

2025



Math United

فى

الرياضيات البحتة

الصف الثانى الثانوى

الفصل الدراسى الأول

إعداد

م: رامى رجب عوض الله

01021226004

الدوال الحقيقية

مجال الدالة :

- مجموعة العناصر التي يمكن التعويض في قاعدة الدالة و التي تكون عندها الدالة معرفة .
- الفترة المقابلة لمنحنى الدالة على محور السينات بحيث :
- يكون الناتج كمية معرفة .
- مجموعة العناصر التي يأخذها المتغير س .
- عناصر المجموعة الأولى في أى مخطط سهمي .

أطراد الدالة :

• الدالة تزايدية :

كلما اتجهنا من اليسار إلى اليمين فإن : منحنى الدالة يصعد لأعلى .

• الدالة تناقصية :

كلما اتجهنا من اليمين إلى اليسار فإن : منحنى الدالة يهبط لأسفل .

• الدالة ثابتة : اذا كان منحنى الدالة خط مستقيم يوازي محور السينات .

تعريف الدالة :

- علاقة رياضية بين متغيرين احدهما متغير تابع و الاخر متغير مستقل .

مثل : العلاقة بين مساحة المربع و طول الضلع فكلما

زاد طول الضلع زادت المساحة و العكس صحيح .

• علاقة من المتغير **س** إلى المتغير **ص** يظهر فيها كل عنصر

من **س** كمسقط أول مرة واحدة فقط مثل (١ ، ٢) ، (٥ ، ٦)

• علاقة تربط بين مجموعتين بحيث يرتبط كل عنصر من عناصر

المجموعة الأولى بعنصر واحد فقط من عناصر المجموعة الثانية .

مدى الدالة :

• مجموعة جزئية من المجال المقابل .

• صور عناصر المجال بواسطة قاعدة الدالة .

• الفترة المقابلة لمنحنى الدالة على محور الصادات

• مجموعة قيم **ص** المرتبطة .

متى تكون العلاقة دالة

العلاقة على صورة بيان ع	العلاقة على صورة مخطط سهمي
<ul style="list-style-type: none"> • تكون العلاقة دالة اذا ظهر كل عنر من عناصر المجموعة الأولى (س) كمسقط أول مرة واحدة فقط . مثل : { (٢ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٤) } العلاقة دالة . { (٢ ، ١) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٤) } العلاقة ليست دالة . 	<ul style="list-style-type: none"> • اذا خرج من كل عنصر من عناصر المجموعة الأولى (س) سهم واحد فقط الي المجموعة الثانية (ص) . فان : العلاقة تكون دالة • و اذا خرج من عنصر من عناصر المجموعة الأولى أكثر من سهم فان : العلاقة ليست دالة و أيضا اذا لم يخرج من أى عنصر من عناصر المجموعة الأولى سهم فان : العلاقة أيضا ليست دالة .
العلاقة على الصورة الجبرية	اختبار الخط الرأسى
<ul style="list-style-type: none"> • اذا كان أس ص زوجى ليست دالة و اذا كان أس ص فردى فان : العلاقة تكون دالة . لماذا ... ؟ لأن جذر الأس الزوجى يكون له قيمتان أى أن ص يكون لها قيمتان أحدهما موجب و الاخرى سالبة و هو ما يخالف شرط الدالة و هى ارتباط كل عنصر من عناصر الـ س بعنصر واحد من عناصر الـ ص . بينما : الأس الفردى يكون جذره له قيمة واحدة و هو ما يتفق مع شرط الدالة فيكون لكل عنصر من عناصر الـ س قيمة واحدة في عناصر الـ ص . 	<ul style="list-style-type: none"> • اذا رسم خط يوازي محور الصادات و يقطع منحنى الدالة في نقطة واحدة فإنها تكون دالة . • اذا قطع الخط منحنى العلاقة في أكثر من نقطة فان : العلاقة ليست دالة .

قواعد تحديد مجال الدالة

مجال الدالة الجذرية

• إذا كان دليل الجذر فردي :

الجذر في البسط فان : المجال هو $ع$.

الجذر في المقام فان : المجال هو $ع -$ أصفار المقام .

• إذا كان دليل الجذر زوجي :

الجذر في البسط فان : المجال هو ما تحت الجذر \leq صفر

الجذر في المقام فان : المجال هو ما تحت الجذر $<$ صفر

• إذا كانت الدالة كسرية : في البسط جذر و في المقام جذر فان :

المجال = مجال الدالة الأولى \cap مجال الدالة الثانية - أصفار المقام

• إذا كان ما تحت الجذر دالة تربيعية :

فان : حل متباينات الدرجة الثانية في متغير واحد في $ع$ نتبع الآتي :

• نكتب الدالة التربيعية المناظرة للمتباينة .

• نبحث إشارة الدالة التربيعية .

• ثم نحدد الفترة التي تحقق المتباينة

مع مراعاة أن :

• $<$ تقابل كلمة موجب في بحث إشارة الدالة .

• $>$ تقابل كلمة سالب في بحث إشارة الدالة .

• \leq ، \geq فإننا نعكس الأقواس في مجموعة الحل

بعد بحث الإشارة .

مجال الدالة الكسرية

• الدالة الكسرية :

إذا كان البسط و المقام دوال كثيرات الحدود

المجال = $ع -$ أصفار المقام

أما إذا كان البسط و المقام دالتين مختلفتين أحدهما جذرية

و الأخرى من كثيرات الحدود مثلاً .

المجال = مجال دالة البسط تقاطع مجال دالة المقام فرق أصفار المقام

الدوال كثيرات الحدود :

ما لم تكن معرفة على فترة جزئية أخرى مجالها = $ع$.

