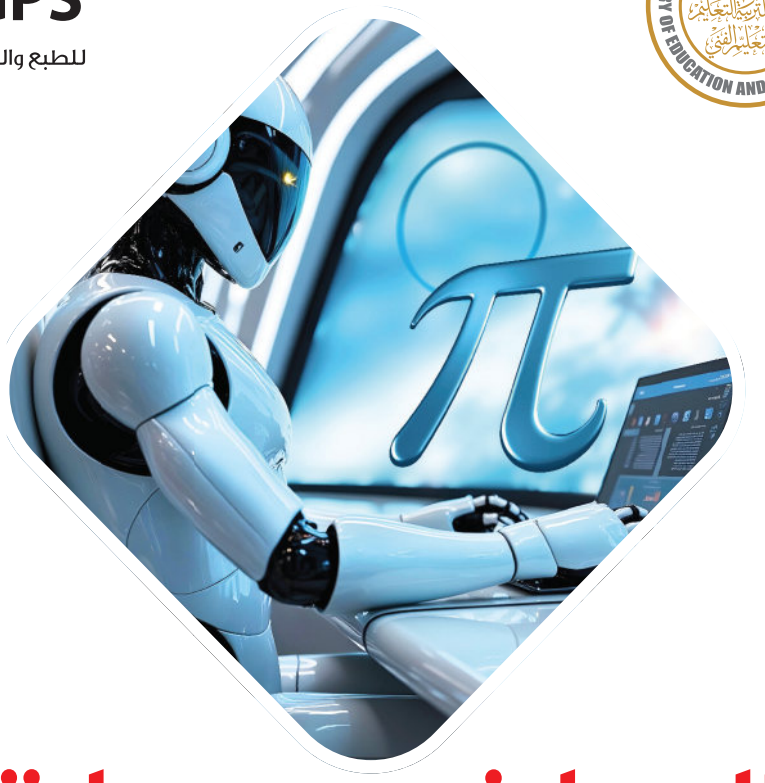
GPS
للطبع والنشر والتوزيع



الرياضيات

للصف الثانى الإعدادى - الفصل الدراسى الثانى 2026 - 2025

كتاب الطالب

إعداد

أ. أسامة زيد شريف — أ. د. سمر عبد الفتاح لاشين — أ. م. د. أمل الشحات حافظ

أ. مجدى عبد الفتاح الصفتى — أ. إبراهيم عبد اللطيف الصغير

أ. باسم مجدى رشدى — أ. إسلام محمد إبراهيم — أ. سامح لبيب عطية

مراجعة

أ. د. جلال محروس معتمد — أ. د. رضا أبو علوان السيد

أ. د. هدى كمال محمد السيد — أ. د. أحمد عبد القادر رمضان

د. محمد محي الدين عبد السلام (رئيس قسم الرياضيات) — أ. منال عباس أحمد عزقول (مستشار الرياضيات)

إشراف

د. أكرم حسن محمد

مساعد الوزير لشئون تطوير المناهج التعليمية

والمشرف على الإدارة المركزية لتطوير المناهج

الاســـم : .....

الفصـــل : .....

المدرسة : .....

تم تحميل هذه الأوراق مجانًا من
أكبر وأضخم مكتبة تعليمية
موقع وتطبيق مذكرات جاهزة

تقديم

فـى إطـار التطويـر المسـتمر لمنظومـة التعليـم، واسـتكمالًا لمنظومـة التطويـر التـى بـدأت خططهـا مـن مرحلـة ريـاض الأطفـال والمسـتمرة إلـى نهايـة المرحلـة الثانويـة وفقًـا لرؤيـة مصـر (٢٠٣٠) ، وخطـة الـوزارة لتطويـر التعليم - فقـد تـم إعـداد هـذا الكتـاب لاسـتكمال وتنفيـذ عمليـات تطويـر مناهـج المرحلـة الإعداديـة لإحـداث نقلـة نوعيـة فـى طريقـة إعـداد طـلاب مصـر لمواجهـة تحديـات المسـتقبل.

