المنهج الجديد

التفاضل والتكامل

للصف الثالث الثانوى

شعبة الرياضيات

إعداد

أ/ أشرف حسن عبده

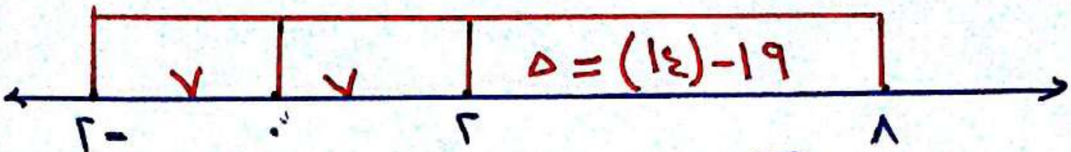
بنها ٠١٢٢ ٧٢٠٧ ٨٠٨٤

أشرف_حسن_عبده

[1] إذا كانت د(س) دالة زوجية ومتصلة على ح وكان

$\int_{0}^{2}$ د(س) دس = ٧ ، $\int_{-2}^{8}$ د(س) دس = ١٩ فإن $\int_{2}^{8}$ د(س) دس = ...

الحل ∵ الدالة زوجية ∴ $\int_{a}^{b}$ د(س) دس = $\int_{-b}^{-a}$ د(س) دس



∴ $\int_{2}^{8}$ د(س) دس = ٥

حل آخر

$\int_{\text{الصغرى}}^{\text{الكبرى}} = \int + \int + \int$

∴ $\int_{-2}^{8}$ د(س) دس = $\int_{-2}^{0}$ د(س) دس + $\int_{0}^{2}$ د(س) دس + $\int_{2}^{8}$ د(س) دس

١٩ = ٧ + ٧ + $\int_{2}^{8}$ د(س) دس

∴ $\int_{2}^{8}$ د(س) دس = ١٩ − ١٤ = ٥

---

[2] $\lim_{س \to \infty} \left(1 + \frac{3}{2س}\right)^{5س+7}$ = ...

الحل $هـ^{\frac{15}{2}}$

قاعدة $\lim_{س \to \infty} \left(1 + \frac{أ}{ب س}\right)^{جـ س + د} = هـ^{\frac{أ جـ}{ب}}$

$\boxed{3}$ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نها}} \left(\dfrac{\text{س} + 5}{\text{س} - 2}\right)^{3\text{س} + 7}$

الحل

$= \text{هـ}^{3[5+2]} = \text{هـ}^{21}$

$\boxed{4}$ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نها}} \left(\dfrac{\text{أس} + \text{ب}}{\text{أس} + \text{جـ}}\right)^{\text{د س} + \text{ن}} = \text{هـ}^{\text{د}\left[\frac{\text{ب}}{\text{أ}} - \frac{\text{جـ}}{\text{أ}}\right]}$

قاعدة هامة

[illegible]

$\boxed{5}$ $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نها}} \dfrac{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1)}{\text{س}} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ} = 1$

$\boxed{6}$ $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نها}} \dfrac{\text{لو}_{\text{أ}}(\text{س}+1)}{\text{س}} = \text{لو}_{\text{أ}}\text{هـ}$

$\boxed{7}$ $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نها}} \dfrac{\text{أ}^{\text{س}} - 1}{\text{س}} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ}$

$\boxed{8}$ $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نها}} \dfrac{\text{هـ}^{\text{س}} - 1}{\text{س}} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ} = 1$

$\boxed{9}$ $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نها}} \dfrac{\text{لو}_{\text{هـ}}(1 + 3\text{س}^2)}{2\text{س}^2} =$ الحل

$\underset{\text{س} \to 0}{\text{نها}} \dfrac{\text{لو}_{\text{هـ}}(1 + 3\text{س}^2)}{3\text{س}^2} \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2}$

2

$٣س+٧$

⑩ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{أ^{ب س} - ١}{س} = ب \,\text{لو}_{هـ} أ$

⑪ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{هـ^{ب س} - ١}{س} = ب \,\text{لو}_{هـ} هـ = ب$

⑫ **مشتقة الدالة الأسية** اذا كان $د(س) = هـ^{س^٢+٣}$

فإن $دَ(س) = \ldots$ (الحل) = الدالة نفسها × مشتقة أسها × لو$_{هـ}$ أساسها

$= هـ^{س^٢+٣} \times ٢س \times \text{لو}_{هـ} هـ = ٢س \, هـ^{س^٢+٣}$

⑬ اذا كان $د(س) = ٧^{س^٢+٥}$ فإن $دَ(س) = \ldots$ (الحل)

$= ٧^{س^٢+٥} \times ٢س \times \text{لو}_{هـ} ٧$

⑭ اذا كان $ص = \text{قتا} \sqrt{س+٣}$ فإن $صَ = \ldots$ (الحل)

$= \left(- \text{قتا} \sqrt{س+٣} \; \text{ظتا} \sqrt{س+٣}\right) \times \dfrac{١}{٢\sqrt{س+٣}}$

⑮ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{٢س+٥}{٢س-١}\right)^{٣س+٧} = \ldots$ (الحل)

$هـ^{٣\left[\frac{٥}{٢} + \frac{١}{٢}\right]} = هـ^{٩}$

استمتع
اشرح حصص جبر

قاعدة هامة

في الاشتقاق الضمني

أشرف حسن عبده بنها ٠١٢٢٧٢٧٨٠٨٤

16 إذا كان $س^٢ ص + س ص^٢ + ٥س - ٧ص = ٠$

فإن $\left[\frac{دص}{دس}\right]_{(١،١)} = ...$ الحل

$$\frac{دص}{دس} = \frac{-[\text{المشتقة الأولى بالنسبة لـ س باعتبار ص ثابتًا}]}{[\text{المشتقة الأولى بالنسبة لـ ص باعتبار س ثابتًا}]}$$

$$= \frac{-[٢س ص + ص^٢ + ٥]}{[س^٢ + ٢س ص - ٧]} = \frac{-٨}{-٤} = ٢$$

---

17 $\int \frac{٥س + ٣}{٧س - ٢} \, دس = ...$ الحل

$٢١ \quad ١٠ - ٢١$

$$= \frac{٥}{٧}س + \frac{٣١}{٤٩} لو_{هـ} |٧س - ٢| + ث$$

$$\int \frac{أس + ب}{جس + د} \, دس = \frac{أ}{ج}س + \left(\frac{ب ج - أ د}{ج^٢}\right) لو_{هـ} |\text{المقام}| + ث$$

استنتاج أشرف حسن عبده

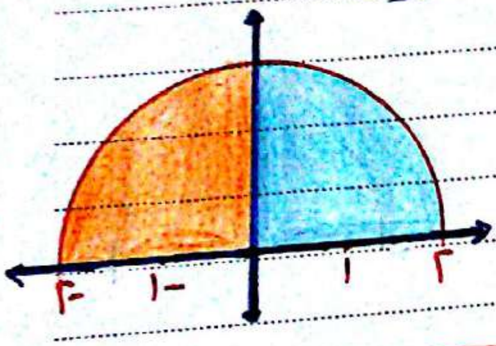
سؤال جميل واستنتاج

اوجد $\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - س^2}\ دس$

الحل

بوضع $4 - س^2 = ص^2 \Leftarrow س^2 + ص^2 = 4$

معادلة دائرة مركزها نقطة الاصل ونصف قطرها ٢ سم



الناتج = مساحة المنطقة المظللة تحت المنحنى وفوق محور السينات

$= \frac{1}{2} \times$ مساحة الدائرة

$= \frac{1}{2} \times 4\ \pi = 2\pi$

فى المسائل الموضوعية فقط

اذا كان $\int_{-م}^{م} \sqrt{م^2 - س^2}\ دس$

فإن الناتج $= \frac{1}{2} م^2 \pi$

واذا كان $\int_{-م}^{م} = \int_{0}^{م} \sqrt{م^2 - س^2}\ دس$

فإن الناتج $= \frac{1}{4} م^2 \pi$

اشرف حسن عبده

قواعد مهمة جداً

أشرف حسن عبده

الدالة	تفاضلها	تكاملها
$هـ^{س}$	$هـ^{س}$	$هـ^{س}$ + ث
$أ^{س}$	$أ^{س}$ $لو_{هـ}$ أ	$\frac{أ^{س}}{لو_{هـ} أ}$ + ث

نسألكم الدعاء

بسيطة : دليل التقويم

إذا كان $\text{س}^{٣} + ٣\text{س}^{٢}\text{ص} + ٣\text{س ص}^{٢} + \text{ص}^{٣} = ١٥$

أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل

$$(\text{س} + \text{ص})^{٣} = ١٥$$

$$\text{س} + \text{ص} = (١٥)^{\frac{١}{٣}}$$

بالاشتقاق إلى س

$$١ + \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٠$$

$$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -١$$

أوجد $\int_{-١}^{١} \frac{\text{س}^{٣}}{\text{س}^{٤} + \text{جتا س}} \, \text{دس}$

الحل

$$\because \int_{-\text{م}}^{\text{م}} (\text{دالة فردية}) \, \text{دس} = \text{صفر}$$

$$\therefore \int_{-١}^{١} (\text{الدالة}) \, \text{دس} = \text{صفر}$$

حل آخر دليل التقويم

[18] اذا كان $س^3 + 3س^2 ص + 3س ص^2 + ص^3 = 10$

فإن القيمة العددية لـ $\frac{دص}{دس} = \ldots\ldots$ الحل

$$\frac{دص}{دس} = \frac{-[3س^2 + 6س ص + 3ص^2]}{[3س^2 + 3ص^2 + 6س ص]} = -1$$

[19] $\int لو_{هـ}(2س+3)\, دس = \ldots\ldots$ الحل

(دالة: $\underline{2س+3}$)

$$= \frac{الدالة}{معامل\ س}\left(لو_{هـ} الدالة - 1\right) + ث$$

$$= \frac{2س+3}{2}\left(لو_{هـ}(2س+3) - 1\right) + ث$$

[20] $\int لو_{هـ} س\, دس = \ldots\ldots$ الحل

$$= س\left(لو_{هـ} س - 1\right) + ث$$

ملحوظة: $لو_{هـ}$ الدالة حيث الدالة من الدرجة الأولى

أ/ أشرف حسن عبده

اوجد مساحة المثلث المحدد بمحور السينات والمماس والعمودي للمنحنى $3س^2 + ص^2 = 12$ عند النقطة $(-1، 3)$

الحل

$3س^2 + ص^2 = 12$ بالاشتقاق إلى س

$6س + 2ص \frac{دص}{دس} = 0$

$\frac{دص}{دس} = \frac{-3س}{ص}$ عند $(-1، 3)$

$\therefore$ ميل المماس $= 1$ ‏ ‏ ‏ ميل العمودي $= -1$

معادلة المماس ‏ ‏ ‏ معادلة العمودي

$\frac{ص - ص_1}{س - س_1} =$ ميل المماس ‏ ‏ ‏ $\frac{ص - ص_1}{س - س_1} =$ ميل العمودي

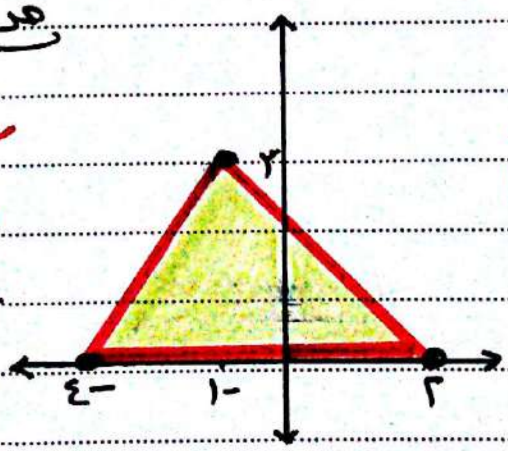
$\frac{ص - 3}{س + 1} = 1$ ‏ ‏ ‏ $\frac{ص - 3}{س + 1} = -1$

$\boxed{ص = س + 4}$ ‏ ‏ ‏ $\boxed{ص = 2 - س}$

مع محور السينات نضع ص = 0 ‏ ‏ ‏ مع محور السينات نضع ص = 0

$\therefore س = -4$ ‏ ‏ ‏ $\therefore س = 2$

$(-4، 0)$ ‏ ‏ ‏ $(2، 0)$



النقطة الموجودة أ $(-1، 3)$ ، ب $(-4، 0)$ نقطة تقاطع المماس مع س

جـ $(2، 0)$ نقطة تقاطع العمودي مع س

$\therefore$ مساحة $\Delta = \frac{1}{2}$ طول القاعدة $\times$ الارتفاع

$= \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$ وحدة مساحة

توضيح هام جداً جداً

اختر الإجابة الصحيحة:

$\int_{0}^{3} \frac{1}{س-1}\,ءس =$ ....

