ظا هـ} = \frac{٣ \text{ جا }٦٠°}{٥ + ٣ \text{ جتا }٦٠°}$$

Shift tan

$\therefore$ هـ = ٢١َ ٤٧° حيث هـ زاوية ميل المحصلة على القوة الأولى

مثال(٢) قوتان مقدارهما ٦ ، ق نيوتن وقياس الزاوية بينهما ١٣٥° أوجد مقدار المحصلة إذا كانت تميل بزاوية ٤٥° على ق

الحـــــــل

$ق_١$ =٦نيوتن $ق_٢$ = ق

ى=١٣٥° ميل هـ على $ق_٢$ =٤٥°

$$\therefore \text{ظا هـ} = \frac{ق_١ \text{ جاي}}{ق_٢ + ق_١ \text{ جتاي}} \qquad \text{ظا}٤٥ = ١$$

$$\therefore \frac{٦ \text{ جا}١٣٥°}{ق + ٦ \text{ جتا}١٣٥°} = ١$$

$\therefore$ ق + ٦جتا١٣٥° = ٦ جا١٣٥°

$\therefore$ ق = ٦ جا١٣٥° - ٦جتا١٣٥°

$\therefore$ ق = $٦\sqrt{٢}$ نيوتن وبعدين نجيب ح

$$ح = \sqrt{ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢ \text{ جتاي}}$$

$$ح = \sqrt{(٦)^٢ + (٦\sqrt{٢})^٢ + ٢ \times ٦ \times ٦\sqrt{٢} \times \text{ جتا}١٣٥°}$$

= ٦ نيوتن

مثال(٣) قوتان مقدارهما ٣٠ ، ١٦ث.جم فإذا كان مقدار محصلتهم =٢٦ث.جم أوجد قياس الزاوية بينهما.

الحـــــل

ق١ =٣٠ث.جم   ق٢ =١٦ث.جم

ح=٢٦ث.جم   ى=؟؟

ح² = ق١² + ق٢² + ٢ ق١ ق٢ جتاى

(٢٦)²=(٣٠)²+(١٦)²+٢×٣٠×١٦جتاى

(٢٦)² - (٣٠)² - (١٦)² = ٢×٣٠×١٦جتاى

- ٤٨٠ = ٩٦٠جتاى

∴ جتاى = $\frac{-٤٨٠}{٩٦٠}$

Shift cos

∴ ى = ١٢٠°

حالات خاصة

١ القوتان في نفس الاتجاه

تكون المحصلة قيمة عظمى وتساوي مجموع القوتين وتكون الزاوية بينهم ى= صفر°

٢ القوتان في عكس الاتجاه

تكون المحصلة = الفرق بين القوتين وتكون قيمة صغرى وتكون الزاوية بينهم ى =١٨٠° والمحصلة في اتجاه القوة الأكبر   ح= |ق١ − ق٢|

٣ القوتان متعامدتان

ح= $\sqrt{\text{ق}_1^2 + \text{ق}_2^2}$ &   ظا هـ = $\frac{\text{ق}_2}{\text{ق}_1}$

٤ القوتان متساويتان

ح=٢ق جتا($\frac{\text{ى}}{2}$)

هـ= $\frac{\text{ى}}{2}$ ← المحصلة تنصف الزاوية بين القوتين

على فكرة إذا كانت الزاوية بين القوتين ١٢٠° والقوتين متساويتين

فإن المحصلة = إحدى القوتين

٥ المحصلة عمودية على أحد القوتين

تكون عمودية على القوة الأصغر ق١ مثلاً

ح² = ق٢² − ق١²   &   جتاى= $\frac{-\text{ق}_1}{\text{ق}_2}$

مثال(٤) إذا كانت ح محصلة قوتين ∋ [١٢ ، ٣٢] فأوجد:

القوتين ثم احسب المحصلة إذا كانت الزاوية بينهم = ٦٠°

الحـــــل

ق١ − ق٢ =١٢   (١)

ق١ + ق٢ =٣٢   (٢)

بالجمع   ٢ق١ =٤٤

∴ ق١ = $\frac{٤٤}{٢}$ = ٢٢ نيوتن

بالتعويض في $\boxed{١}$

$\therefore ٢٢ - ق_٢^{\,٢} = ١٢$

$٢٢ - ١٢ = ق_٢^{\,٢}$

$\therefore ق_٢ = ١٠$ **نيوتن**

إذا كانت ى = ٦٠°

فإن

$ح = \sqrt{ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢ \text{ جتاى}}$

$= \sqrt{(٢٢)^٢ + (١٠)^٢ + ٢ \times ٢٢ \times ١٠ \times \text{جتا } ٦٠°}$

$= ٢\sqrt{٢٠١}$ نيوتن

مثال(٥) **إذا أثرت القوى الثلاث التي مقاديرها ٥ ، ١٠ ، ٤$\sqrt{٧}$ نيوتن في نقطة مادية وكان قياس الزاوية بين الأولى والثانية = ٦٠° أوجد القيمة العظمى والصغرى لمحصلتهم**

الحـــــل

الفكرة هنجيب محصلتين الأولى والثانية ونعتبرهم قوة واحدة وعندنا الثالثة يبقى كده قوتين مرة نجمعهم ومرة نطرحهم

$ح_{١،٢} = \sqrt{٥^٢ + ١٠^٢ + ٢ \times ٥ \times ١٠ \times \text{جتا } ٦٠°}$

$= ٥\sqrt{٧}$ نيوتن

$\therefore$ القيمة العظمى الجديدة

$= ٥\sqrt{٧} + ٤\sqrt{٧} = ٩\sqrt{٧}$ نيوتن

القيمة الصغرى الجديدة

$= ٥\sqrt{٧} - ٤\sqrt{٧} = \sqrt{٧}$ نيوتن

مثال(٦) **قوتان مقدارها ١٢ ، ١٥ نيوتن وجيب تمام الزاوية بينهما $\frac{-٤}{٥}$ أوجد مقدار محصلتهما وزاوية ميلها على $ق_١$**

الحـــــل

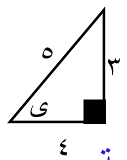
$ق_١ = ١٢$ نيوتن $ق_٢ = ١٥$ نيوتن

$\text{جتاى} = \frac{-٤}{٥}$

$ح = \sqrt{ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢ \text{ جتاى}}$

$ح = \sqrt{(١٢)^٢ + (١٥)^٢ + ٢ \times ١٢ \times ١٥ \times \frac{-٤}{٥}}$

$\therefore ح = ٩$ نيوتن



في الربع الثاني زاوية منفرجة

$\text{جتاى} = \frac{-٤}{٥}$ $\text{جاى} = \frac{٣}{٥}$

$\text{ظا هـ} = \frac{ق_٢ \text{ جاى}}{ق_١ + ق_٢ \text{ جتاى}} = \frac{١٥ \times \frac{٣}{٥}}{١٢ + ١٥ \times \frac{-٤}{٥}}$ غير معرف

$\therefore \text{هـ} = ٩٠°$

وعلى فكرة يا شباب

لو لاحظت إن $\text{جتاى} = \frac{-٤}{٥} = \frac{-١٢}{١٥}$

$= \frac{-ق_١}{ق_٢}$

∴ المحصلة عمودية على القوة الأولى

∴ هـ = ٩٠°

مثال(٧) قوتان متساويتان في المقدار ومحصلتهما ٩٠√٣ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ٦٠° أوجد مقدار كل من القوتين

الحـــــل

$\text{ق}_1 = \text{ق}_2 = \text{ق}$

ح= ٩٠√٣   ى=٦٠°

∴ ح= ٢ق جتا $\frac{\text{ى}}{2}$

٩٠√٣ = ٢ق جتا ٣٠°

٩٠√٣ = ٢ق × $\frac{\sqrt{3}}{2}$

∴ $\text{ق}_1 = \text{ق}_2 =$ ٩٠نيوتن

مثال(٨) قوتان مقدارهما ٦ ، ق ث.كجم وقياس الزاوية بينهما ١٣٥° أوجد مقدار المحصلة إذا كان خط عمل المحصلة يميل بزاوية ٤٥° على ق

الحـــــل

إيه رأيك علشان متتلخبطش في القانون هنحط

$\text{ق}_1 = \text{ق}$ $\text{ق}_2 = 6$

ى= ١٣٥°   هـ = ٤٥°

∴ ظا هـ= $\frac{\text{ق}_2 \text{ جاى}}{\text{ق}_1 + \text{ق}_2 \text{ جتاى}}$

∴ ظا٤٥= $\frac{6 \text{ جا}135^\circ}{\text{ق} + 6\text{جتا}135^\circ} = 1$

$\frac{3\sqrt{2}}{\text{ق} - 3\sqrt{2}} = 1$

∴ ق = ٣√٢ + ٣√٢ = ٦√٢ ث.كجم

، ∵ ح= $\sqrt{\text{ق}_1^2 + \text{ق}_2^2 + 2\text{ق}_1\text{ق}_2 \text{ جتاى}}$

∴ ح =

$\sqrt{(6\sqrt{2})^2 + (6)^2 + 2\times 6\sqrt{2}\times 6 \times \text{ جتا } 135^\circ}$

∴ ح= ٦ث.كجم

مثال(٩) قوتان متساويتان في المقدار ومتلاقيتان في نقطة ومقدار محصلتهما =١٢ث.كجم وإذا عكس اتجاه إحداهما فإن مقدار المحصلة يساوي ٦ث.كجم . أوجد مقدار كل من القوتين

الحـــــل

ح_1= ٢ق جتا $\frac{\text{ى}}{2}$ =١٢

∴ ق جتا $\frac{\text{ى}}{2}$ =٦   ← (١)

، ح_2= ٢ق جتا $\left(\frac{180-\text{ى}}{2}\right)$ =٦

٢ق جتا (٩٠ − $\frac{\text{ى}}{2}$) =٦

ق جا $\frac{\text{ى}}{2}$ =٣   ← (٢)

بتربيع كل من المعادلتين وجمعهما

∴ ق² جتا² $\frac{\text{ى}}{2}$ + ق² جا² $\frac{\text{ى}}{2}$ =٣٦+٩

ق² [جتا² $\frac{\text{ى}}{2}$ + جا² $\frac{\text{ى}}{2}$] = ٤٥

ق² =٤٥

$\therefore$ ق $= \sqrt{٤٥} = ٣\sqrt{٥}$ ث.كجم

مثال(١٠) قوتان متساويتان في المقدار "ق" بينهما زاوية ١٢٠° وإذا تضاعفت القوتان وأصبح قياس الزاوية بينهما ٦٠° زادت المحصلة بمقدار ١١ث.كجم عن الحالة الأولى أوجد مقدار ق

الحـــــل

$\because$ ق$_١$ = ق$_٢$ = ق   ى=١٢٠°

$\therefore$ ح$_١$ = ٢ق جتا $\frac{ى}{٢}$

ح$_١$ = ٢ق جتا $\frac{١٢٠}{٢}$ ح$_١$ = ق

وعندما

ق$_١$ = ق$_٢$ =٢ق   ى=٦٠°

ح$_٢$= ٢(٢ق) جتا $\frac{٦٠}{٢}$ = ٤ق × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ح$_٢$ = $٢\sqrt{٣}$ ق

، $\because$ ح$_٢$ - ح$_١$ = ١١

$٢\sqrt{٣}$ ق − ق =١١

ق($٢\sqrt{٣}$ -١)=١١

$\therefore$ ق = $\frac{١١}{٢\sqrt{٣} - ١}$

$\therefore$ ق= ١+ $٢\sqrt{٣}$ ث.كجم

اختر مجاب عنه

١ قوتان مقداهما ٢ق ، ٣ق ومقدار المحصلة لهما = ٥ق فإن قياس الزاوية بينهما=....

(أ)٠   (ب)٩٠°

(ج)١٢٠°   (د)١٨٠°

(أ) لأن القوتان في نفس الاتجاه

٢ قوتان مقداهما ٢ق ، ٥ق ومقدار المحصلة ٣ق فإن قياس الزاوية بينهما=....

(أ)صفر   (ب)٦٠°

(ج)٩٠°   (د)١٨٠°

(د)١٨٠° لأنهما في عكس الاتجاه

٣ قوتان متساويتان ومتلاقيتان في نقطة مقدار كل منهما ٦نيوتن ومقدار المحصلة ٦نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما...

(أ)٣٠°   (ب)٦٠°

(ج)١٢٠°   (د)١٥٠°

(ج)١٢٠° لأن القوتان متساويتان والمحصلة تساوي إحدى القوتين

٤ قوتان مقدارهما ٣نيوتن ، ق نيوتن وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° ، إذا كانت محصلتها عمودية علي القوة الأولي فإن ق = ... نيوتن

(أ)١,٥ (ب)٣

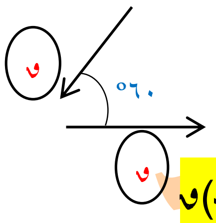
(ج) $3\sqrt{3}$ (د)٦

(د)٦ جتاي = $\frac{-ق}{ق_2}$ جتا ١٢٠° = $\frac{-1}{2}$

$\frac{-3}{ق} = \frac{-1}{2}$ ∴ ق =٦

---

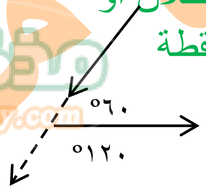
٥ **مقدار محصلة القوتين في الشكل المقابل هو...**



(أ)$\frac{1}{2}$ق (ب)ق

(ج) $\sqrt{3}$ ق (د) $\sqrt{5}$ ق

أولاً: يجب العلم أن الزاوية بين متجهين في حالة إذا كان المتجهان داخلان أو خارجان معاً من نفس النقطة



١٨٠° - ٦٠° = ١٢٠°

∴ قوتان متساويتان بينهما زاوية ١٢٠°

∴ المحصلة = إحدى القوتين = ق

الواجب

أولاً: اختر الاجابة الصحيحة

١ قوتان متلاقيتان في نقطة مقدارهما ٣، ٥ نيوتن فإن مقدار محصلتهما ∋.....

(أ) [٢ ، ٨] (ب)]٢ ، ٨[

(ج)[٣ ، ٥] (د)]٣ ، ٥[

---

٢ قوتان متساويتان في المقدار متلاقيتان في نقطة مقدار كل منهما ٩نيوتن ومقدار محصلتهما ٩نيوتن ، فإن قياس الزاوية بينهما=...

(أ)٣٠° (ب)٦٠°

(ج)١٢٠° (د)١٥٠°

---

٣ قوتان مقدارهما ٦نيوتن ، ٨نيوتن ومحصلتهما ٢نيوتن ، فإن قياس الزاوية بينهما=...

(أ)صفر (ب)٩٠°

(ج)١٨٠° (د)٢٧٠°

---

٤ قوتان مقدارهما ٧، ق نيوتن المحصلة تنصف الزاوية بينهما فإن ق =...نيوتن

(أ)٨ (ب)٧

(ج)١٠ (د)٥

٥ قوتان قياس الزاوية بينهما θ فإن مقدار محصلتهما ....

(أ) يزداد بزيادة θ

(ب) يتناقص بنقص θ

(ج) يزداد بنقص θ

(د) لا يتغير بتغير قيمة θ

---

٦ قوتان متعامدتان مقدارهما (٢ق – ٥) ، (ق + ٢) ومقدار محصلتهما ٣√٥ فإن قيمة ق تساوي ... نيوتن

(أ) ٧ (ب) ٤

(ج) ٦ (د) ٣

---

٧ قوتان متلاقيتان في نقطة مقدارهما ٣، ٥ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ٦٠° فإن مقدار محصلتهما ح = ...نيوتن

(أ) ٢ (ب) ٥

(ج) ٧ (د) ٨

---

٨ قوتان مقدارهما ق ١ ، ق ٢ نيوتن حيث ق ١ > ق ٢ ومقدار محصلتهما ح حيث ح ∈ [٣ ، ١٢] فإن ق١ - ق٢ =....نيوتن

(أ) ١٢ (ب) ٣

(ج) ٩ (د) ٣٦

---

٩ قوتان مقدارهما ق ، ٢ق مؤثران في نقطة مادية والمحصلة عمودية على إحداهما فإن قياس الزاوية بين القوتين= ....°

(أ) ٦٠° (ب) ٩٠°

(ج) ١٣٥° (د) ١٢٠°

---

١٠ قوتان مقدارهما ق ، ق نيوتن ومقدار محصلتهما ٢٤نيوتن وتميل عل القوة الأولى بزاوية قياسها ٣٠° فإن

ق = ... نيوتن

(أ) ٨ (ب) ٨√٣

(ج) ٨√٢ (د) ١٢

---

١١ قوتان متساويتان في المقدار ومقدار محلتهما ١٦نيوتن عندما كان قياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{2}$ فإن القيمة العظمى لمحصلتيهما تساوي ... نيوتن

(أ) ٣٢ (ب) ٨√٢

(ج) ١٦√٢ (د) صفر

---

١٢ إذا كانت ى الزاوية بين قوتين ٢ ، ٦ نيوتن حيث ى ∈]٠ ، π[فإن مقدار محصلة القوتين مقاسة بالنيوتن ∈....

(أ)]٤ ، ٨[(ب)]٤ ، ٨]

(ج)]٤ ، ٨] (د) [٤ ، ٨]

١٣ إذا كانت $\overleftarrow{ح}$ هي محصلة القوتين $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ وكان ق١ : ق٢ : ح=٤ : ٣ : $\sqrt{١٣}$ فإن ى =...° حيث ى هي الزاوية بينهما

(أ)٩٠° (ب)١٢٠°
(ج)٦٠° (د)٣٠°

---

١٤ قياس الزاوية بين $\overleftarrow{ق_١}$ ، ومحصلة القوتين ($\overleftarrow{ق_١}$ + $\overleftarrow{ق_٢}$) ، ($\overleftarrow{ق_١}$ - $\overleftarrow{ق_٢}$) هي....

(أ)صفر (ب)π
(ج) $\frac{\pi}{٢}$ (د) $\frac{\pi}{٣}$

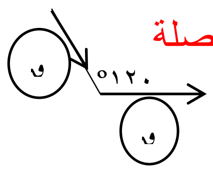
---

١٥ كل الوحدات التالية لقياس القوة ما عدا...

(أ)النيوتن (ب)الداين
(ج)ث.كجم (د)كجم

---

١٦ في الشكل المقابل مقدار محصلة القوتين =...نيوتن



(أ)٢ق (ب)ق
(ج) $\sqrt{٣}$ ق (د)صفر

---

١٧ قوتان ٣ ، ق نيوتن وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° ، إذا كانت محصلتهما عمودية على القوة الأولى فإن ق=....

(أ)١,٥ (ب)٣
(ج)٣$\sqrt{٣}$ (د)٦

---

١٨ قوتان متساويتان في المقدار قياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{٢}$ ومقدار محصلتهما = ٨نيوتن فإن مقدار كل منهما =....

(أ) ٢$\sqrt{٢}$ (ب) ٤
(ج) ٤$\sqrt{٢}$ (د) ٨

---

١٩ القيمة العظمى والصغرى على الترتيب لمحصلة القوتين ٨ ، ١٣ هما ....

(أ) ١٣ ، ٨ (ب) ١٣ ، ٥
(ج) ٢١ ، ٨ (د) ٢١، ٥

---

٢٠ إذا بلغت محصلة قوتين قيمة عظمى فإن قياس الزاوية بينهما=...

(أ)٦٠° (ب) ٩٠°
(ج) صفر° (د) ١٨٠°

ثانياً الأسئلة المقالية

١ قوتان مقدارهما ٥ ، ٧ نيوتن ويحصران بينهما زاوية ١٢٠° أوجد مقدار محصلتها وقياس زاوية ميلها على القوة الأولى.

٢ أوجد مقدار واتجاه محصلة قوتين ٨٠ ، ٨٠ نيوتن إذا كانت الزاوية بينهما ١٢٠°

٣ قوتان مقدارهما ٣٠ ، ١٦ نيوتن ومقدار محصلتهما ٢٦نيوتن أوجد قياس الزاوية بينهما.

٤ قوتان مقدارهما ١٢ ، ى ث.كجم تؤثران في نقطة ويحصران بينهما زاوية ١٢٠° أوجد مقدار ى إذا كانت المحصلة تميل على القوة ١٢ بزاوية قياسها ٣٠°

٥ قوتان متعامدتان مقدارهما (٢ى – ٥) ، (ى + ٢) اوجد مقدار كل منهما إذا كانت المحصلة تنصف الزاوية بين القوتين.

٦ قوتان متلاقيتان في نقطة ومقدار احدهما ضعف مقدار الأخرى فإذا كان اتجاه المحصلة عمودياً على الصغرى فأوجد قياس الزاوية بينهما.

٧ ثلاث قوى متلاقية في نقطة واحدة مقادير هم ٣ ، ٥ ، ١٠ نيوتن فإذا كان قياس الزاوية بين ٣، ٥ هو ٦٠°

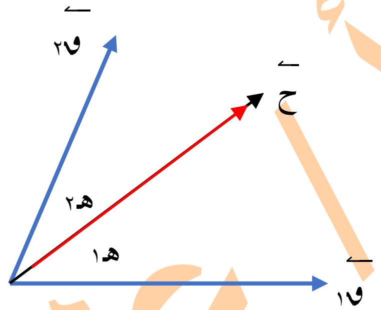
فأوجد القيمة العظمى والصغرى لمحصلة القوى الثلاث .

٨ قوتان مقدارهما ى ١ ، ى ٢ نيوتن ومحصلتها ح ∋ [٢ ، ١٠] حيث

ى ١>ى ٢ أوجد قيمة ى ١ ، ى ٢ ثم أوجد مقدار المحصلة عندما تكون لزاوية بينهما ١٢٠°

٩ قوتان متساويتان في المقدار ومتلاقيتان في نقطة ومقدار محصلتهما١٢ث.كجم وإذا عكس اتجاه احداهما فإن مقدار محصلتهما ٦ث.كجم أوجد مقدار كل منهما.