يسـعدنا أن نقدم هذا الكتاب لمقرر الرياضيات للصف الثانى الإعدادى للفصل الدراسـى الثانى، والـذى يتضمـن مجموعـة مـن المهـام والأداءات التـى تسـاعد الطـلاب علـى حـل المشـكلات الرياضيـة ، وذلـك لتحقيـق نواتـج التعلـم لمواجهـة تحديـات القـرن الحـادى والعشـرين، والذى واكبت بدايته ثورة متسارعة فى المعلومات وتكنولوچيا الاتصالات.

يهـدف المنهـج الحالـى إلـى إحـداث نقلـة نوعيـة فـى تعليـم الرياضيـات وتعلُّمها، كما يهـدف أيضًا إلـى توفيـر وسـيلة فعالـة لتحقيـق أهـداف نهـج التعليـم علـى نحـو تكاملـى عـن طريـق الآتـي:

- التأكيد على الدور الإيجابى للطالب فى عملية التعلم.
- تضميـن المنهـج المعـارف والمهـارات والقيم والاتجاهـات الإيجابيـة اللازمة للتعلـم وللمواطنة الصالحـة والعمـل المنتـج والمشـاركة الفاعلـة فـى تحقيق برامـج التنمية المسـتدامة.
- تضميـن المنهـج التوجهـات الإيجابيـة الحديثـة فـى بنـاء المناهـج، مثـل مهـارات التفكيـر ومهـارات حـل المشـكلات ومهـارات التعلـم الذاتـى والتعلـم التعاونـى والتواصـل الجيـد مـع مصـادر المعرفـة.
- تنمية المهارات الأدائية من خلال التركيز على التعلم الذاتى والعمل التعاونى.
- تحقيق التكامل بين الرياضيات والمواد الدراسية عبر المراحل المختلفة.
- إتاحة الفرصة للطلاب لاختيار الأنشطة المناسبة لقدراتهم وميولهم وحاجاتهم.

ونسـأل اللـه عـز وجـل أن تعـم الفائـدة مـن هـذا الكتـاب، ونتمنـى أن يكـون جـزءًا مـن مجهـود وطنـى كبيـر ومتواصـل للارتقـاء بمصـر إلـى مصـاف الـدول المتقدمـة لضمـان مسـتقبل عظيـم لجميـع طلابهـا، كما نتمنـى لكـم عامًـا دراسـيًّا جديـدًا مليئًـا بالنجاحـات والتوفيـق.

والله ولىّ التوفيق،،،

المعدون

تم تحميل هذه الأوراق مجانًا من
أكبر وأضخم مكتبة تعليمية
موقع وتطبيق مذكرات جاهزة

محتويات الكتاب (الفصل الدراسى الثانى)

الأعداد والعمليات عليها

1-1 خواص التناسب 2
1-2 التناسب المتسلسل 8

تم تحميل هذه الأوراق مجانًا من
أكبر وأضخم مكتبة تعليمية
موقع وتطبيق مذكرات جاهزة

الجبـــر

2-1 حاصل الضرب الديكارتى 16
2-2 العلاقة والدالة 22
2-3 الدالة الخطية 30
2-4 معادلات ومتباينات الدرجة الأولى فى متغير واحد 36

الهندسة

3-1 مسلَّمات التباين 45
3-2 التباين فى المثلثات 50
3-3 المساقط العمودية ونظرية إقليدس 57
3-4 الدائرة 64
3-5 الأسطوانة الدائرية القائمة والمنشور القائم 71
3-6 البعد بين نقطتين فى المستوى الإحداثى 79
3-7 ميل الخط المستقيم 85

الإحصاء والاحتمال

4-1 العينات 94
4-2 الاحتمال - توقع الأحداث المستقبلية 99

الوحدة 1

الأعداد والعمليات عليها

دروس الوحدة

1-1 خواص التناسب

1-2 التناسب المتسلسل

يُعد مفهوما التناسب، والتناسب المتسلسل من الأسس الرياضية التى تقوم على دراسة العلاقات النسبية بين الكميات، وتظهر بوضوح فى تطبيقات الذكاء الاصطناعى، إذ تعتمد النماذج الذكية على تحليل العلاقات المتناسبة بين البيانات، مما يساعدنا على التعلم بدقة وكفاءة.

