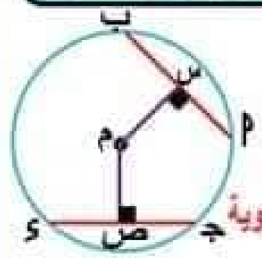
علاقة أوتار الدائرة بمركزها

ملاحظة

بعد الوتر عن مركز الدائرة هو طول العمود المرسوم عليه من مركز الدائرة

نظرية ١

الأوتار المتساوية في الطول في دائرة على أبعاد متساوية من مركز الدائرة



∵ م س ⊥ أب

∵ م ص ⊥ جـ ء

∵ أب = جـ ء أوتار متساوية

∴ م س = م ص أبعاد متساوية

عكس نظرية ١

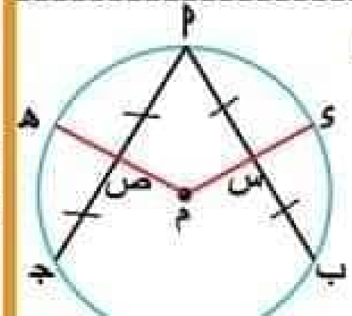
إذا كانت الأوتار على أبعاد متساوية من مركز الدائرة فإنها تكون متساوية في الطول

نتيجة

في الدوائر المتطابقة الأوتار المتساوية في الطول في دائرة على أبعاد متساوية من مركز الدائرة

---

(١) في الشكل المقابل



أب = أجـ ، س، ص منتصفي أب ، أجـ

اثبت أن ء س = هـ ص

البرهان

∵ س منتصف أب ∴ م س ⊥ أب

∵ ص منتصف أجـ ∴ م ص ⊥ أجـ

∵ أب = جـ ء أوتار متساوية

∴ م س = م ص أبعاد متساوية (١)

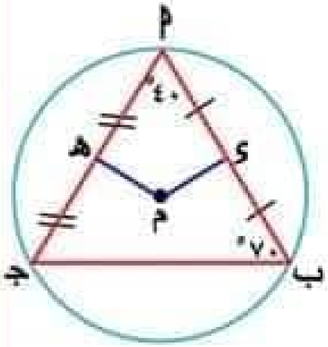
∵ م ء = م هـ = نق (٢)

بطرح ١ من ٢

∴ ء س = هـ ص

---

(٢) في الشكل المقابل



ء، هـ منتصفي أب ، أجـ

ق(∠أ) = ٤٠°

ق(∠ب) = ٧٠°

اثبت أن م ء = م هـ

البرهان في Δ أب جـ

∵ ق(∠جـ) = ١٨٠ − (٧٠ + ٤٠) = ٧٠°

∴ ق(∠جـ) = ق(∠ب)

∴ أب = أجـ أوتار متساوية (١)

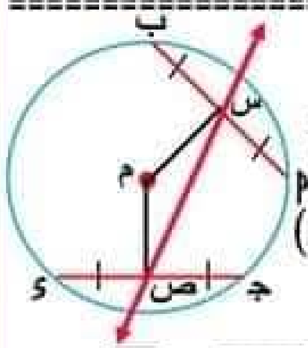
∵ ء منتصف أب ∴ م ء ⊥ أب (٢)

∵ هـ منتصف أجـ ∴ م هـ ⊥ أجـ (٣)

من ١ ، ٢ ، ٣ ∴ م ء = م هـ أبعاد متساوية

---

(٣) في الشكل المقابل



أب = جـ ء ،

س، ص منتصفي أب ، جـ ء

اثبت أن

ق(∠أ س ص) = ق(∠جـ ص س)

البرهان

∵ س منتصف أب ∴ م س ⊥ أب

∴ ق(∠م س أ) = ٩٠°

∵ ص منتصف أجـ ∴ م ص ⊥ أجـ

∴ ق(∠م ص جـ) = ٩٠°

∴ ق(∠م س أ) = ق(∠م ص جـ) = ٩٠° (١)

∵ أب = جـ ء أوتار متساوية

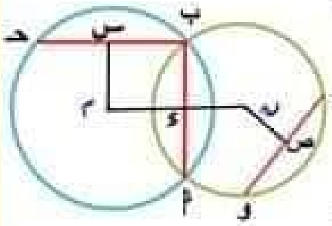
∴ م س = م ص أبعاد متساوية

∴ ق(∠م س ص) = ق(∠م ص س) (٢)

بطرح ٢ من ١

∴ ق(∠أ س ص) = ق(∠جـ ص س)

(٤) فى الشكل المقابل



م س = م ء

، ن ء = ن ص

ن ص ⊥ و هـ

، س منتصف جـ ب

اثبت أن ب جـ = هـ و

البرهان

∵ م ن خط المركزين ، أ ب وتر مشترك

∴ م ن ⊥ أ ب

∵ ن ء ⊥ أ ب ، م ء ⊥ أ ب

∵ س منتصف جـ ب ∴ م س ⊥ ب جـ

∵ م س = م ء أبعاد متساوية

∴ ب جـ = أ ب أوتار متساوية (١)

∵ ن ص ⊥ و هـ

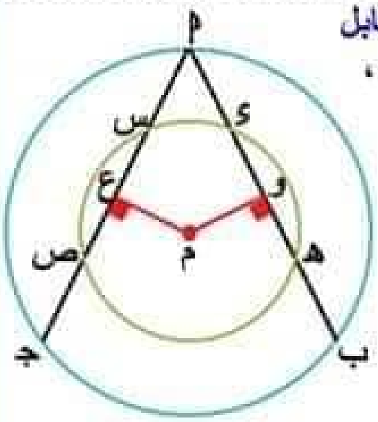
∵ ن ء = ن ص أبعاد متساوية

∴ أ ب = هـ و أوتار متساوية (٢)

من ١ ، ٢ ∴ ب جـ = هـ و

---

(٥) فى الشكل المقابل



دائرتان متحدتا المركز م ،

أ ب = أ جـ

م و ⊥ أ ب

، م ع ⊥ أ جـ

اثبت أن

ء هـ = س ص

البرهان

فى الدائرة الكبرى

∵ م و ⊥ أ ب

∵ م ع ⊥ أ جـ

∵ أ ب = أ جـ أوتار متساوية

∴ م و = م ع أبعاد متساوية

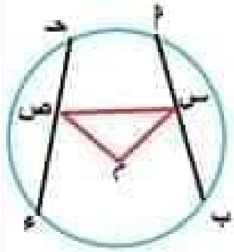
فى الدائرة الصغرى

∵ م و = م ع أبعاد متساوية

∴ ء هـ = س ص أوتار متساوية

تمارين ٤

س١ أكمل ما يلى :



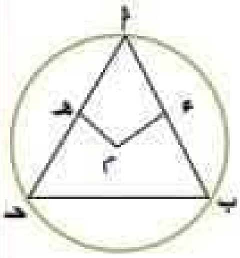
١ م دائرة ، س منتصف أ ب

، ص منتصف جـ ء

ق (∠ أ س ص) = ٥٠°

أ ب = جـ ء فإن :

ق (∠ س م ص) = ...°

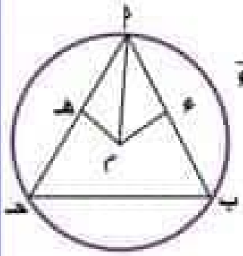


٢ دائرة م ، ء منتصف أ ب

هـ منتصف أ جـ

ق (∠ أ) = ٥٠°

فإن: ق (∠ ء م هـ) = ...°

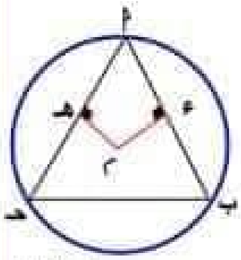


٣ دائرة م ، أ ب = أ جـ

، ء منتصف أ ب ، هـ منتصف أ جـ

ق (∠ ء أ هـ) = ٦٠°

ق (∠ ء م أ) = ...°



٤ دائرة م ، أ ب = أ جـ

ء م = س + ٢ سم

هـ م = ٦ سم

فإن س = ...

٥ الأوتار المتساوية فى الطول فى دائرة على .... مركز الدائرة

٦ إذا كانت الأوتار على أبعاد متساوية من مركز الدائرة فإنها تكون .....

(٢) فى الشكل المقابل :

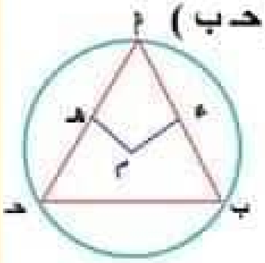
ق (∠ أ ب جـ) = ق (∠ أ جـ ب)

م هـ ⊥ أ جـ

، ء منتصف أ ب

اثبت أن :

م ء = م هـ



===

(٣) فى الشكل المقابل :

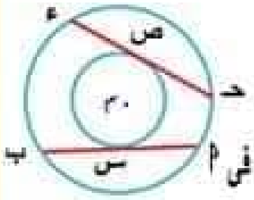
دائرتان متحدا المركز م

، أ ب ، جـ ء وتران

في الدائرة الكبرى يمسان الدائرة الصغرى في

س ، ص على الترتيب

أثبت أن : أ ب = جـ ء



===

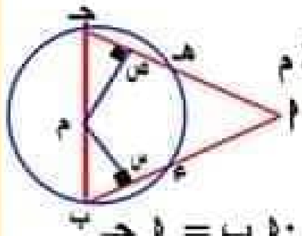
(٤) فى الشكل المقابل

ب جـ قطر فى الدائرة م

م س ⊥ أ ب

، م ص ⊥ أ جـ

ب ء = جـ هـ أثبت أن : أ ب = أ جـ



===

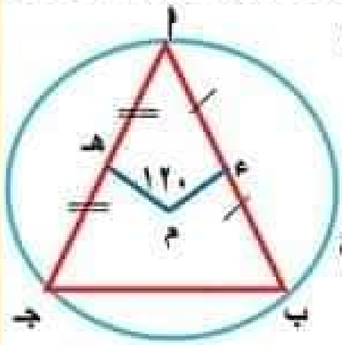
(٥) فى الشكل المقابل

ء منتصف أ ب

هـ منتصف أ جـ

م ء = م هـ

ق (∠ ء م هـ) = ١٢٠°



===

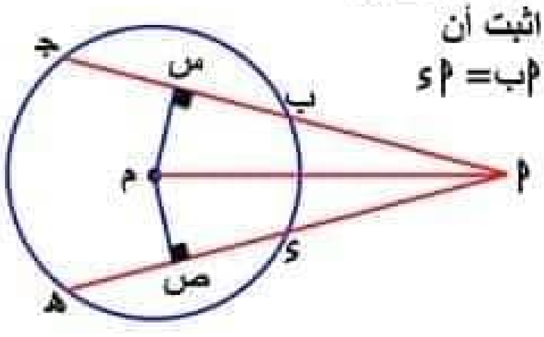
(٦) فى الشكل المقابل

ب جـ = ء هـ ، م س ⊥ ب جـ

م ص ⊥ ء هـ

اثبت أن

أ ب = أ ء



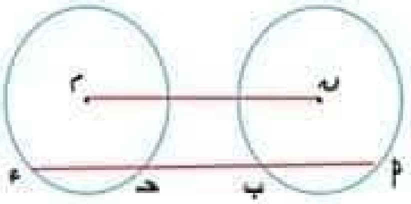
===

(٧) فى الشكل المقابل :

دائرتان م ، ن متطابقتان أ ب // م ن

أثبت أن :

أ جـ = ب ء



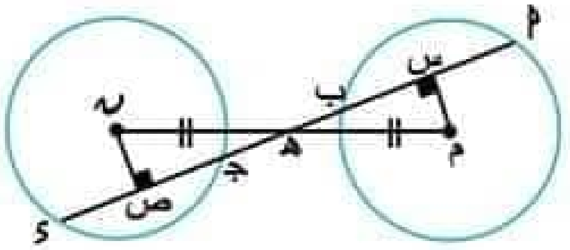
===

(٨) فى الشكل المقابل

م، ن دائرتان متطابقتان و متباعدتان

، هـ منتصف م ن ، اثبت أن أ ب = جـ ء

، هـ منتصف أ ء



===

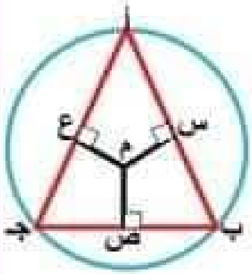
(٩) فى الشكل المقابل

إذا كان م س = م ص = م ع

أوجد ق (∠ أ)

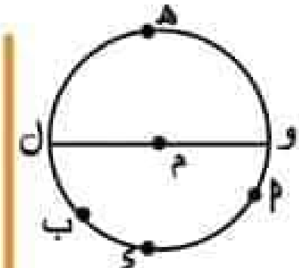
وإذا كان أ ب = ١٠ سم

أوجد محيط △ أ ب جـ



الزاوية المركزية و قياس الأقواس

القوس



هناك قوسان يعبر عنهما $\overset{\frown}{\text{أب}}$

(١) $\overset{\frown}{\text{أب}}$ (الأصغر) أو $\overset{\frown}{\text{أ ء ب}}$

(٢) $\overset{\frown}{\text{أب}}$ (الأكبر) أو $\overset{\frown}{\text{أ هـ ب}}$

ملاحظات :-

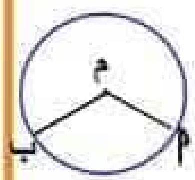
(١) $\overset{\frown}{\text{أب}}$ يعبر عن القوس الأصغر إن لم يذكر غير ذلك