نوع الدالة

الدالة الفردية

• الدالة الفردية :

يقال أن الدالة ص = د(س) فردية إذا كانت :

$د(-س) = -د(س)$ أو $د(س) = -د(-س)$ أو $د(س) = -د(-س)$.

أي أن : قيمة الدالة تتغير في حالة التعويض عن س بقيمة سالبة

و تكون الدالة الناتجة عكس الدالة الأصلية و ذلك لجميع س

في مجال د(س) .

بمعنى أن : الاشارات في الدالة الناتجة تتغير جميعاً عن اشارات الدالة

الأصلية . الدالة ليست زوجية و ليست فردية إذا كان :

$د(س) = د(-س)$ أو $د(س) = -د(-س)$ بمعنى تتغير معظم الاشارات و تظل

معظم الاشارات دون تغيير مثل الدالة الكسرية و اللوغاريتمية .

الدالة الزوجية

• الدالة الزوجية :

أن الدالة ص = د(س) إما دالة زوجية إذا كان :

$د(-س) = د(س)$ أو $د(س) = د(-س)$ أو $د(س) = د(-س)$.

نقول أن :

قيمة الدالة لا تتغير في حالة التعويض عن قيمة س لقيمة موجبة

أو سالبة حيث تكون الدالة كما هي و لذلك لجميع قيم س

في مجال د(س) .

بمعنى أن : اشارات الدالة تظل كما هي دون تغير في الدالة

الأصلية و يكون منحنى الدالة متماثل حول محور الصادات .

• الدالة الأحادية :

إذا كان : د : س \leftarrow ص \neq ب ، \neq ص و كان : د(\neq) = د(ب) وهذا يعني : أنه لا يوجد عنصران في الدالة لهما نفس الصورة
الدالة الأحادية بيانياً (اختبار الخط الأفقي)

إذا رسم خط مستقيم يوازي محور السينات و يقطع منحنى الدالة :

في أكثر من نقطة فإن : الدالة ليست أحادية

في نقطة واحدة فإن : الدالة تكون أحادية

مثل الدالة الثابتة و التربيعية و دالة القيمة المطلقة

مثل الدالة الخطية و التكعيبية و الكسرية

الدوال الزوجية بصفة عامة ليست أحادية

الدوال الفردية قد تكون أحادية أو غير أحادية

إذا كانت الدالة في تزايد مستمر أو في تناقص مستمر لجميع القيم

التي تنتمي لجال الدالة . فإن : الدالة تكون أحادية .

الدوال الحقيقية

الدالة الخطية

الصورة العامة : د(س) = \neq س + ب

المجال : ح ما لم تكن الدالة معرفة على فترة جزئية أخرى

المدى : ح إذا كان المجال ح . و إذا كان المجال فترة فإن المدى يكون فترة

الأطراف : الدالة تزايدية إذا كان معامل س $<$ صفر

الدالة تناقصية إذا كان معامل س $>$ صفر

النوع : إذا كان الجزء المقطوع من محور الصادات = صفر

تكون الدالة فردية إذا كان المقطوع من محور الصادات \neq صفر

الدالة ليست زوجية و ليست فردية (أحادية)

الدالة الثابتة :

الصورة العامة : د(س) = \neq

المجال : ح

المدى : { \neq }

الأطراف : الدالة ثابتة على مجالها .

النوع : الدالة زوجية و ليست أحادية .

الدالة التكعيبية

الصورة العامة : د(س) = \neq (س + ب)³ + ح

نقطة التماثل : (- ب ، ح)

المجال : ح ما لم تكن الدالة معرفة على فترة جزئية أخرى

المدى : ح

الأطراف :

الدالة تزايدية على مجالها عندما يكون معامل س³ $<$ صفر

الدالة تناقصية على مجالها عندما يكون معامل س³ $>$ صفر

النوع :

الدالة فردية عندما تكون نقطة تماثلها (0 ، 0)

فيما عدا ذلك تكون الدالة ليست زوجية و ليست فردية .

الدالة التربيعية :

الصورة العامة : د(س) = \neq (س + ب)² + ح

نقطة رأس المنحنى : (- ب ، ح)

المجال : ح ما لم تكن الدالة معرفة على فترة جزئية أخرى

المدى :

إذا كان معامل س² $<$ صفر المدى =] ح ، ∞ [

إذا كان معامل س² $>$ صفر المدى =] ∞ - ، ح [

الأطراف :

عندما يكون \neq $<$ صفر يكون منحنى الدالة لأعلى

و تكون الدالة تناقصية على] ∞ - ، ب [

و تزايدية على] ب ، ∞ [

عندما يكون $p > 0$ صفر يكون منحنى الدالة لأسفل و تكون الدالة تزايدية على $[-\infty, b]$ و تناقصية على $[b, \infty)$ **النوع** : اذا كانت نقطة رأس المنحنى للدالة هي $(0, 0)$ ، $(0, c)$ ، $(c, 0)$ فالدالة تكون زوجية . فيما عدا ذلك فالدالة ليست زوجية و ليست فردية .

دالة المقياس :

الصورة العامة : $D(s) = |s + b| + c$

نقطة تماثلها : $(-b, c)$

اذا كان المنحنى مفتوح لأعلى

المجال : c **المدى :** $[-c, \infty)$

الأطراف : الدالة تناقصية على $[-\infty, -b]$ ، $-b$ ، b و

الدالة تزايدية على $[b, \infty)$

اذا كان المنحنى مفتوح لأسفل

المجال : c **المدى :** $[-\infty, -c]$ ، $-c$ ، c

الأطراف : الدالة تزايدية على $[-\infty, -b]$ ، $-b$ ، b و

الدالة تناقصية على $[b, \infty)$

النوع : الدالة زوجية عندما تكون نقطة تماثلها $(0, c)$ ، $(c, 0)$

فيما عدا ذلك فهي ليست زوجية و ليست فردية و

الدالة ليست أحادية .