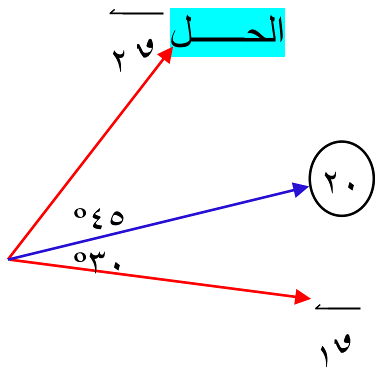
الدرس الثاني:
تحليل القوة إلى مركبتين



$$\frac{ق_1}{جا هـ_2} = \frac{ق_2}{جا هـ_1} = \frac{ح}{جا(هـ_1 + هـ_2)}$$

مثال(١) حلل قوة مقدارها ٢٠نيوتن إلى مركبتين تميلان على القوة ٣٠°، ٤٥°

الحـــــل

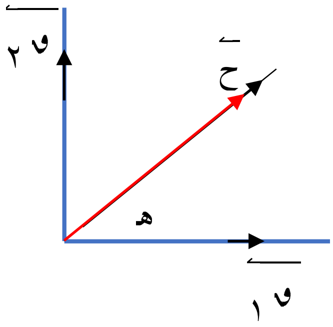


$$\frac{ق_1}{جا ٤٥°} = \frac{ق_2}{جا ٣٠°} = \frac{٢٠}{جا(٣٠° + ٤٥°)}$$

$$ق_1 = \frac{٢٠ جا ٤٥}{جا ٧٥} \simeq ١٤,٦ \text{ نيوتن}$$

$$ق_2 = \frac{٢٠ جا ٣٠}{جا ٧٥} \simeq ١٠,٤ \text{ نيوتن}$$

إذا كانت القوتان متعامدتان

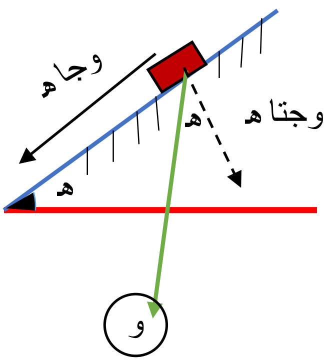


$ق_1$ = ح جتا هـ

$ق_2$ = ح جا هـ

مطرح ما الزاوية تنام تنضرب في جيب التمام

في حالة المستوى المائل



مركبة الوزن في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى = وجا هـ

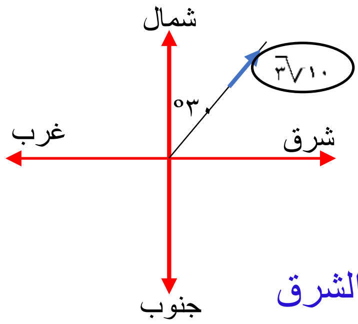
مركبة الوزن في اتجاه العمودي على المستوى = وجتا هـ

حيث هـ هي زاوية ميل المستوى على الأفقي

مثال(٢) حلل قوة مقدارها ١٠$\sqrt{٣}$ نيوتن تعمل في اتجاه ٣٠° شرق الشمال في اتجاه الشمال والشرق

الحـــــل

٣٠° شرق الشمال



تروح للشمال

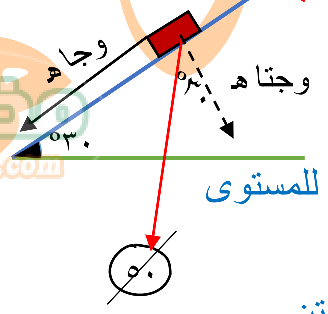
وتتحرك ٣٠° باتجاه الشرق

في اتجاه الشمال= ١٠√٣ جتا ٣٠°=١٥ نيوتن

في اتجاه الشرق= ١٠√٣ جا ٣٠°=٥√٣ نيوتن

مثال(٣) وضع جسم وزنه ٥٠ نيوتن على مستوى مائل على الأفقي بزاوية ٣٠° أوجد مركبتي الوزن في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى والعمودي عليه

الحــل



في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى

= وجا هـ

= ٥٠جا ٣٠° = ٢٥ نيوتن

في الاتجاه العمودي على المستوى

= وجتا هـ = ٥٠جتا ٣٠° = ٢٥√٣ نيوتن

مثال(٤) أوجد مركبتي $\overleftarrow{ق}$ في اتجاهي المحورين في كل مما يلي:

١ $\overleftarrow{ق}$ = ٣ $\overleftarrow{س}$ − ٢ $\overleftarrow{ص}$

الحــل

٣ وحدة في اتجاه و $\overleftarrow{س}$

، ٢ وحدة في اتجاه و $\overleftarrow{ص^-}$

---

٢ $\overleftarrow{ق}$ = (٨ داين ، ١٣٥°)

الحــل

فاكر التحويل من الصورة القطبية ‖ معيار ‖ ، θ

إلى الصورة القطبية الاحداثية س ، ص

س =المعيار × جتا الزاوية

ص=المعيار × جا الزاوية

س = ٨ جتا١٣٥° = −٤√٢ $\overleftarrow{س}$

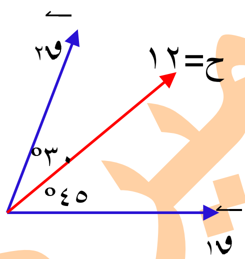
ص = ٨ جا١٣٥° = ٤√٢ $\overleftarrow{ص}$

أي أنه

٤√٢ وحدة في اتجاه و $\overleftarrow{س^-}$

و ٤√٢ وحدة في اتجاه و $\overleftarrow{ص}$

اختر ق١ =.... ح=١٢



(أ) ١٢جتا٧٥°

(ب) ١٢جتا٤٥°

(ج) ٦قا٤٥°

(د) ٦قتا٧٥°

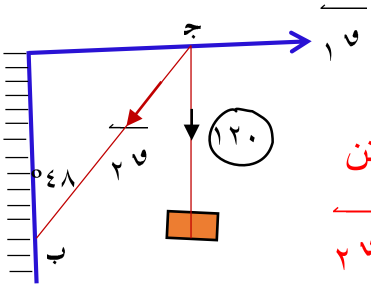
السبب

$$\frac{ق_1}{جا٣٠°} = \frac{ق_2}{جا٤٥°} = \frac{١٢}{جا٧٥°}$$

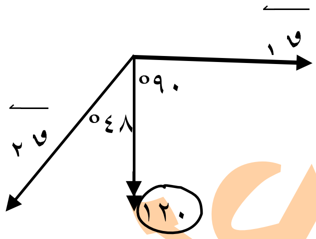
$$\therefore ق_1 = \frac{١٢ جا٣٠°}{جا٧٥°} = \frac{٦}{جا٧٥°} = ٦قتا٧٥°$$

مثال(٥)

حلل القوة ١٢٠ نيوتن في اتجاه $\overleftarrow{\text{و}_1}$ ، $\overleftarrow{\text{و}_2}$



الحــل



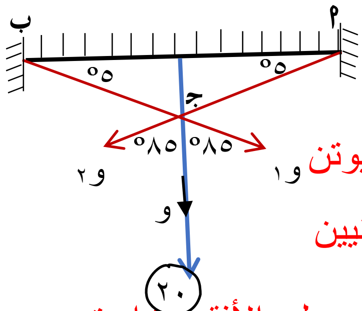
الزاوية ٤٨° بالتبادل

$$\frac{\text{و}_1}{\text{جا}\,48^\circ} = \frac{\text{و}_2}{\text{جا}\,90^\circ} = \frac{120}{\text{جا}\,138^\circ}$$

$$\text{و}_1 = \frac{120\ \text{جا}\,48^\circ}{\text{جا}\,138^\circ} = 133{,}27\ \text{نيوتن}$$

$$\text{و}_2 = \frac{120\ \text{جا}\,90^\circ}{\text{جا}\,138^\circ} = 179{,}34\ \text{نيوتن}$$

مثال (٦)



مصباح وزنه ٢٠ نيوتن ملصق بحبلين معدنيين $\overline{\text{ا ج}}$ ، $\overline{\text{ب ج}}$ يميلان على الأفقي بزاويتين متساويتين كل منهما ٥°

المطلوب

(ا) حلل وزن المصباح في الاتجاهين $\overleftarrow{\text{ا ج}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب ج}}$

(ب) ماذا يحدث لمركبة الوزن في اتجاهي الجبلين المعدنيين إذا نقص قياس زاويته مع الأفقي عن ٥° وماذا تتوقع لمقدار مركبة الوزن عندما يصبح الحبل أفقيا؟

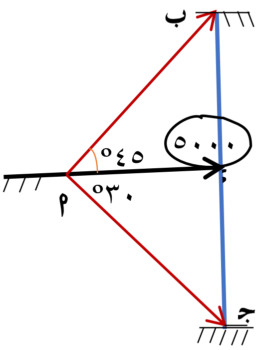
الحــل

(ا)
$$\frac{\text{و}_1}{\text{جا}\,85^\circ} = \frac{\text{و}_2}{\text{جا}\,85^\circ} = \frac{20}{\text{جا}\,(85^\circ+85^\circ)}$$

$$\therefore\ \text{و}_1 = \text{و}_2 = \frac{20\ \text{جا}\,85^\circ}{\text{جا}\,170^\circ} \simeq 114{,}74\ \text{نيوتن}$$

(ب) عندما تقل الزاوية مع الأفقي عن ٥° فغن مقدار مركبة الوزن في اتجاهي الجبلين يزداد إلى أن يصبح لانهائياً عندما يكون الحبل أفقياً.

مثال(٧)



يراد سحب بارجة بواسطة قاطرتين ب ، ج وباستخدام المعطيات من الشكل أوجد الشد في كل من الحبلين

الحل

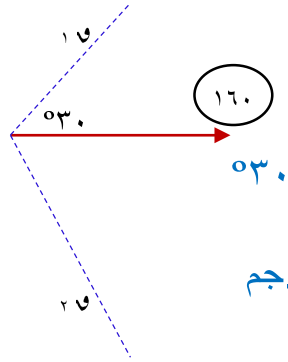
س_1 في اتجاه $\overleftarrow{\text{ا ب}}$ ، س_2 في اتجاه $\overleftarrow{\text{ا ج}}$

$$\frac{\text{س}_1}{\text{جا}\,30^\circ} = \frac{\text{س}_2}{\text{جا}\,45^\circ} = \frac{5000}{\text{جا}\,75^\circ}$$

$$\text{س}_1 = \frac{5000\ \text{جا}\,30^\circ}{\text{جا}\,75^\circ} = 2588{,}2\ \text{نيوتن}$$

$$\text{س}_2 = \frac{5000\ \text{جا}\,45^\circ}{\text{جا}\,75^\circ} = 3660{,}3\ \text{نيوتن}$$

مثال(٨) حل قوة أفقية ١٦٠ث.جم في اتجاهين متعامدين أحدهما يميل على الأفقي بزاوية ٣٠° لأعلى



الحل

ق١ الأعلى = ١٦٠جتا٣٠°

= ٨٠$\sqrt{٣}$ ث.جم

ق٢ لأسفل=١٦٠جا٣٠°

= ٨٠ ث.جم

مثال(٩) حللت قوة مقدارها ١٠$\sqrt{٣}$ نيوتن إلى مركبتين متعامدتين مقدار أحدهما ١٥نيوتن فأوجد مقدار المركبة الأخرى

الحل

طبعاً هنحل المثال ده بفكرة الدرس الماضي أسهل

المحصلة ح= ١٠$\sqrt{٣}$ ى=٩٠°

ق١=١٥نيوتن

∴ ح= $\sqrt{ق_١^٢ + ق_٢^٢}$

$(١٠\sqrt{٣})^٢=(١٥)^٢+ ق_٢^٢$

$٣٠٠=٢٢٥+ق_٢^٢$

$ق_٢^٢$ = ٣٠٠-٢٢٥=٧٥

∴ ق٢= $\sqrt{٧٥}$ =٥$\sqrt{٣}$ نيوتن

الواجب

أولاً الأسئلة المقالية

١ حلل قوة مقدارها ٨٠٠نيوتن إلى اتجاهين يصنعان ٣٠° ، ٤٠°

٢ حلل قوة مقدارها١٠٠نيوتن إلى اتجاهين متعامدين احداهما يضع ٣٠°

٣ قوة مقدارها ١٨نيوتن تعمل في اتجاه الجنوب أوجد مركبتيها في اتجاهي ٦٠° شرق الجنوب ، ٣٠°غرب الجنوب.

٤ حلل قوة مقدارها ٩٠نيوتن إلى قوتين متساويتين في المقدار وقياس الزاوية بين اتجاهيها ٦٠°

٥ أوجد مقدار المركبتين المتعامدتين
خط أكبر ميل والعمودي
لوزن جسم ٨٠نيوتن موضوع على مستو مائل على الأفقي بزاوية ٣٠°

٦ مستوى مائل طوله ١٣٠سم وارتفاعه ٥٠سم وضع عليه جسم وزنه ٣٩٠نيوتن أوجد مركبتي الوزن في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى والاتجاه العمودي عليه

ثانياً: اختر الاجابة الصحيحة

١ إذا وضع جسم وزنه "و" على مستوى أملس يميل على الأفقي بزاوية (θ) إن مركبة وزنه في اتجاه المستوى=....

(أ) و (ب) وجاθ

(ج) وجتاθ (د) وظاθ

٢ إذا وضع جسم وزنه "و" على مستوى أملس يميل على الرأسي بزاوية (θ) فإن مركبة وزنه في اتجاه المستوى=....

(أ) و (ب) وجاθ

(ج) وجتاθ (د) وظاθ

٣ قوة مقدارها ١٠√٢ ث.جم تعمل في اتجاه الجنوب الشرقي تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مقدار مركبة القوة في اتجاه الجنوب=...ث.جم

(أ)٥ (ب)١٠

(ج)١٠√٢ (د) ٥√٢

٤ قوة مقدارها ٦نيوتن تعمل في اتجاه الشمال تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مركبتها في اتجاه الشرق تساوي...نيوتن

(أ)صفر (ب)٣

(ج)٣√٢ (د)٦

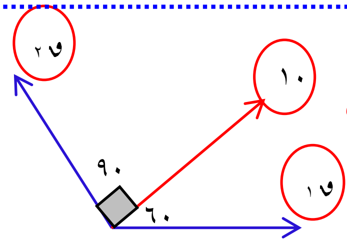
٥ قوة مقدارها ٤√٢ نيوتن تعمل في اتجاه الشرق تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مركبتها في اتجاه الشمال الشرقي =...نيوتن

(أ)صفر (ب) ٤√٢

(ج)٤ (د)٦

٦ في الشكل المقابل

ق ٢ = ...نيوتن



(أ)٥√٣ (ب)١٠

(ج) ١٠√٣ (د)٢٠

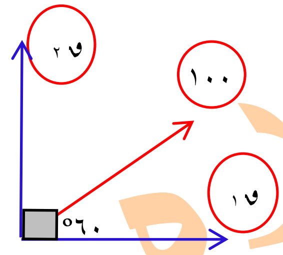
٧ قوة مقدارها ٤√٢تعمل غي اتجاه الشرق وتم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مقدار مركبتها في اتجاه الشمال الشرقي =...نيوتن

(أ)صفر (ب) ٤√٢

(ج)٤ (د)٦

٨ في الشكل المقابل:

(ق١ & ق٢)



(أ)(٥٠ ، ٥٠√٣)

(ب) (٥٠√٣، ٥٠)

(ج) (٥٠ ، ٥٠)

(د) (١٠ ، ١٠)

الدرس الثالث: محصلة عدة قوى متلاقية في نقطة

الشرط الازم والكافي لاتزان مجموعة من القوى المستوية أن تمثل هندسياً بأضلاع مضلع مقفل مأخوذة في اتجاه دوري واحد

س = ٠ ، ص = ٠

خطوات حل المسألة

١ ترسم المسألة في نظام احداثي متعامد ولو فيه اتجاهات تكتب الاتجاهات على الأسهم

٢ تحدد كل قوة والزاوية التي تصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

٣ تجيب س = ق جتا هـ

، ص = ق جا هـ

٤ تجيب ح = $\sqrt{س^2 + ص^2}$

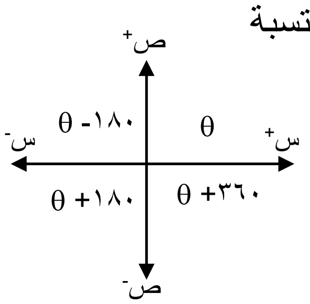
٥ وبعدين ظا هـ = $\frac{ص}{س}$ من غير إشارة

وتشوف الربع الذي تقع فيه.

وتحاول تخليها زاوية منتسبة

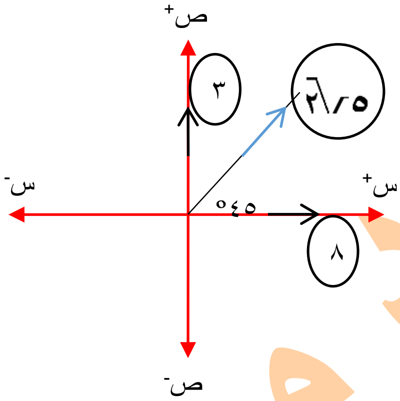
متنساش تحط القوة

في دائرة على الرسم



مثال(١) ثلاث قوى مستوية ومتلاقية في نقطة فإذا كان الزاوية بين الأولى والثانية= ٤٥° وبين الثانية والثالثة =٤٥° فأوجد مقدار واتجاه المحصلة حيث القوى ٨ ، ٥√٢ ، ٣ نيوتن

الحـــل



القوة	٨	٥√٢	٣
قياس زاويتها القطبية	صفر°	٤٥°	٩٠°

س =٨جتا٠° + ٥√٢جتا٤٥° +٣جتا٩٠°

= ١٣نيوتن

ص =٨جا٠° + ٥√٢جا٤٥° +٣جا٩٠°

= ٨نيوتن

$ح = \sqrt{س^2 + ص^2} = \sqrt{(١٣)^2 + (٨)^2}$

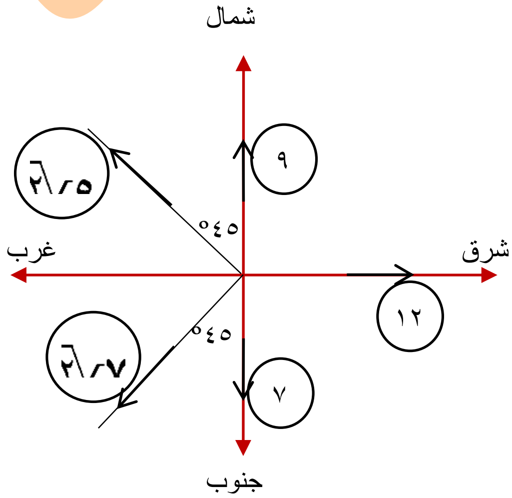
$= \sqrt{٢٣٣} \simeq ١٥,٢٦٤$ نيوتن

$ظا هـ = \frac{ص}{س} = \frac{٨}{١٣}$ في الربع الأول

$\therefore$ هـ $\simeq ٣٦ ^\circ ٣١ '$

مثال(٢) خمس قوى مستوية ومتلاقية في نقطة مقاديرها ١٢ ، ٩ ، ٥√٢ ، ٧√٢ ، ٧ نيوتن تعمل في الشرق ، الشمال ، الشمال الغربي، الجنوب الغربي ، والجنوب على الترتيب أثبت أن المجموعة متزنة

الحـــل



ق	١٢	٩	٥√٢	٧√٢	٧
θ	صفر°	٩٠°	١٣٥°	٢٢٥°	٢٧٠°

تعرف تكمل أنت

س =

ص =

ح =

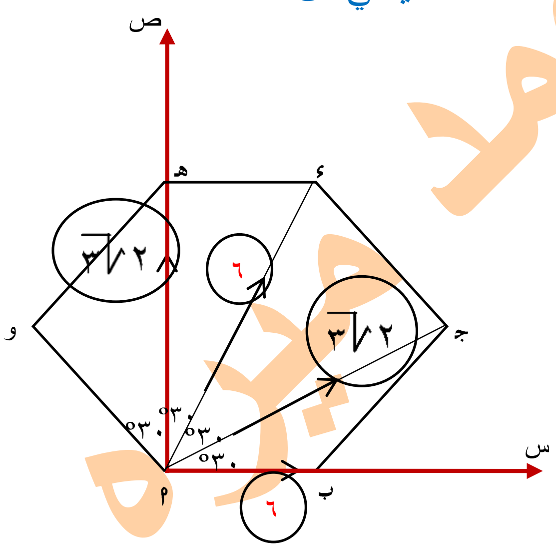
ظا هـ =

مثال(٣) أ ب جـ ء هـ و سداسي منتظم أثرت القوى ٦ ، ٢√٣ ، ٦ ، ٢√٣ نيوتن في $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{أجـ}$ ، $\overrightarrow{أء}$ ، $\overrightarrow{أهـ}$ على الترتيب أوجد مقدار واتجاه المحصلة

الحـــل

قياس كل زاوية من السداسي المنظم=١٢٠°

$\frac{١٢٠}{٤} = ٣٠°$ يعني كل حتة = ٣٠°



ق	٦	٢√٣	٦	٢√٣
θ	صفر°	٣٠°	٦٠°	٩٠°

س =٦جتا٠° + ٢√٣جتا٣٠° + ٦جتا٦٠°
+ ٢√٣جتا٩٠° = ١٢نيوتن

ص =٦جا٠° + ٢√٣جا٣٠° + ٦جا٦٠°
+ ٢√٣جا٩٠° = ٦√٣ نيوتن

ح= √(س² + ص²) = √((١٢)² + (٦√٣)²)

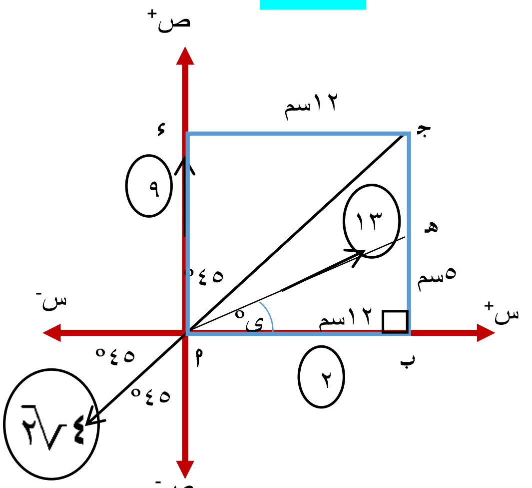
= ٦√٧ نيوتن

ظا هـ = ص/س = ٦√٣/١٢ = √٣/٢

∴ هـ ≃ ٣٦// ٥٣/ ٤٠°

مثال(٤) أ ب جـ ء مربع طول ضلعه ١٢سم ، هـ ∈ ب جـ بحيث ب هـ =٥سم ، أثرت قوى مقاديرها ٢ ، ١٣ ، ٤√٢ ، ٩ ث.جم في الاتجاهات أ ب ، أ هـ ، أ جـ ، أ ء على الترتيب أوجد محصلة هذه القوى

الحـــل



∵ أ ب هـ △ قائم في ب

∴ أ هـ = √(٥² + ١٢²) = ١٣سم

جتاى= ١٢/١٣ جاى= ٥/١٣

ملاحظة اتجاه أ جـ يعني في الربع الثالث وعشان قطر المربع ينصف الزاوية يعني ٤٥° في الربع الثالث هتبقى ١٨٠+٤٥=٢٢٥°

ق	٢	١٣	٤√٢	٩
θ	صفر°	ى°	٢٢٥°	٩٠°

س = ٢جتا٠° + ١٣جتاى° + ٤√٢جتا٢٢٥°
+ ٩جتا٩٠° = ١٠ ث.جم

ص = ٢جا٠° + ١٣جاى° + ٤√٢جا٢٢٥°
+ ٩جا٩٠° = ١٠ ث.جم

ح= √(س² + ص²) = √(١٠² + ١٠²)

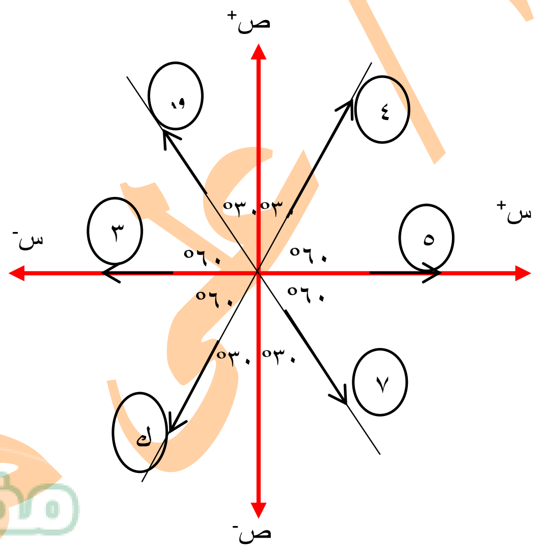
= ١٠√٢ ث.جم

ظا هـ = ص/س = ١٠/١٠ = ١

∴ هـ = ٤٥° وفي اتجاه أ جـ

مثال(٥) أثرت القوى المستوية ٥ ، ٤ ، و ،٣، ك ، ٧ نيوتن في نقطة مادية والزاوية بين كل قوتين متتاليتين منها ٦٠° أوجد قيمة و ، ك حتى تكون المجموعة متزنة

الحـــل



ق	٥	٤	و	٣	ك	٧
θ	صفر°	٦٠°	١٢٠°	١٨٠°	٢٤٠°	٣٠٠°

∴ المجموعة متزنة ∴ س =صفر ، ص=صفر

س =٥جتا٠° + ٤جتا٦٠°+ و جتا١٢٠°

+ ٣جتا١٨٠° + ك جتا٢٤٠° +

٧جتا٣٠٠° =٠

٥+٢ - $\frac{١}{٢}$و - ٣ - $\frac{١}{٢}$ك + $\frac{٧}{٢}$ =٠

٧,٥ - $\frac{١}{٢}$و - $\frac{١}{٢}$ك =٠ (×٢)

و + ك =١٥ ← (١)

، ص =٥جا٠° + ٤جا٦٠°+ و جا١٢٠°

+ ٣جا١٨٠° + ك جا٢٤٠° +

٧جا٣٠٠° =٠

٠ + ٢$\sqrt{٣}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$×و +٠ + ($-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$)ك

+٧×($-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$)=٠ بالضرب × (٢)

٤$\sqrt{٣}$ - ٧$\sqrt{٣}$ + $\sqrt{٣}$ و - $\sqrt{٣}$ك =٠

$\sqrt{٣}$ و - $\sqrt{٣}$ك =٣$\sqrt{٣}$ ÷($\sqrt{٣}$)

و – ك = ٣ ← (٢)

و + ك = ١٥ ← (١)

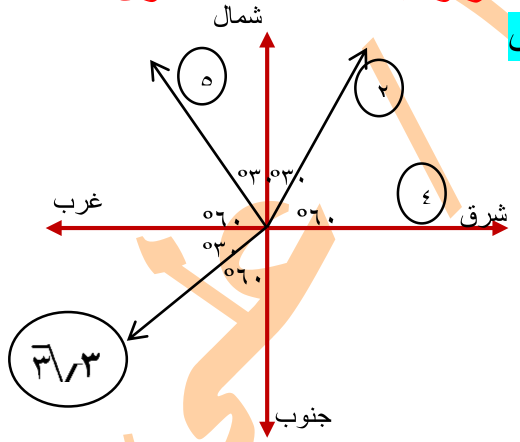
٢و = ١٨ ∴ و = $\frac{١٨}{٢}$ = ٩ث.جم

بالتعويض في (١) ك + ٩ = ١٥

∴ ك = ١٥ – ٩=٦ ث.جم

مثال(٦) أربع قوى مستوية تؤثر في نقطة مادية، الأولى ٤نيوتن في اتجاه الشرق والثانية ٢نيوتن في اتجاه ٣٠°شرق الشمال والثالثة ٥نيوتن في اتجاه ٦٠°شمال الغرب والرابعة ٣√٣نيوتن في اتجاه ٦٠°غرب الجنوب أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى

الحـــل



ق	٤	٢	٥	٣√٣
θ	٠	٦٠°	١٢٠°	٢١٠°

س = ٤جتا٠° + ٢جتا٦٠° + ٥جتا١٢٠° + ٣√٣جتا٢١٠°

= -٢

ص = ٤جا٠° + ٢جا٦٠° + ٥جا١٢٠° + ٣√٣جا٢١٠°

= ٢√٣

∴ ح = -٢ س + ٢√٣ ص

∴ ح = √((٢)² + (٢√٣)²) = ٤نيوتن

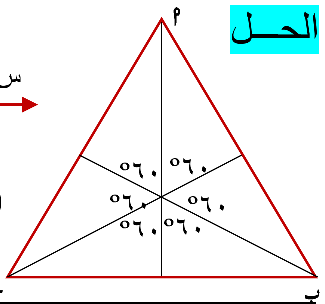
ظا هـ = ٢√٣ / ٢ = هـ = ٦٠° ولكن

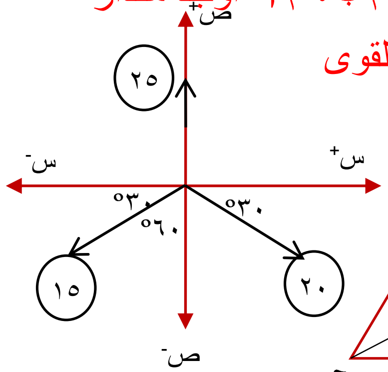
س < ٠ ، ص > ٠ في الربع الثاني

١٨٠ – ٦٠ = ١٢٠° ∴ هـ = ١٢٠°

مثال(٧) ا ب جـ مثلث متساوي الأضلاع فيه م نقطة تلاقي المتوسطات أثرت القوى التي مقاديرها ١٥ ، ٢٠ ، ٢٥ نيوتن في نقطة مادية في الاتجاهات م جـ ، م ب ، م ا أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى

الحـــل





ق	٢٥	١٥	٢٠
θ	٩٠°	٢١٠°	٣٣٠°

س = ٢٥جتا٩٠° + ١٥جتا٢١٠° + ٢٠جتا٣٣٠°

= ٢,٥ √٣

ص = ٢٥جا٩٠° + ١٥جا٢١٠° + ٢٠جا٣٣٠°

= ٧,٥

∴ ح = √((٢,٥√٣)² + (٧,٥)²) = ٥√٣نيوتن

ظا هـ = ٧,٥ / ٢,٥√٣ = هـ = ٦٠°

أي أن المحصلة مقدارها ٥√٣نيوتن وتصنع زاوية ٦٠° مع و س

تذكر أن

أول جا(٩٠ – هـ)=جتا هـ ، جتا(٩٠ – هـ)=جا هـ

ثاني جا(٩٠+هـ)=جتا هـ ، جتا(٩٠+هـ)= - جا هـ

ثاني جا(١٨٠-هـ)=جا هـ ، جتا(١٨٠-هـ)=-جتا هـ

ثالث جا(١٨٠+هـ)=- جاهـ ، جتا(١٨٠+هـ)= -جتاهـ

رابع جا(٣٦٠-هـ)=- جاهـ ، جتا(٣٦٠-هـ)=جتا هـ

مثال (٨) إذا كان

ى١ = ٥ س + ٣ ص

ى٢ = م س + ٦ ص

ى٣ = -١٤ س + ب ص

وكانت ح = (١٠√٢ ، $\frac{3}{4}\pi$)

فأوجد قيمتي م ، ب

دي صورة قطبية

الحل

ح = ى١ + ى٢ + ى٣

ح = (٥ + م -١٤) س + (٣+٦ +ب) ص

∴ ح = (-٩+م) س + (٩+ب) ص

وكذلك

ح= ١٠√٢ جتا١٣٥ س + ١٠√٢ جا١٣٥ ص

∴ -٩ + م = -١٠

م = -١٠ +٩ = -١

، ٩ + ب = ١٠

∴ ب = ١٠-٩ = ١

∴ م = -١ ، ب = ١

مثال (٩) إذا كان ى١ = ٢ س + ٣ ص

ى٢ = س + ص

فأوجد مقدار المحصلة

الحل

ح = ى١ + ى٢ = ٣ س + ٤ ص

||ح|| = $\sqrt{(٣)^2 + (٤)^2}$ = ٥ وحدة طول

الواجب

أولاً: اختر الاجابة الصحيحة

١ إذا كان ى١ = ٢ س – ٢ ص

ى٢ = ٤ س – ٨ ص

، ومحصلتهما ح = ٢م س – ٥ب ص

فإن م + ب = ...