(٢) إذا كان $\overline{\text{ول}}$ قطر فى الدائرة م فإن

$\overset{\frown}{\text{وهـل}} = \overset{\frown}{\text{وءل}}$ ويسمى كلا منهما نصف دائرة

الزاوية المركزية

هى الزاوية التى رأسها مركز الدائرة و يحمل كل من ضليعها نصف قطر فى الدائرة



ملاحظات هامة

١) ($\angle$ أ م ب) المركزية يقابلها $\overset{\frown}{\text{أب}}$ (الأصغر)

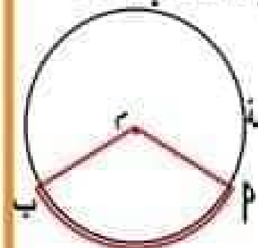
٢) ($\angle$ أ م ب) المركزية المنعكسة يقابلها $\overset{\frown}{\text{أب}}$ (الأكبر)

قياس القوس

هو قياس الزاوية المركزية المقابلة له

ق($\overset{\frown}{\text{أب}}$) = ق($\angle$ أ م ب)

ق($\overset{\frown}{\text{أب}}$) الأكبر = ق($\angle$ أ م ب) المنعكسة



ملاحظات هامة

١) قياس الدائرة = ٣٦٠°

٢) قياس القوس الذى يمثل نصف الدائرة = ١٨٠°

٣) قياس القوس الذى يمثل ربع الدائرة = ٩٠°

٤) قياس القوس الذى يمثل ثلث الدائرة = ١٢٠°

٥) قياس القوس الذى يمثل ثلاث أرباع الدائرة = ٢٧٠°

٦) قياس $\frac{٢}{٥}$ الدائرة = $\frac{٢}{٥}$ × ٣٦٠° = ١٤٤°

طول القوس

هو جزء من محيط دائرة يتناسب مع قياسه

$$\frac{\text{طول القوس}}{\text{محيط الدائرة}} = \frac{\text{قياس القوس}}{\text{قياس الدائرة}}$$

طول القوس = $\frac{\text{قياس القوس}}{\text{قياس الدائرة}}$ × محيط الدائرة

$= \frac{\text{قياس القوس}}{٣٦٠} \times ٢\pi\,\text{نق}$

ملاحظات هامة

١) طول القوس الذى يمثل نصف الدائرة = π نق

٢) طول القوس الذى يمثل ربع الدائرة = $\frac{١}{٤} \times ٢\pi$ نق

$= \frac{١}{٢}\pi$ نق

٣) طول القوس الذى يمثل ثلث الدائرة = $\frac{١}{٣} \times ٢\pi$ نق

$= \frac{٢}{٣}\pi$ نق

مثـــال ١

أوجد طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها ١٢٠° فى دائرة طول نصف قطرها ٢١ سم

الحل

$\because$ طول القوس = $\frac{\text{قياس القوس}}{\text{قياس الدائرة}}$ × محيط الدائرة

$\therefore$ طول القوس = $\frac{١٢٠}{٣٦٠} \times ٢\pi$ نق

$= \frac{١}{٣} \times ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٢١ = ٤٤$ سم

مثـــال ٢ أوجد طول القوس الذى يمثل ربع الدائرة التى طول نصف قطرها ١٤سم

الحل

طول القوس = $\frac{١}{٤} \times ٢\pi$ نق

$= \frac{١}{٤} \times ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ١٤ = ٢٢$سم

مثال ٣ أوجد قياس وطول القوس الذى يمثل $\frac{٢}{٥}$ من الدائرة حيث طول قطر الدائرة ١٤ سم $(\pi = \frac{٢٢}{٧})$

الحل

قياس القوس = $\frac{٢}{٥}$ قياس الدائرة

= $\frac{٢}{٥} \times ٣٦٠° = ١٤٤°$

طول القوس = $\frac{١٤٤°}{٣٦٠°} \times ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٧ = ١٧٫٦$ سم

مثال ٤ أوجد قياس القوس الذى طوله ١١ سم فى دائرة طول نصف قطرها ٧ سم $(\pi = \frac{٢٢}{٧})$

الحل

قياس القوس = $\frac{\text{طول القوس}}{\text{محيط الدائرة}} \times ٣٦٠°$

قياس القوس = $\frac{١١}{٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٧} \times ٣٦٠° = ٩٠°$

مثال ٥ فى الدائرة م ق(∠ب) = ٤٥ ، أ م = ٧ سم أوجد طول ⌢أب

الحل

∵ م أ = م ب = نق

∴ Δ أ م ب متساوى الساقين

∴ ق(∠أ) = ق(∠ب) = ٤٥°

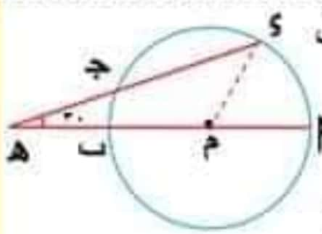
∴ ق(∠م) = ١٨٠ − (٤٥ + ٤٥) = ٩٠°

∴ ق(⌢أب) = ٩٠°

∴ طول ⌢أب = $\frac{\text{قياس القوس}}{٣٦٠} \times ٢\pi$ نق

= $\frac{٩٠}{٣٦٠} \times ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٧ = ١١$ سم

مثال ٦ فى الشكل المقابل



أب قطر فى الدائرة

ق(∠د جـ أ) = ٣٠° ، ق(⌢أد) = ٨٠

أوجد: ق(∠أ د جـ)

الحل

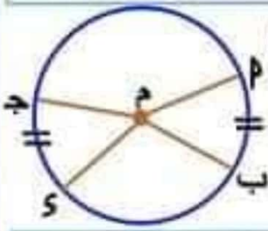
∵ ق(⌢أد) = ق(∠أ م د) = ٨٠

∵ ∠أ م د خارجة عن Δ

∴ ق(∠أ د جـ) = ٨٠ − ٣٠ = ٥٠°

نتائج هامة

نتيجة ١ : فى الدائرة الواحدة أو فى الدوائر المتطابقة الأقواس المتساوية فى القياس متساوية فى الطول والعكس صحيح

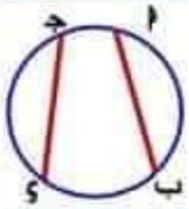


إذا كان: ق(⌢أب) = ق(⌢جـ د)

فإن طول ⌢أب = طول ⌢جـ د

والعكس صحيح

نتيجة ٢ : فى الدائرة الواحدة أو فى الدوائر المتطابقة الأقواس المتساوية فى القياس أوتارها متساوية فى الطول والعكس صحيح

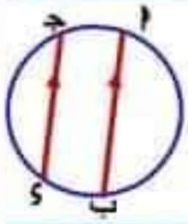


إذا كان: ق(⌢أب) = ق(⌢جـ د)

فإن: ⟸ $\overline{أب} = \overline{جـ د}$

والعكس صحيح

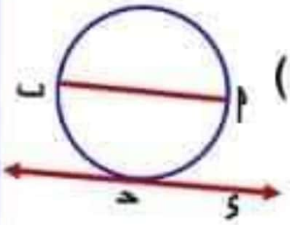
نتيجة ٣ : الوتران المتوازيان فى دائرة يحصران قوسين متساويين فى القياس



إذا كان أب // جـ د

فإن ق(⌢أ جـ) = ق(⌢ب د)

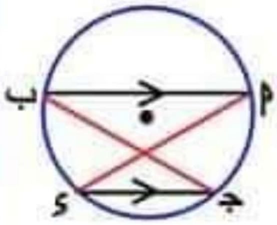
نتيجة ٤ : القوسان المحصوران بين وتر و مماس يوازيه متساويان فى القياس



إذا كان أب // جـ د

فإن ق(⌢أ جـ) = ق(⌢جـ د)

(١) فى الشكل المقابل



أب // جـ د

اثبت أن أ د = ب جـ

البرهان

∵ أب // جـ د

∴ ق(أ جـ⌒) = ق(ب د⌒)

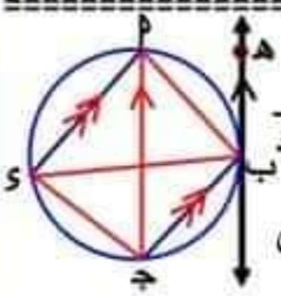
بإضافة ق(جـ د⌒) للطرفين

∴ ق(أ جـ د⌒) = ق(ب د جـ⌒)

∴ أ د = ب جـ

---

(٢) فى الشكل المقابل



ب هـ↔ مماس للدائرة

ب جـ // أ د ، ب هـ↔ // أ جـ

اثبت أن

Δ ب جـ د متساوى الساقين

البرهان

∵ ب هـ↔ // أ جـ ⇐ ق(أ ب⌒) = ق(ب جـ⌒) ١

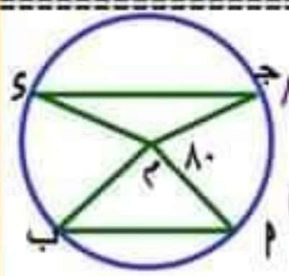
∵ ب جـ // أ د ⇐ ق(أ ب⌒) = ق(جـ د⌒) ٢

من ١ ، ٢ ∴ ق(ب جـ⌒) = ق(جـ د⌒)

∴ ب جـ = جـ د ∴ Δ ب جـ د متساوى الساقين

---

(٣) فى الشكل المقابل



أب // جـ د ، ق(أ جـ⌒) = ٨٠

طول أ جـ = طول أ ب

أوجد: ق(∠أ) ، ق(جـ د⌒)

البرهان

∵ طول أ جـ = طول أ ب

∴ ق(أ جـ⌒) = ق(أ ب⌒) = ٨٠

∴ ق(∠أ م ب) المركزية = ق(أ ب⌒) = ٨٠

∵ أ م = ب م = نق

∴ ق(∠أ) = ق(∠ب) = $\frac{١٨٠-٨٠}{٢}$ = $\frac{١٠٠}{٢}$ = ٥٠°

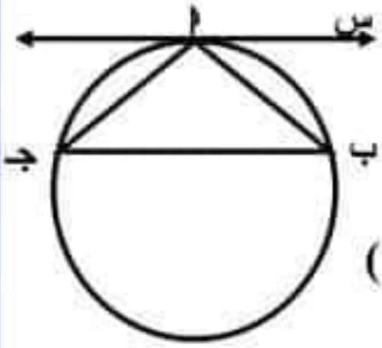
∵ أ ب // جـ د

∴ ق(أ جـ⌒) = ق(ب د⌒) = ٨٠

ق(جـ د⌒) = ٣٦٠ − (٨٠ + ٨٠ + ٨٠)

= ٣٦٠ − ٢٤٠ = ١٢٠

(٤) فى الشكل المقابل



أ س مماس للدائرة عند أ

، ب جـ // أ س ، ق(∠ب) = ٣٥°

أوجد

ق(∠ب أ جـ)

البرهان

∵ أ س // ب جـ ⇐ ق(أ ب⌒) = ق(أ جـ⌒)

∴ أ ب = أ جـ

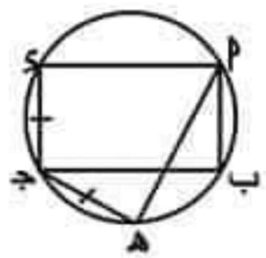
∴ ق(∠ب) = ق(∠جـ) = ٣٥°

∴ ق(∠ب أ جـ) = ١٨٠° − [٣٥ + ٣٥]

= ١٨٠° − ٧٠ = ١١٠°

---

(٥) فى الشكل المقابل



أ ب جـ د مستطيل ،

جـ د = جـ هـ

اثبت أن

أ هـ = ب جـ

البرهان

∵ أ ب جـ د مستطيل

∴ أ ب = جـ د

∵ جـ د = جـ هـ

∴ أ ب = جـ هـ

∴ ق(أ ب⌒) = ق(جـ هـ⌒)

بإضافة ق(ب هـ⌒) للطرفين

∴ ق(أ ب هـ⌒) = ق(جـ هـ ب⌒)

∴ أ هـ = ب جـ

تمارين ٥

س١ أكمل ما يلى :

١) الوتران المتوازيان فى الدائرة يحصران قوسين ـــــــ

٢) الزاوية المركزية التى قياسها ٩٠° تقابل قوساً طوله = ... محيط الدائرة .

٣) طول القوس الذى يمثل $\frac{١}{٤}$ محيط الدائرة = ...

، قياس القوس الذى يمثل $\frac{١}{٢}$ محيط الدائرة = ...

٤) قياس القوس الذى يساوى ٠٫٤ قياس الدائرة = ...

٥) قياس القوس الذى طوله ٢ سم فى دائرة محيطها ٢٤ سم يساوى ....

٦) طول الدائرة = ــــــــ ، قياس الدائرة = ...

٧) الزاوية المركزية فى دائرة يقع رأسها عند . . . . . وكل من ضلعيها يحمل . . . .

٨) فى الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة الأقواس المتساوية فى القياس تكون . . . .

٩) قياس القوس = ...

بينما طول القوس هو جزء من . . . .

١٠) قياس نصف الدائرة = ...

بينما طول نصف الدائرة = ...

١١) إذا كان دائرة محيطها = ٣٦ سم

فان قياس قوس فيها طوله ٦ سم = ...

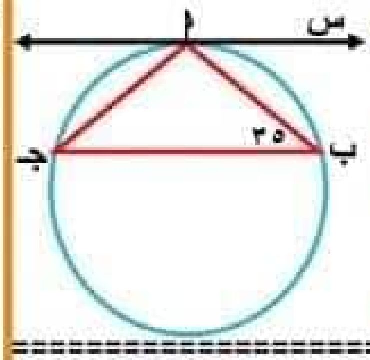
١٢) قياس القوس الذى يمثل $\frac{١}{٥}$ قياس الدائرة = . . .