الدالة الكسرية

الصورة العامة : $D(s) = \frac{p}{s + b} + c$

نقطة التماثل : $(-b, c)$

المجال : $c - \{b\}$

المدى : $c - \{b\}$

الأطراف :

اذا كان $p < 0$ **فان** : الدالة تكون تناقصية على $[-\infty, -b]$ ، $-b$ ، b و

الدالة تزايدية على $[b, \infty)$

اذا كان $p > 0$ **فان** : الدالة تزايدية على $[-\infty, -b]$ ، $-b$ ، b و

الدالة تناقصية على $[b, \infty)$

النوع : اذا كانت نقطة تماثل الدالة $(0, c)$ ، $(c, 0)$ **فان** : الدالة تكون

متماثلة حول نقطة الأصل و تكون الدالة فردية

اذا كانت نقطة تماثل الدالة لا تساوى $(0, c)$ ، $(c, 0)$ **فان** : الدالة تكون

ليست زوجية و ليست فردية . الدالة **أحادية**

التحويلات الهندسية للدوال**الإزاحة الأفقية**

اذا كانت : $D(s) = D(s + p)$ **ص**

هي نفسها الدالة $D(s)$ و لكن حدث

ولكن حدث لها إزاحة أفقية مقدارها $|p|$

يساراً : اذا كان $p < 0$

يميناً : اذا كان $p > 0$

الإزاحة الرأسية

اذا كانت : $D(s) = D(s) + p$ **ص**

هي نفسها الدالة $D(s)$ و لكن حدث

لها إزاحة رأسية مقدارها $|p|$

لأعلى : اذا كان $p < 0$

لأسفل : اذا كان $p > 0$

انعكاس الدالة

اذا كانت : $D(s) = -D(s)$ **ص**

هي نفسها منحنى الدالة $D(s)$ و لكن حدث

انعكاس .

القيمة المطلقة**خواص القيمة المطلقة :**

$$\checkmark |s| = s \text{ ، } |s| = -s \text{ اذا و فقط } s = 0$$

$$\checkmark |s| = |s|$$

$$\checkmark |s| + |s| \geq |s + s|$$

$$\checkmark |s|^2 = |s^2|$$

$$\checkmark |s| = |s| \text{ ، } |s| \neq s \text{ ، } |s| < s$$

$$\checkmark |s| \leq |s|$$

$$\checkmark |s| \times |s| = |s \times s|$$

$$\checkmark |s - p| = |p - s|$$

$$\sqrt{p} = \sqrt{p} \quad \text{كـ}$$

$$p > |s| \quad \text{كـ} \quad p - s > p \quad \text{كـ}$$

$$\frac{|p|}{|b|} = \frac{p}{b} \quad \text{كـ}$$

$$p < |s| \quad \text{كـ} \quad p < -s \quad \text{كـ} \quad p < s \quad \text{كـ}$$

معادلات القيمة المطلقة :

كـ عند حل معادلات القيمة المطلقة (أى اذا كان ما بداخل القيمة المطلقة مقدار مجهول غير معلوم هل اشارته موجبة أو سالبة)
 فإننا : نضع القيمة المطلقة في طرف و باقى الحدود في طرف ثم بعد ذلك هناك طريقتان لحل المعادلة :

الطريقة الأولى : نربع الطرفين للتخلص من القيمة المطلقة و نحل المعادلة الناتجة .

الطريقة الثانية : تلغى القيمة المطلقة و نضع لأحد طرفي المعادلة اشارتى \pm و نحل المعادلة الناتجة

ملاحظات :

- ◀ بعد حل معادلة القيمة المطلقة يجب أن نتحقق من أن أى قيمة تم إيجادها تحقق معادلة القيمة المطلقة وذلك بالتعويض بهذه القيم في معادلة القيمة المطلقة .
- ◀ اذا كانت معادلة القيمة المطلقة تحتوى على قيمتين مطلقتين مجموعتين أو مطروحتين . فإننا نضع كل قيمة مطلقة في طرف ثم نطبق أحد الطريقتين السابقتين .
- ◀ اذا كان المقدار الذى بداخل القيمة المطلقة مقدارا موجبا معلوم الاشارة فإننا لا نحتاج لحل المعادلة إلى أحد الطريقتين وانما نكفى بالغاء القيمة المطلقة فقط .
- ◀ اذا كان : $|p| = |b + s|$ فإن : $p = b + s$ أو $p = -(b + s)$.
- ◀ اذا كان : $|p| = |b - s|$ فإن : $p = b - s$ أو $p = -(b - s)$.
- ◀ اذا كان : $|p| = |b + s|$ فإن : $p = b + s$ أو $p = -(b + s)$.
- ◀ اذا كان : $|p| = |b - s|$ فإن : $p = b - s$ أو $p = -(b - s)$.

متباينات القيمة المطلقة :