(م) ١   (ب) ٥

(ج) ٢   (د) ٣

---

٢ إذا كانت ى١ = ٥ س

ى٢ = ٧ س – ٥ ص

فإن ||ح|| = ... وحدة قوة

(م) ١٢   (ب) ٥

(ج) ١٣   (د) √٧٣

---

٣ إذا كان ى١ = ٣ س – ٢ ص

ى٢ = م س – ص

ى٣ = ٤ س – ب ص

، ومحصلتهم ح = ٦ س – ٤ ص

فإن (م ، ب) = ...

(م) (١ ، -١)   (ب) (-١ ، ١)

(ج) (-١ ، -١)   (د) (١، ١)

٤ إذا أثرت القوى $\overleftarrow{ق}_١$ = ٤ $\overleftarrow{س}$ + ٥ $\overleftarrow{ص}$

$\overleftarrow{ق}_٢$ = م $\overleftarrow{س}$ – ٧ $\overleftarrow{ص}$

$\overleftarrow{ق}_٣$ = ٣ $\overleftarrow{س}$ + ب $\overleftarrow{ص}$

في نقطة مادية وكانت القوى متزنة فإن م + ٢ب = ...

(م) -٥　　(ب) ٥

(ج) ٧　　(د) -٣

---

٥ إذا كانت $\overleftarrow{ق}_١$ = ٥ $\overleftarrow{س}$ + ٣ $\overleftarrow{ص}$

$\overleftarrow{ق}_٢$ = م $\overleftarrow{س}$ + ٦ $\overleftarrow{ص}$

$\overleftarrow{ق}_٣$ = -١٤ $\overleftarrow{س}$ + ب $\overleftarrow{ص}$

وكانت المحصلة $\overleftarrow{ح}$ = (١٠ $\sqrt{٢}$ ، $-\frac{٣}{٤}\pi$)

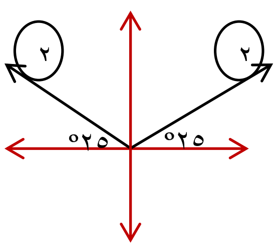
فإن (م ، ب) = ...

(م) (-١ ، ١)　　(ب) (١ ، ١)

(ج) (١ ، -١)　　(د) (-١ ، -١)

---

٦ محصلة القوى في الشكل المقابل تؤثر في اتجاه....



(م) و $\overleftarrow{س}$　　(ب) و $\overleftarrow{س}'$

(ج) و $\overleftarrow{ص}$　　(د) و $\overleftarrow{ص}'$

ثانياً الأسئلة المقالية

١ أثرت ثلاث قوى مقاديرها ٢ ، ٣ ، ٢$\sqrt{٣}$ ، ٥ نيوتن في نقطة مادية وكانت الزاوية بين كل قوتين متتاليتين ٦٠° ، ٣٠° ، ١٥٠° أوجد مقدار واتجاه المحصلة

---

٢ أربع قوى مستوية الأولى ٤نيوتن في اتجاه الشرق
والثانية ٢نيوتن في اتجاه ٣٠°شرق الشمال
والثالثة ٥نيوتن في اتجاه ٦٠°شمال الغرب
والرابعة ٢$\sqrt{٣}$نيوتن في اتجاه ٦٠°غرب الجنوب
أوجد مقدار واتجاه المحصلة

---

٣ م ب جـ ء هـ و سداسي منتظم أثرت القوى ٨ ، ٦$\sqrt{٣}$ ، ٥ ، ٤$\sqrt{٣}$ نيوتن في اتجاه $\overleftarrow{م ب}$ ، $\overleftarrow{م جـ}$ ، $\overleftarrow{م ء}$ ، $\overleftarrow{م هـ}$ على الترتيب
أوجد مقدار واتجاه المحصلة

---

٤ القوى ٢٠ ، ١٠ ، ق ، ك نيوتن تؤثر في نقطة مادية وقياس الزاوية بين الأولى والثانية ٤٥° ، وبين الثانية والثالثة ٩٠° ، وبين الثالثة والرابع ١٣٥° فإذا كان مقدار المحصلة ١٠نيوتن في اتجاه القوة ق
فأوجد قيمة ق ، ك

٥ ا ب جـ ء مربع طول ضلعه ١٢سم ، هـ ∈ ب جـ بحيث ب هـ =٥سم ، أثرت قوى مقاديرها ٣ ، ١٣ ، ٦ $\sqrt{٢}$ ، ٨ نيوتن في الاتجاهات ا ب ، ا هـ ، ا جـ ، ا ء على الترتيب أوجد محصلة هذه القوى

....

٦ أربع قوى مستوية تؤثر في نقطة مادية،
الأولى ٨ نيوتن في اتجاه الشرق
والثانية ١٠ نيوتن في اتجاه ٦٠° شرق الشمال
والثالثة ١٢ نيوتن في اتجاه ٣٠° شمال الغرب
والرابعة ٦ $\sqrt{٣}$ نيوتن في اتجاه ٦٠° غرب الجنوب
أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى

....

٧ ا ب جـ مثلث متساوي الأضلاع فيه م نقطة تلاقي المتوسطات أثرت القوى التي مقاديرها ٢٥ ، ٣٠ ، ٤٥ نيوتن في نقطة مادية في الاتجاهات م جـ ، م ب ، م ا أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى

....

٨ إذا كان

ق١ = ٤ س + ٢ ص

ق٢ = ا س + ٥ ص

ق٣ = -١١ س + ب ص

وكانت ح = (٨ $\sqrt{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}\pi$)

فأوجد قيمتي ا ، ب

٩ أثرت القوى المستوية ١٠ ، ٨ ، ق ، ٦ ، ك ، ١٤ نيوتن في نقطة مادية والزاوية بين كل قوتين متتاليتين منها ٦٠° أوجد قيمة ق ، ك حتى تكون المجموعة متزنة

....

١٠ ا ب جـ ء هـ و سداسي منتظم أثرت القوى ٥ ، ٤ $\sqrt{٣}$ ، ٦ ، ٦ $\sqrt{٣}$ نيوتن في ا ب ، ا جـ ، ا ء ، ا هـ على الترتيب أوجد مقدار واتجاه المحصلة

....

الدرس الرابع:
اتزان جسم تحت تأثير ثلاث قوى

ملاحظات

١ شرط اتزان جسم تحت تأثير قوتين
١- متساويتين في المقدار.
٢- متضادين في الاتجاه.
٣- خطى عمليهما على استقامة واحدة.

٢ إذا كانت البكرة ملساء فإن الشد في فرعي الخيطين يكون متساوي.

٣ قاعدة مثلث القوى
كل قوة تتناسب مع طول الضلع المناظر لها.

٤ قاعدة لامي
كل قوة تتناسب مع جيب الزاوية بين القوتين الآخرتين.

٥ مثلث القوى العمودي
كل قوة تتناسب مع طول الضلع العمودي عليه

٦ المثلث القائم الزاوية ٣٠°، ٦٠°
النسبة بين أضلاعه ١ : $\sqrt{٣}$: ٢
٣٠° ٦٠° الوتر ٩٠°

٧ المثلث القائم المتساوي الساقين
١ : ١ : $\sqrt{٢}$

٨ طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠°
في المثلث القائم = $\frac{١}{٢}$ طول الوتر

٩ طول متوسط المثلث القائم
والخارج من رأس القائمة = $\frac{١}{٢}$ طول الوتر

١٠ إذا رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين فإن المثلث الناتج يشابه الأصلي

١١ القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث وتساوي $\frac{١}{٢}$ طوله

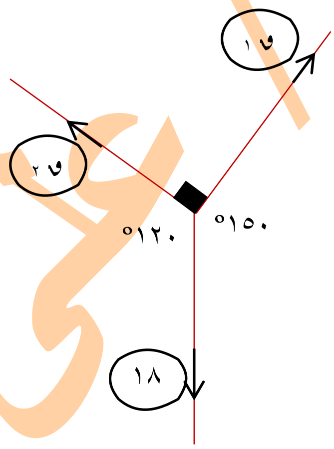
١٢ القطعة المستقيمة المرسومة من منتصف أحد الضلعين موازية أحد الأضلاع فإنها تنصف الضلع الثالث

١٣ جا(١٨٠ – هـ) = جا هـ
جتا(١٨٠ – هـ) = - جتا هـ

١٤ جا(٩٠+هـ) = = جتا هـ
جتا(٩٠+هـ) = - جا هـ

مثال(١) ثلاث قوى مستوية مقاديرها ق١ ، ق٢ ، ١٨ نيوتن متلاقية في نقطة واحدة ومتزنة فإذا كان قياس الزاوية بين خطي عمل القوتين الأولى والثانية ٩٠° ، وبين الثانية والثالثة ١٢٠° أوجد ق١ ، ق٢

الحــــل



$$\frac{\text{ق}_1}{\text{جا}\,120^\circ} = \frac{\text{ق}_2}{\text{جا}\,150^\circ} = \frac{18}{\text{جا}\,90^\circ}$$

$$\text{ق}_1 = \frac{18\ \text{جا}\,120^\circ}{\text{جا}\,90^\circ} = 9\sqrt{3}\ \text{نيوتن}$$

$$\text{ق}_2 = \frac{18\ \text{جا}\,150^\circ}{\text{جا}\,90^\circ} = 9\ \text{نيوتن}$$

مثال(٢) علق ثقل مقداره ٨٠نيوتن في طرف خيط مثبت طرفه الآخر في حائط رأسي ، أزيح الثقل بقوة عمودية على الخيط حتى أصبح مائلاً على الحائط بزاوية ٣٠°

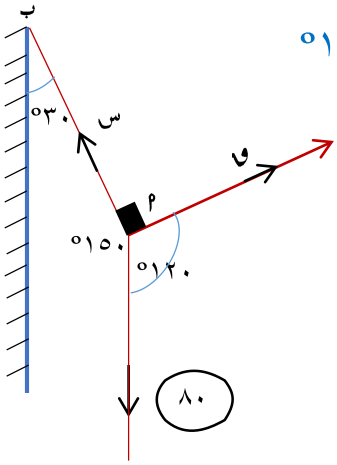
أوجد مقدار القوة والشد في الخيط

الحــــل

الحائط رأسي والوزن رأسي متوازيين

(١٨٠ − ٣٠) = ١٥٠°

بتطبيق قاعدة لامي



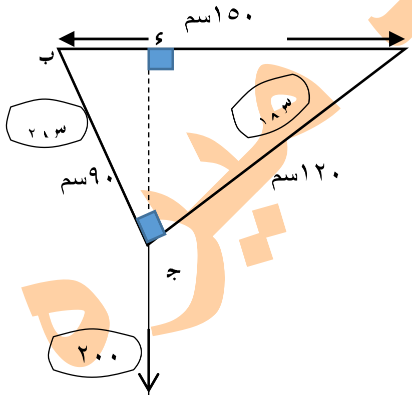
$$\frac{\text{ق}}{\text{جا}\,150^\circ} = \frac{\text{ش}}{\text{جا}\,120^\circ} = \frac{80}{\text{جا}\,90^\circ}$$

$$\text{ق} = \frac{80\ \text{جا}\,150^\circ}{\text{جا}\,90^\circ} = 40\ \text{نيوتن}$$

$$\text{س} = \frac{80\ \text{جا}\,120^\circ}{\text{جا}\,90^\circ} = 40\sqrt{3}\ \text{نيوتن}$$

مثال(٣) علق ثقل ٢٠٠ث.جم بخيطين طولاهما ٩٠سم ، ١٢٠سم من نقطتين في خط أفقي واحد البعد بينهما ١٥٠سم أوجد مقدار الشد في كل الخيطين

الحــــل



∵ (م ب)² = (١٥٠)² = ٢٢٥٠٠

(م جـ)² + (ب جـ)² = (١٢٠)² + (٩٠)²

= ٢٢٥٠٠

∴ ا ب ج مثلث قائم

$\overline{س_١} \perp \overline{ب ج}$

، $\overline{س_٢} \perp \overline{ا ج}$

و $\overline{(٢٠٠)} \perp \overline{ا ب}$

بتطبيق قاعدة مثلث القوى العمودي

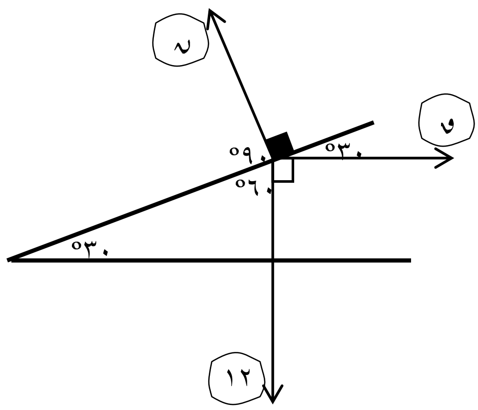
∴ $\frac{س_١}{٩٠} = \frac{س_٢}{١٢٠} = \frac{٢٠٠}{١٥٠}$

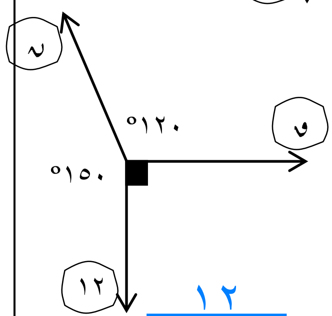
$س_١ = \frac{٩٠ \times ٢٠٠}{١٥٠} = ١٢٠$ ث.جم

$س_٢ = \frac{٢٠٠ \times ١٢٠}{١٥٠} = ١٦٠$ ث.جم

مثال(٤) وضع جسم وزنه ١٢ث.كجم على مستوى أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ توازن الجسم بواسطة قوة أفقية أوجد مقدار القوة ورد فعل المستوى

الحل





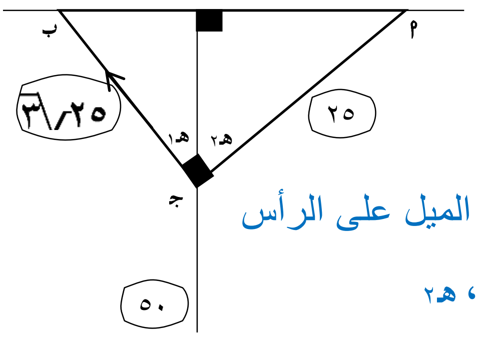
$\frac{ق}{جا ١٥٠°} = \frac{ر}{جا ٩٠°} = \frac{١٢}{جا ١٢٠°}$

$ق = \frac{١٢ جا ١٥٠°}{جا ١٢٠°} = ٤\sqrt{٣}$ ث.جم

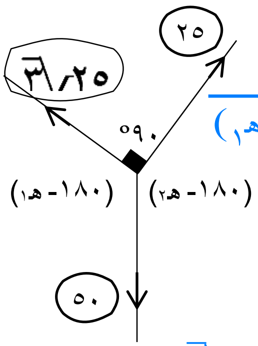
$ر = \frac{١٢ جا ٩٠°}{جا ١٢٠°} = ٨\sqrt{٣}$ ث.جم

مثال(٥) علق ثقل قدره ٥٠ث.جم بواسطة خيطين متعامدين فإذا كان الشد في الخيطين هما $٢٥\sqrt{٣}$ ، ٢٥ ث.جم فأوجد قياس الزاوية التي يميل بها كل من الخيطين على الرأسي

الحل



زاويتي الميل على الرأس هي هـ١ ، هـ٢



$\frac{٥٠}{جا ٩٠°} = \frac{٢٥}{جا(١٨٠ - هـ_١)} = \frac{٢٥\sqrt{٣}}{جا(١٨٠ - هـ_٢)}$

$\frac{٥٠}{جا ٩٠°} = \frac{٢٥}{جا هـ_١} = \frac{٢٥\sqrt{٣}}{جا هـ_٢}$

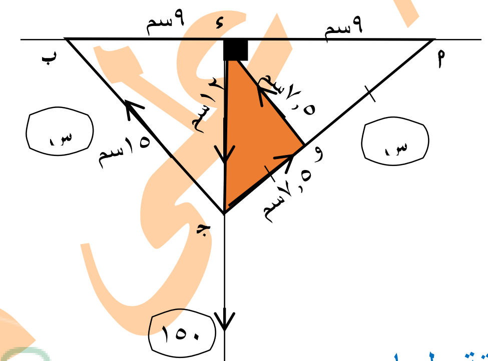
$جا هـ_١ = \frac{٢٥ \times جا ٩٠}{٥٠} = \frac{١}{٢}$

∴ $هـ_١ = ٣٠°$

∴ $هـ_٢ = ٦٠°$

مثال(٦) خيط أملس طوله ٣٠سم ، ربط من طرفيه في نقطتين ٢ ، ب بحيث كان $\overline{٢ب}$ أفقياً وطوله =١٨سم فإذا انزلقت حلقة ملساء وزنها ١٥٠ث.جم على الخيط اثبت أنه في وضع التوازن يكون طولا فرعي الخيط متساويين ثم أوجد الشد في كل منهما

الحـــل



∴ الحلقة ملساء

∴ الشد في فرعي الخيط متساوي

$ء جـ = \sqrt{(١٥)^2 - (٩)^2} = ١٢$سم

∴ ء منتصف $\overline{٢ب}$ برسم $\overline{ءو}$ // $\overline{ب جـ}$

فإنه ينصف $\overline{٢جـ}$ ∴ و جـ =٧,٥سم

∴ $\overline{ءو}$ متوسط خارج من رأس القائمة

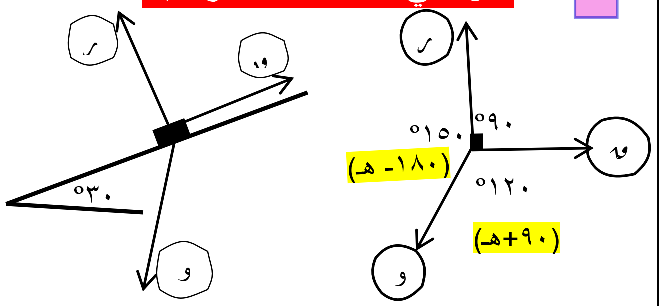
$= \frac{١}{٢}$ طول الوتر $= \frac{١}{٢} \times ١٥ = ٧,٥$سم

$\frac{ش}{٧,٥} = \frac{ش}{٧,٥} = \frac{١٥٠}{١٢}$

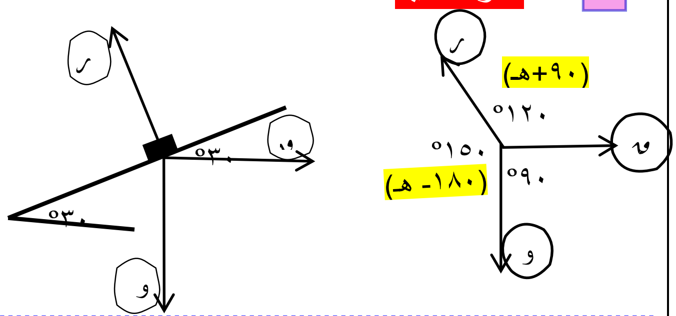
∴ $ش = \frac{١٥٠ \times ٧,٥}{١٢} = ٩٣,٧٥$ث.جم

ملخص لحالات المستوى المائل الأملس

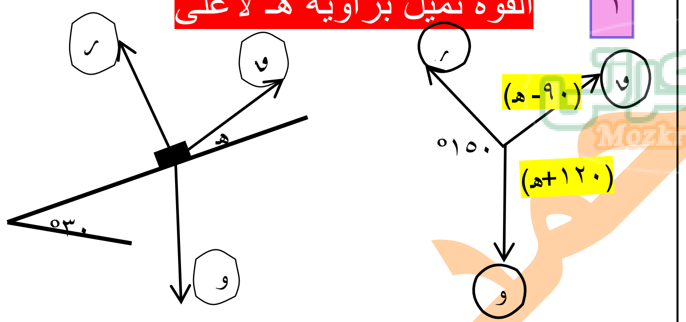
١ القوة في اتجاه خط أكبر ميل



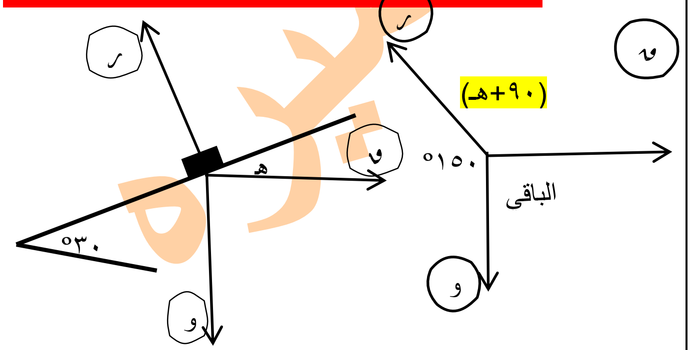
٢ القوة أفقية



٣ القوة تميل بزاوية هـ لأعلى



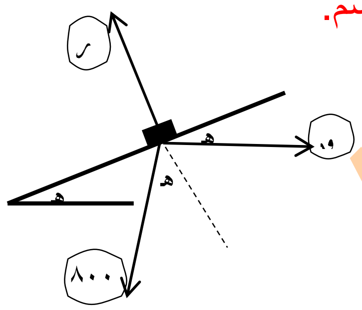
٤ القوة تميل على المستوى بزاوية هـ لأسفل

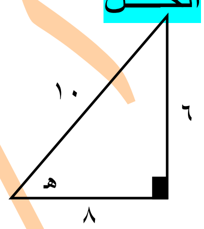


لاحظ أن ٣٠° دي مش ثابتة دي متغيرة وبناءً على ذلك هيتغير كل الأرقام لذلك أفهم كل نوع شكله وإزاي تجيب الزوايا بتاعته.

مثال(٧) وضع وزنه ٨٠٠ث.جم على مستوى أملس يميل الأفقي بزاوية قياسها هـ حيث جا هـ =٠,٦ وحفظ الجسم في حالة توازن بواسطة قوة أفقية أوجد مقدار هذه القوة ورد فعل المستوى على الجسم.