① لو$_{هـ}$ ٢ ② ١ ③ لو$_{هـ}$ ٣ ④ غير ذلك

الحل

$\because$ د(س) $= \frac{1}{س-1}$ **غير متصلة** عند

س $= 1$ $\therefore$ وتكون متصلة في $[0 ، 3] - \{1\}$

$\therefore$ الإجابة الصحيحة غير ذلك

أوجد $\int \frac{1}{س-1}\,ءس$

الحل

$\because$ البسط مشتقة المقام

$=$ لو$_{هـ}$ |س-١| + ث

يجب الانتباه في التكامل المحدد إلى حدود التكامل.

من توقعات هذا العام

كتاب المدرسة: الاختبار الرابع ٣م	الاختبار الثاني ٣م: فكرة حلوة	اكر الاختبار الثاني ١ (٤): جميلة
اذا كان $\int_{1}^{4}$ د(س) دس = ٧ ، $\int_{4}^{1}$ ر(س) دس = ٣ ، احسب قيمة $\int_{1}^{4}$ [د(س) + ٢ر(س) − ٤] دس	اوجد $\int_{0}^{5}$ |س − ٢| دس	أكمل: اذا كان د متصلة على [٢، ٧] فإن $\int_{2}^{7}$ د(س) دس + $\int_{7}^{4}$ د(س) دس = ...
الحل	الحل	الحل
$\int_{1}^{4}$ ر(س) دس = −٣	$\int_{0}^{5}$ = $\int_{0}^{س}$ |س−٢| دس + $\int_{س}^{5}$ |س−٢| دس ، س − ٢ = ٠ ⟵ س = ٢	$\int_{7}^{4}$ د(س) دس = − $\int_{4}^{7}$ د(س) دل
∴ $\int_{1}^{4}$ د(س) دس + ٢ $\int_{1}^{4}$ ر(س) دس − $\int_{1}^{4}$ ٤ دس	= $\int_{0}^{2}$ −(س − ٢) دس + $\int_{2}^{5}$ (س − ٢) دس	∵ $\int_{2}^{7}$ = $\int_{2}^{4}$ + $\int_{4}^{7}$
= ٧ + ٢(−٣) − $[٤س]_{1}^{4}$	$\int$ (س − ٢) دس = $\frac{1}{2}$س² − ٢س	بإضافة $\int_{7}^{4}$ للطرفين
= ٧ − ٦ − [١٢]	= $[\ ]_{0}^{2}$ + $[\ ]_{2}^{5}$	∴ $\int_{2}^{7}$ + $\int_{7}^{4}$ = $\int_{2}^{4}$ د(س) دس
= −١١	= $\frac{13}{2}$	حل آخر بخطوط بكرا المداد
		∴ الناتج = $\int_{2}^{4}$ د(س) دس

من توقعاتي هذا العام بإذن الله

(تفاضل وتكامل)

م/ ٠١٢٢٧٢٧٨٠٨٤

خبير الرياضيات والميكانيكا أ/ أشرف حسن

اذا كان للمنحنى $ص = ٢س^٣ + ٣س^٢ + ٤س + ٥$ مماسان متوازيان أحدهما يمس المنحنى عند النقطة (-١، ٢) أوجد معادلة المماس الآخر

الحل

فكرة الحل * ايجاد نقطة تماس المستقيم المطلوب مع المنحنى

$\because ص = ٢س^٣ + ٣س^٢ + ٤س + ٥$

$ص' = ٦س^٢ + ٦س + ٤$

ميل المماس للمنحنى عند النقطة (-١، ٢)

$ص' = ٦(-١)^٢ + ٦(-١) + ٤ = ٤$

$\because$ المماسان متوازيان $\therefore$ ميلاهما متساويان

ميل $ل_١$ عند اى نقطة (أ، ب) $= ٤ =$ ميل $ل_٢$

$٦أ^٢ + ٦أ + ٤ = ٤$

$٦أ^٢ + ٦أ = ٠$ $\quad$ أ = ٠ $\quad$ أ = -١

$\because$ (أ، ب) تحقق معادلة المنحنى $ص = ٢س^٣ + ٣س^٢ + ٤س + ٥$

عند أ = ٠ $\leftarrow$ ب = ٥ $\leftarrow$ (٠، ٥)

عند أ = -١ $\leftarrow$ ب = ٢ $\leftarrow$ (-١، ٢)

$\therefore$ معادلة المماس المار بالنقطة (٠، ٥) وميله = ٤

$\frac{ص - ٥}{س - ٠} = ٤$

$ص - ٥ = ٤س$

$ص = ٤س + ٥$

اشرف حسن عبيد

تفاضل جميل

إذا كان ص = $\sqrt{٥ - ٢ع}$ ، ع = قا٢س

أثبت أن $\sqrt{٣}$ $\frac{دص}{دس}$ + ١٢ = ٠ عندس = $\frac{\pi}{٦}$

الحل

$\frac{دص}{دع} = \frac{-٢}{٢\sqrt{٥-٢ع}} = \frac{-١}{\sqrt{٥-٢ع}}$

$\frac{دع}{دس}$ = ٢ قا٢س طا٢س $\xrightarrow{س = \frac{\pi}{٦}}$ = ٤ $\sqrt{٣}$

∵ $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$

= $\frac{-١}{\sqrt{٥-٢ع}}$ × ٤ $\sqrt{٣}$ = $\frac{-٤\sqrt{٣}}{\sqrt{٥-٢قا٢س}}$

عندس = $\frac{\pi}{٦}$ ∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{-٤\sqrt{٣}}{\sqrt{٥-٤}}$ = −٤ $\sqrt{٣}$

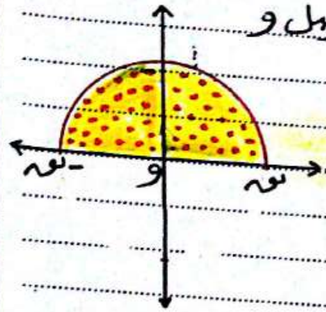
∴ $\frac{دص}{دس}$ + ٤ $\sqrt{٣}$ = ٠ × $\sqrt{٣}$

$\sqrt{٣}$ $\frac{دص}{دس}$ + ١٢ = ٠ اشترط

باستخدام التكامل إثبات أن:

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ ط نق^{٣}

الحل



معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل و
نصف قطرها نق هي

$$س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢}$$

$$\therefore ص^{٢} = نق^{٢} - س^{٢}$$

الجسم الناشئ من دوران الشكل المقابل
دورة كاملة حول محور السينات حيث
ص = $\sqrt{نق^{٢} - س^{٢}}$ ، س = -نق ، س = نق

$$ح = \pi \int_{-نق}^{نق} ص^{٢} \, ءس$$

$$= \pi \int_{-نق}^{نق} (نق^{٢} - س^{٢}) \, ءس$$

$$= \pi \left[نق^{٢} س - \frac{١}{٣} س^{٣} \right]_{-نق}^{نق}$$

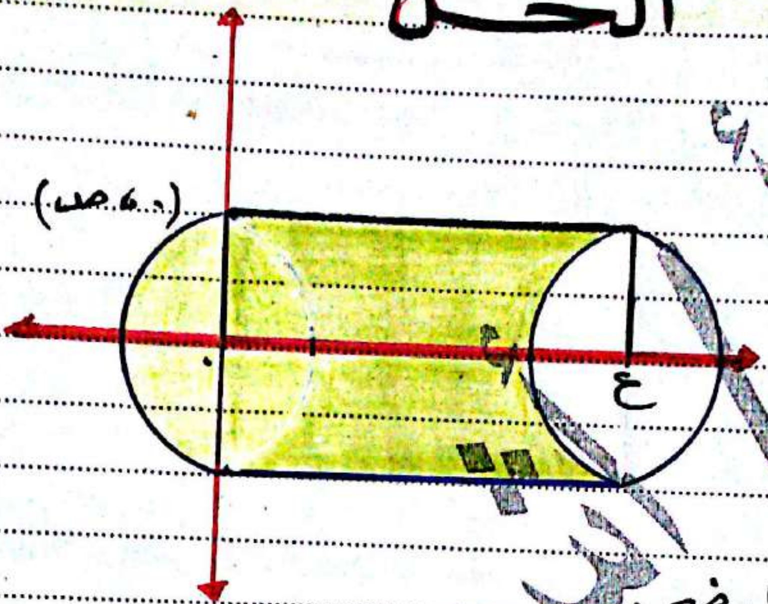
$$= \pi \left[(نق^{٣} - \frac{١}{٣} نق^{٣}) - (-نق^{٣} + \frac{١}{٣} نق^{٣}) \right]$$

$$\therefore ح = \frac{٤}{٣} ط نق^{٣}$$

باستخدام التكامل المحدد اثبت أن

حجم الأسطوانة = π نق^2 ع

الحل



من الشكل الموضح: الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمستقيمات ص = نق^2 ، س = ٠ ، س = ع دورة كاملة حول محور السينات فإن:

$$ح = \pi \int_{0}^{ع} ص^2 \, دس$$

$$= \pi \int_{0}^{ع} نق^2 \, دس$$

$$= \pi \left[نق^2 \, س \right]_{0}^{ع}$$

$$= \pi \, نق^2 \, ع - صفر$$

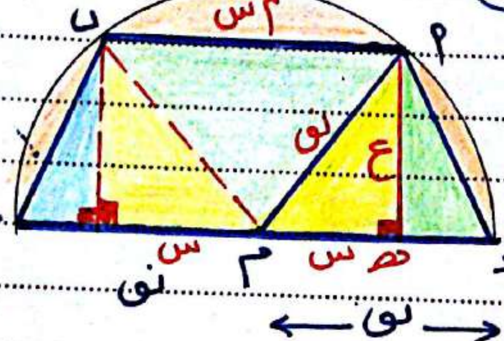
$$\boxed{ح = \pi \, نق^2 \, ع}$$

الحمد لله رب العالمين

الاختبار الثاني كتاب المدرسة ص ١٤٦ م ٥

رسم في نصف دائرة شبه منحرف قاعدته هي قطر نصف الدائرة، عين قياس زاوية قاعدة شبه المنحرف بحيث تكون مساحته أكبر ما يمكن

الحل: من الشكل المقابل



مساحة شبه المنحرف = $\frac{1}{2}$ [مجموع القاعدتين المتوازيتين] × الارتفاع

ع^2 = نق^2 − س^2 ← ع = $\sqrt{\text{نق}^2 - \text{س}^2}$

مجموع القاعدتين المتوازيتين = ٢نق + ٢س

م = $\frac{1}{2}$ [٢نق + ٢س] × $\sqrt{\text{نق}^2 - \text{س}^2}$

بعد م' والاختصار، م' = صفر

٢س^2 + نق س − نق^2 = ٠

(٢س − نق)(س + نق) = ٠ ← س = $\frac{1}{2}$ نق

∵ طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠° في Δ القائم = $\frac{1}{2}$ طول الوتر

∴ ق(∠أ م هـ) = ٦٠°

ويكون Δ أ م د متساوي الأضلاع حينئذ

∴ ق(∠د) = ٦٠°

$$\int \text{هـ}^{٢س} \sqrt{\text{هـ}^{س} + ١} \; \text{دس}$$

الحل

$$\text{ص} = \sqrt{\text{هـ}^{س} + ١}$$

$$\therefore \text{ص}^{٢} = \text{هـ}^{س} + ١ \longrightarrow \text{هـ}^{س} = \text{ص}^{٢} - ١$$

$$٢\text{ص دص} = \text{هـ}^{س} \text{دس} \longrightarrow \text{دس} = \frac{٢\text{ص دص}}{\text{ص}^{٢} - ١}$$

$$\therefore \int (\text{ص}^{٢} - ١)^{\cancel{٢}} \times \text{ص} \times \frac{٢\text{ص}}{\cancel{\text{ص}^{٢} - ١}} \; \text{دص}$$

$$٢ \int \text{ص}^{٢} (\text{ص}^{٢} - ١) \; \text{دص}$$

$$٢ \left[\int (\text{ص}^{٤} - \text{ص}^{٢}) \; \text{دص} \right]$$

$$٢ \left[\frac{١}{٥} \text{ص}^{٥} - \frac{١}{٣} \text{ص}^{٣} \right] + \text{ث}$$

$$\frac{٢}{٥} (\text{هـ}^{س} + ١)^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٢}{٣} (\text{هـ}^{س} + ١)^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$$