الصورة الأولى	الصورة الثانية	الصورة الثالثة	الصورة الرابعة
اذا كان : $p < s $	اذا كان : $p > s $	اذا كان : $p \leq s $	اذا كان : $p \geq s $
فإن : $p < -s$ ، $p < s$	فإن : $p > -s$ ، $p > s$	فإن : $p \leq -s$ ، $p \leq s$	فإن : $p \geq -s$ ، $p \geq s$
ج.م = $[-s, p]$	ج.م = $[p, -s]$	ج.م = $[-s, p]$	ج.م = $[p, -s]$

$$\text{اذا كان : } |s| \geq 0 \quad \text{فإن : } |s| = 0 \quad \text{فإن : } s = 0$$

$$\text{اذا كان : } |s| > 1 \quad \text{فإن : } \text{مجموعة الحل} = \emptyset$$

$$\text{اذا كان : } |s| < 1 \quad \text{فإن : } \text{مجموعة الحل} = \mathbb{R}$$

$$\text{اذا كان : } |s| > 0 \quad \text{فإن : } \text{مجموعة الحل} = \emptyset$$

$$|p| \leq |b| \Leftrightarrow (p - b)(p + b) \leq 0$$

$$\text{فإن : } |p| \leq |b| \quad \frac{1}{|p|} \geq \frac{1}{|b|}$$

القائمة الثانية

كـ اذا كانت متباينة القيمة المطلقة على الصورة
 $|a| - |b| \leq c$
 يتم تحويل هذه الصورة باستخدام المتباينة المثلثية :
 $|a| - |b| \leq |a + b|$
 إلى الصورة $|a| - |b| \leq |a + b| \leq c$
 و يكون حل المتباينة كالآتي : $|a| - |b| \leq c$

القائمة الأولى

كـ اذا كانت متباينة القيمة المطلقة على الصورة
 $|a| + |b| \geq c$
 يتم تحويل هذه الصورة باستخدام المتباينة المثلثية :
 $|a| + |b| \geq |a + b|$
 إلى الصورة $|a| + |b| \geq |a + b| \geq c$
 و يكون حل المتباينة كالآتي : $|a| + |b| \geq c$

الحل البياني :

تعتمد فكرة الحل على تقسيم المعادلة أو المتباينة إلى دالتين و تمثيل كلا منهما على حدة و تكون مجموعة الحل هي الاحداثيات السينية

القائمة الثالثة

كـ اذا كانت متباينة القيمة المطلقة على الصورة
 $|a| + |b| = c$
 يتم تحويل هذه الصورة باستخدام المتباينة المثلثية :
 $|a| + |b| \geq |a + b|$
 إلى الصورة $|a| + |b| \geq |a + b| = c$
 و يكون حل المتباينة كالآتي : $|a| + |b| \geq c$

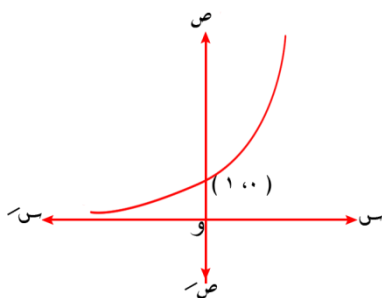
الدالة الأسية

الدالة الأسية

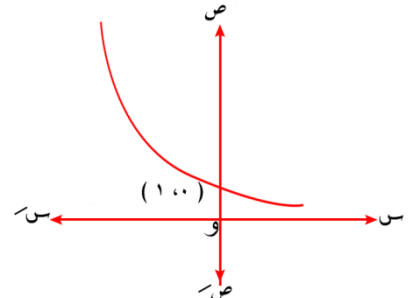
كـ هي الدالة التي يكون فيها المتغير المستقل س هو الأساس و الأس يكون عدد حقيقي مثل : $s^2 + 5$ و الأساس يكون عدد حقيقي مثل : $s = 2$
 • اذا كان : $d : c \leftarrow c^+$ و كان : p عدد حقيقي موجب ، $p \neq 1$
 فان : $d(s) = p^s$ دالة أسية مجالها c و أسها المتغير s و أساسها $p \in c^+ - \{1\}$.

الدالة الجبرية

• $d(s) = p^s$ ، $1 < p$
 المنحنى يقع بأكمله أعلى محور السينات و يقطع محور الصادات في النقطة $(1, 0)$
 المجال = c ، المدى = c^+
 الأطراد : الدالة تزايدية على المجال .
 النوع : ليست زوجية و ليست فردية . الدالة أحادية .



• $d(s) = p^s$ ، $0 < p < 1$
 المنحنى يقع بأكمله أعلى محور السينات و يقطع محور الصادات في النقطة $(1, 0)$
 المجال = c ، المدى = c^+
 الأطراد : الدالة تناقصية على المجال .
 النوع : ليست زوجية و ليست فردية . الدالة أحادية .



• د(س) = $s^2 - 1$ ، $1 > s > 0$ ،
 المنحنى يقع بأكمله أسفل محور السينات و يقطع محور الصادات
 في النقطة (0 ، -1)

المجال = ح ، المدى = ح⁻

الأطراد : الدالة تزايدية على المجال .

النوع : ليست زوجية و ليست فردية . الدالة أحادية .

• د(س) = s^2 ، $1 < s$ ،
 د(س) = s^2 ، $1 > s > 0$ ،
 يتقاطع المنحنيان في النقطة (1 ، 0)

و يمر بهما كمحور تماثل لهما محور الصادات
 الذي معدلته س = صفر

• د(س) = $s^2 - 1$ ، $1 < s$ ،
 المنحنى يقع بأكمله أسفل محور السينات و يقطع محور الصادات في النقطة (0 ، -1)
 المجال = ح ، المدى = ح⁻
 الأطراد : الدالة تناقصية على المجال ..
 النوع : ليست زوجية و ليست فردية . الدالة أحادية .