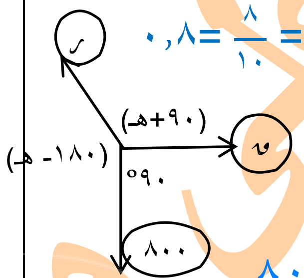
الحل





جا هـ = $\frac{٦}{١٠}$ = ٠,٦ جتا هـ = $\frac{٨}{١٠}$ = ٠,٨

بتطبيق قاعدة لامي



$\frac{\text{ق}}{\text{جا}(١٨٠-\text{هـ})} = \frac{٨٠٠}{\text{جا}(٩٠+\text{هـ})} = \frac{\text{ر}}{\text{جا}٩٠^\circ}$

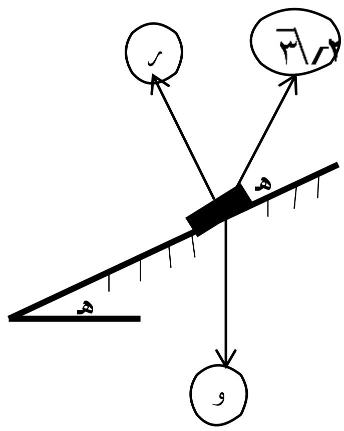
$\frac{\text{ق}}{\text{جاهـ}} = \frac{٨٠٠}{\text{جتاهـ}} = \frac{\text{ر}}{\text{جا}٩٠^\circ}$

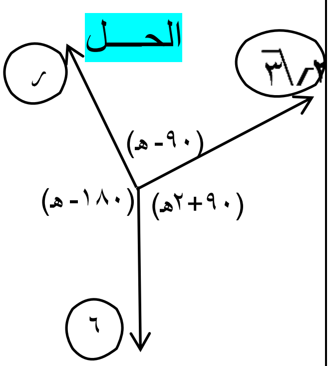
∴ ق = $\frac{\text{جاهـ}\times ٨٠٠}{\text{جتاهـ}} = \frac{٨٠٠\times ٠,٦}{٠,٨}$ = ٦٠٠ث.جم

ر = $\frac{٨٠٠\ \text{جا}٩٠^\circ}{\text{جتاهـ}} = \frac{٨٠٠}{٠,٨}$ = ١٠٠٠ث.جم

مثال(٨) وضع جسم وزنه ٦نيوتن على مستوى أملس يميل على الأفقي بزاوية هـ وحفظ توازنه بواسطة قوة مقدارها ٢$\sqrt{٣}$ نيوتن وتميل على خط أكبر ميل للمستوى بزاوية هـ لأعلى أوجد قيمة هـ ورد فعل المستوى

الحل





بتطبيق قاعدة لامي

$\frac{\text{ر}}{\text{جا}(٩٠+٢\text{هـ})} = \frac{٢\sqrt{٣}}{\text{جا}(١٨٠-\text{هـ})} = \frac{٦}{\text{جا}(٩٠-\text{هـ})}$

$\frac{٢\sqrt{٣}}{\text{جاهـ}} = \frac{\text{ر}}{\text{جتا}٢\text{هـ}} = \frac{٦}{\text{جتاهـ}}$

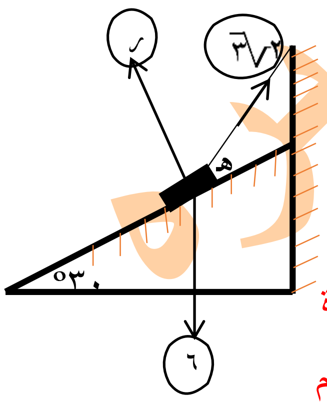
∴ $\frac{٢\sqrt{٣}}{\text{جاهـ}} = \frac{٦}{\text{جتاهـ}}$ $\frac{\text{مقدم}}{\text{مقدم}} = \frac{\text{تالي}}{\text{تالي}}$

$\frac{٢\sqrt{٣}}{٦} = \frac{\text{جاهـ}}{\text{جتاهـ}}$ ∴ ظا هـ= $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

∴ هـ = ٣٠°

∴ ر= $\frac{٦\ \text{جتا}٦٠}{\text{جتا}٣٠}$ = ٢$\sqrt{٣}$ نيوتن

مثال(٩) جسم وزنه ٦ث.كجم موضوع على مستوى أملس يميل على الأفقي بزاوية ٣٠° وحفظ بقوة شد س = ٢$\sqrt{٣}$ ث.كجم

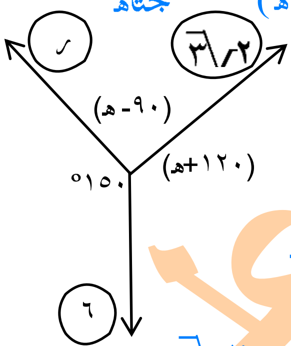


أوجد قياس الزاوية التي يصنعها الخيط مع المستوى ومقادر رد فعل المستوى على الجسم

الحل

$\frac{2\sqrt{3}}{جا ١٥٠°} = \frac{ق}{جا(١٢٠+هـ)} = \frac{٦}{جا(٩٠-هـ)}$

$\frac{2\sqrt{3}}{0.5} = \frac{ق}{جا(١٢٠+هـ)} = \frac{٦}{جتاهـ}$



∴ $جتا هـ = \frac{٦ \times 0.5}{2\sqrt{3}}$

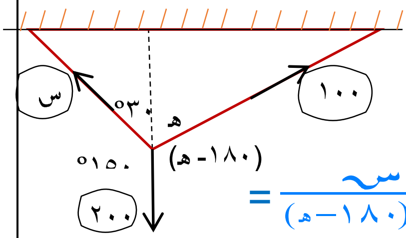
∴ هـ = ٣٠°

∴ $\frac{ق}{جا ١٥٠°} = \frac{2\sqrt{3}}{0.5}$

∴ $ق = \frac{2\sqrt{3}\ جا ١٥٠°}{0.5} = 2\sqrt{3}$ ث.كجم

مثال(١٠) علق جسم وزنه ٢٠٠ث.جم بواسطة خيطين خفيفين يميل أحدهما على الرأس زاوية هـ ويميل الآخر على الرأس بزاوية ٣٠° فإذا كان مقدار الشد في الخيط الأول =١٠٠ث.جم فأوجد هـ ومقدار الشد في الخيط الثاني

الحل



بتطبيق قاعدة لامي

$\frac{١٠٠}{جا ١٥٠°} = \frac{س}{جا(١٨٠-هـ)} = \frac{٢٠٠}{جا(٣٠+هـ)}$

∴ $جا(٣٠+هـ) = \frac{٢٠٠\ جا١٥٠}{١٠٠} = ١$

∴ (٣٠+هـ) = ٩٠° ∴ هـ = ٦٠°

$\frac{س}{جاهـ} = \frac{١٠٠}{جا١٥٠}$

$س = \frac{١٠٠\ جا٦٠°}{جا١٥٠°} = ١٠٠\sqrt{3}$ ث.كجم

اختر مجاب عنه

١ إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية في نقطة فإن مقدار كل قوة يتناسب مع ....الزاوية بين القوتين الآخرتين

(أ)جيب تمام (ب) جيب

(ج)ظل (د)ظل تمام

جيب ← من قاعدة لامي

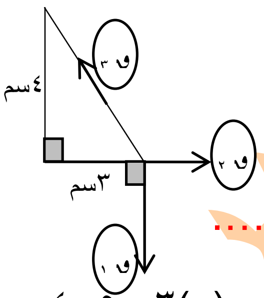
٢ ثلاث قوى متساوية في المقدار ومتلاقية في نقطة ومتزنة فإن قياس الزاوية بين أي قوتين=....

(أ)٦٠° (ب)٩٠°

(ج)١٢٠° (د)١٥٠°

٣٦٠° ÷ ٣ =١٢٠°

٣ من الشكل المقابل



$ق_1 : ق_2 : ق_3 =$ ....

(أ)٣ : ٤ : ٥ (ب)٣ : ٥ : ٤

(ج)٤ : ٥ : ٣ (د)٤ : ٣ : ٥

٤ : ٣ : ٥

٤ ثلاث قوى مستوية ومتلاقية في نقطة متزنة فإذا كان ٧ ، ٣ نيوتن مقداري

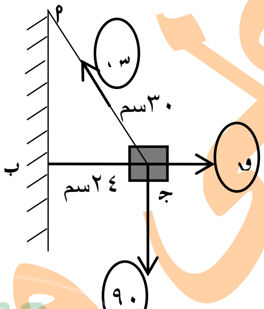
قوتين منهم فإن مقدار القوة الثالثة يمكن أن يساوي ...نيوتن

(أ)١١ (ب)٢

(ج)٥ (د)٣

من متباينة المثلث طول أي ضلع ∋]الفرق، المجموع[∋]٤ ، ١٠[لذلك ٥ يمكن أن تكون إحدى القيم

٥ في الشكل المقابل

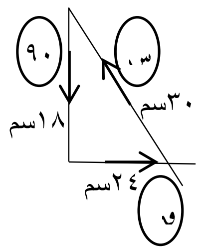


س – و = ...ث.جم

(أ)١٥٠ (ب)١٢٠

(ج)٥٠ (د)٣٠

من مثلث القوى



$$\frac{س}{٣٠} = \frac{و}{٢٤} = \frac{٩٠}{١٨}$$

$$س = \frac{٩٠ \times ٣٠}{١٨} = ١٥٠ \text{ث.جم}$$

$$و = \frac{٩٠ \times ٢٤}{١٨} = ١٢٠ \text{ث.جم}$$

∴ س – و = ١٥٠ - ١٢٠ = ٣٠ث.جم

٦ أقل عدد من القوى المستوية المتساوية في المقدار يمكن أن يتزن هو...

(أ)١ (ب)٢

(ج)٣ (د)٤

قوتان متساويتان في المقدار ومتضادتان في الاتجاه وخطي عمليهما على استقامة واحدة

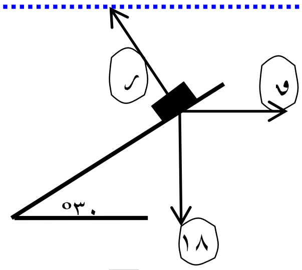
٧ أقل عدد من القوى المستوية غير المتساوية في المقدار يمكن أن يتزن هو...

(أ)١ (ب)٢

(ج)٣ (د)٤

ثلاث قوى

٨ في الشكل المقابل

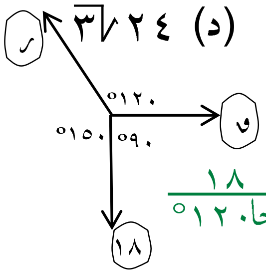


و + ر =...

(أ)$١٢\sqrt{٣}$ (ب)$٦\sqrt{٣}$

(ج)$١٨\sqrt{٣}$ (د)$٢٤\sqrt{٣}$

الحل



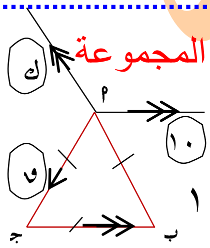
$$\frac{و}{جا١٥٠°} = \frac{ر}{جا٩٠°} = \frac{١٨}{جا١٢٠°}$$

$$و = \frac{١٨ جا١٥٠°}{جا١٢٠°} = ٦\sqrt{٣}$$

$$ر = \frac{١٨ جا٩٠°}{جا١٢٠°} = ١٢\sqrt{٣}$$

∴ ر + و = $١٨\sqrt{٣}$

٩ في الشكل المقابل إذا كانت المجموعة متزنة فإن و = ...نيوتن



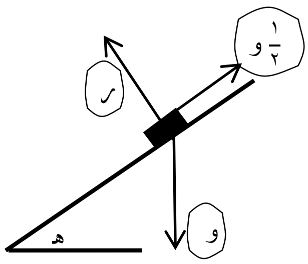
(أ)١٠ (ب)١٢

(ج)٢٠ (د)١٣

المجموعة متزنة وتمثل بأضلاع مثلث متساوي مأخوذ في ترتيب دوري واحد فيكون مقدار كل قوة = ١٠ نيوتن

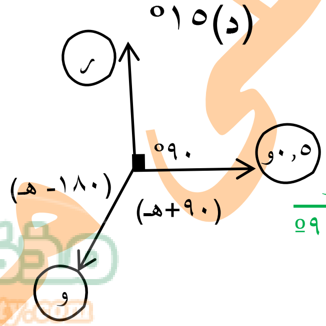
---

١٠ في الشكل المقابل فإن ق (هـ^) = ...°



(أ) ٣٠° (ب) ٦٠°

(ج) ٤٥° (د) ١٥°



$$\frac{٠.٥و}{جا(١٨٠-هـ)} = \frac{و}{جا٩٠°}$$

$$\frac{٠.٥و}{جاهـ} = \frac{و}{جا٩٠°}$$

$$جاهـ = \frac{٠.٥و×جا٩٠}{و} = ٠,٥$$

∴ هـ = ٣٠°

الواجـــــــب

أولاً: اختر الاجابة الصحيحة

١ إذا كانت ق١ ، ق٢ ، ق٣ ثلاث قوى متلاقية في نقطة ومتزنة فإن مقدار محصلة ق١ ، ق٢ يساوي...

(أ) ق١ (ب) ق١ + ق٢

(ج) ق٣ (د) صفر

---

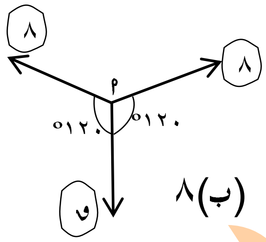
٢ إذا كانت ق تتزن مع قوتين متعامدتين مقدارهما ٨نيوتن ، ١٥نيوتن فإن ق =....نيوتن

(أ) ٧ (ب) ١٧

(ج) ٢٣ (د) ٧√٢

---

٣ في الشكل المقابل ق =....نيوتن

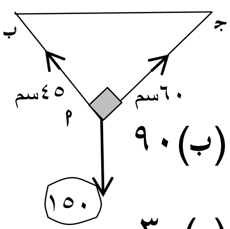


(أ) صفر (ب) ٨

(ج) ١٦ (د) ٨جا١٢٠°

---

٤ سـ٢ – سـ١ =....ث.جم



(أ) ١٢٠ (ب) ٩٠

(ج) ٦٠ (د) ٣٠

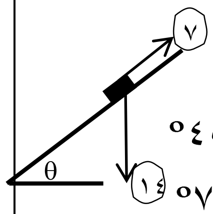
٥ أقل عدد من القوى المستوية غير المتساوية يمكن أن يتزن هو ....

(أ) ١ (ب) ٢

(جـ) ٣ (د) ٤

---

٦ ق $(\hat{\theta})$ =......

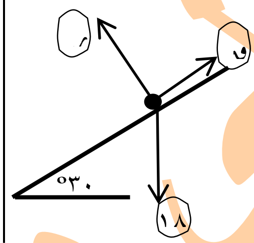


(أ) ٦٠° (ب) ٤٥°

(جـ) ٣٠° (د) ٧٥°

---

٧ ق + ر = ...نيوتن



(أ) ٦ $\sqrt{3}$

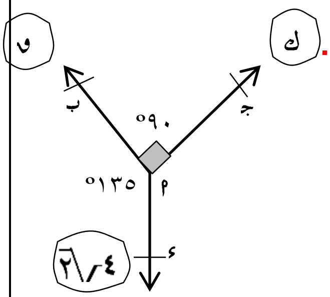
(ب) ٩ $\sqrt{3}$

(جـ) ١٨ $\sqrt{3}$

(د) ٩ + ٩ $\sqrt{3}$

---

٨ في الشكل المقابل ق ، ك تساوي.....



(أ) ٤ ، ٤

(ب) ٤ ، $\sqrt{2}$

(جـ) $\sqrt{2}$ ، ٤

(د) ٢ ، ٢

---

٩ وضع جسم وزنه ٢٠نيوتن على مستوى مائل على الأفقي بزاوية ى حيث جاى= $\frac{3}{5}$ وضع من الاتزان بواسطة قوة أفقية مقدارها ق = ...نيوتن

(أ) ٣٠ (ب) ١٥

(جـ) ١٠ (د) ٥ $\sqrt{3}$

ثانياً الأسئلة المقالية

١ ثلاث قوى ٦٠ ، ق ، ك نيوتن متزنة ومتلاقية في نقطة فإذا كان قياس الزاوية بين الأولى والثانية ١٢٠° وبين الثانية والثالثة ٩٠° فأوجد مقدار ق ، ك

---

٢ وضع جسم وزنه (و) نيوتن على مستوى أملس يميل على الأفقي بزاوية ٣٠° وحفظ في حالة توازن يتأثر قوة مقدارها ٣٦نيوتن تعمل في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى. احسب مقدار موزن الجسم ورد الفعل

---

٣ علق ثقل مقداره ٢٠٠ث.جم بحيطين طولاهما ٦٠سم ، ٨٠سم من نقطتين على خط أفقي واحد البعد بينهما ١٠٠سم أوجد مقدار الشد في كل من الحيطين

---

٤ علق ثقل مقداره ١٦نيوتن في أحد طرفي خيط خفيف مثبت طرفه الآخر في نقطة من حائط رأسي، أزيح بقوة عمودية على الخيط حتى اصبح الخيط في وضع التوازن يميل على لحائط بزاوية ٣٠° احسب مقدار القوة والشد في الخيط

٥ أزيحت كرة بندول وزنها ٦٠٠ث.جم حتى صار الخيط يصنع زاوية ٣٠° مع الرأسي تحت تأثير قوة في اتجاه عمودي على الخيط أوجد مقدار الشد في الخيط

٦ وضع جسم وزنه ٣٠٠ث.جم على مستو مائل أملس يميل على الأفقي بزاوية ظلها $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ومنع من الانزلاق بواسطة قوة تصنع ٣٠° مع المستوى لأعلى أوجد مقدار القوة ورد الفعل

٧ علق جسم وزنه ٢٠٠ث.جم بواسطة خيطين خفيفين يميل أحدهما على الرأسي بزاوية هـ ويميل الآخر على الرأسي بـ ٣٠° فإذا كان مقدار الشد فبي الخيط الأول ١٠٠ث.جم فأوجد هـ ومقدار الشد في الخيط الثاني.

الدرس الخامس:
تلاقي خطوط عمل القوى الثلاث

إذا اتزن جسم جاسيء تحت تأثير ثلاث قوى غير متوازية ومستوية فإن خطوط عمل هذه القوى تتلاقى في نقطة واحدة.

مثال(١) كرة معدنية وزنها ٢ث.كجم وطول نصف قطرها ٣٠سم ربطت من إحدى نقط سطحها ب بخيط طوله ٣٠سم ومربوط طرفه الآخر ٢ من نقطة في حائط رأسي أملس فاتزنت الكرة وهي مستندة على الحائط أوجد مقدار الشد في الخيط ورد فعل الحائط

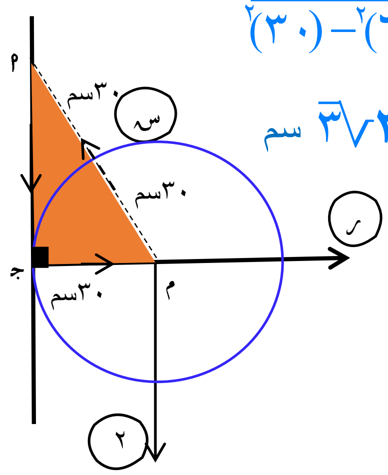
الحـــل

∵ الحائط أملس ∴ رد الفعل عمودي

في Δ م ج م

$م ج = \sqrt{(٦٠)^٢ - (٣٠)^٢}$

$= ٣٠\sqrt{٣}$ سم



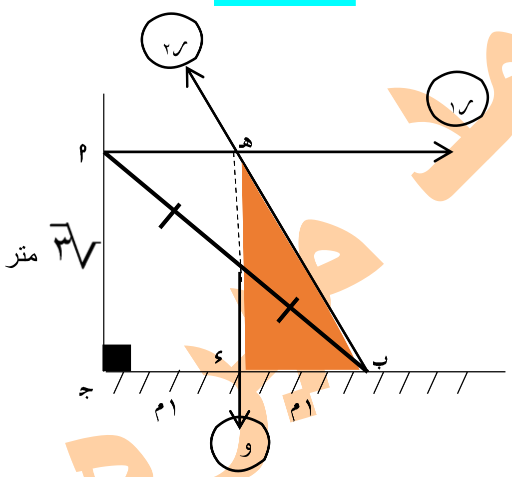
$\frac{ر}{٣٠} = \frac{ش}{٦٠} = \frac{٢}{٣٠\sqrt{٣}}$

$∴ ر = \frac{٢ \times ٣٠}{٣٠\sqrt{٣}} = \frac{٢}{\sqrt{٣}} = \frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$

$ش = \frac{٢ \times ٦٠}{٣٠\sqrt{٣}} = \frac{٤}{\sqrt{٣}} = \frac{٤\sqrt{٣}}{٣}$ ث.كجم

مثال(٢) $\overline{٢ب}$ سلم منتظم وزنه $٨\sqrt{٣}$ ث.كجم ، يرتكز بطرفه العلوي ٢ على حائط رأسي أملس وبطرفه السفلي ب على أرض أفقية خشنة بحيث كان الطرف العلوي يبعد عن الأرض بمقدار $\sqrt{٣}$ متراً والطرف السفلي يبعد عن الحائط مسافة ٢متر أوجد مقدار الضغط على كل من الحائط والأرض

الحـــل



∵ الحائط أملس ∴ ر١ عمودي على الحائط

والوزن يؤثر في المنتصف وبامتداد الوزن و ر١ يلتقوا في نقطة هـ ∴ ر٢ يمر بـ هـ

∴ Δ ء ب هـ مثلث القوى

فيه ء ب = ١م عارف ليه؟

ءهـ = $\sqrt{٣}$ م عرف ليه؟

ب هـ = $\sqrt{(١)^٢ + (\sqrt{٣})^٢}$ = ٢م

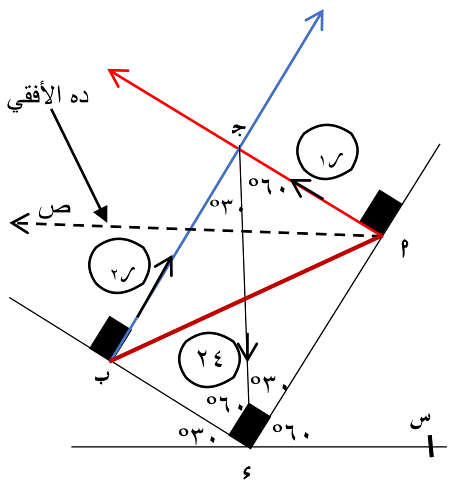
∴ $\frac{ر_١}{١} = \frac{ر_٢}{٢} = \frac{٨\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}}$

∴ $ر_١ = \frac{١ \times ٨\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}}$ = ٨ ث.كجم

∴ $ر_٢ = \frac{٢ \times ٨\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}}$ = ١٦ ث.كجم

مثال(٣) قضيب منتظم يرتكز بطرفيه على مستويين أملسين مائلين يضعان مع الأفقي زاويتين قياسهما ٦٠° ، ٣٠° أوجد قياس الزاوية التي يصنعها القضيب مع الأفقي في وضع التوازن وإذا ان مقدار وزنه ٢٤نيوتن أوجد مقدار رد فعل كل من المستويين

الحـــل



القضيب متزن تحت تأثير ثلاث قوى

(١) ر١ ⊥ المستوى الأول

(٢) ر٢ ⊥ المستوى الثاني

(٣) وزنه يؤثر في منتصفه ويتلاقوا في نقطة جـ

أ ء ب جـ مستطيل ← م هي نقطة تلاقي قطري المستطيل

∴ $\overline{جـ ء}$ قطر المستطيل يمر بالنقطة م ،

∵ $\overline{جـ ء}$ رأسي ∴ ق(جـ ءَ س) = ٩٠°

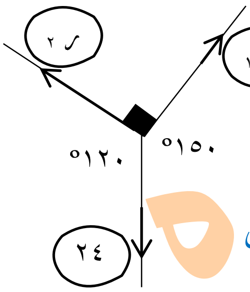
∴ ق(م ءَ أ) = ٣٠°

، ∵ م ء = م أ ∴ ق(ء أَ م) = ٣٠°

، ∵ ق(ص أَ ء) = ٦٠° لأنها متبادلة مع ق(أ ءَ س) من التوازي

∴ ق(ص أَ م) = ٣٠° ← زاوية الميل على الأفقي

∴ القضيب يصنع زاوية ٣٠° مع الأفقي



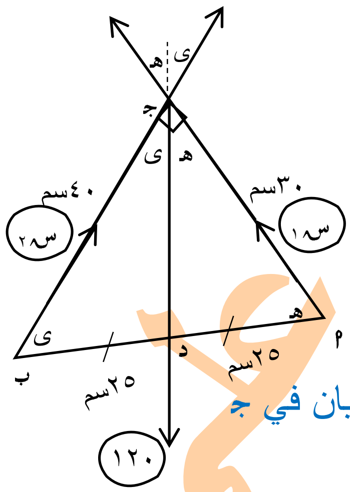
$\frac{ر_١}{جا ١٥٠°} = \frac{ر_٢}{جا ١٢٠°} = \frac{٢٤}{جا ٩٠°}$

$ر_١ = \frac{٢٤ جا ١٥٠°}{جا ٩٠°}$ = ١٢نيوتن

$ر_٢ = \frac{٢٤ جا ١٢٠°}{جا ٩٠°} = ١٢\sqrt{٣}$ نيوتن

مثال(٤) قضيب منتظم طوله ٥٠سم ووزنه ١٢٠ث.جم علق من طرفيه تعليقاً خالصاً بواسطة خيطين ثبت طرفاهما في نقطة واحدة فإذا كان طولا الخيطين ٣٠سم ، ٤٠سم على الترتيب فأوجد مقدار الشد في كل منهما