تكامل

$$\int \frac{س^{٢} + ٥س + ٣}{س - ١} \, دس$$

١

بالقسمة المطولة

$$\int \frac{(س-١)(س+٦) + ٩}{(س-١)} \, دس$$

$$\int س + ٦ \, دس + ٩ \int \frac{١}{س-١} \, دس$$

$$\frac{١}{٢} س^{٢} + ٦س + ٩ \, لو_{هـ} |س-١| + ث$$

لو حلول أخرى

أوجد

$$\lim_{\text{س} \to \infty} \left(\frac{\text{س} + ٢}{\text{س} - ١} \right)^{٥\text{س} + ٣}$$

الحل

$$\lim_{\text{س} \to \infty} \left(١ + \frac{٣ \times \boxed{٥}}{(\text{س} - ١)\boxed{٥}} \right)^{٥\text{س} + ٣}$$

$$\lim_{\text{س} \to \infty} \left(١ + \frac{١٥}{٥\text{س} - ٥} \right)^{٥\text{س} - ٥ + ٣ + ٥}$$

$$\lim_{\text{س} \to \infty} \left(١ + \frac{١٥}{٥\text{س} - ٥} \right)^{٥\text{س} - ٥} \times \lim_{\text{س} \to \infty} \left(١ + \frac{١٥}{٥\text{س} - ٥} \right)^{٨}$$

$$\text{هـ}^{١٥} \times ١ = \text{هـ}^{١٥}$$

ملحوظة

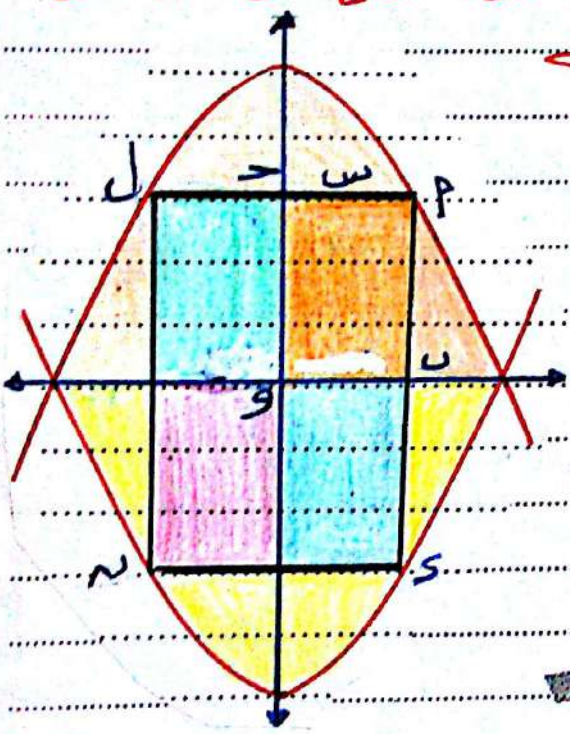
$$\lim_{\text{س} \to \infty} \left(١ + \frac{\text{أ}}{\text{ب س}} \right)^{\text{ل س}} = \text{هـ}^{\text{ل} \times \frac{\text{أ}}{\text{ب}}}$$

أ. شيماء عصام جبره

١٣/٤/٢٠١٧

الاختبار الاول كتاب المدرسة ٤ ب

رسم مستطيل بحيث تقع رأسان متجاوران منه على المنحنى ص = $س^٢$ − ١٢ والرأسان الآخران على المنحنى ص = ١٢ − $س^٢$ اوجد اكبر مساحة لهذا المستطيل



الحل احداثيات النقط

أ (س ، ١٢ − $س^٢$) ، و (٠ ، ٠)

ب (س ، ٠) ، جـ (٠ ، ١٢ − $س^٢$)

في المستطيل أ ب و جـ

أ جـ = س

أ ب = ١٢ − $س^٢$

م = س (١٢ − $س^٢$) = ١٢س − $س^٣$

$\frac{دم}{دس}$ = ١٢ − ٣$س^٢$ = صفر ← ∴ س = ٢

$\frac{د^٢م}{دس^٢}$ < صفر

∴ مساحة المستطيل أ ب و جـ = ٢٤ − ٨ = ١٦

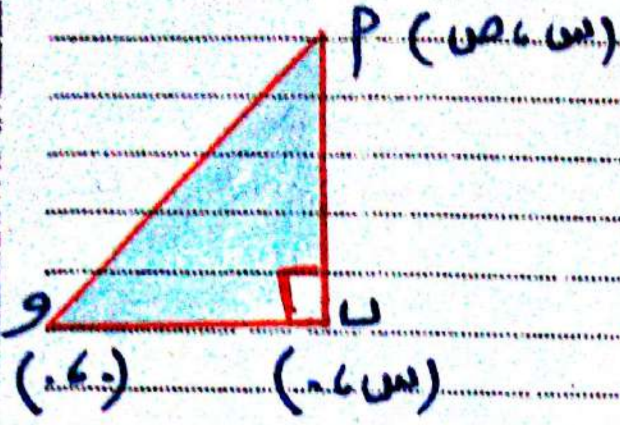
∴ المساحة للمستطيل الكبير

= ١٦ × ٤ = ٦٤ وحدة مربعة

ملحوظة

يمكن الحل باستخدام احداثيات المستطيل الكبير في حالة اختلاف تماثل المنحنيان

حل ثالث



أ (س، ١٢ - س^{٢})

ب (س، ٠)

(٠، ٠)

مساحة Δ أ ب و = $\frac{١}{٢}$ س × (١٢ - س^{٢})

م = ٦س - $\frac{١}{٢}$ س^{٣}

$\frac{دم}{دس}$ = ٦ - $\frac{٣}{٢}$ س^{٢} = صفر

$\frac{د^{٢}م}{دس^{٢}}$ < ٠ ، س = ٢

مساحة Δ = $\frac{١}{٢}$ (٢) (١٢ - ٤) = ٨

∴ مساحة المستطيل الأكبر =

٨ × ٨ = ٦٤ وحدة مربعة

هامة جداً

إذا كان

ص = لو$_{هـ}$ س

فإن

$ص' = \frac{1}{س}$

أشرف حسن عبده

إذا كان

ص = لو س

فإن

$ص' = \frac{لو\, هـ}{س}$

أشرف حسن عبده

جميلة وسهلة : البيوكليش الرابع : تفاضل

اذا كان $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{س}{س+ك}\right)^{س} = هـ$ فإن

ك = ...

الحل

$هـ^{1(0-ك)} = هـ^{-ك} = هـ^{1}$

$\therefore$ ك = -1

حل آخر

$\lim_{س \to \infty} \left(1 - \frac{ك}{س+ك}\right)^{س}$

$= هـ^{-ك} = هـ^{1}$

$\therefore$ ك = -1

ويوجد حلول أخرى

الاختبار الثالث كتاب المدرسة ٥٠

ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة المتصلة د من الخواص التالية:

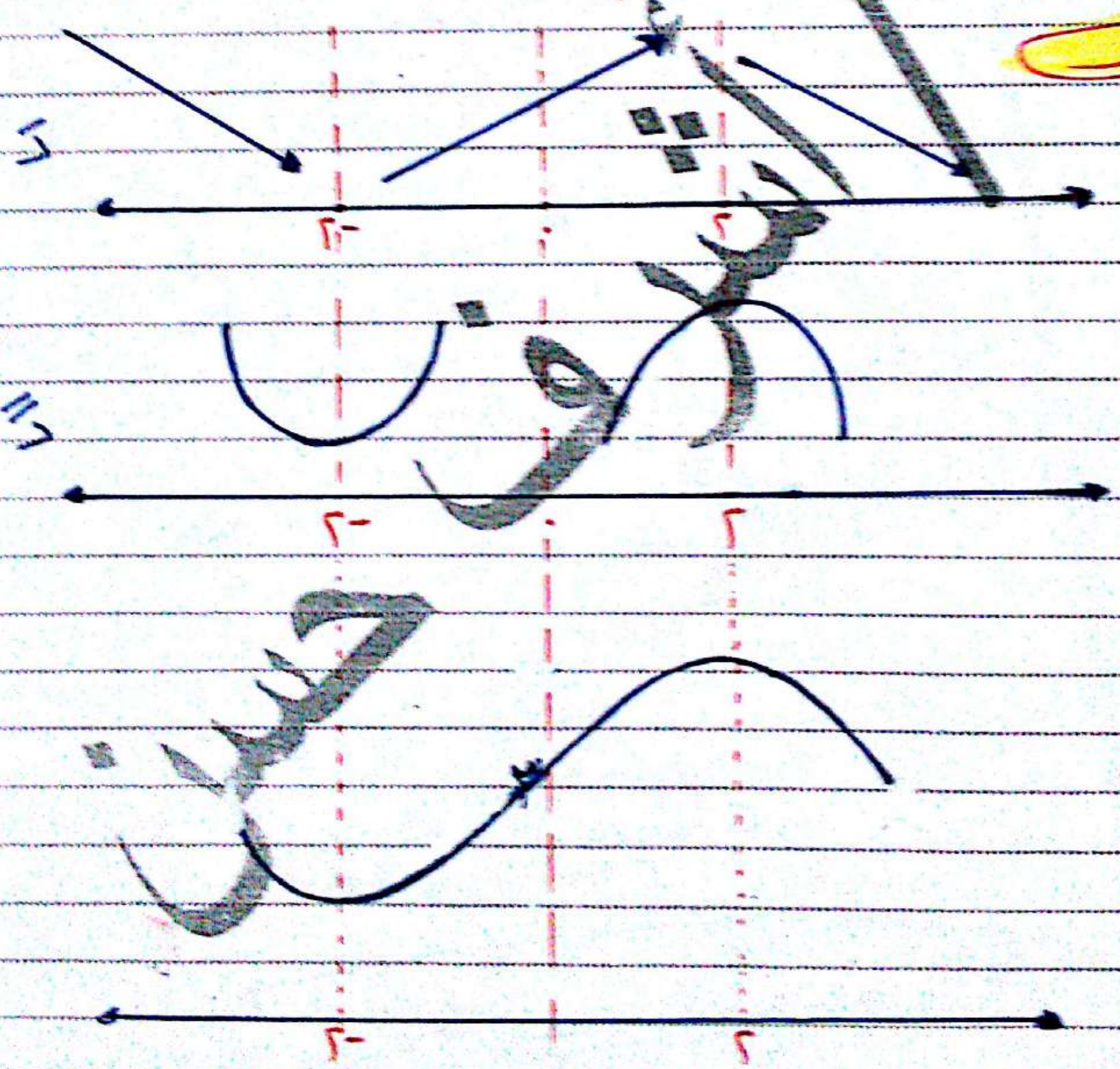
د(٠) = ٣ ، د(٢) = د(-٢) = ٠

، دَ(س) > ٠ عندما -٢ < س < ٢

دً(س) > ٠ عندما س < ٠

، دً(س) < ٠ عندما س > ٠

الحل



$$\int \frac{1+\text{هـ}^{\text{س}}}{1-\text{هـ}^{\text{س}}}\,\text{د س}$$

الحل

$$\int \frac{1+\text{هـ}^{\text{س}}+\text{هـ}^{\text{س}}-\text{هـ}^{\text{س}}}{1-\text{هـ}^{\text{س}}}\,\text{د س}$$

$$\int \frac{1-\text{هـ}^{\text{س}}}{1-\text{هـ}^{\text{س}}}+\frac{2\,\text{هـ}^{\text{س}}}{1-\text{هـ}^{\text{س}}}\,\text{د س}$$