١٣) قياس القوس الذى طوله ١٢سم فى دائرة محيطها ٢٤سم يساوى ....

١٤) الزاوية المركزية التى قياسها ٣٠° تقابل قوساً طوله =.......... محيط الدائرة

١٥) إذا كان أ ب جـ ء مربع فان ق (⌒أب) = ...

(٢) فى الشكل المقابل



أس مماس للدائرة عند أ

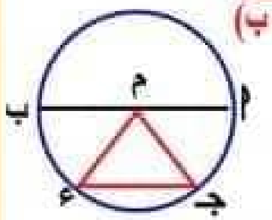
، $\overline{بجـ}$ // $\overline{أس}$ ، ق (∠ب) = ٣٥°

أوجد

ق (∠ب أ جـ)

(٣) فى الشكل المقابل $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م

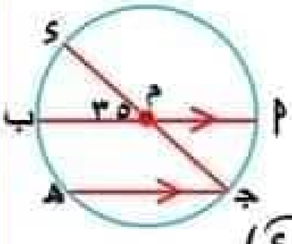
ق (⌒أجـ) = ق (⌒جـ ء) = ق (⌒ء ب)



إثبت أن

△ أ جـ ء متساوى الاضلاع

(٤) فى الشكل المقابل



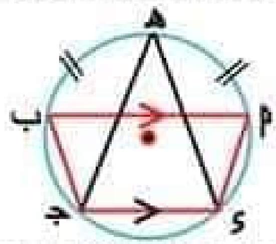
$\overline{أب}$ ، $\overline{جـ ء}$ قطران فى الدائرة م

، $\overline{أب}$ // $\overline{جـ هـ}$

ق (∠ء م ب) = ٣٥°

أوجد ق (⌒جـ هـ) ، ق (⌒أ ء)

(٥) فى الشكل المقابل

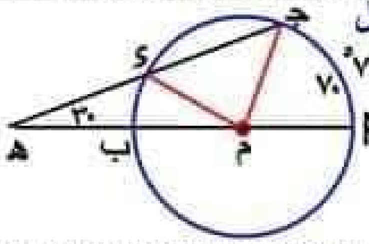


$\overline{أب}$ // $\overline{جـ ء}$

، هـ منتصف ⌒أب

اثبت أن هـ ء = هـ جـ

(٦) فى الشكل المقابل

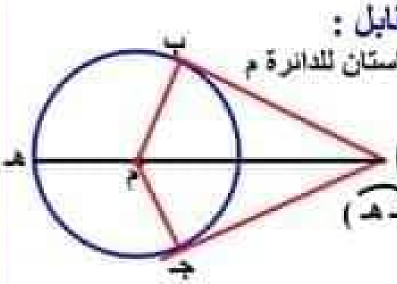


$\overline{أب}$ قطر، ق (⌒أجـ) = ٧٠°

ق (∠هـ) = ٣٠°

أوجد ق (⌒جـ ء)

(٧) فى الشكل المقابل :



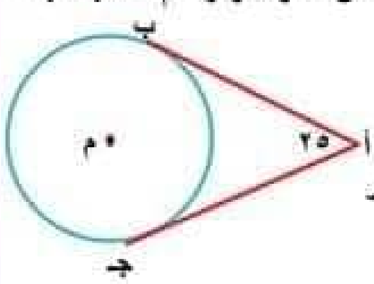
أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان للدائرة م عند ب ، جـ

اثبت أن

ق (⌒ب هـ) = ق (⌒جـ هـ)

(٨) فى الشكل المقابل :

أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان لدائرة مركزها م عند ب ، جـ ،



ق (∠ب أ جـ) = ٢٥°

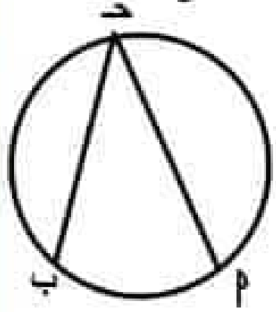
أوجد

ق (⌒ب جـ) الاكبر

أ\ عبدالمقصود حنفى
ت\ ٠١٠٦٧٣٣٦٣١٥

الزاوية المحيطية :

هى الزاوية التى رأسها على الدائرة و يحمل كل ضلع من ضليعها وتراً فى الدائرة

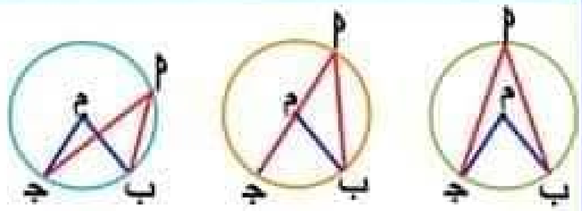


∠ أ جـ ب زاوية محيطية

$\overset{\frown}{أب}$ هو القوس المقابل لها

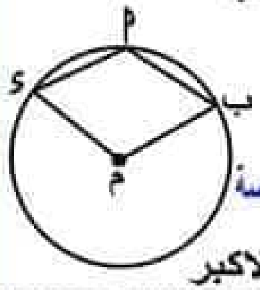
نظرية ١

قياس الزاوية المحيطية يساوى نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس



ق (∠ أ) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق (∠ م) المركزية

مشتركتان فى $\overset{\frown}{ب جـ}$



ق(∠ ب أ ء) المحيطية

= $\frac{1}{2}$ ق (∠ م) المركزية المنعكسة

مشتركتان فى $\overset{\frown}{ب ء}$ الاكبر

نتائج هامة

١) قياس الزاوية المحيطية يساوى نصف قياس القوس المقابل لها

٢) الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة تكون قائمة

∵ $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة

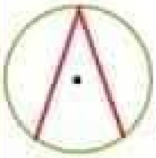
∴ ق (∠ جـ) = ٩٠°

عكس النتيجة

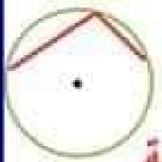
إذا كان ق (∠ جـ) المحيطية = ٩٠°

فإن $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة

العلاقة بين الزاويتين المحيطية والمركزية المشتركتين فى القوس

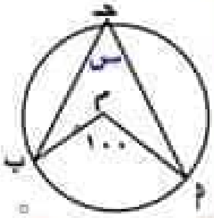


(٣) الزاوية المحيطية تقابل قوساً أقل من نصف دائرة تكون حادة

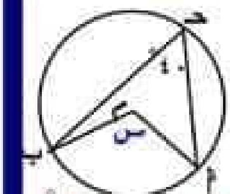


(٤) الزاوية المحيطية تقابل قوساً أكبر من نصف دائرة تكون منفرجة

مثـال ١ : فى الأشكال الآتية أوجد س بالدرجات :

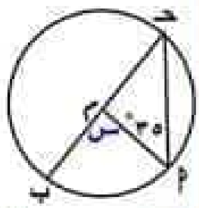


١) س = ...٥٠°...

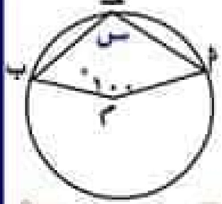


٢) س = ...٨٠°...

٣) س = ...٨٠°...



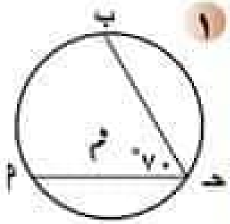
٤) س = ...٧٠°...



٥) س = ...١٣٠°...

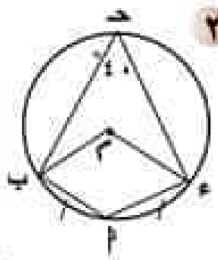
مثـال ٢ : فى الأشكال الآتية أكمل :

١)



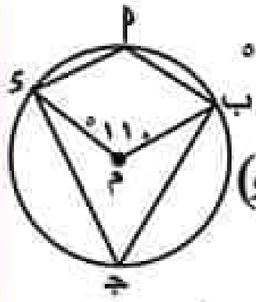
ق($\overset{\frown}{أب}$) = ...١٤٠°

٢)



ق($\overset{\frown}{أب}$) = ...٤٠°

(٣) فى الشكل المقابل



ق(∠ب م ء) = ١١٠°

أوجد

ق(∠ب جـ ء) ، ق(∠ب أ ء)

البرهان

∵ ق(∠ب جـ ء) المحيطية = ½ ق(∠ب م ء) المركزية

= ٥٥°

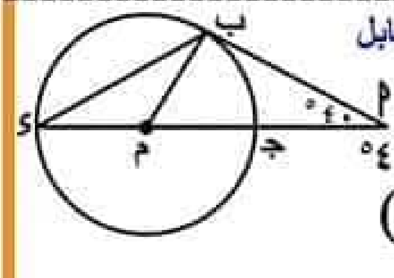
∴ ق(∠ب م ء) المركزية المنعكسة

= ٣٦٠° − ١١٠° = ٢٥٠°

ق(∠أ) المحيطية = ½ ق(∠ب م ء) المركزية المنعكسة

= ١٢٥°

(٤) فى الشكل المقابل



أب معاس للدائرة

ق(∠أ) = ٤٠°

اوجد ق(∠ء)

البرهان

∵ أب معاس ، م ب نصف قطر

∴ م ب ⊥ أب

∴ ق(∠أ ب م) = ٩٠°

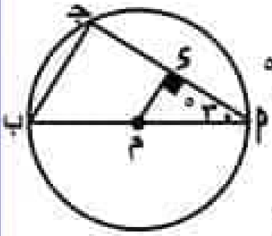
∴ ق(∠أ م ب) = ١٨٠ − (٩٠ + ٤٠) = ٥٠°

∴ ق(∠ء) المحيطية = ½ ق(∠ب م جـ) المركزية

مشتركتان فى ⌒ب جـ

∴ ق(∠ء) = ٢٥°

(٥) فى الشكل المقابل



أب قطر فى الدائرة ،

م ء ⊥ أ جـ ، ق(∠أ) = ٣٠°

اثبت أن م ء // ب جـ

، ب جـ = نق

البرهان

∵ أب قطر فى الدائرة

∴ ق(∠جـ) = ٩٠° محيطية فى نصف دائرة

∴ ق(∠جـ) = ق(∠أ ء م) = ٩٠°
وهما فى وضع تناظر

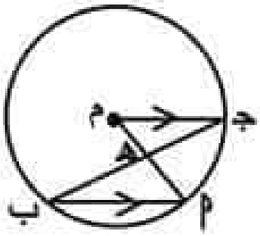
∴ م ء // ب جـ

فى Δ أ ب جـ القائم فى جـ

∵ ق(∠أ) = ٣٠°

∴ ب جـ = ½ أ ب = نق

(٦) فى الشكل المقابل



أب // م جـ

، أ م ∩ ب جـ = {هـ}

اثبت أن ب هـ > أ هـ

البرهان

∵ أب // م جـ

∴ ق(∠أ) = ق(∠م) بالتبادل (١)

∵ ق(∠ب) المحيطية = ½ ق(∠م) المركزية (٢)

مشتركتان فى ⌒أ جـ

من ١ ، ٢ ∴ ق(∠ب) = ½ ق(∠أ)

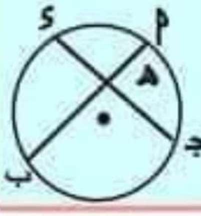
فى Δ أ ب هـ

∵ ق(∠أ) > ق(∠ب)

∴ ب هـ > أ هـ

تمرين مشهور ١

قياس زاوية تقاطع وترين داخل دائرة

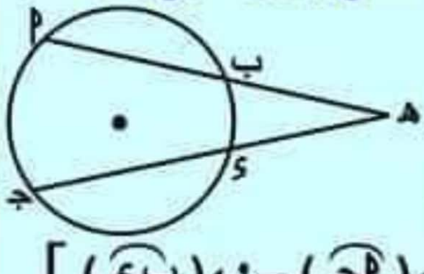


ق (∠ ا هـ جـ)

= $\frac{1}{2}$ [ق (⌒ا جـ) + ق (⌒ب ء)]

تمرين مشهور ٢

قياس زاوية تقاطع وترين خارج دائرة

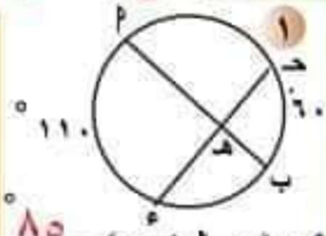


ق (∠ هـ)

= $\frac{1}{2}$ [ق (⌒ا جـ) − ق (⌒ب ء)]

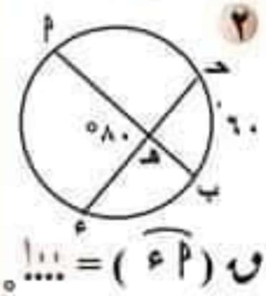
مثال ١ في الأشكال الآتية أكمل :

١



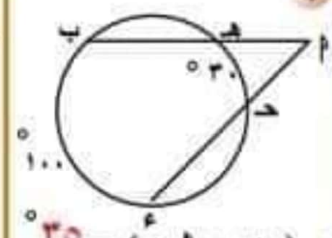
ق (∠ ا هـ ء) = ٨٥ ....