الحــل



∵ س١ ، س٢ يتلاقيان في ج

∴ الوزن يمر بنقطة ج

∵ $(\text{أ ب})^2 = (٥٠)^2 = ٢٥٠٠$

، ∵ $(\text{أ ج})^2 = (\text{ب ج})^2 = (٣٠)^2 + (٩٠)^2$

$= ٢٥٠٠$

∴ ق(أ $\hat{\text{ج}}$ ب) = ٩٠°

∵ ء منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ [لأن الوزن يؤثر في المنتصف]

∴ ء ج = ء أ = ء ب

∴ ق($\hat{\text{أ}}$) = ق(أ $\hat{\text{ج}}$ ء)

، ق($\hat{\text{ب}}$) = ق(ء $\hat{\text{ج}}$ ب)

$$\frac{\text{س}_1}{\text{جاى}} = \frac{\text{س}_2}{\text{جاهـ}} = \frac{١٢٠}{\text{جا}\ ٩٠^\circ}$$

$$\text{جاهـ} = \frac{٤٠}{٥٠} = \frac{٤}{٥}$$

$$\text{جاى} = \frac{٣٠}{٥٠} = \frac{٣}{٥}$$

$$\text{س}_1 = \frac{١٢٠\ \text{جاى}}{\text{جا}\ ٩٠^\circ} = \frac{١٢٠ \times \frac{٣}{٥}}{\text{جا}\ ٩٠^\circ} =$$

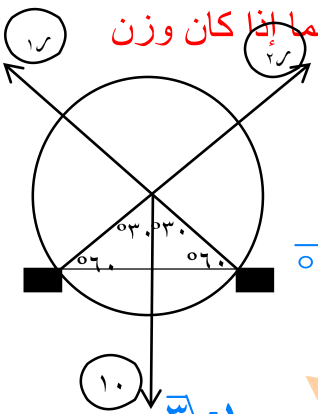
٧٢ث.كجم

$$\text{س}_2 = \frac{١٢٠\ \text{جاهـ}}{\text{جا}\ ٩٠^\circ} = \frac{١٢٠ \times \frac{٤}{٥}}{\text{جا}\ ٩٠^\circ} =$$

٩٦ث.كجم

مثال(٥) كرة معدنية ترتكز على قضيبين متوازيين يقعان في مستوى أفقي واحد والبعد بينهما = طول نصف قطر الكرة

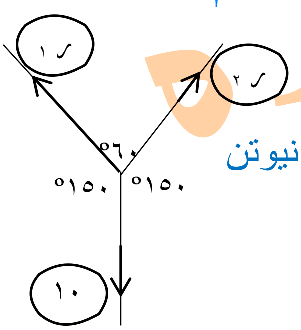
أوجد الضغط على كل منهما إذا كان وزن الكرة = ١٠نيوتن



الحــل

$$\frac{\text{ر}_1}{\text{جا}\ ١٥٠^\circ} = \frac{\text{ر}_2}{\text{جا}\ ١٥٠^\circ} = \frac{١٠}{\text{جا}\ ٦٠^\circ}$$

$$\text{ر}_2 = \text{ر}_1 = \frac{١٠\ \text{جا}\ ١٥٠^\circ}{\text{جا}\ ٦٠^\circ} = \frac{١٠\sqrt{٣}}{٣}\ \text{نيوتن}$$



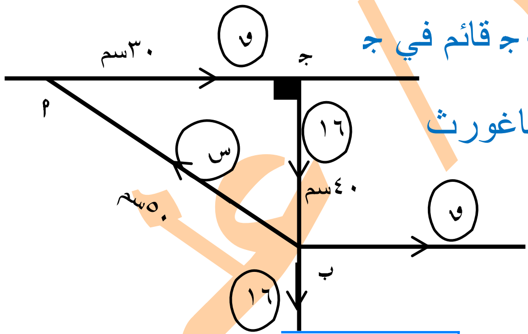
∴ $\text{ص}_1 = \text{ص}_2 = \frac{١٠\sqrt{٣}}{٣}$ نيوتن

مثال(٦) علق ثقل مقداره ١٦نيوتن في أحد طرفي خيط خفيف طوله ٥٠سم مثبت طرفه الآخر في نقطة في سقف حجرة ،أزيح الثقل بقوة أفقية حتى اتزن وهو على بعد ٤٠سم من السقف أوجد مقدار القوة الأفقية والشد في الخيط

الحــــل

∵ ٩ ب جـ قائم في جـ

من فيثاغورث



$$\therefore ٩ جـ = \sqrt{(٥٠)^٢ - (٤٠)^٢}$$

= ٣٠سم

بتطبيق قاعدة مثلث القوى

$$\therefore \frac{١٦}{٤٠} = \frac{ٯ}{٣٠} = \frac{س}{٥٠}$$

$$\therefore ٯ = \frac{١٦ \times ٣٠}{٤٠} = ١٢\text{نيوتن}$$

$$س = \frac{٥٠ \times ١٦}{٤٠} = ٢٠\text{نيوتن}$$

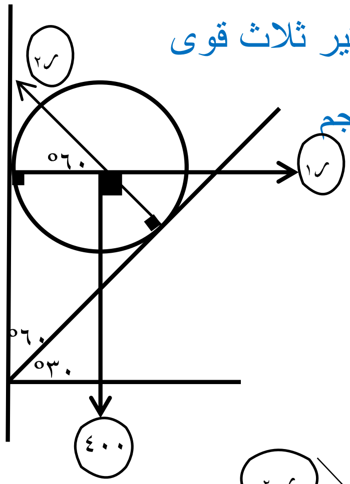
مثال(٧) كرة معدنية وزنها ٤٠٠ث.جم يؤثر في مركزها موضوعة بين مستويين أملسين أحدهما رأسي والآخر يميل على الرأسي بزاوية ٦٠°

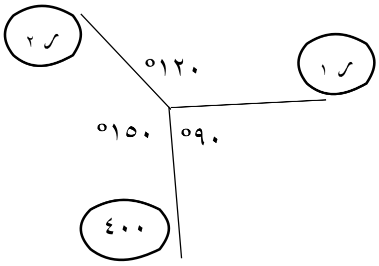
أوجد رد فعل كل من المستويين

الحــــل

الكرة متزنة تحت تأثير ثلاث قوى

ر١ ، ر٢ ، ٤٠٠ ث.جم





$$\frac{ر_١}{جا ١٥٠°} = \frac{ر_٢}{جا ٩٠°} = \frac{٤٠٠}{جا ١٢٠°}$$

$$\therefore ر_١ = \frac{٤٠٠ \text{ جا } ١٥٠°}{\text{جا } ١٢٠°} = ٢٣٠,٩\text{ث.جم}$$

$$ر_٢ = \frac{٤٠٠ \text{ جا } ٩٠°}{\text{جا } ١٢٠°} = ٤٦١,٩\text{ث.جم}$$

مثال(٨) ٩ ب قضيب منتظم طوله ٤٠سم ووزنه ٣٠نيوتن متصل بمفصل في حائط رأسي عند ٩ ، حفظ القضيب في وضع أفقي بواسطة خيط خفيف، يتصل بطرف القضيب عند ب وبنقطة جـ تعلو ٩ رأسياً بمسافة ٤٠سم أوجد الشد في الخيط ورد الفعل عند ٩

الحــــل

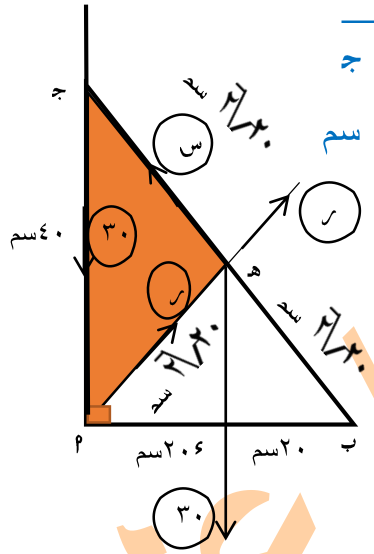
△ ٩ ب جـ قائم الزاوية في ٩

$$\therefore ب جـ = \sqrt{(٤٠)^٢ + (٤٠)^٢} = ٤٠\sqrt{٢}$$

∵ ء منتصف $\overline{\text{ٮ ب}}$

، هـ ء يوازي $\overline{\text{ٮ ج}}$

∴ هـ ج = $٢٠\sqrt{٢}$ سم



، $\overline{\text{ٮ هـ}}$ متوسط خارج من رأس القائمة = نصف طول الوتر

∴ ٮ هـ = $٢٠\sqrt{٢}$ سم

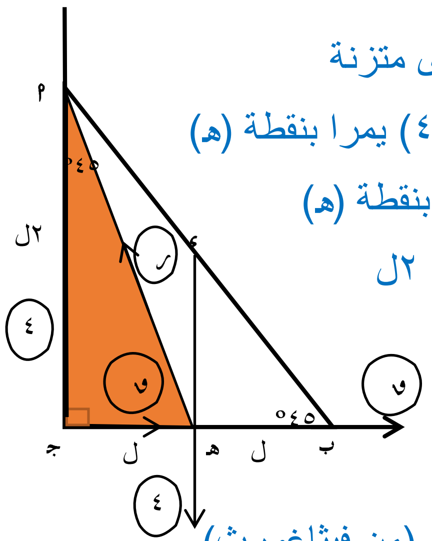
∴ Δ ٮ هـ ج مثلث القوى

$\frac{٣٠}{٤٠} = \frac{ر}{٢٠\sqrt{٢}} = \frac{س}{٢٠\sqrt{٢}}$

ر = س = $\frac{٢٠\sqrt{٢} \times ٣٠}{٤٠} = ١٥\sqrt{٢}$ نيوتن

مثال(٩) $\overline{\text{ٮ ب}}$ قضيب منتظم يتصل طرفه ٮ بمفصل مثبت في حائط رأسي ، أثرت في الطرف ب قوة أفقية ما تزن القضيب عندما كان يميل على الحائط بزاوية قياسها ٤٥° فإذا كان وزن القضيب ٤ث.كجم ويؤثر في منتصفه أوجد مقدار القوة ورد فعل المفصل على القضيب

الحـــل



∵ مجموعة القوى متزنة

و (ٯ) والوزن (٤) يمرا بنقطة (هـ)

∴ رد الفعل يمر بنقطة (هـ)

بفرض أن ٮ ج = ٢ل

∴ ب ج =٢ل

∴ هـ ج = ل

، ٮ هـ = $\sqrt{٥}$ل (من فيثاغورث)

، ∵ Δ ٮ هـ ج مثلث القوى

∴ $\frac{٤}{٢ل} = \frac{ر}{\sqrt{٥}ل} = \frac{ٯ}{ل}$

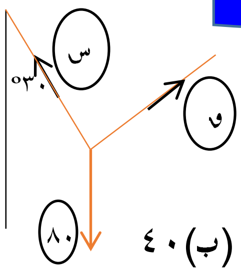
∴ ر = $\frac{٤ \times \sqrt{٥}ل}{٢ل} = ٢\sqrt{٥}$ ث.كجم

ٯ = $\frac{٤ \times ل}{٢ ل}$ = ٢ث.كجم

الواجـــــب

أولاً: اختر الاجابة الصحيحة

١ في الشكل المقابل



أولاً: ى =....نيوتن

(أ) ٨٠ (ب) ٤٠

(ج) ٥٠ (د) $٤٠\sqrt{٣}$

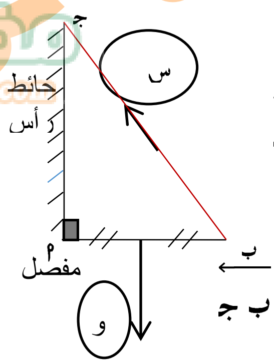
ثانياً: س =....نيوتن

(أ) ٨٠ (ب) ٤٠

(ج) $٤٠\sqrt{٣}$ (د) ٥٠

---

٢ في الشكل المقابل اتجاه رد فعل المفصل على القضيب عند أ ....



(أ) في اتجاه $\overleftarrow{\text{أ ب}}$

(ب) في اتجاه $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$

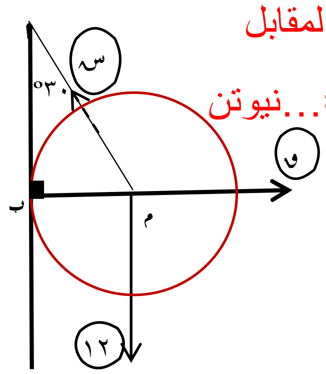
(ج) ينصف $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$

(د) عمودي على $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$

---

٣ في الشكل المقابل

(س ، ر)=...نيوتن

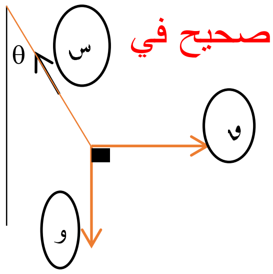


(أ) $(٤\sqrt{٣} ، ٨\sqrt{٣})$ (ب) $(٨\sqrt{٣}،٤\sqrt{٣})$

(ج) (١٢ ، ٨) (د) (٤ ، ٨)

---

٤ أي الجمل الآتية غير صحيح في وضع الاتزان



(أ) ى = وظاθ

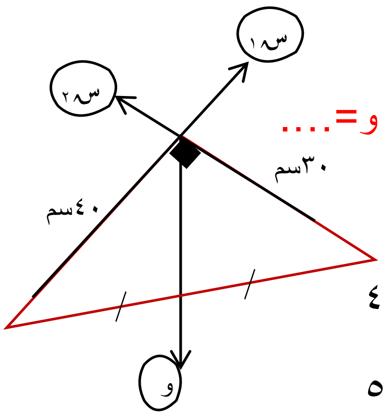
(ب) س = ى + و

(ج) $\vec{و} + \vec{ى} + \vec{س} = \vec{صفر}$

(د) $س^٢ = ى^٢ + و^٢$

---

٥ س١ ، س٢ : و=....



(أ) ٥ : ٣ :٤

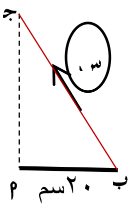
(ب) ٣ : ٥ : ٤

(ج) ٤ : ٣ : ٥

(د) ٥ : ٤: ٣

---

٦ $\overline{\text{أ ب}}$ قضيب طوله ٢٠سم ووزنه ٣٠ نيوتن متصل بمفصل مثبت عند أ والطرف ب مربوط بخيط خفيف طوله $٢٠\sqrt{٢}$ سم ومثبت طرفه الآخر عند جـ أعلى أ فإن قيمة رد فعل المفصل=...نيوتن



(أ) $١٠\sqrt{٢}$ (ب) ١٠

(ج) ١٥ (د) $١٥\sqrt{٢}$

ثانياً الأسئلة المقالية

١ كرة منتظمة ملساء وزنها ١٠ث.جم وطول نصف قطرها ٣٠سم علقت من نقطة على سطحها لاحد طرفي خيط خفيف طوله ٣٠سم ومثبت طرفه الآخر في نقطة من حائط رأسي أملس أوجد في وضع التوازن مقدار الشد في الخيط ورد فعل الحائط على الكرة

---

٢ كرة معدنية ترتكز على قضيبين متوازيين يقعان في مستوى أفقي واحد والبعد بينهما يساوي طول نصف قطر الكرة

أوجد الضغط على كلا القضيبين إذا كان وزن الكرة يساوي ٢٠نيوتن

---

٣ قضيب منتظم طوله ١٠٠سم ووزنه ١٢٠ث.جم علق من طرفيه تعليقاً خالصاً بواسطة خيطين ثبت طرفاهما في نقطة واحدة فإذا كان طولا الخيطين ٦٠سم ، ٨٠يم على الترتيب فأوجد مقدار الشد في كل منهما

---

٤ كرة معدنية وزنها ٢٠٠ث.جم يؤثر في مركزها موضوعة بين مستويين أملسين أحدهما رأسي والآخر يميل على الرأسي بزاوية ٣٠°

أوجد رد فعل كل من المستويين

٥ $\overline{ﻩ ب}$ قضيب منتظم وزنه ٢٠ث.كجم يتصل طرفه ﻩ بمفصل مثبت في حائط رأسي ، أثرت قوة أفقية $\overleftarrow{ق}$ على القضيب عند ب ، فاتزن وهو يميل على الرأسي بزاوية قياسها ٣٠°

أوجد مقدار $\overleftarrow{ق}$ ورد فعل المفصل

الهندسة الفراغية

الوحدة الثانية
الهندسة الفراغية

الدرس الأول:
المستقيمات والمستويات في الفراغ

كيفية تعيين المستوي

1. ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة
2. مستقيم ونقطة لا تنتمي إليه
3. مستقيمان متعامدان
4. مستقيمان متوازيان غير منطبقين

ملاحظات

1. **أي نقطة في الفراغ**
يمر بها عدد لانهائي من المستقيمات
وعدد لانهائي من المستويات

2. **أي نقطتين في الفراغ**
يمر بها مستقيم ولحد
عدد لانهائي من المستويات

3. **أي ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة**
يمر بها مستوى واحد فقط

4. **المستقيمان المتخالفان:**
هما مستقيمان غير متوازيين وغير متقاطعين ولا يجمعهما مستوى واحد.

5. **إذا اشترك مستقيم ومستوى في أكثر من نقطة فإن....**
المستقيم يقع بتمامه داخل المستوى

---

6. إذا اشترك مستويان مختلفان في نقطة فإنهما يشتركان في مستقيم يمر بهذه النقطة

---

7. إذا تقاطعت ثلاث مستويات فإن مستقيمات تقاطعهما إما أن تكون
متوازية
متقاطعة جميعا في نقطة واحدة
← وتكون متقاطعة على التعامد

---

8. المستويان الموازيان لثالث في الفراغ يكونان متوازيان

---

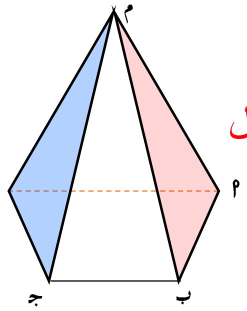
9. في الفراغ
المستقيمات الرأسية كلها متوازية
ولكن
المستقيمات الأفقية ليست دائماً متوازية

---

10. أقل عدد من المستويات تحدد سطح مجسم هو ٤ (الهرم الثلاثي)

مثال(١)

تأمل الشكل ده وبعدين حل



١ كم عدد المستقيمات التي تحمل أحرف الشكل؟

الإجابة ← ٨ مستقيمات

٢ اذكر المستقيمات التي حمل الاحرف وتمر بنقطة أ ؟

الإجابة ← $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ م}}$

٣ كم عدد المستويات التي تحمل أوجه الشكل؟

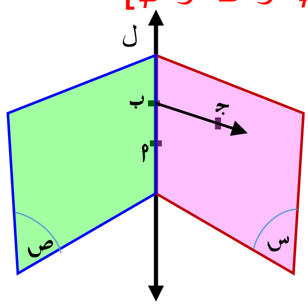
٥ مستويات منهم ٤جوانب+ واحد قاعدة

٤ اذكر ثلاثة مستويات تمر بالنقطة أ

أ ب جـ ء ، أ ب م ، أ ء م

مثال(٢)

أكمل بوضع [∈ أو ∉ أو ⊂ أو ⊄]



١ ل ⊂ س

٢ ل ⊂ ص

٣ أ ∈ س

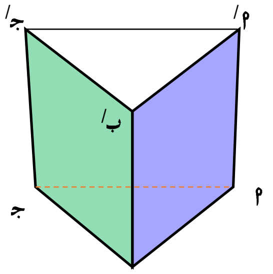
٤ جـ ∉ ص

٥ $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ⊂ س

٦ $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ⊄ ص

مثال(٣)

أكمل



١ المستوى أ ب ب' أ' ∩ ب جـ جـ' ب'

= ...... $\overleftrightarrow{\text{ب ب'}}$

٢ المستوى أ ب جـ ∩ المستوى أ' ب' جـ'

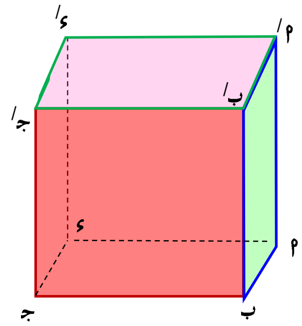
= ∅

٣ $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{أ' جـ'}}$ = ∅

٤ $\overleftrightarrow{\text{ب ب'}}$ ∩ المستوى أ ب جـ = {ب}

مثال(٤)

أكمل



١ المستوى ب جـ ء // المستوى أ' ب' جـ'

ء'

٢ المستوى ب جـ جـ' ب' // المستوى أ ء ء'

أ'

٣ المستوى أ ب ب' أ' ∩ المستوى أ ب جـ

ء = $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

٤ المستوى ء جـ جـ' ء' ∩ المستوى أ ب جـ

ء ∩ أ ء ء' أ' = ...{ء}

اختر الاجابة الصحيحة

١ جميع الحلات الآتية تعين مستوى ما عدا...

(أ) مستقيم ونقطة ∉ إليه

(ب) مستقيمين متوازيين

(ج) مستقيمين متقاطعين

(د) مستقيمين متخالفين

٢ عدد المستويات التي تمر بنقطة معلومة..

(أ) ١ (ب) ٢

(ج) ٣ (د) عدد لا نهائي

٣ عدد المستقيمات التي تمر بنقطتين معلومتين....

(أ) صفر (ب) ١

(ج) ٢ (د) عدد لا نهائي

٤ إذا كان المستقيم ل // المستوى س ، أ ∈ س فإن ل ∩ س =...

(أ) ∅ (ب) ل

(ج) س (د) {أ}

٥ إذا كان المستقيم ل ⊂ المستوى س ، أ ∈ س فإن ل ∩ س =...

(أ) ∅ (ب) ل

(ج) س (د) {أ}

٦ المستقيمات الرأسية في الفراغ تكون.....

(أ) متوازية (ب) متخالفة

(ج) يجمعها مستو واحد (د) متقاطعة

٧ أقل عدد من المستويات التي يمكن أن تحدد سطح مجسم هو....

(أ) ١ (ب) ٢

(ج) ٣ (د) ٤

٨ إذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاث نقط تعين مستوى فإن

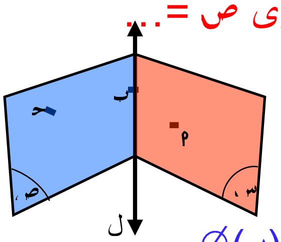
(أ) أ ب = ب جـ = أ جـ

(ب) أ ب + ب جـ = أ جـ

(ج) أ ب + ب جـ > أ جـ

(د) أ ب + ب جـ < أ جـ

٩ المستوى س ∩ المستوى ص =...



(أ) {ب} (ب) ∅

(ج) المستقيم ل (د) {أ ، ب ، جـ}

١٠ المستقيمان المتخالفان=....

(أ) يقعان في نفس المستوى

(ب) يتقاطعان

(ج) يقعان في مستويين مختلفين

(د) يتوازيان

الدرس الثاني:
الهـــــــرم

ملاحظات هامة

١ الهرم هو مجسم له قاعدة واحدة على شكل مضلع وجميع أوجهه الأخرى مثلثات ويسمى بحسب أضلاع قاعدته

٢ المستقيم العمودي على مستوى يكون عمودياً أي مستقيم في المستوى

٣ المضلع المنتظم تكون أضلاعه متساوية في الطول وزواياه متساوية في القياس مثل المثلث المتساوي الأضلاع المربع الخماسي المنتظم،.....

٤ المركز الهندسي لمتوازي الاضلاع وأولاده هي نقطة تقاطع قطريه

٥ المركز الهندسي للمثلث نقطة تلاقي متوسطاته اللي هي بتقسم كل منها بنسبة ١ : ٢ من جهة القاعدة

٦ الهرم القائم إذا كان موضع العمودي المرسوم رأس الهرم على قاعدته (ارتفاعه) يمر بالمركز الهندسي.

الهرم المنتظم

هو هرم قائم قاعدته مضلع منتظم

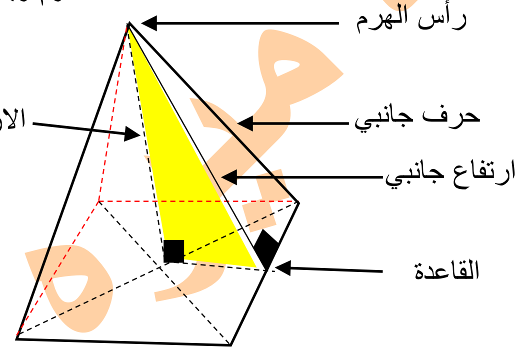
خواصه

١ أحرفه الجانبية متساوية في الطول.
٢ ارتفاعاته الجانبية متساوية في الطول.
٣ أوجهه الجانبية مثلثات متساوية الساقين.

لاحظ أن

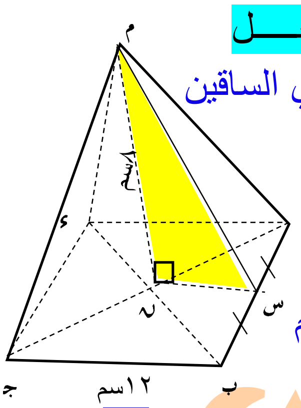
١ كل هرم منتظم فهو هرم قائم وليس العكس.
٢ يسمى الهرم الثلاثي منتظم الوجوه إذا كان جميع أوجهه ومنهم القاعدة مثلثات متساوية الأضلاع ومتطابقة .