◀ فهل يمكن تطوير مفاهيم التناسب والتناسب المتسلسل فى تفعيل تطبيقات الذكاء الاصطناعى ؟

القضايا والمهارات الحياتية

- التواصل الرياضى
- التفكير الناقد
- التفكير الإبداعى

القيـــم

- التذوق الفنى
- احترام الآخر
- الوعى البيئى

الدرس
1 - 1

خواص التناسب
(Properties of Proportion)

■ **نواتج التعلم**

- تتذكر مفهوم التناسب.
- تعرف مفاهيم الأول والثانى والثالث والرابع المتناسب.
- تعرف خواص التناسب.
- تطبق خواص التناسب فى حل مشكلات حياتية.

■ **المفردات**

- التناسب Proportion
- الأول المتناسب First proportional
- الثانى المتناسب Second proportional
- الثالث المتناسب Third proportional
- الرابع المتناسب Fourth proportional
- الطرفان Extremes
- الوسطان Means
- الضرب التبادلى Cross multiplication

■ **معلومة سابقة**

يمكن التعبير عن النسبة بين الكمية a ، والكمية b بإحدى الطرق :

a إلى b أو a : b أو $\frac{a}{b}$

يُسمى a مقدم النسبة، ويُسمى b تالى النسبة.

استعد !

القناع الذهبى للملك توت عنخ آمون

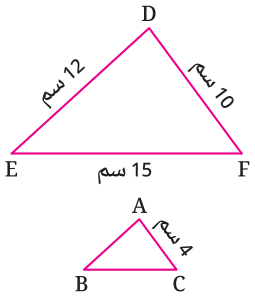
مقبرة الملك توت عنخ آمون لها شهرة عالمية، وقد تم اكتشافها عام 1922م.
قامت إحدى القنوات الوثائقية بإنتاج فيلم قصير عن الملك توت عنخ آمون، وعرضته على منصتين رقميتين :

- حصل الفيلم على 12,000 مشاهدة خلال أول 4 ساعات من عرضه على المنصة الأولى.
- بينما حصل على 18,000 مشاهدة خلال أول 6 ساعات من عرضه على المنصة الثانية.

احسب معدل المشاهدات فى الساعة لكل منصة، هل المعدلان متساويان؟
وإذا جمعت عدد المشاهدات وعدد الساعات على المنصتين معًا لحساب معدل المشاهدات فى الساعة، فهل تحصل على نفس المعدل؟

في هذا الدرس، سوف تتذكر مفهوم التناسب، وتتعرف على خواص التناسب، والتى ستمكنك من حل مثل هذه المشكلات.

فكر وناقش !



المثلث ABC تصغير للمثلث DEF بنسبة معينة.
هل يمكنك حساب محيط المثلث ABC ؟ ناقش.

تعلم !

التناسب

يُقال إن الكميات a , b , c , d متناسبة إذا كان : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

- يُسمى a بالأول المتناسب.
- يُسمى b بالثانى المتناسب.
- يُسمى c بالثالث المتناسب.
- يُسمى d بالرابع المتناسب.
- كما يُسمى الحدان a , d بالطرفين، ويُسمى الحدان b , c بالوسطين.

فمثلًا :

◄ الأعداد 15 , 10 , 6 , 4 متناسبة
لأن : $\frac{4}{6} = \frac{10}{15}$

◄ الأعداد 21 , 4 , 7 , 2 ليست متناسبة
لأن : $\frac{2}{7} \neq \frac{4}{21}$

معلومة سابقة : خاصية الضرب التبادلى

إذا كان : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ فإن : $a\times d=b\times c$

أى أن : حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين.

مثال 1

1 أوجد الرابع المتناسب للأعداد التالية : 8 , 12 , 14

1 بفرض أن الرابع المتناسب هو x

∴ الأعداد x , 14 , 12 , 8 متناسبة

$\therefore \frac{8}{12}=\frac{14}{x}$

$\therefore 8\times x=12\times 14$ (الضرب التبادلى)

$\therefore x=\frac{12\times 14}{8}=21$

2 أوجد قيمة a التى تجعل الكميات التالية : a , 15 , 20 , 3 a متناسبة.