٢



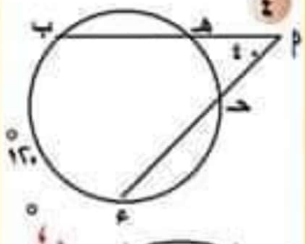
ق (⌒ا ء) = ١١١ ....°

٣



ق (∠ ب ا ء) = ٣٥ ....°

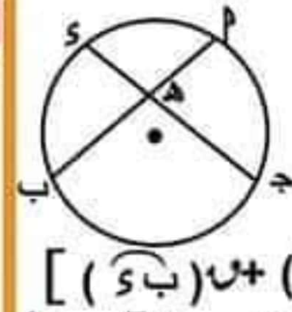
٤



ق (⌒جـ هـ) = ٤٠ ....°

---

(٢) في الشكل المقابل



ق (⌒ا جـ) = °٤٠

، ق (⌒ب ء) = °٩٠

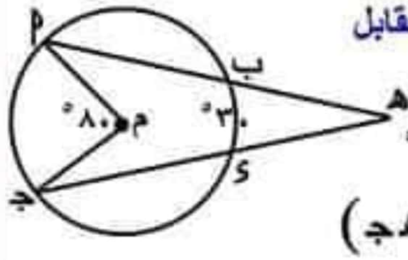
أوجد ق (∠ ا هـ جـ)

الحل

ق (∠ ا هـ جـ) = $\frac{1}{2}$ [ق (⌒ا جـ) + ق (⌒ب ء)]

ق (∠ ا هـ جـ) = $\frac{1}{2}$ × [°٤٠ + °٩٠] = °٦٥

(٣) في الشكل المقابل



ق (⌒ب ء) = °٣٠

ق (∠ م) = °٨٠

أوجد ق (∠ ا هـ جـ)

الحل

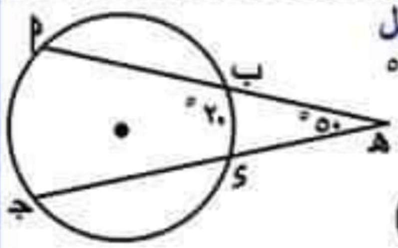
ق (⌒ا جـ) = ق (∠ ا م جـ) المركزية = °٨٠

ق (∠ هـ) = $\frac{1}{2}$ [ق (⌒ا جـ) − ق (⌒ب ء)]

ق (∠ هـ) = $\frac{1}{2}$ × [°٨٠ − °٣٠] = °٢٥

---

(٤) في الشكل المقابل



ق (⌒ب ء) = °٢٠

، ق (∠ هـ) = °٥٠

أوجد ق (⌒ا جـ)

الحل

ق (∠ هـ) = $\frac{1}{2}$ [ق (⌒ا جـ) − ق (⌒ب ء)]

٥٠ = $\frac{1}{2}$ [ق (⌒ا جـ) − ٢٠] ×٢

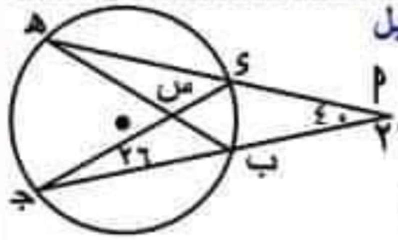
١٠٠ = ق (⌒ا جـ) − ٢٠

١٠٠ + ٢٠ = ق (⌒ا جـ)

ق (⌒ا جـ) = °١٢٠

---

(٥) في الشكل المقابل



ق (∠ ا) = °٤٠

، ق (∠ ب جـ ء) = ٢٦

أوجد ق (⌒جـ هـ)

الحل

∵ ق (∠ جـ) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق (⌒ب ء)

∴ ق (⌒ب ء) = ٢٦ × ٢ = °٥٢

(∠ ا) = $\frac{1}{2}$ [ق (⌒هـ جـ) − ق (⌒ب ء)]

°٤٠ = $\frac{1}{2}$ [ق (⌒هـ جـ) − °٥٢]

ق (⌒هـ جـ) = °١٣٢

تمارين ٦

س١ أكمل ما يلى :

① الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة ....

② قياس الزاوية المحيطية يساوي .... قياس القوس المقابل لها

③ الزاوية المحيطية التي تقابل قوس أصغر في الدائرة ......

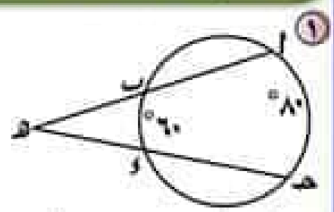
④ قياس الزاوية المركزية .... قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس

⑤ قياس الزاوية المحيطية يساوى....... قياس القوس المقابل لها

⑥ النسبة بين قياس الزاوية المركزية إلى قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس = ...

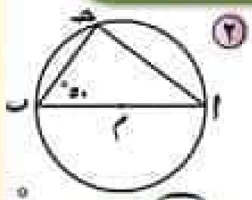
س٢ في كل شكل من الأشكال الاتية أكمل

①



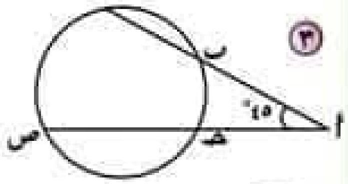
ق (∠هـ) = ...°

②



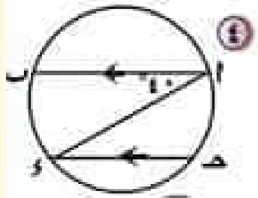
ق (ب⌢هـ) = ...°

③



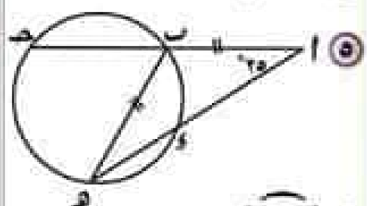
ق (س⌢ص) - ق (ب⌢هـ) = ...

④



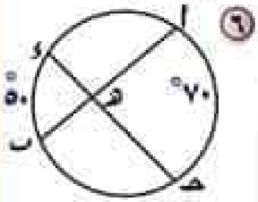
ق (أ⌢هـ) = ...

⑤



ق (هـ⌢ء) = ...

⑥

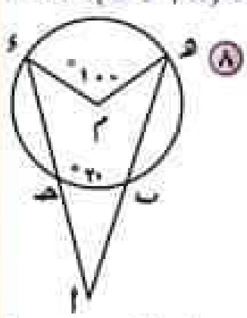


ق (∠أ هـ جـ) = ...

⑦

ق (أ⌢هـ) + ق (ء⌢ب) = ...

⑧



ق (∠أ) = ...°

⑨

ق (∠هـ) + ق (∠أ م ب) = ٩٠°

فإن ق (∠هـ) = ...

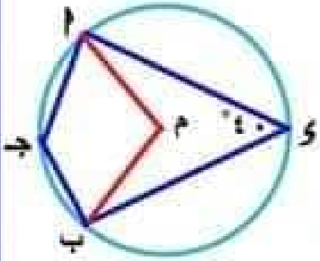
---

(٣) في الشكل المقابل

ق(∠أ ء ب) = ٤٠

أوجد

ق (∠أ جـ ب)



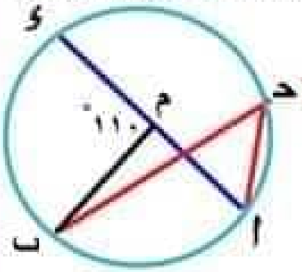
---

(٤) في الشكل المقابل

ق (∠ء م ب) = ١١٠°

أوجد

ق(∠أ جـ ب)



---

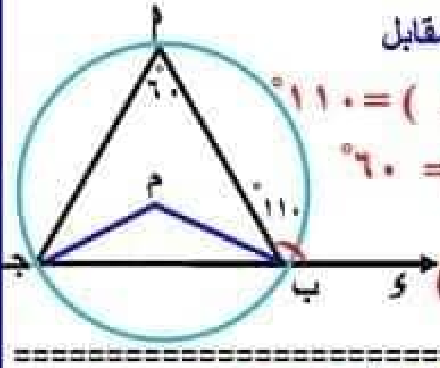
(٥) في الشكل المقابل

ق (∠أ ب ء) = ١١٠°

ق (∠ب أ جـ) = ٦٠°

أوجد

ق (∠أ ب م)



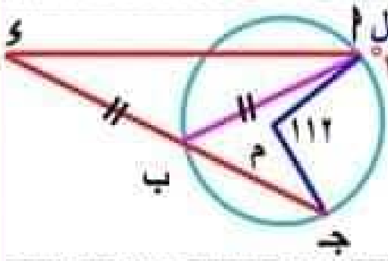
---

(٦) في الشكل المقابل

ق (∠أ م جـ) = ١١٢°

، أ ب = ب ء

أوجد ق(∠ء)



---

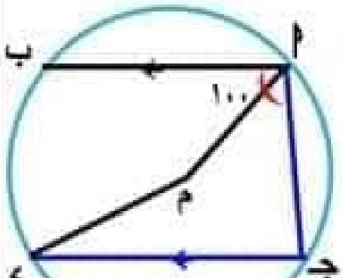
(٧) في الشكل المقابل

ق(∠ب أ جـ) = ١٠٠°

أب // جـء

أوجد

ق (∠أ م ء)



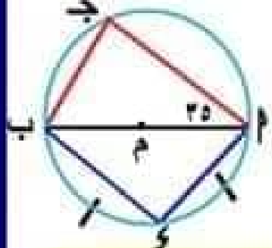
---

(٨) في الشكل المقابل

أب قطر في الدائرة م ، طول أ⌢ء = طول جـ⌢ء

ق (∠جـ أ ب) = ٣٥°

أوجد ق (∠جـ ب ء)



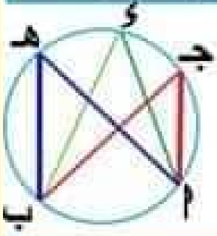
أ/ عبدالمقصود حنفى

ت/ ٠١٠٦٧٣٣٦٣١٥

الزوايا المحيطية المرسومة على نفس القوس

نظرية ٢

الزوايا المحيطية التى تحصرنفس القوس فى الدائرة الواحدة متساوية فى القياس

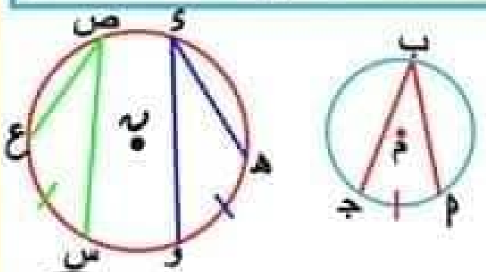


ق(∠جـ) = ق(∠د) = ق(∠هـ)

زوايا محيطية مشتركة فى القوس (أب⌒)

نتيجة

الزوايا المحيطية التى تحصر أقواساً متساوية فى القياس فى الدائرة الواحدة أو فى عدة دوائر تكون متساوية فى القياس والعكس صحيح



إذا كان ق(أجـ⌒) = ق(هـو⌒) = ق(س ع⌒)

فإن ق(∠ب) = ق(∠د) = ق(∠ص)

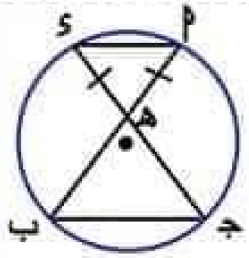
---

(١) فى الشكل المقابل

أهـ = دهـ

اثبت ان

هـب = هـجـ



البرهان

∵ أهـ = دهـ

∴ ق(∠أ) = ق(∠د) ١

∵ ق(∠أ) المحيطية = ق(∠جـ) المحيطية ٢

مشتركان فى (ب د⌒)

∵ ق(∠د) المحيطية = ق(∠ب) المحيطية ٣

مشتركان فى (أجـ⌒)

من ١ ، ٢ ، ٣

∴ ق(∠جـ) = ق(∠ب)

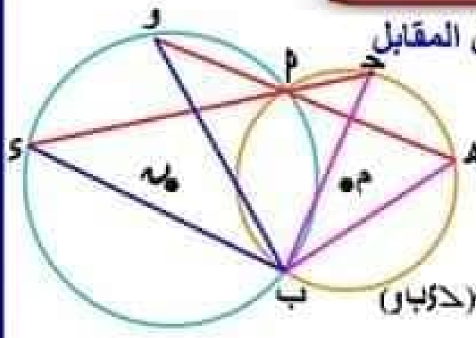
∴ هـب = هـجـ

(٢) فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتين متقاطعتين فى أ ، ب

اثبت أن

ق(∠هـ ب جـ) = ق(∠د ب و)



البرهان

فى الدائرة م

∵ ق(∠جـ أ هـ) المحيطية = ق(∠جـ ب هـ) المحيطية ١

مشتركان فى (جـهـ⌒)

فى الدائرة ن

∵ ق(∠و أ د) المحيطية = ق(∠و ب د) المحيطية ٢

مشتركان فى (و د⌒)

∵ ق(∠جـ أ هـ) = ق(∠و أ د) بالتقابل بالرأس ٣

من ١ ، ٢ ، ٣

∴ ق(∠هـ ب جـ) = ق(∠د ب و)

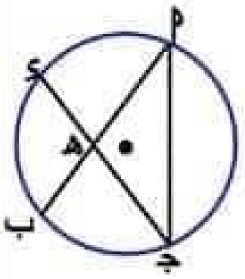
---

(٣) فى الشكل المقابل

أب ، جـ د وتران متساويان

اثبت أن

Δ أهـجـ متساوى الساقين



البرهان

∵ أب = جـ د

∴ ق(أ د ب⌒) = ق(جـ ب د⌒)

بطرح ق(د ب⌒) من الطرفين

∴ ق(أ د⌒) = ق(جـ ب⌒)

∴ ق(∠جـ) = ق(∠أ)

