

سلسلة

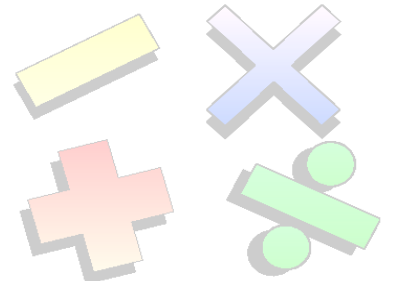
الأوائل

في

الهندسة

للصف الأول الثانوي

إعداد م / وليد شادي



المتجهات

الكمية القياسية :

هي الكمية التي يلتفى لتعيينها معرفة مقدارها فقط مثل الطول و المساحة و الزمن و الكتلة ودرجة الحرارة الخ وقد تكون موجبة أو سالبة أو صفر

الكمية المتجهة

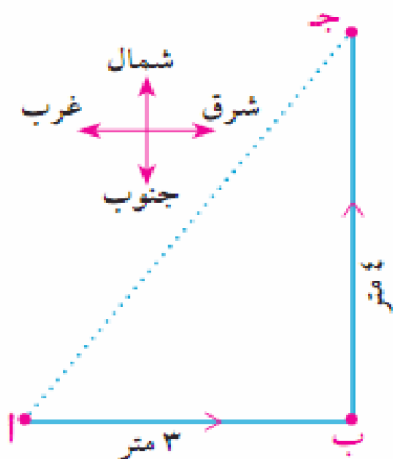
هي الكمية التي لا تنعكس تماما إلا إذا عرفت مقدارها واتجاهها مثل سرعة الجسم و القوة

مثال (1)

في الشكل المقابل :

إذا تحرك جسم من النقطة م مسافة ٣ أمتار شرقا ثم غير اتجاهه وسار ٤ أمتار شمالا وتوقف عند النقطة ج كم المسافة المقطوعة أثناء حركة الجسم ؟

لاحظ أن :



المسافة :

هي كمية قياسية وهي ناتج : $M + B$ أو $B + J$ أو $J + M$
 $\therefore$ المسافة المقطوعة $= 3 + 4 = 7$ أمتار

كم يكون بعد الجسم عن النقطة م وهي النقطة التي بدأ منها الحركة ؟

الازاحة :

وهي المسافة بين نقطتي البداية والنهاية فقط وفي اتجاه واحد من م إلى ج ، أي أن لوصف الإزاحة يلزم تحديد مقدارها م واتجاهها من م إلى ج

فالأزاحة :

هي كمية متجهة وهي المسافة المقطوعة في اتجاه معين .
 بعد الجسم عن م $= M = J = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ أمتار

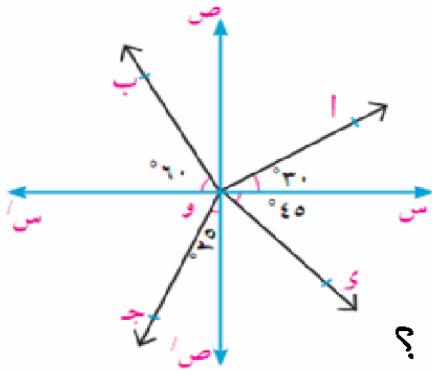
مثال [٢] في الشكل المقابل :

احسب المسافة والإزاحة الحادثة عندما يتحرك جسم من النقطة م إلى النقطة ج ثم يعود إلى النقطة ب .

المسافة المقطوعة = م ب + ب ج + ج ب = ٦ + ٤ + ٤ = ١٤ سم
لإيجاد الإزاحة المطلوبة نفرض أن الإزاحة في اتجاه م ج هي الاتجاه الموجب
الإزاحة المطلوبة = ٦ + ٤ - ٤ = ٦ سم

٥ الاتجاه

كل شعاع في المستوى يعينه اتجاهها

مثال [٣] في الشكل المقابل :

و $\overrightarrow{ش}$ يحدد اتجاه الشرق ، و $\overrightarrow{ص}$ يحدد اتجاه الغرب ،
و $\overrightarrow{ص}$ يحدد اتجاه الشمال ، و $\overrightarrow{ج}$ يحدد اتجاه الجنوب ،

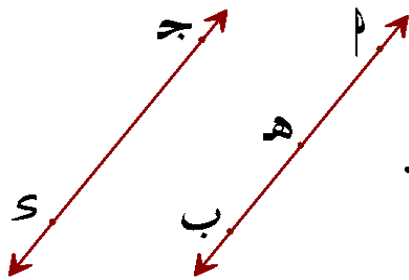
ما الاتجاهات التي يحددها كل من : $\overrightarrow{م}$ ، $\overrightarrow{و}$ ، $\overrightarrow{ج}$ ، $\overrightarrow{س}$ ؟

- | | |
|--|--|
| ١) $\overrightarrow{م}$ اتجاه ٣٠° شمال الشرق | ٢) $\overrightarrow{و}$ اتجاه ٦٠° شمال الغرب |
| ٣) $\overrightarrow{ج}$ اتجاه ٢٠° غرب الجنوب | ٤) $\overrightarrow{س}$ اتجاه ٤٠° جنوب الشرق |

ملاحظات هامة :**مثال [٤] في الشكل المقابل :**

٢) إذا كان : $\overrightarrow{م} \parallel \overrightarrow{ج}$ ، ه $\Rightarrow \overrightarrow{م} \parallel \overrightarrow{ج}$ فان :

- ١) ه $\overrightarrow{م}$ ، ب ه $\overrightarrow{ج}$ لهما نفس الاتجاه ويحملهما مستقيم واحد .
- ٢) ه $\overrightarrow{م}$ ، س ه $\overrightarrow{ج}$ لهما نفس الاتجاه ، ويحملهما مستقيمان متوازيان .
- ٣) ه $\overrightarrow{م}$ ، ه ب $\overrightarrow{ج}$ في اتجاهين متضادين ويحملهما مستقيم واحد .
- ٤) ه $\overrightarrow{م}$ ، ج ه $\overrightarrow{ج}$ في اتجاهين متضادين ويحملهما مستقيمان متوازيان .



١ الشعاعان المتحدان في الاتجاه أو متضادان في الاتجاه

يكونان : إما يجمعهما مستقيم واحد أو إما مستقيمان متوازيان ، والعكس صحيح .

٢ الشعاعان المختلفان في الاتجاه :

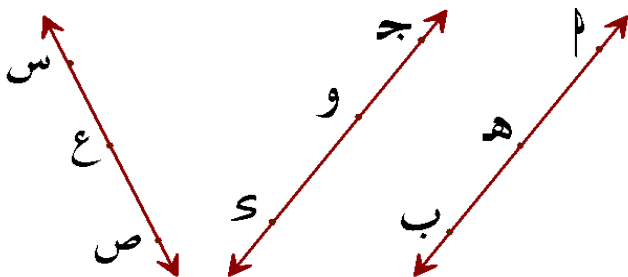
يكونان : إما لا يملك أن يحملهما مستقيم واحد أو لا يملك أن يكونا مستقيمان متوازيان .

حاول أن تقل :

مثال [۶]

في الشكل المقابل :

م ، ج ، متوازيان وکے منہما لا یوازی ص ، ه ، م ، ب ، و ، ج ، ع ، ص ، م .
یہ ما إذا كان الشعاعان في كل مما يأتي متحدين في الاتجاه أو متضادين في الاتجاه أو مختلفي الاتجاه .



- $\overleftarrow{\text{up}} \text{ } \omega$, $\overleftarrow{\text{u}} \text{ } \text{p}$ ②
 $\overleftarrow{\text{u}} \text{ } \varepsilon$, $\overleftarrow{\text{up}} \text{ } \varepsilon$ ④
 $\overleftarrow{\text{up}} \text{ } \varepsilon$, $\overleftarrow{\text{u}} \text{ } \varepsilon$ ⑥

الحل

- | | | |
|--------------------|--|--------------------|
| متضاديه في الاتجاه | <p>١ $\overrightarrow{ا ب} , \overrightarrow{و ا}$</p> <p>٢ $\overrightarrow{ب ا} , \overrightarrow{ا ب}$</p> | مختلفي الاتجاه |
| متضاديه في الاتجاه | <p>٣ $\overrightarrow{ا ب} , \overrightarrow{ب هـ}$</p> <p>٤ $\overrightarrow{ا ب} , \overrightarrow{ا ج}$</p> | متضاديه في الاتجاه |
| متضاديه في الاتجاه | <p>٥ $\overrightarrow{ا ب} , \overrightarrow{ا ج}$</p> <p>٦ $\overrightarrow{ا ب} , \overrightarrow{ا ج}$</p> | متضاديه في الاتجاه |



القطعة المستقيمة الموجهة

هل $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ ؟ هل $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ ؟ فسر إجابتك



الإجابة : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ لأن طول $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ طول $\overrightarrow{AB}$

بينما $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$ لأن لهما نفس الطول بينما ليس لهما نفس الاتجاه

هل $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{BA}$ مختلفان أم متضادان في الاتجاه ؟ وماذا ؟

$\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{BA}$ متضادان في الاتجاه لأن : يحملهما مستقيم واحد .

القطعة المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{AB}$

تحدد تما ما بثلاث عناصر هي ① نقطة البداية ② نقطة النهاية

③ الاتجاه من نقطة البداية إلى نقطة النهاية

طول القطعة المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{AB}$

هو البعدي AB ، أي أن طول $\overrightarrow{AB} = AB$

حيث $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$ بينما $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$

مقياس القطعة المستقيمة الموجهة :

مقياس $\overrightarrow{AB}$ هو طول $\overrightarrow{AB}$ ويرمز له بالرمز $\|\overrightarrow{AB}\|$.

لاحظ أن : $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BA}\|$ ، $AB = BA$

مقياس المتجه $\overrightarrow{AB}$

مقياس المتجه $\overrightarrow{AB} = (a, b)$ هو $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$

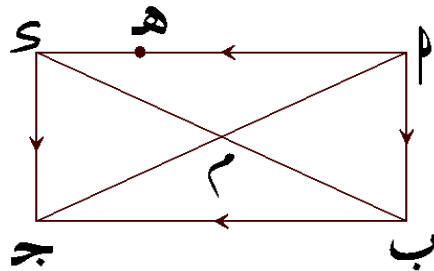
تكافؤ قطعتين مستقيمتين موجهتين

تكافؤ القطعتان المستقيمتان الموجهتان إذا كان لهما نفس الطول (المعيار) ونفس الاتجاه بمعنى إذا كانت $\vec{AB}$ تكافئ $\vec{CD}$ فإن : $\vec{AB} = \vec{CD}$ كما أن $\vec{AB} \parallel \vec{CD}$ والعكس غير صحيح

ملاحظة هامة

إذا كانت $\vec{AB}$ تكافئ $\vec{CD}$ مثلاً فإننا سنكتب ذلك : $\vec{AB} = \vec{CD}$

مثال [U] في الشكل المقابل :



$\vec{AB}$ و $\vec{CD}$ مستطيل تقاطع قطراه في م ، هـ $\exists \vec{AB} \parallel \vec{CD}$ فيكون :

$\vec{AB} \parallel \vec{CD}$ ويساويه ، $\vec{AB} \parallel \vec{CD}$ ويساويه ،

$$\vec{AB} = \vec{CD} = \vec{AC} = \vec{BD}$$

① $\vec{AB} \parallel \vec{CD} = \parallel \vec{AC} \parallel$ واتجاه $\vec{AB}$ هو نفس اتجاه $\vec{AC}$

$\therefore \vec{AB}$ تكافئ $\vec{AC}$

② $\vec{AB} \parallel \vec{CD} = \parallel \vec{BD} \parallel$ واتجاه $\vec{AB}$ هو نفس اتجاه $\vec{BD}$

$\therefore \vec{AB}$ تكافئ $\vec{BD}$

③ $\vec{AB} \parallel \vec{CD} = \parallel \vec{AD} \parallel$ واتجاه $\vec{AB}$ يختلف عن اتجاه $\vec{AD}$

$\therefore \vec{AB}$ لا تكافئ $\vec{AD}$

④ $\vec{AB} \parallel \vec{CD} \neq \parallel \vec{BC} \parallel$ واتجاه $\vec{AB}$ هو نفس اتجاه $\vec{BC}$

$\therefore \vec{AB}$ لا تكافئ $\vec{BC}$

مثال [N] في الشكل المقابل :



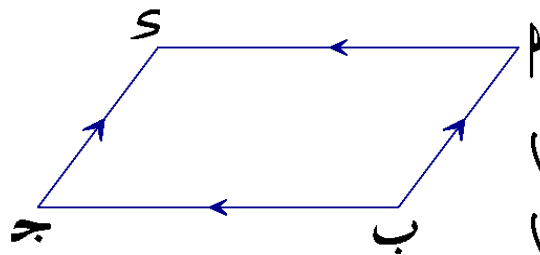
إذا كانت م منتصف $\vec{AB}$ فإن :

① $\vec{AM}$ تكافئ $\vec{MB}$ (لأن لهما نفس الطول ونفس الاتجاه)

② $\vec{BN}$ تكافئ $\vec{NM}$ (لأن لهما نفس الطول ونفس الاتجاه)

③ $\vec{AM}$ لا تكافئ $\vec{BN}$ (لأنهما متضادان في الاتجاه)

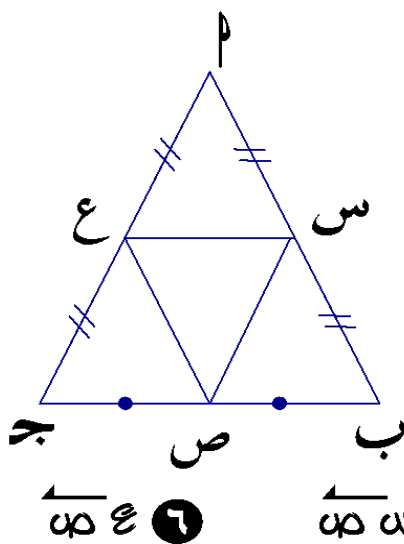
❖ مثال [٩] في الشكل المقابل :



م ب ج ء متوازي أضلاع .

- ١ م ب **تكافئ** س ج (لأن لهما نفس الطول ونفس الاتجاه)
- ٢ م س **تكافئ** ب ج (لأن لهما نفس الطول ونفس الاتجاه)
- ٣ م ب **لا تكافئ** ج س (لأنهما متضادان في الاتجاه)
- ٤ م س **لا تكافئ** س م (لأنهما متضادان في الاتجاه)

❖ مثال [١٠] في الشكل المقابل :



م ب ج مثلث فيه م ب = م ج

س ، ص ، ع منتصفات م ب ، ب ج ، ج م على الترتيب

أولا : أى العبارات التالية صحيحة ؟

- ١ || م س || = || ع ص || ٢ م س ص تكافئ ع ص
- ٣ ب ص تكافئ ع س .

ثانيا : أكتب القطع المستقيمة (إن وجدت) و التي تكافئ كلا من :

- ١ ب س ٢ م ع ٣ م س ٤ ج ص ٥ م س ٦ ع ص

الحل : أولا :

- ١ || م س || = || ع ص || **صحيحة**
- ٢ م س ص **تكافئ** ع ص **خطأ**
- ٣ ب ص **تكافئ** ع س **خطأ** .

ثانيا : القطع المستقيمة تكافئ كلا من :

- ١ ب س **تكافئ** م ع ، م س
- ٢ م ع **تكافئ** ع ص ، ج س
- ٣ م س **تكافئ** ب ص ، ج ص
- ٤ ج ص **تكافئ** ع ص ، م س
- ٥ م س **تكافئ** ج س ، ع ص
- ٦ ع ص **تكافئ** م س ، ب س

تفكير منطقي :

١ إذا كان $\vec{a} \parallel \vec{b}$ تكافئ $\vec{a}$ ماذا تستنتج ؟

نستنتج أن لهما نفس المعيار ونفس الاتجاه .

٢ ما عدد القطع الموجهة التي يملك رسمها في المستوى وكل منها تكافئ $\vec{a}$ ؟

عدد لا نهائي من القطع المستقيمة الموجهة

٣ مع نقطة ج في المستوى كم قطعة مستقيمة موجهة يملك رسمها وتكافئ $\vec{a}$ ؟

توجد قطع مستقيمة موجهة وحيدة يمكن رسمها من النقطة ج (جـ مثلا) بحيث تكون جـ تكافئ $\vec{a}$.

مثال (١١)

القطع المستقيمة الموجهة في المستوى الإحداثي المتعامد :

في مستوى إحداثي متعامد عيه النقط $\vec{a} (1, 2)$ ، $\vec{b} (3, 2)$ ، $\vec{c} (3, 1)$ ، $\vec{d} (4, 1)$ ، $\vec{e} (1, -2)$ ، $\vec{f} (3, -1)$. أوجد إحداثيي كل من هـ ، لـ .

لرسم جـ تكافئ $\vec{a}$

يجب أن تكون جـ $\vec{a}$ لهما نفس الاتجاه ، ونفس المعيار .

أي أن : جـ $\parallel \vec{a}$

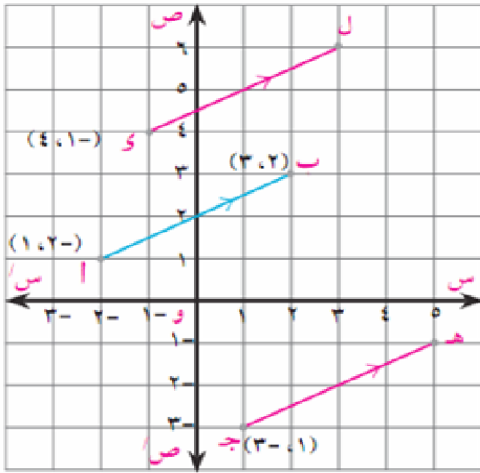
، $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = \|\vec{c}\| = \|\vec{d}\| = \|\vec{e}\| = \|\vec{f}\|$.

١ نرسم جـ $\parallel \vec{a}$ (ميل $\vec{a}$ = ميل جـ = $\frac{1}{2}$)

٢ نحدد طول جـ = طول $\vec{a}$ باستخدام الفرجار

، أو بحساب عدد المربعات الأفقية و الرأسية

فنجد أن : هـ (0 ، 1) . بالمثل نرسم لـ : لـ (3 ، 6)



لاحظ أن :

حيث أن الانتقال يحافظ على توازي المستقيمتين ، وأطوال القطع المستقيمة وباعتبار النقطة ج صورة النقطة م بالانتقال

يمكن إيجاد النقط عن طريق الانتقال : الانتقال = الصورة - الأصل

$$(٤ - , ٣) = (١ , ٢ -) - (٣ - , ١) =$$

∴ صورة (٣ , ١) بالانتقال (٤ - , ٣) هي (٣ + ١ , ١ - ٣) = (٤ - , ٣)

∴ لرسم جـه تكافئ م ب نجد أن جـه هو صورة م ب بالانتقال (٤ - , ٣)

أي أن : ه صورة ب ∴ **الصورة = الأصل + الانتقال**

$$(١ - , ٥) = (٤ - , ٣) + (٣ , ٢) =$$

مثال (١٢)

القطع المستقيمة الموجهة في المستوى الإحداثي المتعامد :

في مستوى إحداثي متعامد حيث النقط م (٢ , ١ -) ، ب (٤ , ١) ، ج (١ - , ٢) ، د (٣ , ٣ -) ، ثم اسم جـه ، لـلـ كل منهما تكافئ م ب . أوجد إحداثي هـ ، لـ .

لرسم جـه تكافئ م ب

يجب أن تكون جـه ، م ب لهما نفس الاتجاه ، ونفس الطول .

$$① \text{ نرسم جـه } // \text{ م ب } (\text{ميل م ب} = \text{ميل جـه} = \frac{٢}{٢})$$

$$② \text{ نحدد طول جـه} = \text{طول م ب}$$

بحساب عدد المربعات الأفقية و الرأسية

ف نجد أن : هـ (١ , ٤) . بالمثل نرسم لـ ف نجد أن : لـ (١ - , ١ -)

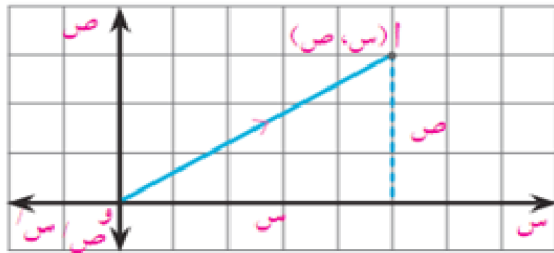
يمكن إيجاد النقط عن طريق الانتقال : الانتقال = الصورة - الأصل

$$\text{الانتقال} = (٣ - , ٣) = (٢ , ١ -) - (١ - , ٢) =$$

$$\text{صورة هـ} = \text{الأصل} + \text{الانتقال} = (٤ , ١) + (٣ - , ٣) = (١ , ٤)$$

متجه الموضع لنقطة معلومة بالنسبة لنقطة الأصل :

هو القطعة المستقيمة الموجهة التي بدايتها نقطة الأصل ونهايتها النقطة المعلومة



يمكن تعيين موضع النقطة $م$ في المستوى الإحداثي المتعامد بمعرفة الزوج المرتب $(س، ص)$ المماثل لها ، حيث أن لكل نقطة في الإحداثي المتعامد موضع وحيد بالنسبة لنقطة الأصل و

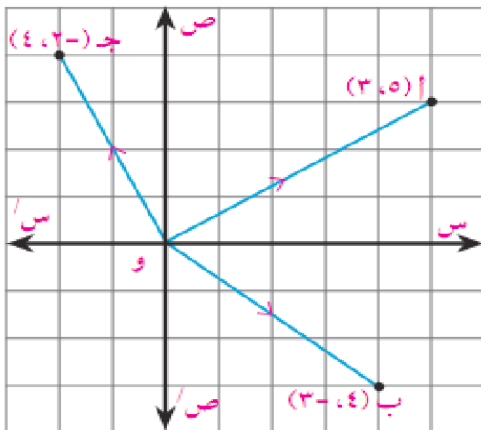
متجه الموضع

إذا كان : $ج (م، ب)$ نقطة في إحداثي متعامد

و نقطة الأصل $(٠، ٠)$

فان $\vec{ج}$ تسمى متجه الموضع للنقطة ج

وتكتب بالصورة $\vec{ج} = (م، ب)$

مثال [١٣] في الشكل المقابل :

$م (٣، ٠)$ ، $ب (٤-، ٣-)$ ، $ج (٢-، ٤-)$ فيكون
و $\vec{م}$ لنقطة $م$ بالنسبة لنقطة الأصل و ، وينظر الزوج المرتب $(٣، ٠)$

، وتكتب $\vec{م} = (٣، ٠)$

و $\vec{ب}$ متجه موضع النقطة $ب$ بالنسبة لنقطة الأصل

، حيث $\vec{ب} = (٣-، ٤-)$ كما أن $\vec{ج} = (٤-، ٢-)$

ملاحظة هامة :

نظرا لأن كل متجهات الموضع لها نفس نقطة البداية $(٠، ٠)$ فانه يمكننا أن نرمز لمتجه الموضع $\vec{م}$ بالرمز $\vec{م}$ ومتجه الموضع $\vec{ب}$ بالرمز $\vec{ب}$ وهكذا

أي أن : $\vec{م} = (٣، ٠)$ ، $\vec{ب} = (٣-، ٤-)$ ، $\vec{ج} = (٤-، ٢-)$

الصورة القطبية متجه الموضع :

في الشكل المقابل :

$\vec{OP}$ يصنع زاوية θ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

: كما أن معياره يساوي $\|\vec{OP}\|$

فيكون $\vec{OP} = (\|\vec{OP}\|, \theta)$ هي الصورة القطبية

ويكون إحداثيا النقطة P في المستوى الإحداثي المتعامد هما :

$$x = \|\vec{OP}\| \cos \theta, \quad y = \|\vec{OP}\| \sin \theta$$

مثال [١٤]

في مستوى إحداثي متعامد إذا كانت $P(6, 3\sqrt{6})$. أوجد الصورة القطبية لمتجه الموضع للنقطة P بالنسبة لنقطة الأصل O .

الحل : $\therefore \vec{OP} = (6, 3\sqrt{6})$

$$\therefore \|\vec{OP}\| = \text{طول } \vec{OP} = \sqrt{6^2 + (3\sqrt{6})^2} = \sqrt{36 + 54} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

$$12 = 3\sqrt{10} \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{4}{\sqrt{10}}$$

$$\cos \theta = \frac{6}{3\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{10}}\right) \approx 60^\circ$$

$$\therefore \theta = 60^\circ \Rightarrow \vec{OP} = (12, 6\sqrt{3})$$

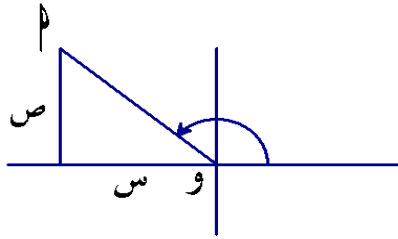
مثال [١٥]

في مستوى إحداثي متعامد إذا كان $P(-\sqrt{3}, 1)$ أوجد المتجه $\vec{OP}$ في الصورة القطبية

$$\therefore \vec{OP} = (-\sqrt{3}, 1)$$

$$\|\vec{OP}\| = \text{طول } \vec{OP} = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$$

$$\therefore \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$$



$$\cos \theta = \frac{\cos}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 100^\circ$$

$$\therefore \overrightarrow{w} = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

مثال [١٦]

في مستوى إحداثي متعامد إذا كان $\overrightarrow{w} = (-2, 0)$ أوجد المتجه $\overrightarrow{u}$ في الصورة القطبية

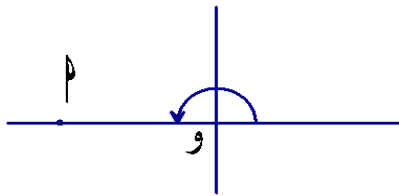
$$\therefore \overrightarrow{w} = (-2, 0) \quad \|\overrightarrow{w}\| = \text{طول } \overrightarrow{w} = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$$

$$2 = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = \sqrt{4 + 0} = 2$$

$$\cos \theta = \frac{\cos}{-2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1} \left(-\frac{1}{2} \right) = 120^\circ$$

$$\therefore \overrightarrow{w} = (\pi, 2)$$



مثال [١٧]

إذا كان $\overrightarrow{w} = (\frac{\pi}{3}, \sqrt{12})$ متجه موضح لنقطة P بالنسبة لنقطة الأصل O ،

فأوجد إحداثي نقطة P

$$\therefore \overrightarrow{w} = (\theta, \|\overrightarrow{w}\|) = \left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{12} \right) = (120^\circ, \sqrt{12})$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\cos}{\|\overrightarrow{w}\|} = \frac{\cos}{\sqrt{12}} \quad \text{جنا } \theta = 120^\circ \quad \sqrt{12} = \frac{1}{\cos} \times \sqrt{12} = 2$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{\sin}{\|\overrightarrow{w}\|} = \frac{\sin}{\sqrt{12}} \quad \text{جنا } \theta = 120^\circ \quad \sqrt{12} = \frac{1}{\sin} \times \sqrt{12} = 2$$

$$\therefore \text{إحداثي نقطة } P = (2, 2)$$

تارين (١) على الكميات القياسية والمتجهة

١ ارسم متجه موضع الذي تمثله المتجهات :

$$\begin{aligned} ① \quad \vec{p} &= (1, 3) & ② \quad \vec{b} &= (2, 1) & ③ \quad \vec{a} &= (3, 0) \\ ④ \quad \vec{e} &= (4, 0) & ⑤ \quad \vec{h} &= (1, 3) & ⑥ \quad \vec{m} &= 0 - \vec{s} + \vec{v} \\ ⑦ \quad \vec{v} &= \vec{v} - \vec{s} & ⑧ \quad \vec{v} &= \vec{v} - \vec{s} & ⑨ \quad \vec{v} &= \vec{v} - 3 \end{aligned}$$

٢ أوجد المتجه $\vec{m}$ الذي تمثله القطعة المستقيمة الموجهة $\vec{p}$ ثم ارسم متجه

الموضع الممثل للمتجه $\vec{m}$

$$\begin{aligned} ① \quad \vec{p} &= (3, 1), \vec{b} = (1, 2) & ② \quad \vec{p} &= (1, 2), \vec{b} = (3, 4) \\ ③ \quad \vec{p} &= (3, 1), \vec{b} = (1, 1) & ④ \quad \vec{p} &= (0, 7), \vec{b} = (0, 2) \\ ⑤ \quad \vec{p} &= (0, 0), \vec{b} = (2, 8) & ⑥ \quad \vec{p} &= (4, 1), \vec{b} = (6, 7) \end{aligned}$$

٣ ارسم متجه الموضع الممثل لمتجه $\vec{p}$ ثم ارسم قطعة مستقيمة موجهة ممثلة

للمتجه $\vec{p}$ نقطة بدايته b وأوجد إحداثيا نقطة نهايتها .

$$\begin{aligned} ① \quad \vec{p} &= 3\vec{s} + 2\vec{v}, \vec{b} = (1, 2) \\ ② \quad \vec{p} &= (4, 2), \vec{b} = (3, 4) \\ ③ \quad \vec{p} &= (1, 8), \vec{b} = (4, 2) \\ ④ \quad \vec{p} &= 4\vec{s}, \vec{b} = (2, 2) \end{aligned}$$

٤ ارسم متجه الموضع الممثل للمتجه $\vec{p}$ ثم ارسم قطعة مستقيمة موجهة

للمتجه $\vec{p}$ نهايته النقطة b وأوجد نقطة بدايتها .

$$\begin{aligned} ① \quad \vec{p} &= 4\vec{s} + 3\vec{v}, \vec{b} = (2, 4) \\ ② \quad \vec{p} &= (3, 2), \vec{b} = (3, 0) \\ ③ \quad \vec{p} &= 2\vec{s} - 0\vec{v}, \vec{b} = (3, 1) \\ ④ \quad \vec{p} &= (1, 4), \vec{b} = (0, 2) \end{aligned}$$

✍ [٥] إذا كان : $\overrightarrow{P} = (٢, ٦)$ فارسم قطعة مستقيمة موجهة تمثل :

$\overrightarrow{P}$ ، $\overrightarrow{P_2}$ ، $\overrightarrow{P_1}$ ، $\overrightarrow{P_3}$ ، $\overrightarrow{P_4}$ ، والتي نقطة بدايته النقطة ب (٢ ، ١) -

✍ [٦] أنشئ نظاما إحداثيا وعين علي النقط $\overrightarrow{P} (٣, ٢)$ ، $\overrightarrow{B} (٥, ٣)$ ، $\overrightarrow{J} (٢, -٤)$

ارسم قطعة مستقيمة موجهة $\overrightarrow{J_2}$ تكافئ $\overrightarrow{P}$ وأوجد إحداثيا نقطة $\overrightarrow{J_1}$.

✍ [٧] أنشئ نظاما إحداثيا وعين عليه النقط $\overrightarrow{P} (٥, ١)$ ، $\overrightarrow{B} (١, -٢)$ ،

$\overrightarrow{J} (٤, -٧)$ ارسم قطعة مستقيمة موجهة $\overrightarrow{J_2}$ تكافئ $\overrightarrow{P}$ وأوجد إحداثيا نقطة $\overrightarrow{J_1}$.

✍ [٨] إذا كانت : $\overrightarrow{P} (١, ١)$ ، $\overrightarrow{B} (٢, -٢)$ ، $\overrightarrow{J} (٤, ٥)$ ، $\overrightarrow{J_1} (٧, ١)$

وكانت $\overrightarrow{M}$ ، $\overrightarrow{H}$ ، $\overrightarrow{P}$ ممثلة بالقطعة المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{P_1}$ ، $\overrightarrow{J_2}$ ، $\overrightarrow{B_3}$

على الترتيب فأوجد $\overrightarrow{M} - \overrightarrow{H} + \overrightarrow{P}$

✍ [٩] في مستوى إحداثي متعامد عين النقط $\overrightarrow{P} (٣, ٢)$ ، $\overrightarrow{B} (٦, -٢)$

، $\overrightarrow{J} (٥, -٣)$ ، $\overrightarrow{J_1} (٥, ٢)$ ثم ارسم $\overrightarrow{J_2}$ ، $\overrightarrow{J_3}$ ، $\overrightarrow{J_4}$ كل منها تكافئ $\overrightarrow{P}$

، وأوجد إحداثيي كل من $\overrightarrow{H}$ ، $\overrightarrow{L}$ ، $\overrightarrow{R}$

باستخدام الانتقال : عين إحداثيي النقطة $\overrightarrow{R}$ التي تجعل $\overrightarrow{R}$ تكافئ $\overrightarrow{P}$

✍ [١٠] $\overrightarrow{P}$ ، $\overrightarrow{J_2}$ متوازي أضلاع تقاطع قطراه في نقطة $\overrightarrow{M}$

أولا : اذكر القطع المستقيمة الموجهة (إن وجدت) والتي تكافئ :

① $\overrightarrow{P}$ ، ② $\overrightarrow{J_2}$ ، ③ $\overrightarrow{B_3}$ ، ④ $\overrightarrow{P_4}$ ، ⑤ $\overrightarrow{J_5}$

ثانيا : بين لماذا تكون القطع المستقيمة الموجهة التالية غير متكافئة :

① $\overrightarrow{P}$ ، $\overrightarrow{P_4}$ ، ② $\overrightarrow{P}$ ، $\overrightarrow{J_2}$ ، ③ $\overrightarrow{P}$ ، $\overrightarrow{P_4}$



✍ [١١] في المستوى الإحداثي المتعامد إذا كانت $٢ (٢ - ، ١ -)$ ، $١ (٠ ، ٥)$ ،

فأوجد متجه الموضع لكل منها بالنسبة لنقطة الأصل ، وارسم القطعة المستقيمة الموجهة الممثلة له في المستوى الإحداثي .

✍ [١٢] أوجد المتجه $\vec{PQ}$ في الصورة القطبية إذا كان : $\vec{PQ}$

$$\begin{array}{lll} ① (٢ - ، ٢ -) & ② (\sqrt{١٤} - ، \sqrt{٧}) & ③ (-\sqrt{٣} ، ٣) \\ ④ (٨ ، \sqrt{٣٨}) & ⑤ (٨ ، \sqrt{٣٨}) & \end{array}$$

✍ [١٣] إذا كان : $\vec{PQ}$ متجه موضع نقطة ج بالنسبة لنقطة الأصل ،

فأوجد إحداثي نقطة ج ،

$$\begin{array}{lll} ① (\frac{\pi}{٣} ، ٤) & ② (\frac{\pi}{٤} ، \sqrt{٦}) & ③ (\frac{\pi ٥}{٣} ، ١٤) \\ ④ (\frac{\pi ٤}{٣} ، ٥) & ⑤ (\frac{\pi}{٢} ، ٢) & ⑥ (\frac{\pi ٣}{٢} ، ٩) \end{array}$$

✍ [١٤] في مستوى إحداثي متعامد . أوجد الصورة القطبية لمتجه الموضع للنقطة بالنسبة لنقطة الأصل ، إذا كانت :

$$\begin{array}{lll} ① ٢ (٢ - ، ٢ -) & ② ٢ (٢ - ، ٢ -) & ③ ٢ (٢ - ، ٢ -) \end{array}$$

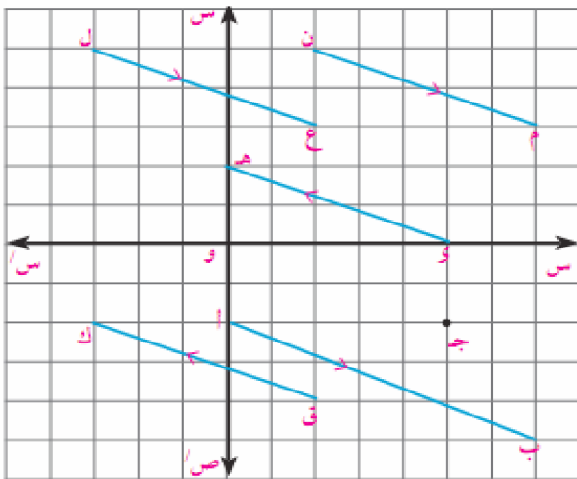
✍ [١٥] في الشكل المقابل :

① عين متجه موضع نقطة ج بالنسبة الى نقطة

الأصل ، ثم أوجد معياره

② حدد جميع عناصر مجموعة المتجهات التي تكافئ

كل منها و ج ؟



العمليات على المتجهات

المتجهات :

عناصر المجموعة E مع عمليتي الجمع والضرب المعرفتين عليها تسمى متجهات .

المتجه الصفري :

يعرف $\vec{0} = (0, 0)$ بالمتجه الصفري .

ويكون $\vec{0} \parallel \vec{a} = \parallel \vec{0} \parallel$ ، والمتجه الصفري غير معيّن الاتجاه .

المتجهات المتكافئة

نفرض أن : جسماً نحركه من M حتى وصل إلى N بعد أن قطع x وحدات إلى اليمين ، 3 وحدات إلى أعلى فإن $\vec{MN}$ تمثّل متجه إزاحة الجسم من M إلى N ويمكننا تمثيل $\vec{MN}$ في المستوى الإحداثي المتعامد بعدد غير منته من القطع المستقيمة الموجهة المتوازية

والتي تكافئ كل منها $\vec{MN}$ ، ويكون أحدهما متجه الموضع $\vec{ON}$.

أي أن : $\vec{MN} = \vec{ON} = \dots = \vec{OQ} = \vec{OP}$ ، $(3, 4) = \vec{OP}$

ويكون : $\parallel \vec{MN} \parallel = \parallel \vec{OQ} \parallel = \dots = \parallel \vec{ON} \parallel$

$$0 = \sqrt{0^2 + 0^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{4 + 3} =$$

جمع متجهين جبرياً :

لك : $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ، $\vec{b} = (b_1, b_2)$ ، $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

يكون $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

خواص عملية الجمع : (الانغلاق ، الإبدال ، الخ)

خواص عملية الضرب : (الانغلاق ، الإبدال ، الخ)

ضرب متجه في عدد حقيقي .

لك : $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ، $\vec{a} \cdot k = (ka_1, ka_2)$ ، لك k

فإن : $\vec{a} \cdot k = (ka_1, ka_2) = k(a_1, a_2) = k\vec{a}$

نكافؤ قطعتين مستقيمتين موجعتين

تتألف القطعتان المستقيمتان الموجهتان إذا كان لهما نفس الطول ونفس الاتجاه بمعنى إذا كانت $\vec{AB} \parallel \vec{CD}$ فإن $\vec{AB} = \vec{CD}$ كما أن $\vec{AB} \parallel \vec{BA}$ والعكس غير صحيح

لاحظ أن : إذا كان $\vec{m} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ يكافئ $\vec{n} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ فإن $\vec{u}_1 = \vec{v}_1$ ، $\vec{u}_2 = \vec{v}_2$ ونقول عندئذ المتجه $\vec{m} = \vec{n}$

متجه الوحدة :

هو متجه معياره الوحدة .

متجه الوحدة الأساسي $\vec{e}_1$:

هو القطعة المستقيمة الموجهة التي مبدؤها نقطة الأصل ومعيارها الوحدة واتجاهها هو الاتجاه الموجب لمحور السينات .

متجه الوحدة الأساسي $\vec{e}_2$:

هو القطعة المستقيمة الموجهة التي مبدؤها نقطة الأصل ومعيارها الوحدة واتجاهها هو الاتجاه الموجب لمحور الصادات .

متجهات الوحدة الأساسية

$\vec{e}_1 = (1, 0)$ هو متجه الوحدة في اتجاه محور السينات

$\vec{e}_2 = (0, 1)$ وهو متجه الوحدة في اتجاه محور الصادات

$$\therefore \vec{a} = (a_1, a_2) = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2$$

إذا كانت $\vec{m} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ ، $\vec{n} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ فإن $\vec{m} + \vec{n} = (\vec{u}_1 + \vec{v}_1, \vec{u}_2 + \vec{v}_2)$

$$= \vec{u}_1 + \vec{v}_1 + \vec{u}_2 + \vec{v}_2 = (\vec{u}_1 + \vec{v}_1) + (\vec{u}_2 + \vec{v}_2)$$

$$= \vec{m} + \vec{n} : \text{ويكون}$$

مثال (١)

عبر عن كل المتجهات التالية بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين :

$$\textcircled{1} \quad \overrightarrow{MA} = (7, 2) \quad \textcircled{2} \quad \overrightarrow{AB} = (3, -4) \quad \textcircled{3} \quad \overrightarrow{BC} = (0, 0) \quad \textcircled{4} \quad \overrightarrow{CA} = \left(\frac{3}{2}, 0\right)$$

$$\textcircled{1} \quad \overrightarrow{MA} = (7, 2) = 7\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} \quad \textcircled{2} \quad \overrightarrow{AB} = (3, -4) = 3\overrightarrow{e_1} - 4\overrightarrow{e_2}$$

$$\textcircled{3} \quad \overrightarrow{BC} = (0, 0) = 0\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{0} \quad \textcircled{4} \quad \overrightarrow{CA} = \left(\frac{3}{2}, 0\right) = \frac{3}{2}\overrightarrow{e_1}$$

مثال (٢)

إذا كان $\overrightarrow{AB} = (7, 3)$ و $\overrightarrow{AC} = (4, 0)$ أوجد $\textcircled{1} \quad \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$ و $\textcircled{2} \quad \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}$

$$\textcircled{1} \quad \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = (4, 0) + (7, 3) = (11, 3)$$

$$\textcircled{2} \quad \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = (4, 0) - (7, 3) = (-3, -3)$$

مثال (٣)

إذا كان $\overrightarrow{AB} = (3, 1)$ و $\overrightarrow{AC} = (2, 1)$ احسب قيمة $\textcircled{1} \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ و $\textcircled{2} \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

$$\textcircled{1} \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (3, 1) + (2, 1) = (5, 2)$$

$$\textcircled{2} \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = (3, 1) - (2, 1) = (1, 0)$$

$$(8, 3) = (6, 3) + (2, 0)$$

مثال (٤)

إذا كان $\overrightarrow{AB} = (3, 1)$ و $\overrightarrow{AC} = (2, 1)$ أوجد $\textcircled{1} \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ و $\textcircled{2} \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ و $\textcircled{3} \quad \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

$$\textcircled{1} \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (3, 1) + (2, 1) = (5, 2)$$

$$\textcircled{2} \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = (3, 1) - (2, 1) = (1, 0)$$

$$\textcircled{3} \quad \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = (2, 1) - (3, 1) = (-1, 0)$$

$$(0, 11) = (4, 8) + (9, 3) = (1, 2)4 - (3, 1)3 = 4\overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2}$$

مثال [٥]

احسب قيمة u ، v التي تجعل $(1, 1) = (2, 1)u + (1, 2)v$

$$\therefore (1, 1) = (2, 1)u + (1, 2)v$$

$$\therefore 1 = 2u - v \quad \text{..... ①}$$

$$8 = 2u + v \quad \text{..... ②}$$

بحل المعادلتين بطريقة الحذف

$$2 = 2u - v$$

$$8 = 2u + v$$

$$\therefore v = 3$$

$$\therefore u = 2$$

$$\therefore 10 = 2u + v$$

مثال [٦]

إذا كانت : $(2, -1) = \vec{p}$ ، $(3, 4) = \vec{q}$

① أوجد : $2\vec{p} - 3\vec{q}$ ② عبّر عن $(0, 11)$ بدلالة $\vec{p}$ ، $\vec{q}$

$$\text{① } 2\vec{p} - 3\vec{q} = (2, -1)2 - (3, 4)3 = (3, 4)$$

$$(13, -1) = (9, -12) + (4, 11) =$$

$$\text{② بفرض أنه : } \vec{r} = 4\vec{p} + (-2)\vec{q} = (3, 4)4 + (-2)(2, -1) =$$

$$(0, 11) = (12, 16) + (-2, 2) =$$

$$\therefore 0 = 12 - 2$$

$$\therefore 11 = 16 + 2$$

$$\therefore \text{بحل المعادلتين السابقتين : } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} , \quad 2 = 4 \quad \therefore \vec{r} = 4\vec{p} + (-2)\vec{q}$$

مثال (U)

إذا كانت $\vec{a} = (7, -4)$ ، $\vec{b} = (6, 2)$ ، $\vec{c} = (-1, 2)$ فعبّر عن $\vec{a}$ بدلالة $\vec{b}$ ، $\vec{c}$

الحل بفرض أن $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$

$$(7, -4) = (-1, 2) + (6, 2)$$

$$(7, -4) = (2, 4) + (5, -6) \therefore$$

$$\therefore 7 - 5 = 2 - 6 \quad \text{..... ١} \quad \therefore -4 - 6 = 4 - 2 \quad \text{..... ٢}$$

بحل المعادلتين بطريقة الحذف

$$8 - 5 = 2 - 6$$

$$7 - 5 = 2 - 6$$

$$\therefore 1 - 5 = 2 - 6 \quad \therefore \frac{1}{2} = 5 \quad \therefore 0 = 2$$

$$\therefore \vec{a} = \frac{1}{2} \vec{b} + 0 \vec{c}$$

مثال (n)

إذا كانت $\vec{a} = (3, -1)$ ، $\vec{b} = (0, 2)$ ، $\vec{c} = (5, -4)$ أوجد $\vec{a}$ بدلالة $\vec{b}$ ، $\vec{c}$

$$(3, -1) + (0, 2) = (3, 1) - (0, 2) = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} - \vec{b}$$

$$(3, 1) =$$

$$(0, 2) + (0, 4) = (0, 2) - (0, 4) = \vec{b} - \vec{c} = \vec{b} - \vec{c}$$

$$(0, 2) =$$

$$(3, 1) + (0, 4) = (3, 5) - (0, 4) = \vec{a} - \vec{c} = \vec{a} - \vec{c}$$

$$(3, 5) =$$

مثال [٩]

إذا كانت $\vec{a} = (-3, 4)$ ، $\vec{b} = 0\vec{s} + 12\vec{v}$ أوجد $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ❶ ❷ $\vec{b}$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = (-3, 4) \cdot (0, 12) = 0 + 48 = 48$$

$$\therefore \vec{b} = \sqrt{169} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{(-12)^2 + (5)^2} = \sqrt{169} = 13$$

مثال [١٠]

إذا كانت $\vec{a} = (-3, 1)$ ، $\vec{b} = 2\vec{s} + 3\vec{v}$ احسب قيمة $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ❶ ❷ $\vec{b}$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = (-3, 1) \cdot (2, 3) = -6 + 3 = -3$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (-3, 1) \cdot (2, 3) = (-3, 1) \cdot (2, 3) = -6 + 3 = -3$$

$$\therefore \vec{b} = \sqrt{178} = \sqrt{9 + 169} = \sqrt{(-3)^2 + (13)^2} = \sqrt{178}$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (-3, 1) \cdot (2, 3) = (-3, 1) \cdot (2, 3) = -6 + 3 = -3$$

$$\therefore \vec{b} = \sqrt{29} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{(-2)^2 + (5)^2} = \sqrt{29}$$

مثال [١١]

احسب قيمة $\vec{a} \cdot \vec{b}$ إذا كان $\vec{a} = 3\vec{s} - 12\vec{v}$ ❶ ❷ $\vec{b} = 4\vec{s} - 12\vec{v}$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = (3, -12) \cdot (4, -12) = 12 + 144 = 156$$

$$\therefore \vec{b} = \sqrt{156} = \sqrt{36 + 120} = \sqrt{(-6)^2 + (10)^2} = \sqrt{156}$$

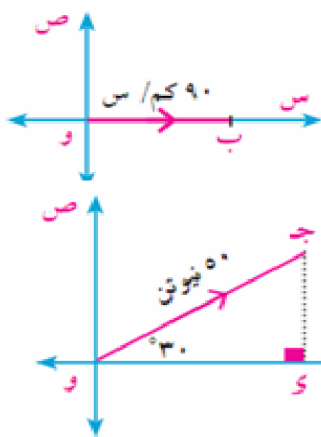
$$\therefore \vec{b} = \sqrt{156} = \sqrt{36 + 120} = \sqrt{(-6)^2 + (10)^2} = \sqrt{156}$$

$$\therefore \vec{b} = \sqrt{156} = \sqrt{36 + 120} = \sqrt{(-6)^2 + (10)^2} = \sqrt{156}$$

مثال (١٢)

أوجد بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين المتجه الذي يعبر عنه كل من :

- ١ السرعة المنتظمة لسيارة تقطع ٩٠ كم/س في اتجاه الشرق
- ٢ قوة مقدارها ٥٠ نيوتن تؤثر في نقطة مادية في اتجاه ٣٠° شمال الشرق .



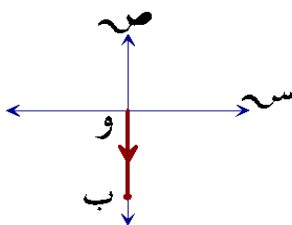
بفرض أن متجه الموضع للسرعة السيارة $\vec{v} = (v_x, v_y)$
 $\therefore v_x = 90, v_y = 0 \therefore \vec{v} = 90\hat{i}$

بفرض أن متجه الموضع للقوة المطعأة $\vec{F} = (F_x, F_y)$
 $\therefore F_x = 50 \cos 30^\circ = 43.3, F_y = 50 \sin 30^\circ = 25$
 $\therefore \vec{F} = 43.3\hat{i} + 25\hat{j}$

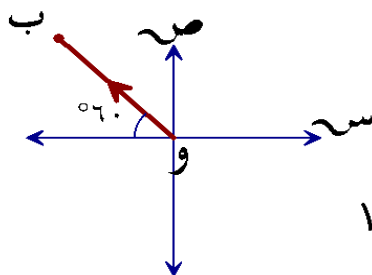
مثال (١٣)

أوجد بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين المتجه الذي يعبر عنه كل من :

- ١ إزاحة جسم مسافة ٦٠ سم في اتجاه الجنوب .
- ٢ قوة مقدارها ٣٠ ن كجم تؤثر على جسم في اتجاه ٦٠° شمال الغرب .