المدى للدالة الأسية التي تكون على الصورة : د(س) = $ps^b + c$ هو

إذا كان : د موجب فان : المدى = $]-\infty ، ح[$ إذا كان : د سالب فان : المدى = $]-\infty ، ح[$

مثال إذا كانت : د(س) = $s^2 - 2$ فاثبت أن : $\frac{d(3s+3) - d(1+3s)}{d(3s) - d(3-1)} = 6$

جميعا نعرف طريقة الحل المعتادة فدعنا نرى الجديد :

ضع س = 1 أو أى عدد آخر في المقدار $\frac{d(3s+3) - d(1+3s)}{d(3s) - d(3-1)}$

$$\frac{d(6) - d(4)}{d(6) - d(2)} = \frac{6 - 4}{6 - 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

خلي بالك

- $\sqrt[n]{p} = p^{\frac{1}{n}}$ حيث $p \neq 0$
- $\sqrt[n]{(p)^m} = (\sqrt[n]{p})^m$
- $\sqrt[n]{(p)^m} = \sqrt[n]{p^m}$
- $\sqrt[n]{p} = \sqrt[n]{p^m}^{\frac{1}{m}}$ حيث n عدد زوجي
- $\sqrt[n]{p} = \sqrt[n]{p^m}^{\frac{1}{m}}$ حيث n عدد زوجي
- $\sqrt[n]{(p \pm q)} \neq \sqrt[n]{p} \pm \sqrt[n]{q}$
- إذا كان : س = $\sqrt[n]{p}$ حيث م عدد فردي
- $\sqrt[n]{p} = \sqrt[n]{p^m}$ حيث م عدد فردي
- $\sqrt[n]{p} = \sqrt[n]{p^m}$ حيث م عدد فردي
- $\sqrt[n]{\left(\frac{p}{q}\right)} = \frac{\sqrt[n]{p}}{\sqrt[n]{q}}$
- $\sqrt[n]{\left(\frac{p}{q}\right)^m} = \left(\frac{\sqrt[n]{p}}{\sqrt[n]{q}}\right)^m$
- $\sqrt[n]{p} \times \sqrt[n]{q} = \sqrt[n]{p \times q}$
- $\sqrt[n]{p} = \sqrt[n]{p^m}$ حيث م عدد فردي

الدالة اللوغاريتمية

الدالة اللوغاريتمية :

ك هي الدالة العكسية للدالة الأسية و يعرف لوغاريتم عدد ما بالنسبة لأساس ما بأنه الأس المرفوع على الأساس و الذي سينتج ذلك العدد .

ك فعلى سبيل المثال : لوغاريتم ١٠٠٠ بالنسبة للأساس ١٠ هو ٣ لأن : $1000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3$

و عموما يمكن القول أنه : اذا كان : $s = p$ فان : لوغاريتم s بالنسبة للأساس p هو s

ويعبر عن ذلك رياضيا بالعلاقة : $\log_p s = s$

$s = \log_p s \Leftrightarrow s = p \Leftrightarrow s \in \{1\}$ ، حيث : $s \in \mathbb{R}^+$ ، $s \in \mathbb{R}^+$ ، $s \in \mathbb{R}^+$.

ك لا معنى للحديث عن لوغاريتم عدد غير موجب

ك لا معنى له .

الصحيح و يترتب على ذلك أن كلامنا : $\log_p -1$ ، $\log_p 0$.

$\log_p 1 = 0$ ، $\log_p 0 = \text{مفرد}$	$\log_p s = \text{عدد حقيقي}$
$\log_p b = \log_p a \Leftrightarrow b = a^s$	$\log_p s + \log_p t = \log_p (s \cdot t)$
$\log_p b = \log_p a^s$	$\log_p s - \log_p t = \log_p \frac{s}{t}$
$\log_p a = \log_p a^s$	$\log_p s^t = t \log_p s$
$\log_p \frac{a}{b} = \log_p a - \log_p b$	$\log_p s \cdot \log_p t = \log_p (s^t)$
$\log_p a = \log_p a^s$	$\log_p \frac{1}{s} = -\log_p s$
$\log_p s \cdot \log_p t = \log_p (s^t)$	$\log_p s$ غير معرف
$\log_p s \cdot \log_p t = \log_p (s^t)$	$\log_p \frac{1}{s} = -\log_p s$
$\log_p s = \log_p s$	$\log_p \frac{1}{s} = -\log_p s$

لا معنى له .

ك اللوغاريتم المعتاد الذي أساسه ١٠ وقد اتفق على حذف هذا الأساس .

ك عند كتابة اللوغاريتم مثل : $\log_8 8$ نكتب : $\log_8 8$

ك في تركيب دالتين اذا اعطى دالة التركيب و كانت الدالة الثانية دالة أسية فان :

الدالة الأولى تكون لوغاريتمية على الصورة $\log_p s$.

بعض خواص الدالة اللوغاريتمية :

ك د : د (س) = $\log_p s$ المجال : \mathbb{R}^+ المدى : \mathbb{R}

الدالة اللوغاريتمية تزايدية عندما $p < 1$ و تناقصية عندما $p > 1$

جميع منحنيات الدوال اللوغاريتمية لأي أساس موجب $\neq 1$ تمر بالنقطة (١ ، ٠)

الدالة اللوغاريتمية هي دالة أحادية أي أنه اذا كان : $\log_p s = \log_p t$ فان $s = t$

ك $\log_p (s + t) \neq \log_p s + \log_p t$

ك $\log_p (s \cdot t) \neq \log_p s + \log_p t$

ك اذا كان : $\log_p s = \log_p t$... $\log_p s = \log_p t$ فان : $s = t$

• أوجد مجال الدالة الأتية $\log_p s = \log_p (s-3)$		
الحل		
الدالة معرفة لجميع قيم s التي تحقق أن		
$s > 0$	$s - 3 > 0$	$s - 3 \neq 1$
أي تحقق أن		
$s > 0$	$s > 3$	$s \neq 4$
∴ مجال الدالة $D =]3, 4[\cup]4, \infty[$		

الدالة العكسية

الدالة العكسية :

- ☞ إذا كانت الدالة د(س) أحادية من المجموعة س إلى المجموعة ص
 فان : الدالة د⁻¹ (س) تسمى دالة عكسية للدالة د(س) من ص إلى س لكل (س ، ص) \Rightarrow د(س) ، (ص ، س) \Rightarrow د⁻¹(س)
 ☞ منحني الدالة د(س) هو منحني الدالة د⁻¹ (س) بالانعكاس حول المستقيم س = ص
 ☞ لكي تكون الدالة لها دالة عكسية يجب أن تكون الدالة أحادية و إذا لم تكن أحادية فإنه لا يوجد لها دالة عكسية .
 ☞ تكون الدالة د(س) دالة عكسية للدالة د(س) ، س(س) دالة عكسية للدالة د(س) إذا كان :
 (د س) (س) = (س د) (س) = س

إيجاد الدالة العكسية :

- ☞ نضع ص مكان د(س)
 ☞ نستبدل كل س بـ ص و كل ص بـ س
 ☞ نحصل على ص بدلالة س .
 ☞ و يكون مجال الدالة الأصلية = مدى الدالة العكسية
 و مدى الدالة الاصلية = مجال الدالة العكسية .