$$\int 1 + (-2)\,\text{لو}\left|1-\text{هـ}^{\text{س}}\right| + \text{ث}$$

$$\text{س} - 2\,\text{لو}\left|1-\text{هـ}^{\text{س}}\right| + \text{ث}$$

أشرف حسن

تكامل حلو

$$\int \frac{د س}{س + \sqrt{س}}$$

الحل

$ص = \sqrt{س}$ ،

$ص^2 = س$

$2 ص \; د ص = د س$

$$\int \frac{د س}{س + \sqrt{س}} = \int \frac{2 ص}{ص^2 + ص} \; د ص$$

$$= 2 \int \frac{د ص}{ص + 1}$$

$$= 2 \; لو |ص + 1| + ث$$

$$= 2 \; لو |\sqrt{س} + 1| + ث$$

بسهـــل ومتعة (تكامـــل)

$$\int \text{س قا}^{2}\text{س}^{2} \ \text{ءس}$$

الحـــل

$$\text{ص} = \text{س}^{2}$$

$$\text{ءص} = ٢\text{س} \ \text{ءس}$$

$$\frac{١}{٢} \int ٢\text{س قا}^{2}\text{س}^{2} \ \text{ءس}$$

$$\frac{١}{٢} \int \text{قا}^{2}\text{ص} \ \text{ءص}$$

$$\frac{١}{٢} \ \text{ظا ص} + \text{ث}$$

$$\frac{١}{٢} \ \text{ظا س}^{2} + \text{ث}$$

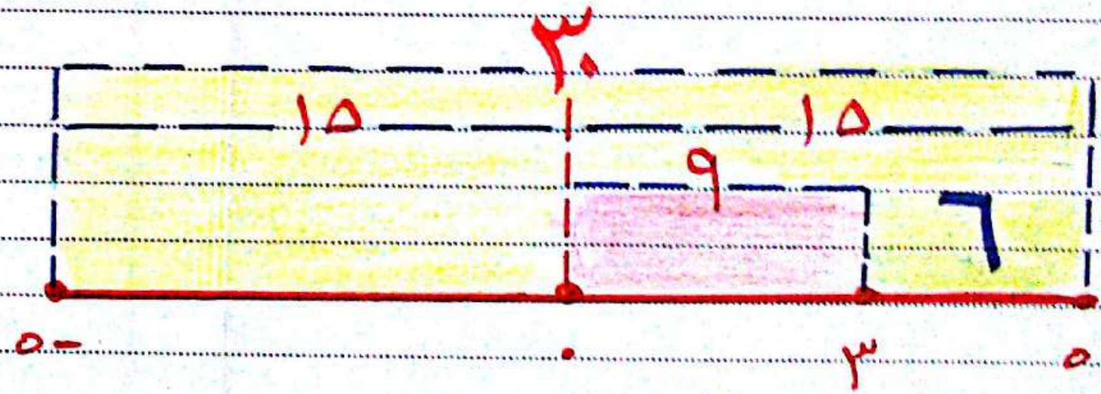
اذا كانت الدالة د زوجية متصلة على [-٥، ٥]،

$\int_{-٥}^{٥} \text{د(س) ءس} = ٣٠$ ، $\int_{٠}^{٣} \text{د(س) ءس} = ٩$

اوجد قيمة $\int_{-٥}^{-٣} \text{د(س) ءس}$

الحل

$\int_{-ا}^{ب} = \int_{-ب}^{ا}$ ∵ الدالة زوجية



∴ $\int_{٣}^{٥} \text{د(س) ءس} = \int_{-٥}^{-٣} \text{د(س) ءس} = ٦$

الشرف حسن عبده
٦/٢/٢٠١٧

تكامل خطوة واحدة

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\text{س + حاس}}{\text{س}^{٤} \text{ + جتاس}} \text{ ءس}$$

الشرف حسن عبده

$\int_{-\pi}^{\pi}$ دالة فردية ءس = صفر

أشرف حسن عبده
٦/٢/٢٠١٧

تكامل روعة

أشرف حسن كيش

ص = ∫ ظتا س قتا^{3} س ء س

الحل

ص = ∫ ظتا س قتا س قتا^{2} س ء س

ل = قتا^{2} س ‏ ‏ ‏ ‏ ءع = ظتا س قتا س ء س

ءل = −٢ قتا^{2} س ظتا س ء س ‏ ‏ ‏ ‏ ع = − قتا س

ص = − قتا^{3} س − ٢ ∫ قتا^{3} س ظتا س ء س

ص = − قتا^{3} س − ٢ ص + ث

٣ ص = − قتا^{3} س + ث

ص = $\frac{1}{3}$ قتا^{3} س + ث

أشرف حسن بكس

ونوجد حل مباشر = ∫ (الداله)^{ن} (مشتقتها) ءس

$$\int_{-4}^{4} \left(\frac{1}{\pi} - س\right)\sqrt{16 - س^2}\ دس$$

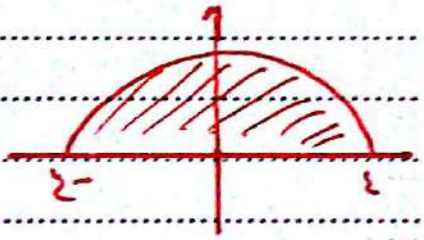
الحل

$$\int_{-4}^{4} \frac{1}{\pi}\sqrt{16 - س^2}\ دس - \int_{-4}^{4} س\sqrt{16 - س^2}\ دس$$

$\sqrt{16 - س^2} = ص$

$16 - س^2 = ص^2$

$س^2 + ص^2 = (4)^2$



$\frac{1}{\pi} \times \frac{1}{2}$ مساحة الدائرة

$\frac{1}{\pi} \times \frac{1}{2} \times \pi$ نق^2

$\frac{1}{2} \times 16 = 8$

$\int_{-4}^{4} س\sqrt{16 - س^2}\ دس$ ← دالة فردية

$\therefore \int_{-4}^{4} س\sqrt{16 - س^2}\ دس$

= صفر

أ/ أشرف حسن جمعة
١٨/٣/٢٠١٧

$\therefore$ الناتج = ٨ − صفر = $\boxed{8}$

من حلاوة التكامل

$$\int \frac{دس}{\sqrt{س}\ هـ^{\sqrt{س}}}$$

الحل

$$\int س^{-\frac{1}{2}} \times هـ^{-س^{\frac{1}{2}}} \,.\, دس$$

$$ص = هـ^{-س^{\frac{1}{2}}} \longleftarrow دص = -\frac{1}{2} س^{-\frac{1}{2}} \times هـ^{-س^{\frac{1}{2}}} \,.\, دس$$

$$-2 \int دص$$

$$= -2ص + ث$$

$$= -2\, هـ^{-\sqrt{س}} + ث$$

$$\int \frac{(س+2)^7}{س^9}\, دس$$

الحل

$$\int \frac{1}{س^2} \left(\frac{س+2}{س}\right)^7 دس$$

$$-\frac{1}{2} \int \frac{-2}{س^2} \left(\frac{س+2}{س}\right)^7 .\, دس$$

$$\int \text{الدالة} \times \text{مشتقتها}\ دس$$

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{س+2}{س}\right)^8 \times \frac{1}{8} + ث$$

$$-\frac{1}{16} \left(\frac{س+2}{س}\right)^8 + ث$$

$$\int \frac{\text{دس}}{\text{س}\sqrt{\text{أ} + \text{ب لوس}}}$$

الحل

بوضع $\text{ص}^2 = \text{أ} + \text{ب لوس}$

$2\text{ص}\ \text{دص} = \frac{\text{ب}}{\text{س}}\ \text{لوهـ}\ \text{دس}$

$$\frac{1}{\text{ب لوهـ}} \int \frac{\text{ب لوهـ}\ \text{دس}}{\text{س}\sqrt{\text{أ} + \text{ب لوس}}}$$

[illegible]

$$\frac{1}{\text{ب لوهـ}} \int \frac{2\,\cancel{\text{ص}}}{\cancel{\text{ص}}}\ \text{دص}$$

$$\frac{1}{\text{ب لوهـ}} \times 2\,\text{ص} + \text{ث}$$

$$\frac{2}{\text{ب لوهـ}} \times \sqrt{\text{أ} + \text{ب لوس}} + \text{ث}$$

$\int \text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س} \div \sqrt{\text{س}})\ .\text{دس}$

الحل

$\int \text{لو}_{\text{هـ}} \sqrt{\text{س}}\ .\text{دس} = \int \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}^{\frac{1}{2}}\ .\text{دس}$

$= \frac{1}{2} \int \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}\ .\text{دس}$

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} \qquad \text{دع} = \text{دس}$

$\text{دص} = \frac{1}{\text{س}}\ \text{دس} \longrightarrow \text{ع} = \text{س}$

$= \text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} - \int \cancel{\frac{\text{س}}{\text{س}}}\ .\text{دس}$

$= \text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} - \text{س} + \text{ث}$

$= \frac{1}{2}\text{س} \left[\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} - 1\right] + \text{ث}$

$\int (\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} \div \sqrt{\text{س}})\ \text{دس}$

الحل

$\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}}{\sqrt{\text{س}}}\ .\text{دس}$

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} \qquad \text{دع} = \text{س}^{-\frac{1}{2}}\ \text{دس}$

$\text{دص} = \frac{1}{\text{س}}\ \text{دس} \longrightarrow \text{ع} = 2\,\text{س}^{\frac{1}{2}}$

$= 2\sqrt{\text{س}}\ \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} - 2 \int \text{س}^{-\frac{1}{2}}\ \text{دس}$

$= 2\sqrt{\text{س}}\ \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} - 2 \times 2\sqrt{\text{س}} + \text{ث}$

$= 2\sqrt{\text{س}}\ \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} - 4\sqrt{\text{س}} + \text{ث}$

$= 2\sqrt{\text{س}} \left[\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} - 2\right] + \text{ث}$

التكامل المحدد

النظرية الأساسية

إذا كانت الدالة د متصلة على الفترة [أ، ب]
وكانت ت أي مشتقة عكسية للدالة د على
نفس الفترة فإن :

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س)}\ \text{ءس} = \text{ت(ب)} - \text{ت(أ)}$$

قواعد هامة :

إذا كانت د دالة متصلة على [أ، ب] ، جـ ∈ [أ، ب]

فإن

1) $$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س)}\ \text{ءس} = - \int_{\text{ب}}^{\text{أ}} \text{د(س)}\ \text{ءس}$$

2) $$\int_{\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د(س)}\ \text{ءس} = \text{صفر}$$

3) $$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س)}\ \text{ءس} = \int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{د(س)}\ \text{ءس} + \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} \text{د(س)}\ \text{ءس}$$

نظرية : إذا كانت الدالة د متصلة على الفترة [أ، ب]
فإنها تكون قابلة للتكامل على نفس الفترة.