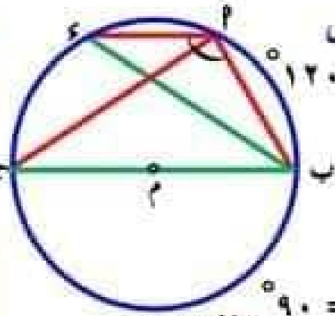
∴ هـ أ = هـ جـ

∴ Δ أهـجـ متساوى الساقين

(٤) فى الشكل المقابل

إذا كان ق(∠ب أ ء) = ١٢٠°

أوجد ق(∠ ء ب جـ)



البرهان

∵ ب جـ قطر

⇐ ق(∠ب أ جـ) = ٩٠° محيطية في نصف دائرة

∵ ق(∠ب أ ء) = ١٢٠°

∴ ق(∠جـ أ ء) = ١٢٠ − ٩٠ = ٣٠°

∴ ق(∠ ء ب جـ) = ق(∠جـ أ ء) = ٣٠°

محيطيتان مشتركتان في القوس جـ ء

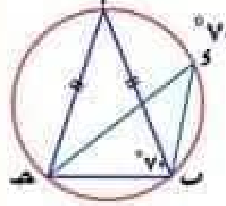
---

(٥) فى الشكل المقابل

أ ب = أ جـ ، ق(∠أ ب جـ) = ٧٠°

، ق(∠ ء) = ٥ع − ١٠°

أوجد قيمة ع



البرهان

∵ أ ب = أ جـ

ق(∠أ جـ ب) = ق(∠أ ب جـ) = ٧٠°

∴ ق(∠أ) = ١٨٠ − (٧٠ + ٧٠) = ٤٠°

∴ ق(∠ ء) = ق(∠أ) = ٤٠°

٥ع − ١٠ = ٤٠°

٥ع = ٤٠ + ١٠ ⇐ ٥ع = ٥٠ ÷ ٥

∴ ع = ١٠

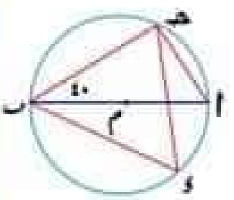
---

(٦) فى الشكل المقابل

أ ب قطر في الدائرة م

، ق(∠أ ب جـ) = ٤٠°

أوجد: ق(∠ب ء جـ)



البرهان

∵ أ ب قطر ⇐

∴ ق(∠أ جـ ب) = ٩٠° محيطية في نصف دائرة

∴ ق(∠أ) = ١٨٠ − (٩٠ + ٤٠) = ٥٠

∵ ق(∠أ) = ق(∠ب ء جـ)

محيطيتان مشتركتان في القوس ب جـ

∴ ق(∠ب ء جـ) = ٥٠°

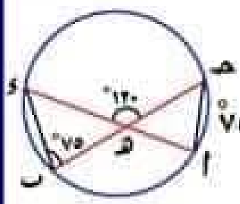
تمارين ٧

(١) فى الشكل المقابل

جـ ب ، أ ء وتران متقاطعان في هـ ،

ق(∠جـ هـ ء) = ١٢٠° ، ق(∠ب) = ٧٥°

أوجد : ق(∠جـ) مع البرهان



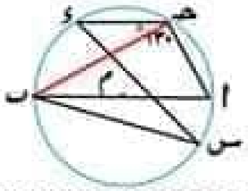
---

(٢) فى الشكل المقابل

أ ب قطر في الدائرة م

، ق(∠أ جـ ء) = ١٣٠°

أوجد ق(∠ ء س ب)



---

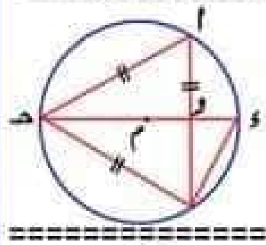
(٣) فى الشكل المقابل

△ أ ب جـ متساوي الأضلاع

مرسوم داخل دائرة م

① أوجد ق(∠جـ ء ب)

② اثبت ان أ ب ⊥ ء جـ



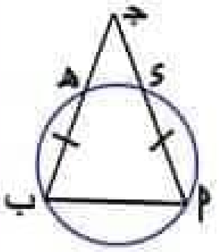
---

(٤) فى الشكل المقابل

أ ء = ب هـ

اثبت ان

جـ ء = جـ هـ



---

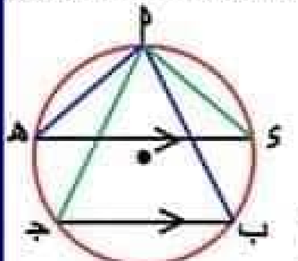
(٥) فى الشكل المقابل

أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة

، ء هـ // ب جـ

اثبت أن

ق(∠ء أ جـ) = ق(∠ب أ هـ)



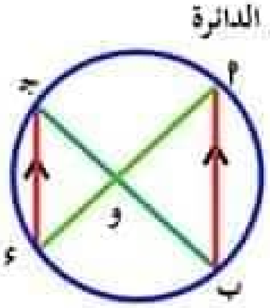
---

(٦) فى الشكل المقابل

أ ب ، جـ ء وتران متوازيان في الدائرة

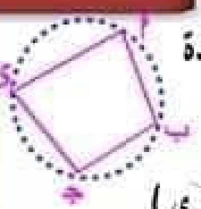
أثبت أن:

أ و = و ب



الشكل الرباعى الدائرى

هو شكل رباعى تنتمى رؤوسه الأربعة إلى دائرة واحدة
أو يمكن رسم دائرة تمر برؤوسه الاربعة

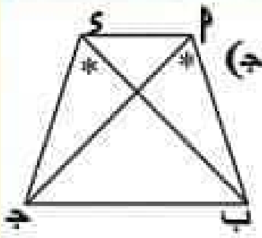


الشكل الرباعى أ ب جـ ى (رباعى دائرى)

عكس نظرية (٢)

إذا تساوى قياسا زاويتين مرسومتين على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة منها فإنه يمر برأسيهما دائرة واحدة تكون هذه القاعدة وتراً فيها

فى الشكل المقابل



إذا كان ق(∠ب أ جـ) = ق(∠ب ى جـ)
المرسومتان على القاعدة $\overline{\text{ب جـ}}$
∴ أ ب جـ ى رباعى دائرى

ملاحظة

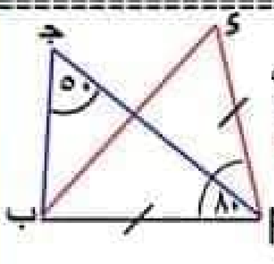
إذا كان ق(∠ب أ جـ) = ٩٠° كان $\overline{\text{ب جـ}}$ قطر فى الدائرة

ملاحظات

(١) المستطيل والمربع وشبه المنحرف المتساوى الساقين أشكال رباعية دائرية

(٢) متوازى الاضلاع والمعين وشبه المنحرف الغير متساوى الساقين أشكال رباعية غير دائرية

(١) فى الشكل المقابل



أب = أ ى ، ق(∠أ) = ٨٠° ، ق(∠جـ) = ٥٠° اثبت أن أ ، ب ، جـ ، ى تمر بها دائرة واحدة

البرهان

∵ أ ب = أ ى

∴ ق(∠أ ى ب) = ق(∠أ ب ى) = $\frac{١٨٠-٨٠}{٢}$ = ٥٠°

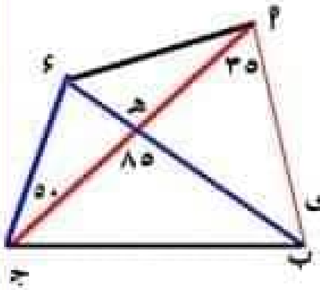
∴ ق(∠ى) = ق(∠جـ) = ٥٠°

وهما مرسومتان على $\overline{\text{أ ب}}$

∴ أ ، ب ، جـ ، ى تمر بها دائرة واحدة

∴ أ ب جـ ى رباعى دائرى

(٢) فى الشكل المقابل



إثبت أن
الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى

البرهان

∵ ∠ب هـ جـ خارجة عن △ ء هـ جـ

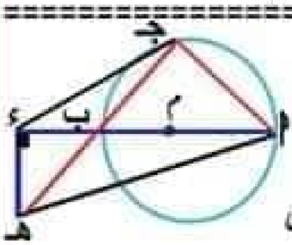
∴ ق(∠هـ ء جـ) = ٨٥ − ٥٠ = ٣٥°

∴ ق(∠ب أ جـ) = ق(∠ب ء جـ) = ٣٥°

وهما مرسومتان على قاعدة واحدة $\overline{\text{ب جـ}}$ وفى جهة واحدة منها

∴ الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى

(٣) فى الشكل المقابل



$\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الدائرة م ، $\overline{\text{ء هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$

اثبت أن
أ جـ ء هـ رباعى دائرى

البرهان

∵ $\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الدائرة م ⟸ ق(∠أ جـ هـ) = ٩٠° محيطية فى نصف دائرة

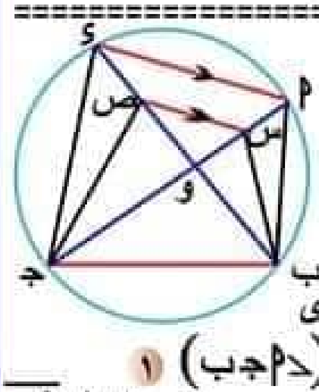
∵ $\overline{\text{ء هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ ⟸ ق(∠أ ء هـ) = ٩٠°

∴ ق(∠أ جـ هـ) = ق(∠أ ء هـ) = ٩٠°

وهما مرسومتان على $\overline{\text{أ هـ}}$

الشكل أ جـ ء هـ رباعى دائرى

(٤) فى الشكل المقابل



$\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{أ ى}}$

اثبت أن
س ب جـ ص رباعى دائرى

البرهان

∴ أ ب جـ ى رباعى دائرى

∴ ق(∠أ ى ب) = ق(∠أ جـ ب) (١)

مرسومتان على $\overline{\text{أ ب}}$

∵ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{أ ى}}$

∴ ق(∠أ ى ب) = ق(∠س ص ب) بالتناظر (٢)

من ١ ، ٢

∴ ق(∠س ص ب) = ق(∠س جـ ب)

وهما مرسومتان على $\overline{\text{س ب}}$ وفى جهة واحدة منها

∴ س ب جـ ص رباعى دائرى

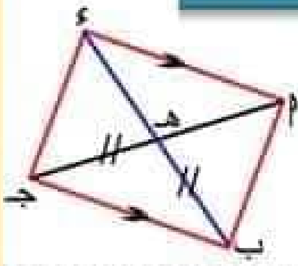
تمارين ٨

(١) في الشكل المقابل

أ ء // ب جـ
، هـ ب = هـ جـ

إثبت أن

أ ب جـ ء رباعي دائري

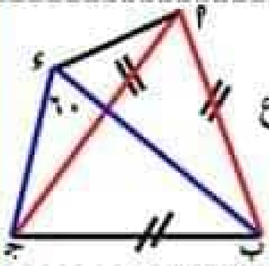


(٢) في الشكل المقابل

أ ب جـ مثلث متساوي الأضلاع
، ق(∠ب ء جـ) = ٦٠°

إثبت أن

الشكل أ ب جـ ء رباعي دائري

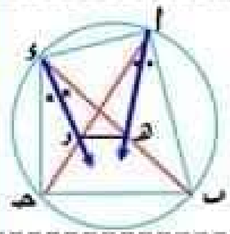


(٣) في الشكل المقابل

أ هـ ينصف ∠ب أ جـ ،
ء و ينصف ∠ب ء جـ

اثبت أن:

الشكل أ هـ و ء رباعي دائري

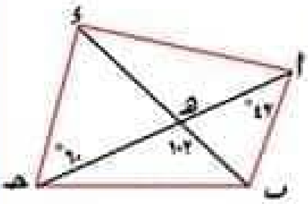


(٤) في الشكل المقابل

ق(∠ب أ هـ) = ٤٢°
، ق(∠أ هـ ء) = ٦٠°
، ق(∠ب ه هـ) = ١٠٢°

اثبت أن:

أ ب هـ ء رباعي دائري

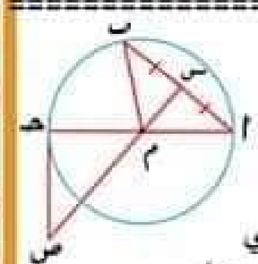


(٥) في الشكل المقابل

أ هـ قطر في الدائرة م
، س منتصف أ ب
، هـ ص مماس للدائرة

اثبت أن

① الشكل أ س هـ ص رباعي دائري
② ق(∠ب م هـ) = ٢ ق(∠م ص هـ)

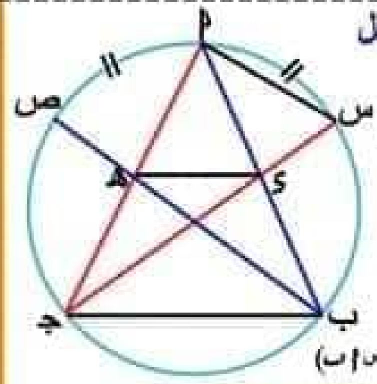


(٦) في الشكل المقابل

ق(أس⌢) = ق(أص⌢)

اثبت أن

① الشكل ب هـ و ء رباعي دائري
② ق(∠ء و ب) = ق(∠س أ ب)

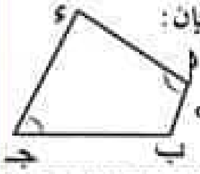


خواص الشكل الرباعي الدائري

١ كل زاويتين متقابلتين متكاملتان (مجموعهما = ١٨٠°)

إذا كان الشكل أ ب جـ ء رباعي دائري فإن:

① ق(∠أ) + ق(∠جـ) = ١٨٠°
② ق(∠ب) + ق(∠ء) = ١٨٠°



٢ قياس الزاوية الخارجة عند أي رأس من رؤوس الشكل الرباعي الدائري يساوي قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة