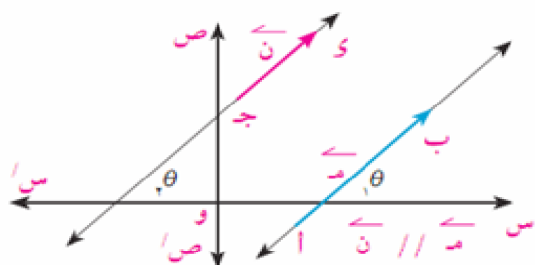
بفرض أن متجه الموضع للسرعة السيارة $\vec{v} = (v_x, v_y)$
 $\therefore$ اتجاه الجنوب
 $\therefore v_x = 0, v_y = -60 \therefore \vec{v} = -60\hat{j}$



بفرض أن متجه الموضع للقوة المطعأة $\vec{F} = (F_x, F_y)$
 $\therefore$ اتجاه شمال الغرب $\theta = 120^\circ$
 $\therefore F_x = 30 \cos 120^\circ = -15, F_y = 30 \sin 120^\circ = 25.98$
 $\therefore \vec{F} = -15\hat{i} + 25.98\hat{j}$

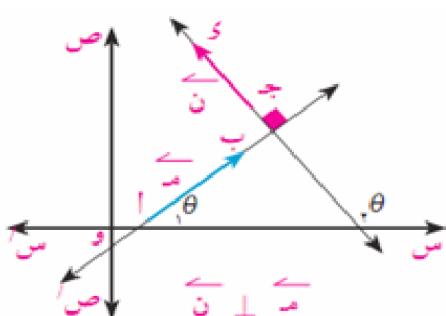
توازي متجهين وتعامدهما :

لكل $\vec{a}, \vec{b}$ متجهين غير صفريين حيث $(a_1, a_2) = \vec{a}$ ، $(b_1, b_2) = \vec{b}$ إذا كان : $\vec{a} \parallel \vec{b}$



فان : $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ ، $\theta_a = \theta_b$

ويكون $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ والعكس صحيح



إذا كان : $\vec{a} \perp \vec{b}$

فان : $\frac{a_1}{a_2} \times \frac{b_1}{b_2} = -1$ ، $\theta_a = \theta_b + 90^\circ$

ويكون : $a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$ والعكس صحيح

لاحظ أن :

مثال [١٤]

إذا كانت $\vec{a} = (2, 4)$ ، $\vec{b} = (-6, 3)$ ، $\vec{c} = (4, 8)$ أثبت أن :

① $\vec{a} \perp \vec{b}$ ② $\vec{a} \parallel \vec{c}$ ③ $\vec{b} \perp \vec{c}$

$\vec{a} \perp \vec{b}$ لأن : $a_1 b_1 + a_2 b_2 =$

$= 2 \times (-6) + 4 \times 3 = -12 + 12 = 0$

$\vec{a} \parallel \vec{c}$ لأن : $\frac{a_1}{a_2} = \frac{c_1}{c_2}$

$= \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$\vec{b} \perp \vec{c}$ لأن : $b_1 c_1 + b_2 c_2 =$

$= (-6) \times 4 + 3 \times 8 = -24 + 24 = 0$

مثال [١٥]

إذا كانت : $\vec{a} = (6, 4-)$ ، $\vec{b} = (9, 6-)$ ، $\vec{c} = (2, 3)$ أثبت أن :

① $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ② $\vec{b} \perp \vec{c}$ ③ $\vec{c} \perp \vec{a}$

① $\vec{a} \parallel \vec{b} :: (6, 4-) \vec{b} , (9, 6-) \vec{a}$
 $\therefore \text{صفر} = 36 - 36 = 6 \times 6 - (9-)(4-) = \text{صفر} - \text{صفر} = 0$
 $\therefore \vec{a} \parallel \vec{b}$

② $\vec{b} \perp \vec{c} :: (9, 6-) \vec{b} , (2, 3) \vec{c}$
 $\therefore 0 = 18 - 18 = 2 \times (9-) + 3 \times 6 = \text{صفر} + \text{صفر} = 0$
 $\therefore \vec{b} \perp \vec{c}$

③ $\vec{c} \perp \vec{a} :: (2, 3) \vec{c} , (6, 4-) \vec{a}$
 $\therefore 0 = 12 + 12 - = 2 \times 6 + 4 \times (4-) = \text{صفر} + \text{صفر} = 0$
 $\therefore \vec{c} \perp \vec{a}$

مثال [١٦]

إذا كان : $\vec{a} = (0, 2)$ ، $\vec{b} = (4-, 0)$ فأوجد قيمة k عندما :

① $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ② $\vec{a} \perp \vec{b}$

عندما $\vec{a} \parallel \vec{b}$ فان شرط التوازي هو : $\text{صفر} = \text{صفر} - \text{صفر} = 0$
 $\therefore 0 = 0 \times 2 - (4-) \times 0$
 $\therefore 0 = 0$
 $\therefore k = 0$

إذا كان : $\vec{a} \perp \vec{b}$ فان شرط التعامد هو : $\text{صفر} = \text{صفر} + \text{صفر} = 0$
 $\therefore 0 = 2 \times 0 + 4 \times (4-) = 0 - 16 = -16$
 $\therefore k = 4$

لاحظ أن :

① إذا كان : $\vec{a} = (a, b)$ ، $\vec{c} \in \mathbb{R}$

فان : $\vec{c} \vec{a} = \vec{c} (a, b) = (ca, cb)$

② إذا كان : $\vec{a}$ متجه غير صفري ، $\vec{c} \neq 0$: فان : $\vec{c} \vec{a} \parallel \vec{a}$

ويكون : $\|\vec{c} \vec{a}\| = |\vec{c}| \|\vec{a}\|$

حيث اتجاه $\vec{c} \vec{a}$ هو نفس اتجاه $\vec{a}$ لـ $\vec{c} > 0$ ،
لـ $\vec{c} < 0$ ،
اتجاه $\vec{c} \vec{a}$ هو عكس اتجاه $\vec{a}$

مثال (١٧)

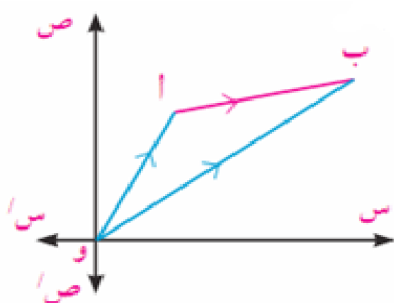
إذا كان : $\vec{a} = (1, 2)$: فان :

$$① \vec{2a} = 2\vec{a} = 2(1, 2) = (2, 4)$$

$$② \vec{3a} = 3\vec{a} = 3(1, 2) = (3, 6)$$

$$③ \vec{-a} = -\vec{a} = -(1, 2) = (-1, -2)$$

$$④ \vec{\frac{3}{2}a} = \frac{3}{2}\vec{a} = \frac{3}{2}(1, 2) = (\frac{3}{2}, 3)$$



التعبير عن القطعة المستقيمة الموجهة $\vec{AB}$ بدلالة متجهي الموضع لهما :

إذا كانت : $\vec{A} = (a_1, a_2)$ ، $\vec{B} = (b_1, b_2)$

$$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} \quad \text{أو} \quad \vec{AB} = \vec{B} - \vec{A}$$

مثال (١٨)

إذا كانت : $\vec{A} = (1, 7)$ ، $\vec{B} = (0, 2)$ أوجد $\vec{AB}$

$$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (0, 2) - (1, 7)$$

$$= (-1, -5)$$

مثال [١٦]

إذا كان : $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$ ، $\vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$ أثبت أن : $\vec{a} = \vec{d}$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c} \quad \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$$

$$\vec{a} - \vec{b} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{c} + \vec{d}$$

$$\vec{a} - \vec{b} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{c} + \vec{d}$$

بالقسمة ÷ ٣

$$\vec{a} - \vec{b} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{c} + \vec{d}$$

$$\vec{a} - \vec{b} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{c} + \vec{d}$$

$$\vec{a} = \vec{d}$$

مثال [١٦]

م ب ج د متوازي أضلاع حيث م (٢ ، ١-) ، ب (١ ، ٧) ، ج (٤ ، ٤) أوجد إحداثي نقطة د

$$\vec{m} = \vec{b} + \vec{c} - \vec{a}$$

$$\vec{m} = \vec{b} + \vec{c} - \vec{a}$$

$$(2, -1) = (1, 7) - (4, 4) + (1, -2) = \vec{d}$$

∴ إحداثي نقطة د (٢ ، ١-)

حاول الحل بطريقة أخرى

تارين (٢) على العمليات على المتجهات

[١] أكمل ما يأتي بالاجابة الصحيحة :

١ إذا كان : $\vec{a} = (2, -4)$ ، $\vec{b} = (3, 0)$ فان : $\vec{a} + \vec{b} = \dots$

٢ إذا كان : $\vec{a} = (4, -6)$ ، $\vec{b} = (3, 1)$ ، $\vec{c} = (2, 3)$ فان : $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \dots$

٣ إذا كان : $\vec{a} = (3, -2)$ ، $\vec{b} = (2, 3)$ ، $\vec{c} = (1, 2)$ فان : $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \dots$

٤ إذا كان : $\vec{a} = (1, 4)$ ، $\vec{b} = (-2, 3)$ فان : $\vec{a} - \vec{b} = \dots$

٥ إذا كان : $\vec{a} = (3, 2)$ ، $\vec{b} = (2, 3)$ ، $\vec{c} = (1, 2)$ فان : $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \dots$

٦ إذا كان : $\vec{a} = (3, -2)$ ، $\vec{b} = (1, 1)$ ، $\vec{c} = (1, 1)$ فان : $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \dots$

٧ إذا كان : $\vec{a} = (2, -3)$ ، $\vec{b} = (3, 1)$ ، $\vec{c} = (1, 3)$ فان : $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \dots$

٨ تتكافأ القطعتان المستقيمتان الموجهتان إذا كان : $\dots$ ، $\dots$

٩ متجه الموضع لنقطة معلومة هو $\dots$

١٠ إذا كان : $\vec{a} = (3, 2)$ ، $\vec{b} = (2, -3)$ فان : $\vec{a} + \vec{b} = \dots$

١١ إذا كان : $\vec{a} = (0, 7)$ ، $\vec{b} = (0, 0)$ فان : $\vec{a} + \vec{b} = \dots$

١٢ إذا كان : المتجهان $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ متساويان حيث $\vec{a} = (2, 3)$ ، $\vec{b} = (3, 0)$ فان : $\vec{a} - \vec{b} = \dots$

١٣ إذا كان : المتجهان $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ متوازيان حيث $\vec{a} = (4, 0)$ ، $\vec{b} = (1, 3)$ فان : $\vec{a} = \dots$

١٤ إذا كان : $\vec{a} = \frac{1}{2} \vec{b}$ وعندما $\vec{a} = (0, \frac{1}{2})$ فان : $\vec{b} = \dots$

١٥ إذا كان : $\vec{a} = (2, 0)$ ، $\vec{b} = (3, 0)$ فان : $\vec{a} + \vec{b} = \dots$

١٦ إذا كان : $\vec{a} = (4, 0)$ ، $\vec{b} = (3, 0)$ فان : $\vec{a} + \vec{b} = \dots$

١٧ إذا كان : $\vec{a} = (4, 4)$ ، $\vec{b} = (1, \frac{1}{3})$ فان : $\vec{a} + \vec{b} = \dots$

١٨ إذا كان : $\vec{a} = (1, \frac{1}{3})$ ، $\vec{b} = (1, \frac{1}{3})$ فان : $\vec{a} + \vec{b} = \dots$

١٩ إذا كان : $\vec{a} = (0, 2)$ ، $\vec{b} = (0, 0)$ فان : $\vec{a} + \vec{b} = \dots$

٢٠ إذا كان : $\vec{a} = (0, 2)$ ، $\vec{b} = (1, \frac{1}{3})$ فان : $\vec{a} + \vec{b} = \dots$

٢١ إذا كان : $\vec{a} = (0, 2)$ ، $\vec{b} = (1, \frac{1}{3})$ فان : $\vec{a} + \vec{b} = \dots$

٢ اختار الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان : $\vec{a} = (2, 2)$ ، $\vec{b} = (0, -2)$ فإن : $\|\vec{a} + \vec{b}\| = \dots$

١ $\sqrt{5}$ ٢ $\sqrt{2}$ ٣ ٥ ٤ ٢٥

٢ إذا كان : $\vec{a} = (2, 3)$ ، $\vec{b} = (-1, 0)$ فإن $\vec{a} + \vec{b}$ يساوي

١ $(3, 8)$ ٢ $(8, 3)$ ٣ $(0, -1)$ ٤ $(-2, 3)$

٣ إذا كان : $\vec{a} = \vec{b}$ حيث $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ غير صفريين ، $\vec{a} \cdot \vec{b} = \{0, 1\}$ فإن

١ $\vec{a} = \vec{b}$ ٢ $\vec{a} \perp \vec{b}$ ٣ $\vec{a}$ لايوازي $\vec{b}$ ٤ $\vec{a} \parallel \vec{b}$

٤ إذا كان : $\vec{a} = (1, 1)$ ، $\vec{b} = (2, 1)$ ، $\vec{a} + \vec{b} \parallel \vec{c}$ فإن :

١ $\vec{c} = (1, 2) - (1, 1)$ ٢ $\vec{c} = (1, 1) - (2, 1)$ صفري

٣ $\vec{c} = (1, 1) + (2, 1)$ صفري ٤ $\vec{c} = (1, 1) + (1, 2)$ صفري

٥ إذا كان : $\vec{a} = (1, 1)$ ، $\vec{b} = (2, 1)$ ، $\vec{a} + \vec{b} \perp \vec{c}$ فإن :

١ $\vec{c} = (1, 1) + (2, 1)$ صفري ٢ $\vec{c} = (1, 1) - (2, 1)$ صفري

٣ $\vec{c} = (1, 1) - (2, 1)$ صفري ٤ $\vec{c} = (1, 1) + (2, 1)$ صفري

٦ إذا كان : $\vec{a} = (2, 4)$ ، $\vec{b} = (3, 2)$ ، $\vec{a} + \vec{b} \parallel \vec{c}$ فإن :

١ $\vec{c} = 2 + 3$ ٢ $\vec{c} = 2 = 3$ ٣ $\vec{c} = 3 = 2$ ٤ $\vec{c} = 2 = 3$

٧ إذا كان : $\vec{a} = (1, -1)$ ، $\vec{b} = (3, 1)$ ، $\vec{a} + \vec{b} \perp \vec{c}$ فإن :

١ $\vec{c} = 3 = 1$ ٢ $\vec{c} = 1 - 3$ ٣ $\vec{c} = 3 - 1$ ٤ $\vec{c} = 3 = 1$

٨ إذا كان : $\vec{a} = 3 - \vec{b}$ ، $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ فإن : $\|\vec{a}\| = \dots$

١ ٧ ٢ ٢٥ ٣ $\sqrt{2}$ ٤ ٥

٩ إذا كان : $\vec{a} = (3, 4)$ ، $\vec{b} = (1, 1)$ فإن $\vec{a} \cdot \vec{b} = \dots$

١ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ٢ $\frac{1}{20}$ ٣ $\frac{1}{0} \pm$ ٤ $0 \pm$

٩ إذا كان : $\vec{a} = (3, -4)$ فإن $\|\vec{a}\| = \dots$

- ١ ٣ ٢ ٤ ٣ ٧ ٤ ٠

١٠ إذا كان : $\vec{a} = (4, 0)$ ، $\vec{b} = (-20, 16)$ فإن المتجهين $\vec{a}$ ، $\vec{b}$

- ١ متعامدان ٢ متوازيان ٣ متافئان ٤ خلاف ذلك

١١ إذا كان : $\vec{a} = (3, 0)$ ، $\vec{b} = (1, 4)$ متعامدان فإن $\vec{a}$ تساوي
 ١ ٠ ٢ ٣ - ٣ ٤ $\frac{0}{3}$

١٢ إذا كان : $\vec{a} = (2, -3)$ ، $\vec{b} = (3, -1)$ فإن $\vec{a}$ تساوي
 ١ ٤ ٢ $\frac{11}{2}$ ٣ ١ - ٤ ٩ -

١٣ إذا كان : $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ، $\vec{a} = (0, 6)$ ، $\vec{b} = (5, 1)$ فإن : $\vec{a} - \vec{b}$ يمكن أن تساوي
 ١ (6, 5) ٢ (5, 1) ٣ (0, 6) ٤ (0, 1)

١٤ إذا كان : $\vec{a} = (4, -2)$ ، $\vec{b} = (-2, 0)$ ، $\vec{c} = (1, 4)$ فإن $\vec{a} \perp \vec{b}$ تساوي
 ١ ٢ ٢ ١ ٣ ٢ - ٤ ١ -

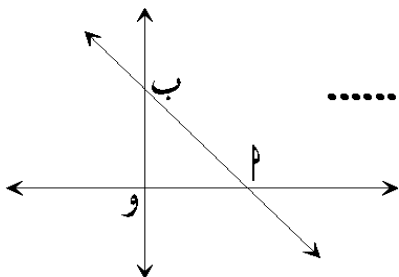
١٥ إذا كان : $\|\vec{a}\| = 0$ ، $\vec{a} = 3$ فإن معادلة المستقيم $\vec{a} \cdot \vec{b}$ هي
 ١ ٢ ٢ ١ ٣ ٢ - ٤ ١ -

$$1 = \frac{4}{3} + \frac{5}{4} \quad (1) \quad 1 = \frac{4}{3} + \frac{5}{4} \quad (2)$$

$$3 - 4 = 4 - 5 \quad (3) \quad 3 - 4 = 4 - 5 \quad (4)$$

١٦ إذا كان : $\vec{a} = 3$ ، $\vec{b} = 8$ ، $\vec{c} = 24$ فإن مساحة المثلث الذي يصنعه هذا المستقيم مع محوري الإحداثيات تساوي

١ ٣ وحدات مساحة ٢ ٨ وحدات مساحة ٣ ١٢ وحدات مساحة ٤ ٢٤ وحدات مساحة





٣] ضع (✓) أمام العبارة الصحيحة أو (×) أمام العبارة الخطأ مع بيان السبب :

- ١ إذا كان : $\vec{a} = (3, -4), \vec{b} = (-4, 3) \Rightarrow \vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$ فان : $\vec{a} \perp \vec{b}$
- ٢ إذا كان : $\vec{a} \perp \vec{b}$ مستطيل قطرة $\vec{a}, \vec{b}$ فان : $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ يكافئ
- ٣ إذا كان : $\vec{a} = (3, -1), \vec{b} = (1, -3) \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 10$ فان : $\vec{a} \parallel \vec{b}$
- ٤ إذا كان : $\vec{a} = (2, 3), \vec{b} = (1, 2), \vec{c} = (1, 1)$ فان : $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{c}$

٤] إذا كان : $\vec{a} = (2, -6), \vec{b} = (-2, 0), \vec{c} = (-6, 14)$

- ١ أوجد $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ، $\vec{a} - \vec{b}$ ، $\frac{1}{2}\vec{a}$ ، $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$
- ٢ عبر عن $\vec{c}$ بدلالة $\vec{a}, \vec{b}$

٥] عبر عن كل المتجهات التالية بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين :

- ١ $\vec{a} = (-3, 4)$
- ٢ $\vec{b} = (0, -12)$
- ٣ $\vec{c} = (-3, -6)$
- ٤ $\vec{d} = (-7, 0)$

٦] إذا كانت $\vec{a} = (1, 1), \vec{b} = (2, -4), \vec{c} = (-3, 0)$

فأوجد العدد k إذا كان : $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ متوازيان $\vec{a} \cdot \vec{b}$ متعامدان

٧] إذا كانت $\vec{a} = (3, 2), \vec{b} = (2, -3)$

فأوجد العدد k إذا كان : $\vec{a}, \vec{b}$ متوازيان $\vec{a} \cdot \vec{b}$ متعامدان

٨] أوجد العدد k (ان أمكن) بحيث تحقق الشروط المعطاة :

- ١ $\vec{a} = (2, -3), \vec{b} = (3, -1)$ متعامدان .
- ٢ $\vec{a} = (2, -3), \vec{b} = (3, -1)$ متعامدان $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$
- ٣ $\vec{a} = (2, -3), \vec{b} = (3, -1)$ متوازيان
- ٤ $\vec{a} = (3, 2), \vec{b} = (2, -3)$ متوازيان $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$



ك [١٦] إذا كان : $\vec{a} = 3\vec{s} - 2\vec{v}$ ، $\vec{b} = \vec{s} - 4\vec{v}$

أوجد : ١ $\vec{a} + \vec{b}$ ٢ $\vec{a} - \vec{b}$ ٣ $2\vec{a} + \vec{b}$ ٤ $2\vec{a} + 3\vec{b}$ ٥ $\vec{a} - 3\vec{b}$ ٦ $3\vec{a} - \vec{b}$

ك [١٧] $\vec{a}$ و $\vec{b}$ جزء شبه منحرف فيه $\vec{a} = (2, -1)$ ، $\vec{b} = (4, -1)$

ج ، $(2, 5)$ ، $(-1, 1)$ ك

١ إذا كان : $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ، أوجد قيمة ك .

٢ أثبت أن : $\vec{a} \perp \vec{b}$ ٣ أوجد مساحة شبه المنحرف $\vec{a}$ و $\vec{b}$.

ك [١٨] $\vec{a}$ و $\vec{b}$ جزء شكل رباعي فيه : $\vec{a} = (1, -2)$ ، $\vec{b} = (9, 0)$ ، ج $(8, 4)$

١ $(0, 2)$ أثبت أن : $\vec{a} = \vec{b}$ ٢ $\vec{a} \perp \vec{b}$

ك [١٩] $\vec{a}$ و $\vec{b}$ جزء متوازي أضلاع ، $\vec{a} = (3, 0)$ ، $\vec{b} = (0, 4)$ ، $(-2, 1)$

أوجد إحداثيا نقطة ج .

ك [٢٠] إذا كان : $\vec{a} = (7, -6)$ ، $\vec{b} = (3, -4)$ ، ج $(-3, 0)$

١ $(0, 8)$ أثبت أن : $\vec{a}$ و $\vec{b}$ متعامدان واحسب معيار كل من $\vec{a}$ و $\vec{b}$

ك [٢١] إذا كان : $\vec{a} = (1, 4)$ ، $\vec{b} = (2, 3)$ ، $\vec{c} = (2, \frac{0}{4})$

أوجد $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ واحسب $\vec{c}$

ك [٢٢] أوجد المتجه $\vec{m}$ حيث $\vec{m} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} + \frac{3}{2}\vec{c}$ ثم عين $\vec{m}$

ك [٢٣] إذا كان : $\vec{a} = \vec{s} - 2\vec{v}$ ، $\vec{b} = \vec{s} + 2\vec{v}$

١ $\vec{a} = \vec{s} - 3\vec{v}$ أوجد قيمة ك بحيث تحقق $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c} + \vec{m}$ ك



~~(25)~~ پ ج مثلث / رؤوسه $P(2, -2), Q(8, 8), R(0, 7)$.

١ اثبت أن Δ م ب ج مثلث قائم الزاوية في ب

٢ أوجد مركز الدائرة المارة بنقوسه Δ Γ Σ

~~(ro)~~ $\vdash \text{ج و متوازي اضلاع فيه}$ $\vdash (2, 5) = \cup, (1, 3) = \cup, (1, 9) = \cup$

، (v ، u) أوجد قيمة u ، ثم أوجد

~~(۲۱)~~ إذا كان: $(\gamma, \varepsilon) = \overrightarrow{ju} + \overrightarrow{p_9}$, $(\tau, \varepsilon) = \overrightarrow{jp}$, $(\nu, 1) = \overrightarrow{up}$

فأوجد احداثي كل من النقط م ، ن ، ج حيث و نقطة الأصل .

✓ (2U) ۳ ۴ ۵ ل شکل رباعی فیہ ۳ ۴ ۵ (۲, ۳) ۴ ۵ (۴, ۲) = ۴ ۵

$(\varepsilon, 3) = \frac{1}{2}$ ، **عن المتجه** $\vec{u}$. **إذا كان** $(2, \varepsilon) = 1$

فأوجد النقط u , v , w

~~[r]~~ إذا كان : $p(5, -2), u(4, 1), j(3, 4), s(-1, 0)$

أوجد قيمة كل من $\cos$ ، $\sin$ إذا كان :

۱) امتحان $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{4}$ متساویان مقداراً متحدان اتجاهاً .

۲) **امتیجان** $\overline{AB}$ ، $\overline{CD}$ متساویان مقدار متضادان اتجاها .

❌ (۲۹) إذا كان : $p(4, 7)$ ، $q(3, 8)$ ، $r(-3, 0)$

اُوجد نقطة ، بحيث يكون $\angle \text{ج د هـ}$ متوازي أضلاع .

❌ (۳.) إذا كان: $\overline{P} (12, 3) = \overline{Q} (4, 5)$, $\overline{P} // \overline{Q}$ **أوجد كل من** $\overline{P}$ ، $\overline{Q}$

~~(۳۱)~~ [۳۱] إذا كان : $\sqrt[3]{r-3}$ ، $\sqrt[3]{r}$ ، $\sqrt[3]{r+3}$

اذكر العلاقة بين المتجهين $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ مع ذكر السبب ؟



٣٣ **ك** [٣٢] إذا كان : $\vec{a} = (7, -4)$ ، $\vec{b} = (0, 3)$ ، $\vec{c} = (-21, 12)$ **وعين عندئذ أي المتجهات تكون متوازية ؟**

٣٣ **ك** [٣٣] إذا كان : $\vec{a} = (7, -4)$ ، $\vec{b} = (-2, 0)$ ، $\vec{c} = (3, 2)$ **اثبت أن**

١ **اثبت أن** : $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ **يوازي المتجه** $\vec{m} = 3\vec{c} - 8\vec{a}$
 ٢ **إذا كان** : $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ **أوجد قيمة** $\vec{c}$

٣٤ **ك** [٣٤] إذا كان : $\vec{a} = (2, 4)$ ، $\vec{b} = (6, 4)$ ، $\vec{c} = (2, 7)$ **اثبت أن** :

١ $\vec{a} \parallel \vec{b}$ **عبر السينات** ٢ $\vec{a} \parallel \vec{c}$ **عبر الصادات** ٣ $\vec{a} \parallel \vec{b} \parallel \vec{c}$

٤ **إذا كان** : $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ، $\vec{b} \parallel \vec{c}$ **تكايف** $\vec{a} \parallel \vec{c}$ **تكايف** $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ، $\vec{b} \parallel \vec{c}$ **تكايف** $\vec{a} \parallel \vec{c}$ ، $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ، $\vec{b} \parallel \vec{c}$ **تكايف** $\vec{a} \parallel \vec{c}$

تكايف $\vec{a} \parallel \vec{b}$ **حيث** $\vec{a} \parallel \vec{b}$ **نقطة الأصل** . **فأوجد إحداثيات كل من** $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ ، $\vec{d}$

٣٥ **ك** [٣٥] إذا كان : $\vec{a} = (4, -1)$ ، $\vec{b} = (3, -2)$ ، $\vec{c} = (0, 1)$ **فأوجد المتجه** $\vec{m}$ **الذي يحقق المعادلة** : $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \vec{m}$

٣٦ **ك** [٣٦] إذا كان : $\vec{a} = (1, 3)$ ، $\vec{b} = (4, 1)$ ، $\vec{c} = (2, -3)$ **فأوجد** :

١ $\vec{a} + \vec{b}$ ٢ $\vec{a} - \vec{b}$ ٣ $\vec{a} + \vec{c}$ ٤ $\vec{a} - \vec{c}$

٣٧ **ك** [٣٧] **أوجد بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين المتجه الذي يعبر عن** :

- ١ **سرعة منتظمة مقدارها** 60 كم/س **في اتجاه الغرب** .
- ٢ **قوة مقدارها** 20 ن كجم **تؤثر على جسم في اتجاه** 30° **جنوب الشرق** .
- ٣ **إزاحة جسم مسافة** 40 م **في اتجاه الشمال الغربي** .

٣٨ **ك** [٣٨] **أوجد بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين المتجه الذي يعبر عن كل من** :

- ١ **إزاحة جسم مسافة** 100 م **في اتجاه الجنوب الشرق** .
- ٢ **قوة مقدارها** 90 ن كجم **تؤثر على جسم في اتجاه** 60° **غرب الجنوب** .

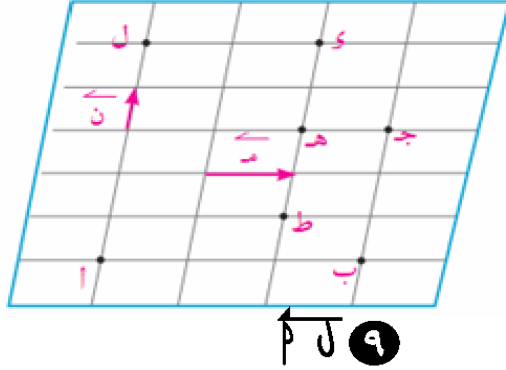
٣٨] أوجد بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين المتجه الذى يعبر عن كل من :

١ السرعة المنتظمة لسيارة تقطع ١٠٠ كم/س فى اتجاه 60° شمال الشرق

٢ قوة مقدارها ١٢٠ نيوتن تؤثر فى نقطة مادية فى اتجاه 30° جنوب الغرب .

٣٩] الشبكة المقابلة متوازيات أضلاع متطابقة :

أولا : عبر كل من القطع المستقيمة الموجهة التالية بدلالة المتجهين $\vec{a}$ ، $\vec{b}$



- | | | | |
|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| ١ $\vec{a}$ | ٢ $\vec{b}$ | ٣ $\vec{a} + \vec{b}$ | ٤ $\vec{a} - \vec{b}$ |
| ٥ $\vec{b} - \vec{a}$ | ٦ $\vec{a} + 2\vec{b}$ | ٧ $2\vec{a} - \vec{b}$ | ٨ $\vec{a} - 2\vec{b}$ |
| ٩ $2\vec{a} + \vec{b}$ | | | |

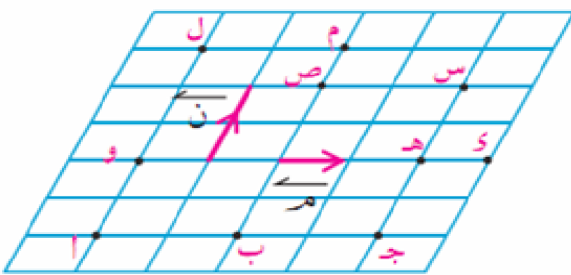
ثانيا : استنتج أن : $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} - \vec{b}$ وفسر ذلك هندسيا

٤٢] ارسم $(2, \frac{\pi}{4})$ فى مستوى إحداثى متعامد ، ثم مثل هندسيا

كلا من متجهات الموضع التالية بقطع مستقيمة موجهة فى نفس المستوى :

- | | | |
|------------------------|-----------------------|------------------------|
| ١ $\vec{a} = 3\vec{b}$ | ٢ $\vec{a} - \vec{b}$ | ٣ $2\vec{a} - \vec{b}$ |
|------------------------|-----------------------|------------------------|

٤١] الشبكة البيانية المقابلة متوازيات الأضلاع متطابقة عبر كل من القطع



المستقيمة الموجهة التالية بدلالة المتجهين $\vec{a}$ ، $\vec{b}$

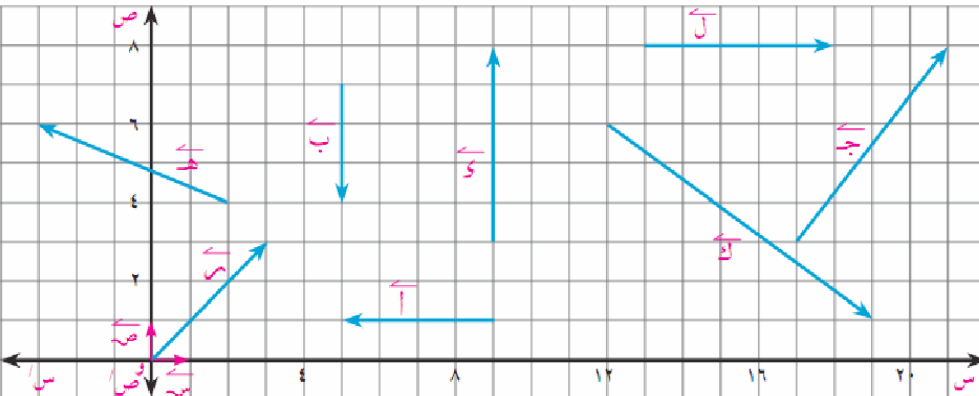
- | | | | |
|------------------------|------------------------|-------------------------|------------------------|
| ١ $\vec{a}$ | ٢ $\vec{b}$ | ٣ $\vec{a} + \vec{b}$ | ٤ $\vec{a} - \vec{b}$ |
| ٥ $\vec{b} - \vec{a}$ | ٦ $\vec{a} + 2\vec{b}$ | ٧ $2\vec{a} - \vec{b}$ | ٨ $\vec{a} - 2\vec{b}$ |
| ٩ $2\vec{a} + \vec{b}$ | ١٠ $\vec{a} + \vec{b}$ | ١١ $2\vec{a} + \vec{b}$ | ١٢ $\vec{a} - \vec{b}$ |

٤٠] يبين الشكل التالى

تحيلا لبعض المتجهات فى المستوى

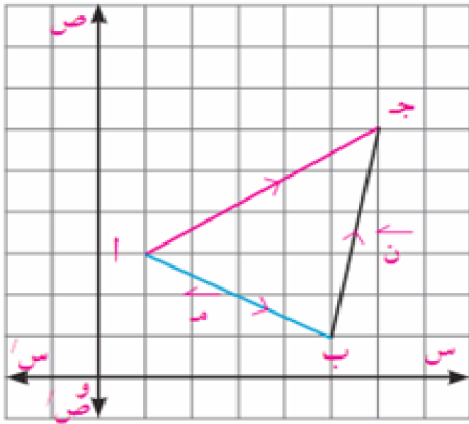
الإحداثى المتعامد اكتب كل متجه

بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين.



العمليات على المتجهات :

أولاً : جمع المتجهات هندسياً .



إذا كان $\vec{u}$ تمثل المتجه $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ تمثل المتجه $\vec{v}$ ،

حيث $\vec{u} = (1, 0)$ ، $\vec{v} = (2, 1)$ ، $(0, 1) = \vec{u}$

فان : $(3, 0) = (0, 1) + (2, 1) = \vec{u} + \vec{v}$

$\therefore \vec{u} = (3, 0) = (3, 1) - (0, 1) = \vec{v} - \vec{u}$

يلاحظ أن : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{v} = \vec{u}$

قاعدة جمع المتثلث متجهين

إذا كان $\vec{u}$ تمثل المتجه $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ تمثل المتجه $\vec{v}$ ،

حيث نقطة ب نقطة النهاية للمتجه $\vec{u}$ وهي نفسها نقطة البداية للمتجه $\vec{v}$

فان المتجه : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{v} = \vec{u}$

أي أن : $\vec{u} = \vec{u} + \vec{v} = \vec{u}$

ملاحظات هامة :

١ أي متجهين $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ يمكن جمعتهما (إيجاد محصلتهما)

بإنشاء متجهين متتاليين ومكافئيه $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ كما في الشكل المقابل .

٢ قاعدة شال جمع متجهين صحيحة

إذا كانت النقط u ، v ، w تنتمي إلى مستقيمين واحد .

ففي الأشكال الثلاثة المقابلة يكون : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$

٣ $\vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{v} = \vec{u}$

فكر : استنتج صحة العبارات التالية :

١ في $\triangle uvw$: $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$

٢ في الشكل المقابل :

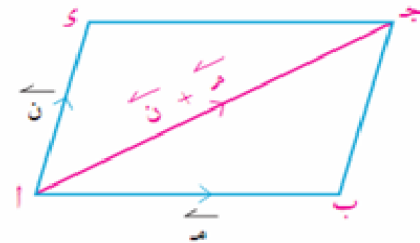
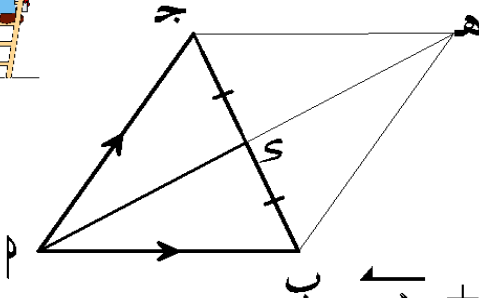
$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{u}$

١ قاعدة متوازي الأضلاع

$$\vec{P} = \vec{B} + \vec{S}$$

قاعدة متوازي الأضلاع لجمع متجهين :

إذا كان : $\vec{P}$ تمثل المتجه $\vec{P}$ ، $\vec{B}$ تمثل المتجه $\vec{B}$ ، $\vec{S}$ تمثل المتجه $\vec{S}$



أي أن للمتجهان $\vec{B}$ ، $\vec{S}$ نفس نقطة البداية ، فلإيجاد $\vec{P}$ + $\vec{B}$

نكمل متوازي الأضلاع $\vec{P}$ ب $\vec{B}$ و $\vec{S}$ ونرسم قطره $\vec{P}$

، فنكون $\vec{P}$ تكافئ $\vec{B} + \vec{S}$

$$\vec{P} = \vec{B} + \vec{S} = \vec{P} + \vec{B} = \vec{S} + \vec{B} = \vec{P} + \vec{B} = \vec{S} + \vec{B}$$

$$\vec{P} = \vec{S} + \vec{B}$$

وتعرف بقاعدة متوازي الأضلاع لجمع متجهين

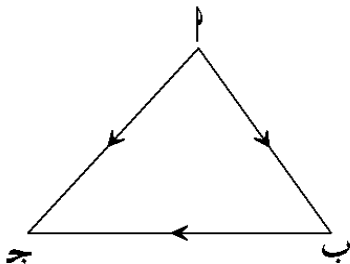
٢ التمثيل الهندسي لجمع متجهين

$$\vec{P} = \vec{B} + \vec{S}$$

هذه القاعدة تسمى قاعدة إغلاق المثلث لجمع متجهين

ولا تعتمد على اختيار النقطة الابتدائية $\vec{P}$

$$\vec{P} = \vec{B} + \vec{S} = \vec{P} + \vec{B} = \vec{S} + \vec{B}$$



٣ التمثيل الهندسي للفرق بين متجهين

$$\vec{P} - \vec{B} = \vec{P} + (-\vec{B})$$

$$\vec{P} + (-\vec{B}) = \vec{P} - \vec{B}$$

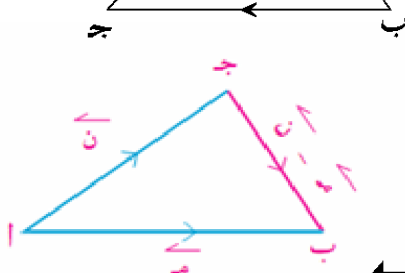
$$\vec{P} - \vec{B} = \vec{P} + (-\vec{B})$$

$$\vec{P} - \vec{B} = \vec{P} + (-\vec{B})$$

أي أن : $\vec{P} - \vec{B} = \vec{P} + (-\vec{B})$

فاذا كانت : $\vec{P}$ تمثل المتجه $\vec{P}$ ، $\vec{B}$ تمثل المتجه $\vec{B}$ ، $\vec{S}$ تمثل المتجه $\vec{S}$

فان : $\vec{P} - \vec{B}$ تمثل $\vec{P} - \vec{B}$ وأيضا $\vec{P} - \vec{B}$ تمثل $\vec{P} - \vec{B}$



مثال [١]

في أي شكل رباعي : $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AC} + \vec{BD}$: أثبت أن :

١..... في المثلث ABC : $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

٢..... في المثلث ACD : $\vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD}$

١ ، ٢ بالجمع

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AC} + \vec{BD}$$

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AC} + \vec{BD} \quad \therefore \vec{AB} - \vec{CD} = \vec{BD} - \vec{AC}$$

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AC} + \vec{BD} \quad \therefore \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AC} + \vec{BD}$$

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AC} + \vec{BD} \quad \therefore \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AC} + \vec{BD}$$

مثال [٢]

في أي شكل رباعي $ABCD$: $\vec{AB} - \vec{CD} = \vec{AC} - \vec{BD}$: أثبت أن :

١..... في $\triangle ABC$: $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$

٢..... في $\triangle ADC$: $\vec{AD} = \vec{AC} + \vec{CD}$

$$\vec{AB} - \vec{CD} = \vec{AC} - \vec{BD} \quad \therefore \vec{AB} - \vec{CD} = \vec{AC} - \vec{BD}$$

$$\vec{AB} - \vec{CD} = \vec{AC} - \vec{BD} \quad \therefore \vec{AB} - \vec{CD} = \vec{AC} - \vec{BD}$$

مثال [٣]

في أي شكل رباعي $ABCD$: $\vec{AB} - \vec{CD} = \vec{AC} - \vec{BD}$: أثبت أن :

$$\vec{AB} - \vec{CD} = \vec{AC} - \vec{BD} \quad \therefore \vec{AB} - \vec{CD} = \vec{AC} - \vec{BD}$$

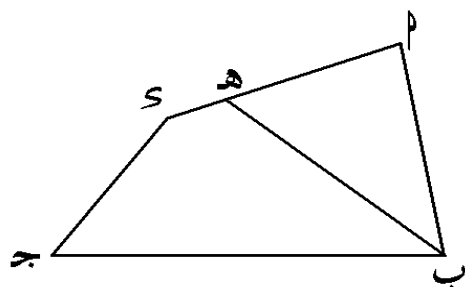
$$\vec{AB} - \vec{CD} = \vec{AC} - \vec{BD} \quad \therefore \vec{AB} - \vec{CD} = \vec{AC} - \vec{BD}$$

$$\vec{AB} - \vec{CD} = \vec{AC} - \vec{BD} \quad \therefore \vec{AB} - \vec{CD} = \vec{AC} - \vec{BD}$$

$$\vec{AB} - \vec{CD} = \vec{AC} - \vec{BD} \quad \therefore \vec{AB} - \vec{CD} = \vec{AC} - \vec{BD}$$

مثال [٤]

في أي شكل رباعي P, B, C, S ، $\vec{PS} = \vec{PB} - \vec{BC} + \vec{CP}$: اثبت أن :



في $\Delta P, B, H$:

$$\textcircled{1} \dots\dots\dots \vec{PH} = \vec{PB} + \vec{BH}$$

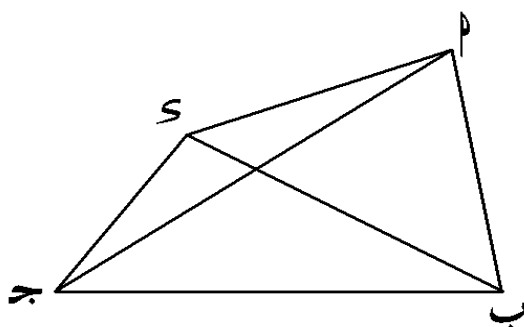
$$\textcircled{2} \dots\dots\dots \vec{CH} + \vec{HP} = \vec{CP} \quad \text{من } \textcircled{1} , \textcircled{2}$$

$$\therefore (\vec{CH} + \vec{HP}) - \vec{HP} = \vec{CP} - \vec{PB} + \vec{BH}$$

$$\therefore \vec{CH} = \vec{CP} - \vec{PB} - \vec{BH}$$

مثال [٥]

في أي شكل رباعي P, B, C, S : $\vec{PS} = \vec{PB} + \vec{CS} - \vec{CP}$: اثبت أن :



$$\text{في } \Delta P, B, H : \therefore \vec{PH} = \vec{PB} + \vec{BH}$$

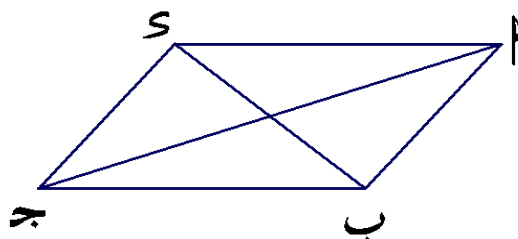
$$\text{في } \Delta P, C, H : \therefore \vec{CH} = \vec{CP} + \vec{HS}$$

$$\therefore \vec{PH} + \vec{CH} = \vec{PB} + \vec{CP}$$

$$\therefore \vec{PS} = \vec{PB} + \vec{CS} - \vec{CP}$$

مثال [٦]

P, B, C, S متوازي أضلاع . اثبت أن : $\vec{PS} = \vec{PB} + \vec{CS}$



$$\therefore \text{في } \Delta P, B, H :$$

$$\textcircled{1} \dots\dots\dots \vec{PH} = \vec{PB} + \vec{BH}$$

$$\therefore \text{في } \Delta P, C, H :$$

$$\textcircled{2} \dots\dots\dots \vec{CH} = \vec{CP} + \vec{HS}$$

بالجمع

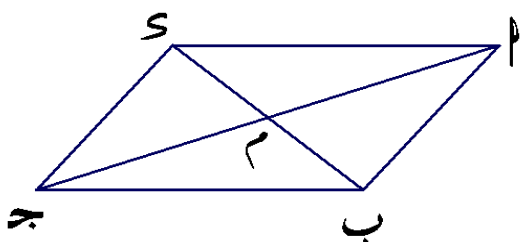
$$\therefore \vec{PH} + \vec{CH} = \vec{PB} + \vec{CP} + \vec{BH} + \vec{HS}$$

$$\therefore \vec{PS} = \vec{PB} + \vec{CS}$$

$$\therefore \vec{PS} = \vec{PB} + \vec{CS}$$

مثال (U)

م ب ج د متوازي أضلاع تقاطع قطراه في نقطة م ، أثبت أن : $\vec{PM} = \vec{PS} + \vec{PD} + \vec{BK}$ $\vec{PM} = \vec{PS} + \vec{PD} + \vec{BK}$



∴ قاعدة متوازي الأضلاع

$$\vec{PM} = \vec{PS} + \vec{PD} + \vec{BK} \quad \text{..... ①}$$

$$\vec{PM} = \vec{PK} + \vec{KM} \quad \text{..... ②}$$

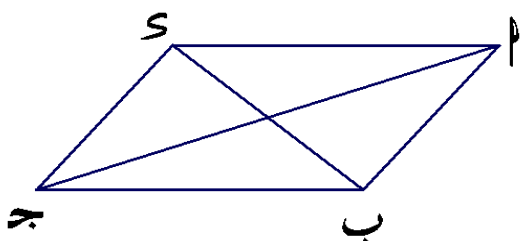
$$\vec{PM} = \vec{PK} + \vec{KM} \quad \text{..... ③} \quad \text{بجمع ① ، ②}$$

$$\vec{PM} + \vec{PK} = \vec{PS} + \vec{PD} + \vec{BK} + \vec{KM}$$

$$\vec{PM} = \vec{PS} + \vec{PD} + \vec{BK} \quad \text{..... ④} \quad \text{∴} \quad \vec{PM} = \vec{PS} + \vec{PD} + \vec{BK}$$

مثال (n)

م ب ج د متوازي أضلاع . أثبت أن : $\vec{PM} = \vec{PS} + \vec{PD} + \vec{BK}$



$$\vec{PM} = \vec{PS} + \vec{PD} + \vec{BK} \quad \text{..... ①}$$

$$\vec{PM} = \vec{PS} + \vec{PD} + \vec{BK} \quad \text{..... ②}$$

$$\vec{PM} = \vec{PS} + \vec{PD} + \vec{BK} \quad \text{..... ③} \quad \text{بجمع ① ، ②}$$

$$\vec{PM} + \vec{PK} = \vec{PS} + \vec{PD} + \vec{BK} + \vec{KM}$$

$$\vec{PM} = \vec{PS} + \vec{PD} + \vec{BK} \quad \text{..... ④}$$

$$\vec{PM} = \vec{PS} + \vec{PD} + \vec{BK}$$

مثال (٩) كتاب المدرسة

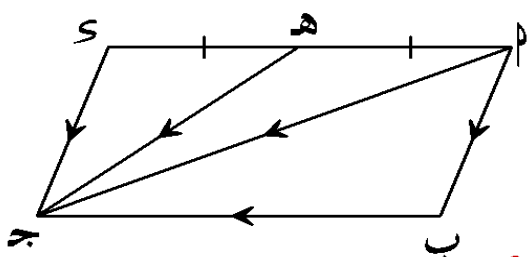
م ب ج د متوازي أضلاع فيه ه منتصف م ، أثبت أن : $\vec{PM} = \vec{PS} + \vec{PD} + \vec{BK}$

$$\vec{PM} = \vec{PS} + \vec{PD} + \vec{BK} \quad \text{..... ①} \quad \text{في } \triangle PMBJ \quad \text{بإضافة } \vec{BK} \text{ للطرفين}$$

$$\vec{PM} + \vec{BK} = \vec{PS} + \vec{PD} + \vec{BK} + \vec{BK}$$

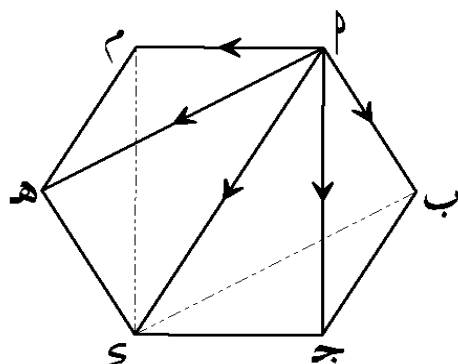
$$\vec{PM} = \vec{PS} + \vec{PD} + \vec{BK} \quad \text{..... ②}$$

$$\vec{PM} = \vec{PS} + \vec{PD} + \vec{BK}$$



مع أرق تحياتي بالنجاح والتفوق ... / وليد رشدي

١٠ ب ج د ه م مسلسل منتظم اثبت ان : $\sqrt{1} + \sqrt{4} + \sqrt{9} + \sqrt{16} + \dots + \sqrt{n^2} = \frac{n(n+1)}{2}$



∴ الشكل ٢ ب، ٣ مستطيل مع خواصه

$$\bullet \cdots \overline{s} = \overline{x} + \overline{y} \cdots$$

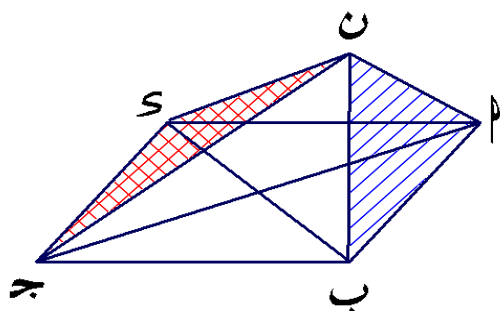
∴ الشك في ج. س. م مستبعد

$$\bullet_2, \bullet_1 \text{ and } \bullet_2 \dots \frac{\overline{\bullet_1}}{s} = \frac{\overline{\bullet_2}}{p} + \frac{\overline{\bullet_1}}{y} \therefore$$

$$\frac{1}{s} \tau = \frac{1}{p} \tau + \frac{1}{q} \tau + \frac{1}{r} \tau + \frac{1}{u} \tau \therefore$$