① أوجد $\int_{-2}^{4} (3\text{س}^2 - 2)\,.\,\text{ءس}$

الحل

$$\left[\text{س}^3 - 2\text{س}\right]_{-2}^{4} = \left[(4)^3 - 2(4) - \left((-2)^3 - 2(-2)\right)\right]$$

$$= 60$$

② $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جتا هـ}\ \text{ءهـ} = \left[-\text{حا هـ}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

$$= \left[\left(-\text{حا}\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\text{حا}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right] = -2$$

③ إذا كانت د دالة متصلة على ح ، $\int_{1}^{3} \text{د(س)}\ \text{ءس} = 6$ ، $\int_{3}^{5} \text{د(س)}\ \text{ءس} = 14$

أوجد $\int_{1}^{5} \text{د(س)}\ \text{ءس}$ **الحل**

$$\int_{1}^{5} \text{د(س)}\,.\,\text{ءس} = \int_{1}^{3} \text{د(س)}\,.\,\text{ءس} + \int_{3}^{5} \text{د(س)}\,.\,\text{ءس}$$

$$= 6 + 14 = 20$$

④ أوجد $\int_{-4}^{2} |\text{س}+1|\ \text{ءس}$

$\text{س} + 1 = 0 \longrightarrow \text{س} = -1$

الحل من تعريف دالة المقياس

$$|\text{س}+1| = \begin{cases} -(\text{س}+1) & \text{، س} < -1 \\ \text{س}+1 & \text{، س} \geq -1 \end{cases}$$

الدالة متصلة عند $\text{س} = -1$

نكون جدول الرسم البياني لتحديد حدود التكامل ★

طريقة أسهل حدود التكامل $\text{س} = -4$ ، $\text{س} = -1$ ، $\text{س} = 2$

$$\int_{-4}^{2} |\text{س}+1|\ \text{ءس} = \int_{-4}^{-1} (-\text{س}-1)\ \text{ءس} + \int_{-1}^{2} (\text{س}+1)\ \text{ءس}$$

$$= \left[-\frac{\text{س}^2}{2} - \text{س}\right]_{-4}^{-1} + \left[\frac{\text{س}^2}{2} + \text{س}\right]_{-1}^{2}$$

$$= 9$$

أوجد $\int_{-3}^{3} |س^2 - ٤| \, دس$

الحل

لنوجد أصفار الدالة $س^2 - ٤ = ٠$

$س = -٢$ ، $س = ٢$

∴ حدود التكامل $س = -٣$ ، $س = -٢$ ، $س = ٢$ ، $س = ٣$

$= \left|\int_{-3}^{-2} (س^2 - ٤) \, دس\right| + \left|\int_{-2}^{2} (س^2 - ٤) \, دس\right| + \left|\int_{2}^{3} (س^2 - ٤) \, دس\right|$

$= \frac{١٦}{٣}$ وحدة مساحة

حل آخر

$س^2 - ٤$	$-(س^2 - ٤)$ $٤ - س^2$	$س^2 - ٤$
+ +	− −	+ +

-٣ ، -٢ ، ٢ ، ٣

$= \int_{-3}^{-2} (س^2 - ٤) \, دس + \int_{-2}^{2} (٤ - س^2) \, دس + \int_{2}^{3} (س^2 - ٤) \, دس$

$= \frac{١٦}{٣}$ وحدة مساحة

الحل الأول أعم وأشمل بوضوح

تمارين للطالب من الحصة

أوجد

① $\int_{1}^{2} (٢س + ٣) \, ءس$

② $\int_{٠}^{2} س(س^{2} - ٣)^{2} \, ءس$

③ $\int_{٠}^{٥} |س - ٣| \, ءس$

④ $\int_{٠}^{٣} س \sqrt{س^{2} + ٣} \, ءس$

⑤ $\int_{-2}^{2} س^{٣} \sqrt{س^{2} + ٣} \, ءس$

⑥ $\int_{٠}^{٣} (٢س - ٧ ه^{س}) \, ءس$

ملحوظة ١: إذا كانت الدالة د متصلة **وفردية** على الفترة $[-م ، م]$ فـــإن:

$$\int_{-م}^{م} د(س) \, ءس = صفر$$

ملحوظة ٢: إذا كانت الدالة د متصلة **وزوجية** على الفترة $[-م ، م]$ فـــإن:

$$\int_{-م}^{م} د(س) \, ءس = ٢ \int_{٠}^{م} د(س) \, ءس$$

مثال: $\int_{-٣}^{٣} (س^{2} - ١) \, ءس$

الحل: * $د(س) = س^{2} - ١$

$د(-س) = (-س)^{2} - ١ = س^{2} - ١$

$\because د(س) = د(-س)$ $\therefore$ الدالة زوجية

$= ٢ \int_{٠}^{٣} (س^{2} - ١) \, ءس = ٢ \left[\frac{س^{٣}}{٣} - س \right]_{٠}^{٣} = ١٢$

Scanned by CamScanner

مثال: اذا كان د دالة فردية متصلة في [-٣، ٥]،

$\int_{3}^{5} د(س)\,ءس = ٩$ فما قيمة $\int_{-3}^{5} د(س)\,ءس$

الحل

∵ الدالة فردية ∴ $\int_{-3}^{3} د(س)\,ءس = صفر$

∴ $\int_{-3}^{3} د(س)\,ءس + \int_{3}^{5} د(س)\,ءس = \int_{-3}^{5} د(س)\,ءس$

$صفر + ٩ = \int_{-3}^{5} د(س)\,ءس$

∴ $\int_{-3}^{5} د(س)\,ءس = ٩$

اذا كانت د فردية فإن $\int_{-أ}^{0} د(س)\,ءس = -\int_{0}^{أ} د(س)\,ءس$

مثال: اذا كانت د دالة زوجية متصلة على [-٤، ٤]،

$\int_{-4}^{4} د(س)\,ءس = ٢٠$ ، $\int_{0}^{2} د(س)\,ءس = ٦$ فما قيمة $\int_{-4}^{2} د(س)\,ءس$

الحل

∵ الدالة زوجية $\int_{-أ}^{أ} د(س)\,ءس = ٢ \int_{0}^{أ} د(س)\,ءس$

$٢٠ = ٢ \int_{0}^{4} د(س)\,ءس$

∴ $\int_{0}^{4} د(س)\,ءس = ١٠$

$\int_{-4}^{2} د(س)\,ءس = \int_{-4}^{0} د(س)\,ءس + \int_{0}^{2} د(س)\,ءس$

$= \int_{0}^{4} د(س)\,ءس + ٦$

$= ١٠ + ٦ = ١٦$

اذا كانت د زوجية فإن $\int_{-أ}^{0} د(س)\,ءس = \int_{0}^{أ} د(س)\,ءس$

تكامل محمد برائحة الورد

دليل التقويم ص ٢٥

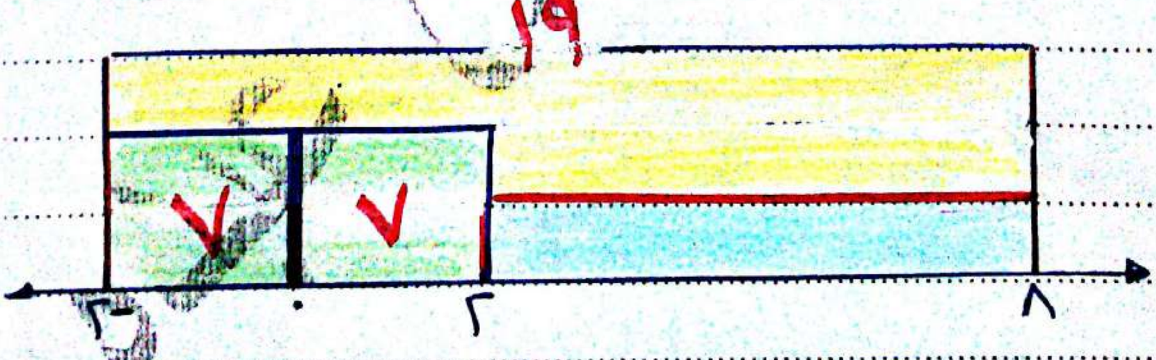
إذا كانت د(س) دالة زوجية متصلة على ح ،

$\int_{0}^{2} \text{د(س)}\, \text{دس} = 7$ ، $\int_{-2}^{8} \text{د(س)}\, \text{دس} = 19$ فإن

$\int_{2}^{8} \text{د(س)}\, \text{دس} = \ldots\ldots$

الحل

$\because \int_{-2}^{0} \text{د(س)}\, \text{دس} = \int_{0}^{2} \text{د(س)}\, \text{دس}$



$\therefore \int_{2}^{8} \text{د(س)}\, \text{دس} = 19 - (7 + 7) = 5$

تكامل محدد خطير

اوجد $\int_{0}^{\sqrt{2}} س\sqrt{٤-س^{٤}}\ دس$

الحل

نضع ص = $س^{٢}$ ← دص = ٢س دس ← $\frac{١}{٢}$دص = س دس

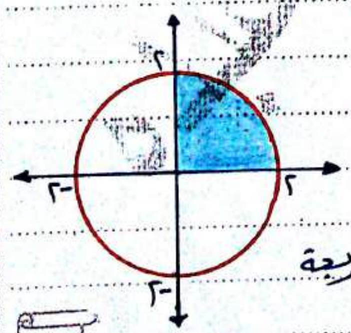
$ص^{٢} = س^{٤}$

عند س = ٠ ← ص = ٠ ، عند س = $\sqrt{٢}$ ← ص = ٢

$\therefore \int_{0}^{\sqrt{2}} س\sqrt{٤-س^{٤}}\ دس = \frac{١}{٢}\int_{0}^{2} \sqrt{٤-ص^{٢}}\ دص$

نضع ٤ − $ص^{٢}$ = $ل^{٢}$ ← $ل^{٢}$ + $ص^{٢}$ = ٤

وتمثل معادلة دائرة نصف قطرها = ٢ وحدة طول ومركزها نقطة الأصل (٠، ٠)



والتكامل المطلوب يمثل الجزء الموضح من الشكل

= $\frac{١}{٢}$ [ربع مساحة الدائرة]

= $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٤} \times ٤ \times \pi = \frac{\pi}{٢}$ وحدة مربعة

المساحات في المستوى

أشرف حسن عبيد

أولاً : مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات في الفترة [ا، ب] .

ثانياً : مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين .

١ مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات في الفترة [أ، ب]

نظرية

اذا كانت د دالة متصلة على الفترة [أ، ب] ، د(س) ≥ ٠ في هذه الفترة ، م مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب فإن :

$$م = \int_{أ}^{ب} د(س)\ دس$$

مثال : أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات والمستقيمين س = -١ ، س = ٢ حيث د(س) = س^{٢} + ١

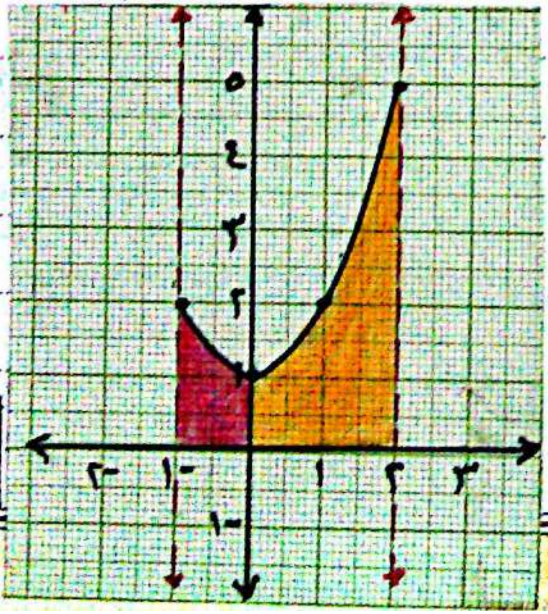
الحل :- الدالة متصلة في الفترة [-١، ٢] ، د(س) = س^{٢}+١ ≥ ٠ لكل س ∈ [-١، ٢]

$$\therefore م = \int_{-١}^{٢} (س^{٢}+١)\ دس$$

$$= \left[س + \frac{س^{٣}}{٣}\right]_{-١}^{٢} =$$

$$\left[٢ + \frac{(٢)^{٣}}{٣}\right] - \left[\frac{(-١)^{٣}}{٣} + (-١)\right] =$$

$$= ٦ \text{ وحدة مربعة}$$



أنت الحل بعبده

مثال: للطالب في الحصة: اوجد مساحة المنطقة المحدودة بمنحنى الدالة د ومحور السينات والمستقيمين س = ١ ، س = ٤ حيث د(س) = −س^٢ + ٤ س + ١

طريقة سريلة لتعيين حدود التكامل:

مثال٣: اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة د(س) = ∛(س+١) والمستقيم س = ٤ وفوق محور السينات.