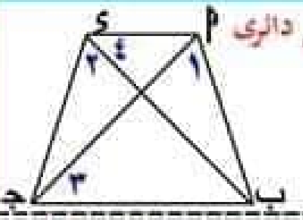
إذا كان الشكل أ ب جـ ء رباعي دائري

∴ ق(∠ب أ هـ) = ق(∠ب جـ ء)

٣ كل زاويتين مرسومتان على ضلع من أضلاعه كقاعدة وفي جهة واحدة من هذا الضلع متساويتان في القياس

إذا كان الشكل أ ب جـ ء رباعي دائري فإن:

ق(∠١) = ق(∠٢)
ق(∠٣) = ق(∠٤)



يكون الشكل الرباعي دائريا إذا تحققت إحدى الشروط الآتية

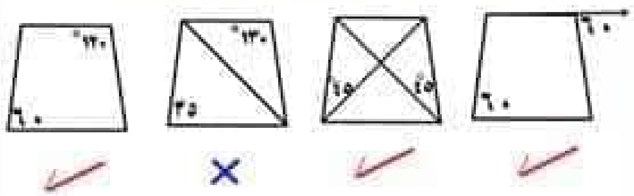
١ إذا وجدت نقطة في مستوى الشكل تكون على أبعاد متساوية من رؤوسه

٢ إذا وجدت زاويتان متساويتان في القياس ومرسومتان على ضلع من أضلاعه كقاعدة وفي جهة واحدة من هذا الضلع

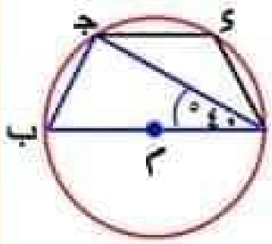
٣ إذا وجدت زاويتان متقابلتان فيه متكاملتان (مجموع قياسهم = ١٨٠°)

٤ إذا وجدت زاوية خارجة عند أي رأس من رؤوسه قياسها يساوي قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها

مثـــال أي من الأشكال الآتية رباعي دائري



(١) في الشكل المقابل



أب قطر في الدائرة ، ق(∠ جأب) = ٤٠°

أوجد ق(∠ د)

البرهان

∵ أب قطر في الدائرة ⟸ ق(∠ ا ح ب) = ٩٠° محيطية في نصف دائرة

في △ أبج

ق(∠ب) = ١٨٠ − (٩٠ + ٤٠) = ٥٠°

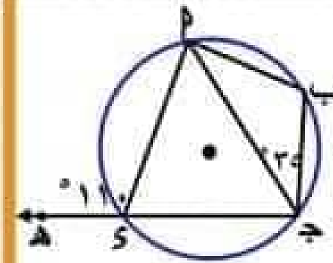
∵ أبجد رباعي دائري

∴ ق(∠ب) + ق(∠د) = ١٨٠°

∴ ق(∠د) = ١٨٠° − ٥٠° = ١٣٠°

---

(٢) في الشكل المقابل



أبجد شكل رباعي مرسوم داخل دائرة

ق(∠ أده) = ١١٠°

ق(∠ بجأ) = ٣٥°

اثبت أن △ أبج متساوي الساقين

البرهان

∵ أبجد رباعي دائري

∴ ق(∠ أده) = ق(∠ب) = ١١٠°

(الخارجة = المقابلة للمجاورة)

في △ أبج

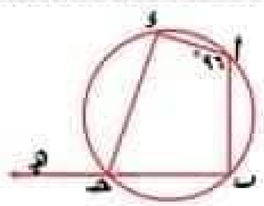
∴ ق(∠ بأج) = ١٨٠ − (١١٠ + ٣٥) = ٣٥°

∵ ق(∠ بأج) = ق(∠ بجأ)

∴ △ أبج متساوي الساقين

---

(٣) في الشكل المقابل



ق(∠ د ه هـ) = س − ٢٤°

أوجد : س

البرهان

∵ أبجد رباعي دائري

ق(∠ د ه هـ) = ق(∠ ا)

(الخارجة = المقابلة للمجاورة)

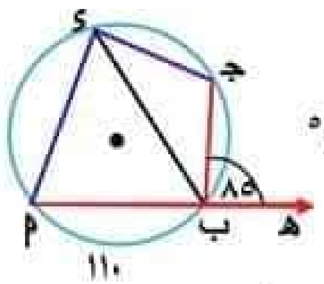
∵ س − ٢٤° = ٩٦°

س = ٩٦° + ٢٤°

س = ١٢٠°

---

(٤) في الشكل المقابل



ق(أب⌢) = ١١٠°

، ق(∠ جبهـ) = ٨٥°

أوجد ق(∠ ب د ج)

البرهان

∵ ق(∠ أدب) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق(أب⌢) = ٥٥°

∵ أبجد رباعي دائري

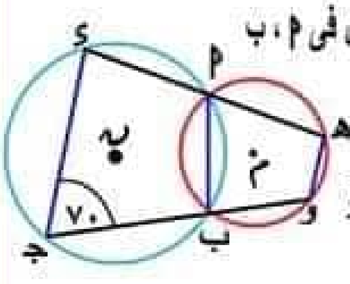
∴ ق(∠ جبهـ) = ق(∠ أدج) = ٨٥°

(الخارجة = المقابلة للمجاورة)

∴ ق(∠ ب د ج) = ٨٥ − ٥٥ = ٣٠°

---

(٥) في الشكل المقابل



م ، ن دائرتين متقاطعتين في أ ، ب

، ق(∠ج) = ٧٠°

أوجد ق(∠و)

ثم اثبت أن هو // جد

البرهان

∵ أبجد رباعي دائري

∴ ق(∠ دبأ) + ق(∠ج) = ١٨٠°

∴ ق(∠ دبأ) = ١٨٠ − ٧٠ = ١١٠°

∵ أ ب و هـ رباعي دائري

∴ ق(∠ دبأ) = ق(∠و) = ١١٠°

(الخارجة = المقابلة للمجاورة)

∴ ق(∠ج) + ق(∠و)

= ٧٠° + ١١٠° = ١٨٠°

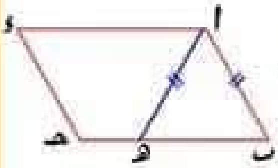
وهما داخلتان في جهة واحدة من القاطع

∴ هو // جد

(٦) فى الشكل المقابل

ا ب ج د متوازي أضلاع ، هـ ∈ ب ج بحيث ا ب = ا هـ

أثبت أن : الشكل ا هـ ج د رباعي دائري



البرهان

∵ ا ب ج د متوازى أضلاع

∴ ق(∠ب) = ق(∠د) (١)

∵ ا ب = ا هـ

∴ ق(∠ب) = ق(∠ا هـ ب) (٢)

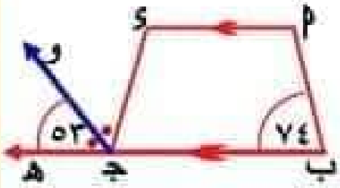
من ١ ، ٢ ق(∠ا هـ ب) = ق(∠د)

(الخارجة = المقابلة للمجاورة)

∴ ا هـ ج د رباعى دائرى

---

(٧) فى الشكل المقابل



ا د // ب ج

ق(∠ب) = ٧٤°

ق(∠و ج هـ) = ٥٣°

، ج و ينصف (∠د ج هـ)

اثبت أن ا ب ج د رباعى دائرى

البرهان

∵ ج و ينصف (∠د ج هـ) من (١) ، (٢)

∴ ق(∠د ج هـ) = ٥٣ × ٢ = ١٠٦°

∵ ا د // ب ج

∴ ق(∠د) = ق(∠د ج هـ) = ١٠٦° بالتبادل

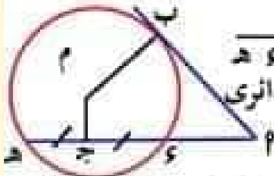
∴ ق(∠ب) + ق(∠د)

= ٧٤° + ١٠٦° = ١٨٠° متقابلتان متكاملتان

∴ ا ب ج د رباعى دائرى

---

(٨) فى الشكل المقابل



ا ب مماس للدائرة م ، ج منتصف د هـ

إثبت أن ا ب ج م رباعى دائرى

البرهان

∵ ا ب مماس للدائرة م ⇐ ق(∠ا ب م) = ٩٠°

∵ ج منتصف د هـ ⇐ ق(∠ا ج م) = ٩٠°

ق(∠ا ب م) + ق(∠ا ج م) = ١٨٠°

∴ الشكل ا ب ج م رباعى دائرى

---

(٩) فى الشكل المقابل

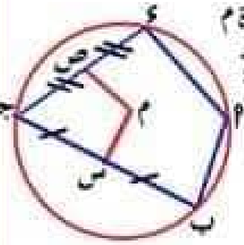
ا ب ج د رباعي مرسوم داخل دائرة م

س منتصف ب ج ، ص منتصف ج د

إثبت أن:

(١) الشكل م س ج ص رباعى دائرى

(٢) ق(∠س م ص) = ق(∠ب ا د)



البرهان

∵ س منتصف ب ج ⇐ م س ⊥ ب ج

ق(∠م س ج) = ٩٠°

∵ ص منتصف د ج ⇐ م ص ⊥ د ج

ق(∠م ص ج) = ٩٠°

∴ ق(∠م س ج) + ق(∠م ص ج) = ١٨٠°

∴ الشكل م س ج ص رباعى دائرى

∴ ق(∠س م ص) + ق(∠ج) = ١٨٠° (١)

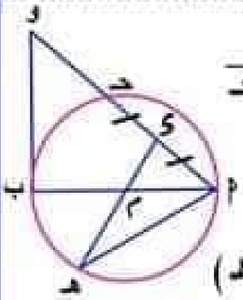
∵ الشكل ا ب ج د رباعى دائرى

ق(∠ب ا د) + ق(∠ج) = ١٨٠° (٢)

من ١ ، ٢ ق(∠س م ص) = ق(∠ب ا د)

---

(١٠) فى الشكل المقابل



ا ب قطر في الدائرة م ، د منتصف ا ج

، ب و مماس للدائرة عند ب

اثبت أن

(١) الشكل م د و ب رباعى دائرى

(٢) ق(∠و) = ٢ق(∠ب ا هـ)

البرهان

∵ د منتصف ا ج ⇐ ق(∠م د و) = ٩٠°

∵ ا ب قطر في الدائرة ، ب و مماس للدائرة

∴ ق(∠م ب و) = ٩٠°

∴ ق(∠م ب و) + ق(∠م د و) = ١٨٠°

متقابلتان متكاملتان

∴ الشكل م د و ب رباعى دائرى

∴ ق(∠ب م هـ) = ق(∠و)

(الخارجة = المقابلة للمجاورة)

∴ ق(∠ب م هـ) المركزية = ٢ ق(∠ب ا هـ) المحيطية

∴ ق(∠و) = ٢ ق(∠ب ا هـ)

تمارين ٩

اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

١) في الشكل الرباعي الدائري كل زاويتين متقابلتين . . . . .

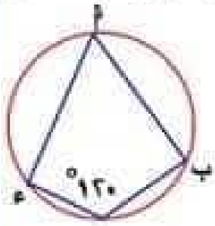
[متكاملتان ؛ متتامتان ؛ متساويتان في القياس ؛ متبادلتان]

٢) في الشكل الرباعي الدائري كل زاويتين مرسومتين على قاعدة واحدة وفي جهة واحدة منها

[متكاملتان ؛ متتامتان ؛ متساويتان في القياس ؛ متبادلتان]

٣) . . . . شكل رباعي دائري [شبه المنحرف ؛ المعين ؛ متوازي الأضلاع ؛ المستطيل]

٤) في الشكل المقابل :



ق (∠ أ) = ... °

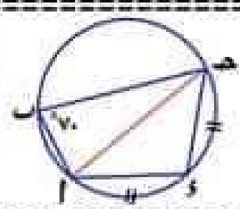
[٢٤٠ ؛ ٦٠ ؛ ١٢٠ ؛ ١٨٠]

، ق (⌒أ جـ) = ... °

[٢٤٠ ؛ ٦٠ ؛ ١٢٠ ؛ ١٨٠]

---

(٢) في الشكل المقابل



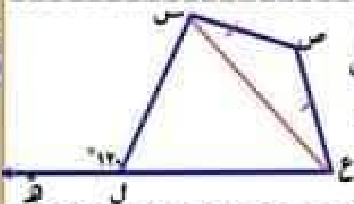
ق (∠ أ ب جـ) = ٧٠° ،

طول (⌒أ ء) = طول (⌒ء جـ)

أوجد : ق (∠ أ جـ ء)

---

(٣) في الشكل المقابل



س ص ع ل رباعي دائري

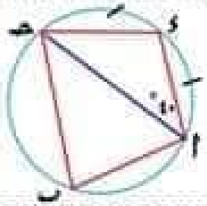
س ص = ص ع

، ق (∠ س ل هـ) = ١٢٠°

أوجد : ق (∠ ص ع س)

---

(٤) في الشكل المقابل



ق (⌒أ ء) = ق (⌒ء جـ)

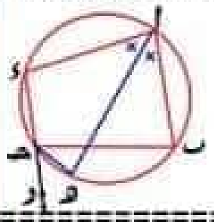
، ق (∠ ء أ جـ) = ٤٠°

أوجد ق (∠ ء)

، ق (∠ أ ب جـ)