الدالة العكسية للدالة الكسرية :

$$\text{☞ إذا كان د(س) = } \frac{اس + ب}{جس + د}$$

$$\text{فان : د}^{-1} \text{(س) = } \frac{س - د}{جس + د}$$

$$\text{☞ نقطة التماثل = (أصفار المقام ، } \frac{\text{معامل س}}{\text{معامل س}} \text{)}$$

$$= \left(\frac{ب}{ج} ، \frac{د-ب}{ج} \right)$$

$$\text{إذا كان : } \frac{ب}{ج} > \text{صفر (أول و ثالث)}$$

$$\text{إذا كان : } \frac{ب}{ج} < \text{صفر (ثاني و رابع)}$$

Math United

(النهايات)

أنواع الكميات

✓ **الكميات المعينة** : هي الكميات التي لها ناتج محدد مثلاً : $9 = 3 \times 3$

✓ **الكميات الغير معرفة** : هي الكميات التي ليس لها قيمة أو ليس لها معنى مثل : $\frac{p}{q}$ حيث : $p \neq 0$

✓ **الكميات الغير معينة** : هي الكميات التي ليس لها ناتج محدد و يكون لها عدد لا نهائي من الحلول .

نهاية الدالة جبرياً

∞	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{\infty}{0}$	$\frac{0}{\infty}$
$\infty - \infty$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{\infty}{0}$	$\frac{0}{\infty}$
$\infty \times \infty$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{\infty}{0}$	$\frac{0}{\infty}$
∞	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{\infty}{0}$	$\frac{0}{\infty}$

مثال : $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

◀ **نهاية الدالة الثابتة** : هي الثابت نفسه

◀ **نهاية الدوال كثيرات الحدود** : التعويض في الدالة بالقيمة التي تؤول اليها s مثال : $\lim_{s \rightarrow d} (s) = d$

◀ **نهاية الدالة الكسرية** : $\lim_{s \rightarrow p} \frac{s}{r}$

التعويض في الدالة بالقيمة التي تؤول اليها . فان قيمة النهاية تكون على إحدى صور ثلاثة :

كمية غير معرفة	كمية غير معرفة	كمية معينة
الدالة لها نهاية و نحصل عليها باختزال العامل الصفري و ذلك بالاتي :	النهاية غير موجودة	هي قيمة النهاية

الضرب في المرافق

في بعض مسائل النهايات يوجد مقدار مكون من حدين في البسط و المقام أحدهما أو كليهما يوجد به جذر أو جذرين بينهما إشارة سالب ولايجاد قيمة النهاية نستخدم مرافق الجذر التربيعي :

مرافق الجذر التربيعي

مرافقه	المقدار
$\sqrt{b} + \sqrt{b}$	$\sqrt{b} - \sqrt{b}$

مرافق الجذر التكعيبي

مرافقه	المقدار
$\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{b}$
$\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b}$

القسمة المطولة و التركيبية

في بعض الأمثلة التي يكون فيها درجة البسط أو المقام أو كليهما أعلى من الدرجة الثانية يجد الطالب صعوبة في تحليل هذه المقادير إلى عواملها الأولية فلذلك نتبع مجموع من الطرق المختلفة للوصول إلى الحل

طريقة بديلة

في مسائل النهايات يكون هناك في البسط أو المقام مقدار من الدرجة الثالثة يصعب تحليله .

الحل : اذا كان : l, m, n هي جذور مقدار الدالة الثالثة

$$s^3 + b s^2 + c s + d = (s - l)(s - m)(s - n)$$

و لنفترض أن الجذر n معلوم القيمة = العدد الذي تؤول اليه s

$$\frac{s - n}{p} = l m \quad \frac{s - n}{p} = l + m + n$$

$$[(s - n) - (l + m + n)] = (s - n) - (l + m + n)$$

نظرية (4) القانون

شروط النظرية

نتائج

$$\begin{aligned} \bullet \text{ هنا } \frac{س^{\sim} - س^{\sim}}{س - س} &= (س) \frac{س^{\sim} - س^{\sim}}{س - س} \\ \bullet \text{ هنا } \frac{س^{\sim} - س^{\sim}}{س - س} \times \frac{س}{س} &= \frac{س^{\sim} - س^{\sim}}{س - س} \\ \bullet \text{ هنا } \frac{س^{\sim} - س^{\sim}(س + س)}{س} &= (س) \frac{س^{\sim} - س^{\sim}}{س} \end{aligned}$$

• أن يكون عدد حدود البسط مساوية لعدد حدود المقام

• أن تكون أسس البسط متساوية و أسس المقام متساوية

• أن تكون الإشارة بين الحدين في البسط و المقام سالب .