الحل ١ نعين أصفار الدالة: د(س) = ∛(س+١) = ٠ ⟵ (س = −١) ، (س = ٤) معطى

٢ بحث الإشارة للدالة: كما بالرسم

−∞   د(س) < ٠   •   د(س) > ٠   ∞

− − − −   −١   + + + +   ٤   +

٣ د(س) في الفترة [−١، ٤] > ٠ موجبة

٤ ∴ المساحة =

م = ∫ من −١ إلى ٤ (س + ١)^(١/٣) ء س

= [٣ (س + ١)^(٤/٣) / ٤] من −١ إلى ٤

= ٥٫٦٦ تقريباً وحدة مساحة

مثال ٣: اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة د(س) = س^{٣} − ٤ س ومحور السينات والمستقيمين س = −٢ ، س = ١

الحل

نرسم د(س) = س^{٣} − ٤ س

س	−٢	−١	٠	١
د(س)	٠	٣	٠	−٣

د(س) فوق [−٢ ، ٠]
فوق محور السينات
د(س) تحت [٠ ، ١]
تحت محور السينات

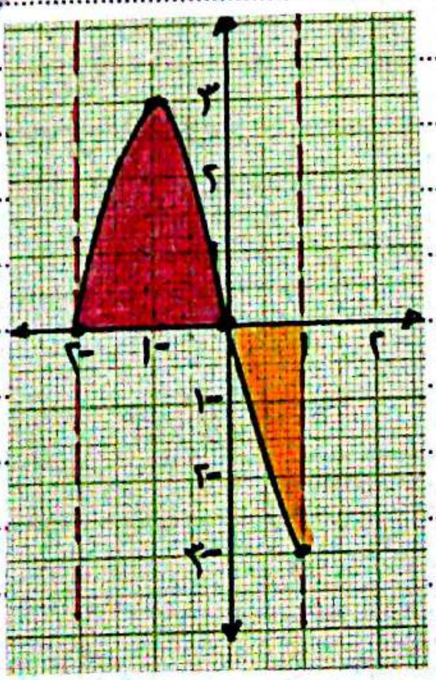
المساحة م = المساحة فوق + المساحة تحت

$$= \int_{-٢}^{٠} \text{د(س) ءس} + \left| \int_{٠}^{١} \text{د(س) ءس} \right|$$

$$= \int_{-٢}^{٠} (\text{س}^{٣} - ٤\text{س})\, \text{ءس} + \left| \int_{٠}^{١} (\text{س}^{٣} - ٤\text{س})\, \text{ءس} \right|$$

$$= \left[\frac{\text{س}^{٤}}{٤} - ٢\text{س}^{٢} \right]_{-٢}^{٠} + \left| \left[\frac{\text{س}^{٤}}{٤} - ٢\text{س}^{٢} \right]_{٠}^{١} \right|$$

$$= ٤ + \left| \frac{-٧}{٤} \right| = \frac{٢٣}{٤} \text{ وحدة مساحة}$$



المساحة م = م فوق + | م تحت |

ملحوظة: يجب من الأفضل رسم المنحنى للدالة المعطاة مستخدماً حدود التكامل المعطاة لمعرفة الجزء الموجود اعلى محور السينات ، الجزء الموجود أسفله ثم نقسم الفترة الى جزئيات كما في المثال السابق

مثال ٢: اوجد مساحة المنطقة المحدودة بمنحنى الدالة $د(س) = \frac{٤س}{س^٢+١}$ والمستقيم س = ٤ وتقع فوق محور السينات:

الحل: في كثير من المسائل التى يصعب رسمها بيانياً من الأسهل أن نوجد أصفار الدالة كحدود للتكامل

$د(س) = \frac{٤س}{س^٢+١} = ٠ \leftarrow \therefore س = ٠$ ، ومعطى $س = ٤$

نحدد الجزء فوق محور السينات من حيث اشارة الدالة باستخدام نقط تعويضية لتحديد المناطق + ، −

د(س)

د(س) − ، د(س) +

تحت ، ٠ ، فوق ، ٤

$م = \int_{٠}^{٤} د(س) \, ءس$

$= \int_{٠}^{٤} \frac{٤س}{س^٢+١} \, ءس = ٢ \int_{٠}^{٤} \frac{٢س}{س^٢+١} \, ءس$

قاعدة: $\int \frac{د'(س)}{د(س)} \, ءس = لو_هـ |د(س)| + ث$

$= ٢ \int_{٠}^{٤} \frac{٢س}{س^٢+١} \, ءس = ٢ \left[لو_هـ |س^٢+١| \right]_{٠}^{٤}$

$= ٢ لو_هـ ١٧ - ٢ لو_هـ ١ = ٥٫٦٧$ وحدة مساحة

اشارة د(س)

سالبة ، موجبة

تحت محور السينات ، ٠ ، فوق محور السينات

مثال ٤: أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د حيث د(س) = $س^3 - ٤س$ ومحور السينات وتقع أعلى محور السينات
حيث د:]−∞، ٣] ← ح

الحل

نوجد أصفار الدالة (نقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات)

د(س) = $س^3 - ٤س = ٠$

$= س(س^2 - ٤) = ٠$

∴ س = ٠ ، س = ٢ ، س = −٢

نبحث إشارة الدالة لتحديد المناطق الموجودة أعلى أو أسفل محور السينات

د(س)

فوقه   فوقه

− ‎−٢‎ + ٠ − ٢ + ٣

تحته   تحته

المساحة أعلى محور السينات = المساحة فوقه + المساحة الأخرى فوقه

$$= \int_{-2}^{0} (س^3 - ٤س)\, دس + \int_{2}^{3} (س^3 - ٤س)\, دس$$

= ٣٠,٢٥ وحدة مساحة

ملحوظة: إذا طلب مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د حيث د(س) = $س^3 - ٤س$ ومحور السينات حيث س = −٢، س = ٣

فتكون:

$$م = \int_{-2}^{0} د(س)\, دس + \left| \int_{0}^{2} د(س)\, دس \right| + \int_{2}^{3} د(س)\, دس$$

فوقه   تحته   فوقه

تمرين للطالب من الحصة: اوجد مساحة المنطقة المستوية المحدودة بالمنحنى ص = ٣ + ٢س − س² ومحور السينات

واجب

تمرين: اوجد مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين:

١) المنحنى ص = ٩ − س² ومحور السينات والمستقيمان س = −٢، س = ١

٢) المنحنى ص = $\sqrt{\text{س} + ٤}$ والمستقيمات س = ٠، س = ٥، ص = ٠

٣) المنحنى ص = ٣ − ٢س − س² ومحور السينات

٤) المنحنى د(س) = (س − ١)(س − ٢)(س − ٣) ومحوري الاحداثيات حيث د(س) ≥ ٠

٥) المنحنى ص = ٣ + ٢س − س² والمستقيمات س = −١، س = ٤، ص = ٠

★ صمم مهندس مدخل فندق على شكل قوس معادلته هي ص = $-\frac{1}{2}$(س − ١)(س − ٧) حيث س بالأمتار فإذا غطى هذا المدخل بزجاج تكلفة المتر المربع الواحد ١٠٠٠ جنيه فكم تكون تكلفة الزجاج

الحل

تكلفة زجاج المدخل = مساحة الزجاج × تكلفة المتر الواحد

اصفار الدالة د(س) = $\frac{1}{2}$(س − ١) × (س − ٧) = صفر

س = ١ ، س = ٧

+ +

قوس

١ ٧

المساحة = $\int_{1}^{7}$ د(س) ء س

$= \int_{1}^{7} -\frac{1}{2}$(س − ١)(س − ٧) . ء س $= -\frac{1}{2} \int_{1}^{7}$ (س² − ٨س + ٧) . ء س

$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\text{س}^3}{3} - ٨\frac{\text{س}^2}{2} + ٧\text{س}\right]_{1}^{7} = ١٨$

∴ التكلفة = ١٨ × ١٠٠٠ = ١٨٠٠٠ جنيه

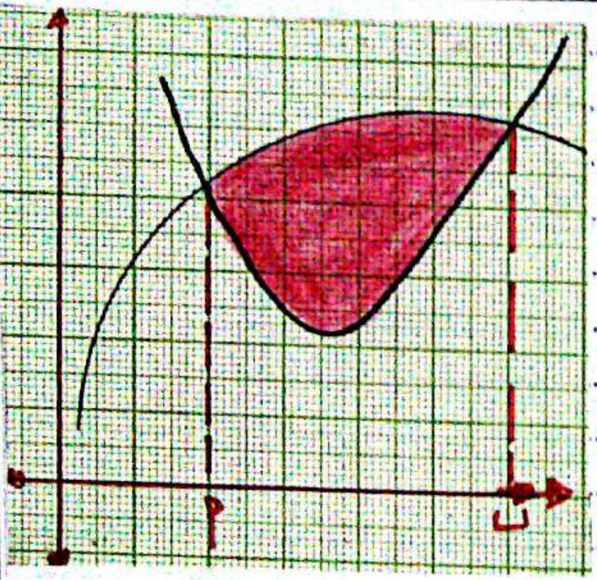
لا تنسى طريقة اصفار الدالة (أسهل)

ثانياً : مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين منحنيين

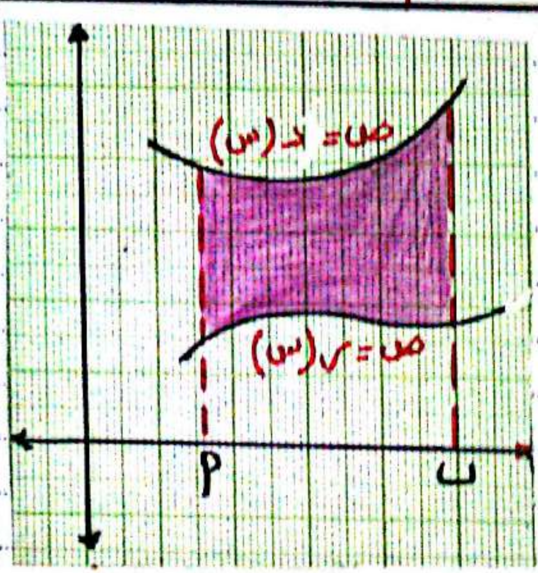
تعريف : اذا كان د ، ر دالتين متصلتين على الفترة [أ ، ب] ، وكان د(س) ≥ ر(س) لكل س ∈ [أ ، ب] فإن مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين ص = د(س) ، ص = ر(س) والمستقيمين س = أ ، س = ب تعطى بالعلاقة :

أ. أشرف حسن عبلد

$$م = \left| \int_{أ}^{ب} [د(س) - ر(س)] \, ء س \right|$$



ملحوظة : عندما تنحصر منطقة بين منحنيات متقاطعة فإن حدود التكامل بالنسبة إلى س هي الإحداثيات السينية لنقط تقاطع المنحنيات .



اذا كان $م_1$ المساحة بين محور السينات و المنحنى ص = د(س)
$م_2$ المساحة بين محور السينات و المنحنى ر(س) فإن المساحة بين المنحنيات = م

$$م = م_1 - م_2$$

في حالة تعدد المناطق المحصورة بين منحنيين : ★ نوجد الإحداثيات السينية لنقط التقاطع
★ نعين الفترات ★ نوجد $م = م_1 + م_2 + \dots$ كل مساحة على فترة .

مثال: أوجد مساحة المنطقة المحدودة بمنحنى الدالتين

د(س) = س^{٢} − ٢ ، ر(س) = ٣ − (س + ١)^{٢}

الحل

نوجد الإحداثيات السينية لنقط التقاطع بوضع د(س) = ر(س)

س^{٢} − ٢ = ٣ − (س + ١)^{٢}

س^{٢} − ٢ = ٣ − س^{٢} − ٢س − ١

٢س^{٢} + ٢س − ٤ = ٠

س^{٢} + س − ٢ = ٠

(س + ٢)(س − ١) = ٠

س = −٢ ، س = ١

خطوات الحل

تأكد: عند س = −٢ ← د(−٢) = ٢ ، ر(−٢) = ٢ ✓

عند س = ١ ← د(١) = −١ ، ر(١) = −١ ✓

∴ عند س = −٢ ، س = ١ يكون د(س) = ر(س)

فيكون س = −٢ ، س = ١ حدي التكامل

المساحة = $\left| \int_{\text{ب}}^{\text{أ}} [\text{أي دالة} - \text{الأخرى}]\, \text{ءس} \right|$

م = $\left| \int_{-٢}^{١} [\text{د(س)} - \text{ر(س)}]\, \text{ءس} \right|$

= $\int_{-٢}^{١} [(\text{س}^{٢} - ٢) - (٣ - (\text{س} + ١)^{٢})]\, \text{ءس}$

= $\int_{-٢}^{١} (-\text{س}^{٢} - \text{س} + ٢)\, \text{ءس} = \left[\frac{-\text{س}^{٣}}{٣} - \frac{\text{س}^{٢}}{٢} + ٢\text{س} \right]_{-٢}^{١}$

= $\left[\frac{-(١)^{٣}}{٣} - \frac{(١)^{٢}}{٢} + ٢(١) \right] - \left[\frac{-(-٢)^{٣}}{٣} - \frac{(-٢)^{٢}}{٢} + ٢(-٢) \right]$

= $\frac{٤٩}{٦}$ وحدة مربعة

مثال ٤: اوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د، والدالة ر حيث د(س) = س³ − ٣س² + ٥ ، ر(س) = س + ٢

الحل

خطوات الحل [١] ايجاد الاحداثيات السينية لنقط التقاطع

بوضع س³ − ٣س² + ٥ = س + ٢

س³ − ٣س² − س + ٣ = ٠ تحليل بالتقسيم

(س³ − ٣س²) + (−س + ٣) = ٠

س² (س − ٣) − (س − ٣) = ٠

(س − ٣) (س² − ١) = ٠ ← (س − ٣) (س − ١) (س + ١) = ٠

س = ٣ س = ١ س = −١

[٢] تأكد

عند س = ٣ ← د(٣) = ٥ ، ر(٣) = ٥ ✓

عند س = ١ ← د(١) = ٣ ، ر(١) = ٣ ✓

عند س = −١ ← د(−١) = ١ ، ر(−١) = ١ ✓

[٣] لمعرفة الدالة الأكبر: يمكن الاستغناء عن هذه الخطوة بوضع علامة | | عند كتابة قانون المساحة.