✍ مثال (١١)

۴ ب ج، متوازی اضلاع، د ای نقطه فی مستواہ اثبت اہ: $\vec{d} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{a}$


$$\frac{1}{\mathcal{D}} = \frac{1}{\mathcal{D}_1} + \frac{1}{\mathcal{D}_2} \quad ; \quad \mathcal{D}_1 \parallel \Delta \quad ;$$

بالجمعة $\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\Delta \gamma} :$

$$\overline{\overline{\mathfrak{A}}} + \overline{\overline{\mathfrak{B}}} = \overline{\overline{\mathfrak{A}}} + \overline{\overline{\mathfrak{B}}} + \overline{\overline{\mathfrak{A}}} + \overline{\overline{\mathfrak{B}}} \therefore$$

$$\frac{1}{5x-2} = \frac{1}{5x-2} \quad \therefore$$

$$\overleftarrow{\mathfrak{z}}\mathfrak{p} + \overleftarrow{\mathfrak{u}}\mathfrak{p} = \overleftarrow{\mathfrak{x}}\mathfrak{p} + \overleftarrow{\mathfrak{v}}\mathfrak{p} \therefore$$

✍ مثال (۱۲)

في Δ $\overline{m} \perp \overline{d}$: m منتصف $\overline{cd}$ ، $\overline{m} \perp \overline{cd}$ ، $\overline{m} \perp \overline{cd}$ ، أثبت أنه :

$$\frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}}$$

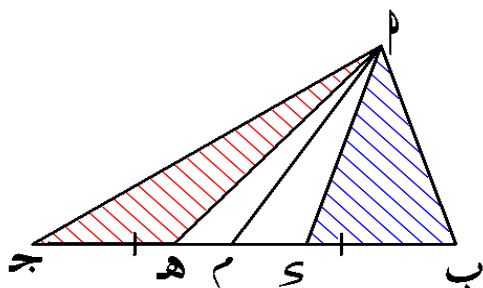
$$\bullet \cdots \overleftarrow{C} \overrightarrow{P} = \overleftarrow{C} \overrightarrow{S} + \overleftarrow{S} \overrightarrow{P} \quad \therefore : C S P \Delta_{\text{ف}} \therefore$$

∴ Δ ۱۲۳

$$\text{بالجملة} \quad \textcircled{2} \text{-----} \overline{\text{ج}} \text{ } \overline{\text{پ}} = \overline{\text{ج}} \text{ } \overline{\text{خ}} + \overline{\text{خ}} \text{ } \overline{\text{پ}} \quad \therefore$$

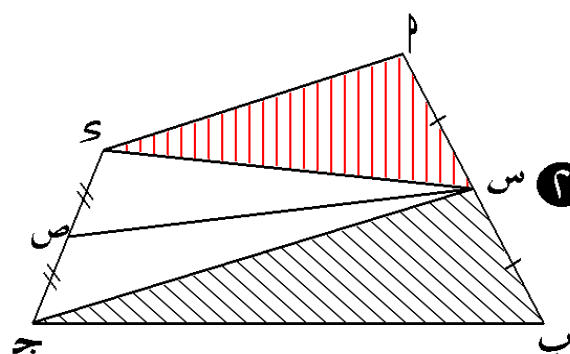
$$\overline{\gamma}^{\perp} + \overline{c}^{\perp} = (\overline{\gamma}^{\perp} + \overline{b}^{\perp}) + (\overline{c}^{\perp} + \overline{s}^{\perp})$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \therefore$$



مثال [١٣]

م ب ج د شكل رباعي فيه س منتصف م ب ، ص منتصف ج د أثبت أن : $\vec{PS} = \vec{PD} + \vec{BS}$



في $\triangle PSV$:

$$\vec{PS} = \vec{SV} + \vec{VP} \quad \text{..... ١}$$

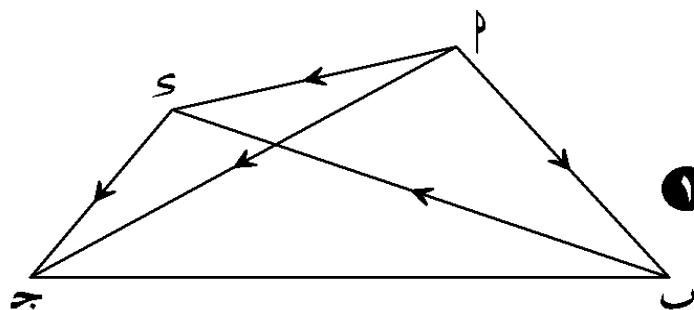
في $\triangle BSV$: $\vec{BS} = \vec{SV} + \vec{VB}$ ٢

بالجمع ،

$$\vec{PS} = \vec{SV} + \vec{VP} = \vec{SV} + \vec{BS} \quad \therefore \vec{PS} = \vec{PD} + \vec{BS}$$

مثال [١٤]

م ب ج د شكل رباعي فيه $\vec{PS} = \vec{PD} + \vec{BS}$ أثبت أن : $\vec{PS} = \vec{PD} + \vec{BS}$



في $\triangle PSV$:

$$\vec{PS} = \vec{SV} + \vec{VP} \quad \therefore$$

$$\vec{PS} = \vec{SV} + \vec{VP} \quad \therefore \vec{PS} = \vec{PD} + \vec{BS} \quad \text{..... ١}$$

في $\triangle BSV$:

$$\vec{BS} = \vec{SV} + \vec{VB}$$

$$\vec{BS} = \vec{SV} + \vec{VB} \quad \therefore \vec{BS} = \vec{PD} + \vec{BS} \quad \text{..... ٢}$$

$$\vec{BS} + \vec{PS} = \vec{PD} + \vec{BS} + \vec{PS} \quad \therefore \vec{BS} + \vec{PS} = \vec{PD} + \vec{BS} + \vec{PS}$$

$$\vec{BS} = \vec{PD}$$

$$\vec{PS} = \vec{PD} - \vec{BS} + \vec{PS} + \vec{BS} \quad \therefore$$

$$\vec{BS} + \vec{PS} = \vec{PD} + \vec{BS} \quad \therefore$$

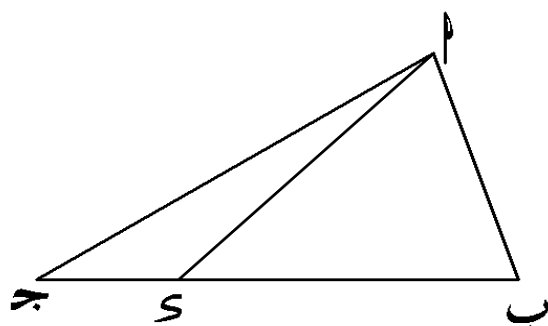
$$\vec{PS} = \vec{PD} \quad \therefore$$

$$\vec{PS} = \vec{PD} + \vec{BS} \quad \therefore \vec{PS} = \vec{PD} + \vec{BS}$$

$$\vec{PS} = \vec{PD} + \vec{BS} \quad \therefore$$

مثال (١٥)

م ب ج مثلث ، $\vec{S}$ نقطة بحيث $\vec{S} = \vec{S}_3 + \vec{P}_3$ أثبت أن : $\vec{S} = \vec{S}_3 + \vec{P}_3$



في $\triangle PBC$:

$$\vec{S}_B = \vec{S}_P + \vec{P}_B \quad \text{..... ١}$$

في $\triangle PBC$:

$$\vec{S}_C = \vec{S}_P + \vec{P}_C$$

بضرب الطرفين في ٣

$$\vec{S}_B = \vec{S}_C = \vec{S}_P + \vec{P}_C \quad \text{..... ٢}$$

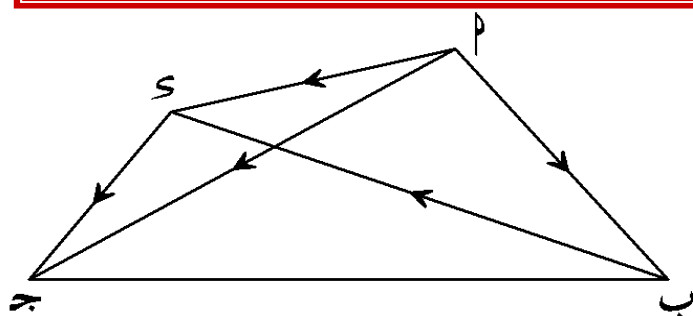
$$\vec{S}_B - \vec{S}_C = \vec{P}_C - \vec{P}_B$$

$$\vec{S}_B + \vec{S}_C - \vec{S}_P = \vec{P}_C + \vec{P}_B$$

$$\vec{S}_B + \vec{S}_C - \vec{S}_P = \vec{P}_C + \vec{P}_B = \vec{S}_P$$

مثال (١٦)

م ب ج د شكل رباعي فيه $\vec{S} = \vec{S}_2 - \vec{P}_2$ أثبت أن : $\vec{S} = \vec{S}_2 - \vec{P}_2$



في $\triangle PBC$:

$$\vec{S}_B = \vec{S}_C + \vec{P}_C \quad \text{..... ١}$$

في $\triangle PCD$:

$$\vec{S}_D = \vec{S}_C + \vec{P}_D$$

$$\vec{S}_B + \vec{S}_D = \vec{S}_C + \vec{P}_C + \vec{S}_C + \vec{P}_D = \vec{S}_C + \vec{P}_C + \vec{P}_D$$

ب طرح ٢ من ١

$$\vec{S}_B - \vec{S}_D = \vec{P}_C - \vec{P}_D$$

$$\vec{S}_B - \vec{S}_D = \vec{P}_C - \vec{P}_D$$

$$\vec{S}_B = \vec{S}_D + \vec{P}_C - \vec{P}_D$$

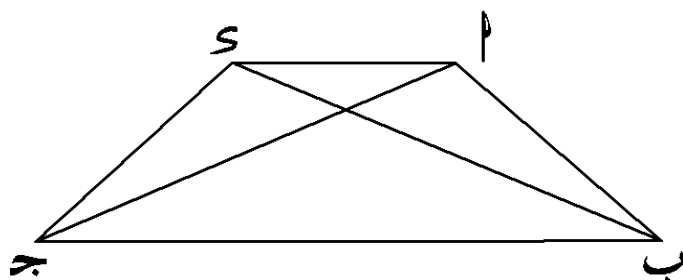
$$\vec{S}_B = \vec{S}_D + \vec{P}_C - \vec{P}_D = \vec{S}_D + \vec{P}_C - \vec{P}_D$$

$$\vec{S}_B = \vec{S}_D + \vec{P}_C - \vec{P}_D$$

مثال [١٧]

الم ب ج د شبه منحرف فيه $\overline{ب ج} \parallel \overline{س پ}$ ، $س پ ٢ = ب ج ٢$

اثبت أن : $\overrightarrow{ب ج ٣} = \overrightarrow{س پ ٢} + \overrightarrow{ب ج ٢}$



في $\Delta ب ج د$

$$\overrightarrow{ب ج} = \overrightarrow{ب د} + \overrightarrow{د ج} \quad \therefore$$

$$\overrightarrow{ب ج ٢} = \overrightarrow{ب د ٢} + \overrightarrow{د ج ٢} \quad \text{..... ١}$$

في $\Delta س پ د$:

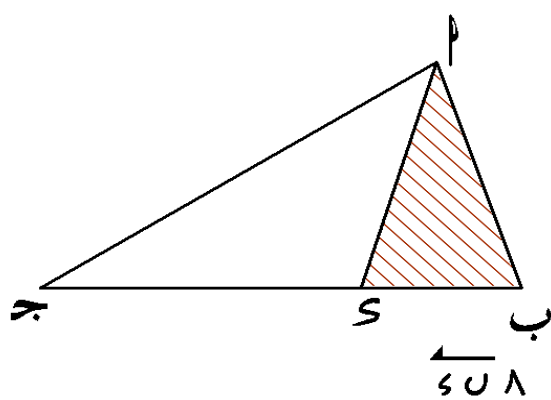
$$\overrightarrow{س پ} = \overrightarrow{س د} + \overrightarrow{د پ} \quad \therefore$$

$$\overrightarrow{س پ ٢} = \overrightarrow{س د ٢} + \overrightarrow{د پ ٢} \quad \text{..... ٢} \quad \text{بالجمع ١ ، ٢}$$

$$\overrightarrow{ب ج ٣} = \overrightarrow{ب ج ٢} \times \frac{١}{٢} \times ٢ + \overrightarrow{ب ج ٢} = \overrightarrow{س پ ٢} + \overrightarrow{ب ج ٢} \quad \therefore$$

مثال [١٨]

الم ب ج مثلث فيه $س \in \overline{ب ج}$ بحيث $\frac{٠}{٨} = \frac{س ب}{ب ج}$ اثبت أن : $\overrightarrow{س پ ٠} + \overrightarrow{ب پ ٨} = \overrightarrow{س پ ١٣}$



في $\Delta س ب ج$: $\overrightarrow{س ب} + \overrightarrow{ب ج} = \overrightarrow{س ج} \quad \therefore$

$$\overrightarrow{س پ ٠} + \overrightarrow{ب پ ٠} = \overrightarrow{س ج ٠} \quad \text{..... ١}$$

في $\Delta س ب ج$: $\overrightarrow{س ب} + \overrightarrow{ب ج} = \overrightarrow{س ج} \quad \therefore$

$$\overrightarrow{س پ ٨} + \overrightarrow{ب پ ٨} = \overrightarrow{س ج ٨} \quad \text{..... ٢}$$

$$\overrightarrow{س ج ٨} = \overrightarrow{س ج ٠} \quad \therefore$$

$$\frac{٠}{٨} = \frac{س ب}{ب ج} \quad \therefore$$

$$\overrightarrow{س پ ٨} + \overrightarrow{ب پ ٨} = \overrightarrow{س پ ٠} + \overrightarrow{ب پ ٠} \quad \therefore$$

$$\overrightarrow{س پ ١٣} = \overrightarrow{ب پ ٨} + \overrightarrow{س پ ٠} \quad \therefore$$



$\frac{1}{\epsilon} 0 = \frac{1}{\epsilon} \cdot 0 = 0$: اثبت ان : $\frac{r}{s} = \frac{p}{q} = \frac{s}{u}$ بحيث ان : $p \in \mathbb{H}, p \in \mathbb{H}, \Delta p \in \mathbb{H}$

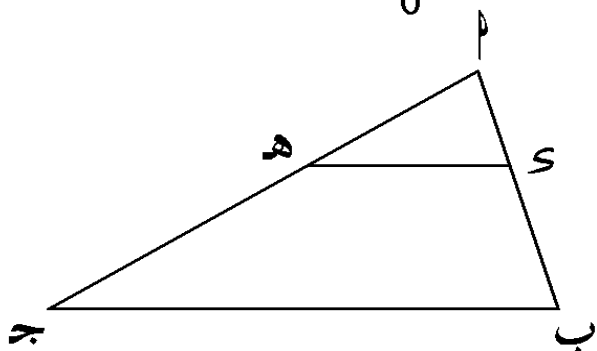
$$\frac{\overline{CP}}{OP} = \frac{CP}{OP} \therefore \frac{r}{0} = \frac{sp}{CP} \therefore \frac{r}{3} = \frac{sp}{CP} \therefore$$

$$\frac{r}{y} = \frac{2p}{2q} \therefore \text{دابل}$$

$$\therefore \frac{P}{0} = \frac{P}{0} = \frac{P}{0} \text{ بالمرز}$$

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) \frac{r}{0} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \therefore$$

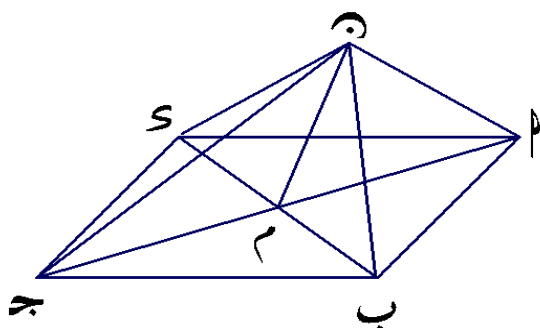
$$\frac{1}{0} \frac{1}{0} = \frac{1}{0} \therefore$$



✍ مثال (۲۰)

متوازي أضلاع $ABCD$ ، تقاطع قطراه في $م$ ، فإذا كان $\angle$ نقطة خارجة عنه

الله أه : $\frac{1}{\mathcal{F}} = \frac{1}{\mathcal{F}_1} + \frac{1}{\mathcal{F}_2} + \frac{1}{\mathcal{F}_3} + \frac{1}{\mathcal{F}_4}$



فِي مِثْلِهِ

$$\bullet \dots \dots \dots \overleftarrow{\mathcal{P}}_2 = \overleftarrow{\mathcal{P}}_1 + \overleftarrow{\mathcal{P}}_3 \dots$$

∴ في Δ $\varnothing$:

$$\textcircled{2} \dots\dots\dots \overline{42} = \overline{4} + \overline{2} \because$$

بالجملة

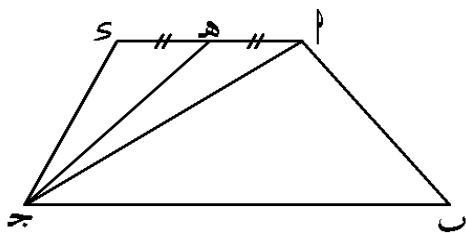
$$\overleftarrow{\psi}\overrightarrow{\psi} + \overleftarrow{\psi}\overrightarrow{\psi} = (\overleftarrow{\psi}\overrightarrow{\psi} + \overleftarrow{\psi}\overrightarrow{\psi}) + (\overleftarrow{\psi}\overrightarrow{\psi} + \overleftarrow{\psi}\overrightarrow{\psi}) \therefore$$

مثال [٢١]

م ب جء شبه منحرف فيه م جء // م س ، ه منتصف م س

اثبت أن : ① $\vec{م ج} = \vec{م س} + \vec{س ج} + \vec{ج ب}$ ② $\vec{م ج} = \vec{م س} + \vec{س ج} + \vec{ج ب}$

① :: في م ب جء



:: $\vec{م ج} = \vec{م س} + \vec{س ج} + \vec{ج ب}$:: بإضافة جء للطرفين

$$\vec{م ج} = \vec{م س} + \vec{س ج} + \vec{ج ب} = \vec{م س} + (\vec{س ج} + \vec{ج ب})$$

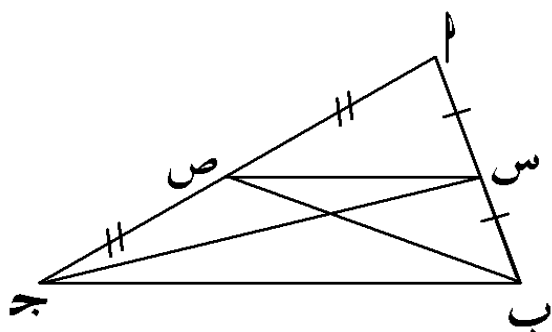
في م ب جء :

:: $\vec{م ج} = \vec{م س} + \vec{س ج} + \vec{ج ب}$:: بإضافة جء للطرفين

$$\vec{م ج} = \vec{م س} + \vec{س ج} + \vec{ج ب} = \vec{م س} + (\vec{س ج} + \vec{ج ب})$$

مثال [٢٢]

م ب جء فيه س منتصف م ب ، ص منتصف م جء اثبت أن : $\vec{م ج} = \vec{م س} + \vec{س ج} + \vec{ج ب}$



$$\vec{م ج} = \vec{م س} + \vec{س ج} + \vec{ج ب} \dots\dots\dots ①$$

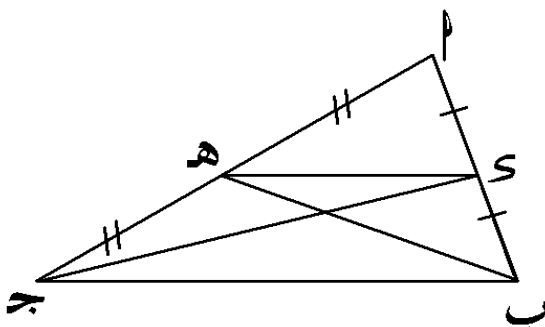
$$\vec{م ج} = \vec{م س} + \vec{س ج} + \vec{ج ب} \dots\dots\dots ②$$

$$\vec{م ج} = \vec{م س} + \vec{س ج} + \vec{ج ب} \dots\dots\dots ③$$

$$\vec{م ج} + \vec{ج ب} = \vec{م س} + \vec{س ج} + \vec{ج ب} + \vec{ج ب} \dots\dots\dots ④$$

مثال (٢٣)

م ب ج مثلث ، ه منتصف م ب ، ه منتصف م ج أثبت أن : $\frac{3}{2} \overrightarrow{ب ج} = \overrightarrow{ج ه} + \overrightarrow{ه ب}$



∴ في Δ م ب ج : ∴ ه منتصف م ب

$$\text{∴ } \overrightarrow{ب ج} = \overrightarrow{ب ه} + \overrightarrow{ه ج} \text{ ①}$$

∴ ه منتصف م ج

$$\text{∴ } \overrightarrow{م ج} = \overrightarrow{م ه} + \overrightarrow{ه ج} \text{ ② بالجمع}$$

$$\text{∴ } \overrightarrow{ب ج} + \overrightarrow{م ج} = \overrightarrow{ب ه} + \overrightarrow{ه ج} + \overrightarrow{م ه} + \overrightarrow{ه ج}$$

$$\text{∴ } \overrightarrow{ب ج} + \overrightarrow{م ج} = \overrightarrow{ب ه} + \overrightarrow{م ه} + 2\overrightarrow{ه ج}$$

$$\text{∴ } \overrightarrow{ب ج} + \overrightarrow{م ج} = \overrightarrow{ب ه} + \overrightarrow{م ه} + 2\overrightarrow{ه ج}$$

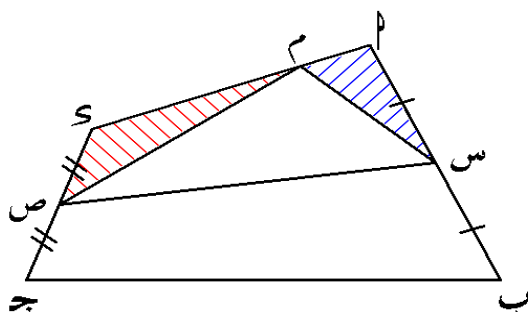
بالقسمة ÷ ٢ للطرفين

$$\text{∴ } \frac{3}{2} \overrightarrow{ب ج} = \overrightarrow{ج ه} + \overrightarrow{ه ب}$$

مثال (٢٤)

م ب ج د مثلث رابعي فيه ه منتصف م ب ، ه منتصف ج د ، م ∉ م ج

أثبت أن : $\overrightarrow{م ج} = \overrightarrow{م ه} + \overrightarrow{ه ج} + \overrightarrow{ج د}$



في Δ م ب ج :

$$\text{∴ } \overrightarrow{م ج} = \overrightarrow{م ه} + \overrightarrow{ه ج}$$

$$\text{∴ } \overrightarrow{م ج} = \overrightarrow{م ه} + \overrightarrow{ه ج}$$

في Δ م ج د :

$$\text{∴ } \overrightarrow{م ج} = \overrightarrow{م ه} + \overrightarrow{ه ج}$$

$$\text{∴ } \overrightarrow{م ج} = \overrightarrow{م ه} + \overrightarrow{ه ج}$$

$$\text{∴ } \overrightarrow{م ج} = \overrightarrow{م ه} + \overrightarrow{ه ج} \text{ ③}$$



..... ٤ بالتعويض في الطرف الأيمن

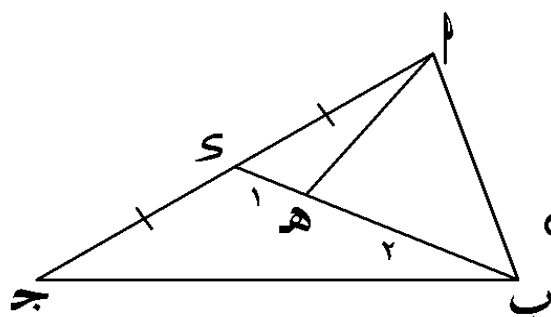
$$\begin{aligned} \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SR} &= \overrightarrow{PR} \\ \overrightarrow{PS} + (\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SR}) + \overrightarrow{SR} &= \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SR} + \overrightarrow{SR} \\ (\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{PS}) + (\overrightarrow{SR} + \overrightarrow{SR}) &= \\ \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SR} &= \overrightarrow{PR} \end{aligned}$$

مثال (٢٥)

م ب ج Δ ، ب ه متوسط ، ه $\in$ $\overline{PS}$ أثبت أن :

٢ $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HS}$

١ $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{BH}$



بالمضرب $\times 2$ للطرفية

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PS} &= \overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HS} \\ \overrightarrow{PS} &= \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{BH} \end{aligned}$$

في Δ ب ه ج :

$$\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HS}$$

$$\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HS}$$

$$\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HS}$$

$$\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HS}$$

$$\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HS}$$

$$\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HS}$$

$$\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HS}$$

$$\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HS}$$

$$\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HS}$$

$$\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HS}$$

$$\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HS}$$

$$\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HS}$$

$$\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HS}$$

تارين (٣) على العمليات على المتجهات

ك [١] أكمل ما يأتي :

$$١ \text{ في المثلث } \vec{P} : \vec{B} - \vec{A} = \vec{P} \dots\dots$$

$$٢ \text{ في المثلث } \vec{P} : \vec{B} + \vec{A} = \vec{P} \dots\dots$$

$$٣ \text{ في المثلث } \vec{P} : \vec{B} + \vec{A} + \vec{C} = \vec{P} \dots\dots$$

$$٤ \text{ في المثلث } \vec{P} : \vec{B} = \vec{A} + \vec{C} \text{ فان : } \vec{P} = \vec{B} + \vec{A} \dots\dots$$

ك [٢] في المثلث $\vec{P}$ أكمل ما يأتي :

$$١ \vec{P} = \vec{B} + \vec{A} \dots\dots$$

$$٢ \vec{P} = \vec{B} + \vec{A} \dots\dots$$

$$٣ \vec{P} = \vec{B} - \vec{A} \dots\dots$$

$$٤ \vec{P} = \vec{B} - \vec{A} \dots\dots$$

ك [٣] $\vec{P}$ متوازي أضلاع تقاطع قطراه في ك أكمل ما يأتي :

$$١ \vec{P} = \vec{B} + \vec{A} \dots\dots$$

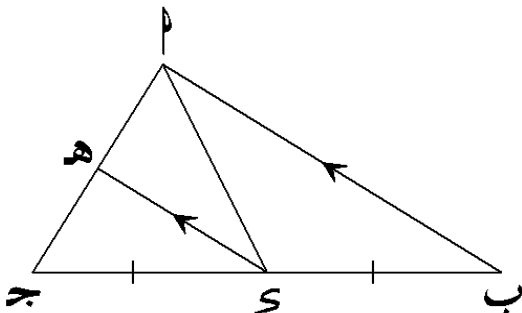
$$٢ \vec{P} \times 2 = \vec{B} \dots\dots$$

$$٣ \vec{P} \times 2 = \vec{B} + \vec{A} \dots\dots$$

$$٤ \vec{P} = \vec{B} + \vec{A} \dots\dots$$

$$٥ \vec{P} \times 2 = \vec{B} + \vec{A} \dots\dots$$

$$٦ \vec{P} = \vec{B} + \vec{A} + \vec{C} \dots\dots$$

ك [٤] في المثلث $\vec{P}$: إذا كانت $\vec{P}$ منتصف $\vec{B}$ ، $\vec{P} \parallel \vec{A}$ فان

$$١ \vec{P} \times 2 = \vec{B} + \vec{A} \dots\dots$$

$$٢ \vec{P} = \vec{B} - \vec{A} \dots\dots$$

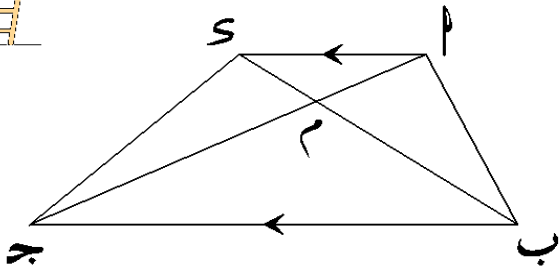
$$٣ \vec{P} = \vec{B} + \vec{A} \dots\dots$$

$$٤ \vec{P} + \dots\dots = \vec{B} + \vec{A} + \vec{C} \dots\dots$$

$$٥ \vec{P} = \vec{B} + \vec{A} + \vec{C} \dots\dots$$



٥] في الشكل المقابل : $\vec{p}$ و $\vec{q}$ شبه منحرف ، $\vec{p} \parallel \vec{q}$ ، $\vec{r} = \vec{p} + \vec{q}$ فان :



$$1) \vec{r} \times 2 = \vec{p} + \vec{q}$$

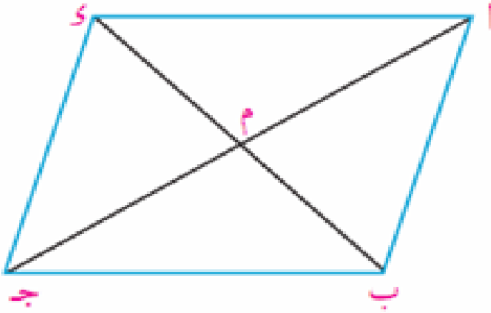
$$2) \vec{r} \times 3 = \vec{p} + \vec{q}$$

$$3) \vec{r} \times \frac{3}{2} = \vec{p} - \vec{q}$$

$$4) \vec{r} + \vec{p} = \vec{p} + \vec{q} + \vec{r} + \vec{s}$$

$$5) \vec{r} = \vec{p} - \vec{q} + \vec{s} + \vec{r}$$

٦] في الشكل المقابل : $\vec{p}$ و $\vec{q}$ متوازي أضلاع ، $\vec{r}$ نقطة تقاطع قطراه . أكمل :



$$1) \vec{r} = \vec{p} + \vec{q}$$

$$2) \vec{r} = \vec{p} + \vec{q}$$

$$3) \vec{r} = \vec{p} + \vec{q}$$

$$4) \vec{r} = \vec{p} + \vec{q}$$

$$5) \vec{r} = \vec{p} + \vec{q}$$

$$6) \vec{r} \times 2 = \vec{p} + \vec{q}$$

$$7) \vec{r} = \vec{p} + \vec{q}$$

$$1) \vec{r} = \vec{p} + \vec{q}$$

$$2) \vec{r} = \vec{p} + \vec{q}$$

$$3) \vec{r} = \vec{p} + \vec{q}$$

$$4) \vec{r} = \vec{p} + \vec{q}$$

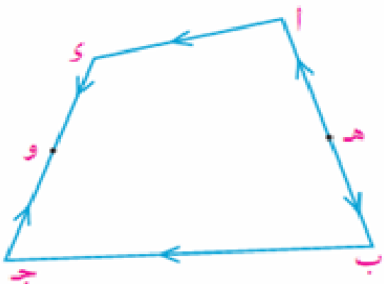
$$5) \vec{r} = \vec{p} + \vec{q}$$

$$6) \vec{r} \times 2 = \vec{p} + \vec{q}$$

$$7) \vec{r} = \vec{p} + \vec{q}$$

٨] في أي مثلث $\vec{p}$ و $\vec{q}$ ، أثبت أن : $\vec{r} = \vec{p} + \vec{q}$

٩] في أي شكل رباعي $\vec{p}$ و $\vec{q}$ ، أثبت أن : $\vec{r} = \vec{p} + \vec{q}$



١٠] في الشكل المقابل : $\vec{p}$ و $\vec{q}$ شكل رباعي

$$\vec{p} \times \vec{q} = \vec{r} + \vec{s}$$

$$\vec{r} + \vec{s} = \vec{p} + \vec{q}$$



كـ (١٠) $\vec{p} + \vec{q} = \vec{r}$: شكل رباعي إذا كان

اثبت أن : $\vec{p} + \vec{q} = \vec{r}$ متوازي أضلاع .

كـ (١١) $\vec{p} + \vec{q} = \vec{r}$ مثلث فيه $\vec{p}$ ، $\vec{q}$ منتصف $\vec{r}$ ،

اثبت أن : $\vec{p} + \vec{q} = \vec{r}$ متوازي أضلاع

كـ (١٢) $\vec{p} + \vec{q} = \vec{r}$ مثلث ، $\vec{q}$ ، $\vec{r}$ منتصفات الأضلاع $\vec{p}$ ، $\vec{q}$ ، $\vec{r}$ على الترتيب .

اثبت أن : $\vec{p} + \vec{q} = \vec{r}$ متوازي أضلاع

كـ (١٣) $\vec{p} + \vec{q} = \vec{r}$ شبه منحرف فيه : $\vec{p} \parallel \vec{q}$ ، $\frac{r}{3} = \frac{p}{3} + \frac{q}{3}$

اثبت أن : $\vec{p} + \vec{q} = \vec{r}$ متوازي أضلاع

كـ (١٤) $\vec{p} + \vec{q} = \vec{r}$ متوازي أضلاع فيه $\vec{q}$ منتصف $\vec{p}$ ،

اثبت أن : $\vec{p} + \vec{q} = \vec{r}$ متوازي أضلاع

كـ (١٥) $\vec{p} + \vec{q} = \vec{r}$ شبه منحرف فيه $\vec{p} \parallel \vec{q}$ ، $\vec{r} = \frac{p}{3} + \frac{q}{3}$

اثبت أن : $\vec{p} + \vec{q} = \vec{r}$ متوازي أضلاع

كـ (١٦) $\vec{p} + \vec{q} = \vec{r}$ متوازي أضلاع اثبت أن : $\vec{p} + \vec{q} = \vec{r}$ متوازي أضلاع

كـ (١٧) مثلث $\vec{p} + \vec{q} = \vec{r}$ ، $\vec{q}$ منتصف $\vec{p}$ ، اثبت أن : $\vec{p} + \vec{q} = \vec{r}$ متوازي أضلاع

كـ (١٨) $\vec{p} + \vec{q} = \vec{r}$ مثلث ، $\vec{p} \parallel \vec{q}$ بحيث $\vec{p} = 2\vec{q}$ ،

اثبت أن : $\vec{p} + \vec{q} = \vec{r}$ متوازي أضلاع



كـ [١٩] $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ شبه المنحرف فيه $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ، $\vec{c}$ منتصف $\vec{a}$.

اثبت أن : $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c} + \vec{c}$

كـ [٢٠] $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ شكل رباعي فيه $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

اثبت أن : $\vec{a} = \vec{b} - \vec{c} - \vec{c}$

كـ [٢١] $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ شكل رباعي فيه $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ، $\vec{c} = \vec{0}$.

اثبت أن : $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$

كـ [٢٢] $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ مثلث فيه $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ منتصفات القطع $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ على الترتيب.

اثبت أن : $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$

كـ [٢٣] في أي شكل رباعي $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$. اثبت أن : $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$

كـ [٢٤] $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ شبه منحرف فيه $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ، $\vec{c}$ منتصف $\vec{a}$ ، $\vec{d}$ منتصف $\vec{b}$ ، $\vec{e}$ منتصف $\vec{c}$ ، $\vec{f}$ منتصف $\vec{d}$.

$\vec{a} = \vec{b}$ ، $\vec{c} \parallel \vec{d}$ ، $\vec{e} = \vec{f}$: فاثبت أن : $\vec{a} = \vec{b}$

كـ [٢٥] $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ شبه منحرف فيه $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ، $\vec{c} = \vec{0}$: اثبت أن : $\vec{a} = \vec{b}$

كـ [٢٦] إذا كان : $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ شكل رباعي فيه $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ، $\vec{c} = \vec{0}$.

اثبت أن : $\vec{a} = \vec{b}$

كـ [٢٦] حاول أن تحل : $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ شكل رباعي فيه : $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ، $\vec{c} = \vec{0}$: اثبت أن :

① $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ شبه منحرف ② $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$

تطبيقات على المتجهات

أولا تطبيقات هندسية

في الشكل الرباعي $ABCD$:
 ① إذا كان $\vec{AB} = \vec{DC}$ ما تستنتج ؟

② إذا كان $\vec{AB} = \frac{3}{2} \vec{DC}$ ما العلاقة بين $\vec{AB}$ ، $\vec{DC}$ ؟

لاحظ أن : إذا كان : $\vec{AB} = \vec{DC}$ ، $\vec{AB} \neq \vec{DC}$: $\vec{AB} \parallel \vec{DC}$

وعلى ذلك يمكن استخدام المتجهات والعمليات عليها في إثبات بعض النظريات والعلاقات الهندسية

مثال (1)

باستخدام المتجهات اثبت أن :

إذا توازي وتساوى ضلعان متقابلان في الشكل الرباعي كان الشكل متوازي أضلاع .

المعطيات : $ABCD$ شكل رباعي ، $\vec{AB} \parallel \vec{DC}$ ، $AB = DC$

المطلوب اثبت أن $\vec{AD} \parallel \vec{BC}$

العمل نرسم

$\therefore \vec{AB} \parallel \vec{DC}$ ، $AB = DC$

$\therefore \vec{AB} = \vec{DC}$

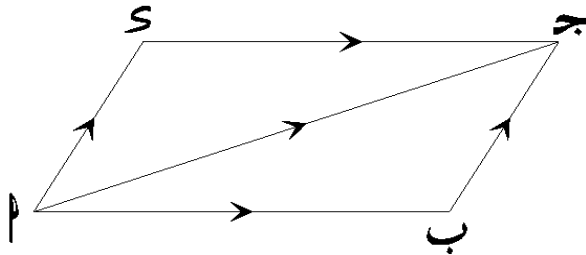
في $\triangle ABC$: $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$ ①

في $\triangle ADC$: $\vec{AC} = \vec{AD} + \vec{DC}$ ②

$\therefore \vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AC} + \vec{AD} + \vec{DC}$

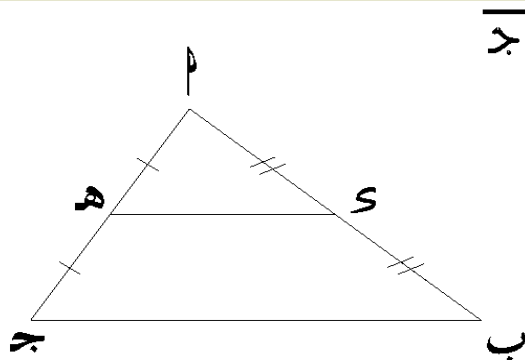
$\therefore \vec{AB} = \vec{AD} + \vec{DC}$

$\therefore$ الشكل $ABCD$ متوازي أضلاع .



باستخدام المتجهات

اثبت أن : القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفى ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث



المعطيات : في $\triangle P B S$: $\overline{H}$ منتصف $\overline{P B}$ ، $\overline{G}$ منتصف $\overline{P S}$

المطلوب : $\overline{H G} \parallel \overline{B S}$

البرهان : $\therefore \overline{H}$ منتصف $\overline{P B}$

$$\therefore \overline{H} = \frac{1}{2} \overline{P B}$$

$\therefore \overline{H}$ منتصف $\overline{P B}$

$$\therefore \overline{H} = \frac{1}{2} \overline{P B}$$

$$\therefore \overline{H} = \frac{1}{2} \overline{P B}$$

$$\therefore \overline{H} = \frac{1}{2} \overline{P B}$$

في $\triangle P B S$: $\overline{H} = \overline{P} + \overline{B}$ ١

في $\triangle P S B$: $\overline{G} = \overline{P} + \overline{S}$ ٢ بالتعويض في ٢

$$\therefore \overline{H} = \frac{1}{2} (\overline{P} + \overline{B}) = \frac{1}{2} \overline{P} + \frac{1}{2} \overline{B} = \overline{G} + \frac{1}{2} \overline{B} = \overline{G} \quad \therefore \overline{H} = \overline{G} \quad \text{..... ٣}$$

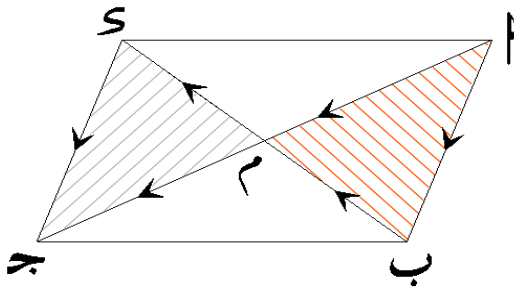
مع ١ ، ٣ ينتج أن

$$\therefore \overline{H} = \overline{G} \quad \therefore \overline{H} = \overline{G}$$

$$\text{لاحظ أن : } \parallel \overline{H} \parallel \frac{1}{2} \parallel \overline{G} \parallel \text{ فيكون طول } \overline{H} = \text{طول } \overline{G} \quad \therefore \overline{H} = \overline{G}$$

مثال [٣]

باستخدام المتجهات : اثبت أن : قطري متوازي الأضلاع ينصف كلا منهما الآخر .



من متوازي الأضلاع $\vec{سج} = \vec{بم}$

نفرض أن : م منتصف $\vec{بس}$: $\vec{سم} = \vec{بم}$

السم المتجهية $\vec{سم}$ ، $\vec{بم}$ فيكون :

في $\triangle بسم$: $\vec{سم} = \vec{بم} + \vec{بس}$

في $\triangle جسم$: $\vec{سم} = \vec{جس} + \vec{جم}$

$\vec{سم} = \vec{بم}$ عملا

$\vec{سم} = \vec{بم}$

وحيث أن : $\vec{سم}$ ، $\vec{بم}$ لهما نفس الاتجاه وتشتركان في نقطة م .

$\therefore$ كل منهما يقع على نفس المستقيم ،

$\therefore$ م ، ج ، ب على استقامة واحدة .

$\therefore$ القطران $\vec{بم}$ ، $\vec{جس}$ ينصف كلا منهما الآخر .

مثال [٤]

باستخدام المتجهات اثبت أن النقط : م (١ ، ٤) ، ب (١ - ، ٢ -)

، ج (٢ - ، ٣ -) هي رؤوس مثلث قائم الزاوية في ب .

في $\triangle بسم$:

$$\vec{بم} = \vec{بم} - \vec{بس} = \vec{م} - \vec{س} = (1, 4) - (1, 2) = (0, 2)$$

$$\vec{بج} = \vec{بج} - \vec{بس} = \vec{ج} - \vec{س} = (2, 3) - (1, 2) = (1, 1)$$

$$\therefore (1, 1) \cdot (0, 2) = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 2 \neq 0$$

$$\therefore \vec{بم} \perp \vec{بج} \therefore \angle م ب ج = 90^\circ$$

$\therefore$ المثلث $\triangle بسم$ قائم الزاوية في ب .

مثال [5]

اثبت أن النقط: $P(4, 7)$ ، $B(2, 3)$ ، $C(0, 2)$ ، $E(3, 4)$ هي رؤوس شبه منحرف .

$$\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{P} = (2, 3) - (4, 7) = (-2, -4)$$

$$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{E} = (0, 2) - (3, 4) = (-3, -2)$$

$$\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{EC} \quad \therefore \overrightarrow{PB} \parallel \overrightarrow{EC}$$

$$\overrightarrow{PE} = \overrightarrow{E} - \overrightarrow{P} = (4, 7) - (3, 4) = (1, 3)$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{B} = (0, 2) - (2, 3) = (-2, -1)$$

$$\therefore \overrightarrow{PE} \neq \overrightarrow{BC} \quad \therefore \overrightarrow{PE} \times \overrightarrow{BC} = 1 \times (-1) - 3 \times (-2) = -1 + 6 = 5 \neq 0$$

$$\therefore \overrightarrow{PE} \nparallel \overrightarrow{BC} \quad \therefore P, B, C, E \text{ شبه منحرف .}$$

مثال [6]

إذا كانت: $P(1, 2)$ ، $B(2, 0)$ ، $C(1, 3)$ أوجد إحداثي نقطة E بحيث يكون الشكل P, B, C, E شبه منحرف فيه $\overrightarrow{PB} \parallel \overrightarrow{CE}$

نفرض أن: $E(x, y)$

$$\therefore \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{P} = (2, 0) - (1, 2) = (1, -2)$$

$$\therefore \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{E} - \overrightarrow{C} = (x, y) - (1, 3) = (x-1, y-3)$$

$$\therefore \overrightarrow{PB} \parallel \overrightarrow{CE} \quad \therefore \overrightarrow{PB} \times \overrightarrow{CE} = 0 \quad \text{حيث } 0 < \dots$$

$$\therefore (1, -2) \times (x-1, y-3) = 0$$

$$\therefore 1(y-3) - (-2)(x-1) = 0 \quad \therefore y-3 = -2(x-1)$$

$$\therefore y-3 = -2x+2 \quad \therefore y = -2x+5$$

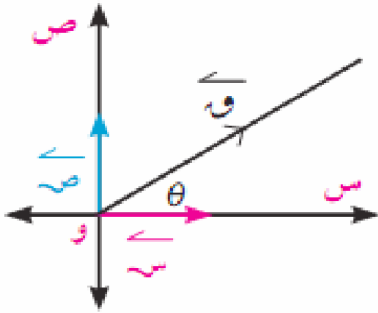
$$\therefore \text{إحداثيا نقطة } E \text{ هي } (-3, 11) \text{ ، } (1, 3) \text{ ، } (2, 0) \text{ ، } (1, 2)$$

$\therefore$ يوجد عدد لانتهائي من الأزواج المترتبة التي تمثل E وذلك حسب قيمة k

$\therefore$ ليست وحيدة وعند $k = 2$ مثلا فان $E(7, 11)$

مثال (U)

إذا أثرت القوى $\vec{F}_1 = \vec{F}$ ، $\vec{F}_2 = \vec{S}$ ، $\vec{F}_3 = \vec{Q}$ ، $\vec{F}_4 = \vec{V}$ ، $\vec{F}_5 = \vec{O}$ في نقطة مادية . احسب مقدار واتجاه محصلة هذه القوى (القوى مقاسه بالنيوتن)



$$\therefore \text{محصلة القوى } \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \vec{F}_5$$

$$\therefore \vec{F} = \vec{F}_1 (1 + 1 + 2) + \vec{S} (0 - 1 + 1) = \vec{F}_1 (4) + \vec{S} (0) = 4\vec{F}_1$$

$$= 4\vec{F}_1 + 0\vec{S} = 4\vec{F}_1$$

$$\therefore \text{مقدار المحصلة} = \|\vec{F}\| = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4$$

$$= \sqrt{16 + 0} = 4 \text{ نيوتن}$$

$$\text{اتجاه المحصلة} : \theta = \tan^{-1} \left(\frac{4}{0} \right) = 90^\circ$$

فكر : ما معنى محصلة عدة قوى متلاقية في نقطة واحدة =

السرعة النسبية

السرعة النسبية لجسم م بالنسبة لجسم آخر ب هي السرعة التي يبدو أن م يتحرك بها باعتبار ب ساكناً حيث ب الراصد ، م المبرصود

$$\text{١} \quad \vec{v}_{B/M} = \vec{v}_B - \vec{v}_M : \text{ م ، ب في نفس الاتجاه}$$

$$\text{٢} \quad \vec{v}_{B/M} = \vec{v}_B + \vec{v}_M : \text{ م ، ب في اتجاهين متضادين}$$

ملاحظات :

إذا كانت السيارة (م) هي $\vec{v}_M$ ، سرعة الدراجة (ب) هي $\vec{v}_B$ وكانت سرعة الدراجة ب بالنسبة للسيارة م هي $\vec{v}_{B/M}$

١ إذا كان $\vec{v}_M$ ، $\vec{v}_B$ في اتجاهين متضادين فان $\vec{v}_{B/M} = \vec{v}_B + \vec{v}_M$ لها نفس اتجاه $\vec{v}_B$

٢ إذا كان $\vec{v}_M$ ، $\vec{v}_B$ في نفس الاتجاه فان $\vec{v}_{B/M} = \vec{v}_B - \vec{v}_M$

٣ $\vec{v}_{B/M} = \vec{v}_B - \vec{v}_M$ لها نفس اتجاه $\vec{v}_B$ إذا كان $\vec{v}_B > \vec{v}_M$

٤ $\vec{v}_{B/M} = \vec{v}_B - \vec{v}_M$ لها عكس اتجاه $\vec{v}_B$ إذا كان $\vec{v}_B < \vec{v}_M$

مثال (٨)

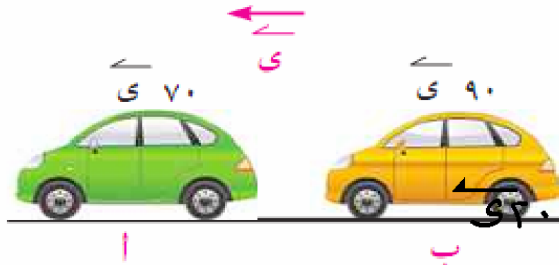
تتحرك سيارة (م) على طريق مستقيم بسرعة ٧٠ كم/س وتتحرك السيارة (ب) على نفس الطريق بسرعة ٩٠ كم/س . أوجد سرعة السيارة (م) بالنسبة للسيارة (ب) عندما :

① تتحرك السيارتين في نفس الاتجاه ② تتحرك السيارتين في اتجاهين متضادين .