• إياك أن تحفظ سوى هذه الثلاث قوانين . فان استعصى عليك الحل فلا بد من زرع المقام فيكون الحل .

$$\text{مثال} \quad \frac{س}{س - 9} \quad \text{أوجد قيمة : هنا}$$

مثال

عند التعويض المباشر نجد أن قيمة النهاية = صفر

الحل

و هنا لا نسلم بقيمة النتائج هذا و إنما نقوم ببحث مجال الدالة و هي دالة جذرية دليلها زوجي

إذا مجالها ما تحت الجذر \leq صفر فنجد أن : المجال $[-9, \infty]$

فنجد أن النقطة التي سنقوم بالتعويض لها نقطة حدية في المجال و بالتالي تكون النهاية فير موجودة .

$$\text{هنا} \quad \frac{س^2 + س + ب}{س - ل} = م \quad \text{فأوجد قيمة } ل, ب$$

لايجاد الجاهيل :

الجذر الأول للبسط = العدد الذي تؤول إليه . ، الجذر الثاني للبسط = الجذر الأول - قيمة النهاية

الحل

$$\text{هنا} \quad \frac{س^{\sim}}{س} \leq (س) \quad \text{إذا كان : حيث : } س \text{ عدد زوجي}$$

ملحوظة هامة

$$\text{هنا} \quad \frac{س^{\sim}}{س} \leq (س) \quad \text{فإننا نوجد : فإذا كانت : هنا} \quad \frac{س^{\sim}}{س} \leq (س) = 0$$

فإننا ندرس مجال الدالة . فإذا كانت النقطة التي تؤول إليها من نقطة حدية في المجال أى بداية المجال أو نهايته

فإن : النهاية تكون غير موجودة .

نهاية الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة :

$$\text{هنا} \quad \frac{س^{\sim}}{س} = (س) \quad \text{هنا} \quad \frac{س^{\sim}}{س} = (س) \quad \text{عددًا حقيقياً}$$

• هذا النوع من الدوال له نهايتان : عند القيمة التي يتغير عندها تعريف الدالة

و الاخرى نهاية يسرى و يرمز لها بالرمز $\frac{س^{\sim}}{س}$ و في هذه

احدهما النهاية اليمنى و يرمز لها بالرمز $\frac{س^{\sim}}{س}$

الحالة نعين نهاية القاعدة الموجودة أمام علامة اصغر و نقوم بتعيين قيمة

وفي هذه الحالة نعين نهاية القاعدة $\frac{س^{\sim}}{س}$ = الموجودة

الدالة من القاعدة ه (س) و لكي تكون نهاية الدالة موجودة لا بد أن

امام علامة أكبر من

يتحقق : هنا $\frac{س^{\sim}}{س} = (س) \quad \text{هنا} \quad \frac{س^{\sim}}{س} = (س) \quad \text{عددًا حقيقياً}$

- هذا النوع من الدوال له نمائتان : عند القيمة التي يتغير عندها تعريف الدالة و لكن دائما النهاية اليمنى تساوى النهاية اليسرى في هذا النوع من الدوال

$$: \text{نها} \left(\begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow - \end{matrix} \right) (س) = \text{نها} \left(\begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow - \end{matrix} \right) (س)$$

- أى نحسب النهاية من عند الدالة التي يكون عندها علامة لا تساوى
- و اذا كانت : الدالة على صورة القيمة المطلقة $\text{نها} |x(s)|$ او في هذه الحالة نعيد تعريف دالة القيمة المطلقة . الي دالة معرفة بأكثر من قاعدة كما ذكرنا في الحالات الثلاثة السابقة

نهاية الدالة عندما لا نهاية

اذا كانت المسألة تحتوى على جذور :

- نخرج المتغير من تحت الجذر و نقارنه بالمتغيرات التي توجد خارج الجذر لمعرفة أى الأس أكبر .

نهاية الدالة بمجرد النظر :

قيمة النهاية	الشرط
$\frac{\text{معامل أكبر أس فى البسط}}{\text{معامل أكبر أس فى المقام}}$	إذا كانت درجة البسط تساوى درجة المقام
صفر	إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام
$\infty \pm$	إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام

نهاية الدوال المثلثية

$\text{نها} \left(\begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow - \end{matrix} \right) \text{جانس} = 1$	$\text{نها} \left(\begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow - \end{matrix} \right) \frac{\text{ظاس}}{\text{س}} = 1$	$\text{نها} \left(\begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow - \end{matrix} \right) \frac{\text{جانس}}{\text{س}} = 1$
$\text{نها} \left(\begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow - \end{matrix} \right) \frac{\text{جانس}}{\text{س}} = \frac{1}{\cdot}$	$\text{نها} \left(\begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow - \end{matrix} \right) \frac{\text{ظاس}}{\text{س}} = \frac{1}{\cdot}$	$\text{نها} \left(\begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow - \end{matrix} \right) \frac{\text{جانس}}{\text{س}} = \frac{1}{\cdot}$
$\text{نها} \left(\begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow - \end{matrix} \right) \frac{\text{جانس} - 1}{\text{س}} = 0$	$\text{نها} \left(\begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow - \end{matrix} \right) \frac{\text{ظاس}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\cdot}$	$\text{نها} \left(\begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow - \end{matrix} \right) \frac{\text{جانس}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\cdot}$
$\text{نها} \left(\begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow - \end{matrix} \right) \frac{\text{جانس} - 1}{\text{ب}} = 0$	$\text{نها} \left(\begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow - \end{matrix} \right) \frac{\text{ظاس}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\cdot}$	$\text{نها} \left(\begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow - \end{matrix} \right) \frac{\text{جانس}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\cdot}$
$\text{نها} \left(\begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow - \end{matrix} \right) \frac{\text{جانس} - 1}{\text{ب}} = \frac{1}{\cdot}$	$\text{نها} \left(\begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow - \end{matrix} \right) \frac{\text{جانس} - 1}{\text{ب}} = \frac{1}{\cdot}$	$\text{نها} \left(\begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow - \end{matrix} \right) \frac{\text{جانس}}{\text{ب}} = \frac{1}{\cdot}$
$\text{نها} \left(\begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow - \end{matrix} \right) \frac{\text{جانس} - 1}{\text{ب}} = \frac{1}{\cdot}$	$\text{نها} \left(\begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow - \end{matrix} \right) \frac{\text{جانس} - 1}{\text{ب}} = \frac{1}{\cdot}$	$\text{نها} \left(\begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow - \end{matrix} \right) \frac{\text{جانس}}{\text{ب}} = \frac{1}{\cdot}$