يوجد فترتان [−١ ، ١] ، [١ ، ٣]

[٤] $م = \left| \int_{-1}^{1} [د(س) - ر(س)]\, ءس \right| + \left| \int_{1}^{3} [د(س) - ر(س)]\, ءس \right|$

= ٨ وحدات مربعة

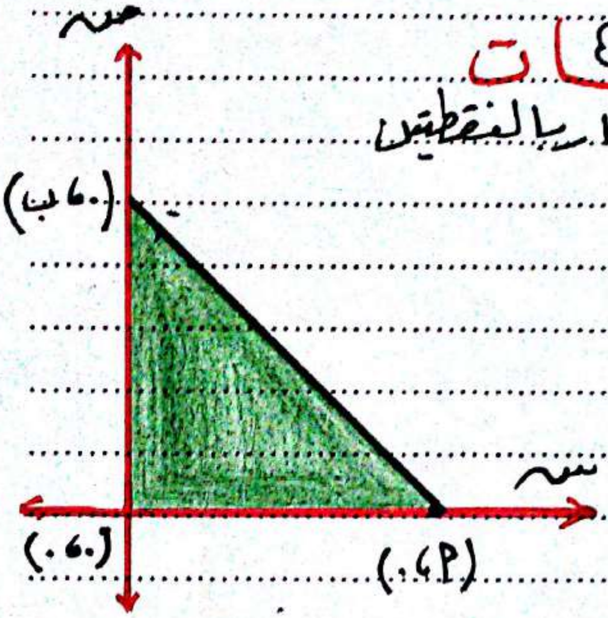
ملحوظة هامة: يمكن الاستغناء عن الخطوة [٣] تأكد

بأن نضع $م = \left| \int_{أ}^{ب} [د(س) - ر(س)]\, ءس \right|$ كمية موجبة دائماً

وذلك في جميع المسائل

أ/ أشرف حسن ٠١٠٨٤٧٢٧٢٢١

باستخدام التكامل المحدد أثبت أن مساحة المثلث الذى طول قاعدته أ وارتفاعه ب تساوى $\frac{1}{2}$ أ ب



(أشرف حسن)

الإثبات

نوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (أ ، ٠) ، (٠ ، ب)

الميل = $\frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{س} - \text{س}_1}$

$\frac{\text{ص} - ٠}{\text{س} - \text{أ}} = \frac{-\text{ب}}{\text{أ}}$

ص = $\frac{-\text{ب}}{\text{أ}}$ (س - أ)

ص = $\frac{-\text{ب}}{\text{أ}}$ س + ب

أشرف حسن جبريل

نوجد مساحة المنطقة المحددة بـ محور السينات ومحور الصادات والمستقيم كما فى الشكل الذى معادلته ص = $\frac{-\text{ب}}{\text{أ}}$ س + ب

حدود التكامل س = ٠ ، س = أ

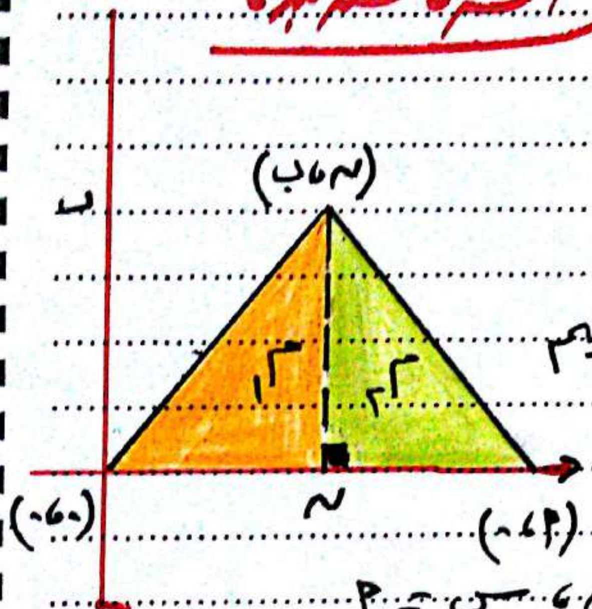
م = $\int_{٠}^{\text{أ}}$ ص . د س = $\int_{٠}^{\text{أ}} \left(\frac{-\text{ب}}{\text{أ}}\text{س} + \text{ب}\right)$ د س

= $\left[\frac{-\text{ب}}{\text{أ}} \times \frac{\text{س}^2}{2} + \text{ب س}\right]_{٠}^{\text{أ}} = \left[\frac{-\text{ب}}{\text{أ}} \times \frac{\text{أ}^2}{2} + \text{أ ب}\right] - [\text{صفر}]$

= $-\frac{1}{2}$ أ ب + أ ب = $\frac{1}{2}$ أ ب

حل آخر: باستخدام التكامل المحدود اثبت أن مساحة المثلث الذي طول قاعدته م وارتفاعه ب يساوي $\frac{1}{2}$ م ب

الحل   أ/ شريا حسيبه



الفكرة

$$\text{م} = \text{م}_1 + \text{م}_2$$

* م_1 محدودة بالمستقيمات س = ٠، س = ن، المستقيم المائل معادلته $\text{ص}_1 = \frac{\text{ب}}{\text{ن}}\,\text{س}$

* م_2 محدودة بالمستقيمات س = ن، س = م والمستقيم المائل معادلته $\text{ص}_2 = \left(\frac{\text{ب}}{\text{ن}-\text{م}}\right)(\text{س}-\text{م})$

$$\text{م} = \int_{0}^{\text{ن}} \text{ص}_1 \, \text{د}\text{س} + \int_{\text{ن}}^{\text{م}} \text{ص}_2 \, \text{د}\text{س}$$

$$= \int_{0}^{\text{ن}} \frac{\text{ب}}{\text{ن}}\,\text{س}\,\text{د}\text{س} + \int_{\text{ن}}^{\text{م}} \left[\frac{\text{ب}}{(\text{ن}-\text{م})}\,\text{س} - \frac{\text{ب}}{(\text{ن}-\text{م})}\,\text{م}\right] \text{د}\text{س}$$

$$= \left[\frac{\text{ب}}{\text{ن}} \times \frac{\text{س}^2}{2}\right]_{0}^{\text{ن}} + \left[\frac{\text{ب}}{(\text{ن}-\text{م})} \times \frac{\text{س}^2}{2} - \frac{\text{ب م}}{(\text{ن}-\text{م})}\,\text{س}\right]_{\text{ن}}^{\text{م}}$$

بعد التعويض والاختصار

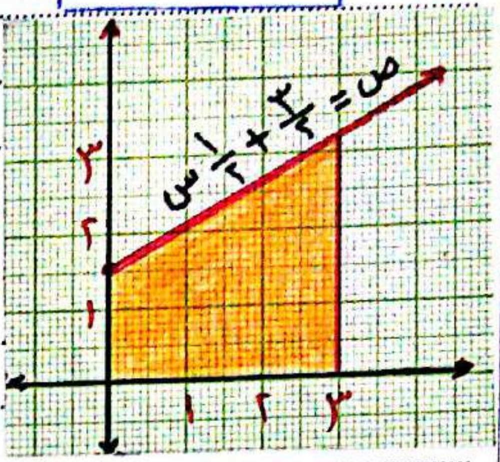
$$\therefore \text{م} = \frac{1}{2}\,\text{م ب}$$

أ/ شريا حسيبه

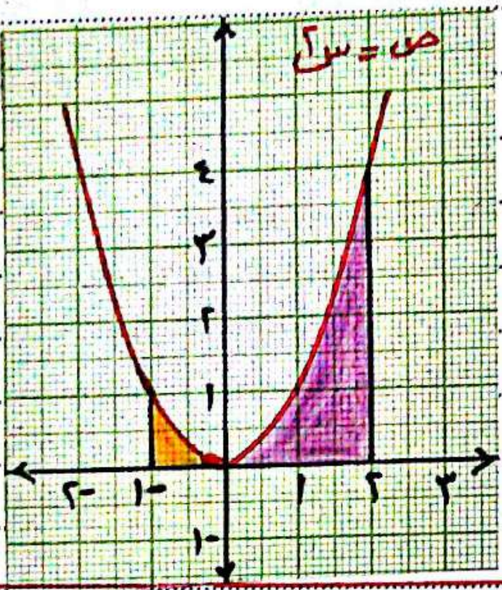
واجب: أوجد مساحة المنطقة الملونة من الأشكال الآتية:

أ/ أشرف حسن عبده

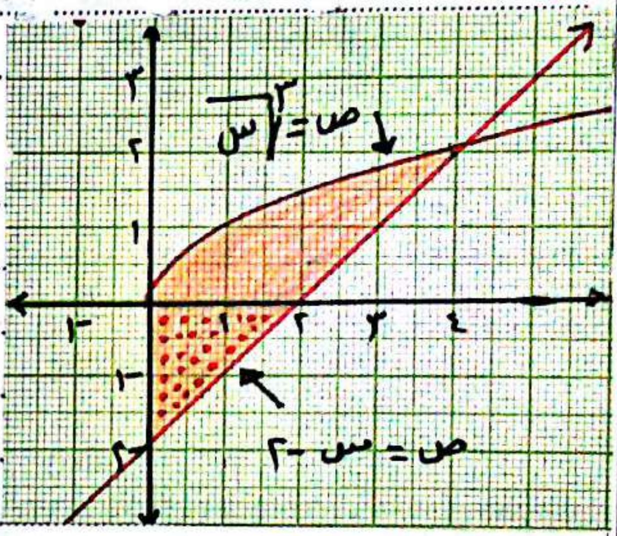
①



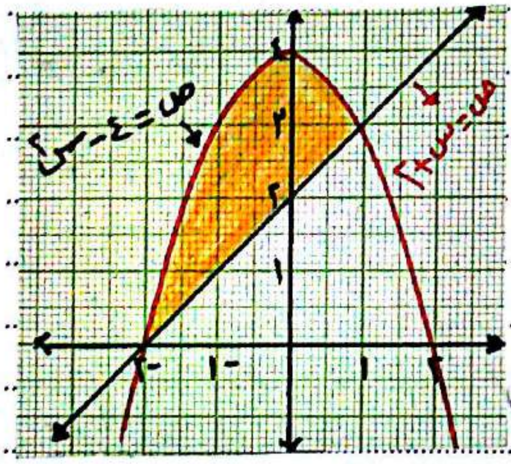
②



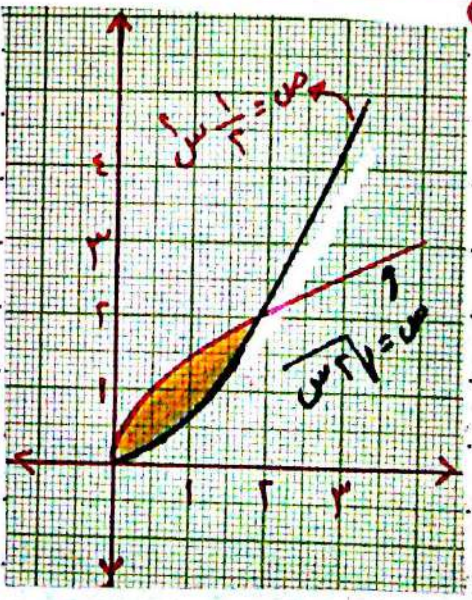
③



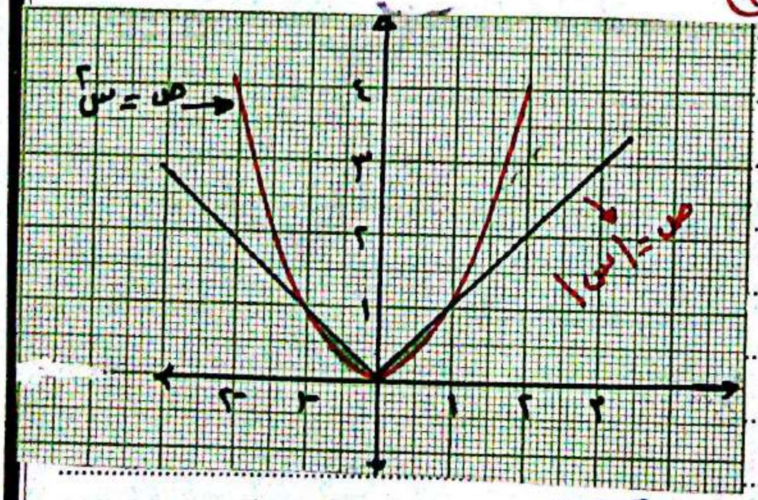
④



⑤



⑥



أ/ أشرف حسن عبده

حجوم الأجسام الدورانية

المجسم الدوراني: هو المجسم الذي ينشأ من دوران منطقة مستوية دورة كاملة حول مستقيم ثابت في مستويها.