---

(٥) في الشكل المقابل



الشكل أ ب جـ ء رباعي دائري

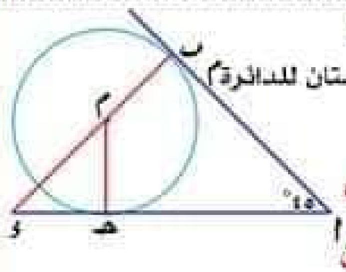
، و ∈ ء جـ ، أ هـ ينصف ∠ ب أ ء

أثبت أن :

جـ هـ ينصف ∠ ب جـ و

---

(٦) في الشكل المقابل



أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان للدائرة م

ق (∠ أ) = ٤٥°

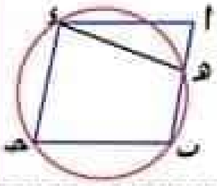
أثبت أن :

① أ ب م جـ رباعي دائري

② △ م جـ ء متساوي الساقين

---

(٧) في الشكل المقابل

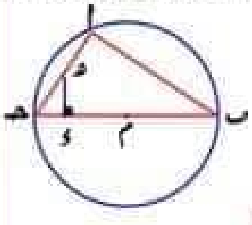


أ ب جـ ء متوازي أضلاع ، الدائرة المارة بالنقط ب ، جـ ، ء تقطع أ ب في هـ

أثبت أن : أ ء = ء هـ

---

(٨) في الشكل المقابل



ب جـ قطر في الدائرة م ،

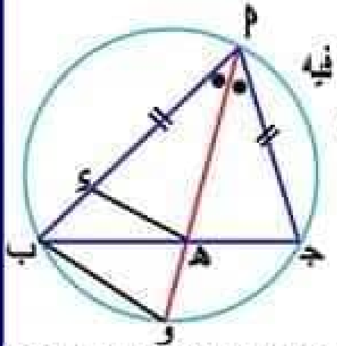
هـ ء ⊥ ب جـ

أثبت أن :

ق (∠ جـ هـ ء) = $\frac{1}{2}$ ق (⌒أ جـ)

---

(٩) في الشكل المقابل



أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة فيه

أ ب > أ جـ ، أ جـ = أ ء ،

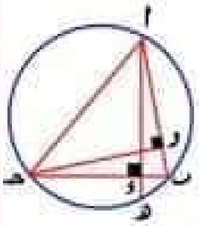
أ هـ ينصف (∠ أ)

اثبت أن

ب ء هـ و رباعي دائري

---

(١٠) في الشكل المقابل



أ ء ⊥ ب جـ يقطعها في ء

ويقطع الدائرة في هـ ، و جـ ⊥ أ ب

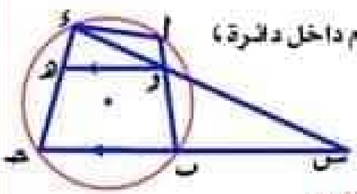
أثبت أن :

① الشكل أ و ء جـ رباعي دائري

② ق (∠ ء ب هـ) = ق (∠ ء و جـ)

---

(١١) في الشكل المقابل



أ ب جـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة ،

و هـ // ب جـ

ء و ∩ جـ ب = { س }

اثبت أن :

① الشكل أ و هـ ء رباعي دائري

② ق (∠ ب س و) = ق (∠ هـ أ ء)

---

(١٢) أ ب جـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة

تقاطع قطراه أ جـ ، ب ء في و ،

س ∈ أ و ، ص ∈ ء و بحيث س ص // أ ء

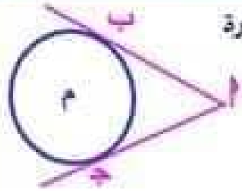
اثبت أن

الشكل س ب جـ ص رباعي دائري

العلاقة بين مماسات الدائرة

نظرية ٤

القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج الدائرة متساويتان فى الطول



∵ ا ب ، ا حـ مماسان للدائرة

∴ ا ب = ا حـ

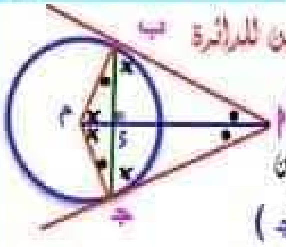
نتائج هامة

المستقيم المار بمركز الدائرة و نقطة تقاطع مماسين

① ينصف الزاوية بين هذين المماسين

② ينصف الزاوية بين نصفى القطرين المارين بنقطتى التماس

③ ينصف وتر التماس لهذين المماسين و يكون عمودياً عليه (اى يكون محور تماثل لوتر التماس)



① ا م ينصف الزاوية بين المماسين للدائرة

ق(ب $\hat{ا}$ م) = ق(حـ $\hat{ا}$ م)

② ا م ينصف الزاوية بين نصفى القطرين

ق(ا $\hat{م}$ ب) = ق(ا $\hat{م}$ حـ)

③ ا م ينصف وتر التماس ب حـ ويكون عموديا علية

ب ء = حـ ء ، ا م ⊥ ب حـ

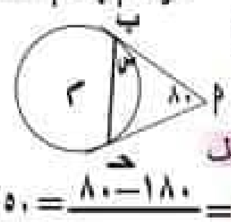
④ الشكل ا ب م حـ يكون رباعي دائرى

مثال

أوجد قيمة س بالدرجات فى كل شكل من الأشكال الآتية:

حيث ا ب ، ا حـ قطعتان مماستان للدائرة م

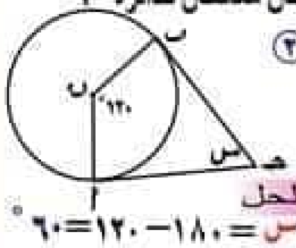
①



الحل

$س = \frac{180 - 80}{2} = 50$

②



الحل

$س = 180 - 120 = 60°$

③

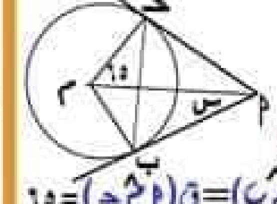
الحل

Δ ا ب حـ متساوي الأضلاع

ق(∠ ا) = ٦٠

س = ١٢٠°

④



الحل

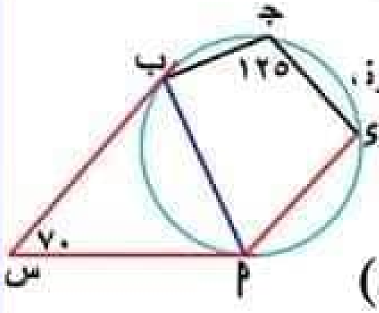
ق(ا $\hat{م}$ ب) = ق(ا $\hat{م}$ حـ) = ٦٥

ق(م $\hat{ب}$ ا) = ٩٠

س = ٢٥°

---

(١) فى الشكل المقابل



س ا ، س ب مماسان للدائرة ، ق(∠ س) = ٧٠° ، ق(∠ حـ) = ١٢٥°

اثبت أن

ا ب ينصف (∠ ء ا س) ، ا ء // س ب

البرهان

∵ س ا ، س ب مماسان للدائرة

∴ س ا = س ب

$∴ ق(∠ ا ب س) = ق(∠ س ا ب) = \frac{180 - 70}{2} = 55°$

∵ ا ب حـ ء رباعى دائرى

∴ ق(∠ ء ا ب) + ق(∠ حـ) = ١٨٠°

∴ ق(∠ ء ا ب) = ١٨٠ - ١٢٥ = ٥٥°

∴ ق(∠ س ا ب) = ق(∠ ء ا ب) = ٥٥°

∴ ا ب ينصف (∠ ء ا س)

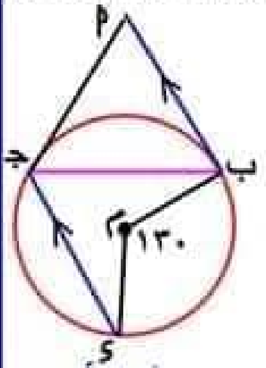
∵ ق(∠ ا ب س) = ق(∠ ء ا ب) = ٥٥°

و هما فى وضع تبادل

∴ ا ء // س ب

---

(٢) فى الشكل المقابل



ا ب ، ا حـ مماسان للدائرة ، ا ب // ء حـ ، ق(∠ ب م ء) = ١٣٠°

① اثبت أن حـ ب ينصف (∠ ا حـ ء)

② أوجد ق(∠ ا)

البرهان

$∵ ق(∠ ب حـ ء)_{المحيطية} = \frac{1}{2} ق(∠ ب م ء)_{المركزية}$

ق(∠ ب حـ ء) = ٦٥°

∵ ا ب // ء حـ

∴ ق(∠ ا ب حـ) = ق(∠ ب حـ ء) = ٦٥° بالتبادل

∵ ا ب ، ا حـ مماسان للدائرة

∴ ا ب = ا حـ ⟸ ق(∠ ا ب حـ) = ق(∠ ا حـ ب) = ٦٥

∵ ق(∠ ا حـ ب) = ق(∠ ب حـ ء) ⟸ حـ ب ينصف (∠ ا حـ ء)

فى Δ ا ب حـ

ق(∠ ا) = ١٨٠ - (٦٥ + ٦٥) = ٥٠°

ملاحظات

عدد المماسات المشتركة لدائرتين :

متباعدتين = ٤

متماستين من الخارج = ٣

متماستين من الداخل = ١

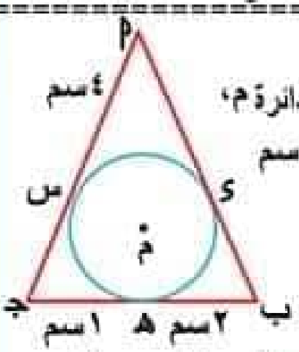
متقاطعتين = ٢

متداخلتين = صفر

تعريف الدائرة الداخلة لمضلع هى الدائرة التى تمس أضلاعه من الداخل

مركز الدائرة الداخلة للمثلث هو نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة

(٣) فى الشكل المقابل



أب، أجـ، بجـ مماسات للدائرة م،

أس = ٤ سم، ب هـ = ٢ سم

، هـ جـ = ١ سم

أوجد محيط △أ ب جـ

البرهان

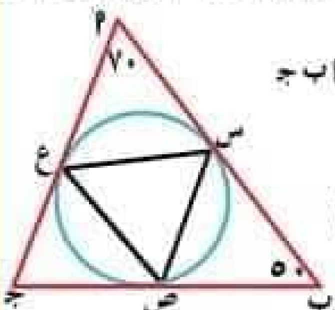
∵ أء، أس مماسان للدائرة ⟸ أء = أس = ٤سم

∵ ب ء، ب هـ مماسان للدائرة ⟸ ب ء = ب هـ = ٢سم

∵ جـ هـ، جـ س مماسان للدائرة ⟸ جـ هـ = جـ س = ١ سم

∴ محيط △أ ب جـ = ٤+٤+٢+٢+١+١ = ١٤ سم

(٤) فى الشكل المقابل



دائرة م مرسومة داخل △أ ب جـ

ق(∠أ) = ٧٠°

، ق(∠ب) = ٥٠°

أوجد ق(∠ص س ع)

البرهان

∵ ب س، ب ص مماسان للدائرة ⟸ ب س = ب ص

∴ ق(∠ب س ص) = ق(∠ب ص س) = $\frac{١٨٠ - ٥٠}{٢}$ = ٦٥°

∵ أس، أع مماسان للدائرة ⟸ أس = أع

∴ ق(∠أ س ع) = ق(∠أ ع س) = $\frac{١٨٠ - ٧٠}{٢}$ = ٥٥°

∴ ق(∠ص س ع) = ١٨٠ − (٦٥ + ٥٥) = ٦٠°

الزاوية المماسية

هى الزاوية المكونة من أتحاد شعاعين أحدهما مماس للدائرة والأخر يحتوى وتراً فى الدائرة يمر بنقطة التماس

∠ب أ جـ زاوية مماسية تقابل (أ⌒جـ)

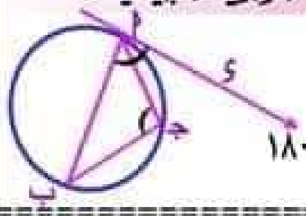
ملاحظات هامة

(١) قياس الزاوية المماسية يساوى نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها

(٢) قياس الزاوية المماسية يساوى قياس الزاوية المحيطية المرسومة على وتر التماس

(٣) قياس الزاوية المماسية يساوى نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس

(٤) **الزاوية المماسية تكمل الزاوية المحيطية التى تقع فى نفس الجهة التى تقع فيها الزاوية المحيطية**



∠ء أ ب تكمل ∠جـ

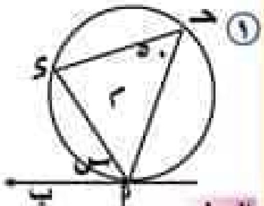
أى أن

ق(∠ء أ ب) + ق(∠جـ) = ١٨٠

مثـال أوجد قيمة س بالدرجات

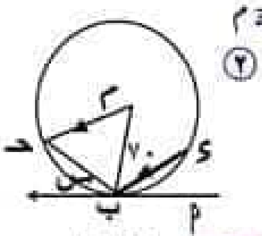
حيث أب مماس للدائرة م

(١)



الحل س = ٥٠°

(٢)

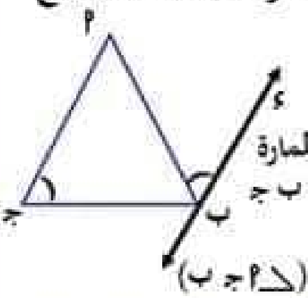


الحل ق(∠م) = ٧٠°

س = ٣٥°

عكس نظرية

إذا رسم من إحدى نقطتى النهاية لوتر فى دائرة بحيث كان قياس الزاوية المحصورة بين هذا الشعاع والوتر يساوى قياس الزاوية المحيطية المرسومة على نفس الوتر من الجهة الاخرى فإن هذا الشعاع يكون مماسا للدائرة