هرم رباعي منتظم



مثال(١) م ٩ ب جـ ء هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ١٢سم وارتفاعه ٨سم أوجد ارتفاعه الجانبي

الحـــل



∵ ٩ م ب مثلث متساوي الساقين

، س منتصف $\overline{٩ ب}$

∴ $\overline{م س}$ هو الارتفاع الجانبي للهرم

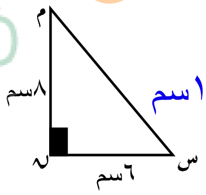
∵ س منتصف $\overline{٩ ب}$ ، ν منتصف $\overline{٩ جـ}$

∴ $\overline{س ν}$ قطعة مستقيمة مرسومة بين منتصفي ضلعين في مثلث = $\frac{1}{2}$ طول الضلع الثالث

∴ س ν = ٦سم

∴ م س = $\sqrt{٦^2 + ٨^2}$ = ١٠سم

الارتفاع الجانبي



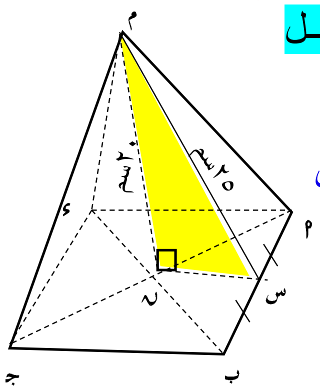
تدريب(١)

م ٩ ب جـ ء هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ١٠سم وارتفاعه ١٢سم ،أوجد ارتفاعه الجانبي

الحـــل

مثال(٢) م ٩ ب جـ ء هرم رباعي منتظم ارتفاعه ٢٠سم وارتفاعه الجانبي ٢٥سم أوجد طول ضلع قاعدة الهرم

الحـــل



∵ س منتصف $\overline{٩ ب}$

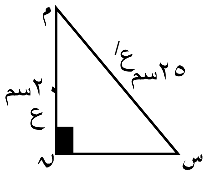
△ م ٩ ب متساوي الساقين

∴ $\overline{م س}$ هو الارتفاع الجانبي

∵ $\overline{م ν}$ ⊥ $\overline{س ν}$

∴ س ν = $\sqrt{(٢٥)^2 - (٢٠)^2}$

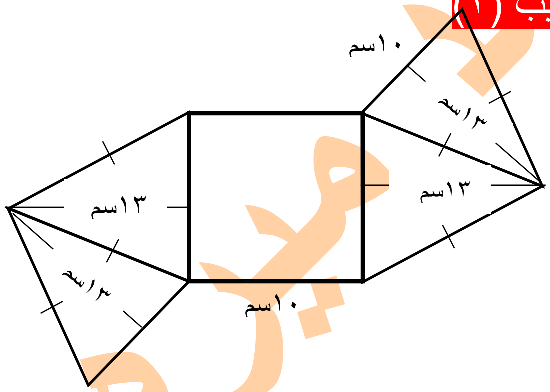
= ١٥سم



، ∵ س منتصف $\overline{٩ ب}$ ، ν منتصف $\overline{٩ جـ}$

∴ ب جـ = ٢ × ١٥ = ٣٠سم

تدريب (٢)



ده هرم رباعي منتظم الوجوه ولو مش مصدقني أسأله

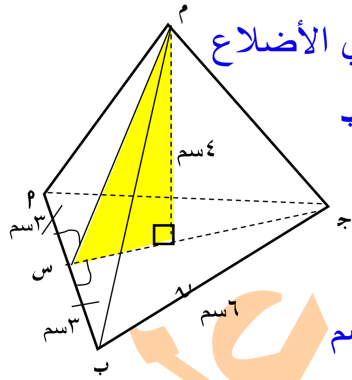
طول ضلع قاعدته = ١٠سم وارتفاعه الجانبي=١٣سم

احسب ارتفاعه

مثال(٣)

م ا ب جـ هرم ثلاثي منتظم قاعدته Δ ا ب جـ طول ضلع قاعدته ٦سم وارتفاعه ٤سم أوجد طول حرفه وارتفاعه الجانبي

الحــــل



∵ Δ ا ب جـ متساوي الأضلاع

، ∴ س منتصف ا ب

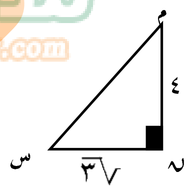
ب س = ٣سم

∴ جـ ب = $\sqrt{٦^٢ - ٣^٢}$

= $٣\sqrt{٣}$ سم

∵ نقطة تلاقي متوسطات المثلث تقسم كلاً منها بنسبة ١ : ٢ من ناحية القاعدة

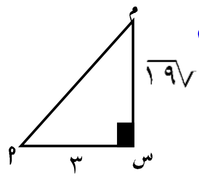
∴ $\frac{٣\sqrt{٣}}{٣} = \sqrt{٣}$



∴ س ن = $\sqrt{٣}$سم

∴ م س = $\sqrt{(٤)^٢ + (\sqrt{٣})^٢}$

الارتفاع الجانبي = $\sqrt{١٩}$ سم



∵ $\overline{م س}$ ⊥ $\overline{ا ب}$

∴ م ا = $\sqrt{(\sqrt{١٩})^٢ + (٣)^٢}$ = $٢\sqrt{٧}$ سم

و هو طول حرف الهرم

ملاحظات

لأي مجسم قاعدته منطقة مضلعة يكون [عدد الأوجه +عدد الرؤوس=عدد الأحرف+٢]

١ في الهرم الخماسي

عدد الأوجه=٦

عدد الرؤوس=٦

عدد الاحرف=١٢-٢=١٠

٢ في الهرم السداسي

عدد الأوجه=٧

عدد الرؤوس=٧

عدد الاحرف=١٤-٢=١٢

٣ في الهرم الثلاثي

عدد الأوجه=٤

عدد الرؤوس=٤

عدد الاحرف=٨-٢=٦

المساحة الجانبية-الكلية والحجم للهرم المنتظم

١ المساحة الجانبية للهرم المنتظم

= $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي

٢ المساحة الكلية

= المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

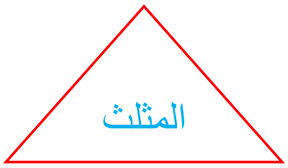
٣ حجم الهرم

= $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

محيط ومساحة بعض الأشكال

المحيط ٤س   المساحة س^{٢}

المحيط ٥س   المساحة $\frac{١}{٤}$ ن س^{٢}ظتا $\frac{\pi}{ن}$



المحيط ٣س   المساحة $\frac{١}{٢}$ أ ب جا ج

$\sqrt{ع(ع-أ)(ع-ب)(ع-ج)}$

حيث ع = نصف المحيط

مساحة أي مضلع منتظم

المساحة $\frac{١}{٤}$ ن س^{٢} ظتا $\frac{\pi}{ن}$

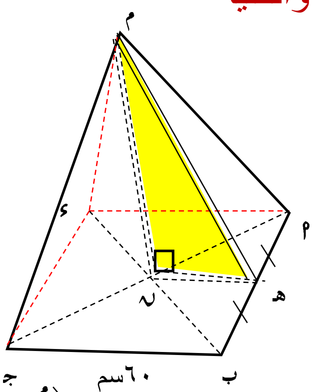
عدد الأضلاع   طول الضلع $\frac{١}{ظا(\frac{\pi}{ن})}$

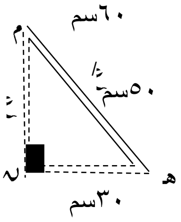
تذكر مساحة المعين = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب القطرين

مثال(١)

هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ٦٠سم واتفاعه الجانبي ٥٠سم أوجد

① ارتفاع الهرم
② المساحة الجانبية والكلية
③ حجم الهرم





الحــل

∵ هـ منتصف $\overline{أ ب}$ ،

ن منتصف $\overline{أ ج}$

∴ ن هـ = ٣٠سم

∵ $\overline{م ن}$ ⊥ $\overline{ن هـ}$

لأنه عمودي على قاعد الهرم

∴ من فيثاغورث

ع = $\sqrt{(٥٠)^{٢}-(٣٠)^{٢}}$

= ٤٠سم

∴ ع = ٤٠سم   ع/ = ٥٠سم

محيط القاعدة= ٤× طول الضلع=

٤×٦٠=٢٤٠سم

مساحة القاعدة = طول الضلع × نفسه=(٦٠)^{٢}=٣٦٠٠سم^{٢}

المساحة الجانبية للهرم

= $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي

= $\frac{١}{٢}$ × ٢٤٠ ×٥٠ =٦٠٠٠سم^{٢}

المساحة الكلية للهرم

= المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

= ٦٠٠٠ + ٣٦٠٠ =٩٦٠٠سم^{٢}

حجم الهرم

$= \frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

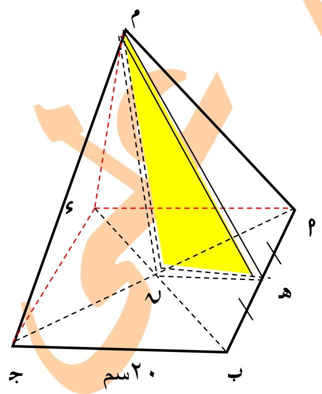
$= \frac{١}{٣} \times ٣٦٠٠ \times ٤٠ = ٤٨٠٠٠$ سم^{٣}

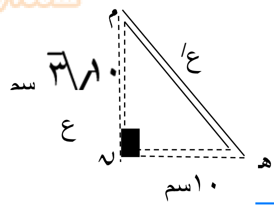
مثال(٢) هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ٢٠ سم وارتفاعه $١٠\sqrt{٣}$ سم أوجد

① المساحة الجانبية

② حجم الهرم

الحـــل





ع/ $= \sqrt{(١٠\sqrt{٣})^{٢} + (١٠)^{٢}} = ٢٠$ سم

$\therefore$ ع $= ١٠\sqrt{٣}$ سم   ع/ $= ٢٠$سم

محيط القاعدة= ٤× طول الضلع=
٤×٢٠=٨٠سم

مساحة القاعدة = طول الضلع × نفسه=
$(٢٠)^{٢} = ٤٠٠$سم^{٢}

المساحة الجانبية

$= \frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي

$= \frac{١}{٢} \times ٨٠ \times ٢٠ = ٨٠٠$سم^{٢}

حجم الهرم $= \frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

$= \frac{١}{٣} \times ٤٠٠ \times ١٠\sqrt{٣} = \frac{٤٠٠٠\sqrt{٣}}{٣}$ سم^{٣}

ملحوظة هامة

طول قطر المربع = طول الضلع × $\sqrt{٢}$

طول ضلع = $\frac{\text{طول قطره}}{\sqrt{٢}}$

تدريب

هرم رباعي منتظم طول قطر قاعدته $٢٤\sqrt{٢}$ سم وارتفاعه الجانبي=٢٠سم أوجد مساحته الكلية وحجمه.

قوانين الهرم الثلاثي منتظم الوجوه

طول الحرف =ل   الارتفاع= ع

١ $ل^{٢} = ٣ع^{٢}$

٢ المساحة الكلية للهرم الثلاثي منتظم الوجوه = $ل^{٢}\sqrt{٣}$

٣ حجم الهرم الثلاثي منتظم الوجوه = $\frac{\sqrt{٢}}{١٢} ل^{٣}$

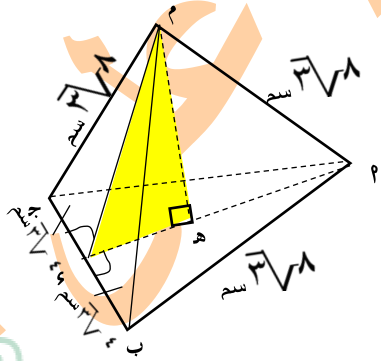
مثال(٣) م أ ب جـ ء هرم ثلاثي منتظم الوجوه طول أي حرفه من أحرفه $٨\sqrt{٣}$

أوجد

① الارتفاع الجانبي
② ارتفاع الهرم
③ المساحة الكلية للهرم
④ حجم الهرم

الحل

م ء = $\sqrt{(٨\sqrt{٣})^{٢}-(٤\sqrt{٣})^{٢}}$ =١٢سم



①

* ∴ الارتفاع الجانبي =١٢سم

طول الحرف ل = $٨\sqrt{٣}$ سم

∵ الهرم منتظم الوجوه

∴ $٢ل^{٢}=٣ع^{٢}$

$٢\times(٨\sqrt{٣})^{٢} = ٣ع^{٢}$

②

* ∴ $ع^{٢}=\frac{٣٨٤}{٣}=١٢٨$ ∴ ع = $٨\sqrt{٢}$ سم

③

* المساحة الكلية = $ل^{٢} \times \sqrt{٣}$

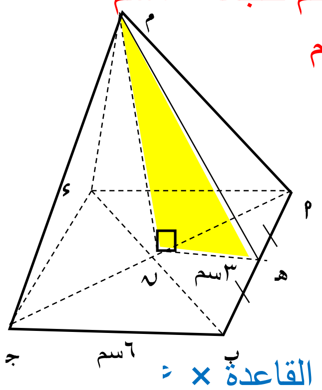
= $(٨\sqrt{٣})^{٢} \times \sqrt{٣} = ١٩٢\sqrt{٣}$ سم^{٢}

④

* حجم الهرم = $\frac{\sqrt{٢}}{١٢} \times ل^{٣}$

= $\frac{\sqrt{٢}}{١٢} \times (٨\sqrt{٣})^{٣} = ١٢٨\sqrt{٦}$ سم^{٣}

مثال(٤) هرم رباعي منتظم حجمه ٤٨سم^{٢} وطول ضلع قاعدته =٦سم أوجد مساحته الكلية



الحل

مساحة القاعدة

= ٦×٦= ٣٦سم^{٢}

∵ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × ع

∴ $\frac{١}{٣}$ × ٣٦ × ع =٤٨

١٢ع =٤٨ ∴ ع = $\frac{٤٨}{١٢}$ =٤سم

∴ الارتفاع =٤سم أكمل أنت....

مثال(٥) م أ ب جـ ء هرم ثلاثي رأسه م على بعد $٤\sqrt{٥}$سم من قاعدته أ ب جـ وفيه أ ب =٧سم ، ب جـ =٨سم ، أ جـ =٩سم أوجد حجم الهرم

الحل

محيط المثلث = ٧+٨+٩=٢٤

نصف المحيط ع = $\frac{٢٤}{٢}$ =١٢سم

∴ مساحة المثلث أ ب جـ =

$\sqrt{ع(ع-أب)(ع-ب جـ)(ع-أجـ)}$

= $\sqrt{١٢\times٥\times٤\times٣}$ = $١٢\sqrt{٥}$ سم^{٢}

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣} \times ١٢\sqrt{٥} \times ٤\sqrt{٥}$

= ٨٠سم^{٣}

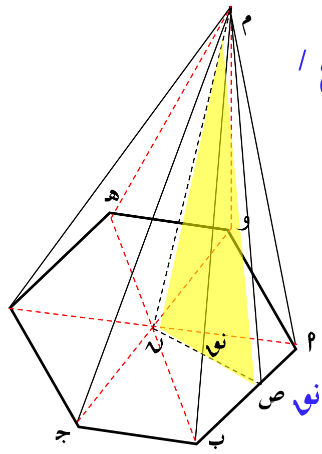
مثال(٦) هرم سداسي منتظم فيه مجموع مساحات الأوجه الجانبية سبعة أمثال مساحة القاعدة أثبت أن حجم الهرم = ٨ نو^{٣} حيث نو طول نصف قطر الدائرة المرسومة داخل القاعدة

الحـــل

نفرض أن طول ضلع السداسي = ل

وارتفاع الهرم = ع

والارتفاع الجانبي = ع$'$



ن ص = نو

مـ Δ أ ب ن = $\frac{١}{٢}$ ×ل×نو

∴ مجموع مساحات

الأوجه الجانبية = ٧×مساحة القاعدة

∴ $\frac{١}{٢}$ × محيط القاعدة ×ع$'$ =٧×مساحة القاعدة

$\frac{١}{٢}$ ×٦ل×ع$'$ = ٧×مساحة ٦مثلثات

$\frac{١}{٢}$ ×٦ل×ع$'$ = ٧× $\frac{١}{٢}$ل نو ×٦

∴ ع$'$ = ٧نو

، ∵ $\overline{مَن}$ ⊥ المستوى أ ب جـ ء هـ و

∴ $\overline{مَن}$ ⊥ $\overline{ن ص}$

∴ Δ م ن ص قائم الزاوية في ن

∴ ع = $\sqrt{(ع')^{٢} - نو^{٢}}$ =

$\sqrt{(٧نو)^{٢} - نو^{٢}}$ ∴ ع = $٤\sqrt{٣}$ نو

∴ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة× الارتفاع

= $\frac{١}{٣} \times \frac{١}{٢}$ × ل × نو ×٦× $٤\sqrt{٣}$نو

= $٤\sqrt{٣}$ل نو^{٢}

، ∵ $\frac{نو}{جا٦٠°} = \frac{ل}{جا٩٠°}$ ∴ نو = ل جا٦٠°

∴ ل = $\frac{نو}{جا٦٠°} = \frac{٢}{\sqrt{٣}}$ نو

∴ حجم الهرم = $٤\sqrt{٣} \times \frac{٢}{\sqrt{٣}}$ نو^{٣} = ٨نو

اختر مجاب عنه

١ هرم رباعي منتظم مساحته الجانبية =٣٠سم^{٢} وارتفاعه الجانبي =٥سم فإن محيط قاعدته=...سم

(أ)٦ (ب)١٢

(جـ)٢٤ (د)٣٦

$\frac{1}{2}$ × محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي=٣٠

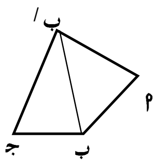
$\frac{1}{2}$ × محيط القاعدة × ٥ =٣٠

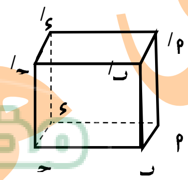
محيط القاعدة = $\frac{٦٠}{٥}$ =١٢

٢ ا ب جـ ء ا/ ب/ جـ/ ء/ مكعب طول حرفه =٦سم فإن حجم الهرم ب/ ا ب جـ =...سم³

(ا) ٣٦ (ب) ٧٢

(جـ) ٣٦√٣ (د) ١٨√٣





هرم ثلاثي طول ضلع قاعدته ٦سم وقائم الزاوية وارتفاعه ٦سم

الحجم = $\frac{1}{3}$ × $\frac{1}{2}$ ×٦×٦×٦=٣٦سم³

٣ النسبة بين المساحة الجانبية للهرم الثلاثي المنتظم الوجوه إلى مساحته الكلية =..

(ا) ١ : ٣ (ب) ١ : ٤

(جـ) ٣ : ٤ (د) ١ : ٢

٣ : ٤

٤ إذا تضاعف طول ضلع قاعدة هرم رباعي منتظم مع ثبوت ارتفاعه فإن حجمه=...

(ا)يتضاعف (ب)لا يتغير

(جـ)يتضاعف ستة مرات (د)يتضاعف أربع مرات

عند زيادة طول ضلع القاعدة للضعف تزداد المساحة ٤ أمثالها وكذلك الحجم

٥ هرم سداسي منتظم طول ضلع قاعدته ٨سم ارتفاعه ١٠سم فإن حجمه =...سم³

(ا) ٣٢٠√٣ (ب) ٩٦٠√٣

(جـ) $\frac{٣٢٠\sqrt{٣}}{٣}$ (د) ٥٥٤,٢٥

الحل

$\frac{1}{3}$ ×مساحة القاعدة × الارتفاع

$\frac{1}{3}$ × $\frac{1}{4}$ ×٦×٦٤× $\frac{1}{ظا ٣٠}$ ×١٠

≃ ٥٥٤,٢٥

تذكر قانون مساحة المضلع المنتظم

$\frac{1}{4}$ ن س² ظتا $\frac{\pi}{ن}$

٦ النسبة بين طول حرف الهرم الثلاثي منتظم الوجوه : ارتفاعه = ... : .....

الحل

∵ ٢ل² = ٣ع² بأخذ √

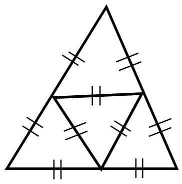
ل√٢ = ع√٣ ∴ $\frac{ل}{ع} = \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٦}}{٢}$

= √٦ : ٢

الواجـــــب

أولاً: اختر الاجابة الصحيحة

١ أي المجسمات يعبر عن الشبكة المقابلة



(أ)هرم رباعي

(ب)هرم رباعي منتظم

(ج)هرم ثلاثي منتظم الوجوه

(د) غير ذلك

---

٢ النسب بين طول حرف الهرم الثلاثي المنتظم الوجوه : ارتفاعه= ....

(أ) $\sqrt{2} : \sqrt{3}$ (ب) $\sqrt{6} : 2$

(ج) $\sqrt{3} : 2$ (د) $\sqrt{3} : 3$

---

٣ إذا قطعنا هرماً رباعياً منتظماً بمستوى يوازي قاعدته فإن المقطع الحادث يكون...

(أ)مربعاً (ب)مثلثاً

(ج)مستطيلاً (د)دائرة

---

٤ هرم رباعي قائم قاعدته معين طولا قطريه ١٢سم ، ٨سم وارتفاعه ١٠يسم فإن حجمه =...سم^3

(أ)٤٠ (ب)٨٠

(ج)١٦٠ (د)٢٠٠

٥ هرم منتظم حجمه ١٢سم^3 ومساحة قاعدته ٤سم^2 فإن ارتفاعه=...سم

(أ)٣ (ب)٦

(ج)٩ (د)٢

---

٦ هرم رباعي منتظم مساحته الجانبية =٣٠سم^2 ، وارتفاعه الجانبي ٥سم فإن محيط قاعدته=...سم

(أ)٦ (ب)١٢

(ج)٢٤ (د)٣٦

---

٧ هرم رباعي منتظم محيط قاعدته ٣٦سم وارتفاعه ١٠سم فإم حجمه=...سم^3

(أ)٨١٠ (ب)١٨٠

(ج)٣٦٠ (د)٢٧٠

---

٨ إذا كان مجموع أحرف هرم ثلاثي منتظم الوجوه يساوي ١٨سم فإن مساحته الكلية=...سم^2

(أ) $\frac{27\sqrt{2}}{4}$ (ب) $\frac{27\sqrt{3}}{4}$

(ج) $9\sqrt{3}$ (د) $\frac{27\sqrt{3}}{2}$

٩ هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ١٠سم ، ومساحة أحد أوجهه الجانبية ٦٠سم^{٢} فإن مساحته الكلية=...سم^{٢}

(أ)٦٠٠ (ب)٣٤٠

(جـ)١٦٠ (د)٢٤٠

١٠ هرم ثلاثي منتظم الوجوه طول حرفه ١٠سم فتكون مساحته الكلية=....سم^{٢}

(أ)٤٠ (ب)١٠٠

(جـ)$١٠٠\sqrt{٣}$ (د)$٢٥\sqrt{٣}$

١١ هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته =طول ارتفاعه الجانبي فإن النسبة بين مساحته الجانبية ومساحته الكلية=...