باعتبار أن $\vec{u}$ متجه وحدة في اتجاه سرعة السيارة م

① السيارتان تتحركان في اتجاه واحد :

$$\vec{u}_{70} = \vec{u}_m , \quad \vec{u}_{90} = \vec{u}_b$$

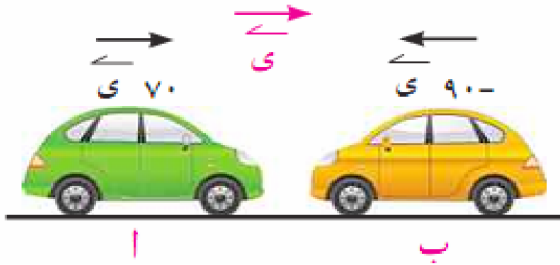


$$\vec{u}_{90} = \vec{u}_{90} - \vec{u}_{70} = \vec{u}_b - \vec{u}_m = \vec{u}_b \therefore$$

أي أن راكب السيارة (ب) يشعر أن السيارة م تتحرك نحوه بسرعة ٢٠ كم/س

① السيارتان تتحركان في اتجاه واحد :

$$\vec{u}_{90} = \vec{u}_b , \quad \vec{u}_{70} = \vec{u}_m$$



$$\vec{u}_{90} - \vec{u}_{70} = \vec{u}_b - \vec{u}_m = \vec{u}_b \therefore$$

$$\vec{u}_{160} = \vec{u}_{90} + \vec{u}_{70} =$$

أي أن راكب السيارة (ب) يشعر أن السيارة م تتحرك نحوه بسرعة ١٦٠ كم/س

مثال (٩)

تتحرك سيارة مخصصة لمراقبة السرعة على الطريق الصحراوي بسرعة ٣٠ كم/س راقبت هذه السيارة شاحنة قادمة في الاتجاه المضاد فبدت وكأنها تتحرك بسرعة ١١٠ كم/س فما هي السرعة الفعلية للشاحنة

باعتبار أن $\vec{u}$ متجه وحدة في اتجاه حركة سيارة المراقبة

$$\vec{u}_{30} = \vec{u}_m , \quad \vec{u}_{110} = \vec{u}_b$$

$$\vec{u}_{110} - \vec{u}_{30} = \vec{u}_b - \vec{u}_m = \vec{u}_b \therefore$$

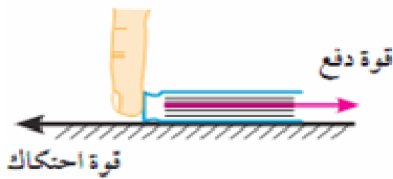
$$\vec{u}_{80} = \vec{u}_{110} - \vec{u}_{30} = \vec{u}_b + \vec{u}_m = \vec{u}_b \therefore$$

السرعة الفعلية للشاحنة $\vec{u}_{80}$ وفي اتجاه مضاد لحركة سيارة المراقبة

فشاط ١

إذا أثرت قوة مقدارها ٦ نيوتن باتجاه الشرق على ملعب خشبي واخترنا أن تمثل كل ٣ نيوتن بقطعة مستقيمة موجهة طولها سنتيمتر واحد ، ما طول المتجه الذي يمثل هذه القوة ؟ وإذا أثرت قوة إضافية مقدارها ٣ نيوتن باتجاه الشرق على الملعب . ما مقدار القوة المؤثرة على الجسم عندئذ ؟

وما طول القطعة المستقيمة الموجهة التي تمثل هذه القوة على الرسم ؟
 ٢ عند محاولتك لتحريك كتاب على سطح نضد أفقى خشب قد تشع بمقاومة
 سطح النضد لحركة الكتاب وهي ما تعرف بقوة الاحتكاك .

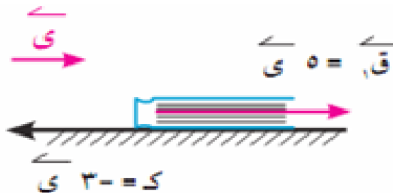


إذا كان تحرك الكتاب على سطح النضد ،
فأى القوتين تكون الأكبر : القوة المؤثرة لتحرك الكتاب أم قوة الاحتكاك ؟

١) اعتبد ^١ متجه وحدة في اتجاه الشرق .

$\frac{1}{S_9} = \frac{1}{S_3} + \frac{1}{S_6} = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$: فیلووس

٢) لإيجاد محصلة القوى المؤثرة على الكتاب عند محاولة تحريكه بقوة ١٩ مقدارها ٥ نيوتن وكان مقدار قوة الاحتكاك ٣ نيوتن اعتبره ١ متجه وحدة في اتجاه حركة الكتاب .

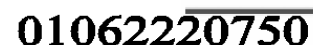


$\therefore \text{قوة الدفع} : \overline{S_0} = \overline{9}$

قوة الاحتمال : $\Sigma = \frac{1}{5}$

$$\overline{s_2} = \overline{s_3} - \overline{s_0} = \underline{s} + \overline{9} = \overline{9009}$$

أى أ: ٩ = ٢ نيوتن ، وتعمل في اتجاه حركة الكتاب .





[٥] إذا كانت : $P(1, 0)$ ، $B(2, 0)$ ، $J(3, 2)$ ، $S(0, 2)$ ، أثبت أن

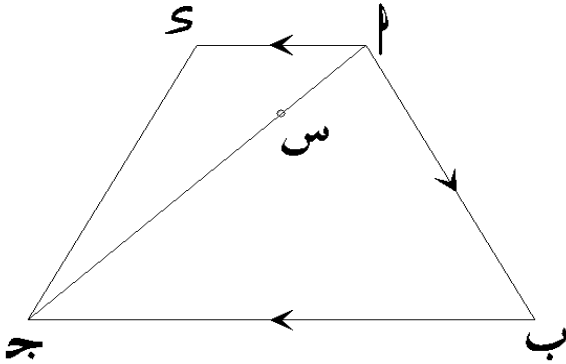
فأثبت أن باستخدام المتجهات : الشكل PJB شبه منحرف .

[٦] إذا كانت : $P(6, 0)$ ، $B(8, 3)$ ، $J(2, 3)$ ، $S(0, 2)$ ،

هي رؤوس المثلث PJB ، فأوجد باستخدام المتجهات إحداثي نقطة تقاطع متوسطاته .

[٧] في الشكل المقابل :

PJB شبه منحرف ، $\overline{PS} \parallel \overline{JB}$ ، $\frac{1}{3}PB = JS$ ، $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{JB}$ ،



١ عده $\overrightarrow{PS}$ ، عده $\overrightarrow{JB}$:
 $\overrightarrow{PS}$ ، $\overrightarrow{JB}$ ، $\overrightarrow{PB}$ ، $\overrightarrow{JS}$

٢ إذا كانت : $PS \supset \overline{PB}$ حيث $\frac{1}{3}PB = JS$ ،

اثبت أن : النقط S ، J ، B تقع على استقامة واحدة .

حاول أن تحل :

[٨] PJB شكل رباعي . S ، $ص$ ، $ع$ ، $ل$ منتصفات الأضلاع $\overline{PB}$ ، $\overline{JB}$ ، $\overline{JS}$ ، $\overline{PS}$ ،

$\overline{PS}$ على الترتيب باستخدام المتجهات :

١ اثبت أن S ، $ص$ ، $ع$ ، $ل$ متوازي أضلاع ٢ محيط الشكل PJB يساوي مجموع طولي قطريه .

[٩] باستخدام المتجهات : اثبت أن : النقط $P(3, 4)$ ، $B(1, 1)$ ،

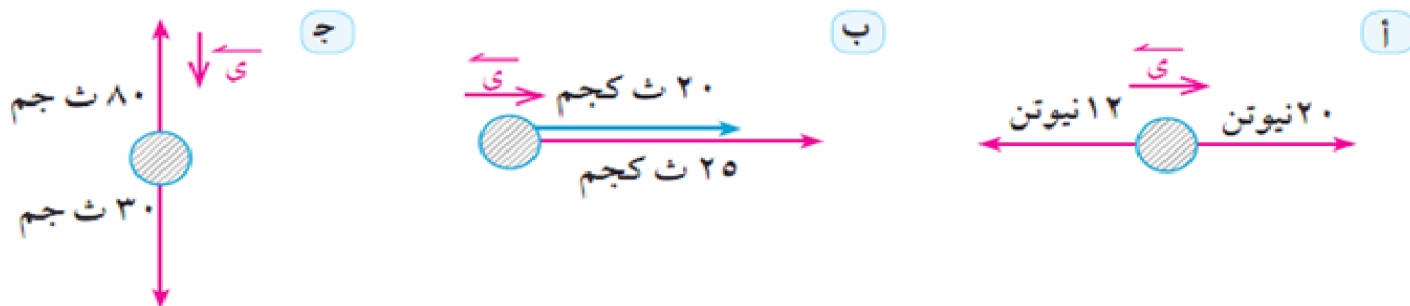
$J(4, 3)$ ، $S(2, 2)$ هي رؤوس مربع .



[۱.] p و q جملہ صریح ، اذا كانت : p (۸ ، ۲) ، q (۳ ، - ۱) ، r (۰ ، ۴)

فأوجد باستخدام المتجهات إحداثي نقطة ϵ ومساحة سطح المربع .

(ii) أكتب بدلالة متجه الوحدة $\vec{u}$ محصلة القوى الموضحة بالشكل :



ثانيا : في كل مما يأتي ، القوتان $\vec{Q_1}$ ، $\vec{Q_2}$ ، تؤثران في نقطة مادية ، وضح مقدار واتجاه محصلة كل قوتين منها .

① ق = ١٥ نيوتن في اتجاه الشرق، ق_٣ = ٣٤ جم في اتجاه الجنوب الغربي .

٢) $\hat{Q}_{34} = \hat{Q}_{34}$ جم في اتجاه الشمال الشرقي ، $\hat{Q}_{34} = \hat{Q}_{34}$ جم في اتجاه الجنوب الغربي .

(٣) $90^\circ = 0.0$ دايع تعمل في اتجاه 60° غربي الشمال ، $90^\circ = 0.0$ دايع تعمل في اتجاه 30° جنوبي الشرق .

٤) 30° نيوتن تعمل في اتجاه 20° شرق الشمال ، $9^\circ = 30^\circ$ نيوتن تعمل في اتجاه 70° شمال الشرق .

: WU

(۱۲) القوى: $\overrightarrow{v_0} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_3} + \overrightarrow{v_4} = \overrightarrow{v_5}$

$$\frac{1}{\phi} = \frac{1}{\psi} + (b-3) \frac{1}{\psi} \quad \text{تؤثر في نقطة مادية أوجد قيمتي } \mu, b \text{ إذا كانت :}$$

١) المحصلة مجموعة القوى $\vec{s} - \vec{v}$ ٢) مجموعة القوى متزنة .

(۱۳) القوى: $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_3}$, $\overrightarrow{v_3} + \overrightarrow{v_4} = \overrightarrow{v_5}$

$$\frac{1}{\phi} = \frac{1}{s_0} + \frac{1}{s} \quad \text{تؤثر في نقطة مادية} . \text{أوجد قيمتي } \phi, s$$

إذا كانت محصلة هذه القوى $\frac{1}{9} \text{ ①} = \frac{1}{9} \text{ ②} - \frac{1}{9} \text{ ③}$ صفر



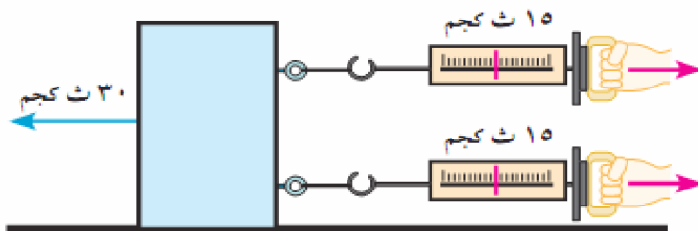
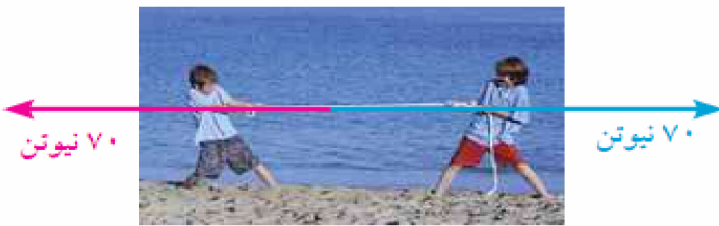
[١٤] تتحرك سيارة على طريق مستقيم بسرعة ٩٠ كم/س . إذا تحركت دراجة بخارية بسرعة ٤٠ كم/س على نفس الطريق . فأوجد سرعة الدراجة بالنسبة للسيارة عندما يتحركان في نفس الاتجاه .

★ **[١٥]** تتحرك سيارتيه م ، ب على طريق مستقيم بالسرعتين ٦٠ كم/س ، ٩٠ كم/س وفي اتجاه ب م أوجد
 ١ سرعة ب بالنسبة إلى م
 ٢ سرعة م بالنسبة ل ب

★ **[١٦]** تتحرك سيارة على طريق مستقيم بسرعة ٦٠ كم/س فإذا تحركت على نفس الطريق دراجة بخارية بسرعة ٥٠ كم/س أوجد سرعة الدراجة بالنسبة للسيارة في كل من الحالتين الآتيتين ١ الدراجة و السيارة تتحركان في وجهة واحدة ٢ الدراجة تتحرك في وجهة مضادة لوجهة السيارة [١٥ كم/س ، ١٥ كم/س نحو السيارة]

[١٧] تتحرك سيارة لمراقبة السرعة على أحد الطرق الصحراوية بسرعة ٤٠ كم/س . راقبت سيارة شاحنة قادمة في الاتجاه المضاد فبدت لها وكأنها متحركة بسرعة ٣٥ كم/س . فإذا كانت أقصى سرعة مسموح بها على هذا الطريق ١٠٠ كم/س . هل الشاحنة القادمة مخالفة للسرعة المقررة أم لا ؟ فسر إجابتك

[١٨] أوجد محصلة القوى المؤثرة في كل مما يأتي :



تارين عامة

ك [1] في نظام إحداثي متعامد نقطة الأصل فيه $O(0, 0)$ عيني النقط $M(-4, 0)$

، $B(0, -3)$ ، $C(3, 1)$ ، $D(2, 1)$ ثم **أوجد** :

- متجه الموضع بالنسبة لنقطة الأصل O لكل من النقط M ، B ، C بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين.
- متجه الموضع للنقطة D بالنسبة لنقطة الأصل O بالصورة القطبية .
- معيار القطعة المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{MB}$. $\textcircled{4}$ قيمة k التي تجعل $\overrightarrow{MA} = k \overrightarrow{MB}$.

ك [2] **أوجد** بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين المتجه الذي يعبر عنه :

- قوة مقدارها ٢٠ نيوتن تؤثر على جسم ، وتعمل في اتجاه الشمال .
- إزاحة جسم مسافة ٥٠ سم في اتجاه 30° شمال الغرب .
- السرعة المنتظمة لسيارة تقطع مسافة ٧٠ كم/س في اتجاه الغرب .

ك [2] إذا كان $\overrightarrow{a} = (4, -6)$ ، $\overrightarrow{b} = (-6, 9)$ ، $\overrightarrow{c} = (-3, -2)$

- اثبت أن** : $\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}$ ، $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{c}$ ، $\overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{c}$
- أوجد** : $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ ، $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ ، $\frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$

ك [3] في المثلث ABC ، $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$ ، $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{b}$ ، $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{c}$ حيث $a : b : c = 3 : 4 : 5$

اثبت أن : $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$

ك [5] إذا كان : $M(2, -2)$ ، $B(4, -2)$ ، $C(4, -4)$

، $D(3, 2)$ **أوجد** إحداثي نقطة E .

ك [6] في مستوى إحداثي متعامد ، $\overrightarrow{a} = (-2, 3)$ ، $\overrightarrow{b} = (-6, -4)$

، $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ **أوجد** $\textcircled{1}$ إحداثي كل من النقط M ، B ، C

$\textcircled{2}$ مساحة سطح المثلث ABC (باستخدام المتجهات)



اختبار الوحدة

❏ [1] في مستوى إحداثي متعامد ، نقطة الأصل و (٠ ، ٠) إذا كانت : $\vec{p} = (١ ، - ٤)$

ب (٠ ، ٤) ، ج (١ ، ٢ -) ، د (١ ، ٠) ، هـ (٠ ، ١)

① أوجد $\vec{p} \parallel \vec{b}$ ، $\vec{p} \parallel \vec{c}$ ، $\vec{p} \parallel \vec{d}$ ، $\vec{p} \parallel \vec{e}$ ، أثبت أنه : $\vec{p} \perp \vec{b}$ تكافئ جـ

③ إذا كانت $\vec{b}$ جـ تكافئ هـ أوجد إحداثي هـ .

❏ [2] إذا كان : $\vec{p} = (١ ، ٤)$ ، $\vec{b} = (٦ ، ١ -)$ ، $\vec{c} = (١٢ ، ١)$

① أوجد بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين كلامه : $\vec{b} - \vec{c}$ ، $\frac{1}{2} (\vec{b} + \vec{c})$

② عبّر عن المتجه ج بدلالة المتجهين $\vec{b}$ ، $\vec{p}$

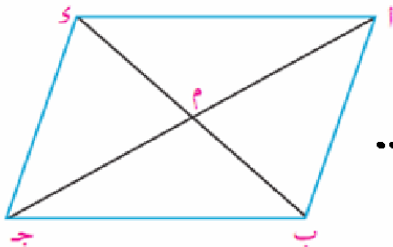
❏ [3] إذا كانت $\vec{m} = \vec{s} + \vec{r}$ ، $\vec{m} = \vec{o} - \vec{s}$ ، $\vec{m} = \vec{o} - \vec{s}$

، $\vec{m} = \vec{s} + \vec{o}$ ، $\vec{m} = \vec{s} + \vec{r}$ ، $\vec{m} = \vec{s} + \vec{r}$

① أثبت أنه : $\vec{m} \parallel \vec{o}$ ② أوجد $\vec{p} \in \vec{c}$ إذا كان $\vec{c} \parallel \vec{m}$

③ أوجد $\vec{b} \in \vec{c}$ إذا كان $\vec{c} \perp \vec{o}$ ④ هل $\vec{m} \perp \vec{o}$ ؟ فسر إجابتك .

❏ [4] في الشكل المقابل : $\vec{p}$ ب جـ ، متوازي أضلاع م نقطة تقاطع قطريه أكمل :



② $\vec{p} = \vec{r} + \vec{s}$ ، =

① $\vec{p} = \vec{b} + \vec{c}$ ، =

④ $\vec{p} = \vec{r} + \vec{q}$ ، =

③ $\vec{p} = \vec{r} + \vec{q}$ ، =

⑥ $\vec{p} = \vec{r} - \vec{q}$ ، =

⑤ $\vec{p} = \vec{r} + \vec{q}$ ، =

❏ [5] إذا كان : $\vec{p} = (١ ، - ٤)$ ، $\vec{m} = (٣ ، ٢)$ ، $\vec{c} = (١٠ ، ١ -)$

، أوجد قيمتي ل ، م إذا كان : $\vec{c} = \vec{p} - \vec{m}$

❏ [6] $\vec{p}$ ب جـ مستطيل حيث $\vec{p} = (١ - ، ٢ -)$ ، $\vec{b} = (١ ، ٥)$ ، $\vec{c} = (٣ ، ٣)$

أوجد : ① قيمة $\vec{c}$ ② إحداثي نقطة د

اختبار تراكمي

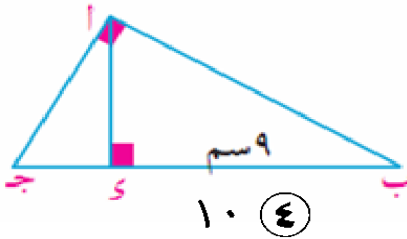
١ اختار الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ ميل المستقيم المار بالنقطتين $P(3, 4)$ ، $Q(1, -2)$ يساوي

- (١) -2 (٢) 2 (٣) $\frac{1}{2}$ (٤) $-\frac{1}{2}$

٢ في المثلث ABC : $\angle C = 90^\circ$ ، جتا $B = 0.6$ فان $\sin A$ يساوي

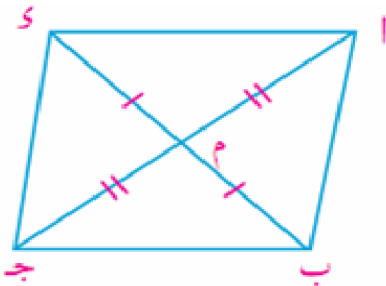
- (١) 0.4 (٢) $\frac{3}{4}$ (٣) $\frac{4}{3}$ (٤) $-\frac{4}{3}$



٣ في الشكل المقابل :

 $\overrightarrow{AS} \perp \overrightarrow{BC}$ ، $BC = 12$ سم فان AB يساوي

- (١) $2\sqrt{18}$ (٢) $3\sqrt{16}$ (٣) $2\sqrt{4}$ (٤) 10



٤ في الشكل المقابل :

جميع العبارات التالية تعبر عن $\overrightarrow{AB}$ عدا العبارة

- (١) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ (٢) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$
(٣) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ (٤) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$

٤ المتجه $\vec{u} = (\sqrt{12}, \frac{\pi}{4})$ يعبر عنه بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين بالصورة

- (١) $\vec{u} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ (٢) $\vec{u} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$
(٣) $\vec{u} = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ (٤) $\vec{u} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$

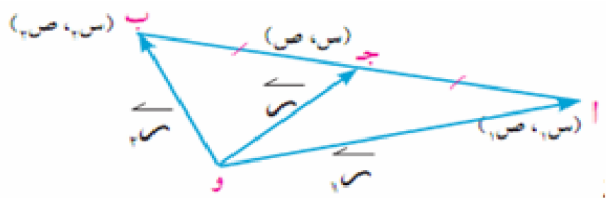
٢ [٢] AB متجهي شكل رباعي ، إذا كان : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ ، $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ اثبت أن : AB متوازي أضلاع

إحداثيا نقطة تقسيم قطعة مستقيمة موجهة

لاحظ أن : إذا كانت : ج منتصف $\overline{AB}$ حيث $م (١, ٥) , ب (٢, ٥)$ فان : $ل = ١, ل = ٢$ (ل مثلا) ويكون

$$\frac{\overrightarrow{لأ} + \overrightarrow{لج}}{٢} = \overrightarrow{لج}$$

الصيغة المتجهة



$$\text{الصيغة الإحداثية} \quad (\frac{٢٥ + ١٥}{٢} , \frac{٢٥ + ١٥}{٢}) = (٥ , ٥)$$

لأن في هذه الحالة $ل : ل = ١ : ١$

ملاحظة :

في متوازي الأضلاع $م ب ج د$ (والمستطيل والمربع) إذا كانت $م (١, ٥) , ب (٢, ٥)$ فان : $ج (٣, ٥) , د (٤, ٥)$ إذا كانت النقطة $هـ$ هي نقطة تلاقي قطريه فإنها تنصف كل منهما الآخر فإذا كانت $هـ (٥, ٥)$ فان :

$$\frac{٥ + ٢}{٢} = \frac{٥ + ٣}{٢} = ٥$$

ومع ذلك نجد أن :

$$\frac{٥ + ٢}{٢} = \frac{٥ + ٣}{٢} = ٥ \quad \text{وبالمثل} \quad \frac{٥ + ٢}{٢} = \frac{٥ + ٣}{٢} = ٥$$

وهاتين لعلاقيتين يمكن إيجاد الرأس الرابعة لمتوازي الأضلاع متى علمت ثلاثة رؤوس منه .

مثال [١]

أوجد إحداثي منتصف $\overline{AB}$ حيث $م (١, ٤) , ب (-٢, -٣)$

$$\therefore ج = (\frac{٢٥ + ١٥}{٢} , \frac{٢٥ + ١٥}{٢}) = (\frac{٣ - ١}{٢} , \frac{٢ - ٤}{٢}) = (\frac{٢}{٢} , \frac{-٢}{٢}) = (١ , -١)$$

مثال (٢)

إذا كانت جـ (٢ ، ٤) منتصف $\overline{AB}$ حيث $P(٣ ، ٤)$ ، $B(١ ، ٥)$ أوجد كلا من ٣ ، ٤

$$(٢ ، ٤) = (\frac{٥ + ٤}{٢} ، \frac{١ + ٣}{٢}) = ج \therefore$$

$$\begin{aligned} ٤ &= \frac{٥ + ٤}{٢} & ٢ &= \frac{١ + ٣}{٢} \end{aligned}$$

$$٨ = ٥ + ٤ \qquad ٤ = ١ + ٣$$

$$٤ - ٨ = ٥ \qquad ١ - ٤ = ٣$$

$$٤ = ٥ \qquad ٣ = ٣$$

مثال (٣)

كانت النقطة جـ منتصف $\overline{AB}$ حيث $P(٢ - ، ٤) = B(٧ ، ٥)$ ، $A(٥ ، ٣)$ احسب قيمة ٣ ، ٤ .

$\therefore$ جـ منتصف $\overline{AB}$

$$(٢ - ، ٤) = (\frac{٥ + ٧}{٢} ، \frac{٣ + ٥}{٢}) = (\frac{٥ + ٧}{٢} ، \frac{٣ + ٥}{٢}) = ج$$

$$\begin{aligned} ٤ - &= \frac{٥ + ٧}{٢} \therefore & ٢ &= \frac{٣ + ٥}{٢} \therefore \end{aligned} \quad \text{بمقارنة المصطلحات}$$

$$٨ - = ٥ + ٧ \therefore \qquad ٤ = ٣ + ٥ \therefore$$

$$١٥ - = ٧ - ٨ - = ٥ \therefore \qquad ١ - = ٥ - ٤ = ٣ \therefore$$

$\therefore$ إحداثي نقطة بـ (١ - ، ١٥ -)

مثال [٤]

إذا كانت م (٤ ، -٣) ، ب (٦ ، ٥) ، ج (١ ، ٧) ثلاثة رؤوس متتالية متوازي أضلاع م ب ج ، أوجد إحداثي نقطة د

نفرض أن د (س ، ص)

$$٤س + ٦ - = ١ + ٤$$

$$٤س + ٦س = ٣س + ١س$$

$$\therefore ١١ = س$$

$$\therefore \text{وبالمثل } ١س + ٣س = ٧س + ٥س$$

$$١ - = ص \quad \text{إحداثي د هما (١١ ، -١)}$$

التقسيم من الداخل :

إحداثي نقطة تقسيم القطعة م ب التي بدايتها م (١س ، ١ص) ، نهايتها ب (٢ص ، ٢ص) من الداخل بنسبة ل : ل هما

$$\frac{١ص ل + ٢ص ل}{ل + ل} = ص$$

$$\frac{١س ل + ٢س ل}{ل + ل} = س$$

مع ملاحظة أن :

١ ل ، ل ، ل $\exists$ ع $\therefore$ ل : ل هي عدد موجب

٢ ل هو حد النسبة المجاور لبداية القطعة م ب

٣ ل هو حد النسبة المجاور لنهاية القطعة م ب

٤ م ج : ج ب = ل : ل = عدد موجب

$\therefore$ متحدثي الاتجاه في حالة التقسيم من الداخل

$$\begin{pmatrix} ١ص & ل & ١س \\ ٢ص & ل & ٢س \end{pmatrix}$$

التقسيم من الخارج

إحداثيًا نقطة تقسيم القطعة $\overline{AB}$ التي بدايتها $A(1, 1)$ ، نهايتها $B(3, 2)$ ،

الخارج بنسبة $1 : 2$ ، هما

$$\frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 1}{1 + 2} = 1$$

$$\frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 1}{1 + 2} = 1$$

مع ملاحظة أن :

١ $1 : 2$ ، $1 : 2$ هي عدد موجب

٢ $1 : 2$ هو حد النسبة المجاور لبداية القطعة $\overline{AB}$ ، $1 : 2$ هو حد النسبة المجاور لنهاية القطعة $\overline{AB}$

٣ قانون التقسيم من الخارج يختلف مع قانون التقسيم من الداخل في الإشارة الواقعة بين حدى كل من

البسط والمقام وهي + في حالة التقسيم من الداخل ، - في حالة من الخارج .

٤ $\therefore \overrightarrow{AB} : \overrightarrow{BC} = 1 : 2 = -1 : 2$ = عدد سالب

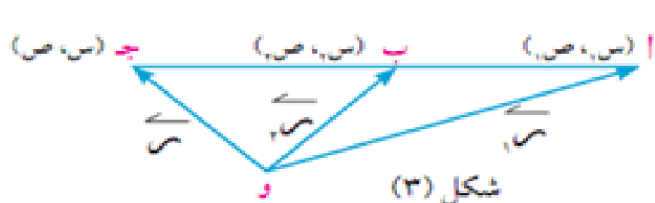
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ متضادتي الاتجاه في حالة التقسيم من الخارج .

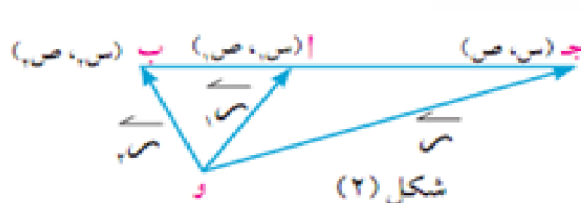
٥ إذا كانت $\overrightarrow{AB} \supset \overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{AB} \not\supset \overrightarrow{BC}$ فانه $\overrightarrow{AB} : \overrightarrow{BC}$ من الخارج بنسبة $1 : 2$ ،

حيث $\frac{1}{2} > 0$ وبالتالي تكون إحدى القيمتين 1 أو 2 موجبة أو سالبة ، ويكون

هناك احتمالان ولأشكال التالية توضح ذلك :



$\overrightarrow{AB} \not\supset \overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{AB} \supset \overrightarrow{BC}$



$\overrightarrow{AB} \supset \overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{AB} \not\supset \overrightarrow{BC}$

إذا كانت $م (١-، ٢)$ ، $ب (٤، ٣-)$ فأوجد إحداثيا النقطة ج التي تقسم $م ب$ من الداخل بنسبة ٣ : ٢ بالصيغة المتجهة .

بفرض أن : ج (ص ، س)

$$\therefore م (١-، ٢) = \frac{1}{3} \therefore$$

$$\therefore ب (٤، ٣-) = \frac{2}{3} \therefore$$

$$\therefore ٣ : ٢ = \frac{1}{3} : \frac{2}{3}$$

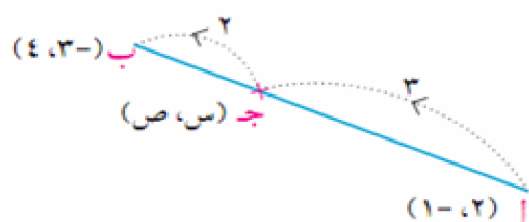
$$= \frac{(٤، ٣-) \cdot ٣ + (١-، ٢) \cdot ٢}{٣ + ٢} = \frac{\frac{1}{3} \cdot ٣ + \frac{2}{3} \cdot ٢}{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \therefore$$

$$(٢، ١-) = \frac{(١٠، ٥-)}{٥} = \frac{(١٢، ٩-) + (٢-، ٤)}{٥}$$

$\therefore$ إحداثيا النقطة ج هما (٢ ، ١ -)

الصيغة الإحداثية :

$$(\frac{\frac{1}{3} \cdot ٣ + \frac{2}{3} \cdot ٢}{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} , \frac{\frac{1}{3} \cdot ٣- + \frac{2}{3} \cdot ٢}{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}}) = (ص ، س)$$



$$\begin{pmatrix} ١- & ٣ & ٢ \\ ٤ & ٢ & ٣- \end{pmatrix}$$

حل المثال السابق باستخدام الصيغة الإحداثية :

$$(\frac{٤ \times ٣ + (١-) \times ٢}{٣ + ٢} , \frac{(٣-) \times ٣ + ٢ \times ٢}{٣ + ٢}) = (ص ، س)$$

$$(٢ ، ١ -) =$$

مثال [٦]

إذا كانت : $M (0, 2)$ ، $B (1, -1)$ فأوجد إحداثيا النقطة ج التي تقسم $\overline{MB}$ من الخارج بنسبة $0 : 2$

الحل :

$$\therefore (1, -1) = \frac{1}{2} (0, 2) + \frac{1}{2} (0, 2)$$

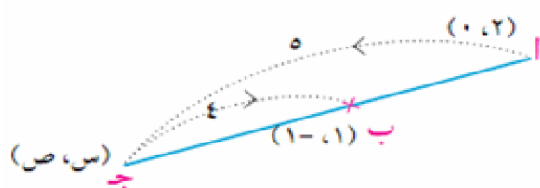
$$\therefore \frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 0 : 2 > \frac{1}{2} \text{ صفر أى سالبة}$$

بالتعويض في العلاقة

$$\frac{(1, -1) \cdot 0 + (0, 2) \cdot 2}{0 + 2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \therefore$$

$$\therefore (0, -3) = (0, 0 + 1) = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ إحداثيا نقطة ج هما $(0, -3)$



الصيغة الإحداثية :

$$\left(\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}, \frac{\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 2}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \right) = (0, 1)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

الصيغة الإحداثية :

$$\left(\frac{(1-1) \times 0 + 2 \times 2}{0 + 2}, \frac{1 \times 0 + 2 \times (-1)}{0 + 2} \right) = (0, -1)$$

$$(0, -3) =$$

مثال (U)

إذا كانت : $p = (3, 4)$ ، $q = (8, -1)$. أوجد إحداثي النقطة التي تقسم $\overline{pq}$ من الداخل بنسبة ٢ : ٣

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 8 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (8, -1) = (x_1, y_1), \quad (3, 4) = (x_2, y_2)$$

$$3 = x_1, \quad 2 = y_1, \quad \therefore$$

$$0 = \frac{20}{0} = \frac{8 \times 2 + 3 \times 3}{3 + 2} = \frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_1 + x_2} = x_2$$

$$2 = \frac{10}{0} = \frac{(1-1)2 + 4 \times 3}{3 + 2} = \frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_1 + x_2} = x_1$$

$\therefore$ نقطة التقسيم هي : $(2, 0)$

مثال (n)

أوجد إحداثي النقطة التي تقسم $\overline{pq}$ من الخارج بنسبة ٣ : ١ علما بأن $p = (2, 7)$ ، $q = (0, -3)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad (0, -3) = (x_1, y_1), \quad (2, 7) = (x_2, y_2)$$

$$1 = x_1, \quad 3 = y_1$$

$$-6.0 = \frac{13}{2} = \frac{0 \times 3 + 2 \times 1 -}{3 + 1 -} = \frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_1 + x_2} = x_2$$

$$-8 = \frac{16 -}{2} = \frac{(3-1)3 + 7 \times 1 -}{3 + 1 -} = \frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_1 + x_2} = x_1$$

نقطة التقسيم هي $(-8, -6.0)$

مثال [٩]

أوجد إحداثي النقطة ج التي تقع على الشعاع $\overrightarrow{AB}$ ، ج $\notin \overline{AB}$ بحيث يكون بعدها عه $\overline{AB}$ يساوي ثلاثة أمثال بعدها عه $\overline{AB}$ إذا كانت : $\overline{AB} = (0, 2)$ ، $\overline{AB} = (4, 3)$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = 3 = \|\overrightarrow{AJ}\|$$

، $\overrightarrow{AJ}$ ، $\overrightarrow{JB}$ في اتجاهيه متضاديه

$$\overrightarrow{AJ} = 3 - \overrightarrow{JB}$$

$$\therefore \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{JB} = 3 - \overrightarrow{JB} - \overrightarrow{JB} = 3 - 2\overrightarrow{JB}$$

$$\therefore \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{JB} = 3 - 2\overrightarrow{JB} \Rightarrow \overrightarrow{AJ} = 3 - \overrightarrow{JB}$$

$$(11, 3) = (0, 2) + 3(4, 3) - (4, 3)$$

$$\therefore (0, 0) = (0, 2) + 3(4, 3) - (4, 3) \Rightarrow (0, 0) = (10, 10)$$

حل آخر

بفرض أن نقطة التقسيم ج (س ، ص)

وحيث أن : $\overrightarrow{AJ}$ ، $\overrightarrow{JB}$ في اتجاهيه متضاديه . أي أن التقسيم منه الخارج .

$$(س ، ص) = \left(\frac{س_1 + 3س_2}{1 + 3}, \frac{ص_1 + 3ص_2}{1 + 3} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3- \\ 0 & 1- & 2- \end{pmatrix}$$

$$ج = \left(\frac{0 \times 3 + 4 \times 1-}{3 + 1-}, \frac{(2-) \times 3 + (3-) \times 1-}{3 + 1-} \right)$$

$$(0, 0) = \left(\frac{10 + 4-}{2}, \frac{6 - 3}{2} \right) = (3, 1.5)$$

مثال (١٠)

إذا كانت : $P(0, 6)$ ، $P(3, -\sqrt{3})$ فأوجد وعية النقطة ج بحيث : $P \rightarrow B$
 $P_3 = P_2$

$$\therefore P \rightarrow B \quad , \quad P_3 = P_2 \quad , \quad \text{أي أن : } \frac{P}{B} = \frac{2}{3}$$

$\therefore$ هناك احتمالان لموقع النقطة ج هما : $P \rightarrow B$ أو $B \rightarrow P$ حيث ج $\notin B$

$$\text{أولاً : } \therefore P \rightarrow B \quad \therefore \frac{P}{B} = \frac{2}{3} \quad \therefore \frac{P}{B} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \text{ج تقسم } P \rightarrow B \text{ من الداخل بنسبة } 2 : 1 \quad \therefore \left(\frac{0}{-\sqrt{3}-1}, \frac{6}{1+3} \right) = \left(\frac{(0 \times 2 + 6 \times 1)}{2+1}, \frac{(-\sqrt{3} \times 2 + (-1) \times 1)}{2+1} \right) =$$

$$= \left(\frac{6}{3}, \frac{-\sqrt{3}-1}{3} \right) = (2, -\frac{\sqrt{3}+1}{3})$$

ثانياً : ج $\rightarrow B$ حيث ج $\notin B$

$$\therefore \frac{P}{B} = \frac{2}{3} \quad \therefore \frac{P}{B} = \frac{2}{3} \quad \therefore \left(\frac{0}{-\sqrt{3}-0}, \frac{6}{0+3} \right)$$

$\therefore$ ج تقسم $P \rightarrow B$ من الخارج بنسبة 2 : 1 $\therefore 0 : 2 = 1$

$$\therefore \left(\frac{0}{3}, \frac{6}{3} \right) = \left(\frac{(0 \times 2 + 6 \times 0)}{2+0}, \frac{(-\sqrt{3} \times 2 + (-1) \times 0)}{2+0} \right) = \left(\frac{0}{2}, \frac{-2\sqrt{3}}{2} \right) = (0, -\sqrt{3})$$

ملاحظة :

الاحتمال الثالث عندما ج $\rightarrow B$ حيث ج $\notin B$ غير موجود لأنه لا يمكن تعيين ج بحيث

$$\frac{P}{B} = \frac{2}{3} \quad \text{لأن : } P < B$$

في الحالة الثانية :

جـ تقسم $\overline{AB}$ من الخارج بنسبة $ل : ل = ٣ : ٢$ $\left(\begin{array}{ccc} ٠ & ٣ & ٠ \\ ٣,٠ & ٢- & ٢- \end{array} \right)$ $\therefore ل = ٣, ل = ٢-$

$$١٦- = \frac{١٦-}{١} = \frac{(٢-) \times ٣ + ٠ \times ٢-}{٣ + ٢-} = \frac{٢,٥ ل + ١,٥ ل}{ل + ل} = ٥ \therefore$$

$$١٠,٠ = \frac{١٠,٠}{١} = \frac{٣,٠ \times ٣ + ٠ \times ٢-}{٣ + ٢-} = \frac{٢,٥ ل + ١,٥ ل}{ل + ل} = ٥ \therefore$$

$\therefore ج (١٠,٠ , ١٦-)$

مثال (١٢)

إذا كانت $م (٦, ٧)$ ، $ب (١, ٠)$ أوجد إحداثي $ك$ من النقطتين اللتين تقسمان $\overline{AB}$ الى ثلاث قطع مستقيمة متساوية في الطول .

١ نوجد إحداثي نقطة جـ وهي تقسم $\overline{AB}$ بنسبة $١ : ٢$ من الداخل

$$\left(\begin{array}{ccc} ٦ & ١ & ٧ \\ ٠ & ٢ & ١ \end{array} \right) \quad \frac{١ \times ١ + ٧ \times ٢}{١ + ٢} = \frac{٢,٥ ل + ١,٥ ل}{ل + ل} = ٥ \therefore$$

$$٠ = \frac{١٠}{٣} =$$

$$\varepsilon = \frac{١٢}{٣} = \frac{١ \times ١ + ٦ \times ٢}{١ + ٢} = \frac{٢,٥ ل + ١,٥ ل}{ل + ل} = ٥ ,$$

٢ ، تقع في منتصف جـ بـ

$$\therefore \text{إحداثيا } \varepsilon \text{ هما } \left(\frac{٠ + \varepsilon}{٢} , \frac{١ + ٠}{٢} \right)$$

$$= (٢ , ٣)$$

مثال [١٣]

إذا كانت $M(١, ٣)$ ، $B(٢, ٤)$ ، $J(٣, ٥)$ هي رؤوس مثلث فأوجد إحداثي نقطة تلاقي متوسطات المثلث M ب J ولتكن $ص$

إذا كانت $ص$ منتصف $\overline{BJ}$ فان نقطة $ص = \left(\frac{٢ + ٣}{٢} , \frac{٤ + ٥}{٢} \right)$

∴ النقطة $ص$ تقسم $\overline{MJ}$ بنسبة $٢ : ١$

$$\frac{٣ + ٤ + ٥}{٣} = \frac{١ \times ٣ + \frac{٤ + ٥}{٢} \times ٢}{١ + ٢} = ٤ \therefore$$

$$\frac{١ + ٢ + ٣}{٣} = \frac{١ \times ١ + \frac{٢ + ٣}{٢} \times ٢}{١ + ٢} = ٢ \therefore$$

مثال [١٤]

إذا كانت النقطة $J(١, ٢)$ هي نقطة تلاقي متوسطات المثلث M ب J حيث $M(٣, ٢)$ ، $B(٧, ٠)$ أوجد إحداثي نقطة $ج$

بفرض أن $ص(٣, ٤)$

$$\therefore ١ = \frac{٣ + ٠ - ٧}{٣}$$

$$\therefore ٣ = ٧ - ٣ \quad \therefore ٣ = ٤$$

$$\therefore ٦ = ٩ + ٣ \quad \therefore ٣ = ٧ - ٣$$

$$\therefore ٣ = \frac{٢ + ٧ + ٣}{٣}$$

$$\therefore (٠, ٣ -)$$

مثال (١٥)

أوجد إحداثي نقطة تقاطع متوسطات المثلث P بـ إذا كانت $P(0, 3)$ ، $B(2, -3)$ ، $C(7, 0)$

∴ نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كل متوسط من الداخل بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس

∴ نفرض أن S منتصف $\overline{BC}$

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & 2 & 3 \\ & & 3- \\ 2 & 1 & 2 \end{array} \right) \quad \therefore \left(2, \frac{3-}{2} \right) = \left(\frac{7+3-}{2}, \frac{0-2}{2} \right) = S$$

∴ بفرض أن نقطة تقاطع متوسطات المثلث $M(3, 0)$

M تقسم $\overline{AS}$ بنسبة ٢ : ١ من الداخل

$$3 = \frac{\left(\frac{3-}{2}\right) \times 2 + 3 \times 1}{2 + 1} = \frac{{}_1S{}_2{}_2 + {}_2S{}_1{}_1}{{}_2{}_2 + {}_1{}_1} = 3 \therefore$$

$$0 = \frac{2 \times 2 + 0 \times 1}{2 + 1} = \frac{{}_1{}_2{}_2 + {}_2{}_2{}_1}{{}_2{}_2 + {}_1{}_1} = 0 \therefore$$

$$\therefore M(3, 0)$$

ملاحظة (٢)

إذا طلبت إحداثيات نقطة تقسيم القطعة $\overline{AB}$ إلى أربعة قطع متساوية في الطول في P, S, E, H على الترتيب فإننا نجد :

① نقطة S هي منتصف $\overline{AB}$

② نقطة H هي منتصف $\overline{AS}$

③ نقطة E هي منتصف $\overline{SB}$ وذلك بقانون التنصيف .

مثال [١٦]

أوجد النقط التي تقع عند ربع المسافة بين النقطتين P ، B حيث $P = (-8, -6)$ ، $B = (4, -10)$

الحل

بفرض أن : $\overline{PB}$ قطعة مستقيمة ، $ج$ ، $س$ ، $هـ$ ثلاث نقط تقع على $\overline{PB}$

بحيث $Pج = جس = سه = هـب$

$$س منتصف \overline{PB} = \left(\frac{-6 + 4}{2}, \frac{-10 + (-8)}{2} \right) = \left(\frac{-2}{2}, \frac{-18}{2} \right) = (-1, -9)$$

$$ج منتصف \overline{PS} = \left(\frac{-1 + (-8)}{2}, \frac{-9 + (-6)}{2} \right) = \left(\frac{-9}{2}, \frac{-15}{2} \right) = (-4.5, -7.5)$$

$$هـ منتصف \overline{SB} = \left(\frac{-1 + 4}{2}, \frac{-9 + (-10)}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{-19}{2} \right) = (1.5, -9.5)$$

$$\left(\frac{-1 + 4}{2}, \frac{-9 + (-10)}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{-19}{2} \right) = (1.5, -9.5)$$

$$(-4.5, -7.5)$$

$$هـ منتصف \overline{SB} = \left(\frac{-1 + 4}{2}, \frac{-9 + (-10)}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{-19}{2} \right) = (1.5, -9.5)$$

$$\left(\frac{18}{2}, \frac{2}{2} \right) = (9, 1)$$

$$(-9, -1)$$

ثانيا : ملاحظة : لإيجاد نسبة التقسيم وتعيين نوعه

إذا علم إحداثيا P ، B وواحد منهما على أقل من إحداثيا نقطة تقسيم القطعة المستقيمة AB وهي J (s ، v) بحيث $\overrightarrow{PJ} : \overrightarrow{JB} = \overrightarrow{AJ} : \overrightarrow{AB}$ ، J : B ، J : A .
 ∴ نطبق قانون التقسيم من الداخل فنحصل على النسبة J : A : B .
 فإذا كانت J : A : B لها إشارة موجبة فأن التقسيم يكون الداخل .

أى أن : ① نسبة التقسيم : $\frac{J}{A} < 0$ فأن التقسيم يكون من الداخل .

وإذا كانت J : A : B لها إشارة سالبة فأن التقسيم يكون الخارج .

أى أن : ② نسبة التقسيم : $\frac{J}{A} > 0$ فأن التقسيم يكون من الخارج .

ملاحظة :

إذا قطعت القطعة المستقيمة AB محور السينات في J فأن J هي (s ، 0) أى أن الإحداثى الصادى لنقطة $J = 0$. فلإيجاد النسبة J : A ، J : B التى يقسم بها محور السينات القطعة AB

$$\frac{J}{A} + \frac{J}{B} = 0 \text{ فى القانون } \frac{J}{A} + \frac{J}{B} = 0$$

$$J \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right) = 0$$

ومنه نوجد J : A : B وبالمثل لإيجاد النسبة التى يقسم بها محور الصادات القطعة AB نستخدم

$$\frac{J}{A} + \frac{J}{B} = 0 \text{ فى القانون } \frac{J}{A} + \frac{J}{B} = 0$$

مثال (١٧)

إذا كانت : $M(3, 2)$ ، $B(-1, 7)$ ، أوجد النسبة التي تنقسم بها القطعة المستقيمة $\overline{MB}$
 ① بمحور الصادات مبينا نوع التقسيم ② بمحور السينات مبينا نوع التقسيم

① لإيجاد نسبة التقسيم بمحور الصادات :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$$

نستخدم القانون : $x = x_1 \cdot \frac{1}{n} + x_2 \cdot \frac{r}{n}$

$$0 = (-1) \times \frac{1}{n} + 3 \times \frac{r}{n}$$

$$\therefore \frac{r}{1} = \frac{2}{1} \quad \therefore r = 2 \quad \therefore \frac{r}{1} = \frac{2}{1} \quad \therefore r = 2$$

$\therefore$ التقسيم من الداخل بنسبة ٢ : ١

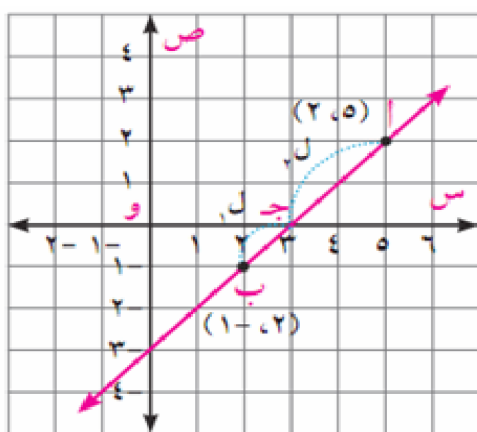
② لإيجاد نسبة التقسيم بمحور السينات : نستخدم القانون : $x = x_1 \cdot \frac{1}{n} + x_2 \cdot \frac{r}{n}$

$$\therefore 0 = 7 \times \frac{1}{n} + 3 \times \frac{r}{n} \quad \therefore 0 = 7 \times \frac{1}{n} + 3 \times \frac{r}{n} \quad \therefore 0 = 7 \times \frac{1}{n} + 3 \times \frac{r}{n}$$

$$\therefore \frac{r}{1} = \frac{3}{7} \quad \therefore r = 3 \quad \therefore \frac{r}{1} = \frac{3}{7} \quad \therefore r = 3$$

مثال (١٨)

إذا كانت : $M(2, 5)$ ، $B(-1, 2)$ ، فأوجد النسبة التي تنقسم بها $\overline{MB}$ بـ K مع محوري الإحداثيات ، مبينا نوع التقسيم في كل حالة ، ثم أوجد إحداثيات نقطة التقسيم .