شرط حل المسألة :

- في هذا النوع من المسائل اذا كانت الدالة على الصورة القياسية نقوم بقسمة البسط و المقام على المتغير ذا أكبر أس في المسألة .
- و اذا كانت غير قياسية : نقوم بالضرب في مرافق البسط بسطا و مقاما

الصورة القياسية	الصورة الغير قياسية
$\text{نها} \left(\begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow - \end{matrix} \right) \frac{\text{س}^2 + 5\text{س} + 4}{\text{س}^3 + \text{س}}$	$\text{نها} \left(\begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow - \end{matrix} \right) \sqrt{\text{س}^2 + 1} - \text{س}$

اذا كانت المسألة :

$$\begin{aligned} \text{نها} \left(\begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow - \end{matrix} \right) \frac{1}{\text{س}} &= 0 \\ \text{نها} \left(\begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow - \end{matrix} \right) \frac{\text{ب}}{\text{س}} &= 0 \\ \text{نها} \left(\begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow - \end{matrix} \right) \frac{\text{ب}}{\text{س}^n} &= 0 \\ \text{نها} \left(\begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow - \end{matrix} \right) \text{س}^n &= \infty \end{aligned}$$

- في هذا النوع من المسائل الى تؤول فيه النهاية الي ∞ فإننا :
نقسم البسط و المقام على المتغير ذا أكبر أس موجود في المسألة .

الاتصال :

- يقال للدالة أنها متصلة عند النقطة $\text{س} = \text{ب}$ اذا حققت الشروط التالية
 - الدالة معرفة : أى أن $\text{د}(\text{ب})$ لها وجود
 - الدالة لها نهاية : أى ان $\text{نها} \left(\begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow - \end{matrix} \right) \text{س} = \text{ب}$ لها وجود
 - قيمة الدالة = قيمة النهاية

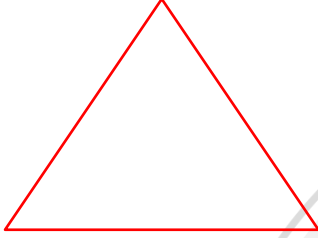
ويكفى عدم تحقق شرط واحد من الشروط الثلاثة السابقة للحكم على عدم اتصال الدالة عند النقطة $\text{س} = \text{ب}$.

حساب المثلثات

صيغة القانون :

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

محيط المثلث =



قانون الجيب :

في أي مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المناظرة لها .

استنتاج القانون :

مساحة المثلث = $\frac{1}{2} \times$ حاصل ضرب أي ضلعين في جيب الزاوية بينهما .

بالقسمة على : $\frac{1}{2} \times$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{1}{2} \times b \times c \times \sin A = \frac{1}{2} \times a \times c \times \sin B = \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin C$$

$$\frac{b \times c \times \sin A}{\sin A} = \frac{a \times c \times \sin B}{\sin B} = \frac{a \times b \times \sin C}{\sin C}$$

$$\therefore \frac{b \times c}{\sin A} = \frac{a \times c}{\sin B} = \frac{a \times b}{\sin C}$$

محيط الدائرة = $2\pi r$ نوه

مساحة الدائرة = πr^2 نوه

محيط المثلث = $a + b + c$

مساحة المثلث = $\frac{1}{2} \times$ القاعدة \times الارتفاع

$$\frac{1}{2} \times b \times c \times \sin A = \frac{1}{2} \times a \times c \times \sin B = \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin C$$

$$= \frac{a \times b \times c \times \sin A}{2 \times \sin A} = \frac{a \times b \times c \times \sin B}{2 \times \sin B} = \frac{a \times b \times c \times \sin C}{2 \times \sin C}$$

حيث : c هي نصف المحيط

جيب التمام

قوانين جيب التمام

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

قانون جيب التمام :

إيجاد الزاوية المحصورة بين ضلعين بمعلومية أضلاع المثلث

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

لايجاد قياس زاوية داخل مثلث يفضل استخدام قانون جيب التمام ؟ لان : جيب التمام يوضح نوع الزاوية فاذا كان :

كجيب التمام (موجب) فان الزاوية تكون حادة

كجيب التمام يساوي (صفر) فان الزاوية تكون قائمة

كجيب التمام يساوي (سالب) فان الزاوية تكون منفرجة

لاشبات أن الشكل رباعي دائري :

لابد من اثبات أن :

كل زاويتان متقابلتين متكاملتان .

كل زاوية خارجة عن الشكل = قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها .

كل زاويتان مرسومتان على نفس القاعدة و في جهة واحدة

كل زاويتان مرسومتان على نفس القاعدة و في جهة واحدة متساويتان في القياس

لاشبات أن الشكل متوازي أضلاع :

لابد من اثبات أن :

كل ضلعين متقابلين متساويان في الطول .

كل زاويتان متقابلتان متساويتان في القياس

كل زاويتين متتاليتين متكاملتان

كل القطران كل منهما ينصف الآخر

تذكر أن إذا كان $\theta = - \phi$ جتا $\theta = \phi$ فان $\theta + \phi = 180^\circ$.