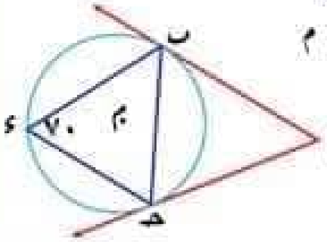


معطى النظرية

لأثبات ان ب ء مماس للدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ

نثبت ان ق(∠أ ب ء) = ق(∠أ جـ ب)

(١) فى الشكل المقابل

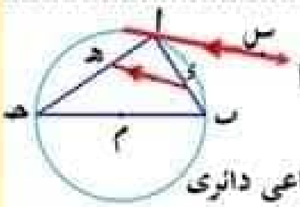


$\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ مماسان للدائرة م عند ب ، جـ
ق(∠ب ء جـ) = ٧٠°
أوجد ق(∠أ)

البرهان

∵ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس
∴ ق(∠أ جـ ب) المماسية = ق(∠ب ء جـ) المحيطية = ٧٠°
∵ $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ مماسان ⟸ أب = أجـ
∴ ق(∠أ جـ ب) = ق(∠أ ب جـ) = ٧٠°
∴ ق(∠أ) = ١٨٠ − (٧٠ + ٧٠) = ٤٠°

(٢) فى الشكل المقابل

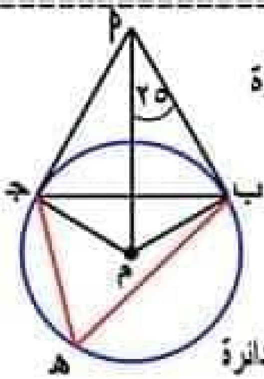


$\overline{أس}$ مماس للدائرة عند أ ، $\overline{ءهـ}$ // $\overline{أس}$
أثبت أن الشكل ء ب جـ هـ رباعي دائري

البرهان

∵ $\overline{أس}$ مماس
∴ ق(∠س أ ب) المماسية = ق(∠جـ) المحيطية (١)
∵ $\overline{أس}$ // $\overline{ءهـ}$
∴ ق(∠س أ ب) = ق(∠أ ء هـ) بالتبادل (٢)
من ١،٢ ق(∠أ ء هـ) = ق(∠جـ)
(الخارجة = المقابلة للمجاورة)
∴ الشكل ء ب جـ هـ رباعي دائري

(٣) فى الشكل المقابل

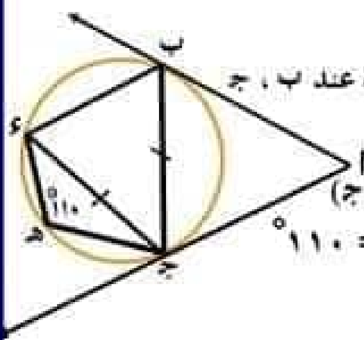


$\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ مماستان للدائرة
، ق(∠ب أ م) = ٢٥°
أوجد ق(∠أ جـ ب)
، ق(∠ب هـ جـ)

البرهان

∵ $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ مماستان للدائرة
∴ أم ينصف (∠أ)
∴ (∠أ) = ٢٥ × ٢ = ٥٠°
∴ أب = أجـ
∴ ق(∠أ ب جـ) = ق(∠أ جـ ب) = $\frac{١٨٠ - ٥٠}{٢}$ = ٦٥°
∴ ق(∠ب هـ جـ) المحيطية = ق(∠أ ب جـ) المماسية
∴ ق(∠ب هـ جـ) = ٦٥°

(٤) فى الشكل المقابل

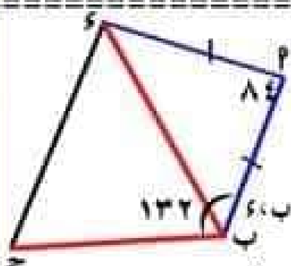


$\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ مماسان للدائرة عند ب ، جـ
، جـ ب = جـ ء
أثبت أن :
ق(∠أ ب جـ) = ق(∠ء ب جـ)
وإذا كان ق(∠جـ هـ ء) = ١١٠°
فأوجد ق(∠أ)

البرهان

∵ $\overline{أب}$ مماس ⟸ ق(∠أ ب جـ) المماسية = ق(∠جـ ء ب) المحيطية
∵ جـ ب = جـ ء ⟸ ق(∠ء ب جـ) = ق(∠جـ ء ب)
∵ ق(∠أ ب جـ) = ق(∠ء ب جـ)
∵ الشكل ب جـ هـ ء رباعي دائري
∴ ق(∠جـ ب ء) = ١٨٠ − ١١٠ = ٧٠°
∵ $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ مماسان ⟸ أب = أجـ
ق(∠أ ب جـ) = ق(∠أ جـ ب) = ٧٠°
فى △ أ ب جـ
ق(∠أ) = ١٨٠ − (٧٠ + ٧٠) = ٤٠°

(٥) فى الشكل المقابل

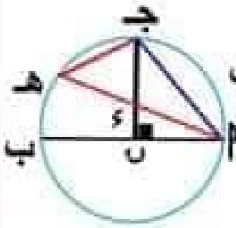


أب = أ ء ، ق(∠أ) = ٨٤°
ق(∠أ ب جـ) = ١٣٢°
أثبت أن :
$\overline{ب جـ}$ مماس لدائرة المارة بالنقط أ، ب، ء

البرهان

فى △ أ ب ء : ∵ أب = أ ء
∴ ق(∠أ ب ء) = ق(∠أ ء ب) = $\frac{١٨٠ - ٨٤}{٢}$ = ٤٨°
∴ ق(∠ء ب جـ) = ١٣٢ − ٤٨ = ٨٤°
∴ ق(∠ء ب جـ) = ق(∠أ)
$\overline{ب جـ}$ مماس للدائرة المارة برؤوس △ أ ب ء

(٦) فى الشكل المقابل



أب قطر فى الدائرة ن ، جـن ⊥ أب
أثبت أن : $\overline{أجـ}$ مماس لدائرة المارة برؤوس △ جـ هـ ء

البرهان

∵ أن = جـن = نق
∴ ق(∠أ جـ ن) = ق(∠جـ أ ن) = ٤٥°
∵ ق($\overset{\frown}{أهـ}$) = ق(∠أ ن جـ) المركزية = ٩٠°
∵ ق(∠أ هـ جـ) المحيطية = $\frac{١}{٢}$ ق($\overset{\frown}{أهـ}$) = ٤٥°
∴ ق(∠أ جـ ن) = ق(∠أ هـ جـ) = ٤٥°
∴ $\overline{أجـ}$ مماس لدائرة المارة برؤوس △ جـ هـ ء

تمارين ١٠

١ – أكمل ما يأتى :

① الدائرة الداخلة لمضلع هى الدائرة التى . . . . .

② قياس الزاوية المماسية = . . . قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس

③ قياس الزاوية المماسية = . . . قياس القوس المحصور بين ضلعيها

④ قياس الزاوية المماسية = نصف قياس الزاوية. . . .

⑤ مركز الدائرة الداخلة لأ ي مثلث هي نقطة تقاطع ....

⑥ عدد المماسات المشتركة لدائرتان متباعدتان هو ....

⑦ القطعتان المماستان لدائرة من نقطة خارجها تكونان ..

⑧ عدد المماسات المرسومة لدائرة من نقطة خارجها = ...

⑨ منصفات الزوايا الداخلة للمثلث تتقاطع في نقطة واحدة هي ....

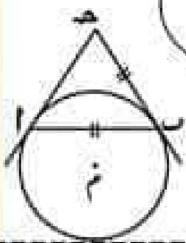
⑩ في الشكل المقابل :

ق (∠ ا م ب) = ...

⑪ في الشكل المقابل :

$\overline{هـ ب}$ ، $\overline{هـ ا}$ مماستان للدائرة م ،

هـ ب = ب ا فإن ق (∠ هـ) = ...



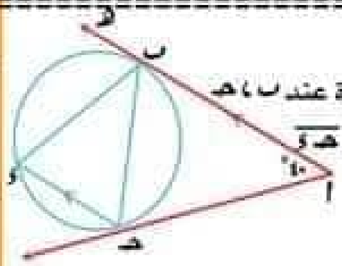
(٢) فى الشكل المقابل

$\overline{ا ب}$ ، $\overline{ا هـ}$ مماسان للدائرة عند ب ، هـ

ق (∠ ا) = ٤٠° ، $\overline{ا ب}$ // $\overline{هـ ء}$

① اثبت أن : ب هـ = ب ء

② أوجد : ق (∠ ء هـ ب ء)



(٣) فى الشكل المقابل

$\overline{ا ب}$ ، $\overline{ا هـ}$ مماسيتان للدائرة

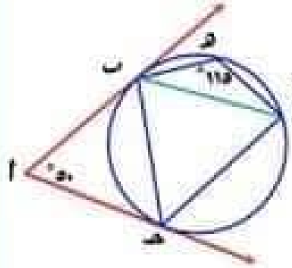
ق (∠ ا) = ٥٠°

، ق (∠ ء هـ) = ١١٥°

اثبت أن :

$\overline{هـ ب}$ ينصف (∠ ء هـ ا)

، $\overline{ا ب}$ // $\overline{هـ ء}$

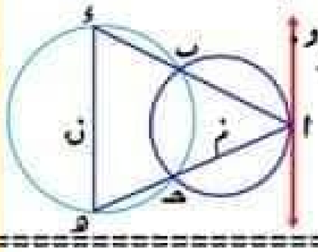


(٤) فى الشكل المقابل

دائرتان متقاطعتان في ب ، هـ

$\overleftrightarrow{ا و}$ مماس للدائرة م

اثبت أن $\overleftrightarrow{ا و}$ // ء هـ



(٥) فى الشكل المقابل

$\overline{ا ب}$ ⊥ $\overline{ا هـ}$ اثبت أن :

$\overleftrightarrow{ا ء}$ مماساً للدائرة المارة برؤوس Δ ا ب هـ

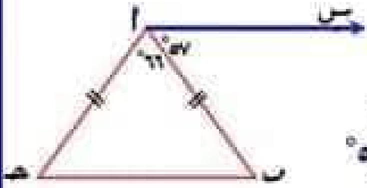
(٦) فى الشكل المقابل

ا ب هـ Δ فيه ا ب = ا هـ

، ق (∠ ب ا هـ) = ٦٦°

، ق (∠ س ا ب) = ٥٧°

اثبت أن : $\overleftarrow{ا س}$ مماس للدائرة المارة بالنقط ا ، ب ، هـ



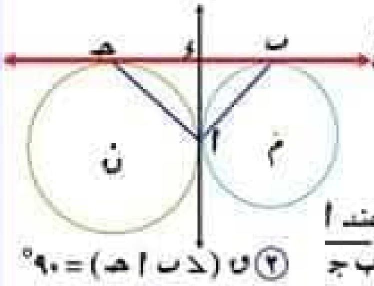
(٧) فى الشكل المقابل

الدائرتان م ، ن متماستان من الخارج في ا ،

$\overleftrightarrow{ب هـ}$ مماس مشترك للدائرتان عند ب ، هـ ،

$\overleftrightarrow{ا ء}$ مماس مشترك لهما عند ا

اثبت أن: ① ء منتصف ب ج ② ق (∠ ب ا هـ) = ٩٠°



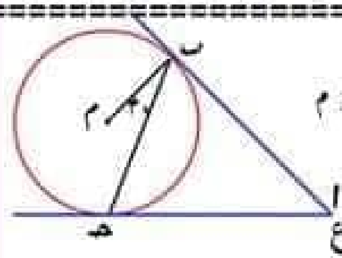
(٨) فى الشكل المقابل

$\overline{ا ب}$ ، $\overline{ا جـ}$ مماسان للدائرة م

ق (∠ م ب جـ) = ٣٠°

إثبت أن

Δ ا ب جـ متساوى الاضلاع



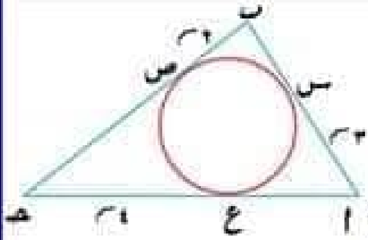
(٩) فى الشكل المقابل

ا ب هـ مثلث مرسوم خارج دائرة تمس أضلاعه في س ، ص ، ع

ا س = ٣ سم ،

ب ص = ٢ سم ، هـ ع = ٤ سم

أوجد محيط المثلث ا ب هـ



(١٠) فى الشكل المقابل

$\overline{ا ب}$ ، $\overline{ا جـ}$: قطعتان مماستان

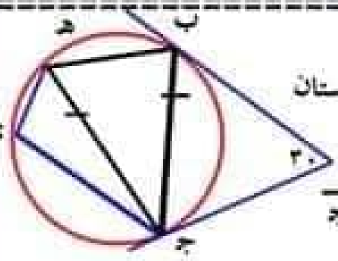
ق (∠ ا) = ٣٠°

، جـ ب = جـ هـ

Ⓐ إثبت أن : $\overline{ب هـ}$ // $\overline{ا جـ}$

Ⓑ أوجد ق (∠ جـ ء هـ)

Ⓒ إثبت أن : $\overline{جـ هـ}$ مماس للدائرة المارة بالنقط ا ، ب ، جـ



(١١) فى الشكل المقابل

ا ب قطر في الدائرة م

، جـ و مماس للدائرة عند جـ

ء هـ ⊥ ا ب

أثبت أن :

① الشكل ا ء هـ جـ رباعي دائري

② و هـ = و جـ