① نفرض أن محور السينات يقطع $\overline{MB}$ في النقطة ج $(0, 0)$

$$\text{حيث } \frac{r}{1} = \frac{p}{q} \text{ فيكون : } \frac{x_1 \cdot \frac{1}{n} + x_2 \cdot \frac{r}{n}}{\frac{1}{n} + \frac{r}{n}} = 0$$

$$\therefore \text{صفر} = \frac{(1) \cdot \frac{1}{n} + (2) \cdot \frac{r}{n}}{\frac{1}{n} + \frac{r}{n}}$$



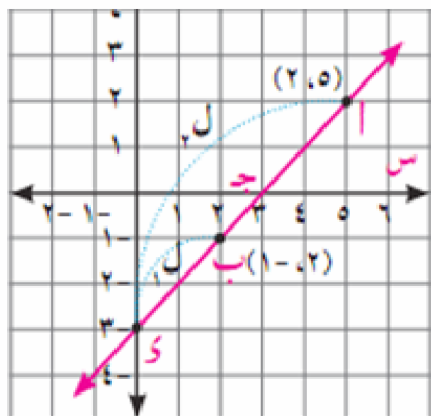
$$\therefore \frac{2}{1} = \frac{2}{1} \quad \therefore \frac{2}{1} = \frac{2}{1}$$

$$\therefore \frac{2}{1} < \text{صفر} \quad \therefore \text{التقسيم من الداخل بنسبة } 2 : 1$$

$$\therefore \text{إحداثيا نقطة ج هما } (0, \frac{2 \times 2 + 0 \times 1}{2 + 1}) = (0, \frac{4}{3})$$

$$= (0, 3)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



② المستقيم يقطع محور الصادات في النقطة ،

نفرض أن : إحداثي نقطة ، هما (0, ص)

$$\frac{2 \times 2 + 0 \times 1}{2 + 1} = \text{ص} \quad \therefore \frac{2}{1} = \frac{2}{1} \quad \text{حيث } \frac{2}{1} = \frac{2}{1}$$

$$\therefore \frac{2 \times 2 + 0 \times 1}{2 + 1} = \text{صفر} \quad \therefore$$

$$\therefore \frac{0 -}{2} = \frac{2}{1} \quad \therefore 2 - = 1$$

$$\therefore \frac{2}{1} > \text{صفر} \quad \therefore \text{التقسيم من الخارج بنسبة } 2 : 0$$

$$\text{إحداثيا نقطة ، هما } (0, \text{ص}) \text{ أي } (0, \frac{(1 -) \times 0 + 2 \times 2 -}{0 + 2 -})$$

$$\therefore \text{إحداثيا ، هما } (3 - , 0)$$

تفكير ناقد :

أوجد في المثال السابق باستخدام الصورة المتجهة لإيجاد النسبة التي تنقسم بها $\overleftrightarrow{AB}$ بمحوري الإحداثيات ، ثم أوجد إحداثيا نقطة التقسيم .

نفرض أنه : ج (٠ ، ٣) نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{AB}$ مع محور السينات وأن $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AJ}$ ، $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{JB}$

$$\therefore \overleftrightarrow{AB} = (٠ - ٣ ، ١ - ٢) = (-٣ ، -١)$$

$$\text{ومنها } \overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AJ} = \overleftrightarrow{JB}$$

$$\text{أي أنه : } \overleftrightarrow{AB} : \overleftrightarrow{AJ} = ١ : ٢$$

$\therefore$ ج تقسم $\overleftrightarrow{AB}$ من الداخل بنسبة ١ : ٢

$$١ \times (٠ - ٣) = ٢ \times (١ - ٢)$$

$$\therefore ٠ - ٣ = ٢ - ٤$$

$$\therefore ٣ = ١$$

$\therefore$ نقطة التقسيم ج = (٠ ، ٣)

نفرض أنه : د (٠ ، ٠) نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{AB}$ مع محور الصادات وأن :

$$\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AD} = \overleftrightarrow{DB}$$

$$\therefore \overleftrightarrow{AB} = (٠ - ٢ ، ٠ - ١) = (-٢ ، -١)$$

$$\therefore \overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AD} = \overleftrightarrow{DB} \therefore \overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AD} = \overleftrightarrow{DB}$$

$\therefore$ د تقسم $\overleftrightarrow{AB}$ من الخارج بنسبة ٠ : ٢

$$\therefore ٠ \times (٠ - ٢) = ٢ \times (٠ - ١)$$

$$\therefore ٠ - ٠ = ٢ - ٢$$

$$\therefore ٠ = ٢$$

$\therefore$ نقطة التقسيم د = (٠ ، ٠)

مثال (١٩)

إذا كانت : $M(3, 2)$ ، $B(0, 3)$ والنقطة $J(11, 10)$ تقسم القطعة المستقيمة $\overline{MB}$ بنسبة $ل : ل$ ، أوجد : ① نسبة تقسيم $\overline{MB}$ بالنقطة J وعيها نوعها . ② نسبة تقسيم $\overline{MB}$ بالنقطة B وعيها نوعها . ③ نسبة تقسيم $\overline{MB}$ بالنقطة M وعيها نوعها .

$$\frac{ل_1 ل_2 + ل_1 ل_2}{ل_2 + ل_1} = ل$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2ل & 0 \\ 1 & 1ل & 2 \end{pmatrix} \quad \therefore \frac{2 \times 2ل + 0 \times 1ل}{2ل + 1ل} = 11$$

$$2ل + 1ل \cdot 0 = 2ل \cdot 11 + 1ل \cdot 0 \quad \therefore 2ل = 22$$

$$\frac{3-}{2} = \frac{9-}{6} = \frac{1ل}{2ل} \quad \therefore$$

$\therefore$ ج تقسم $\overline{MB}$ من الخارج بحيث أن $M : B = 3 : 2$ حل آخر باستخدام الموجهات :

$$\begin{aligned} (18, 9) &= (3, 2) - (10, 11) = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{JB} = \overrightarrow{MB} \\ (12, 6) &= (10, 11) - (3, 0) = \overrightarrow{JB} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{JB} \end{aligned}$$

$$\therefore \overrightarrow{MB} = \frac{3-}{2} \overrightarrow{JB}$$

$\therefore \overrightarrow{MB} , \overrightarrow{JB}$ متضادتان في الاتجاه ، ج تقسم $\overline{MB}$ من الخارج بنسبة $3 : 2$

بالمثل يمكن إيجاد ② ج تقسم $\overline{MB}$ من الداخل بنسبة $1 : 2$

③ ج تقسم $\overline{MB}$ من الخارج بنسبة $3 : 1$

مثال (٢٠)

م ب ج مثلث فيه م (٣ ، ٤ -) ، ب (٢ - ، ١) ، ج (٠ - ، ٧ -) ، $\overline{AB} \ni S$ ، حيث س (١ - ، صفر) أوجد النسبة م س : س ب ، إذا رسم الشعاع $\overrightarrow{SH}$ // $\overline{BC}$ وكان $\overrightarrow{SH} \cap \overline{AB} = \{H\}$ أوجد إحداثيا نقطة هـ .

① لإيجاد النسبة التي تقسم بها س القطعة المستقيمة $\overline{AB}$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4- \\ 2- & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \frac{2 \times 2 + 1 \times 4}{2 + 1} = 2$$

$$\therefore \frac{(2-) \times 2 + 3 \times 1}{2 + 1} = 0$$

$$2 \times 2 = 1 \times 3 \therefore 2 = 2 - 1 \times 3$$

$$\therefore \frac{2}{1} = \frac{2}{1} \therefore 2 : 3 = 1 : 2$$

$$\frac{2 \times 2 + 1 \times 4}{2 + 1} = 2 \quad \text{يمكنه الحل بطريقة أخرى بفرض أن س :}$$

$$\therefore \text{س تقسم } \overline{AB} \text{ من الخارج بحيث أن م س : س ب = ٢ : ٣} \quad \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4- \\ 0- & 2 & 7- \end{pmatrix}$$

$$\therefore \frac{3}{2} = \frac{4-}{2} = \frac{4-}{3} \quad \text{لإيجاد إحداثي هـ : } \therefore \overrightarrow{SH} \parallel \overline{BC} \quad \text{من الداخل}$$

$$0,8 - = \frac{29-}{0} = \frac{21-8-}{0} = \frac{(7-)3 + (4-)2}{3+2} = \frac{2 \times 2 + 1 \times 4}{2+1} = 2 \therefore$$

$$1,8 - = \frac{9-}{0} = \frac{10-6}{0} = \frac{(0-)3 + 3 \times 2}{3+2} = \frac{2 \times 2 + 1 \times 4}{2+1} = 2$$

$\therefore$ إحداثيا هـ هما (١,٨ - ، ٠,٨ -)

تأريين (٥) على التقسيم

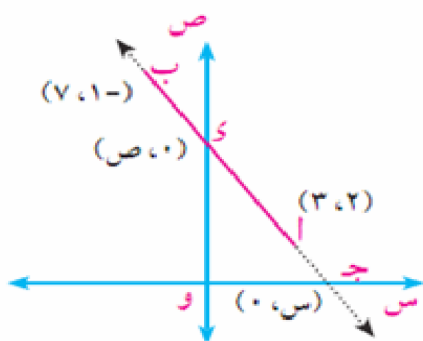
١١] أكمل كلاهما يأتي بالإجابة الصحيحة :

- ١ $\overline{AB}$ قطر في دائرة M إذا كانت $M(3, -1)$ ، M هي نقطة الأصل فإن إحداثي نقطة B
- ٢ M ب ج مثلث فيه $M(1, 0)$ ، $B(0, 3)$ ، ج $(3, 2)$ فإن نقطة تلاقي متوسطاته هي
- ٣ إذا كانت $M(1, 4)$ ، $B(3, -1)$ وكانت ج منتصف $\overline{AB}$ حيث ج $(3, 5)$ فإن $5 = \dots\dots\dots$ ، $4 = \dots\dots\dots$
- ٤ إذا كانت ج $(6, 2)$ منتصف $\overline{AB}$ حيث $M(0, 3)$ فإن $B = \dots\dots\dots$
- ٥ إحداثي نقطة منتصف $\overline{AB}$ هي حيث $M(4, 1)$ ، $B(2, -4)$
- ٦ إذا كانت ج منتصف $\overline{AB}$ حيث $M(3, 4)$ ، $B(1, 6)$. فإن إحداثي ج = ...
- ٧ إذا كانت M متوسط في Δ M ب ج حيث $M(1, 2)$ ، $M(4, -4) = 4$ ، فإن نقطة تلاقي متوسطات Δ M ب ج هي (..... ،)
- ٨ نقطة تلاقي متوسطات المثلث M و B حيث M نقطة الأصل ، $M(0, 6)$ ، $B(6, -1)$ هي
- ٩ إذا كانت ج $\overline{AB}$ قطر في دائرة مركزها M حيث $M(3, 0)$ ، ج $(2, 1)$ فإن إحداثي $A = \dots\dots\dots$
- ١٠ النقطة التي تقسم $\overline{AB}$ من الداخل بنسبة $1 : 1$ حيث $M(0, 8)$ ، $B(6, 0)$ هي
- ١١ إذا كانت نقطة الأصل منتصف $\overline{AB}$ حيث $M(-3, 2)$ فإن إحداثي نقطة $B = \dots\dots\dots$
- ١٢ إذا كان ج منتصف $\overline{AB}$ ، ج $(3, 2)$ ، $M(1, 0)$ ، $B(2, 3 - 5)$ فإن $5 = \dots\dots\dots$
- ١٣ إذا كانت $M(4, -4)$ ، $B(0, -8)$ ، ج $\exists \overline{AB}$ بحيث ج $B : M = 1 : 2$ فإن ج = ...
- ١٤ إذا كانت M متوسط في Δ M ب ج فيه $M(1, 2)$ ، $M(4, -4) = 4$ ، فإن نقطة تلاقي متوسطات Δ M ب ج هي (..... ،)
- ١٥ إذا كانت : $M(-3, 4)$ ، $B(6, -8)$ فإن محور السينات يقسم $\overline{AB}$ بنسبة ... : ... من الداخل
- ١٦ إذا كانت : $M(-3, 2)$ ، $B(0, -4)$ ، $\overline{AB}$ يقطع محور الصادات في ج فإن ج تقسم $\overline{AB}$ بنسبة : من الخارج

٢) في الشكل المقابل :

إذا كانت $M(3, 2)$ ، $B(1, -7)$ ،
ج ، د ، نقطتان تقعان على محوري الإحداثيات

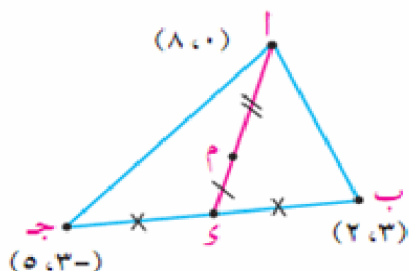
- ١ ج تقسم $\overline{MB}$ من ونسبة التقسيم هي :
- ٢ د تقسم $\overline{MB}$ من ونسبة التقسيم هي :
- ٣ إحداثيا نقطة ج هي ٤ إحداثيا نقطة د هي



٣) في الشكل المقابل :

M و $\overline{MB}$ متوسط في $\triangle MB$ ، M نقطة تلاقي المتوسطات

حيث $M(8, 0)$ ، $B(3, 2)$ ، $J(0, 3)$ ،
١ أوجد إحداثيا نقطة د ٢ إحداثيا نقطة م



٤) إذا كانت : $M \ni$ محور السينات ، $B \ni$ محور الصادات ، $J(3, -4)$ منتصف $\overline{MB}$ فأوجد إحداثي كل من M ، B
« (٦، ٠) ، (٠، ٨) »

٥) النقط $M(8, 4)$ ، $B(2, -4)$ ، $J(1, -2)$ أثبت أنها ثلاث رؤوس مستطيل M ب ج د . أوجد إحداثي د

٦) M ب ج د متوازي أضلاع ، M نقطة تلاقي قطريه فإذا كانت $M(0, 3)$ ، $B(1, 7)$ ،
١ ، ١ أوجد إحداثي كل من ج ، د واحسب طول القطر $\overline{BD}$
« (١٢، ٠) ، (٠، ١) ، (٣، ٠) »

٧) $M(7, -2)$ ، $B(10, 4)$ ، $J(1, 0)$ رؤوس متوازي أضلاع أثبت أن :
إحداثيات الرأس الرابعة د (د ، د) تحقق العلاقة $د + د + د = ١٣$

٨) إذا كانت $M(5, -4)$ ، $B(2, -4)$ أوجد إحداثي النقطة ج التي تقسم $\overline{MB}$ من الداخل بنسبة ٤ : ٣
« (٤، ١) »

✍️ [٩] إذا كانت $M(1, 3)$ ، $B(0, 2)$ أوجد إحداثيات النقطة ج التي تقسم $\overline{MB}$ من الداخل ٢ : ٣

✍️ [١٠] إذا كانت $M(0, 3)$ ، $B(6, 3)$ فأوجد إحداثيات النقطة ج التي تقسم $\overline{MB}$ من الداخل بنسبة ١ : ٢

✍️ [١١] إذا كانت $M(0, 2)$ ، $B(1, 7)$ أوجد إحداثيات النقطة ج التي تقسم $\overline{MB}$ من الخارج بنسبة ٣ : ٢

((١٧-٠ ، ١٣))

✍️ [١٢] M ، B ، ج هي $(0, 2)$ ، $(1, 1)$ ، $(3, 2)$ على الترتيب أوجد إحداثيات كل من

- ١ النقطة ، التي تقسم $\overline{MB}$ من الداخل بنسبة ٢ : ١
- ٢ النقطة ، التي تقسم $\overline{MB}$ من الخارج بنسبة ٣ : ١

((١٠٠-٠ ، ٢٠٤))

✍️ [١٣] إذا كان $M(0, 7)$ ، $B(7, 0)$ أوجد إحداثيات النقط التي تقسم القطعة $\overline{MB}$ الى أربع قطع متساوية في الطول

((٤٠٢-٠ ، ١٠١-٠ ، ٢٠٤))

✍️ [١٤] إذا كانت $M(1, 2)$ ، $B(2, 1)$ فأوجد إحداثيات النقطة ج $\ni \overline{MB}$ ج ، $\nexists \overline{MB}$ بحيث بعدها عن M أربعة أمثال بعدها عن B

((٣-٠ ، ٢-٠))

✍️ [١٥] إذا كانت $M(1, 8)$ ، $B(1, 4)$ أوجد إحداثيات النقطتين اللتين تقسمان $\overline{MB}$ الى ثلاث قطع متساوية في الطول

((٣-٠ ، ٢-٠ ، ٥-٠))

✍️ [١٦] أوجد إحداثيات النقطة ج التي تقع عند خمس المسافة من النقطة $M(1, 1)$ الى النقطة $B(9, 4)$

((٠٠١))

✍️ [١٧] إذا كانت $M(8, 4)$ ، $B(1, 2)$ فأوجد إحداثيات النقطتين اللتين تقسمان $\overline{MB}$ الى ثلاث أجزاء متساوية في الطول



(١٨) إذا كانت $M(٧, ٤)$ ، $B(٢- , ٢-)$ ، $J(٥, ٠)$ ، تقسم $\overline{MB}$ من الداخل بنسبة ١ : ٢ أوجد طول $\overline{JB}$

« ٥٧ »

(١٩) إذا كانت $J \in \overline{MB}$ ، $J \notin \overline{MB}$ وكانت $M(١, ٣)$ ، $B(٢, ٤)$ وكان $MJ = ٢$ ، B أوجد إحداثيات النقطة J

(٢٠) إذا كانت $M(٣, ١)$ ، $B(٢- , ٤-)$ أوجد إحداثيات النقطة J إذا كانت $J \in \overline{MB}$ بحيث $٣ MJ = ٢ JB$

(٢١) إذا كانت $M(٣- , ٢)$ ، $J(٤, ١-)$ ، $J \in \overline{MB}$ بحيث $٢ JB = MJ$ أوجد إحداثيات النقطة B

« (١٨٠٧-) »

(٢٢) إذا كانت النقط $M(٣- , ٤)$ ، $B(١, ٣)$ ، $J(١- , ٣)$ على استقامة واحدة ، $J \in \overline{MB}$ ، $\frac{MJ}{JB} = \frac{٢}{٣}$ أوجد قيمة ٣ ، ٤

« ٧-٠٢- »

(٢٣) إذا كانت $M(٣- , ٤)$ ، $B(٣, ٢-)$ فأوجد إحداثيات النقطة J التي تقسم $\overline{MB}$ ، $J \in \overline{MB}$ إذا كان : ١ $٢ MJ = JB$ ، ٢ $٥ MJ = ٣ JB$ ، ٣ $٣ MJ = ٥ JB$ ، ٤ $٥ MJ = ٣ JB$

(٢٤) إذا كانت $M(١- , ٢)$ ، $B(٣, ٥-)$ ، $J \in \overline{MB}$ بحيث $٣ JB = MJ$ أوجد إحداثيات النقطة J التي تقسم $\overline{MB}$ إذا كان : ١ التقسيم من الداخل ، ٢ التقسيم من الخارج

« (١١٠١٩) ، (١٠٤٠٢٢-) »

(٢٥) أوجد نقطة تلاقي متوسطات المثلث MJB حيث $M(٧, ٢)$ ، $B(٣, ٦)$ ، $J(١- , ٥-)$

« (٣٠١) »



[٢٦]

النقطة م (٢، ١) هي نقطة تلاقي متوسطات المثلث م ب ج فإذا كانت م (٥، ٠ - ٤)

« (٤، ١ -) »

ب (٣، ٢ -) فما إحداثي نقطة ج

[٢٧]

إذا كانت : م ، ب ، ج ثلاث نقط تقع على استقامة واحدة حيث : م (٢، ٥)

ب (٥، ٢) ، ج (٤، ص) . أوجد النسبة التي تقسم بها النقطة ج القطعة المستقيمة

الموجهة $\overrightarrow{م ب}$ ميينا نوع التقسيم ، ثم أوجد قيمة ص .

[٢٨]

إذا كانت م (٤ -، ٣) ، ب (٨، ٦) ، ج $\exists \overrightarrow{م ب}$ حيث ج (٣، ٠)

، فأوجد النسبة التي تقسم بها $\overrightarrow{م ب}$ بالنقطة ج ميينا نوع التقسيم ، ثم أوجد قيمة ص .

[٢٩]

إذا كانت : م (٣ -، ٢) ، ب (٢ -، ٣) فأوجد النسبة التي تقسم بها النقطة

« ١ : ٢ منه الخارج »

ج (٨ -، ٧) القطعة $\overrightarrow{م ب}$ ميينا نوع التقسيم

[٣٠]

أوجد النسبة التي يقسم بها محور الصادات القطعة المستقيمة $\overrightarrow{م ب}$ حيث م (٢، ٣)

« $\frac{٢}{٣}$ منه الداخل ، $(\frac{٢٣}{٥}، ٠)$ »

ب (٣ -، ٧) ميينا نوع التقسيم وأوجد نقطة التقسيم

[٣١]

إذا كانت : م (٢ -، ٣) ، ب (٤ -، ٢) فأوجد النسبة التي يقسم بها محور السينات

« $\frac{٣}{٢}$ منه الداخل ، $(٠، \frac{٨}{٥})$ »

القطعة المستقيمة $\overrightarrow{م ب}$ ميينا نوع التقسيم وأوجد نقطة التقسيم

[٣٢]

اثبت أن النقط م (١ -، ٣) ، ب (٣، ٥) ، ج (٥، ١٣) تقع على استقامة واحدة

ثم أوجد النسبة التي تنقسم بها القطعة $\overrightarrow{م ب}$ بالنقطة ج ميينا نوع التقسيم « ٢ : ١ منه الخارج »

[٣٣]

إذا كانت ج نقطة تقاطع $\overrightarrow{م ب}$ مع محور السينات

« ٣ : ٤ منه الداخل »

فأوجد النسبة م ج : ج ب

[٣٤] إذا كانت $M(٤, ٢)$ ، $B(١- , ٣-)$ وكانت القطعة $\overline{MB}$ تقطع المحور السيني والصادي في ج ، ه على الترتيب أوجد النسبة التي تنقسم بها $\overline{MB}$ بك من ج ، ه مينا نوع التقسيم « ١ : ٢ ، ٣ : ٤ »

[٣٥] إذا كانت $M \ni$ محور السينات ، $B \ni$ محور الصادات ، النقطة ج $(٧- , ٣-)$ هي منتصف $\overline{MB}$ أوجد إحداثي كل من م ، ب « (١٤ ، ٠) ، (٠ ، ٦-) »

[٣٦] $M(٥ , ٢)$ ، $B(٥ , ٢)$ ، ج $(٤ , ٥)$ وكانت M ، ب ، ج تنتمي لمستقيم واحد ، أوجد النسبة التي تقسم بها النقطة ج القطعة $\overline{MB}$ مينا نوع التقسيم ثم أوجد قيمة ص « ٣ ، ١ : ٢ »

[٣٧] $M(٢ , ٢)$ ، $B(٦ , ٥)$ ، ج $(١٠- , ٤-)$ رؤوس مثلث ، $B \ni \overline{MB}$ بحيث $M : B : ج = ٢ : ١ : ١$ ، ج أوجد إحداثي نقطة ه « $(\frac{٨}{٣} , \frac{٢٠}{٣})$ »

[٣٨] M ، ب ج ، متوازي أضلاع رؤوسه M ، ب ، ج هي النقط $(٣ , ٢)$ ، $(١ , ٥)$ ، $(٦ , ٧)$ على الترتيب أوجد إحداثي نقطة ه ثم أوجد النسبة التي يقسم بها محور الصادات القطعة $\overline{MB}$ مينا نوع التقسيم « (٣ ، ١ : ٢) من الخارج »

[٣٩] M ، ب ج مثلث رؤوسه هي $M(٤ , ٧)$ ، $B(١٠- , ٨-)$ ، ج $(٧- , ٢-)$ فإذا كانت ه تقسم $\overline{MB}$ من الداخل بنسبة ١ : ٢ ، رسم ه ه // $\overline{MB}$ حيث ه ه $\cap \overline{MB}$ أوجد إحداثي ه ، ه « (٥ ، ٤) ، (٣ ، ٢) »

[٤٠] إذا كانت $M(٢ , ٥)$ ، $B(١٠- , ٣-)$ فأوجد النسبة التي تنقسم بها القطعة المستقيمة $\overline{MB}$ بك من نقطتي تقاطع $\overleftrightarrow{MB}$ مع محوري الإحداثيات مينا نوع التقسيم « ١ : ٢ من الخارج ، ٣ : ٥ من الداخل »



✍️ [٤١] إذا كانت ج ، ، نقطتي تقاطع $\overleftrightarrow{AB}$ مع محوري الإحداثيات فأوجد النسبة التي تقسم بها

كل مع ج ، ، القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ ميينا نوع التقسيم ، علماً بأن :

$$A(7, 0) , B(3, -2)$$

((٧ : ٢ مع الخارج ، ٠ : ٣ مع الداخل))

✍️ [٤٢] أثبت أن : النقط $A(1, 4)$ ، $B(3, -2)$ ، $C(3, -16)$ تقع على استقامة

واحدة ثم أوجد :

١ النسبة التي تقسم بها A القطعة المستقيمة $\overline{BC}$ ، ميينا نوع التقسيم « ١ : ٢ مع الداخل »

٢ النسبة التي تقسم بها B القطعة المستقيمة $\overline{AC}$ ، ميينا نوع التقسيم « ٣ : ١ مع الخارج »

٣ النسبة التي تقسم بها C القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ ، ميينا نوع التقسيم « ٢ : ٣ مع الخارج »

✍️ [٤٣] $A(7, -1)$ ، $B(4, 2)$ ، $C(2, 4)$ أثبت أن النقط A ، B ، C تقع على استقامة

واحدة ثم أوجد : ١ النسبة التي تنقسم بها $\overline{AB}$ بنقط ج « ٢ : ٠ »

٢ النسبة التي تنقسم بها $\overline{AC}$ بالنقطة ب « ٣ : ٢ »

٣ النسبة التي تنقسم بها $\overline{BC}$ بالنقطة A « ٠ : ٣ » ميينا نوع التقسيم في كل حالة

✍️ [٤٤] إذا كانت : $A(2, 2)$ ، $B(0, 6)$ ، $C(10, -4)$ هي رؤوس مثلث

، $\exists \overline{BC} \cap \overleftrightarrow{AD} = D$ بحيث D : $D = \frac{1}{3}B + \frac{2}{3}C$ أوجد إحداثي نقطة D « $(\frac{8}{3}, \frac{20}{3})$ »

✍️ [٤٥] تتحرك سيارة نقل ركاب في طريقها من المدينة A الى المدينة $B(0, -6)$

، $B(1, 0)$ وتوقفت مرتين أثناء سيرها . أوجد إحداثيات النقطتين التي توقفت عندهما

السيارة إذا كانت : ١ توقفت في منتصف الطريق ٢ توقفت في ثلثي الطريق مع جهة

النقطة A .

معادلة الخط المستقيم

سبق أن درست المعادلة العامة للخط المستقيم وهي : $٠ = ج + ب ص + م$ حيث ٠ ، $ب$ كلاهما معا $\neq$ صفر وهي معادلة من الدرجة الأولى في متغيرين

أي العلاقات التالية تمثل علاقة خطية وأيها لا تمثل علاقة خطية

- ١ $١ = ص - ٦$ علاقة خطية لأن المتغيرين $ص$ ، ١ من الدرجة الأولى
- ٢ $٩ = ص$ ليست علاقة خطية لأن المتغيرين $ص$ من الدرجة الثانية
- ٣ $٣ = ص - ٦$ ليست علاقة خطية لأن المتغير $ص$ من الدرجة الرابعة
- ٤ $٠ = ٣ - ٢ ص + ٢ ص$ ليست علاقة خطية لأن المتغيرين $ص$ ، ٣ من الدرجة الثانية
- ٥ $٠ = ص + \sqrt{ص}$ ليست علاقة خطية لأن المتغير $ص$ عليها جذر تربيعي
- ٦ $١ = ص - ٣$ ليست علاقة خطية لأن المتغير مرفوعة لقوة سالبة
- ٧ $٣(١ - ص) = ص$ ليست علاقة خطية لأن المتغير $ص$ من الدرجة الثالثة

لاحظ أن : المعادلة : $٠ = ج + ب ص + م$ حيث ٠ ، $ب$ لا يساوي الصفر معا بالصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم .

١ **إذا كان :** $٠ = ب$ ، $٠ \neq م$ فإن المعادلة تكون : $٠ = ج + م$

$\therefore \frac{ج - م}{ب} = ص$ وهي معادلة مستقيم موازيا لمحور الصادات .

وتمثل بخط مستقيم يقطع محور السينات في النقطة $(٠ , \frac{ج - م}{ب})$

٢ **إذا كان :** $٠ = م$ ، $٠ \neq ب$ فإن المعادلة تصبح : $٠ = ج + ب ص$

أي أن $ص = \frac{ج - م}{ب}$ وهي معادلة خط مستقيم يوازي محور السينات .

وتمثل بخط مستقيم يقطع محور الصادات في النقطة $(\frac{ج - م}{ب} , ٠)$

٣ **إذا كان :** $٠ = ج$ فإن المعادلة تصبح : $٠ = ب ص + م$ وهي معادلة خط مستقيم يمر بنقطة الأصل .



✍ مثال (۱)

- أي من المستقيمات الآتية يكون موازيا لمحور الصادات ، أيها يكون موازيا لمحور السينات .
 أيها يمر بنقطة الأصل ، ثم أوجد إحداثيات نقاط التقاطع مع محوري الإحداثيات (إن وجدت) .
- ١ $x^2 + y^2 = 0$ ٢ $x^2 + y^2 = 5$ ٣ $x^2 + y^2 = 12$ ٤ $x^2 + y^2 = 0$

الحل

- ١ $\omega_2 + \omega_3 = 0$ $\therefore$ الحد المطلق ج $\omega = 0$
- ٢ $\omega_2 + \omega_3 = 0$ $\therefore$ المستقيم يمر بنقطة الأصل $\omega = 0$
- ٣ $\omega_2 + \omega_3 = 12$ $\therefore \omega_2 = 12 - \omega_3$ $\therefore$ المستقيم لا يوازي محور السينات $\omega \neq 12$
- ٤ $\omega_2 + \omega_3 = 0$ $\therefore \omega_2 = 0 - \omega_3$ $\therefore$ المستقيم يقطع محوري الإحداثيات في النقطتين $(0, 6)$ ، $(0, 0)$ $\therefore$ المستقيم يوازي محور السينات $\omega = 0$

مثال (۲) تفکیک ناقد :

إذا كان L خطاً مستقيماً ، Q نقطة في المستوى ، $Q \notin L$
 فكم عدد المستقيمتين التي تمر بالنقطة Q ، وتوازي الخط المستقيم L ؟

الإجابة : مستقيم واحد فقط

لأنه نقطة خارج مستقيم معلوم لا يمكن رسم سوى مستقيم واحد فقط يوازي المستقيم المعلوم

ميل الخط المستقيم

تذكر أن :

١ ميل المستقيم اطار بالنقطتين $P(1, 3), Q(2, 5)$ ب $(2, 5), (1, 3)$

$$\frac{5 - 3}{2 - 1} = 2$$

٢ ميل المستقيم الذي يصنع زاوية θ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات :

$$\theta = \text{ظا}$$

٣ ميل المستقيم الذي معادلته : $ax + by + c = 0$

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{معامل } x}{\text{معامل } y} = \text{ظا}$$

ملاحظة :

١ إذا كان : $l \parallel l'$ فإن : $m = m'$

أي أن : إذا توازي مستقيمان فإن ميليهما يكون متساوي والعكس صحيح

٢ إذا كان : $l \perp l'$ فإن : $m \times m' = -1$ والعكس صحيحأي أن : حاصل ضرب ميلي أي مستقيمين متعامدين = -1 والعكس صحيح .

متجه اتجاه المستقيم

كل متجه غير صفري يمكن تمثيله بقطعة مستقيمة موجهة على خط مستقيم يسمى متجه اتجاه الخط المستقيم l

فإذا كانت النقط $M, B, J \in l$ فإن : $\vec{MB}, \vec{BJ}, \vec{JM}$ متجهات اتجاه للخط المستقيم .فمثلا : إذا كان : $(1, 2) = \vec{u}$ متجه اتجاه للمستقيم .فإن : كل هذه المتجهات $(2, 4), (1, 2), (-1, -2), (-2, -4), \dots$

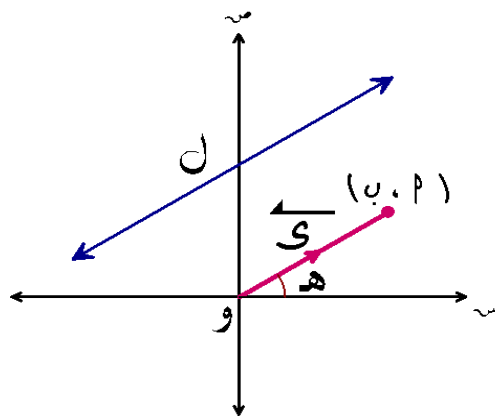
متجه اتجاه لهذا المستقيم .



وبوجه عام :

إذا كان : $\vec{u} = (p, b)$ متجه اتجاه للمستقيم فان : $\vec{v}$ متجه نفس اتجاه المستقيم حيث $\vec{v} \in \mathbb{R} - \{0\}$. لماذا ؟

متجه اتجاه المستقيم هو متجه موضوع يوازي المستقيم وفي الشكل المقابل :



متجه اتجاه المستقيم L هو $\vec{u} = (p, b)$

ميك المستقيم L ويرمز له بالرمز $\mathcal{M}$

إذا كان $\vec{u} = (p, b)$ وهو متجه اتجاه المستقيم L

فان ميك المستقيم هو $\mathcal{M} = \frac{b}{p}$

ففي الشكل السابق : نلاحظ أن $\mathcal{M} = \frac{b}{p}$ حيث (h)

وهي قياس الزاوية التي يصنعها متجه اتجاه المستقيم مع محور السينات $\mathcal{M} = \frac{b}{p} = \tan h$

مثال [٣] حاول أن تحل :

إذا كان : $\vec{u} = (2, -3)$ متجه اتجاه المستقيم L فأى مما يأتي يكون متجه اتجاه لنفس المستقيم ؟

- ١ $(-2, 3)$ ٢ $(-3, 2)$ ٣ $(2, 3)$ ٤ $(6, -9)$

يتضح أن

$$\vec{u} = (2, -3) = (-2, 3) = \vec{u} \quad ١$$

$\therefore (-2, 3)$ متجه اتجاه المستقيم L

$$\vec{u} = (2, -3) \Rightarrow 3\vec{u} = (6, -9) \quad ٤$$

$\therefore (-2, 3)$ متجه اتجاه المستقيم L

أما ٢ $(-3, 2)$ ٣ $(2, 3)$ لا تصلح لأن : $\vec{u} \neq \vec{v}$



معادلة المستقيم

معادلة المستقيم بعلومية نقطة عليه ومتجه اتجاه له :

١ الصيغة المتباعدة .

لتعيين معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة Q ، والمتجه $\vec{u}$ متجه اتجاه له
نفرض أن النقطة P تقع على الخط المستقيم L .

وَأَن : $\overleftarrow{\smile}$ ، $\overleftarrow{\circ}$ هما المتجهان الممثلان

بالقطعتين المستقيمتين الموجهتين $\overrightarrow{OQ}$ ، $\overrightarrow{OQ}$ على الترتيب

، حيث و أي نقطة في المستوى .

$\{ \cdot \} - \mathbb{I} \ni \mathbb{I} \therefore$

$$\frac{1}{5} \text{ ج } = \frac{1}{9} - \frac{1}{r} = \frac{1}{90} \text{ بدلت}$$

$$\frac{1}{5}x + \frac{1}{6} = \frac{1}{5} \quad \therefore$$

تسمى هذه الصورة بالمعادلة المتجهة للخط المستقيم l امار بالنقطة q ، والمتجه $\vec{u}$ متجه اتجاه له .

نتيجة :

المعادلة الموجهة لمعادلة الخط المستقيم المار بنقطة الأصل ومتجه اتجاهه $\vec{u}$ هي

: المعادلة الموجهة :

$$(0, 1) \mathcal{G} = \frac{1}{5} \mathcal{G} = \frac{1}{5}$$

مثال (Σ)

أوجد المعادلة المتجهة للمستقيم الذي يمر بنقطة الأصل بنقطة الأصل (0) والنقطة $P(3, 0)$

∴ المستقيم يمر بالنقطتين $(0, 3)$ و $(-1, 0)$

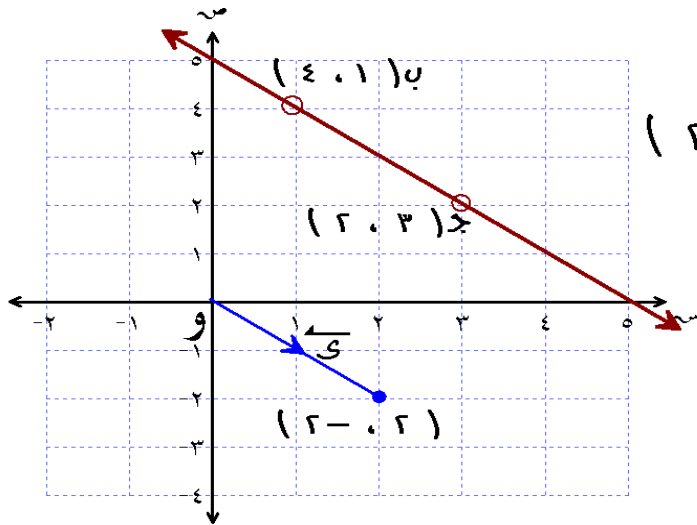
$(0.3) = \frac{1}{9} - \frac{1}{10} = \frac{1}{90}$ متجه اتجاه المستقيم

∴ متجه اتجاه المستقيم $(0, 3) = \vec{s}$

$\therefore$ المعادلة المتجهة للمستقيم : $\vec{r} = (0, 3)$

مثال [٥]

أوجد المعادلة المتجهة للمستقيمة التي يمر بالنقطتين ب (٤ ، ١) ، ج (٢ ، ٣) موضحاً ذلك بالرسم



∴ المستقيم يمر بالنقطتين ب (٤ ، ١) ، ج (٢ ، ٣)

∴ متجه اتجاه المستقيم $\vec{r} = \vec{B} - \vec{J} = \vec{s}$

$$(2, -2) = (4, 1) - (2, 3) =$$

المعادلة المتجهة هي : $\vec{r} = \vec{J} + \vec{s}$

$$\therefore (2, -2) + (2, 3) = \vec{r}$$

$$\text{أو } \vec{r} = \vec{J} + \vec{s}$$

$$\therefore (2, -2) + (2, 3) = \vec{r}$$

مثال [٦]

اكتب المعادلة المتجهة للخط المستقيم الذي يمر بالنقطة ق (٣ - ، ٢) ومتجه الاتجاه له (٢ ، ١) .

بفرض أن : المستقيم يمر بالنقطة ق (٣ - ، ٢) ، $\vec{r} = (2, 1)$

$$\therefore \vec{r} = \vec{Q} + \vec{s}$$

∴ المعادلة المتجهة للمستقيم هي :

$$\vec{r} = (3, -2) + (2, 1)$$

مثال [٧] حاول أن تحل :

اكتب المعادلة المتجهة للمستقيم الذي يمر بالنقطة (٣ ، ٤ -) ومتجه الاتجاه له (٥ ، ٢) .

بفرض أن : المستقيم يمر بالنقطة ق (٣ ، ٤ -) ، $\vec{r} = (5, 2)$

$$\therefore \vec{r} = \vec{Q} + \vec{s}$$

∴ المعادلة المتجهة للمستقيم هي :

$$\vec{r} = (3, -4) + (5, 2)$$

٦ المعادلة الوسيطة (البارامترية)

المعادلة المتجهة هي : $\vec{r} = \vec{q} + \vec{t}$

إذا كانت $\vec{q}$ (ص ، ص) ، $\vec{r}$ (ص ، ص)

بالنسبة لنظام إحداثي متعامد ، و نقطة الأصل ، وكان $\vec{t} = (\mu , \nu)$

فان معادلة المستقيم : هي $(\nu , \nu) = (\nu , \nu) + (\mu , \nu) = (\mu , \nu)$

$$\mu + \nu = \nu$$

$$\mu + \nu = \nu$$

ومنها ينتج أن : **المعادلتان الوسيطتان :**

وهما المعادلتان الوسيطتان للخط المستقيم المار بالنقطة (ν , ν)

والمتجه $\vec{t} = (\mu , \nu)$ متجه اتجاه له . حيث $\vec{t} \in \mathbb{R} - \{ 0 \}$

مثال [n]

اكتب المعادلتين البارامتريتين للمستقيم الذي يمر بالنقطة $(3 , -2)$ ومتجه اتجاه له $(2 , 2)$.

بفرض أن : $\vec{q} = (3 , -2) \in \text{المستقيم}$ ، $\vec{t} = (2 , 2)$

∴ **المعادلة المتجهة للمستقيم** $\vec{r}$ هي

$$\vec{r} = \vec{q} + \vec{t}$$

$$\vec{r} = (\nu , \nu) + (\mu , \nu) = (\mu , \nu) \therefore$$

$$\text{أي أن } (3 , -2) + (3 , -2) = (\nu , \nu)$$

وتكون المعادلتين الوسيطتين :

$$\nu - 3 = 3 - \nu$$

$$\nu = 2 + 2$$



٣ المعادلة الكارتيزية :

بحذف x من المعادلتين البارامتريتين : $u + 1x = 3$ ، $v + 2x = 0$ ،

$$\therefore \text{نحصل : } \frac{u - 3}{1} = \frac{v}{2} \quad \text{أي أن : } \frac{u - 3}{1} = \frac{v}{2}$$

$$\text{وبوضع } m = \frac{v}{u} \text{ (حيث } m \text{ ميل الخط المستقيم)}$$

$$\therefore \text{ معادلة الخط المستقيم : } m = \frac{u - 3}{v}$$

مثال (٩)

أوجد المعادلة الكارتيزية للخط المستقيم الذي يمر بالنقطة $(3, -4)$ ومتجه الاتجاه له $(2, -1)$

$$\therefore m = \frac{-1}{2} \quad \therefore \text{ ميل المستقيم } m = \frac{-1}{2}$$

$\therefore$ المستقيم يمر بالنقطة $(3, -4)$ ، $(x, y) = (3, -4)$

$$\therefore m = \frac{y - (-4)}{x - 3} \quad \therefore \frac{-1}{2} = \frac{y + 4}{x - 3}$$

$$-x + 3 = 2y + 8 \quad \therefore -x = 2y + 5$$

مثال (١٠)

أوجد الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم المار بالنقطة $(3, 6)$ و المتوازي لمحور السينات .

المتجه $\vec{u} = (1, 0)$ متجه اتجاه المستقيم

المعادلة المتجهة للخط المستقيم هي : $\vec{r} = (3, 6) + t(1, 0)$

$\therefore$ المعادلتين البارامتريتين هما : $u + 3 = x$ ، $v + 6 = y$

المعادلة الكارتيزية هي : $x = 3$

أوجد الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم المار بالنقطة $Q(8, -7)$ و الموازي لمحور الصادات.

∴ المتجه $\vec{u} = (1, 0)$ متجه اتجاه المستقيم

∴ المعادلة المتجهة للخط المستقيم هي :

$$(1, 0) \cdot \vec{r} + (8, -7) = \vec{0}$$

∴ المعادلتين البارامتريتين هما :

$$x + 8 = 0, \quad y = -7$$

∴ المعادلة الكارتيزية هي :

$$y = -7$$

أوجد الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم محوري الإحداثيات : معادلة محور السينات

∴ محور السينات يمر بالنقطة $(0, 0)$ ويحمل المتجه $\vec{u} = (1, 0)$

∴ معادلته المتجهة هي :

$$(1, 0) \cdot \vec{r} + (0, 0) = \vec{0}$$

$$\therefore \vec{r} = (1, 0) \cdot \vec{r} \quad \text{..... ١}$$

∴ المعادلتان البارامتريتان :

$$x = 0, \quad y = 0 \quad \text{..... ٢}$$

∴ المعادلة الكارتيزية :

$$x = 0, \quad y = 0 \quad \text{..... ٣}$$

أوجد الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم محوري الإحداثيات : معادلة محور الصادات

∴ محور الصادات يمر بنقطة الأصل
 ∴ $\vec{u} = (1, 0, 0)$ متجه اتجاه له .

المعادلة الاتجاهية :

$$\vec{u} = (1, 0, 0) + (0, 0, 0) = \vec{u} \quad \text{..... ١}$$

المعادلتان الوسيطيتان :

$$x = 0 \quad \text{..... ٢}$$

∴ **المعادلة الكارتيزية هي :** $z = 0$ ٣

أوجد الصور المختلفة لمعادلة كل من المستقيمين المتقاطعين في النقطة $(1, 0, 0)$ وأحدهما يوازي محور السينات والآخر يوازي محور الصادات .

١ المستقيم L_1 الذي يوازي محور السينات :

∴ المستقيم L_1 يمر بالنقطة $(1, 0, 0)$ ويوازي المتجه الأساسي $\vec{u} = (1, 0, 0)$

$$\vec{u} = (1, 0, 0) + (0, 0, 0) = \vec{u} \quad \text{..... ١}$$

$$x = 1 \quad \text{..... ٢}$$

$$z = 0 \quad \text{..... ٣}$$

٢ المستقيم L_2 الذي يوازي محور الصادات :

∴ المستقيم L_2 يمر بالنقطة $(1, 0, 0)$ ويوازي المتجه الأساسي $\vec{v} = (0, 0, 1)$

$$\vec{v} = (0, 0, 1) + (1, 0, 0) = \vec{v} \quad \text{..... ١}$$

$$x = 1 \quad \text{..... ٢}$$

$$z = 0 \quad \text{..... ٣}$$

أوجد الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم المار بالنقطة الأصل وبالنقطة $(0, 2)$

المتجه $\vec{u} = (0, 2)$ متجه اتجاه للمستقيم .

∴ المعادلة المتجهة للخط المستقيم : $\vec{r} = (0, 2)$

أو $\vec{r} = (0, 2) + (0, 2)$

∴ المعادلتين الوسيطيتين :

$$x = 0, \quad y - 2 = 0$$

المعادلة الكارتيزية :

$$\therefore \frac{y - 2}{0} = \frac{x}{2}$$

أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(0, 3)$ وميله $\frac{3}{2}$.

∴ $\frac{3}{2} = m$ متجه اتجاه المستقيم $\vec{u} = (2, 3)$

∴ المعادلة الموجهة :

∴ $\vec{r} = (2, 3) + (2, 3)$

∴ المعادلتين الوسيطيتين :

$$x = 2, \quad y - 3 = 0$$

المعادلة الكارتيزية :

$$\vec{r} = \frac{y - 3}{3} = \frac{x - 2}{2}$$

$$\therefore 2(y - 3) = 3(x - 2)$$

$$\therefore 2y - 6 = 3x - 6$$

مثال (١٧)

أوجد الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين $ق (٢, ٤)$ ، $و (١, ٢)$.
ثم أثبت أن : المستقيم يمر بنقطة الأصل .

$$المتجه \vec{قو} = (١, ٢) = (٣ - ٢, ٤ - ٢)$$

$$(٣ - ٢, ٤ - ٢) = (١, ٢)$$

$$\therefore \text{المعادلة المتجهة : } (٣ - ٢, ٤ - ٢) = (١, ٢)$$

المعادلتين الوسطيتين :

$$٣ - ٢ = ٤ \quad , \quad ١ = ٢$$

المعادلة الكارتيزية

$$\frac{٣ - ٢}{١} = \frac{٤ - ٢}{٢} \therefore$$

$$\frac{٣ - ٢}{١} = \frac{٤ - ٢}{٢} \therefore$$

$\therefore$ المستقيم يمر بنقطة الأصل لأن $(٠, ٠)$ تحقق معادلته .

$$\therefore ٠ = ٣ - ٢$$

مثال (١٨)

أثبت أن النقطة $(٢, ١)$ تقع على المستقيم الذي معادلته المتجهة $(١, ٢)$.

نوجد المعادلتين البارامتريتين : $١ = ٢$ ، $٣ = ١$

$$\therefore \text{بوضع } ١ = ٢ \quad \therefore ٣ = ١$$

$$\therefore \text{بوضع } ٢ = ١ \quad \therefore ٣ = ١$$

$$\frac{١ + ٣}{١} = \frac{٢ + ١}{١} \quad \text{نوجد المعادلة الكارتيزية :}$$

$$\therefore ١ + ٣ = ٢ + ١$$

$$\therefore \text{النقطة } (٢, ١) \text{ تقع على المستقيم .}$$

أوجد المعادلة اللاتيزية للخط المستقيم الذي يمر بالنقطة (٣ ، - ٤) ويصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

∴ المستقيم يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

$$\therefore \text{م} = \text{ظا} = \text{ظا } ٤٥^\circ = ١ = \frac{١}{١} = \frac{\text{ج}}{\text{م}}$$

∴ المتجه $\vec{u} = (١ ، ١)$ متجه اتجاه المستقيم

∴ المعادلة المتجهة : $\vec{r} = (٣ ، - ٤) + \lambda (١ ، ١)$

المعادلتين البارامتريتين : $\begin{cases} ٣ + \lambda = \text{م} \\ -٤ + \lambda = \text{ج} \end{cases}$

$$\frac{\text{ج} + ٤}{١} = \frac{\text{م} - ٣}{١} \quad \text{المعادلة الكارتيزية}$$

$$\therefore \text{ج} - \text{م} + ٧ = ٠$$

أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، - ٢) ويصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ١٢٠° .

$$\text{ميل المستقيم} = \text{م} = \text{ظا } ١٢٠^\circ = -\sqrt{٣} = \frac{\text{ج}}{\text{م} - ٣}$$

متجه اتجاه المستقيم $\vec{u} = (-\sqrt{٣} ، ١)$

معادلة المتجهة : $\vec{r} = (٣ ، - ٢) + \lambda (-\sqrt{٣} ، ١)$

المعادلتان الوسيطيتان : $\begin{cases} ٣ - \sqrt{٣}\lambda = \text{م} \\ -٢ + \lambda = \text{ج} \end{cases}$

$$\frac{\text{ج} + ٢}{١} = \frac{\text{م} - ٣}{-\sqrt{٣}} \quad \text{المعادلة اللاتيزية}$$

$$\therefore \sqrt{٣}\text{م} - ٣ = \text{ج} + ٢ \quad \text{∴} \quad \sqrt{٣}\text{م} - \text{ج} - ٥ = ٠$$

مثال (٢١)

أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ١) وميله سالب ويصنع مع محور الإحداثيات مثلثا مساحته ٤ وحدات مربعة .