(أ)٢ : ٣ (ب)٣ : ٤

(جـ)١ : ٢ (د)٣ : ٥

١٢ هرم رباعي منتظم مساحته الكلية ٧٠سم^{٢} ، ومساحته الجانبية ٤٥سم^{٢} فإن ارتفاع الهرم =...سم

(أ)٢,٥ (ب)$\sqrt{٥}$

(جـ)$\sqrt{١٤}$ (د)٤,٥

١٣ هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ١٠سم ، وارتفاعه الجانبي ١٣سم تكون مساحته الجانبية ....سم^{٢}

(أ)٢٦٠ (ب)٣٦٠

(جـ)١٣٠ (د)٥٢٠

١٤ هرم رباعي منتظم محيط قاعدته ٦٤سم وارتفاعه ٣سم فإن حجمه يساوي ...سم^{٣}

(أ)٢٦٥ (ب)٥٦٢

(جـ)٢٥٦ (د)٦٥٢

١٥ هرم رباعي منتظم مساحته الجانبية =٣٠سم^{٢} ، ارتفاعه الجانبي =٥سم فإن محيط قاعدته=....سم

(أ)٦ (ب)١٢

(جـ)٢٤ (د)٣٦

ثانياً الأسئلة المقالية

١ م أ ب جـ ء هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ١٠سم ، وارتفاعه ١٢سم ، أوجد ارتفاعه الجانبي (١٣سم)

٢ م أ ب جـ ء هرم رباعي منتظم ارتفاعه ٢٠سم وارتفاعه الجانبي ٢٥سم ، أوجد طول ضلع قاعدة الهرم (٣٠سم)

٣ هرم الجيزة الأكبر "خوفو" هو هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ٢٣٢متراً، وارتفاعه الجانبي ١٨٦متراً ، أوجد ارتفاع الهرم (١٤٥,٤م)

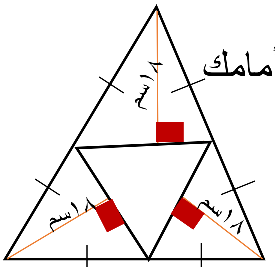
٤ هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ٢٠سم وارتفاعه $١٠\sqrt{٣}$ سم أوجد
المساحة الجانبية (٨٠٠سم^{٢})
حجم الهرم ($\frac{٤٠٠٠\sqrt{٣}}{٣}$ سم^{٣})

٥ احسب لأقرب رقم عشري واحد حجم هرم خماسي منتظم، طول ضلع قاعدته =١٦سم وارتفاعه ١٢سم (١٧٦١,٨سم^{٣})

٦ هرم سداسي منتظم طول ضلع قاعدته ١٢سم وارتفاعه الجانبي $١٠\sqrt{٣}$ سم أوجد
أ) مساحته الجانبية ($٣٦٠\sqrt{٣}$ سم^{٢})
ب) مساحته الكلية ($٥٧٦\sqrt{٣}$ سم^{٢})

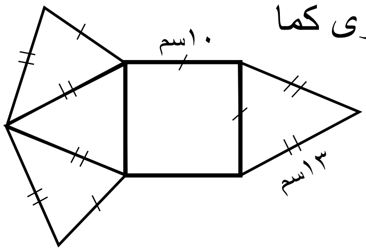
٧ هرم رباعي منتظم مساحة قاعدته ٧٠٠سم^{٢} وارتفاعه الجانبي ٢٠سم أوجد حجمه (٣٥٠٠سم^{٣})

٨ باستخدام الشبكة التي أمامك صف المجسم وأوجد مساحته الكلية وحجمه



(ده هرم ثلاثي منتظم الوجوه)

٩ تصنع عبوات منتجات أحد المصانع من الورق المقوى كما بالشكل المقابل



أ) أوجد مساحة الورق المقوى لإنتاج ١٠٠٠عبوة (المساحة الكلية × ١٠٠٠)

ب) احسب تكاليف الورق المقوى المستخدم إذا كان تكلفة المتر الواحد=١٠جنيهاً

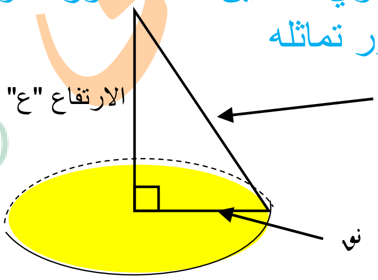
الدرس الثالث: المخـــــروط

المخروط الدائري القائم

١ المجسم الناشئ عن دوران مثلث قائم الزاوية دورة كاملة حول أحد ضلعي القائمة

٢ المجسم الناتج عن طي قطاع دائري

٣ المجسم الناتج عن دوران مثلث متساوي الساقين نصف دورة حول محور تماثله

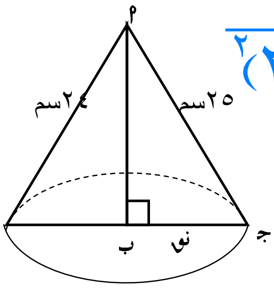


مثال(١) مخروط دائري قائم طول راسمه ٢٥سم وارتفاعه ٢٤سم أوجد محيط ومساحة قاعدته ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

الحــل

∵ $\overline{أب} \perp \overline{ب جـ}$

لأنه عمودي على مستوى الدائرة



∴ نق = $\sqrt{(٢٥)^٢ - (٢٤)^٢}$

= ٧سم

* محيط القاعدة = ٢πنق

= ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ = ٤٤سم

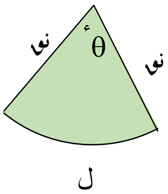
* مساحة القاعدة = πنق² = $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧² = ١٥٤سم²

ملحوظة هامة

قوانين مساحة القطاع الدائري

* $\frac{١}{٢}$ ل نق
* = $\frac{١}{٢}$ نق² $\theta^{ء}$
* = $\frac{س^{\circ}}{٣٦٠^{\circ}} \times \pi$نق²
* محيط القطاع = ل + ٢نق

$\theta^{ء} = \frac{ل}{نق}$

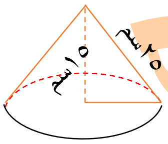


للتحويل من مخروط إلى قطاع دائري

* نصف قطر دائرة القطاع هو طول راسم المخروط "ل"
* طول قوس القطاع هو محيط دائرة المخروط "٢πنق"

مثال(٢) قطاع دائري طول نصف قطر دائرته ٢٥سم وطول قوسه = ٣٠πسم تم تحويله لمخروط احسب ارتفاعه

الحــل



طول راسم المخروط = ٢٥سم

٢πنق = ٣٠π ∴ نق = ١٥سم

ع = $\sqrt{(٢٥)^٢ - (١٥)^٢}$ = ٢٠سم

مثال(٣) قطاع دائري مساحته ٢٥π سم^2 وقياس زاويته المركزية= ٩٠° تحول إلى مخروط دائري قائم أوجد ارتفاعه

الحل

القطاع	المخروط
$\frac{٩٠}{٣٦٠} \times \pi$ نق^2 = ٢٥π	ل = ١٠سم
$\frac{\text{نق}^2}{٤}$ = ٢٥	٢π نق = ٥π
نق^2 = ١٠٠	∴ نق = ٢,٥سم
∴ نق = ١٠سم	
$\frac{١}{٢}$ ل نق = ٢٥π	
٥ل = ٢٥π ∴ ل = ٥π	

ع = $\sqrt{\text{ل}^2 - \text{نق}^2}$ = $\sqrt{(١٠)^2 - (٢,٥)^2}$

= ٩,٦٨سم

المساحة الجانبية-الكلية والحجم للمخروط الدائري القائم

(١) المساحة الجانبية= π ل نق

$\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة ×طول الراسم= $\frac{١}{٢}$×٢π نق ل

(٢) المساحة الكلية =المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

= π ل نق + π نق^2

= π نق (ل + نق)

(٣) حجم المخروط= $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ π نق^2 ع

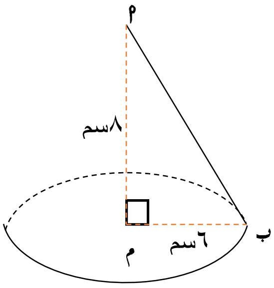
= $\frac{١}{٣}$ حجم الأسطوانة

مثال(٤) مخروط دائري قائم طول قطر قاعدته ١٢سم وارتفاعه =٨سم أوجد

(أ) المساحة الجانبية

(ب) المساحة الكلية

(ج) الحجم



الحل

∵ $\overline{\text{أم}} \perp \overline{\text{مب}}$

∴ ل = $\sqrt{(٨)^2 + (٦)^2}$ = ١٠سم

نق =٦سم ع=٨سم ل=١٠سم

(أ) المساحة الجانبية = π نق ل

= π ×٦×١٠ = ٦٠π سم^2

(ب) المساحة الكلية = π نق ل + π نق^2

= ٦٠π + ٣٦π = ٩٦π سم^2

(ج) الحجم = $\frac{١}{٣}$ π نق^2 ع

= $\frac{١}{٣}$ π × ٣٦ × ٨ = ٩٦π سم^3

مثال(٥) مخروط دائري قائم محيط قاعدته ٤٤سم وارتفاعه ٢٥سم

أوجد

(١) مساحته الجانبية

(٢) مساحته الكلية

(٣) حجمه

مثال(٦) أوجد طول نصف قطر مخروط دائري قائم مساحته الكلية ٦١٦πسم^2 وطول راسمه ٣٠سم

الحـــل

المساحة الكلية = π نق (ل + نق)

∴ π نق (ل + نق) = ٦١٦π

نق (٣٠ + نق) =٦١٦

٣٠نق + نق^2 =٦١٦

نق^2 + ٣٠ نق - ٦١٦ =٠

(نق - ١٤) (نق + ٤٤) =٠

إما نق =١٤سم أو نق =٤٤مرفوض

∴ طول نصف القطر =١٤سم

مثال(٧) مكعب من الشمع طول حرفه ٢٠سم صهر وحول إلى مخروط دائري قائم ارتفاعه ٢١سم ، أوجد طول نصف قطر قاعدة المخروط إذا علم أن ١٢% من الشمع فقد أثناء عمليتي الصهر والتحويل ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

الحـــل

حجم الشمع = حجم المكعب = (٢٠)^3 =٨٠٠٠سم^3

المفقود ١٢%

∴ المتبقي = حجم المخروط

= ٨٠٠٠ × ٨٨% = ٧٠٤٠سم^3

∴ $\frac{١}{٣}$ × $\frac{٢٢}{٧}$ × نق^2 × ٢١= ٧٠٤٠

∴ ٢٢نق^2 = ٧٠٤٠

نق^2 = $\frac{٧٠٤٠}{٢٢}$ = ٣٢٠

∴ نق = $\sqrt{٣٢٠}$ = ٨$\sqrt{٥}$ سم

لاحظ أن

(١) إذا كان ل > ٢نق

تكون ٠ < θ < ١٨٠°

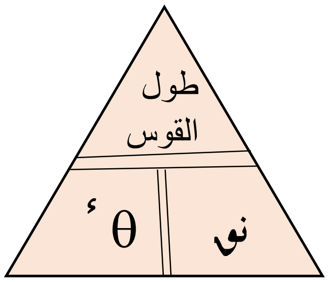
(٢) ل = ٢نق

تكون θ =١٨٠°

(٣) ل < ٢نق

تكون ١٨٠° < θ < ٣٦٠°

تذكـــر أن



$\theta^{ء} = س^{\circ} \times \frac{\pi}{١٨٠}$

نصف قطر القطاع ⟵ طول راسم المخروط

طول قوس القطاع ⟵ محيط دائرة المخروط

مثال(٨) قطاع دائري م أ ب طول نصف دائرته ١٨سم وقياس زاويته المركزية ٦٠° طوي ولصق نصفا قطره ليكون أكبر مساحة جانبية لمخروط قائم أوجد حجمه

الحـــــل

القطاع	المخروط
نق = ١٨سم	طول الراسم ل=١٨سم
طول القوس= $\theta^{ء}$×نق	٢πنق = ٦π
= ٦٠°× $\frac{\pi}{١٨٠}$ ×١٨	٢نق =٦
= ٦π	∴ نق =٣سم

∴ ع = $\sqrt{ل^2 - نق^2}$ = $\sqrt{(١٨)^2 - (٣)^2}$

= $٣\sqrt{٣٥}$ سم

∴ الحجم = $\frac{١}{٣}$ π نق^2 ع = $\frac{١}{٣}$ π × ٣^2 × $٣\sqrt{٣٥}$

= ١٦٧,٣سم^3

مثال(٩) طويت قطعة من الورق المقوى على شكل قطاع دائري طول نصف قطر دائرته ٣٦سم وقياس زاويته ٢١٠° لتصنع مخروطاً دائرياً قائماً. أوجد ارتفاع المخروط وحجمه

الحـــــل

القطاع	المخروط
طول نصف القطر=٣٦سم	طول الراسم ل=٣٦سم
طول القوس= $\theta^{ء}$×نق	محيط دائرة المخروط
= س°× $\frac{\pi}{١٨٠}$×نق	٢πنق = ٤٢π
= ٢١٠°× $\frac{\pi}{١٨٠}$ ×٣٦	نق = $\frac{٤٢}{٢}$ =٢١سم
= ٤٢π	

∴ ع = $\sqrt{ل^2 - نق^2}$ = $\sqrt{(٣٦)^2 - (٢١)^2}$

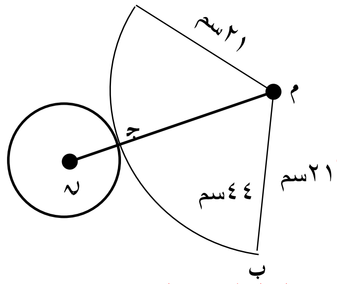
= $٣\sqrt{٩٥}$ سم

الحجم = $\frac{١}{٣}$ π نق^2 ع

= $\frac{١}{٣}$ π ×$(٢١)^2$× $٣\sqrt{٩٥}$ ≃ ٦٩٢٧سم^3

مثال(١٠) أيهما أكبر حجماً؟ مخروط قائم طول نصف قطر قاعدته ١٥سم وارتفاعه ٢٠سم ، أم هرم رباعي منتظم ارتفاعه ٤٠سم ومحيط قاعدته ٤٨سم

مثال(١١)



في الشكل المقابل

أوجد – الارتفاع

المساحة الجانبية – الكلية – الحجم

الحـــل

القطاع	المخروط
نق = ٢١	ل = ٢١سم ٢πنق = ٤٤
ل = ٤٤سم	٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × نق = ٤٤
	∴ نق = ٧سم

ع = $\sqrt{ل^٢ - نق^٢}$ = $\sqrt{(٢١)^٢ - (٧)^٢}$ = ١٤$\sqrt{٢}$ سم

المساحة الجانبية = π ل نق

= $\frac{٢٢}{٧}$ × ٢١ × ٧ = ٤٦٢سم^٢

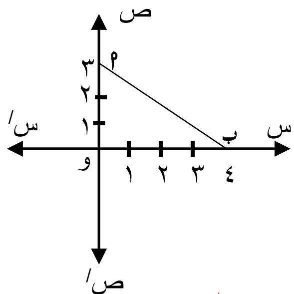
المسحة الكلية = ٤٦٢ + πنق^٢

= ٤٦٢ + $\frac{٢٢}{٧}$ × $(٧)^٢$ = ٦١٦سم^٢

الحجم = $\frac{١}{٣}$ π نق^٢ ع

= $\frac{١}{٣}$ × $\frac{٢٢}{٧}$ × $(٧)^٢$ × ١٤$\sqrt{٢}$ = ١٠١٦,٣٥سم^٣

مثال(١٢)



احسب بدلالة π

حجم الجسم الناتج من دوران Δ ٩ و ب دورة كاملة حول

(٩) محور السينات   (ب) محور الصادات

(٩) أولاً حول محور السينات

يكون محور الدوران هو $\overleftrightarrow{و ب}$ وهو ع =٤سم

∴ ع =٤سم   نق =٣سم   ل=٥سم

الحجم = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢}ع = $\frac{١}{٣}$ π ×٩×٤

= ١٢π وحدة مكعبة

(ب) ثانياً حول محور الصادات

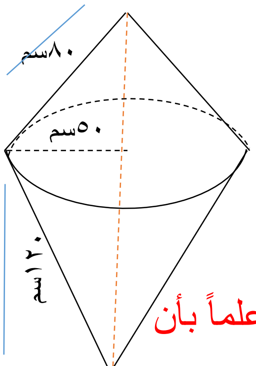
يكون محور الدوران هو $\overleftrightarrow{٩ و}$ وهو ع =٣سم

∴ ع =٣سم   نق =٤سم   ل=٥سم

الحجم = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢}ع = $\frac{١}{٣}$ π ×١٦×٣

= ١٦π وحدة مكعبة

مثال(١٣) في الشكل المقابل



(شمندورة) لتجديد المجرى

الملاحي. احسب تكاليف طلائه

بمادة مقاومة لعوامل التعرية، علماً بأن

تكاليف المتر المربع الواحد منها ٣٠٠جنية

الحـــل

في المخروط الأعلى ل١=٨٠سم   نق١=٥٠سم

في المخروط الأسفل نق٢=٥٠سم   ع٢=١٢٠سم

∴ ل٢ = $\sqrt{(٥٠)^٢ - (١٢٠)^٢}$ =١٣٠سم

المساحة الجانبية= π نق١ ل١ + π نق٢ ل٢

= π ×٠,٥ × ٠,٨ + π ×٠,٥ ×١,٣

∴ التكلفة = ٣٠٠ × □ = ٩٩٠جنيهاً

الواجـــــــب

أولاً: اختر الاجابة الصحيحة

١ المساحة الكلية للمخروط القائم تساوي...

(أ) π نق ل　　(ب) $\frac{\pi}{٣}$ نق² ع

(ج) $\frac{\pi}{٣}$ نق (نق ع+٣)　　(د) π نق (ل+نق)

---

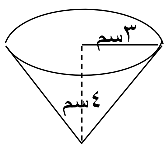
٢ مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته ٦سم وطول راسمه ١٠سم فإن حجمه = ...سم³

(أ) ٣٢π　　(ب) ٦٤π

(ج) ٩٦π　　(د) ٢٨٨π

---

٣ في الشكل المقابل طول راسم المخروط = ...سم

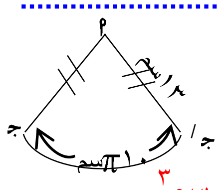


(أ) ٥　　(ب) ٤

(ج) ٣　　(د) ٢

---

٤ حجم الشبكة التي أمامك نصف مجسماً حجمه=...سم³

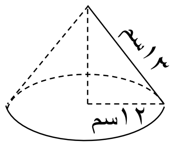


(أ) ٢٥π　　(ب) ٥٠π

(ج) ٧٥π　　(د) ١٠٠π

---

٥ الزاوية المركزية للقطاع الذي إذا طويناه أصبح مخروطاً تكون....



(أ) حادة　　(ب) منفرجة

(ج) منعكسة　　(د) مستقيمة

---

٦ المخروط الدائري القائم يمكن الحصول عليه عند طي ورقة على شكل ...

(أ) مثلث متساوي الأضلاع

(ب) مثلث قائم

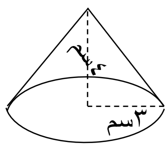
(ج) قطعة دائرية

(د) قطاع دائري

---

٧ أولاً:

المساحة الجانبية للمخروط=...سم²



(أ) ١٢π　　(ب) ٧π

(ج) ١٥π　　(د) ١٦π

ثانياً:

المساحة الكلية للمخروط =...سم²

(أ) ٢١π　　(ب) ٢٤π

(ج) ١٠π　　(د) ٩π

٨ مخروط دائري قائم حجمه ٩πسم٣ وطول نصف قطر قاعدته يساوي ارتفاعه فتكون مساحة قاعدته=....سم٢

(أ)٩π (ب)٣π

(جـ)٢٧π (د)١٢π

٩ مخروط دائري قائم إذا زاد طول نصف قطر قاعدته للضعف ، وقل ارتفاعه للنصف فإن حجمه=....

(أ)يظل كما هو (ب)يزداد للضعف

(جـ)يقل للنصف (د)يزداد لأربعة أمثاله

١٠ مخروط دائري قائم طول قطر قاعدته ٦سم وارتفاعه ٨سم فإن طول راسمه=....سم

(أ)٢ (ب)٣

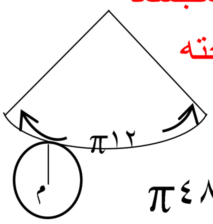
(جـ)٤ (د)٥

١١ مخروط دائري قائم طول راسمه ٢٥سم ومساحته الجانبية ٥٥٠سم٢ فإن حجمه =.....سم٣

(أ)١٢٢٣ (ب)١٢٣٢

(جـ)١٣٢٢ (د)٣١٢٢

١٢ الشبكة التي أمامك نصف مجسماً حجمه ٩٦πسم٣ فإن مساحته الجانبية=....سم٢



(أ)٦٠π (ب)٤٨π

(جـ)٩٦π (د)١٦π

١٣ مخروط قائم طول راسمه يساوي قطر قاعدته فإن مساحته الكلية = ...سم٢

(أ)٣πنق٢ (ب)٣πنق٣

(جـ)٤πنق٢ (د)٤πنق٣

ثانياً الأسئلة المقالية

١ أوجد بدلالة π محيط ومساحة قاعدة مخروط دائري قائم ارتفاعه ٢٤سم ، وطول راسمه ٢٦سم(٢٠πسم، ١٠٠πسم^{٢})

٢ أوجد لأقرب رقم عشري واحد المساحة الكلية لمخروط قام طول قطر قاعدته ١٠سم وارتفاعه ١٢سم (٢٨٢,٧سم^{٢})

٣ أوجد حجم مخروط دائري قائم محيط قاعدته ٤٤سم وارتفاعه ٢٥سم (١٢٨٣,٨سم^{٣})

٤ قطعة من الشكولاتة على هيئة مخروط قائم حمه ٢٧π سم^{٣} ومحيط قاعدته ٦πسم أوجد ارتفاعه (٩سم)

٥ إناء اسطواني الشكل به ماء ، غمر فيه جسم معدني على شكل مخروط قائم ، ارتفاعه ١٢سم وطول نصف قطر قاعدته ٢سم غمراً كاملاً، فارتفع سطح الماء في الاناء بمقدار ١سم أوجد طول قطر قاعدة الإناء (٨سم)

٦ قطاع دائري م أ ب طول نصف قطر دائرته ١٨سم وقياس زاويته المركزية ٦٠° طوي ولصق نصفا قطره ليكون أكبر مساحة جانبية لمخروط قائم. أوجد حجم المخروط (١٦٧,٣سم^{٣})

٧ غطاء مصباح على شكل مخروط قائم محيط قاعدته ٨٨سم وارتفاعه ٢٠سم احسب مساحته لأقرب سم^{٢} ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$) (١٠٧٤سم^{٢})

هتجيب المساحة الجانبية

٨ مخروط دائري قائم حجمه ١٠٠سم^{٣}

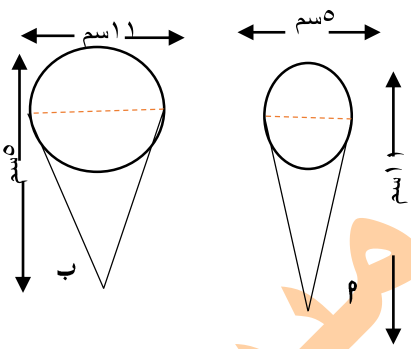
أوجد حجمه عندما π $\frac{١}{٣}$ π نو^{٢} ع = ١٠٠

يتضاعف ارتفاعه $\frac{١}{٣}$ π نو^{٢} ع × ٢ = ٢٠٠سم^{٣}

يتضاعف طول نصف قطره $\frac{١}{٣}$ π٤نو^{٢}ع = ٤٠٠سم^{٣}

يتضاعف ارتفاعه وطول نصف قطره ٨٠٠سم^{٣}

٩ في الشكل المقابل أيهما أكبر سعة وما الفرق بينهما



الدرس الرابع:
الدائرة

أولاً: معادلة الدائرة التي مركزها م (ء ، هـ) وطول نصف قطرها نق

(س – ء)^{٢} + (ص – هـ)^{٢} = نق^{٢}

أكمل

١ الدائرة التي مركزها (١ ، ٢) ونصف قطرها ٥ وحدات تكون

(س – ١)^{٢} + (ص – ٢)^{٢} =٥^{٢}

٢ الدائرة (س – ٢)^{٢} + (ص + ١)^{٢} =٩

يكون مركزها (٢ ، -١)وطول نصف قطرها= $\sqrt{٩}$ = ٣وحدات طول

ومحيطها = ٢πنق = ٦π وحدة طول

مساحتها = πنق^{٢} = ٩π وحدة مربعة

ملحوظة هامة

معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل

س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢}

ثانياً: الصورة العامة لمعادلة الدائرة

س^{٢} + ص^{٢} +٢ل س + ٢ك ص + جـ =٠

المركز م = (-ل ، -ك)

نق = $\sqrt{\text{ل}^{٢}+\text{ك}^{٢}-\text{جـ}}$

جـ = ل^{٢} + ك^{٢} - نق^{٢}

مثال(١) أوجد الصورة العامة لمعادلة دائرة مركزها (٢ ، -٣) وطول قطرها ١٠سم

الحل

ل= -٢ ك= ٣ نق =٥

جـ = ل^{٢} + ك^{٢} - نق^{٢}

= (-٢)^{٢} +(٣)^{٢} –(٥)^{٢} = -١٢

س^{٢} + ص^{٢} +٢ل س + ٢ك ص + جـ =٠

س^{٢} + ص^{٢} - ٤س + ٦ص - ١٢=٠

تدريب

أوجد معادلة كل من الدوائر التالية حيث م مركزها و نق نصف قطرها

١ م (١ ، -٣) نق= ٢

٢ م (-٢ ، ٤) نق= ٦

٣ م (٣ ، ٤) نق= ٥

مثال(٢) أوجد محيط ومساحة كل من الدوائر التالية

بعد ما تجيب المركز ونصف قطر الأول

١ س^٢ + ص^٢ – ٢س + ٤ص – ٤ =٠

---

٢ ٧س^٢+٧ص^٢+٤٢س –١٤ص+٢٨=٠

الحـــل

بالقسمة على ٧

س^٢ + ص^٢ + ٦س – ٢ص +٤=٠

م (-٣ ، ١) ل=٣ ك=-١ ج =٤

نق = √(ل^٢+ك^٢–ج) = √((٣)^٢+(–١)^٢– ٤)

= √(٩+١–٤) = √٦ وحدة طول

ملاحظات على معادلة الدائرة

١ معادلة من الدرجة الثانية في س ، ص

٢ خالية من الحد المشتمل على س ص

٣ معامل س^٢ =معامل ص^٢ =١
ولو مش =١ نقسم المعادلة على معاملهم
لحد لما تخليه واحد بالعافية ولو منفعش
يبقى مش دائرة

٤ لازم نق = √(ل^٢+ك^٢–ج) >٠

يعني ل^٢ + ك^٢ – ج قيمة موجبة

أي خدمة

مثال(٣) بين أي من المعادلات الآتية تعبر عن دائرة

١ س^٢ + ٣ص^٢ – ٢س + ٤ص + ٥ =٠

ليست معادلة دائرة لأن معامل

س^٢ ≠ معامل ص^٢

---

٢ ٢س^٢ – س ص+٢ص^٢+٥س – ص=٠

ليست معادلة دائرة لأنها مشتملة على س ص

---

٣ س^٢ + ص^٢ + ٧س – ص + ٨ =٠

معامل س^٢ = ص^٢ =١

تصلح أن تكون معادلة دائرة

ل = $\frac{-٧}{٢}$ ك = $\frac{١}{٢}$ ج = ٨

نق = √(ل^٢+ك^٢–ج)