المنطقة (المساحة)	محور الدوران	الشكل الناتج
$\triangle$ قائم	أي ضلع من أضلاعه	مخروط قائم
المستطيل	أي ضلع من أضلاعه	أسطوانة قائمة
نصف دائرة	القطر	كرة

نظرية

① حجم الجسم الناشئ من دوران منطقة مستوية حول محور

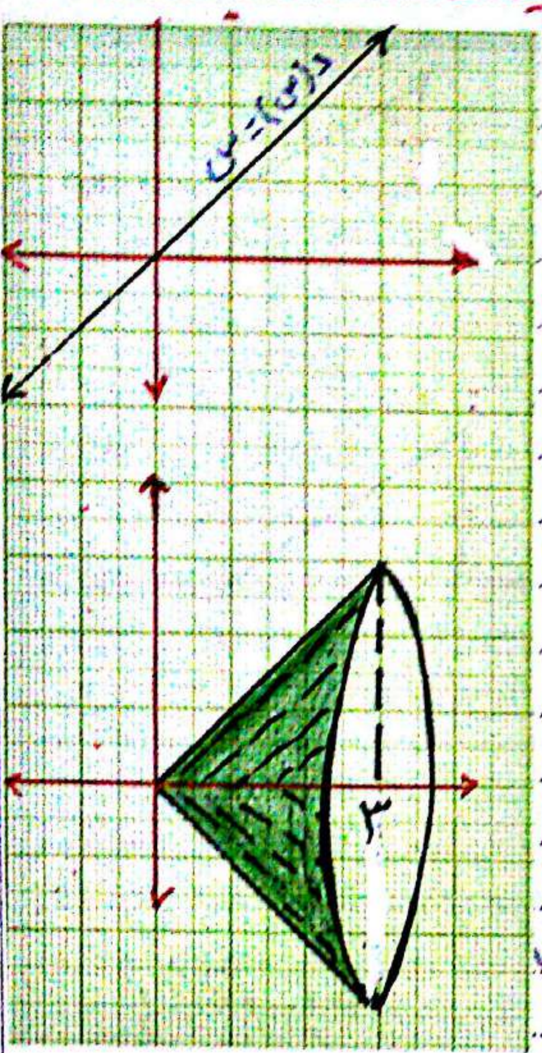
إذا كانت د دالة متصلة على الفترة [أ، ب]،
د(س) $\geqslant$ ٠ لكل س $\in$ [أ، ب] فإن

حجم الجسم الناشئ من دوران المساحة المحددة بالمنحنى ص = د(س) ومحور السينات والمستقيمين س = أ، س = ب دورة كاملة حول محور السينات

هو

$$ح = \pi \int_{أ}^{ب} [د(س)]^2 \, ءس$$

مثال ٤: اوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د(س) = س ومحور السينات والمستقيمين س = ٠ ، س = ٣ دورة كاملة حول محور السينات



الحل

الدالة د(س) = س كثيرة حدود متصلة على الفترة [٠ ، ٣]

$$ح = \pi \int_{0}^{3} [د(س)]^2 \, دس$$

$$= \pi \int_{0}^{3} س^2 \, دس = \pi \left[\frac{س^3}{3}\right]_{0}^{3}$$

$$ح = \pi \left[\frac{27}{3}\right]$$

$$ح = 9\pi$$ وحدة مكعبة

اسم الجسم: مخروط قائم

تمرين من الحصة: اوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د(س) = $س^2 + 1$ ومحور السينات والمستقيمين س = -١ ، س = ١ دورة كاملة حول محور السينات

الجواب: $\frac{56}{15}\pi$ وحدة مكعبة

تمرين من الحصة: اوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $أ^2 ص^2 + ب^2 س^2 = أ^2 ب^2$ ومحور السينات، حيث أ ، ب ثوابت دورة كاملة حول محور السينات

الجواب: $\frac{4}{3}\pi$ $ب^2$ أ وحدة مكعبة

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $أ^2 ص^2 + ب^2 س^2 = أ^2 ب^2$ ومحور السينات حيث أ، ب ثوابت .. دورة كاملة حول محور السينات

الحل: حدود التكامل = نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات

بوضع ص = 0 $\therefore ب^2 س^2 = أ^2 ب^2$

$\therefore س = \pm أ$

$$ح = \pi \int_{-أ}^{أ} ص^2 \, ءس = \pi \int_{-أ}^{أ} \left(\frac{-ب^2 س^2 + أ^2 ب^2}{أ^2} \right) ءس$$

$$= (\pi) \left(\frac{ب^2}{أ^2} \right) \int_{-أ}^{أ} (أ^2 - س^2) \, ءس$$

$\because$ الدالة زوجية $\therefore \int_{-أ}^{أ} = 2 \int_{0}^{أ}$

$$= 2\pi \left(\frac{ب^2}{أ^2} \right) \int_{0}^{أ} (أ^2 - س^2) \, ءس$$

$$= \frac{2\pi ب^2}{أ^2} \left[أ^2 س - \frac{س^3}{3} \right]_{0}^{أ}$$

$ح = \frac{4}{3} \pi ب^2 أ$ وحدة مكعبة

ملحوظة هامة جداً

اذا كان دوران المنطقة المستوية حول محور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب فإن:

$$ح = \pi \int_{أ}^{ب} ص^2 \cdot دس = \pi \int_{أ}^{ب} [د(س)]^2 دس$$

اذا كان دوران المنطقة المستوية حول محور الصادات والمستقيمين ص = جـ ، ص = ء فإن:

$$ح = \pi \int_{جـ}^{ء} س^2 \, دص$$

مثال: اوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص = س^2 ومحور الصادات والمستقيمين ص = ٠، ص = ٦ دورة كاملة حول محور الصادات

الحل

∵ ص = س^2 والدوران حول محور الصادات

حدود التكامل ص = ٠ ، ص = ٦

س^2 = ص

$$ح = \pi \int_{0}^{6} س^2 \cdot دص$$

$$= \pi \int_{0}^{6} ص \, دص = \pi \left[\frac{ص^2}{2}\right]_{0}^{6}$$

$ح = 18\pi$ وحدة مكعبة.

تمرين من الحصة: اوجد حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $ص = س^{2} + 1$ ومحور الصادات والمستقيم $ص = 5$ دورة كاملة حول محور الصادات

الواجب

أكمل

(١) حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $ص = 2\sqrt{س}$ ، $ص = 0$ ، $س = 1$ دورة كاملة حول محور السينات = ...

(٢) حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $ص = \frac{1}{س}$ والمستقيمين $ص = 1$ ، $ص = 2$ ومحور الصادات دورة كاملة حول محور الصادات = ...

(٣) حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $ص = س^{2}$ والمستقيم $ص = 1$ دورة كاملة حول محور الصادات = ...

(٤) $\pi \int_{-2}^{2} (4 - س^{2})\, ءس$ هو حجم كرة نصف قطرها = ...

(٥) اوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيات والمستقيمات المعطاة والشروط المقابلة لها:

* $ص = س$ ، $س = 3$ ، $ص = 0$ دورة كاملة حول محور السينات
* $ص = \frac{1}{س}$ ، $س = 1$ ، $س = 4$ ، $ص = 0$ 〃 〃 〃
* $ص = 3 - س$ ، $س = 0$ ، $ص = 0$ 〃 〃 〃
* $ص = |س|$ ، $س = 4$ ، $ص = 0$ 〃 〃 〃
* $ص = 4 - س^{2}$ ، $س = 0$ ، $ص = 0$ دورة كاملة حول محور الصادات
* $ص = س^{2}$ ، $س = 0$ ، $ص = 0$ ، $ص = 8$ 〃 〃 〃
* $ص = س^{3}$ ، $س = 0$ ، $ص = 0$ ، $ص = 8$ 〃 〃 〃
* $س + 2ص = 0$ ، $س = 0$ ، $ص = 0$ ، $ص = 3$ 〃 〃 〃

نظرية

حجم الجسم الناشئ من دوران منطقة محدودة بمنحنيين

اذا كانت د ، ر دالتين متصلتين على الفترة [أ ، ب] ، د(س) ≥ ٠ ، ر(س) ≥ ٠ لكل س ∈ [أ ، ب] فإن

حجم الجسم الدوراني الناتج عن دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيين والمستقيمين س = أ ، س = ب دورة كاملة حول محور السينات هو :

$$ح = \pi \int_{أ}^{ب} [د(س)^2 - ر(س)^2] \, ءس$$

ملحوظة: نتيجة من النظرية السابقة

حجم الجسم الدوراني الناتج عن دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيين والمستقيمين ص = جـ ، ص = ء في [جـ ، ء] دورة كاملة حول محور الصادات هي :

$$ح = \pi \int_{جـ}^{ء} [س_1^2 - س_2^2] \, ءص$$

مثال ٤ : اوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $ص_1 = جاس$ ، $ص_2 = جتاس$ حيث $س \in [0 ، \frac{\pi}{4}]$ دورة كاملة حول محور السينات

الحل

* نوجد نقط التقاطع للمنحنيات

$جاس = جتاس \quad \div جتاس$

$ظاس = 1$

$\therefore س = \frac{\pi}{4}$

* $$ح = \pi \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} (ص_1^2 - ص_2^2) \, دس \right|$$

$$= \pi \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} (جا^2س - جتا^2س) \, دس \right|$$

$$= \pi \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} -جتا2س \, دس \right|$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2} جا2س \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \pi \times \frac{1}{2} جا\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ وحدة مكعبة}$$

تمرين من الحصة : اوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $ص = س^2$ ، والمستقيم $ص = 2س$ دورة كاملة حول محور السينات

الجواب $\frac{64}{15}\pi$

تمرين من الحصة : اوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $ص = 4 - س^2$ والمستقيم $2س + ص = 4$ دورة كاملة حول محور الصادات

الجواب $\frac{8}{3}\pi$

٠١٢٢ ٧٢٧ ٨٠٨٤
أ/ أشرف حسن شبده

الواجب

(١) اوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $ص = \frac{٤}{س}$ والمستقيم $س + ص = ٥$ دورة كاملة حول محور السينات

(٢) اوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $٢ص = س^٢$ ، $ص = \sqrt{٢س}$ دورة كاملة حول محور الصادات

(٣) اوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيان $ص = \sqrt{٢س}$ ، $ص = س^٢$ دورة كاملة حول محور السينات

(٤) اوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $ص = \frac{٤}{س-١}$ والمستقيمين $س = ٢$ ، $س = ٤$ ومحور السينات دورة كاملة حول :

* محور السينات * محور الصادات

(٥) اوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $ص = \sqrt{٢س}$ ومحور السينات والمماس للمنحنى عند النقطة (٢ ، ٢) الواقعة عليه لمنحنى تدور هذه المنطقة دورة كاملة حول محور السينات

مع المراجعة النهائية بإذن الله

الحمد لله