كما في الشكل :

$\therefore Q_1 \ni$ محور السينات

$\therefore Q_2 \ni$ محور الصادات

$$\therefore Q_1 = (0, p)$$

$$\therefore Q_2 = (b, 0)$$

$$\text{ميل } Q_1 Q_2 = p$$

$$\therefore \frac{0 - 2}{p - 1} = \frac{p - 2}{1 - 0} = p$$

$$\therefore 2 - p = p$$

$$\therefore 2 = p - p$$

$$\therefore \frac{2 - p}{p} = p \quad \text{..... ١}$$

$$\text{ميل } Q_1 Q_2 = p$$

$$\therefore p = \frac{2 - b}{1 - 0}$$

$$\therefore b - 2 = p$$

$$\therefore b - 2 = p \quad \text{..... ٢}$$

$$\therefore \text{مساحة المثلث} = 4$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times b \times p = 4$$

$$\therefore b \times p = 8$$

$$\therefore 8 = \frac{(p + 4p - 2p) - 0}{p}$$

$$\therefore 0 = 4 + 4p - 2p$$

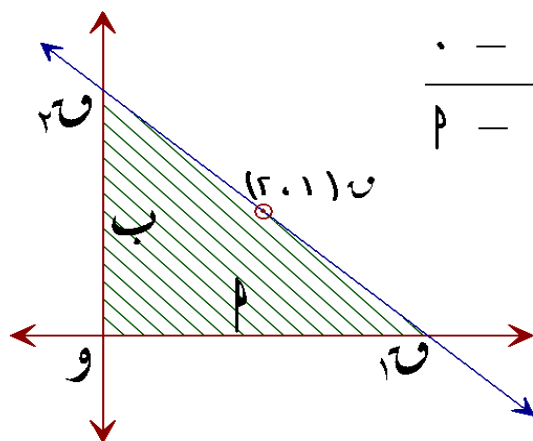
$$\therefore 2 - p = 0$$

$$\therefore 8 = (p - 2) \times \frac{2 - p}{p}$$

$$\therefore 8p = 4 - 4p + 2p$$

$$\therefore 0 = (2 + p)$$

$\therefore$ متجه اتجاه المستقيم (١ ، ٢ -) $\therefore$ المستقيم يمر بالنقطة (٢ ، ١)





المعادلة الموجهة :

$$\therefore \overrightarrow{(1, 2)} + \overrightarrow{(2, 1)} = \overrightarrow{}$$

المعادلتين الوسيطيتين :

$$\therefore \begin{cases} 2 - 1 = 1 \\ 2 + 1 = 3 \end{cases}$$

المعادلة الكارتيزية :

$$\therefore \begin{cases} 1 - 1 = 0 \\ 2 - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore 0 = 0 - 2 + 2$$

حاول الحل بطرق أخرى .

مثال (٢٢)

أوجد المعادلة الموجهة و المعادلتين البارامتريتين للخط المستقيم الذي معادلته :

$$0 = 10 - 3 + 0$$

نعيك نقطتين تقعان على الخط المستقيم

$$\therefore \begin{cases} 0 = 10 - 3 + 0 \\ 0 = 10 - 3 + 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} 0 = 10 - 3 + 0 \\ 0 = 10 - 3 + 0 \end{cases}$$

المستقيم يمر بالنقطتين $(0, 0)$ ، $(0, 3)$

الموجه $\overrightarrow{(0, 3)} = \overrightarrow{}$ متجه اتجاه للخط المستقيم .

$$\therefore \overrightarrow{(0, 3)} + \overrightarrow{(0, 0)} = \overrightarrow{}$$

$$\text{أو } \overrightarrow{(0, 3)} + \overrightarrow{(0, 0)} = \overrightarrow{}$$

المعادلتين الوسيطيتين :

$$\therefore \begin{cases} 0 - 0 = 0 \\ 3 - 0 = 3 \end{cases}$$

مثال (٢٣)

بيء أن النقطة (٣، ٨) تقع على المستقيم ل: $\vec{r} = (1, 2) + \lambda(2, 3)$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}$

بالنسبة للنقطة (٣، ٨) :

$$(1, 2) + \lambda(2, 3) = (3, 8) \therefore$$

$$\therefore 1 + 2\lambda = 3 \quad \therefore 2\lambda = 2 \quad \therefore \lambda = 1$$

$$\therefore 2 + 3\lambda = 8 \quad \therefore 3\lambda = 6 \quad \therefore \lambda = 2$$

$\therefore$ قيمتي λ متساويتين .

$\therefore (3, 8) \in$ المستقيم ل

بالنسبة للنقطة (٢-، ٤) :

$$(1, 2) + \lambda(2, 3) = (2-, 4)$$

$$\therefore 1 + 2\lambda = 2- \quad \therefore 2\lambda = 1- \quad \therefore \lambda = \frac{1-}{2}$$

$$\therefore 2 + 3\lambda = 4 \quad \therefore 3\lambda = 2 \quad \therefore \lambda = \frac{2}{3}$$

$\therefore$ قيمتي λ مختلفتين .

حل آخر : بتحويل المعادلة الموجهة الى معادلة كارتيزية

$$\frac{y - 2}{3} = \frac{x - 1}{2} \quad \therefore 2(y - 2) = 3(x - 1) \quad \therefore 2y - 4 = 3x - 3 \quad \therefore 2y = 3x + 1$$

بالنسبة للنقطة (٣، ٨)

$$\therefore \text{الأيمن} = 2 \times 3 - 4 = 2 \quad \text{الأيمن} = 3 \times 3 + 1 = 10 \quad \therefore 2 \neq 10$$

$\therefore (3, 8)$ تحقق معادلة المستقيم ل .

$\therefore (3, 8) \in$ المستقيم ل

بالنسبة للنقطة (٢-، ٤) : الأيمن = $2 \times (-2) - 4 = -8 \neq 6 = 3 \times (-2) + 1$

مثال [٢٤]

بيد أي من النقطتين (٦ ، ٣ -) ، (٥ ، ١) ينتمي أو لا ينتمي للمستقيم الذي معادلته الاتجاهية $\overrightarrow{u} = (٣ - ، ١)$ ؟

المعادلتين الوسيطيتين :

$$٣ = ٣ - + ١ ، \quad ٥ = ٣ - + ١$$

اختبار النقطة (٦ ، ٣ -) :

$$\text{بوضوح } ٦ = ٣ - + ١ \quad \therefore ٣ = ٣ - + ١ - ١$$

$$\text{بوضوح } ٣ - = ٣ - + ١ - ١ \quad \therefore ٣ - = ٣ - + ١ - ١$$

$$\therefore ٣ - \neq ٣ - + ١ - ١ \quad \therefore \text{النقطة } (٦ ، ٣ -) \notin \text{المستقيم المعلوم}$$

اختبار النقطة : (٥ ، ١) :

$$\text{بوضوح } ٥ = ٣ - + ١ \quad \therefore ٥ = ٣ - + ١$$

$$\text{بوضوح } ١ = ٣ - + ١ - ١ \quad \therefore ١ = ٣ - + ١ - ١$$

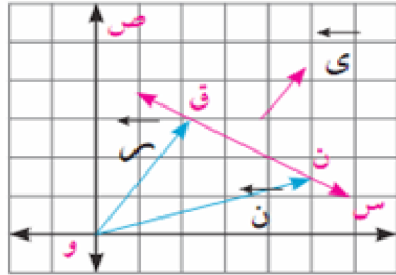
$$\therefore ١ = ٣ - + ١ - ١ \quad \therefore \text{النقطة } (٥ ، ١) \in \text{المستقيم المعلوم}$$

أضف إلى معلوماتك :

متجه اتجاه المستقيم الذي يمر بنقطة الأصل و النقطة (٥ ، ١) هو $\overrightarrow{u} = (٥ ، ١)$

و ميله هو $\frac{١}{٥}$

متجه اتجاه العمودي للمستقيم



إذا كان : $\vec{u} = (p, b)$ متجه اتجاه المستقيم

فان أيامه عائلة المتجهات التي على الصورة $(b, p -)$ حيث $\vec{u} \perp \vec{v}$ يكون متجه اتجاه العمودي على المتجه $\vec{u}$.

وبالعكس إذا كان : $\vec{u} = (p, b)$ عموديا على الخط المستقيم

فان أيامه عائلة المتجهات التي على الصورة $(b, p -)$ حيث $\vec{u} \perp \vec{v}$ يكون متجه اتجاه المستقيم

فمثلا إذا كان : $\vec{u} = (3, 2)$ متجه اتجاه للمستقيم فان متجه اتجاه العمودي له هو

$$..... (6, 4 -), (3 - , 2), (3, 2 -)$$

مثال (٢٥)

بيد أي أزواج المستقيمان أيها متوازي وأيها متعامد :

١. $\vec{u} = (3, 6) + \vec{v} = (1, 4) = \vec{w} = (4, 0)$: $\vec{u} \perp \vec{v}$ ، $0 = 0 + 4 \times 3 - 6 \times 1$

٢. $\vec{u} = (7, 0) = \vec{v} = (0, 9) + \vec{w} = (7, 0)$: $\vec{u} \parallel \vec{v}$ ، $0 = 9 - 0 + 7 \times 0 - 0 \times 7$

١. ميل المستقيم $\vec{u} = (1, 4) : \frac{1}{2} = \frac{1 -}{2 -}$

ميل المستقيم $\vec{v} = (2, 3) : \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$: $\vec{u} \parallel \vec{v}$: $\therefore \vec{u} \parallel \vec{v}$

٢. ميل المستقيم $\vec{u} = (1, 4) : \frac{1}{2} = \frac{4}{0}$

ميل المستقيم $\vec{v} = (0, 7) : \frac{0 -}{7} = \frac{0 -}{7}$: $\vec{u} \perp \vec{v}$: $\therefore \vec{u} \perp \vec{v}$

- إذا كان المستقيم المار بالنقطة ق (٣ ، ٥) والمتجه (١ ، ٢) عمودي عليه أوجد .
 ١ المعادلة المتجهة للمستقيم .
 ٢ المعادلة التانجنتية للمستقيم .

∴ المستقيم المار بالنقطة ق (٣ ، ٥) عمودي على المتجه (١ ، ٢) .

∴ متجه اتجاه المستقيم هو $\vec{u} = (١ ، ٢)$

∴ **المعادلة المتجهة للمستقيم** هي $\vec{r} = \vec{u} + \vec{v}$

$$\vec{r} = (١ ، ٢) + (٥ ، ٣)$$

٢ ∴ معادلة المستقيم الذي ميله ٣ ويمر بالنقطة (٥ ، ٣) هي :

$$\frac{1}{2} = \frac{٥ - ٣}{٣ + ٥}$$

$$٣ = \frac{٥ - ٣}{٥ - ٣}$$

$$١٠ - ٣ = ٣ + ٥ \quad \therefore \text{المعادلة الكارتيزية : } ١٣ + ٥ = ٠$$

م ب ج مثلث فيه م (٢ ، ٥) ، ب (٣ ، ٢) ، ج (١ ، ٤) أوجد معادلة المستقيم المار بالرأس م ، وعمودي على ب ج .

$$\text{ميل } \overleftrightarrow{ب ج} = \frac{٢ - ٤}{٣ - ١} = \frac{٢}{٢} = ١ \quad \therefore \text{ميل المستقيم العمودي على } \overleftrightarrow{ب ج} = ٢$$

∴ متجه اتجاه المستقيم المطلوب $\vec{u} = (١ ، ٢)$ ∴ المستقيم يمر بالنقطة م (٢ ، ٥)

$$\vec{r} = (١ ، ٢) + (٥ ، ٢)$$

المعادلة المتجهة :

$$٥ = ٢ + ٢ \quad , \quad ٥ = ٢ + ٢$$

المعادلتين البارامتريتين

$$\frac{٥ - ٢}{٢} = \frac{٥ - ٢}{١}$$

المعادلة الكارتيزية :

$$٠ = ٩ + ٥ - ٣$$

$$٠ = ٤ + ٥ - ٣$$

حاول الحل بأساليب أخرى .

مثال (٢٨)

أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بمنتصف $\overline{AB}$ حيث $A(3, 2)$ ، $B(7, 4)$ وعمودي على المستقيم $2x - 3y = 4$

$$\therefore \text{منتصف } \overline{AB} = \left(\frac{7+3}{2}, \frac{4+2}{2} \right) = (5, 3)$$

$$\therefore \text{ميل المستقيم } \overleftrightarrow{AB} = \frac{\text{معامل } x}{\text{معامل } y} = \frac{2}{3}$$

$$\text{المتجه } \vec{u} = (3, 2) \text{ عمودي على الخط المستقيم المطلوب}$$

$$\therefore \text{المتجه } \vec{v} = (-2, 3) \text{ متجه اتجاه المستقيم المطلوب}$$

$$\therefore \text{المعادلة المتجهة : } (-2, 3) \cdot (x-5, y-3) = 0$$

$$\therefore \text{المعادلتين الوسيطيتين :}$$

$$-2x + 3y = 1 \quad , \quad 2x - 3y = 4$$

$$\therefore \text{المعادلة الكارتيزية :}$$

$$\therefore \frac{2x - 4}{3} = \frac{1 + y}{2} \quad \therefore 2x - 4 = 3 + 3y \quad \therefore 2x - 3y = 7$$

$$\therefore 2x - 3y + 7 = 0$$

مثال (٢٩)

أوجد الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم المار بالنقطة $(0, 4)$ والعمودي على الخط المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ حيث $A(3, 2)$ ، $B(7, 4)$

$$\text{المتجه } \vec{u} = (3, 2) \text{ عمودي على الخط المستقيم المطلوب}$$

$$\therefore \text{المتجه } \vec{v} = (-2, 3) \text{ متجه اتجاه المستقيم المطلوب}$$



∴ المعادلة المتجهة :

$$\overrightarrow{(2, 3)} + \overrightarrow{(4, -1)} = \overrightarrow{}$$

∴ المعادلتين الوسيطيتين :

$$3x = 12, \quad 4x - 2y = 8$$

$$\therefore \frac{4x + 8}{2} = \frac{12}{3} \quad \therefore \frac{4x + 8}{2} = 4 \quad \therefore 4x + 8 = 8 \quad \therefore 4x = 0 \quad \therefore x = 0$$

$$\therefore 0 = 12 - 4 \cdot 3 = 0$$

مثال (٣٠)

أوجد الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٣، ٧) والعمودي على الخط المستقيم الذي يصنع زاوية جيب تمامها $\frac{3}{4}$

$$\therefore \cos \theta = \frac{3}{4} \quad \therefore \sin \theta = \frac{4}{5} \quad \therefore \tan \theta = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \text{المتجه } \overrightarrow{u} = (4, 3) \text{ عمودي على الخط المستقيم المطلوب}$$

$$\therefore \text{المتجه } \overrightarrow{v} = (-4, 3) \text{ متجه اتجاه المستقيم المطلوب}$$

$$\therefore \text{المعادلة المتجهة : } \overrightarrow{(4, 3)} + \overrightarrow{(-4, 3)} = \overrightarrow{}$$

∴ المعادلتين الوسيطيتين :

$$3x - 4y = 12, \quad 4x + 3y = 12$$

∴ المعادلة الكارتيزية :

$$\therefore \frac{4x + 3y - 12}{5} = \frac{3x - 4y - 12}{5} \quad \therefore 4x + 3y - 12 = 3x - 4y - 12$$

$$\therefore 0 = 3x - 4y - 12 + 4x + 3y + 12$$

مثال (٣١)

أوجد المعادلة الكارتيزية للمستقيم الذي يمر بالنقطة (٣ ، - ٢) وكذلك بالنقطة التي تقع القطعة $\overline{PM}$ بنسبة ٢ : ١ حيث $P(١ ، ٤)$ ، $B(٢ ، ٧)$

$$\text{نقطة التقسيم} \left(\frac{1 \times 1 + (2-1)2}{1+2}, \frac{4 \times 1 + 7 \times 2}{1+2} \right)$$

أي (١ ، ٦) والمستقيم يمر بها وبالنقطة (٣ ، - ٢)

$$\frac{1}{3} = \frac{2 + 6}{3 - 6} \therefore$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2 + 1 - 6}{3 - 6} = 4$$

$$\therefore 0 = 9 - 6 - 3 = 0$$

$$\therefore 3 - 6 = 6 + 6 = 12$$

مثال (٣٢)

إذا كانت : ب (٢ ، ٠) ، ج (١ ، ٢) ، د (٣ ، - ٢) ثلاث نقط في المستوى فأوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم $\overleftrightarrow{BC}$ ثم أثبت أن النقط ب ، ج ، د تقع على استقامة واحدة .

المتجه $\vec{BC} = (١ - ٢ ، ٢ - ٠) = (- ١ ، ٢)$ متجه اتجاه للخط المستقيم $\overleftrightarrow{BC}$

المعادلة المتجهة : $\vec{r} = (٢ ، ٠) + (- ١ ، ٢) \cdot \vec{t}$

المعادلتين البارامتريتين : $2 = 2 - t$ ، $0 = 0 + 2t$

المعادلة الكارتيزية :

$$\frac{2 - 0}{1 - 2} = \frac{0}{2} \therefore 2 - 0 = 0 \therefore 2 = 0$$

بالتعويض عن د (٣ ، - ٢)

$$\therefore 2 = 4 - 2 - 6 = 4 - (2 -) + (3)$$

$\therefore$ النقطة د (٣ ، - ٢) تحقق معادلة $\overleftrightarrow{BC}$

$\therefore$ ب ، ج ، د تقع على استقامة واحدة .

إذا كانت $P(1, 2)$ ، النقطة B نقطة تقاطع العمود المرسوم من النقطة P الى المستقيم :

$$3x + 4y + 10 = 0 \text{ أوجد المتجه } \overrightarrow{PB}$$

إيجاد معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{PB}$

$$\therefore \text{ ميل المستقيم } 3x + 4y + 10 = 0 \text{ هو : } -\frac{3}{4}$$

$$\therefore \text{ المستقيم } \overleftrightarrow{PB} \text{ عمودي على المستقيم } 3x + 4y + 10 = 0$$

$$\therefore \text{ ميل } \overleftrightarrow{PB} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \text{ معادلة المستقيم } \overleftrightarrow{PB} : \frac{4}{3} = \frac{y - 2}{x - 1}$$

$$4x - 3y + 10 = 0$$

$$\therefore \text{ معادلة المستقيم } \overleftrightarrow{PB} \text{ هي : } 4x - 3y + 10 = 0$$

بحل المعادلتين جبرياً

$$3x + 4y + 10 = 0 \text{ بالضرب } \times 3$$

$$4x - 3y + 10 = 0 \text{ بالضرب } \times 4 \text{ وبالجمع}$$

$$20 = 20$$

$$\therefore x = 1 \text{ ، بالتعويض في المعادلة الأولى } 3 - 3 = 0$$

$$\therefore \text{ إحداثيا نقطة } B(1, 2)$$

$$\therefore \overrightarrow{PB} = (1 - 1, 2 - 2) = (0, 0)$$

حاول الحل بأساليب أخرى



تارين (٦) على معادلة الخط المستقيم

[١] أكمل الجمل الآتية لتصبح عبارات صحيحة

- ١ ميل المستقيم امار بالنقطتين (٢ ، ١) ، (١ ، ٢) يساوى
- ٢ ميل المستقيم الذى معادلته $ص ٢ + س ٣ = ٥$. يساوى
- ٣ المعادلة المتجهة للمستقيم الذى يمر بنقطة الأصل والنقطة (٢ ، ١) هي
- ٤ المعادلة المتجهة للمستقيم الذى يمر بالنقطة (٥ ، ٣) ويوازي محور السينات هي
- ٥ ميل المستقيم الذى معادلته $س = ١ + ك$ ، $ص = ٢ - ٣ ك$ يساوى
- ٦ إذا كان ميل مستقيم $\frac{٣}{٤}$ فان ميل أى مستقيم يوازيه يساوى
- ٧ المعادلة اللاتيزية للمستقيم امار بالنقطة (٢ - ، ٧) ويوازي محور الصادات هي
- ٨ المستقيم الذى معادلته $ص = ٢ س + ١$ يكون (.... ،) متجه اتجاه له
- ٩ المعادلة الموجهة للمستقيم امار بالنقطة (٢ - ، ٣) ويوازي محور السينات هي
- ١٠ المعادلة الموجهة للمستقيم امار بنقطة الأصل ويوازي المتجه $م = (١ ، ١ -)$ هي
- ١١ المعادلة المتماثلة للمستقيم : $\overrightarrow{ك(٢،٢) + ك(١،١)}$ هي
- ١٢ المعادلة الموجهة للمستقيم : $ص = ٣ -$ هي
- ١٣ المعادلتان الوسيطيتان للمعادلة : $ص - س =$ هما
- ١٤ إذا توازى المستقيم امار بالنقطتين (٣ ، ٠) ، (٢ ، ٠) والمستقيم $ص = ٣ س - ٣$ فان $م =$
- ١٥ معادلة المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥° ويقطع جزءا موجبا قدره ٥ وحدات من محور الصادات هي
- ١٦ ميل المستقيم الذى معادلته $\overrightarrow{ك(٣،٢) + ك(٢-،٠)}$ يساوى
- ١٧ المعادلة اللاتيزية للمستقيم الذى يقطع من المحورين السيني والصادي جزأيه موجبييه مقدارهما ٢ ، ٣ على الترتيب هي
- ١٨ ميل المستقيم الذى معادلته $\overrightarrow{ك(٣،٢) + ك(٢-،٠)}$ يساوى
- ١٩ مساحة المثلث المحدد بحدود محور السينات ومحور الصادات والمستقيم $ص ٣ + س ٦ =$ تساوى

[٢] بين أي العلاقات التالية تمثل بخط مستقيم

٣ = ٥

١ + ٣ = ٥

٠ = ٥ - ٣

١ = $\frac{٥}{٢} - \frac{٣}{٣}$

٢ = $\frac{١}{٣} + ٥$

٠ = ٣ - ٢

[٣] إذا كانت : أ (٢، ١) ، ب (٦، ٥) ، ج (٢، ٣) :

فأوجد ميل كل من المستقيمات الآتية : أ ، ب ، ج

[٤] حاول أن تحل :

أوجد ميل الخط المستقيم المار بنوع من النقاط التالية ، وبين أي من هذه المستقيمات متوازية وأيها متعامد :

٢ (١، ٢) ، (٠، ٤)

١ (٥، ٢) ، (١، ٣)

٤ (٣، ١) ، (٢، ٥)

٣ (٣، ٣) ، (١، ٧)

[٥] إذا كانت معادلتا المستقيمين ل_١ ، ل_٢ هما على الترتيب :

٣ = ٥ + ٣ - ٦ ، ٠ = ٣ + ٣ - ٦

٢ قيمة ب التي تجعل ل_١ ، ل_٢ متوازيين١ ميل المستقيم ل_١٤ إذا كانت النقطة (٣، ١) تمر بالمستقيم ل_١ ، فأوجد قيمة ب٣ قيمة ب التي تجعل ل_١ ، ل_٢ متعامدين

[٦] إذا كان المستقيم ٣ = ٥ + ٤ - ٥ ، يصنع زاوية ظلها ٧٠° مع

الاتجاه الموجب لمحور السينات فأوجد قيمة ب

[٧] أوجد المعادلة المتجهة للخط المستقيم الذي ميله $\frac{١}{٣}$ ويمر بالنقطة (١، ٢)

[٨] أوجد المعادلتين البارامتريتين للمستقيم الذي يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور

السينات زاوية قياسها ٤٠° ويمر بالنقطة (٥، ٣)



✍ [٩] اوجد الصورة المختلفة لمعادلة كل من المستقيمتين التي يمر بالنقطتين :

٢ $(٧ - , ٠) , (٠ , ٥)$

١ $(١ , ٥) , (٣ , ٢)$

٤ $(٠ , ٠) , (٠ , ٢)$

٣ $(٤ , ٦) , (١ , ٣)$

✍ [١٠] اوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(٣ , ١)$ والمتجه $(٣ , ٢)$ عمودي عليه

✍ [١١] إذا كانت : $٢ , ٠) , (١ , ٢) , (٣ , ٢ -)$ ج

ثلاث نقط في المستوى ، فوجد : ١ المعادلة المتجهة للخط المستقيم

٢ اثبت أن $٢ , ٠) , (١ , ٢) , (٣ , ٢ -)$ تقع على استقامة واحدة .

✍ [١٢] ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة، علامة (x) أمام العبارة الخطأ مع بيان السبب

١ المستقيمان : $\overleftrightarrow{AB} = (٥ , ٢) + (٤ , ٣)$ ، $\overleftrightarrow{CD} = (٤ , ٣) + (٥ , ٢)$ متوازيان

٢ المستقيمان : $\overleftrightarrow{AB} = (١ , ٢) + (١٠ , ٢)$ ، $\overleftrightarrow{CD} = (٢ , ١) + (١٠ , ٢)$ متعامدان

٣ إذا كان $\overleftrightarrow{AB} = (٤ , ٥)$ متجه اتجاه مستقيما ما فإن قيمة متجه اتجاه أي مستقيم عمودي علي هو $(٥ , ٤)$

٤ المستقيم الذي معادلته $\overleftrightarrow{AB} = (٣ , ٠) + (١ - , ٣)$ يضع زاوية موجبه مع الاتجاه

الموجب لمحور السينات قياسها ١٥٠°

٥ المستقيم الذي معادلته $\overleftrightarrow{AB} = (٥ , ٢)$ تكون معادلته على الصورة

$\overleftrightarrow{AB} = (٥ , ٢) + (٠ , ١)$ حيث $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$

٦ النقطة $(٥ , ٢)$ تقع على المستقيم $\overleftrightarrow{AB} = (١١ , ١) + (٣ , ٢)$

٧ النقطة $(٥ , ٢)$ تقع على المستقيم $\overleftrightarrow{AB} = (٥ , ٢) + (٣ - , ٢)$

٨ النقطة $(٢ , ١)$ تقع على المستقيم $\overleftrightarrow{AB} = (٢ , ١) + (٢ , ١)$

٩ المعادلتان : $\overleftrightarrow{AB} = (٣ , ١) + (٢ - , ١)$ هما صورتين مختلفتين لمستقيم واحد

✍ [١٣] اوجد معادلة المستقيم الذي ميله ٢ والمار بالنقطة $(٠ , ٢)$

ما هي إحداثيات نقطة تقاطع هذا الخط مع محور الصادات



١٢٠
[١٤] اكتب الصور المختلفة لمعادلة المستقيم الذي معادلته $٣ - ٥ = ٧$

[١٥] إذا كانت $٠, ٥$ ، $٣, ٧$ ، $١, ٣$ ثلاث نقاط

في المستوى ، فأوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $٠, ٥$ وينصف $٣, ٧$

[١٦] اكتب المعادلتين الوسيطيتين للمستقيم الذي يمر بالنقطة $(٠, ٥)$

ومتجه اتجاه له $(١, ١)$.

[١٧] أوجد المعادلة الكارتيزية للمستقيم المار بالنقطة $(٣, ٥)$

ويوازي المستقيم : $٥ = ٧ - ٣ + ٣$

[١٨] إذا كان : $(١, \frac{1}{2}) = \overrightarrow{SC}$ متجه اتجاه للمستقيم فان جميع المتجهات التالية

عموديا على المستقيم ماعدا المتجه :

١ $(\frac{1}{2}, ١)$ ٢ $(١, ٢)$ ٣ $(١, \frac{1}{2})$ ٤ $(٢, ٤)$

[١٩] أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(٢, ٣)$ وميله $٣ = ٢$ إذا كان هذا

المستقيم يمر بالنقطتين $(٧, ٢)$ ، $(٥, ٠)$ فأوجد $٢, ٠$

[٢٠] أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(٢, ٣)$ والمتجه $٢, ٠$ حيث

$٢ = (٣, ١) = (٤, ٢)$ ، متجه اتجاه له

[٢١] أوجد المعادلة المتجهة للمستقيم المار بالنقطة $(٥, ٧)$

وعمودي على المستقيم $\overrightarrow{SC} = (٣, ٠) + \overrightarrow{SC} = (٣, ٤)$

[٢٢] إذا كان : $(١, ٤) = (٣, ٥) + \overrightarrow{SC} = (١, ١)$

فأوجد قيمة كل من $٥, ٣$



[٢٣] أوجد المعادلات المتجهة ، والمعادلات الكارتيزية للخط المستقيم امار بالنقطة $(١٣, ٤)$ ومتجه الاتجاه له $\vec{u} = (٢, ١)$ في الحالات الآتية :

- ١ إذا كان المستقيم يوازي محور الصادات .
- ٢ إذا كان المستقيم يوازي محور السينات .
- ٣ إذا كان المستقيم يمر بنقطة الأصل .

[٢٤] إذا كانت $٢(٤, ١) + ٣(٦, ٤) = ٥(١, ٢)$ فأوجد معادلة المستقيم الذي يمر بنقطة تقسيم

$\overline{٢١}$ من الداخل بنسبة ٢ : ٣ ويكون عموديا على المستقيم : $٥٠ - ٤٤ - ١٢ = ٠$

[٢٥] أكتب الصور المختلفة لمعادلة المستقيم الذي معادلته امار بالنقطة

$٩(٢, ١) + ٣(٣, ٢) = ٥(١, ٢)$ عموديا على المتجه $\vec{u} = (٢, ١)$.

[٢٦] اكتب الصور المختلفة لمعادلة المستقيم امار بالنقطة $(١, ٢)$ ، ومتجه اتجاهه $(١, ٣)$ ،

[٢٧] أكتب الصور المختلفة لمعادلة المستقيم امار بالنقطة $(١, ٢)$ ويكون موازيا للمستقيم $٣ - ٥٢ - ٥٠ = ٠$

[٢٨] أكتب الصور المختلفة لمعادلة المستقيم امار بالنقطة $(١, ٢)$ ويكون ويوازي المستقيم $\vec{u} = (١, ٢) + (٣, ٤) = (٤, ٦)$

[٢٩] أكتب الصور المختلفة لمعادلة المستقيم امار بالنقطة $(١, ١)$ ويكون ويوازي المستقيم $\vec{u} = (٣, ١) + (٣, ٢) = (٦, ٣)$ واثبت أنه يمر بالنقطة $(٢, ٣)$

[٣٠] أكتب الصور المختلفة لمعادلة المستقيم امار بالنقطة $(٣, ١)$ ويكون عموديا على المستقيم : $\vec{u} = (٥, ٢) + (١, ٢) = (٦, ٤)$

[٣١] أوجد المعادلة المتجهة للمماس للدائرة ٣ عند النقطة ٢ حيث $٢(٠, ٢) + ٣(٢, ٣) = ٥(١, ٢)$



✍ [٣٢] في المثلث $\triangle PQR$ ، $P(1, 6)$ ، $Q(2, 1)$ ، $R(3, 4)$ ، أثبت أن المثلث قائم الزاوية وأوجد مساحته .

① أثبت أن المثلث قائم الزاوية وأوجد مساحته .

② $\angle P = 90^\circ$ بحيث $P(1, 6)$ ، $Q(2, 1)$ ، $R(3, 4)$ أوجد إحداثي نقطة S ،

③ أكتب الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطتين $P(1, 6)$ ، $Q(2, 1)$ ،

✍ [٣٣] الربط بالهندسة :

$\triangle PQR$ قطر في دائرة مركزها M فإذا كان $P(1, 6)$ ، $Q(2, 1)$ ، $R(3, 4)$ فأوجد معادلة المماس للدائرة عند نقطة M .

✍ [٣٤] هل تقع النقطة $(3, 2)$ على المستقيم المار بالنقطتين $(1, 1)$ ، $(2, 0)$ ؟

✍ [٣٥] إذا قطع المستقيم : $3x + 4y - 12 = 0$ محوري الإحداثيات

السيني والصادي في النقطتين $P(1, 6)$ ، $Q(2, 1)$ على الترتيب فأوجد :

① مساحة المثلث $\triangle PQR$ و $P(1, 6)$ ، $Q(2, 1)$ ، $R(3, 4)$.

② معادلة المستقيم العمودي على $\overline{PQ}$ ويمر بنقطة منتصفها .

✍ [٣٦] اوجد الصورة المختلفة لمعادلة كل من المستقيمت الآتية :

① المستقيم المار بالنقطة $(3, 2)$ موازيا للخط المستقيم المار بالنقطتين $(1, 3)$ ، $(2, 4)$.

② المستقيم المار بالنقطة $(3, 1)$ عموديا على الخط المستقيم : $3x + 4y - 12 = 0$.

③ المستقيم المار بالنقطة $(2, 1)$ ويوازي المستقيم $3x - 2y = 5$ ، $3x + 2y = 5$.

④ المستقيم المار بالنقطة $(2, 1)$ وعمودي على المستقيم $3x - 2y = 5$ ، $3x + 2y = 5$.

✍ [٣٧] أثبت أن النقط : $P(3, 2)$ ، $Q(2, 1)$ ، $R(1, 1)$ هي

رؤوس مثلث . وإذا علم أن $\angle P = 90^\circ$ بحيث $P(1, 6)$ ، $Q(2, 1)$ ، $R(3, 4)$ ،

فأوجد إحداثي النقطة S ، أكتب الصور المختلفة لمعادلة المستقيم $\overleftrightarrow{PQ}$.

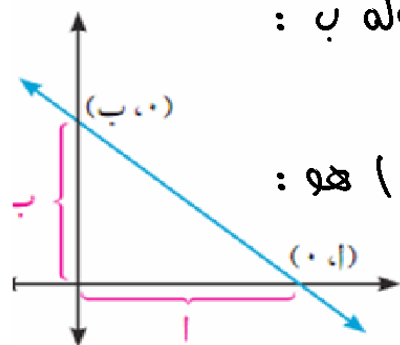
معادلة المستقيم بدلالة طول الجذأين المقطوعين من محوري الإحداثيات

نعلم أن معادلة المستقيم الذي ميله (m) ويقطع جزأ من محور الصادات طوله b :

$$y = mx + b$$

من الشكل المقابل: نجد أن ميل المستقيم المار بالنقطتين ($0, b$) ، ($a, 0$) هو :

$$m = \frac{b - 0}{0 - a} = \frac{b}{-a} \quad \therefore \quad \frac{b}{m} = -a \quad (\text{ماذا ؟})$$



معادلة المستقيم بمعلومية الميل ونقطة هي $\frac{y - b}{m} = \frac{x - a}{1 - m}$ بالتعويض عن إحداثي نقطة التقاطع

$$m = \frac{b - 0}{0 - a} = \frac{b}{-a} \quad \text{حاصل ضرب الطرفين} = \text{حاصل ضرب الوسطى}$$

$$b = -am \quad \therefore \quad \frac{b}{m} = -a \quad \text{بقسمة الطرفين على } m$$

ملاحظات :

- يمكن إيجاد المقطوعة السينية عن طريق وضع $y = 0$ في معادلة الخط المستقيم
- يمكن إيجاد المقطوعة الصادية عن طريق وضع $x = 0$ في معادلة الخط المستقيم

مثال (١)

أوجد طول الجزئ المقطوعين من المحورين بالمستقيم : $3x + 4y - 12 = 0$

$$\text{بوضع المعادلة على الصورة : } y = -\frac{3}{4}x + 3$$

$$3x + 4y - 12 = 0 \quad \therefore \quad 3x + 4y = 12 \quad \text{بالقسمة } \div 12 \text{ للطرفين} \quad \therefore \quad \frac{3x}{12} + \frac{4y}{12} = \frac{12}{12}$$

$\therefore$ طول الجزئ المقطوعين من المحورين السينات والصادات هي على الترتيب 4 ، 3 وحدة طول .

مثال (٢)

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(0, 2)$ ، $(4, 0)$

∴ طول الجزء المقطوع من محور السينات = ٢ وحدة طول

$$\therefore p = 2$$

∴ طول الجزء المقطوع من محور الصادات = ٤ وحدة طول

$$\therefore q = 4$$

$$\therefore 1 = \frac{q}{p} + \frac{w}{p} \quad \therefore 1 = \frac{4}{2} + \frac{w}{2}$$

بالضرب $\times 2$ للطرفين

$$\therefore 2 = 4 + w$$

$$\therefore w = 2 - 4 = -2$$

مثال (٣)

أوجد معادلة المستقيم الذي يكون به طول المقطوعتين السينية والصادية ٣ ، ٢ على الترتيب

∴ طول الجزء المقطوع من محور السينات = ٣ وحدة طول

$$\therefore p = 3$$

∴ طول الجزء المقطوع من محور الصادات = ٢ وحدة طول

$$\therefore q = 2$$

$$\therefore 1 = \frac{q}{p} + \frac{w}{p} \quad \therefore 1 = \frac{2}{3} + \frac{w}{3}$$

بالضرب $\times 3$ للطرفين

$$\therefore 3 = 2 + w$$

$$\therefore w = 3 - 2 = 1$$

مثال (٤)

أوجد طول الجزأين المقطوعين من محوري الإحداثيات في المستقيم $2x = 4y + 3w$

$$\text{أولا يجب وضع المعادلة } 2x = 4y + 3w \text{ على صورة } 1 = \frac{q}{p} + \frac{w}{p}$$

$$\therefore 2x = 4y + 3w \quad \text{بقسمة الطرفين على } 2x$$

$$\therefore \frac{2x}{2x} = \frac{4y}{2x} + \frac{3w}{2x} \quad \therefore 1 = \frac{2y}{x} + \frac{3w}{2x}$$

$$\therefore p = 2 \quad \therefore \text{طول الجزء المقطوع من محور السينات الموجب} = 2 \text{ وحدة طول}$$

$$\therefore q = 3 \quad \therefore \text{طول الجزء المقطوع من محور الصادات الموجب} = 3 \text{ وحدة طول}$$

مثال (٥)

أوجد المقطوعتين السينية والصادية للمستقيم $3x - y = 6$ = صفر

$$1 = \frac{3x}{6} + \frac{-y}{1} \quad \text{صفر على صورة} \quad 3x - y = 6$$

$$1 = 3x - y \quad \text{بقسمة الطرفين على 6}$$

$$1 = \frac{3x}{6} + \frac{-y}{1} \quad \therefore \quad \frac{1}{6} = \frac{3x}{6} + \frac{-y}{1}$$

$$\therefore 6 = 1 \quad \therefore \text{طول الجزء المقطوع منه محور السينات الموجب} = 3 \text{ وحدة طول}$$

$$\therefore 6 = -2 \quad \therefore \text{طول الجزء المقطوع منه محور الصادات السالب} = 2 \text{ وحدة طول}$$

مثال (٦)

أوجد مساحة المثلث المحدد بمحوري الإحداثيات والمستقيم $2x + 3y = 6$

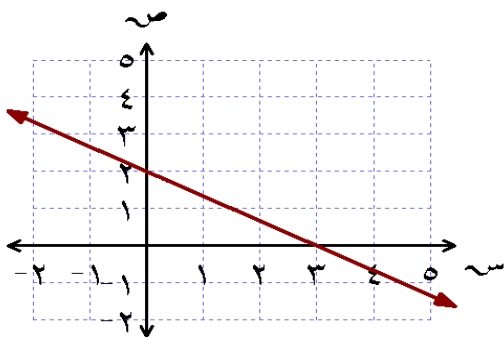
$$2x + 3y = 6 \quad \text{بالقسمة على 6}$$

$$1 = \frac{2x}{6} + \frac{3y}{3}$$

$$\therefore \text{طول الجزء المقطوع منه محور السينات} = 3 \text{ وحدة طول}$$

$$\text{طول الجزء المقطوع منه محور الصادات} = 2 \text{ وحدة طول}$$

$$\text{مساحة المثلث} = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3 \text{ وحدة مربعة}$$





أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٤) وميله سالب ويصنع مع محوري الإحداثيات مثلثا مساحته ٢٤ وحدة مربعة .

$$\therefore 1 = \frac{4}{b} + \frac{3}{p} \quad 1 = \frac{4}{b} + \frac{3}{p} \text{ بالضرب } \times p \quad 1 = \frac{4}{b} + \frac{3}{p}$$

$$\therefore 1 = \frac{4}{b} + \frac{3}{p} \quad \text{..... ١}$$

$$\therefore \text{مساحة المثلث} = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$$

$$\therefore \text{مساحة المثلث} = \frac{1}{2} \times p \times b = 24 \quad \text{بالضرب } \times 2$$

$$\therefore 48 = p \times b \quad \text{..... ٢} \quad \text{بالتعويض منه ١ في ٢}$$

$$\therefore 48 = p \times b \quad \text{بالضرب } \times b$$

$$\therefore 48 = p \times b \quad \therefore 48 = p \times b + 48 \times 4 - 48 \times 4$$

$$\therefore 48 = p \times b + 192 - 192 \quad \text{بالقسمة } \div 3 \quad \therefore 16 = \frac{p \times b}{3} + 64 - 64$$

$$\therefore 16 = \frac{p \times b}{3} + 64 - 64$$

$$\therefore 16 = \frac{p \times b}{3} + 64 - 64 \quad \therefore 16 = \frac{p \times b}{3} + 64 - 64$$

$$\therefore 16 = \frac{p \times b}{3} + 64 - 64 \quad \text{المعادلة} \quad 1 = \frac{4}{b} + \frac{3}{p}$$

$$\therefore 24 = 4 \times 3 + 3 \times 4$$

$$\therefore 24 = 4 \times 3 + 3 \times 4$$

أثبت أن : المعادلة الكارتيزية للمستقيم الذي مقطوعته السينية p ، مقطوعته الصادية b

هي : $1 = \frac{bx}{p} + \frac{cy}{p}$ وإذا كانت $p = 2$ ، $b = 0$ أوجد المعادلة المتجهة

$\therefore$ المقطوعة السينية $p = 2$ $\therefore$ المستقيم يمر بالنقطة $(0, 2)$

$\therefore$ المقطوعة السينية $b = 0$ $\therefore$ المستقيم يمر بالنقطة $(2, 0)$

$$\therefore \frac{b}{p} - \frac{c}{p} = \frac{0 - 2}{2 - 0} = -1$$

$\therefore$ المعادلة الكارتيزية :

$$\frac{b}{p} = \frac{c}{p - 2} \therefore \frac{b - c}{p} = \frac{c}{p - 2}$$

$$\therefore p + 2b - c = cp \quad \therefore p + 2b = cp + c$$

$$\therefore \frac{p}{cp} = \frac{cp + c}{cp} \therefore \frac{1}{c} = \frac{cp + c}{cp}$$

$$\therefore \frac{1}{c} = \frac{cp + c}{cp} \quad \text{بالتعويض } p = 2, c = 0 \quad \therefore \frac{1}{0} = \frac{2 \cdot 0 + 0}{2 \cdot 0}$$

$\therefore$ المعادلة الكارتيزية : $10 = 3c - 0$

$$\therefore 10 = 3c - 0 \quad \therefore 10 = 3c \quad \therefore c = \frac{10}{3}$$

النقطة $(0, 3)$ تم بالمستقيم

$$\therefore \frac{0}{3} = \frac{0 - 3}{3 - 0} = -1$$

$\therefore$ المعادلة المتجهة : $(0, 3) + (0 - 3, 0) = \vec{r}$

أوجد كل من المقطوعة السينية والمقطوعة الصادية للمستقيم الذي معادلته $2x - 3y = 12$.
ثم أوجد المعادلة المتجهة و المعادلتين البارامتريتين . لهذا المستقيم .

بوضع $x = 0$ في المعادلة : $2x - 3y = 12$ ①

$$\therefore 2x = 12 \quad \therefore x = 6 = \text{المقطوعة السينية}$$

بوضع $y = 0$ في ② $2x - 3y = 12$ $\therefore 2x = 12$ $\therefore x = 6$ $\therefore$ المقطوعة

الصادية

$\therefore$ المستقيم يمر بالنقطتين $(0, 4)$ ، $(6, 0)$.

$$\therefore \text{ميل المستقيم} = \frac{0 - 4}{6 - 0} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

المعادلة المتجهة هي :

$$\vec{r} = (0, 4) + \lambda (6, -4)$$

المعادلتين الوسيطيتين هما :

$$x = 6\lambda \quad , \quad y = 4 - 4\lambda$$



تأريخ (٧) على معادلة الخط المستقيم

[١] أكمل كلا مما يأتي بالاجابة الصحيحة :

- ١ معادلة المستقيم الذي يقطع مع محور السينات الموجب جزء قدرة ٦ وحدات ويقطع مع محور السينات السالب جزء قدرة ٣ وحدات هي
- ٢ معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٠ ، ٥) ، (٤ - ، ٠) هي
- ٣ المستقيم الذي معادلته $٤ = ٣ + ٦$ يقطع مع محور الصادات الموجب جزء قدرة
.....
- ٤ المستقيم الذي معادلته $٢ = \frac{٥}{٢} + \frac{٣}{٣}$ يقطع مع محور السينات الموجب جزء قدرة
بينما مع محور الصادات الموجب جزء قدرة
- ٥ المستقيم الذي معادلته $٦ = ٣ + \frac{٣}{٢}$ يصنع مثلثا مع محوري الإحداثيات مساحة سطحه وحدة طول
- ٦ المقطوعة السينية للمستقيم الذي معادلته $٤ = ٣ + ٦$ تساوى بينما المقطوعة الصادية له تساوى
- ٧ المستقيم الذي معادلته $٤ = ٣ + ٦$ يمر بالنقطة (٠ ،) ويقطع محور السينات في النقطة

[٢] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

- ١ المعادلة المستقيم المارة بالنقطتين (٠ ، ٢) ، (٣ ، ٠) هي
 $١ = \frac{٥}{٣} + \frac{٣}{٢}$ (١) $٠ = \frac{٥}{٣} + \frac{٣}{٢}$ (٣) $٦ = \frac{٥}{٣} + \frac{٣}{٢}$ (٢) $١ - = \frac{٥}{٣} + \frac{٣}{٢}$ (٤)
- ٢ المستقيم الذي معادلته $١ = \frac{٥}{٣} + \frac{٣}{٧}$ يقطع محور السينات جزء قدرة
 $\frac{٢}{٧}$ (٤) $\frac{٧}{٢}$ (٣) ٣ (٢) ٧ (١)
- ٣ المستقيم الذي معادلته $٢٤ = ٨ + ٣$ يصنع مثلثا مساحة سطحه وحدة مربعة مع محوري الإحداثيات
 ٢٤ (٤) ٨ (٣) ٦ (٢) ١٢ (١)
- ٤ نقطة تقاطع المستقيم $٦ = ٣ + ٢$ مع محور السينات هي
 $(٣ ، ٠)$ (٤) $(٢ ، ٠)$ (٣) $(٠ ، ٣)$ (٢) $(٠ ، ٢)$ (١)



٥ نقطة تقاطع المستقيم $3x - 4y = 12$ مع محور الصادات هي

- ① $(4, 0)$ ② $(0, 3)$ ③ $(-4, 0)$ ④ $(0, -3)$

٣ [] أوجد طولى الجزئين المقطوعين من المحورين بالمستقيم : $50 = 4x^3 - 3x$

٤ [] أوجد معادلة الخط المستقيم الذى يقطع من محوري الإحداثيات جزأين موجبين

مقداريهما $7, 2$ وحدة طول

٥ [] أوجد معادلة الخط المستقيم الذى مقطوعته السينية تساوى 2 وحدة طول

ومقطوعته الصادية تساوى وحدة طول واحدة

٦ [] أوجد معادلة المستقيم اطار بالنقطتين $(0, 3)$ ، $(1, 0)$

٧ [] أوجد المقطوعتين السينية والصادية للمستقيم $0 = 4x^2 + 3x$

٨ [] أوجد معادلة المستقيم اطار بالنقطة $(0, 2)$ ويوازي المستقيم $1 = \frac{4x}{2} + \frac{3y}{4}$

٩ [] أوجد المعادلة العامة للمستقيمات فى الحالات الآتية :

١ يقطع محورى الإحداثيات فى النقطتين $(0, 3)$ ، $(4, 0)$

٢ يمر بالنقطة $(1, 3)$ ويوازي المستقيم : $0 = 7 - 4x^3 - 3x$

٣ يمر بالنقطة $(1, 0)$ ومتجه الاتجاه له $(3, -2)$

١٠ [] أوجد معادلة المستقيم اطار بالنقطة $(1, 3)$ ويوازي المستقيم $1 = \frac{4x}{3} + 3x$

١١ [] أوجد معادلة المستقيم اطار بالنقطة $(0, 2)$ وعمودى على المستقيم $3 = 4x + \frac{3y}{2}$

١٣١

أوجد مساحة المثلث المحدد بمحور الإحداثيات والمستقيم $1 = \frac{45}{x} + \frac{3}{y}$

١٣] أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(0, 1)$ وميله سالب والذي يصنع مع

محوري الإحداثيات مثلثا مساحته عشر وحدات مربعة

١٤] أوجد مساحة المثلث المحدد بمحور الإحداثيات والمستقيم $20 = 45x + 3y$

١٥] أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(2, 1)$ وميله سالب ويصنع مع محوري

الإحداثيات مثلث مساحته ٣٠ وحدة مربعة

١٦] أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(1, 4)$ وميله سالب ويصنع مع محوري

الإحداثيات مثلثا مساحته ٩ وحدة مربعة .

١٧] أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(0, 1)$ وميله سالب ويصنع مع محوري

الإحداثيات مثلثا مساحته عشر وحدة مربعة .

١٨] أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(0, 3)$ وميله سالب ويصنع مع محوري

الإحداثيات مثلثا مساحته ١٥ وحدة مربعة .

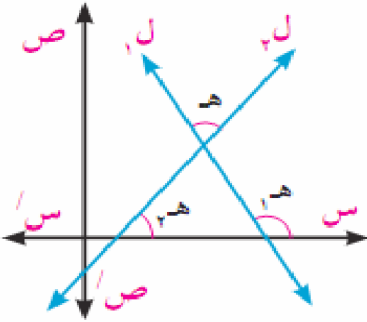
١٩] أوجد معادلة المستقيم الذي يقطع من محوري الإحداثيات جزأين موجبي

مجموعهم ٩ ويمر بالنقطة $(2, 1)$

قياس الزاوية بين مستقيمين

إذا كانت ه قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين l_1, l_2 ،
الذي ميلهما m_1, m_2 ، فإن :

$$\text{فإن } \left| \frac{m_2 - m_1}{m_1 m_2 + 1} \right| = 1 \text{ حيث } m_1 m_2 \neq -1$$



ملاحظات :

① لا تستخدم هذه العلاقة عندما يكون أحد المستقيمين يوازي محور الصادات .