∴ ل^٢ + ك^٢ – ج = $(\frac{-٧}{٢})^٢$ + $(\frac{١}{٢})$ – ٨

= $\frac{٩}{٢}$ > ٠

∴ المعادلة هي معادلة دائرة ولو مش مصدقني أسألها

---

٤ ٢س^٢ + ٢ص^٢ – ٦س+٤ص+٩=٠

اتفضل حضرتك حل

حالات خاصة

١ معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل
س٢ + ص٢ = نق٢

٢ معادلة الدائرة المارة بنقطة الأصل
س٢ + ص٢ + ٢ل س + ٢ك ص=٠
(جـ=٠)

٣ معادلة الدائرة التي مركزها على محور السينات (ك=٠)
س٢ + ص٢ + ٢ل س + جـ =٠

٤ معادلة الدائرة التي مركزها على محور الصادات(ل=٠)
س٢ + ص٢ +٢ك ص + جـ =٠

٥ معادلة الدائرة التي تمس محور السينات
نق = |ك| ، جـ = ل٢
نقطة التماس = (-ل ، ٠)
س٢ + ص٢ +٢ل س + ٢ك ص + ل٢=٠

٦ معادلة الدائرة التي تمس محور الصادات
نق = |ل| ، جـ = ك٢
نقطة التماس = (٠ ، -ك)
س٢ + ص٢ +٢ل س + ٢ك ص + ك٢=٠

٧ معادلة الدائرة التي تمس المحورين
نق = |ل| = |ك| جـ = ل٢ = ك٢ = نق٢
س٢+ ص٢+٢ل س+٢ك ص+جـ =٠

ملاحظات هامة

١ إذا كان ا (س١ ، ص١) ، ب (س٢ ، ص٢) قطراً في الدائرة
① إحداثيات المركز

$$= \left(\frac{س_1+س_2}{2} ، \frac{ص_1+ص_2}{2}\right)$$

② طول القطر =

$$= \sqrt{(س_1-س_2)^2+(ص_1-ص_2)^2}$$

٢ طول العمود المرسوم من النقطة (س١، ص١) إلى المستقيم ا س + ب ص + جـ =٠

$$= \frac{|ا س_1 + ب ص_1 + جـ|}{\sqrt{ا^2+ب^2}}$$

٣ إذا كان $\overline{اب}$ قطراً في دائرة وكان
$\frac{1}{2}$ [ا + ب] = (٢ ، -٥)
فمعنى ذلك أن مركز الدائرة (٢ ، -٥)

٤ أي نقطة تقع على الدائرة فهي تحقق معادلة الدائرة

مثال(٤) أوجد معادلة الدائرة التي $\overline{أ ب}$ قطراً فيها حيث أ = (٥ ، -٢) ، ب = (١ ، ١٠)

الحــــل

م $\left(\frac{٥+١}{٢} ، \frac{-٢+١٠}{٢}\right)$ = (٣ ، ٤)

طول القطر = $\sqrt{(٥-١)^{٢}+(-٢-١٠)^{٢}}$ = ٤$\sqrt{١٠}$

∴ نق = $\frac{٤\sqrt{١٠}}{٢}$ = ٢$\sqrt{١٠}$ وحدة طول

∴ ل = -٣ ، ك = -٤ ، نق = ٢$\sqrt{١٠}$

جـ = ل^{٢} + ك^{٢} - نق^{٢}

= (-٣)^{٢} + (-٤)^{٢} − (٢$\sqrt{١٠}$)^{٢} = -١٥

∴ المعادلة هي

س^{٢}+ ص^{٢}+٢ل س+٢ك ص+جـ=٠

س^{٢}+ ص^{٢} − ٦س − ٨ص −١٥=٠

مثال(٥) أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٥ ، -٤) وتمس محور السينات

الحــــل

ل = -٥ ك = ٤

نق = |ك| = ٤ وحدة طول

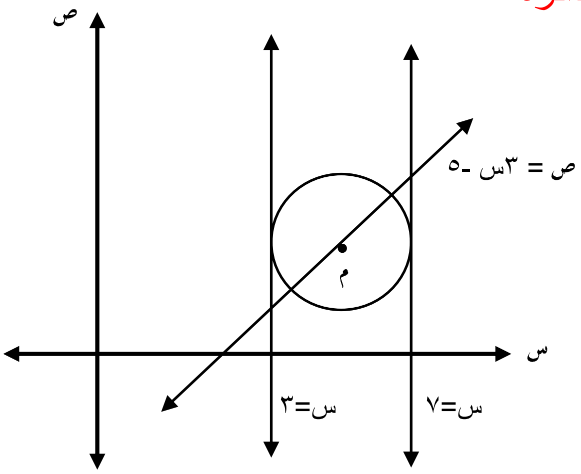
جـ = ل^{٢}

∴ المعادلة هي

س^{٢} + ص^{٢} +٢ل س + ٢ك ص + ل^{٢}=٠

س^{٢} + ص^{٢} − ١٠س + ص +٢٥=٠

مثال(٦) في الشكل المقابل أوجد معادلة الدائرة



الحــــل

∴ المستقيمان س =٣ ، س =٧ مماسان للدائرة

∴ طول القطر = البعد بينهم = ٤وحدات

∴ نق = ٢وحدة طول

والمركز في المنتصف (٥ ، ص)

، ∴ المركز يقع على المستقيم ص =٣س -٥ فهو يحقق معادلته

ص=٣×٥ − ٥=١٥ − ٥=١٠

∴ المركز (٥ ، ١٠)

∴ ل = -٥ ك = -١٠ نق =٢

جـ = ل^{٢} + ك^{٢} - نق^{٢} =

(-٥)^{٢}+(-١٠)^{٢}-٢^{٢}=١٢١

∴ المعادلة هي

س^{٢} + ص^{٢} − ١٠س − ٢٠ص +١٢١=٠

مثال(٧) أوجد معادلة الدائرة التي طول نصف قطرها =٣وحدات طول ومعادلتا قطرين فيها هما:

س + ص=٢ ، ٢س – ص=٧

الحل

مركز الدائرة هو نقطة تقاطع القطرين بحل المعادلتين

س + ص =٢

٢س – ص=٧

٣س = ٩ ∴ س =٣

ص= -١

م (٣ ، -١) نق =٣

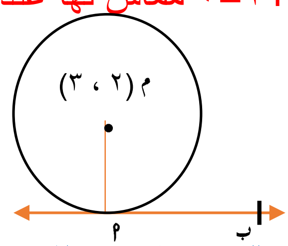
ل= -٣ ك = ١

جـ = ل^2 + ك^2 - نق^2 = ٩ + ١ – ٩ =١

∴ معادلة الدائرة هي

س^2 + ص^2 – ٦س + ٢ص +١=٠

مثال(٨) أوجد معادلة التي مركزها م = (٢، ٣) والمستقيم ٣س + ٤ص +٢=٠ مماس لها عند نقطة



الحل

طول نصف القطر هو البعد العمودي بين (٢ ، ٣) عن المستقيم ٣س +٤ص+٢=٠

$$\text{نق} = \frac{|٣\times٢+٤\times٣+٢|}{\sqrt{(٣)^2+(٤)^2}} = \frac{٢٠}{٥} = ٤\text{وحدات}$$

∴ ل = -٢ ك = -٣ نق =٤

جـ = ل^2 + ك^2 - نق^2 = ٤+٩ – ١٦ = -٣

∴ المعادلة هي

س^2 + ص^2 – ٤س – ٦ص – ٣=٠

مثال(٩) أوجد المعادلة الاحداثية للدائرة التي تمر بالنقط م = (٦ ، ٣) ، ب =(٢ ، ٣) ، جـ=(٤ ، ١)

ثم عين مركزها وطول نصف قطرها

الحل

نفرض أن المعادلة هي

س^2 + ص^2 + ٢ل س+٢ك ص + جـ =٠

بالتعويض بالنقط الثلاث على الترتيب

٣٦+٩+١٢ل +٦ك +جـ=٠

١٢ل + ٦ك +جـ = -٤٥ ⟵ (١)

، ٤+٩ + ٤ل +٦ك +جـ=٠

٤ل + ٦ك +جـ = -١٣ ⟵ (٢)

، ١٦ +١+ ٨ل +٢ك +جـ =٠

٨ل + ٢ك +جـ = -١٧ ⟵ (٣)

بحل المعادلات الثلاثة

ل = -٤ ك = -٣ ج = ٢١

∴ المعادلة هي

س^2 + ص^2 – ٨س – ٦ص +٢١=٠

مركزها (٤ ، ٣)

$$\text{نق} = \sqrt{١٦+٩-٢١} = ٢\text{وحدة طول}$$

مثال(١٠) أوجد معادلة الدائرة التي هي صورة الدائرة

س^{٢} +ص^{٢} – ١٢س + ٦ص +٢٠=٠

بالانتقال (س+٢ ، ص-٢)

الحـــل

الدائرة المعطاة مركزها (٦ ، -٣)

و نق = $\sqrt{٣٦+٩-٢٠}$ =٥وحدة طول

المعادلة المطلوبة

مركزها (٨ ، -٥)   نق =٥

جـ = ل^{٢} + ك^{٢} - نق^{٢}

= ٦٤ + ٢٥ – ٢٥ =٦٤

∴ المعادلة هي

س^{٢} +ص^{٢} – ١٦س + ١٠ص +٦٤=٠

مثال(١١) بين أي النقط التالية تنتمي إلى الدائرة د التي معادلتها

(س -٦)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٢٥

، ثم حدد موضع النقط الأخرى بالنسبة إلى الدائرة حيث:

ٵ (٩ ، ٣)   ب (٧ ، ٥)

جـ (٣ ، ٣)   ء (٢ ، -٣)

الحـــل

(س -٦)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٢٥   نق =٥

بالتعويض بالنقط ٵ ، ب ، جـ ، ء

* ٵ (٩ ، ٣)

(٩ - ٦)^{٢} + (٣ + ١)^{٢} = ٢٥ = نق^{٢}

∴ ٵ تقع على الدائرة

* ب (٧ ، ٥)

(٧ - ٦)^{٢} + (٥ + ١)^{٢} = ٣٧ > نق^{٢}

∴ ب تقع خارج الدائرة

* جـ (٣ ، ٣)

(٣ - ٦)^{٢} + (٣ + ١)^{٢} = ٢٥ = نق^{٢}

∴ جـ تقع على الدائرة

* ء (٢ ، -٣)

(٢ - ٦)^{٢} + (-٣ + ١)^{٢} = ٢٠ < نق^{٢}

∴ ء تقع داخل الدائرة

مثال(١٢) هل الدائرتان

د$_{١}$: س^{٢} + ص^{٢} – ١٠س – ٨ص +١٦=٠

د$_{٢}$: س^{٢} + ص^{٢} + ١٤س+١٠ص –٢٦=٠

متماستان من الخارج ؟ ولماذا؟

الحـــل

د$_{١}$: م$_{١}$(٥ ، ٤)	د$_{٢}$: م$_{٢}$(-٧ ، -٥)
نق$_{١}$=	نق$_{٢}$=
$\sqrt{(-٥)^{٢}+(-٤)^{٢}-١٦}$	$\sqrt{٤٩+٢٥+٢٦}$
نق$_{١}$= ٥وحدة طول	نق$_{٢}$= ١٠وحدة طول

نق$_{١}$ + نق$_{٢}$ = ٥+١٠= ١٥وحدة طول

م$_{١}$م$_{٢}$ = $\sqrt{(٥+٧)^{٢}+(٤+٥)^{٢}}$ =١٥وحدة طول

∴ م$_{١}$م$_{٢}$ = نق$_{١}$ + نق$_{٢}$

∴ الدائرتان متماستان من الخارج

مثال(١٣) أوجد معادلة الدائرة التي مركزها م (٥ ، ٤) وتمس المستقيم س = ٢

الحـــل

∴ الدائرة تمس المستقيم س=٢

∴ نق = |٥ – ٢| = ٣وحدات

ل = -٥ ، ك = -٤ ، نق =٣

جـ = ٢٥+١٦ - ٩=٣٢

∴ المعادلة هي

س^{٢} + ص^{٢} – ١٠س – ٨ص +٣٢=٠

مثال(١٤) أوجد معادلة الدائرة التي مركزها م يقع في الربع الأول وطول نصف قطرها =٣وحدات طول والمستقيمان س = ١ ، ص = ٢ مماسان لها

الحـــل

نق =٣ ، المركز (س ، ص)

س – ١ =٣ ، س =٤

ص – ٢ =٣ ، ص =٥

∴ م (٤ ، ٥)

ل = -٤ ، ك = -٥ ، نق =٣

جـ =١٦ + ٢٥ – ٩=٣٢

المعادلة هي

س^{٢} + ص^{٢} – ٨س – ١٠ص +٣٢=٠

مثال(١٥) أوجد لأقرب سم^{٢} مساحة سطح شكل خماسي منتظم تمر برؤوسه الدائرة:
س^{٢} + ص^{٢} +٦س – ١٢ص +٥=٠
علماً بأن كل وحدة في المستوى الاحداثي تمثل ٥سم

الحـــل

ل =٣ ، ك = -٦ ، ج =٥

نق^{٢} = ٩+ ٣٦ – ٥=٤٠

مساحة الشكل الخماسي المنتظم [داخل دائرة]

= $\frac{ن}{٢}$ نق^{٢} جا($\frac{٣٦٠°}{ن}$) =

$\frac{٥}{٢}$ × ٤٠ × جا٧٢° ≃ ٩٥,١٠٥٦٥وحدة مربعة

∴ الوحدة المربعة تمثل مساحة قدرها (٥)^{٢} = ٢٥سم^{٢}

∴ مساحة الخماسي = ٩٥,١٠٥٦٥ × ٢٥ ≃ ٢٣٧٨سم^{٢}

مثال(١٦) صمم مهندس معماري مبني قاعدته على شكل ثماني منتظم ، تمر برؤوسه الدائرة
س^{٢} + ص^{٢} – ٤س +١٢ص – ٦٠ =٠
احسب مساحة قاعدة المبني لأقرب وحدة مربع

الحـــل

ل = -٢ ، ك = ٦ ، جـ = -٦٠

نق^{٢} = ٤+٣٦+٦٠= ١٠٠

∴ مساحة الثماني المنتظم الذي تمر برؤوسه الدائرة

= $\frac{ن}{٢}$ نق^{٢} جا($\frac{٣٦٠°}{ن}$)

= $\frac{٨}{٢}$ × ١٠٠ × جا٤٥° =٢٠٠$\sqrt{٢}$ وحدة مربعة

≃ ٢٨٣وحدة مربع

الواجـــــب

أولاً: اختر الاجابة الصحيحة

١ مساحة الدائرة التي معادلتها

(س – ٥)^2 + (ص +٤)^2=٧

(أ)٣,٥π (ب)٧π

(جـ)١٢,٢٥π (د)٤٩π

٢ طول قطر الدائرة:

٤س^2+٤ص^2+١٦س – ٨ص –١٦=٠

يساوي ......وحدة طول

(أ)٣ (ب)٦

(جـ)١٢ (د)٢٤

٣ النقطة التي تقع على الدائرة

(س – ٢)^2+ص^2=١٣هي....

(أ)(٢ ، ٣) (ب)(٣ ، -٢)

(جـ)(٢ ، ٥) (د)(٤ ، ٣)

٤ الدائرة (س+٢)^2+ص^2+٢ص=٠

مركزها النقطة....

(أ)(٢ ، ٢) (ب)(-٢ ، -١)

(جـ)(٢ ، -١) (د)(-٢ ، ٠)

٥ محيط الدائرة التي معادلتها

س^2 + ص^2=٨ هو......وحدة طول

(أ)٨π (ب)٦٤π

(جـ)٢$\sqrt{٢}\pi$ (د)٤$\sqrt{٢}\pi$

٦ مركز الدائرة: س^2+ص^2–٦س+٨ص=٠

هو النقطة.....

(أ)(٣ ، -٤) (ب)(٤ ، -٣)

(جـ)(-٣ ، ٤) (د)(-٤، ٣)

٧ إذا كانت الدائرة تمس محوري الاحداثيات في الربع الأول فإن مركزها يقع على المستقيم.....

(أ) ص= س (ب) ص=٢س

(جـ) ص= $\frac{١}{٢}$س (د) س= -س

٨ أي المعادلات الآتية يعبر عن دائرة...

(أ) س^2 – ص^2 + س – ص=٦

(ب) ٢س^2+ ص^2 – س + ص=٥

(جـ) س^2 + ص^2 – س=٦

(د) س^2+ ص^2 – س ص=٦

٩ المعادلة $\begin{vmatrix} س & ت\,ص \\ ت\,ص & س \end{vmatrix}$ ـ ٤٩ =٠
تمثل دائرة طول نصف قطرها...وحدة طول

(أ) ٤٩ (ب) ١٤
(ج) ٩ (د) ٧

---

١٠ إذا كان $\overleftarrow{أ\,ب}$ مماس للدائرة
س^{٢} + ص^{٢}=نو^{٢} حيث أ=(٠ ، ٢نو)
فإن طول $\overline{أ\,ب}$ =....وحدة طول

(أ) نو (ب) ٢نو
(ج) $\sqrt{٣}$نو (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ نو

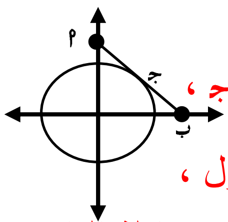
---

١١ إذا كانت
س^{٢}+ ص^{٢}+٢(جتاθ)س ـ٢(جاθ)ص ـ ٨ =٠
تمثل معادلة دائرة فإن نو =...وحدة طول

(أ) $\sqrt{٢}$ (ب) ٢$\sqrt{٢}$
(ج) ٣ (د) ٨

---

١٢ $\overline{أ\,ب}$ مماس للدائرة عند جـ ،



أ جـ = ١٢,٥ وحدة طول ،
ب جـ =٨ وحدة طول فإن معادلة الدائرة
هي......

(أ) س^{٢} + ص^{٢}=١٠ (ب) س^{٢} +ص^{٢}=٢٥
(ج) س^{٢} + ص^{٢}=١٠٠ (د) س^{٢}+ص^{٢}=١٢٥

"تذكر إقليدس نزل عمود من المركز للتماس"

١٣ المعادلة

$$(س \quad ص \quad ٨)\begin{pmatrix} س \\ ص \\ -٢ \end{pmatrix} = ⊏$$

تمثل دائرة طول قطرها =...وحدة طول

(أ) ٢ (ب) ٤
(ج) ٦ (د) ٨

---

١٤ معادلة الدائرة التي مركزها (-٤ ، ٣)
وتمر بنقطة الأصل هي....

(أ) (س+٤)^{٢} + (ص ـ ٣)^{٢}=٥
(ب) (س ـ ٤)^{٢} +(ص+٣)^{٢}=٢٥
(ج) (س+٤)^{٢} + (ص ـ ٣)^{٢}=٦٢٥
(د) (س+٤)^{٢} + (ص ـ ٣)^{٢}=٢٥

---

١٥ إذا كانت الدائرة التي معادلتها
س^{٢} + ص^{٢} ـ ٦س + ٨ص +جـ =٠
تمس محور السينات فإن جـ =...

(أ) -٩ (ب) ٩
(ج) ٦ (د) -٦

---

١٦ طول القطعة المماسية للدائرة
س^{٢}+ص^{٢}=٩ من النقطة (٥ ، ٠)
يساوي...وحدة طول

(أ) ١٤ (ب) ٣
(ج) ٥ (د) ٤

١٧ مساحة سطح مضلع منتظم عدد أضلاعه ١٢ ضلعاً وتمر برؤوسه الدائرة:

س^{٢} + ص^{٢} ـ ١٦ =٠ هي...وحدة مربعة

(أ) ٢٤ (ب) ٣٦

(ج) ٤٨ (د) ٧٢

١٨ معادلة الدائرة التي مركزها (١، ٢) وتمس المستقيم ٣س+٤ص+٩=٠ هي...

(أ) س^{٢} +ص^{٢} ـ ٢س ـ ٤ص=١٦

(ب) س^{٢} +ص^{٢} + ٢س +٤ص=١١

(ج) س^{٢} +ص^{٢} + ٢س+٤ص ـ ١٦=٠

(د) س^{٢} +ص^{٢} ـ ٢س ـ ٤ص=١١

١٩ الدائرة التي معادلتها

(س ـ أ)^{٢} + (ص ـ ب)^{٢} = ب^{٢} حيث

أ ≠ ب ...

(أ) تمس محور السينات

(ب) تمس محور الصادات

(ج) تمس المحورين

(د) لا تمس أي المحورين

٢٠ معادلة الدائرة التي هي صورة الدائرة

س^{٢} + ص^{٢} ـ ١٢س +٦ص+٢٠=٠

بالانتقال (س+٢ ، ص-٢) هي....

(أ) (س+٨)^{٢} + (ص+٥)^{٢} = ٢٥

(ب) (س ـ ٨)^{٢} + (ص+٥)^{٢} = ٢٥

(ج) (س ـ ٨)^{٢} + (س ـ ٥)^{٢} = ٢٥

(د) (س+٥)^{٢} + (ص ـ ٨)^{٢} = ٢٥

٢١ عدد الدوائر التي تمس محوري الاحداثيات وتقع مراكزها على الدائرة س^{٢} + ص^{٢}=٢٥ هو....

(أ) صفر (ب) ١

(ج) ٢ (د) ٤

٢٢ معادلة الدائرة التي مركزها (٤ ، ٣) وتمس محور السينات هي....

(أ) (س ـ ٣)^{٢} + (ص ـ ٤)^{٢}=١٦

(ب) (س ـ ٤)^{٢} + (ص ـ ٣)^{٢}=٩

(ج) (س+٣)^{٢} + (ص+٤)^{٢} =٩

(د) (س+٣)^{٢} + (ص ـ ٤)^{٢}=١٦

٢٣ محيط الدائرة

(س ـ٣)^{٢}+(ص ـ٢)^{٢}=٢٥ هو...

(أ) ٥π (ب) ٣π

(ج) ١٠π (د) ٢٥π

ثانياً الأسئلة المقالية

س١: أكتب معادلة الدائرة التي مركزها (م) وطول نصف قطرها (نق) في الحالات التالية

١ م = (٢ ، ٣) ، نق =٥

٢ م = (٠ ، ١٠) ، نق =٢$\sqrt{٣}$

٣ م = (-٤ ، -٣) ، نق = $\frac{٣}{٢}$

س٢: أوجد احداثي المركز ، و نق لكل من

١ س^{٢} + ص^{٢} – ٩ =٠

٢ (س+٣)^{٢} + (ص – ٥)^{٢} =٤٩

٣ س^{٢} + (ص + ٧)^{٢} =٢٤

٤ س^{٢} + ص^{٢} – ٤س+٦ص – ١٢ =٠

٥ س^{٢} + ص^{٢} – ٨س=١٢

س٣: أوجد معادلة الدائرة في الحالات التالية:

١ مركزها م (-٢ ، ٣) وطول قطرها ٨ وحدات

٢ مركزها م(٥، -١٢)وتمر بنقطة الأصل

٣ مركزها نقطة الأصل و نق =٥وحدات

٤ مركزها م (٧ ، -٥) وتمر بالنقطة ٩ (٣ ، ٢)

٥ $\overline{٩ب}$ قطر فيها حيث ٩(٦ ، -٤)، ب (٠ ،٢)

٦ مركزها م (٥ ،٤) وتمس المستقيم س=٢

٧ تمس المحورين وتمر بالنقطة (-٢ ، -٤)

٨ تمس محور السينات عند (-٣ ،٠) وتمس أيضاً الصادات

٩ يقع مركزها على محور السينات وتمر ٩ (١ ،٣) ، ب (٢ ، -٤)

١٠ $\overline{٩ب}$ قطر فيها حيث ٩ ، ب نقطتي تقاطع الدائرة

س^{٢}+ص^{٢}+٢س +٤ص=٠ مع محور السينات

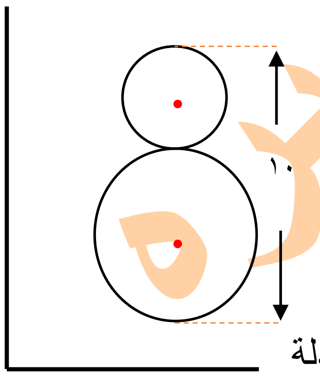
س٤: في إحدى المدن وعلى نظام إحداثي متعامدة حيث كل وحدة تمثل ٥أمتار . وجد أن الدائرة

س^{٢} + ص^{٢} – ٦س + ٨ص +١١=٠

تحدد أحد ميادينها ، أوجد لأقرب متر مربع مساحة هذا الميدان (π = $\frac{٢٢}{٧}$) (١١٠٠م^{٢})

س٥: يقع رادار عند الموقع ٩ (٧ ، -٩) ويغطى منطقة دائرية طول نصف قطرها ٣٠ وحدة طول أكتب معادلة الدائرة التي تحدد مجال عمل الرادار في المستوى الاحداثي. هل يمكن للرادار رصد سفينة في الواقع ب (٢٥ ، -٣٠). ولماذا

س٦: ترسان في آلة مراكزهما على مستقيم يوازي محور الصادات وأقصى بعد بين حافتيها ١٠وحدات ، أوجد معادلة الترس الأصغر علماً بأن معادلة الترس الأكبر هي



س^{٢} + ص^{٢} – ١٠س – ٨ص +٣٢= ٠