② إذا كان $m_1 m_2 = -1$ فإن المستقيمان متعامدان (ه = ٩٠°) بدون استخدام القانون السابق

مثال [١]

أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين : $3x - y = 0$ ، $2x + y - 7 = 0$

$$m_1 = \frac{3}{1} = 3 , \quad m_2 = \frac{-2}{1} = -2$$

$$\therefore \text{فإن } \left| \frac{m_2 - m_1}{m_1 m_2 + 1} \right| = 1 \text{ حيث } m_1 m_2 \neq -1$$

$$\therefore \text{فإن } \left| \frac{2 + 3}{(-2)(3) + 1} \right| = \left| \frac{5}{-5} \right| = 1$$

$$1 = |1 - 1| = \left| \frac{0}{0} \right| =$$

$$\therefore \text{ه} = 0^\circ$$

مثال (٢)

أوجد قياس الزاوية الحادة بين زوج المستقيمان الآتية :

$$3x - 4y = 11, \quad x + 7y = 0$$

$$\therefore m_1 = \frac{3}{4} = \frac{3-}{4-} = \frac{- \text{معامل } x}{\text{معامل } y}$$

$$\therefore m_2 = \frac{1-}{7} = \frac{1-}{7}$$

$$\text{بالتعويض في القانون : } \left| \frac{m_1 - m_2}{m_1 m_2 + 1} \right| = \left| \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{7}}{\frac{3}{4} \times \frac{1}{7} + 1} \right| \neq 1$$

$$\therefore \text{فأه } \left| \frac{\frac{1-}{7} - \frac{3}{4}}{\frac{1-}{7} \times \frac{3}{4} + 1} \right| = \left| \frac{\frac{1}{7} + \frac{3}{4}}{\frac{1}{7} \times \frac{3}{4} - 1} \right| \text{ بالضرب } \frac{28}{28}$$

$$\therefore \text{فأه } \left| \frac{\frac{28}{7} + \frac{21}{4}}{\frac{3}{28} - 1} \right| = \left| \frac{20}{20} \right| = 1$$

$$\therefore \text{هـ } 90^\circ$$

مثال (٣)

أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين اللذين متجهها اتجاهيهما هما :

$$\vec{u}_1 = (2, \sqrt{3}), \quad \vec{u}_2 = (1, 0)$$

$$\therefore \vec{u}_1 = (2, \sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{0}{1} = m_1$$

$$\therefore \vec{u}_2 = (1, 0) = \frac{0}{1} = \frac{0}{1} = m_2$$

$$\therefore \text{فأه } \left| \frac{m_1 - m_2}{m_1 m_2 + 1} \right| = \left| \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 0}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(0) + 1} \right| = \left| \frac{\sqrt{3}}{2} \right|$$

$$\therefore \text{هـ } 60^\circ$$

أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين l_1, l_2 حيث

$$l_1: \vec{r} = (1, 1, 1) + t(1, 1, 1)$$

$$l_2: \vec{r} = (1, 1, 1) + t(1, \sqrt{3}, 1)$$

$$\therefore \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \quad \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, \sqrt{3}, 1)$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{3} \sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1} \left(\frac{1}{3} \right) \approx 70.5^\circ$$

$$= \cos^{-1} \left(\frac{1}{3} \right) \approx 70.5^\circ$$

$$\text{باستخدام الآلة الحاسبة} \quad \theta = \cos^{-1} \left(\frac{1}{3} \right) \approx 70.5^\circ$$

$$\therefore \theta = 70.5^\circ$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{1}{3} \right) \approx 70.5^\circ$$

أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين :

$$ل_1 : ٣ - ٢ = ٥ ، ٥ - ١ = ٥$$

$$ل_2 : ٥ = ٦ ، ٥ - ٢ = ٥$$

$$\frac{٢-}{٥} = \frac{٥}{١} = ١٢ \therefore (٥, ٢-) = ١٢$$

$$\frac{٦-}{٥} = \frac{٥}{٥-} = \frac{٥}{١} = ١٢ \therefore (٥-, ٦) = ١٢$$

$$\therefore \text{ظاهر} = \left| \frac{١٢ - ١٢}{١٢ + ١} \right| \text{ حيث } ١٢ \neq ١$$

$$\left| \frac{\frac{٦-}{٥} + \frac{٢-}{٥}}{\frac{١٢}{٢٥} + ١} \right| = \left| \frac{\left(\frac{٦-}{٥}\right) - \frac{٢-}{٥}}{\left(\frac{٦-}{٥}\right)\left(\frac{٢-}{٥}\right) + ١} \right| = \text{ظاهر}$$

$$\frac{٢٠}{٣٧} = \frac{٢٠}{١٢ + ٢٥} = \text{ظاهر} \therefore \frac{٢٥}{٢٥} \times \text{بالضرب} \left| \frac{\frac{٢٠}{٢٥}}{\frac{١٢}{٢٥} + ١} \right| =$$

$$\therefore \text{sh} \cdot \tan \left(\frac{٢٠}{٣٧} \right) \therefore ٢٤' = ٢٨^\circ$$

إذا كان قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين :

$$٣ = ٧٥ - ٧٣ \text{ ، } ٠ = ١ - ٧٥ \text{ ، } \frac{\pi}{٤} \text{ يساوي } ٣ \text{ فما قيمة } \theta .$$

$$\theta = \frac{\theta -}{١ -} = ١٣ \text{ ، } \frac{٣}{٠} = \frac{٣ -}{٠ -} = ١٣$$

$$\therefore \text{ نلاحظ } \left| \frac{١٣ - ١٣}{١٣ + ١} \right| = ١ \text{ حيث } ١٣ \neq ١ -$$

$$١ = \left| \frac{\theta - \frac{٣}{٠}}{(\theta) \left(\frac{٣}{٠} \right) + ١} \right| = ١ \text{ نلاحظ } \frac{٣}{٠}$$

$$١ = \frac{\theta ٠ - ٣}{\theta ٣ + ٠} \therefore ١ = \left| \frac{\theta ٠ - ٣}{\theta ٣ + ٠} \right| \therefore$$

$$\frac{١ -}{٤} = \frac{٢ -}{٨} = \theta \therefore ٢ - = \theta ٨ \therefore \theta ٠ - ٣ = \theta ٣ + ٠ \therefore$$

$$\theta ٣ - ٠ - = \theta ٠ - ٣ \therefore ١ - = \frac{\theta ٠ - ٣}{\theta ٣ + ٠} \therefore$$

$$٣ - ٠ - = \theta ٠ - \theta ٣ \therefore$$

$$\frac{٨ -}{٢ -} = \theta \therefore \frac{٨ -}{٢ -} = \theta \therefore ٨ - = \theta ٢ - \therefore$$

إذا كان الزاوية الحادة بين المستقيمين : $\vec{r} = (1, 1) + (3, 4) \vec{u}$

$\vec{r} = (1, 7) + (2, 0) \vec{v}$ جيب تمامها يساوي $\frac{2}{\sqrt{5}}$ فما قيمة θ .

$$\frac{1}{2} = \text{ظاهر} \therefore \frac{2}{\sqrt{5}} = \text{جناح} \therefore \frac{2-}{\theta} = \frac{3}{4}, \quad \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \therefore \text{ظاهر} = \left| \frac{\frac{2-}{\theta} - \frac{3}{4}}{\frac{2-}{\theta} \cdot \frac{3}{4} + 1} \right| \text{ حيث } \frac{2-}{\theta} \neq 1$$

$$\frac{4}{4} \times \text{الضرب} \left| \frac{\frac{2-}{\theta} + \frac{3}{4}}{\frac{3}{\theta} + 1} \right| = \left| \frac{(\frac{2-}{\theta}) - \frac{3}{4}}{(\frac{2-}{\theta}) \cdot \frac{3}{4} + 1} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{8 + \theta^3}{6 - \theta^4} \therefore \frac{1}{2} = \left| \frac{8 + \theta^3}{6 - \theta^4} \right| \therefore$$

$$\therefore 16 + \theta^6 = 16 - \theta^4 \therefore \theta^2 = - \therefore 11 = -$$

$$\therefore \frac{1-}{2} = \frac{8 + \theta^3}{6 - \theta^4} \therefore 16 + \theta^6 = 16 - \theta^4 \therefore 1 + \theta^4 = -$$

$$\therefore 10 = 16 - 16 = \theta^4 + \theta^6 \therefore 10 = -$$

$$\therefore 10 = - \therefore 10 = -$$

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٢) ويصنع مع المستقيم :

$$\text{✓} = (1, 1) + (3, 2) \text{ زاوية ظلها } \frac{4}{3}$$

$$\text{نفرض أن متجه اتجاه المستقيم هو } \overrightarrow{u} = (3, 2) \therefore \frac{2-1}{3-1} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{ظاه} = \left| \frac{2-1}{3-1} - \frac{1}{2} \right| = 1 \text{ حيث } \frac{1}{2} \neq 1$$

$$\frac{4}{3} = \left| \frac{\frac{2}{3} + 1}{2 \cdot \frac{2}{3} - 1} \right| = \left| \frac{(\frac{2}{3} - 1) - 1}{(\frac{2}{3} - 1) \cdot 2 + 1} \right| = \frac{4}{3}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{2 + 2 \cdot 3}{2 \cdot 2 - 3} \therefore \frac{4}{3} = \left| \frac{2 + 2 \cdot 3}{2 \cdot 2 - 3} \right| \therefore$$

$$\frac{4}{3} = \frac{2 + 2 \cdot 3}{2 \cdot 2 - 3} \therefore \frac{4}{3} = \frac{2 + 2 \cdot 3}{2 \cdot 2 - 3} \therefore \frac{4}{3} = \frac{2 + 2 \cdot 3}{2 \cdot 2 - 3} \therefore$$

$$\frac{4}{3} = \frac{2 + 2 \cdot 3}{2 \cdot 2 - 3} \therefore \frac{4}{3} = \frac{2 + 2 \cdot 3}{2 \cdot 2 - 3} \therefore \frac{4}{3} = \frac{2 + 2 \cdot 3}{2 \cdot 2 - 3} \therefore$$

$$6 - 12 = 2 \cdot 8 - 2 \cdot 9 \therefore 6 + 12 = 2 + 2 \cdot 9 \therefore$$

$$18 - 2 = 2 \therefore$$

$$\therefore \text{معادلة المستقيم هي : } \frac{6}{7} = \frac{3 - 2}{2 - 1}$$

$$\therefore 6 = 39 + 2 \cdot 17 - 2 \cdot 6$$

$$\therefore 6 - 2 \cdot 17 = 12 - 2 \cdot 6$$

$$\therefore 6 = 39 - 2 + 2 \cdot 18$$

$$\therefore 18 - 2 = \frac{3 - 2}{2 - 1}$$

أثبت أن المثلث $\triangle PQR$ متساوي الساقين ، ثم أوجد قياس زاوية $\angle P$.

أثبت أن المثلث $\triangle PQR$ متساوي الساقين ، ثم أوجد قياس زاوية $\angle P$.

$$\text{البعد بين نقطتيه} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$PQ = \sqrt{(1 - 0)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

$$PR = \sqrt{(3 - 0)^2 + (6 - 0)^2} = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$QR = \sqrt{(3 - 1)^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\frac{1 - 3}{2} = \frac{2 - 6}{6 - 0} = -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} = \frac{(1 - 0) - 0}{2 - 0} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{ظاهر} = \left| \frac{-\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2})}{-\frac{1}{2} + 1} \right| = 0$$

ملاحظة في الحل :

عند استخدام قانون الزاوية بين مستقيمين في إيجاد قياس الزاوية داخل المثلث يجب أولاً

تحديد نوع الزاوية (حادة ، قائمة ، منفرجة)

$\therefore \angle P = \angle Q \Rightarrow \triangle PQR$ متساوي الساقين .

$\therefore \angle P > 90^\circ$ حادة

نلاحظ أن : $\angle P + \angle Q > \angle R$

$$\frac{2}{3} = \left| \frac{\left(\frac{1}{3}\right) - (-\frac{1}{2})}{\left(\frac{1}{3}\right)(-\frac{1}{2}) + 1} \right| = \frac{5}{6}$$

وباستخدام الآلة الحاسبة .

$$\angle P = \angle Q = 99.46^\circ$$

١. $(7, 0)$ ب. $(1, -6)$ ج. $(0, 1.0)$ **اثبت أن : المستقيم ℓ + ℓ - ℓ = ℓ يصنع مع المستقيمين ℓ ، ℓ مثلثا متساوي الساقين رأسه ℓ ويمر بالنقطة ب .**

$$\frac{\ell}{7} = \frac{0 - 7}{1.0 - 0} = \text{ميل } \ell \rightarrow \ell$$

$$-8 = \frac{1 + 7}{6 - 0} = \text{ميل } \ell \rightarrow \ell$$

$$\therefore \text{ميل المستقيم المعلوم} = \frac{1 -}{2}$$

نفرض أن $\ell \rightarrow \ell$ ، $\ell \rightarrow \ell$ يصنعان الزاويتان ℓ ، ℓ مع المستقيم المعلوم على الترتيب .

$$\frac{3 -}{2} = \frac{\frac{1 -}{2} + -8}{\left(\frac{1 -}{2}\right)(-8) + 1} = \ell \rightarrow \ell$$

$$\frac{3}{2} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\ell}{7}}{\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\ell}{7} + 1} = \ell \rightarrow \ell$$

$$\therefore \ell \rightarrow \ell = \ell \rightarrow \ell \text{ عدديا } \therefore \ell \rightarrow \ell = \ell \rightarrow \ell$$

$\therefore$ المستقيم ℓ + ℓ - ℓ = ℓ يصنع مع المستقيمين $\ell \rightarrow \ell$ ، $\ell \rightarrow \ell$ مثلثا متساوي الساقين رأسه ℓ

$$\text{وبوضع } \ell = 6 \text{ ، } \ell = 1$$

في الطرف الأيمن للمعادلة نجد أن الناتج صفر أي يساوي الطرف الأيسر

$\therefore$ النقطة ب تحقق المعادلة $\therefore$ المستقيم يمر بالنقطة ب

تارين (٨) على الزاوية بين مستقيمين

[١] أكمل الجمل الآتية لتصبح عبارات صحيحة

١ قياس الزاوية بين المستقيمين الذي ميليهما $\frac{2}{0}$ ، $\frac{0-}{2}$ هي °

٢ قياس الزاوية بين المستقيمين الذي ميليهما $\frac{1}{2}$ ، ٣ هي °

٣ قياس الزاوية بين المستقيمين الذي ميليهما صفر ، ١ هي °

٤ إذا توازي المستقيمان : $m \parallel n$ ، $\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$ ، $\angle 2 = \angle 5$ ، $\angle 1 = \angle 6$ ، فإن $m = n$

٥ قياس الزاوية بين المستقيمين $m = n$ ، $\angle 1 = \angle 2$ هي °

٦ قياس الزاوية بين المستقيمين الذي ميليهما $-\sqrt{2}$ ، $\frac{1}{\sqrt{2}}$ هي °

٧ قياس الزاوية بين المستقيمين الذي ميليهما صفر ، غير معرف هي °

٨ قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين اللذين ميليهما ٢ ، $\frac{1-}{2}$ تساوى °

٩ قياس الزاوية بين المستقيمين $m = n$ ، $\angle 1 = \angle 2$ هي °

١٠ إذا تعدد المستقيمان : $m \parallel n$ ، $\angle 1 = \angle 2$ ، $\angle 3 = \angle 4$ ، فإن $m = n$

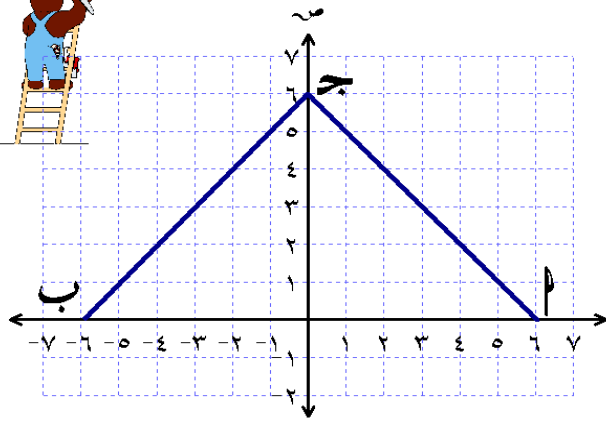
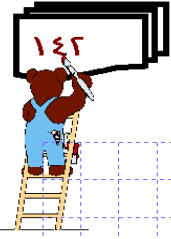
١١ قياس الزاوية بين المستقيمين $m = n$ ، $\angle 1 = \angle 2$ هي °

١٢ قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين $m = n$ ، $\angle 1 = \angle 2$ تساوى °

١٣ قياس الزاوية بين المستقيمين $m = n$ ، $\angle 1 = \angle 2$ هي °

١٤ قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين : $\angle 1 = \angle 2$ ، $\angle 3 = \angle 4$ (١ ، ١)

والمستقيم $m = n$ هي



١٥ بيده الشكل المقابل :

قطعة أرض مثلثة الشكل إحداثيات رؤوسها هي :

م (٠ ، ٦) ، ب (٠ ، ٦ -) ، ج (٦ ، ٠)

أكمل ما يأتي :

١ قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين $\vec{م}$ و $\vec{ج}$ ومحور السينات $\sim$ تساوى

٢ قياس الزاوية بين المستقيمين $\vec{م}$ ، $\vec{ب}$ تساوى

٣ المعادلة المتجهة للمستقيم $\vec{م}$ هي

٤ المعادلة المتجهة للمستقيم $\vec{ب}$ هي

٥ المعادلة اللانيزية للمستقيم المار بالنقطة ج ، و يوازي $\vec{م}$ هي

٦ مساحة سطح المثلث م ب ج تساوى

٢ اختار الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ قياس الزاوية بين المستقيمين $\vec{ص} = \vec{ع}$ ، $\vec{ص} - \vec{و} = \vec{ز}$ هي

١ $\frac{\pi}{3}$ ٢ $\frac{\pi}{\varepsilon}$ ٣ $\frac{\pi}{2}$ ٤ غير ذلك

٢ قياس الزاوية الحادة المحصورة بين المستقيمين المار بالنقطتين (١ ، ٠) ، (٠ ، ١ -) والاتجاه الموجب لمحور السينات تساوى :

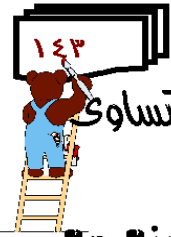
١ صفر ٢ ٤٥° ٣ ٦٠° ٤ ٩٠°

٣ قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين $\vec{ك} + (٣ ، ٠) = \vec{ل}$ و $(١ ، ١)$ هو المستقيم $\vec{ل}$ تساوى :

١ ٣٠° ٢ ٤٥° ٣ ٦٠° ٤ ٩٠°

٤ قياس الزاوية بين المستقيمين $\vec{و} + \vec{ع} = \vec{ز}$ ، $\vec{و} + \vec{ص} = \vec{ز}$ هي

١ $\frac{\pi}{3}$ ٢ $\frac{\pi}{6}$ ٣ $\frac{\pi}{2}$ ٤ π



قياس الزاوية الحادة المحصورة بين المستقيمتين $\sqrt{3} = \alpha - \beta$ ، $\alpha = 3$ تساوي

③. (1)

030 (5)

7. (3)

9. (E)




المستقيم العمودي على المستقيم : $(0, 0) + \sqrt{1} (1, \sqrt{3})$ يصنع مع

الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها

۳. ۱

7. (5)

15. (2)

10. (3)

قوله ﴿فَإِذَا جَاءَ أَحَدَهُمُ الْمَوْتُ مِنْ غَيْرِ عِلَّةٍ خفيةٍ﴾

بنسبة الزاوية الحادة بين المستقيم $v = r$ ، المستقيم الذي منبه ١ - هي

030 (1)

° 3. (5)

7. (2)

④ غدير ذلك

(μ) 

[۳] إذا كان $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$: $\vec{r} \cdot \vec{r} = x^2 + y^2 + z^2$: $\vec{r} \cdot \vec{r} = 0$.

٤. : فأوجد قيمة p التي تجعل $3 = \frac{45}{2} - \frac{55}{3}$

$$r_d // , d \textcircled{1}$$
$$r, d \perp, d \textcircled{r}$$

❏ [٤] اذكر العلاقة بين المستقيمين l_1 ، l_2 في الحالات التالية :

١) إذا كان ظل الزاوية بينهما يساوى صفه . ٢) إذا كان ظل الزاوية بينهما غير معرف .

③ إذا كان ميل ل هو ص ، ميل ل هو ص فاذكر العلاقة بين ص ، ص

أوجد قياس الزاوية الحادة المحصورة بين أزواج المستقيمات الآتية :

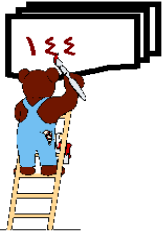
$$(\cdot, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\xi - = \psi - \omega$$
$$, \quad (1, 1) \mathfrak{J} + (1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \textcircled{2}$$
$$\cdot = \psi - \varphi - \omega \tau$$
$$\cdot = 0 - \omega \sqrt{r} - 45$$
$$\cdot = 1 - \alpha \sqrt[3]{1 - \alpha \omega}$$

إذا كانت θ هي قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين :

$\frac{3}{8} = \text{وكانت فلا هـ}$ ، . = $\varepsilon + \psi\tau - \omega\rho$ ، . = $\gamma + \psi\gamma - \omega$

❌ (U) أوجد قياس الزاوية بين المستقيم $353 - 452 = 9$ ، المستقيم α بالنقطتين

$$(1 - \varepsilon -), (r, \cdot)$$



ك [٨] أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين $v = 45^\circ + 30^\circ$ ، $3 = 45^\circ$

ك [٩] أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين $v = 45^\circ + 30^\circ$ ، $6 = 30^\circ$

ك [١٠] أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين :

١ $(1, 2) + (0, 0) = \sqrt{5}$ ، $(1, 3) + (2, 0) = \sqrt{5}$

٢ $0 = 45^\circ + 30^\circ$ ، $1 = 45^\circ - 30^\circ$

ك [١١] أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين :

$0 = 3 + 45^\circ + 30^\circ$ ، $0 = 1 + 45^\circ - 30^\circ$

ك [١٢] أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين : $3 = 45^\circ + 30^\circ$ ، $2 = 45^\circ + 30^\circ$

ك [١٣] أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين $0 = 1 + 45^\circ + 30^\circ$ ، $0 + 30^\circ = 45^\circ$

ك [١٤] أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين $7 - 30^\circ = 45^\circ$ ، $1 = \frac{45^\circ}{0} + \frac{30^\circ}{2}$

ك [١٥] أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين $9 = 45^\circ - 30^\circ$

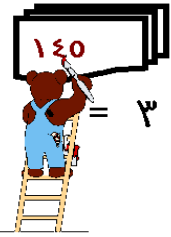
، المستقيم امار بالنقطتين $(1, 2)$ ، $(0, 3)$

ك [١٦] أوجد قياس الزاوية الحادة المحصورة بين المستقيمين

$(1, 2) + (0, 3) = \sqrt{5}$ ، $(1, 3) + (2, 0) = \sqrt{5}$

ك [١٧] أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين $0 = 7 - 45^\circ - 30^\circ$ ، محور السينات

ك [١٨] أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين $0 = 1 - 45^\circ + 30^\circ$ ، محور الصادات



﴿١٩﴾ أوجد قياس الزاوية الحادة المحصورة بين المستقيمين

٩. المستقيم AM بالنقطتين $(1, 2)$ ، $(1 - \epsilon, 2)$.

~~(٢٠)~~ إذا كان قياس الزاوية بين المستقيمين : $\alpha = \lambda - \psi + \omega$ ٣

٣. $9 = 45 - 36$ ، يساوي $\frac{b}{c}$ فما قيمة a ؟

٢١) أوجد قيمة θ التي تجعل الزاوية بين المستقيمين : $u - v - w = 0$

$$\frac{\gamma}{\Sigma} \text{ இலகூ } = \gamma + \alpha \tau - \omega \rho .$$

❌ (٢٢) إذا كان قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين : $\alpha + \beta = 180^\circ$

۲. $\omega - \psi - 0 =$ ، **يساوی** $\frac{\pi}{2}$ **فأوجد قيمة** ξ .

~~ك~~ (٢٣) أوجد قيمة θ التي تجعل الزاوية الحادة بين المستقيمين $3x - y - 5 = 0$ و $x + 2y - 3 = 0$.

، $\omega = \psi$ يساوي الزاوية الحادة بين المستقيمين $0 = \psi_2 - \omega$ ، $\psi = \psi_1 + \omega$ ،

~~(٢٤)~~ أوجد قيمة λ التي تجعل المستقيمين $\lambda x + y = 1$ ، $x + y = 9$ متوازيين

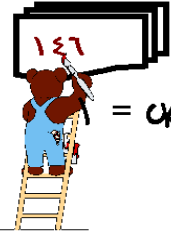
متعمدان

٢- إذا كان ظل الزاوية بين المستقيم الذي ميله α والمستقيم الذي معادلته

ث : أوجد قيمة $\frac{3}{\Sigma}$ يساوي $0 = 1 + \alpha + \beta + \gamma$

❌ (٢٦) إذا كانت α هو قياس الزاوية بين المستقيمين : $\alpha = \gamma - \beta = 7$.

٢ . حيث $\frac{\xi}{0} = \xi + \psi$ جتا ξ احسب قيمة ψ



كـ [٢٧] إذا كان ظل قياس الزاوية بين المستقيمين : $\mu = 45 + 33^\circ$ ، $\nu = 45 + 33^\circ$

يساوي $\frac{3}{4}$ احسب قيمة μ

كـ [٢٨] إذا كان قياس الزاوية بين المستقيمين : $\nu = 45 - 33^\circ$ ، $\mu = 45 - 33^\circ$

يساوي 90° احسب قيمة μ

كـ [٢٩] اثبت أن الزاوية بين المستقيمين : $\mu = 45 + 33^\circ$ ، $\nu = 45 - 33^\circ$

قياسها ثابت لجميع قيم $\mu \neq \nu$ وأوجد قياس هذه الزاوية

كـ [٣٠] إذا كان قياس الزاوية بين المستقيم ℓ_1 : $\mu = 45 - 33^\circ$ ، $\nu = 45 - 33^\circ$ والمستقيم

ℓ_2 : $\mu = 45 + 33^\circ$ ، $\nu = 45 + 33^\circ$ تساوي قياس الزاوية بين المستقيم ℓ_1 ،

والمستقيم ℓ_2 : $\mu = 45 - 33^\circ$ ، $\nu = 45 - 33^\circ$ أوجد قيمة μ

كـ [٣١] مستقيمان ميلاهما μ ، ν وجيب الزاوية بينهما يساوي $\frac{1}{\sqrt{10}}$ أوجد

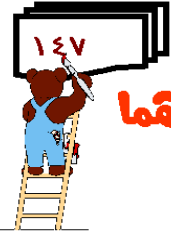
معادلة المستقيم الذي ميله μ ويمر بالنقطة $(3, 2)$ حيث $\mu < \nu$

كـ [٣٢] مستقيمان ميليهما μ ، ν وظل قياس الزاوية بينهما $\frac{0}{11}$ ويمران بالنقطة

$(1, 3)$ أوجد معادلتيهما علما بأن $\mu < \nu$

كـ [٣٣] أوجد معادلة المستقيمين المارين بالنقطتين $(2, 1)$ ويصنع كلا منهما زاوية

قياسها 90° مع المستقيم $\mu = 45 - 33^\circ$ ، $\nu = 45 - 33^\circ$



٣٥] أوجد معادلة المستقيمين المارين بالنقطتين (٢، ٣) و (٠، ٣) يصنع كلا منهما

$$\text{زاوية ظلها } \frac{1}{2} \text{ مع المستقيم } 0 = 0 + 45 + 33$$

٣٦] أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١، ١) و يصنع مع المستقيم

$$\text{زاوية قياسها } \frac{3}{4} \text{ } 0 = 2 + 45 + 33$$

٣٧] أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١، ١) و يصنع مع المستقيم

$$\text{زاوية جيب تمامها } \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ } 0 = 3 + 45 + 33$$

٣٨] أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١، ٤) و يصنع مع المستقيم الذي

$$\text{معادلته } 3 = 45 - 33 \text{ زاوية ظلها } \frac{1}{2}$$

٣٩] أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١، ٣) و يصنع مع المستقيم الذي

$$\text{معادلته } 3 = 45 + 33 \text{ زاوية ظلها } \frac{1}{\sqrt{5}}$$

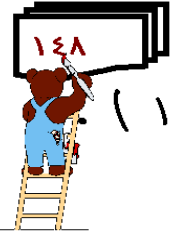
٤٠] أثبت أن Δ ب ج قائم الزاوية في ب حيث ب (٢، ٥)

ب (٢، ٥)، ج (٢، ٢)، ثم احسب مساحة سطحه .

٤١] أوجد قياسات زوايا المثلث ب ج

إذا كان ب (٣، ٢)، ج (٣، ١)، ج (٥، ٢)

٤٢] هل المثلث الذي رؤوسه النقط ب (٣، ٢)، ج (٨، ٧)، ج (٣، ١) فيه زاوية ب ج حادة أم منفرجة ؟ وأوجد قياسها .



ك [٢٣] Δ فيه : $\text{م} (٢, ٠)$ ، $\text{ب} (١, ٣)$ ، $\text{ج} (١ - , ٢ -)$ أوجد قياس زاوية م

ك [٢٤] إذا كان المثلث $\text{م} (٧, ٥)$ ، $\text{ب} (٣, ٢)$ ، $\text{ج} (١, ٥)$ ، فأوجد قيمة ص ثم أوجد قياس كل من الزاويتين الآخرين .

ك [٢٥] $\text{م} (٣, ٢)$ ، $\text{ب} (٤, ٤)$ ، $\text{ج} (٤, ١ -)$ مثلث فيه حدد نوع زاوية م وأوجد قياسها

ك [٢٦] $\text{م} (٠, ٩)$ ، $\text{ب} (١, ٢)$ ، $\text{ج} (٢ - , ٢ -)$ هي النقط على الترتيب أوجد قياس الزاوية م

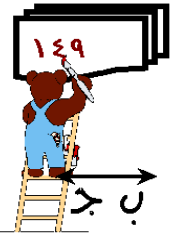
ك [٢٧] $\text{م} (١ - , ٤)$ ، $\text{ب} (٠, ١ -)$ ، $\text{ج} (١, ٢)$ هي النقط على الترتيب أوجد قياسات زوايا المثلث م

ك [٢٨] المثلث $\text{م} (٧, ٥)$ ، $\text{ب} (٥, ١)$ ، $\text{ج} (٢, ٤)$ أوجد إحداثي نقطة د التي تقسم $\overline{\text{بج}}$ من الداخل بنسبة ١ : ٢ .

٢ أثبت أن : $\overline{\text{م}} \perp \overline{\text{بج}}$ ٣ أثبت أن : $\text{م} = \text{د}$ ٤ أوجد : $\text{ق} (\geq \text{ب})$ ٥ أوجد مساحة سطح المثلث م

ك [٢٩] $\text{م} (٢, ٣ -)$ ، $\text{ب} (١٣ - , ٣ -)$ ، $\text{ج} (٣, ٥)$ ، نصفت $\overline{\text{بج}}$ في د أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين $\overleftrightarrow{\text{م}} , \overleftrightarrow{\text{د}}$

ك [٣٠] $\text{م} (٢, ٦ -)$ ، $\text{ب} (٧, ٤)$ ، $\text{ج} (٤, ٩)$ ، $\text{د} \in \overline{\text{مب}}$ بحيث $\text{م} : \text{د} = \text{ب} : \text{ج}$ أوجد إحداثي نقطة د ثم أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين $\overleftrightarrow{\text{م}} , \overleftrightarrow{\text{د}}$



﴿ ٥١ ﴾ پ ب ج مثلث فيه پ (١ ، ٢) ب (٣ - ، ٢) ج (٣ - ، ٢ -)

❶ اثبت أن Δ م ب ج قائم الزاوية

٢ أوجد معادلة المستقيم

٣ أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين $\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{CD}$

~~(or)~~ P ب J ، متوازي أضلاع، رؤوسه $P(3, 1)$ ، $B(3, 3)$ ، $J(1, 6)$

أوجد إحداثي نقطة ، ثم أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين

❌ [03] اثبت أن : **النقط** $(2, 0)$ ، $(0, 1)$ ، $(1, 2-)$ ، $(2-, 2)$ هي

رؤوس شکل رباعی دائری .

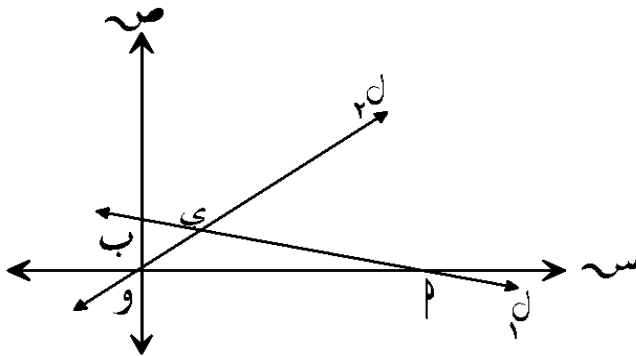
❌ (05) اثبت أن : $(11, 4) \in \gamma, (7, 5.0) \in \gamma, (1, 9.0) \in \gamma$ **اثبت أن :**

المستقيم $3 = 452 + 53$ **يصنع مع المستقيمين** $\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{BC}$ **مثلاً متساوي الساقين**

~~(00)~~  إذا كان الخط المستقيم ℓ يصنع زاوية جيب تمامها يساوي $\frac{\sqrt{10}}{10}$ مع

المستقيم $\omega = 0 + \psi - \phi$ **فما هو ميل الخط المستقيم** ϕ **ثم أوجد معادلة الخط**

المستقيم l إذا كان يمر بالنقطة $(1, -2)$



❌ (06) في الشكل المقابل :

معادلة لاهي : $V = \psi V + \omega$

معادلة لافى : $\omega^3 - \omega^2 = 0$

أوجد قياس الزاوية المنفرجة ى ثم أوجد إحداثيات النقطتين ٢ ، ١

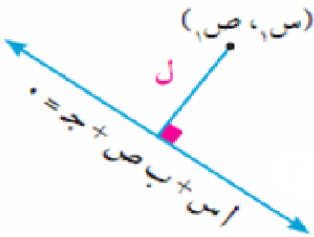


طول العمود المرسوم من نقطة إلى مستقيم معلوم .

إذا كانت النقطة $(\text{ص}, \text{ح})$ لا تنتمي للمستقيم الذي معادلته :

$$\text{ح} = \text{ج} + \text{ب} \text{ ص} + \text{م} \text{ ح}$$

فان طول العمود (د) المرسوم من هذه النقطة إلى المستقيم يتحدد من العلاقة :



$$\frac{|\text{ج} + \text{ب} \text{ ص} + \text{م} \text{ ح}|}{\sqrt{\text{ب}^2 + \text{م}^2}} = \text{د}$$

نتائج هامة :

١ طول العمود الساقط من النقطة الأصل إلى الخط المستقيم : $\text{ح} = \text{ج} + \text{ب} \text{ ص} + \text{م} \text{ ح}$

يساوي $\frac{|\text{ج}|}{\sqrt{\text{ب}^2 + \text{م}^2}}$ وذلك بالتعويض في القانون السابق عن $\text{ص} = \text{ح} = 0$

٢ إذا كان طول العمود المرسوم من نقطة ما $(\text{ص}, \text{ح})$ إلى الخط المستقيم :

$\text{ح} = \text{ج} + \text{ب} \text{ ص} + \text{م} \text{ ح}$ مساويا الصفر فان النقطة $(\text{ص}, \text{ح})$ تقع على الخط المستقيم

٣ إذا كانت $(\text{ص}, \text{ح})$ ، $(\text{ص}_2, \text{ح}_2)$ نقطتين في المستوى الذي يحوي المستقيم

$$\text{ح} = \text{ج} + \text{ب} \text{ ص} + \text{م} \text{ ح}$$

إذا كان المقداران

١ $\text{ح} = \text{ج} + \text{ب} \text{ ص} + \text{م} \text{ ح}$ ٢ $\text{ح}_2 = \text{ج} + \text{ب} \text{ ص}_2 + \text{م} \text{ ح}_2$ متحدين في الإشارة فان

النقطتين تكون على جانب واحد من المستقيم

إذا كان المقداران

١ $\text{ح} = \text{ج} + \text{ب} \text{ ص} + \text{م} \text{ ح}$ ٢ $\text{ح}_2 = \text{ج} + \text{ب} \text{ ص}_2 + \text{م} \text{ ح}_2$ مختلفين في الإشارة فان

النقطتين تكون على جانبيين مختلفين من المستقيم

مثال [١]



عين موضع النقط : و (٠، ٠) ، م (١ - ، ٢) ، ب (٠ ، ٢) ، ج (٢ ، ٠)
بالنسبة ل : ٢ - ٣ - ٤ = ٠

١ بالنسبة للنقطة و (٠ ، ٠) $\therefore$ المقدار : ٢ - (٠) ٣ - (٠) ٤ = ٤ - ٤ = ٠

$\therefore$ النقطة ب $\in$ للمستقيم ل

٢ بالنسبة للنقطة م (١ - ، ٢) $\therefore$ المقدار : ٢ - (١) ٣ - (١ -) ٤ = ٤ - ٤ = ٠

٣ بالنسبة للنقطة ب (٠ ، ٢) $\therefore$ المقدار : ٢ - (٠) ٣ - (٢) ٤ = ٤ - ٤ = ٠

٤ بالنسبة للنقطة ج (٢ ، ٠) $\therefore$ المقدار : ٢ - (٢) ٣ - (٠) ٤ = ٤ - ٤ = ٠

النقطتين و ، ج تقعان في جهة واحدة من المستقيم ل لأن لهما نفس الإشارة

النقطة م تقع على الجانب الآخر من المستقيم ل بالنسبة للنقطتين لأن م مختلفة

الإشارة بالنسبة للنقطتين و ، ج

مثال [٢]



أوجد طول العمود الساقط من النقطة (٣ ، ٢) على المستقيم :

$$٤ - ٣ - ١٠ = ٠$$

$$\therefore ٤ = ٢ ، ٣ - = ٠ ، ١٠ - = ٢ ، ٢ = ٣ ، ٣ = ٤$$

$$\therefore \frac{|١٠ - (٣)(٣ -) + (٢)٤|}{\sqrt{(٣)^2 + (٤)^2}} = \frac{|٢ + ٣ + ٨|}{\sqrt{٢٥}} = \frac{|١٣|}{\sqrt{٥}} = \frac{١٣}{\sqrt{٥}}$$

$$\frac{١}{٠} = \frac{١١}{٠} = \frac{|١١ -|}{\sqrt{٢٥}} = \frac{|١٠ - ٩ - ٨|}{\sqrt{٩ + ١٦}} = \frac{١}{٥}$$

أوجد طول العمود الساقط من النقطة $(\varepsilon, 0)$ إلى الخط المستقيم :

$$\vec{r} = (2, 0) + \lambda(3, \varepsilon)$$

$$\text{نفرض أن : } (2, 0) + \lambda(3, \varepsilon) = (u, v)$$

$$\therefore \frac{2-u}{3} = \frac{v}{\varepsilon}$$

$$\therefore \varepsilon = v, \quad 3 + 2 = u$$

$$\therefore 0 = 8 + u\varepsilon + v3$$

$$\therefore 8 - u\varepsilon = v3$$

$$\therefore \frac{|8 + u\varepsilon + v3|}{\sqrt{\varepsilon^2 + 3^2}} = 0$$

$$\therefore 0 = u\varepsilon, \quad \varepsilon = v, \quad 8 = u, \quad \varepsilon - = v, \quad 3 = u$$

$$8 = \frac{\varepsilon \cdot 0}{0} = \frac{|\varepsilon \cdot 0|}{\sqrt{0}} = \frac{|8 + 2 \cdot 0 + 1\varepsilon|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{|8 + (0)(\varepsilon -) + (\varepsilon)3|}{\sqrt{(\varepsilon)^2 + (3)^2}} = 0$$

مثال (٤)

إذا كان الخط المستقيم $\vec{r} = (1, 1) + \lambda(3, \varepsilon)$ يمس الدائرة التي مركزها

النقطة $(1, \varepsilon)$ فأوجد طول نصف قطرها .

$$\frac{3}{\varepsilon} = \frac{1-u}{1+v} \quad \therefore \text{معادلة المستقيم هي :}$$

$$\frac{3}{\varepsilon} = \text{ميل الخط المستقيم ويمر بالنقطة } (1, 1)$$

$$\therefore 0 = 7 + u\varepsilon - v3$$

$\therefore$ طول نصف قطر الدائرة = طول العمود المرسوم من مركزها إلى المستقيم المماس لها .

$$\therefore \text{نق} = \text{طول العمود} = \frac{|7 + u\varepsilon - v3|}{\sqrt{\varepsilon^2 + 3^2}} = \frac{|7 + 1 \times \varepsilon - \varepsilon \times 3|}{\sqrt{16 + 9}}$$

$$3 = \frac{10}{0} = \frac{|7 + \varepsilon - 1\varepsilon|}{\sqrt{25}}$$



مثال [٥] حاول أن تحل :

أوجد طول العمود الساقط من النقطة $(٢, ٥)$ إلى الخط المستقيم المار بالنقطتين

$$(٠, ٤), (٣, ٠)$$

تكون معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(٠, ٤), (٣, ٠)$

$$\frac{٣}{٤} = \frac{٣ + ٠}{٠ - ٤} = ٣ \quad \therefore \text{المعادلة} \quad \frac{٣}{٤} = \frac{٠ - ٥}{٤ - ٣} \quad \therefore ٣ = ١٢ - ٥٤ - ٣$$

$$\therefore ٣ = ١, ٠ = ١, ١٢ - = ٢, ٤ = ٠, ٣ = ١$$

$$\therefore \frac{|١٢ - (٢)٤ - (٥)٣|}{\sqrt{(٤)^2 + (٣)^2}} = \frac{|٢ + ١٥ + ١٥|}{\sqrt{١٦ + ٩}} = ١$$

$$١ = \frac{٠}{٠} = \frac{|٥ - |}{\sqrt{٢٥}} = \frac{|١٢ - ٨ - ١٥|}{\sqrt{١٦ + ٩}}$$

مثال [٦]

إذا كان طول العمود النازل من النقطة $(٢, ١)$ على المستقيم $٢٥ - ٥٤ + ٣ = ٢٥$ يساوي ٣ وحدات فأوجد قيمة ٤

$$\therefore ٢ = ١, ١ = ١, ٢٥ - = ٢, ٤ = ٠, ٣ = ١$$

$$\therefore \frac{|٢١ - ٠٢|}{\sqrt{٠^2 + ١٦}} = \frac{|٢٥ - (٢)٠ + (١)٤|}{\sqrt{(٠)^2 + (٤)^2}} = \frac{|٢ + ١٥ + ١٥|}{\sqrt{٠^2 + ١٦}}$$

$$\therefore ٩ = \frac{(٢١ - ٠٢)}{\sqrt{٠^2 + ١٦}} \quad \therefore ٩(٠ + ١٦) = (٢٠ - ٢٤) = ٩٩$$

$$\therefore ٠ = (٩٩ + ٠٠)(٣ - ٠) \quad \therefore ٠ = ٢٩٧ - ٠٨٤ + ٠٠$$

$$\therefore ٣ = ٠ \text{ أو } ٠ = \frac{٩٩ - ٠}{٠}$$



إذا كان طول العمود الساقط من النقطة $(0, 3)$ على المستقيم $8x + 10y - 19 = 0$ يساوي ٣ فما قيمة 3 ؟

$$\because 8 = \alpha, 10 = \beta, 19 = \gamma, 0 = \delta, 3 = \epsilon$$

$$\therefore \frac{|19 - (3)(10) + (0)(8)|}{\sqrt{(10)^2 + (8)^2}} = \frac{|7 + 30 + 0|}{\sqrt{164}} = 3$$

$$3 = \frac{|10 + 21|}{\sqrt{289}} = \frac{|10 - 3 + 40|}{\sqrt{225 + 64}} =$$

$$3 = \frac{|10 + 21|}{17} \therefore 51 = |10 + 21|$$

$$51 \pm = 10 + 21$$

$$51 - = 10 + 21$$

$$51 = 10 + 21$$

$$21 - 51 - = 10$$

$$\therefore 10 = 30$$

$$\frac{72-}{10} = 3$$

$$\therefore 2 = 3$$



اثبت أن المستقيمان : $l_1: 3x - 2y + 3 = 0$ ، $l_2: 4x - 6y + 0 = 0$ متوازيان. أوجد البعد بينهما

$$l_1: 3x - 2y + 3 = 0$$

$$l_2: 4x - 6y + 0 = 0$$

$$l_1: 3x - 2y + 3 = 0 \quad l_2: 4x - 6y + 0 = 0$$

$$l_1 \parallel l_2 \quad \therefore \frac{3}{4} = \frac{-2}{-6} = \frac{3}{0}$$

ولإيجاد البعد بين المستقيمين : نعين نقطة على أحدهما ثم نوجد طول العمود المرسوم منها على الآخر

وذلك بوضع l_1 مثلا في المعادلة $3x - 2y + 3 = 0$

$$l_1: 3x - 2y + 3 = 0 \quad l_2: 4x - 6y + 0 = 0$$

$$l_1 \ni (0, 0)$$

$\therefore$ البعد بين المستقيمين = طول العمود من $(0, 0)$ إلى l_1

$$l_1: 3x - 2y + 3 = 0 \quad l_2: 4x - 6y + 0 = 0$$

$$l_1: 3x - 2y + 3 = 0 \quad l_2: 4x - 6y + 0 = 0$$

$$\frac{|13|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|0+8+0|}{\sqrt{16+36}} = \frac{|0+(2)(4)+(0)6-|}{\sqrt{(4)^2+(6)^2}} = 0$$

$$\frac{13}{\sqrt{13}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

وحدات طول



أثبت أن المستقيمين : $ل_١ : \sqrt{2} = ١ - ٧$ و $ل_٢ : ٣ - ٥ = ٦ - ٠$ متوازيان وأوجد البعد بينهما .

لحل : $ل_١ : ٣ - ٥ = ٦ - ٠$ متوازيان وأوجد البعد بينهما .

$$\therefore \text{المستقيم } ل_١ : ١ = \frac{١}{٣}$$

$$\therefore \text{المستقيم } ل_٢ : ١ = \frac{١ - ٣}{٣ - ٥} = \frac{١}{٢}$$

$$\therefore ١ = \frac{١}{٢} \quad \therefore ل_١ \parallel ل_٢$$

لإيجاد البعد بينهما نوجد النقطة التي $ل_٢ \ni ق$ $\therefore ق \ni ل_١$

نوجد البعد بين النقطة $ق (٧ - ٠)$ والمستقيم $ل_١ : ٣ - ٥ = ٦ - ٠$

$$\therefore د = \frac{|٣ + ٥ + ٦|}{\sqrt{٣^2 + ٥^2}}$$

$$\therefore د : ٣ - ٥ = ٦ - ٠$$

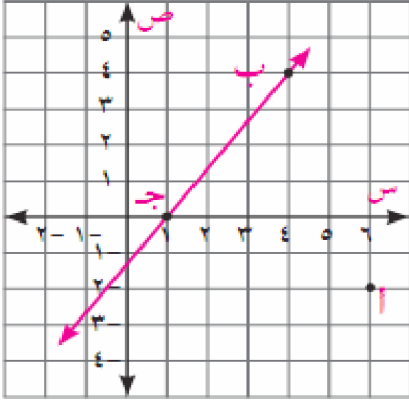
بالتعويض عن $١ = ٣$ ، $٣ - ٥ = ٦ - ٠$ ، $١ = ٣$ ، $٣ - ٥ = ٦ - ٠$

$$د = \frac{|٦ - ٣ + ٠|}{\sqrt{٩ + ١}} = \frac{|٦ - (٧ - ٠)(٣ - ٥) + (٠)١|}{\sqrt{(٣ - ٥)^2 + (١)^2}}$$

$$= \frac{|٢٠|}{\sqrt{١٠}} = ٢ \sqrt{١٠} \text{ وحدات طول .}$$

أوجد طول العمود المرسوم من النقطة : $P(6, -2)$ إلى المستقيم المار

بالنقطتين $B(4, 4)$ ، $A(1, 0)$ ، ثم أوجد مساحة سطح المثلث PAB



$$\therefore A(1, 0) , B(4, 4)$$

$$\frac{4}{3} = \frac{0 - 4}{1 - 4} = \frac{4 - 4}{4 - 1} = 1 \therefore$$

$$\therefore \text{معادلة المستقيم هي } 1 = \frac{4 - 4}{4 - 1}$$

$$\therefore \frac{4}{3} = \frac{0 - 4}{1 - 4}$$

$$\therefore 4 \cdot 3 = 4 - 12$$

$$\therefore 0 = 4 - 12 - 12$$

$$\therefore \frac{|4 + 4 + 12|}{\sqrt{1 + 16}} = 1$$

$$P = 3 , B = 4 , A = 1 , 0 = 4 , 4 = 1$$

$$\frac{|4 - 6 + 12|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|4 - (2-)(3) - (6)4|}{\sqrt{(3)^2 + (4)^2}} = 1$$

$$= \frac{1}{0} = \frac{16}{0} = \frac{|16|}{20} =$$

باعتبار $B(4, 4)$ قاعدة للمثلث PAB

$$\therefore B(4, 4) = \sqrt{(4-4)^2 + (4-4)^2}$$

$$0 = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = \sqrt{(0-4)^2 + (1-4)^2}$$

$$\therefore \Delta = \frac{1}{2} \times 9 \times \frac{1}{0} = \frac{13}{0} \times 0 \times \frac{1}{2} = \frac{13}{0} \times 0 \times \frac{1}{2}$$



مثال (١٢)

أوجد المعادلة المتجهة للخط المستقيم المار بالنقطة $(١, ٤)$ إذا كان طول العمود الساقط من النقطة $(١, ٠)$ إليه يساوي $\sqrt{١٠}$ من الوحدات الطولية .

نفرض أن : معادلة المستقيم $٣٣ + ٥٥ + ١١ = ٠$

∴ النقطة $(١, ٤) \in$ المستقيم ∴ النقطة $(٤, ١)$ تحقق معادلته .

$$٠ = ٣ + ٥ + ١ + ٤ = ١٣$$

∴ طول العمود النازل من $(١, ٠)$ على المستقيم : $٣ + ٥ + ١ + ٠ = ٩$

$$\sqrt{١٠} = \frac{|٣ + (١)٥ + (٠)١|}{\sqrt{٣^2 + ٥^2 + ١^2}} = \frac{|٣ + ٥ + ١|}{\sqrt{٣^2 + ٥^2 + ١^2}} = ١$$

$$\sqrt{١٠} = \frac{|٣ + ٥ + ١|}{\sqrt{٣^2 + ٥^2 + ١^2}} \quad \text{بالتعويض عنه} \quad ٣ + ٥ + ١ = ٩$$

$$\sqrt{١٠} = \frac{|٣ + ٥ + ١|}{\sqrt{٣^2 + ٥^2 + ١^2}} \quad \text{بترتيب الطرفية} \quad \sqrt{١٠} = \frac{|٣ + ٥ + ١|}{\sqrt{٣^2 + ٥^2 + ١^2}}$$

$$١٠ = \frac{٣^2 + ٥^2 + ١^2}{٣^2 + ٥^2 + ١^2} \quad \therefore ٣^2 + ٥^2 + ١^2 = ١٠ + ١٠ = ٢٠$$

$$٠ = ٣ + ٥ + ١ = ٩ \quad \therefore ٣ + ٥ + ١ = ٩$$

$$\frac{١}{٣} = \frac{١}{٥} \quad \therefore ٣ = ٥$$

$$\frac{١ - ٣}{٣} = \frac{١ - ٥}{٥} = \frac{١ - ٣}{٣} = ٣ \quad \text{ميل المستقيم المطلوب}$$

متجه اتجاه المستقيم المطلوب هو : $(١, ٣)$

∴ المعادلة المتجهة $(١, ٣) + (٤, ١) = \sqrt{١٠}$

١ ب ج مثلث رؤوسه م (٢، ٢)، ب (٦، ٥)، ج (٤، ١٠) : أوجد : معادلتى المنصفين الداخلى والخارجى للزاوية ب م ج

$$\textcircled{1} \text{ نوجد معادلة } \overleftrightarrow{ب م} : \frac{4}{3} = \frac{2-6}{2-0} = 4$$

$$\text{المعادلة هي : } \frac{4}{3} = \frac{2-4x}{2-3x}$$

$$\therefore 4 \cdot 3 - 3(2-4x) = 2-3x \quad \textcircled{1}$$

$$\textcircled{2} \text{ نوجد معادلة } \overleftrightarrow{ب ج} : \frac{3-4}{4} = \frac{2-2x}{2-10} = 4 \text{ ومنها :}$$

$$3 \cdot 4 + 4(2-2x) = 14-3x \quad \textcircled{2}$$

٣) لأي نقطة ن (٣، ٤) تقع على المنصف الداخلى أو الخارجى للزاوية $\angle ب م ج$

يكون طول العمود الساقط من ن إلى $\overleftrightarrow{ب م} =$ طول العمود الساقط من ن على $\overleftrightarrow{ب ج}$

لأن المثلثان سيكونان متطابقان

$$\therefore \frac{|14-4x+3 \cdot 3|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|2-4x-3 \cdot 3|}{\sqrt{9+16}}$$

$$\therefore |14-4x+3 \cdot 3| = |2-4x-3 \cdot 3|$$

$$\therefore (14-4x+3 \cdot 3) \pm = 2-4x-3 \cdot 3$$

$$\therefore 16-4x+9 = 12-4x-9 \text{ أو } 16-4x+9 = 12+4x-9$$

وهما معادلتى المنصفين الداخلى والخارجى للزاوية $\angle ب م ج$

إذا كانت : $P(2, 1)$ ، $B(4, 3)$ فبين أن P ، B في جهة واحدة من المستقيم $L: \sqrt{2}x - (2, 3) + (1, 1) = 0$ وإذا كانت J ، S موقعي العمودين النازلين على المستقيم L من P ، B على الترتيب فأثبت أن : الشكل PJB مستطيل وأوجد مساحته

$$\sqrt{2}x - (2, 3) + (1, 1) = 0$$

$$\therefore \text{المستقيم يمر بالنقطة } (2, 3) \quad \therefore 1 - = \frac{1 -}{1} = 0$$

$$\therefore 1 - = \frac{2 - 0}{3 + 0} \quad \therefore 3 - 0 = 2 - 0 \quad \therefore 0 = 1 + 0 + 0$$

$$\therefore P(2, 1) \quad \therefore 2 = 1 + 2 + 1 -$$

$$\therefore B(4, 3) \quad \therefore 2 = 1 + 3 - 4$$

$\therefore$ لان لهما نفس الإشارة $\therefore P$ ، B يقعان في جهة واحدة

نوجد طول العمود النازل من P على المستقيم والذي مسقطه النقطة J

$$\therefore P(2, 1) \quad \therefore 1 = 0 \quad \therefore 1 = 0 \quad \therefore 1 = 0 \quad \therefore 1 = 0$$

$$PJ = \frac{\sqrt{2} \cdot 2}{2} = \frac{|2|}{\sqrt{2}} = \frac{|1 + 2 + 1 -|}{1 + 1} = \frac{|1 + (1)(2) + (1)1 -|}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2}} = 0$$

نوجد طول العمود النازل من B على المستقيم والذي مسقطه النقطة S

$$\therefore B(4, 3) \quad \therefore 3 = 0 \quad \therefore 4 = 0 \quad \therefore 1 = 0 \quad \therefore 1 = 0$$

$$BS = \frac{\sqrt{2} \cdot 3}{2} = \frac{|3|}{\sqrt{2}} = \frac{|1 + 3 - 4|}{1 + 1} = \frac{|1 + (1)(3 -) + (1)4|}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2}} = 0$$

$$\therefore PJ = BS \quad \therefore PJ \perp BS \quad \therefore PJ = BS$$

$\therefore$ الشكل PJB مستطيل

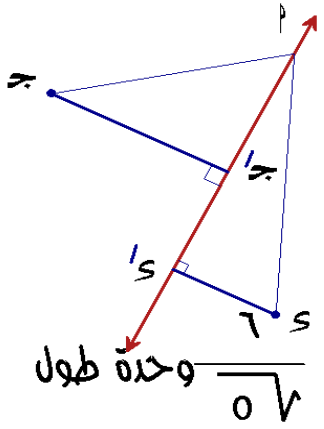
$$\therefore PJ = BS = \sqrt{2} \cdot 0 = 0 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot 0 + \sqrt{2} \cdot 0 = \sqrt{(3 + 2) + (4 - 1 -)} = 0$$

$$\therefore \text{مساحة المستطيل} = PJ \times BS = \sqrt{2} \cdot 0 = 2 \times 0 = 10 \text{ وحدة مربعة}$$

إذا كانت : $P(4, 3)$ ، $B(6, 4)$ ، $J(-2, 1)$ ، $S(0, 2)$ فأوجد طول $J'S$

حيث J' ، S' نقطتا تقاطع العمودين المرسومين من J ، S على الخط المستقيم BP

من النقطتين P ، B تكون معادلة الخط المستقيم BP



$$\therefore \frac{2}{1} = \frac{4 - 0}{3 - 0}$$

$$P \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{4 - 6}{3 - 4}$$

$$\therefore 2 - 0 = 6 - 3$$

$\therefore 2 - 0 = 6 - 3$ وهي معادلة المستقيم BP

$$\therefore J'S' = \frac{|2 - 0 - 6 + 3|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{|-1|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ وحدة طول}$$

$$\therefore S'S' = \frac{|2 - 0 \times 1 - 2 \times 2|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{|-2|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ وحدة طول}$$

$$\therefore P \Rightarrow J'S' = \sqrt{20} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{(2 - 4)^2 + (1 + 3)^2} = J'S'$$

$$\therefore P \Rightarrow J'S' = \sqrt{17} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{(0 - 4)^2 + (2 - 3)^2} = J'S'$$

$\therefore$ في $\triangle P J'S'$ القائم في J' ومعه فيثاغورث

$$\therefore (P J'S') = \frac{16}{0} = \frac{36}{0} - 20 = \frac{16}{0}$$

$\therefore$ في $\triangle P S'S'$ القائم في S' ومعه فيثاغورث

$$\therefore (P S'S') = \frac{81}{0} = \frac{4}{0} - 17 = \frac{81}{0}$$

$$\therefore J'S' = P J'S' - P S'S' = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}} - \frac{9}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ وحدة طول}$$

حاول الحل بطرق أخرى



تارين (٩) على طول العمود المرسوم من نقطة إلى مستقيم معلوم .

كـ [١] أكمل كلاهما يأتي بالإجابة الصحيحة :

- ١ طول العمود الساقط من النقطة (٥ ، ٣) على المستقيم $3x - 4y = 0$ يساوي
- ٢ طول العمود الساقط من النقطة (٢ ، ٦) على المستقيم $4x = 0$ يساوي
- ٣ طول العمود الساقط من النقطة (٢ ، ١) على المستقيم $3x - 2y = 0$ يساوي
- ٤ البعد بين المستقيمين : $3x - 4y = 0$ ، $4x + 2y = 0$ يساوي
- ٥ طول العمود المرسوم من النقطة (١ - ، ٦ -) إلى محور الصادات يساوي
- ٦ طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، ٠) إلى المستقيم : $3x + 4y = 12$ يساوي
- ٧ طول العمود المرسوم من النقطة (٢ ، ٥) إلى المستقيم : $3x - 4y = 0$ يساوي
- ٨ طول العمود المرسوم من النقطة (٠ ، ٥) إلى الخط المستقيم $3x + 4y = 0$ يساوي
- ٩ طول العمود المرسوم من نقطة الأصل إلى المستقيم : $3x - 4y = 0$ يساوي
- ١٠ طول العمود النازل من النقطة (٢ ، ٥) على محور السينات يساوي
- ١١ البعد العمودي بين المستقيمين $4x = 0$ ، $3x - 4y = 0$ يساوي
- ١٢ طول العمود المرسوم من نقطة الأصل إلى المستقيم $3x + 4y + 10 = 0$ يساوي

كـ [٢] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

- ١ طول العمود المرسوم من النقطة (٣ - ، ٥) إلى محور الصادات يساوي
 ٢ (١) ٣ (٢) ٥ (٣) ٨ (٤)
- ٢ البعد بين المستقيمين : $3x - 4y = 0$ ، $4x + 2y = 0$ يساوي
 ١ (١) ٢ (٢) ٣ (٣) ٥ (٤)
- ٣ طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، ١) إلى المستقيم : $3x + 4y = 0$ يساوي
 ١ (١) ٢ (٢) ٣ (٣) ٤ (٤)
- ٣ إذا كان طول العمود المرسوم من النقطة (٣ ، ١) إلى المستقيم : $3x - 4y = 0$ يساوي
 ١ (١) ٢ (٢) ٣ (٣) ٥ (٤)



كـ [٣] أوجد طول العمود المرسوم من النقطة م إلى المستقيم ل في التمارين من ١ إلى

١ م (٠، ٠) ، ل : $\overleftrightarrow{AB}$ ، $(٠، ٠) + (٥، ٠) = (٥، ٠)$ ، $(٥، ٠) + (٠، ٣) = (٥، ٣)$

٢ م (٤، ٢) ، ل : $٠ = ٤٢ - ٥٥٠ + ٣١٢$ ، $٠ = ٤٢ - ٥٥٠ + ٣١٢$

٣ م (٢، ٥) ، ل : $٠ = ١٩ - ٥١٥ + ٣٨$ ، $٠ = ١٩ - ٥١٥ + ٣٨$

٤ م (١ - ، ٢ -) ، ل : $\overleftrightarrow{AB}$ ، $(١ - ، ٢ -) + (٧ - ، ٠) = (٨ - ، ٢ -)$ ، $(٨ - ، ٢ -) + (٢، ١) = (١٠ - ، ٣ -)$

كـ [٤] أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٠ - ، ٢ -) إلى المستقيم :

$\overleftrightarrow{AB}$ ، $(٠ - ، ٢ -) + (٠، ١٢) = (٠ - ، ١٠)$ ، $(٠ - ، ١٠) + (٥، ١٢) = (٥ - ، ٢٢)$

كـ [٥] اكتب طول العمود المرسوم من النقطة م إلى المستقيم ل في الحالات التالية :

١ م (٠، ٠) ، ل : $٠ = ٣ + ٥٦ + ٣١$ ، $٠ = ٣ + ٥٦ + ٣١$

٢ م (١، ٥) ، ل : $٠ = ٥٥$ ، $(١، ٥) + (١، ٣) = (٢، ٨)$ ، $(٢، ٨) + (٣، ٥) = (٥، ١٣)$

كـ [٦] أوجد طول العمود الساقط من النقطة (٢، ٣) على المستقيم $٠ = ٨ + ٥٣ - ٣٤$

كـ [٧] أوجد طول العمود الساقط من النقطة (٥، ١ -) على المستقيم

$٣ = ٢ + ٥٠$ ، $٥ = ٧ - ١٢$ ، $٣ = ٢ + ٥٠$ ، $٥ = ٧ - ١٢$

كـ [٨] أوجد طول العمود الساقط من النقطة (١ - ، ٢ -) على المستقيم

ل : $\overleftrightarrow{AB}$ ، $(١ - ، ٢ -) + (٠، ٢) = (١ - ، ٤ -)$ ، $(١ - ، ٤ -) + (٣، ٤) = (٤ - ، ٨ -)$

كـ [٩] أوجد طول العمود الساقط من النقطة (١ - ، ٤) على المستقيم المار

بالنقطتين (٠، ٥) ، (٣، ٠)

كـ [١٠] أوجد طول العمود الساقط من النقطة م (٠، ٢) على المستقيم

$\overleftrightarrow{AB}$ ، حيث ب (٩، ٢) ، ج (٢ - ، ١)

كـ [١١] أوجد طول العمود الساقط من النقطة م منتصف $\overleftrightarrow{AB}$ حيث ب (٤، ١)

ج (٦، ٣ -) على المستقيم : $٠ = ٥ - ٥٤ + ٣٣$ ، $٠ = ٥ - ٥٤ + ٣٣$



كـ [١٢] أوجد طول العمود الساقط من النقطة ج التي تقسم $\overline{AB}$ من الداخل بنسبة

٢ : ٣ حيث $A(1, 2)$ ، $B(3, -4)$ على المستقيم : $0 = 50 - 12x - y$

كـ [١٣] أوجد طول العمود الساقط من النقطة ج حيث $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ ، ج $\notin \overline{AB}$

، $A(0, 2)$ ، $B(1, -4)$ على المستقيم : $0 = 3 - 4x + 5y$

كـ [١٤] أوجد محيط الدائرة التي مركزها $C(3, -1)$ وتمس المستقيم الذي

معادلته : $0 = 7 + 4x - 3y$

كـ [١٥] أوجد مساحة الدائرة التي مركزها $A(2, -1)$ وتمس المستقيم : $0 = 41 - 12x - 5y$

كـ [١٦] أوجد طول نصف قطر الدائرة التي مركزها النقطة $A(-2, 0)$ ، تمس

المستقيم : $0 = 1 + 4x + 3y$

كـ [١٧] أثبت أن النقطتين $A(1, 1)$ ، $B(-2, 3)$ تقعان على جانبيين مختلفين من

الخط المستقيم $0 = 3 + 4x - 5y$ وعلى بعدين متساويين منه .

كـ [١٨] هل النقطتان $A(1, -4)$ ، $B(-2, 3)$ تقعان على نفس الجانب من الخط

المستقيم : $0 = 3 + 4x - 5y$ أم على جانبيين مختلفين ؟

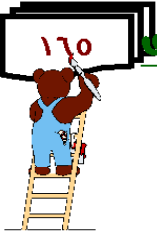
كـ [١٩] أثبت أن النقطة $A(11, 8)$ هي مركز الدائرة الداخلة للمثلث الذي معادلات

المستقيمات الحاملة لأضلاعه هي :

$$20 = 4x, \quad 0 = 3 - 4x + 5y, \quad 0 = 0 + 12x + 50y$$

كـ [٢٠] دائرة مركزها نقطة الأصل فيها وتران معادلتيهما : $0 = 4x - 3y + 10$ ، $0 = 50 - 12x - y$

أثبت أن : الوترين متساويان في الطول .



كـ [٢١] اثبت أن : المستقيمان l_1 : $3x + 4y - 7 = 0$ ، l_2 : $3x + 4y + 5 = 0$ متوازيان ثم أوجد البعد بينهما

كـ [٢٢] اثبت أن : المستقيمان l_1 : $3x + 4y - 1 = 0$ ، l_2 : $3x + 4y + 2 = 0$ متوازيان ثم أوجد البعد بينهما

كـ [٢٣] طريقان متجاوران مسار الطريق الأول تحته المعادلة : $3x + 4y - 7 = 0$ ومسار الطريق الثاني تحته المعادلة : $3x + 4y - 11 = 0$ أثبت أن : الطريقين متوازيان ، ثم أوجد أقصر بعد بينهما .

كـ [٢٤] أوجد نقطة على محور السينات بحيث يكون بعدها عن المستقيم :

$$3x + 4y + 12 = 0 \text{ مساوي } 9 + 4y + 12 = 0$$

كـ [٢٥] إذا كان طول العمود الساقط من النقطة (١، ٢) على الخط المستقيم :

$$3x + 4y + 12 = 0 \text{ يساوي } \sqrt{13} \text{ أوجد قيمة } x$$

كـ [٢٦] إذا كان طول العمود النازل من النقطة (٢، ١) على المستقيم :

$$3x + 4y = 0 \text{ يساوي } 2 \text{ أوجد قيمة } x$$

كـ [٢٧] إذا كان طول العمود الساقط من النقطة (٢، ١) على المستقيم :

$$3x + 4y + 19 = 0 \text{ يساوي } \sqrt{13} \text{ أوجد قيمة } y$$

كـ [٢٨] إذا كانت النقطتان (١، ٢) ، (٧، -١) تقعان على بعدين متساويين

من المستقيم $3x + 4y + 7 = 0$ فما قيمة x ؟

كـ [٢٩] إذا كان المستقيم الذي يمر بالنقطة (١، ١) وميله $\frac{0}{12}$ يحس الدائرة التي مركزها (٤، -١) أوجد طول نصف قطر الدائرة .



كـ [٣٥] أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(2, -4)$ وطول العمود الساقط عليه من نقطة الأصل يساوي ٢ وحدة طول .

كـ [٣٦] مستقيم طول العمود النازل من النقطة $(2, 0)$ عليه يساوي ٣ وحدات

طول وميله $\frac{4}{3}$ أوجد معادلة هذا المستقيم

كـ [٣٩] أوجد معادلة المستقيم الذي ميله $\frac{0-}{12}$ وطول العمود الساقط عليه من

النقطة $(2, -1)$ يساوي ٢ وحدة طول

كـ [٤٠] أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(2, -4)$ وطول العمود الساقط عليه من نقطة الأصل ٢ وحدة طول وبين أن هناك مستقيمين يحققن هذه الشروط

كـ [٤١] أوجد بعد النقطة $(1, -2)$ عن مستقيم المار بالنقطة $(2, -3)$ والذي يصنع زوايا متساوية مع الاتجاهين الموجب لمحور السينات والسالب لمحور الصادات

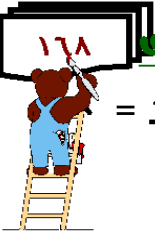
كـ [٤٢] اثبت أن المستقيمين $3x - 4y - 9 = 0$ ، $4x + y - 1 = 0$ ، متقاطعين على التعامد ثم أوجد نقطة تقاطعهما وكذلك معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطعهما والنقطة $(2, 1)$.

كـ [٤٣] اثبت أن النقطة $(4, 6)$ تقع على أحد منصفى الزاوية بين المستقيمين :

$$3x - 4y - 9 = 0 , 4x + y - 1 = 0$$

كـ [٤٤] اثبت أن النقطة $(1, 4)$ تقع على أحد منصفى الزاوية بين مستقيمين

$$3x - 4y - 9 = 0 , 4x + y - 1 = 0$$



(Σ0) إذا كان المستقيمان $\ell_1 : x + y = 1$, $\ell_2 : x + 2y = 3$

متوازيان والبعـد بينهما ^٣ وحدات طول أوجد قيمة كلا من ^٢ ، ^١ جـ

﴿٤٦﴾ $\vdash \text{جاء متوازي أضلاع} ، \text{ فإذا كانت : } \vdash (2, 3 -) , \cup (3, 2) .$

ج (٧ ، ٠) أوجد إحداثيي الرأس ، ثم أوجد مساحة متوازي الأضلاع .

ΣU) ب، ج، متوازي أضلاع فيهِ م (١، ٢)، ب (٣، ٥)، ع (٧، ٤) أوجد إحداثي

النقطة ٢ مساحة سطح متوازي الأضلاع

~~(Σn)~~ پ ب ج د متوازی اضلاع فیه پ (۰، ۰)، ب (۰، ۴)، ج (۱، ۳)، د (۴، ۴)

نقطة تقاطع قطريه أوجد

❶ إحدائيات النقطة م ، م

۳. مید و ج. ب.

• طول العمود الساقط من P على المستقيم l $\longleftrightarrow$ h

٦ مساحة سطح متوازي الأضلاع P ج د

﴿٤٩﴾ م ب ج هـ شكل باعى فيه م (٣، ٢) ، ب (٢، ٦) ، ج (٢-، ٢-)

٤، (٢-١) اثبت أن : الشكل $\triangle ABC$ شبه منحرف وأوجد مساحة سطحه .

~~[0.]~~ پ ج ۛ شكل رباى فيه پ (٤ ، ١ -) ، ب (٣ - ، ٢) ، ج (١ ، ٣ -) ، د (-)

١٠٠) اثبت أن $\mathbb{P}$ متوازي أضلاع ثم أوجد

● ۱ طول و ج

② معادلة u ج.

٣ طول العمود الساقط منه m على n جـ

④ مساحة سطح متوازي الأضلاع $p \times h$ ج ٤



كـ [٥١] اثبت أن : النقط $م(٣, ٢)$ ، $ب(٢, ٦)$ ، $ج(٢, -٢)$ ، $د(١, ٢)$

هي رؤوس شبه منحرف وأوجد مساحته

كـ [٥٢] $م(٣, ٢)$ ، $ب(٢, ٦)$ شبه منحرف فيه : $م \parallel د$ ، فإذا كانت : $م(١, ٢)$

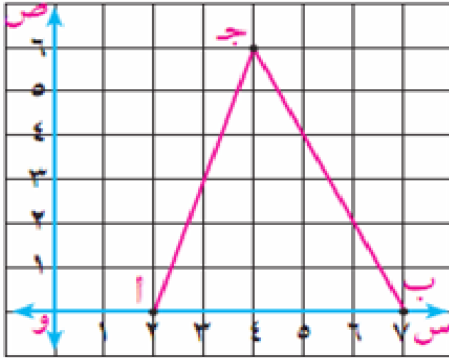
، $ب(٣, ٥)$ ، $ج(١, ٦)$ ، $د(٤, ٥)$.

أوجد قيمة $ص$ ، ثم أوجد مساحة شبه المنحرف $م ب ج د$

كـ [٥٣] الشكل المقابل :

يبين منزل كريم $م(٢, ٠)$ و المدرسة $ب(٧, ٠)$ والمسجد $ج(٤, ٦)$

أوجد



① معادلة المستقيم $م ب$

② طول $م ب$

③ أقصر بعد من المسجد $ج$ إلى الطريق الواصل بين المنزل والمدرسة

④ قياس الزاوية الحادة المحصورة بين المستقيمين $م ج$ ، $ص = ٠$

⑤ مـ $(\Delta م ب ج)$



تكوين معادلة الخط المستقيم بدلالة نقطة تقاطع مستقيمين

$$\therefore \quad 0 = (ج_1 + ص_1 ب + م_1) ك + ج_1 + ص_1 ب + م_1$$

مثال (١)

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة $P(-2, 4)$ وبنقطة تقاطع المستقيمين :

$$0 = 5 - 2ص + 3م \quad , \quad 0 = 4 + 3ص - 2م$$

$$\therefore \quad 0 = (ج_1 + ص_1 ب + م_1) ك + ج_1 + ص_1 ب + م_1$$

$$\therefore \quad 0 = (4 + 3ص - 2م) ك + 5 - 2ص + 3م$$

بالتعويض بالنقطة $(-2, 4)$

$$0 = [4 + (4)3 - (-2)2] ك + 5 - (-2) + 3(-2)$$

$$\therefore \quad 0 = 12 - 1 ك \quad \therefore \quad \frac{1}{12} = ك$$

$$\therefore \quad 0 = (4 + 3ص - 2م) \frac{1}{12} + 5 - 2ص + 3م$$

$$0 = 4 + 3ص - 2م + 60 - 24ص + 36م$$

$$\therefore \quad 0 = 64 - 21ص + 34م \quad \text{بالقسمة } 7$$

$$\therefore \quad 0 = 8 - 3ص + 5م$$

حاول حل التمرين السابق بأسلوب آخر

أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين :

ويوازي محور الصادات $2 = 4x + 3y$ ، $0 = 2 + 4x + 3y$

الحل $\therefore 2 = 4x_1 + 3y_1 + 2$ ، $0 = 4x_2 + 3y_2 + 2$

$\therefore 0 = 4x + 3y + 2$ ، $0 = 4x + 3y + 2$

$\therefore 0 = 2 - 4x + 3y + 2$ ، $0 = 2 - 4x + 3y + 2$

$\therefore 0 = 2 - 4x + 3y + 2$ ، $\therefore 0 = 2 - 4x + 3y + 2$

$\therefore 0 = 2 - 4x + 3y + 2$ ، $\therefore 0 = 2 - 4x + 3y + 2$

$\therefore 0 = 2 - 4x + 3y + 2$ ، $\therefore 0 = 2 - 4x + 3y + 2$

$\therefore 0 = 2 - 4x + 3y + 2$ ، $\therefore 0 = 2 - 4x + 3y + 2$

$\therefore 0 = 2 - 4x + 3y + 2$ ، $\therefore 0 = 2 - 4x + 3y + 2$

مثال (٣)

أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين

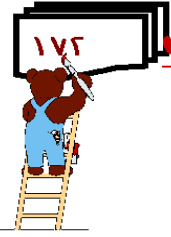
ويوازي المستقيم $11 = 4x + 3y$ ، $0 = 4x + 3y$

الحل توجد أول نقطة تقاطع المستقيمين

$11 = 4x + 3y$ ، $1 = 4x - 3y$ ، $11 = 4x + 3y$

$\therefore 11 = 4x + 3y$ ، $\therefore 11 = 4x + 3y$

$\therefore 11 = 4x + 3y$ ، $\therefore 11 = 4x + 3y$



$$\therefore \text{ل} // \text{ل} \quad \therefore$$

$$\therefore \text{ل} = \text{ل} \quad \therefore$$

$$\frac{2}{3} = \text{ل} \quad \text{تعيه معادلته مع العلاقة}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{3 - 4}{4 - 5} \quad \therefore$$

$$\therefore 8 - 52 = 9 - 43 \quad \therefore$$

$$\therefore 0 = 9 + 43 - 8 - 52 \quad \therefore$$

$$\therefore 0 = 1 + 43 - 52 \quad \therefore$$

حاول حل التمرين السابق بأسلوب آخر

مثال [٢]

أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين :

$$0 = 5 - 3 \quad , \quad 1 = 4 + 2 + 5 \quad \text{ويكون عموديا على المستقيم الثاني .}$$

$$\therefore \text{الحل} \quad 0 = (ج + 4ب + 5ا) + ج + 4ب + 5ا \quad \therefore$$

$$\therefore 0 = (1 - 4 + 5) + 0 - 4 - 5 \quad \therefore$$

$$\therefore 0 = (ج - 0 -) + 4(1 - ج) + 5(ج + 0) \quad \therefore$$

$$\therefore \text{المستقيم المجهول عمودي على المستقيم الثاني} \quad \therefore \frac{1 - 2}{2} = \text{ل} \quad \therefore$$

$$\therefore \text{ميل العمود على ل هو 2} \quad \therefore \text{ميل المطلوب} = \frac{(ج + 0) - 2}{1 - ج} \quad \therefore$$

$$\therefore \frac{3 - 0}{0} = ج \quad \therefore 3 - 0 = ج \quad \therefore 3 - 0 = ج - 0 - = 2 - ج \quad \therefore$$

$$\therefore 0 = (1 - 4 + 5) \frac{3 - 0}{0} + 0 - 4 - 5 \quad \therefore$$

$$\therefore 0 = 3 + 46 - 53 - 20 - 40 - 520 \quad \therefore$$

$$\therefore 0 = 2 - 4 - 52 \quad \therefore \quad \therefore 0 = 22 - 41 - 522 \quad \therefore$$



أثبت أن المستقيمين : $2x - 3y = 0$ ، $x + 3y = 4$ ، $x - 2y = 3$ متقاطعان على التعامد ، ثم أوجد : نقطة تقاطعهما .

$$\frac{2}{3} = \frac{2-}{3-} = \frac{2}{3} \quad , \quad \frac{2-}{3} = \frac{2-}{3-} = \frac{2}{3} \quad \therefore$$

$$1 - = \frac{2-}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \quad \therefore$$

$$1 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \quad \therefore$$

$\therefore$ المستقيمان متقاطعان على التعامد .

٢) لإيجاد نقطة تقاطع المستقيمين نوجد المعادلة الكارتيزية للمعادلة الثانية .

$$(3, 2-) + (2, 1) = (4, 3)$$

$$\frac{2-}{3} = \frac{2-4}{3} = \frac{1-3}{2-} \quad \therefore$$

$$2- + 4 = 3 - 3 \quad \therefore$$

$$0 = 7 - 4 + 3 \quad \therefore$$

$$\therefore \text{بحل المعادلتين } 2- + 4 = 3 - 3 , 0 = 7 - 4 + 3$$

$$2 = 4 , 1 = 3 \quad \therefore$$

$\therefore$ نقطة تقاطع المستقيمين المتعامدان $(2, 1)$

أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين $ل: (٣, ٢) + (٢, ٥) =$

$ل: (٥, ٣) = (٤, ١١) + (١, ٣) + (١, ٢)$ والنقطة

تبعد عنه بمقدار $٢\sqrt{٥}$ وحدة طول

$$ل: (٣, ٢) + (٢, ٥) = \text{.....} \therefore \frac{٢ - ٥}{٣} = \frac{٥ - ٣}{٢}$$

$$ل: ٣ - ٥ = ١١ - ٣ \text{} \textcircled{١}$$

$$ل: (٤, ١١) = (١, ٣) + (١, ٢) + (٥, ٣) \therefore \frac{٤ - ٥}{١} = \frac{١١ - ٣}{٣}$$

$$ل: ٤ - ٥ = ١ + ٣ - ٣ \text{} \textcircled{٢}$$

بحل المعادلتين معا: $\therefore ٢ = ٥, ٥ = ٣$ نقطة التقاطع $(٢, ٥)$

$$\therefore \text{المعادلة المطلوبة هي: } ٣ = \frac{٢ - ٥}{٥ - ٣}$$

$$\therefore ٣(٥ - ٣) = ٢ - ٥ \therefore ٣(٥ - ٣) = ٢ - ٥$$

$\therefore$ والنقطة $(١, ٢)$ تبعد عنه بمقدار $٢\sqrt{٥}$ وحدة طول

$$\therefore \frac{|٣(٥ - ٣) - (٢ - ٥)|}{\sqrt{١ + ٣}} = \frac{|٣(٥ - ٣) - (٢ - ٥)|}{\sqrt{١ + ٣}} = ٢\sqrt{٥}$$

$$\text{بتبسيط الطرفين} \quad ٢\sqrt{٥} = \frac{|٣٧ - ١|}{١ + ٣} =$$

$$\therefore ٥٠ + ٣٥٠ = ٣٤٩ + ٣١٤ - ١$$

$$\therefore ٧ - ٣ = ٣ \therefore ٧ = ٣(٧ + ٣) \therefore ٧ = ٤٩ + ٣١٤ + ٣$$

$\therefore$ المعادلة المطلوبة: $٧ = ٣٥ + ٢ + ٥ - ٣٧$

$$\therefore ٧ = ٣٧ - ٥ + ٣٧$$

أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : $2x - 3y + 10 = 0$

، $4x = 2$ ويقطع من محور السينات جزءا طوله $\frac{3}{2}$ ما يقطعه من محور الصادات .

$$\therefore 2x - 3y + 10 = 0 \quad \text{و} \quad 4x = 2 \quad \text{و} \quad 2x - 3y + 10 = 0$$

$$\therefore 2x - 3y + 10 = 0 \quad \text{و} \quad 4x = 2 \quad \text{و} \quad 2x - 3y + 10 = 0$$

$$\therefore 2x - 3y + 10 = 0 \quad \text{و} \quad 4x = 2 \quad \text{و} \quad 2x - 3y + 10 = 0$$

$$\therefore 2x - 3y + 10 = 0 \quad \text{و} \quad 4x = 2 \quad \text{و} \quad 2x - 3y + 10 = 0$$

$$\therefore 2x - 3y + 10 = 0 \quad \text{و} \quad 4x = 2 \quad \text{و} \quad 2x - 3y + 10 = 0$$

النسبة بين الجزأين المقطوعين $= \frac{3}{2}$

$$\therefore \frac{3}{2} = \frac{3 - 1}{2 - 1} \quad \therefore 12 - 6 = 12 - 2 \quad \therefore \frac{8}{9} = 1$$

معادلة المستقيم المطلوب هي :

$$\therefore 2x - 3y + 10 = 0 \quad \text{و} \quad 4x = 2 \quad \text{و} \quad 2x - 3y + 10 = 0$$

$$\therefore 2x - 3y + 10 = 0 \quad \text{و} \quad 4x = 2 \quad \text{و} \quad 2x - 3y + 10 = 0$$

$$\therefore 2x - 3y + 10 = 0 \quad \text{و} \quad 4x = 2 \quad \text{و} \quad 2x - 3y + 10 = 0$$

$$\therefore 2x - 3y + 10 = 0 \quad \text{و} \quad 4x = 2 \quad \text{و} \quad 2x - 3y + 10 = 0$$



تدريبات على

١ اكمل كلاهما يأتي بالإجابة الصحيحة :

- ١ معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : $u = 3$ ، $v = 0$ ، ونقطة الأصل هي
- ٢ معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : $u = 1$ ، $v = u + 4$ ، وميله ٣ هي
- ٣ معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : $u + v = 2$ ، $u = v$ ، ويوازي محور السينات هي
- ٤ معادلة المستقيم الذي يمر (٣ ، ٠) ونقطة تقاطع المستقيمين $u = 3$ ، $v = 1$ هي
- ٥ معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين :
 $u = v$ ، $v = 2$ ، يوازي المستقيم $\rightarrow$ $u = (3, 1)$ هي
- ٦ معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين :
 $u - v = 1$ ، $u + v = 3$ ، ويوازي المستقيم $v = 0$ هي
- ٧ معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : $\rightarrow$ $u = (1, 6)$ ، $\rightarrow$ $u = (0, 8)$ ،
والذي يقطع مع محور الصادات الموجب جزأ قدره ٥ وحدات هي
- ٨ معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : $u - v = 0$ ، $u = (7, -2)$ ،
ويمر بالنقطة (٠ ، ١) هي
- ٩ معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : $u = 7$ ، $v = 4 + 1$ ، ويوازي محور الصادات

٢ أوجد المعادلة المتجهة للمستقيم المار بنقطة الأصل ونقطة تقاطع

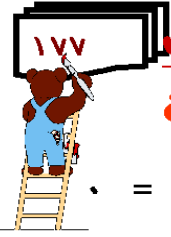
المستقيمين : $u = 3$ ، $v = 4$.

٣ أوجد المعادلة المتجهة للمستقيم المار بالنقطة (٣ ، ١) ونقطة تقاطع

المستقيمين : $3u + 2v = 7$.

٤ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين :

 $u + 2v = 3$ ، $2u + v = 3$ ويمر بالنقطة (١ ، -٢)



✍ [٥] أوجد معادلة الخط المستقيم امار بالنقطة $P(2, -1)$ وبنقطة

تقاطع المستقيمين : $7x + 4y + 3 = 0$ ، $5x - 4y - 3 = 0$

✍ [٦] أوجد معادلة المستقيم امار بنقطة تقاطع المستقيمين :

$4x + 5y = 0$ ، $4x^3 + 1 - 3y = 0$ ونقطة الأصل

✍ [٧] أوجد معادلة المستقيم امار بنقطة تقاطع المستقيمين : $2x + 5y + 3 = 0$ ، $3x + 4y = 0$

، $3x + 4y = 0$ ويصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها 130°

✍ [٨] أوجد معادلة المستقيم امار بنقطة تقاطع المستقيمين : $2x + 5y + 3 = 0$ ، $3x + 4y = 0$

، $3x + 4y = 0$ والذي يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور الصادات زاوية قياسها 130°

✍ [٩] أوجد معادلة المستقيم امار بنقطة تقاطع المستقيمين :

$\vec{r} = (2, 3) - (3, 2)$ ، $3x - 4y = 13$ ويوازي محور الصادات .

✍ [١٠] أوجد معادلة المستقيم امار بنقطة تقاطع المستقيمين : $2x + 5y = 0$ ، $3x + 4y = 0$

، $5x + 4y = 0$ وعمودي على المستقيم $3x - 4y = 8$

✍ [١١] أوجد معادلة المستقيم امار بنقطة تقاطع المستقيمين : $2x + 5y + 3 = 0$ ، $3x + 4y = 0$

، $3x + 4y = 0$ والذي يكون عموديا على المستقيم الأول .

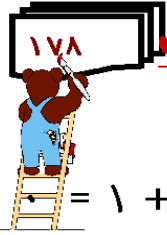
✍ [١٢] أوجد معادلة المستقيم امار بنقطة تقاطع المستقيمين :

$\vec{r} = (2, -3) + (1, 0)$ ، $\vec{r} = (3, 2) + (1, -3)$ ، $\vec{r} = (1, -3) + (3, 2)$ ، $\vec{r} = (1, -3) + (3, 2)$

والنقطة $(3, 3)$ تبعد عنه بمقدار $\frac{1}{\sqrt{2}}$ وحدة طول

✍ [١٣] أوجد معادلة المستقيم امار بنقطة تقاطع المستقيمين :

$3x + 4y = 0$ ، $3x + 4y = 0$ ويمر بالنقطة $(0, 3)$



✍ [١٤] أوجد معادلة المستقيم امار بنقطة تقاطع المستقيمين :

$$0 = 1 + 4x - 3y \quad \text{ويكون موازيا للمستقيم} \quad 0 = 4 - 4x - 3y, \quad 0 = 0 + 4x - 3y$$

✍ [١٥] أثبت أن المستقيمين: $0 = 0 + 4x + 3y$ ، $0 = 1x + 4x - 3y$ متعامدان

ثم أوجد نقطة تقاطعهما ومعادلة الخط المستقيم امار بنقطة تقاطعهما والنقطة (١، ٢)

✍ [١٦] أثبت أن المستقيمين: $0 = 1x + 4x - 3y$ ، $0 = 4 - 4x - 3y$ متقاطعان على التعامد ، ثم أوجد : نقطة تقاطعهما .

ثم أوجد المعادلة المتجهة للمستقيم الذي يمر بنقطة التقاطع والنقطة (١، ٢)

✍ [١٧] أوجد معادلة المستقيم امار بنقطة تقاطع المستقيمين :

$$0 = 4 + 3x, \quad 8 = 4x + 3y \quad \text{ويكون عموديا على المستقيم الأول}$$

✍ [١٨] أوجد معادلة المستقيم امار بنقطة تقاطع المستقيمين : $0 = 4 - 3y$

$$, \quad 1 = 4x + 3y \quad \text{ويكون عموديا على المستقيم الثاني}$$

✍ [١٩] اثبت أن المستقيمين: $0 = 0 + 4x + 3y$ ، $0 = 1x + 4x - 3y$ متعامدان

ثم أوجد نقطة تقاطعهما ومعادلة المستقيم امار بنقطة التقاطع و النقطة (١، ٢)

✍ [٢٠] أوجد معادلة المستقيم امار بنقطة تقاطع المستقيمين : $1 = 4x + 3y$

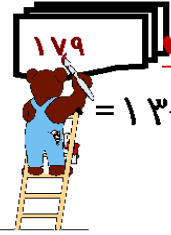
$$, \quad 0 = 3 + 4x - 3y \quad \text{ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات جزء طوله ٣ وحدات}$$

✍ [٢١] أوجد معادلة المستقيم امار بنقطة تقاطع المستقيمين :

$$, \quad 2 = 4x + 3y \quad \text{ويوازي محور الصادات} \quad \frac{4x - 2}{3} = \frac{2 - 3y}{2}$$

✍ [٢٢] أوجد معادلة المستقيم امار بنقطة تقاطع المستقيمين : $0 = 4 - 3y$

$$, \quad 1 = 4x + 3y \quad \text{ويقطع من الجزءين الموجبين لمحوري الاحداثيات طولين متساويين}$$



✍ [٢٣] أوجد معادلة المستقيم امار بنقطة تقاطع المستقيمين : $٣٣ - ٥٥ - ١٣ = ٠$

$$٠ = ٧ + ٣٣ - ٥٥ : \text{ويوازي المستقيم} \quad ٠ = ٩ + ٥٥ - ٣٤$$

✍ [٢٤] أوجد معادلة المستقيم امار بنقطة تقاطع المستقيمين : $٤ = ٥ + ٣٣$

$$٢ = ٥ - ٣٣ , \text{ طول العمود النازل عليه من نقطة الأصل يساوي وحدة طولية .}$$

✍ [٢٥] أوجد معادلة المستقيم امار بنقطة تقاطع المستقيمين : $٠ = ١١ - ٥٥ - ٣٣$

$$١ + ٣ - ٥٥ , \text{ والنقطة } (١, ٢) \text{ تبعد عنه بمقدار } \sqrt{٥} \text{ وحدة طول}$$

✍ [٢٦] أوجد معادلة المستقيم امار بنقطة الأصل ويصنع زاوية مع محور السينات

قياسها ضعف قياس الزاوية التي يصنعها المستقيم : $٥ = ٢, ٠, ٣٣$ مع محور السينات

✍ [٢٧] إذا كانت : $١, ١) , ٤, ٧) , ٤, ٢) , ٧, ٢)$ ثلاثة رؤوس في الشكل

الرباعي الدائري $١, ١) , ٤, ٧) , ٤, ٢) , ٧, ٢)$ الذي فيه : ٩٠° أوجد

① معادلة المستقيم $١, ١) , ٤, ٧) , ٤, ٢) , ٧, ٢)$ ② معادلة المستقيم $١, ١) , ٤, ٧) , ٤, ٢) , ٧, ٢)$ ③ إحداثي نقطة ج

✍ [٢٨] إذا كانت : $١, ١) , ٤, ٧) , ٤, ٢) , ٧, ٢)$ نقطتان ثابتتان فأوجد النقطة أو النقط

ج التي تنتمي لمحور السينات بحيث تكون مساحة المثلث $١, ١) , ٤, ٧) , ٤, ٢) , ٧, ٢)$ تساوي ٣٠ وحدة مربعة

✍ [٢٩] إذا كانت النقطة $١, ١)$ هي مسقط النقطة $٧, ٥)$ على المستقيم

$$٠ = ٤ - ٥٥ + ٣٣ : \text{أوجد إحداثي النقطة } ١, ١)$$

✍ [٣٠] إذا كانت : $١, ١) , ٤, ٧) , ٤, ٢) , ٧, ٢)$ هي رؤوس شبه منحرف

أوجد معادلة المستقيم امار بنقطة الأصل ويقسمه الى نصفين متساويين في المساحة .



❏ (٣١) أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل ونقطة تقاطع المستقيمين :

$$v = \frac{u_D}{\rho} + \frac{u_W}{\rho}, \quad v = \frac{u_D}{\rho} + \frac{u_W}{\rho}$$

ك (٣٢) إذا كان ٩ ٨ ٧ ٦ ٥ ٤ ٣ ٢ ١ شكل رباعي قطرة متعامدان ومقاطعان في النقطة هـ بحيث

بھ = 9 ھذا كانت إحداثيات 9، (0، 0)، 1، (7، 0)، 2، (3، 0)، 3، (3، 7) بھ

حيث ل، ك ثابتان أوجد :

۳۰۰ قیّم

⚡ معادلة ⚡

❶ احداثی نقطہ

٤ إحدائى نقطة ➤ ٥ النسبة التى تقسم بها ➤ ٦ القطعة المستقيمة

✍ (۳۳) فی الشكل المقابل :

• = 9 - 45 + 55 : د : **المستقيم**

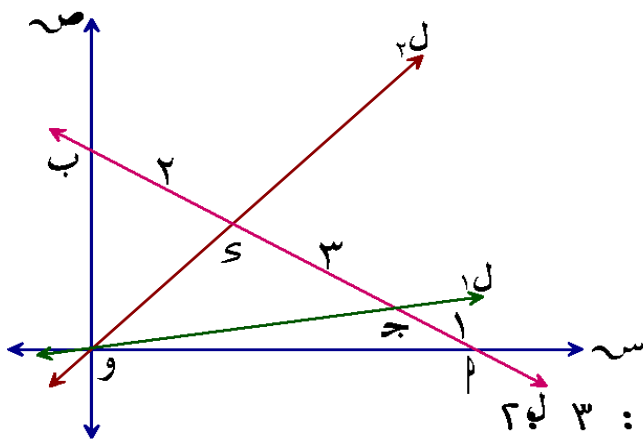
يقطع محوري الإحداثيات في النقطتين ٢ ، ٥

، المستقيمان l_1, l_2 يقطعان المستقيم l

في النقطتين ج ، د على الترتيب

بحيث تكون النسبة بين $٢٠ : ٣ = ١ : ٥$

أوجد $(\geq, \leq)$ ثم أوجد معادلة كل من $\leq, \geq$



طریقان مستقیمان : **(۳۲)**

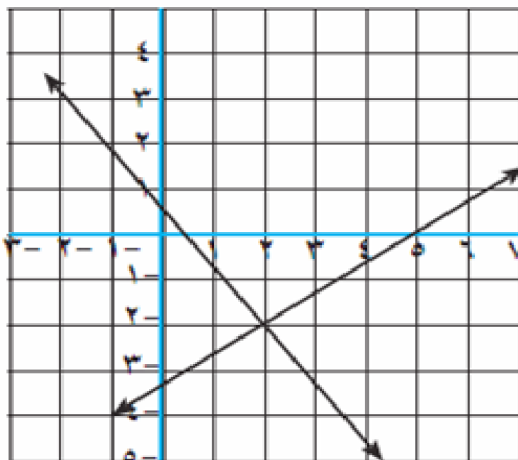
معادلة مسار الأول : $3\omega - 4\epsilon - 1\lambda = 0$

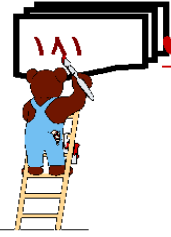
، معادلة مسار الثاني $\epsilon + 3\psi - 2 = 0$

أثبت أن الطريقي متعامدان ، ثم أوجد :

① نقطة تقاطع

٢) معادلة المستقيم المار بنقطة التقاطع و النقطة (٣ ، ٢)

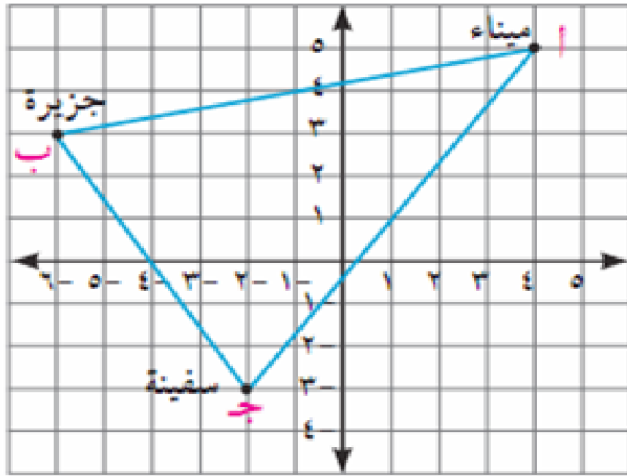




ك (٣٥) إذا كان : $ل_1 : ٣٣ + ٥٢ - ٧ = ٠$

$ل_2 : ٢ + (٠, ٢) + (٣, ٢) = ٢$ أوجد :

- ① المعادلة الكارتيزية للمستقيم $ل_2$
- ② قياس الزاوية بين المستقيمان $ل_1$ ، $ل_2$
- ③ نقطة تقاطع المستقيمان $ل_1$ ، $ل_2$
- ④ معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين والنقطة $(٣, ٤)$
- ⑤ طول العمود المرسوم من نقطة تقاطع المستقيمين الى الخط المستقيم الذي معادلته : $٣٣ - ٤٥ - ٩ = ٠$
- ⑥ مساحة سطح المثلث المحدد بالمستقيمين $ل_1$ ، $ل_2$ ومحور السينات .



ك (٣٦) يبين الشكل المقابل :

شبكة تربيعة مقسمة باطيل البحرى

، مبين عليها إحداثيات كل من :

الميناء م $(٥, ٤)$ والجزيرة ب $(٣, ٦)$

والسفينة ج $(٢, ٣)$. أوجد

- ① المسافة باطيل البحرى بين الميناء والسفينة .
- ② الزمن الذى استغرقته السفينة فى قطع المسافة $\overline{م ب}$ إذا كانت سرعته ٢٠ عقدة .
- ③ النسبة التى تنقسم بها $\overline{ب ج}$ بمحور السينات ، ثم أوجد إحداثيا نقطة التقسيم .
- ④ معادلة مسار السفينة إذا كانت تتحرك فى خط مستقيم .
- ⑤ أقصر مسافة بين الجزيرة والسفينة .
- ⑥ قياس الزاوية المحصورة بين $\overline{م ب}$ ، $\overline{م ج}$.
- ⑦ مساحة سطح المثلث م ب ج .