2 ∵ الكميات a , 15 , 20 , 3 a متناسبة

$\therefore \frac{a}{15}=\frac{20}{3a}$

$\therefore a\times 3a=15\times 20$ (الضرب التبادلى)

$\therefore 3a^2=300$

$\therefore a^2=\frac{300}{3}=100$

$\therefore a=\pm\sqrt{100}=\pm 10$

مثال 2

إذا كان : $\frac{3a+5b}{3a-5b}=\frac{3c+5d}{3c-5d}$

فأثبت أن الكميات a , b , c , d متناسبة.

$\because \frac{3a+5b}{3a-5b}=\frac{3c+5d}{3c-5d}$

$\therefore (3a+5b)(3c-5d)=(3a-5b)(3c+5d)$ (الضرب التبادلى)

$\therefore 9ac-15ad+15bc-25bd=9ac+15ad-15bc-25bd$

$\therefore -15ad+15bc=15ad-15bc$

$\therefore 15bc+15bc=15ad+15ad$

$\therefore 30bc=30ad$ $\therefore bc=ad$ $\therefore \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

∴ الكميات a , b , c , d متناسبة.

ملاحظة :

• إذا كان : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ حيث k ثابت لا يساوى الصفر، ويُسمى ثابت التناسب،

فباستخدام الضرب التبادلى يكون : $a=bk$, $c=dk$

• وبصفة عامة : إذا كان : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\ldots=k$

فإن : $a=bk$, $c=dk$, $e=fk$, ...

لاحظ أن

إذا كان : $a\times d=b\times c$

فإن : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

تقييم ذاتى 1

1 أوجد الثالث المتناسب للأعداد 12 , 28 , 35

2 إذا كانت الكميات 21 , 7 a , 9 a , 48 متناسبة فأوجد قيمة a

تقييم ذاتى 2

إذا كان : $\frac{2x+3}{2x-3}=\frac{2y+5}{2y-5}$

فأثبت أن : $\frac{x}{y}=\frac{3}{5}$

مثال 3

إذا كانت : a , b , c , d كميات متناسبة، فأثبت أن : $\frac{2a-3b}{a+5b}=\frac{2c-3d}{c+5d}$

بفرض أن :

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k \quad (k\neq 0)$

$\therefore a=bk \ , \ c=dk$

$\therefore \frac{2a-3b}{a+5b}=\frac{2bk-3b}{bk+5b}=\frac{b(2k-3)}{b(k+5)}=\frac{2k-3}{k+5}$ (1)

$\frac{2c-3d}{c+5d}=\frac{2dk-3d}{dk+5d}=\frac{d(2k-3)}{d(k+5)}=\frac{2k-3}{k+5}$ (2)

من (1) , (2) نستنتج أن : $\frac{2a-3b}{a+5b}=\frac{2c-3d}{c+5d}$

خواص التناسب

1 إذا كان : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ فإن : $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ (تساوِى المعكوس)

مثال : $\frac{2}{4}=\frac{8}{16}\left(=\frac{1}{2}\right)$ فإن : $\frac{4}{2}=\frac{16}{8}(=2)$

2 إذا كان : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ فإن : $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ (تبديل الوسطين)

مثال : $\frac{2}{4}=\frac{8}{16}\left(=\frac{1}{2}\right)$ فإن : $\frac{2}{8}=\frac{4}{16}\left(=\frac{1}{4}\right)$

مثال 4

إذا كان : $\frac{a}{b}=\frac{4}{3}$ فما قيمة : $\frac{3a-2b}{3a+2b}$ ؟

$\because \frac{a}{b}=\frac{4}{3} \quad \therefore \frac{a}{4}=\frac{b}{3}$

وبفرض أن : $\frac{a}{4}=\frac{b}{3}=k$

$\therefore a=4k \ , \ b=3k$

$\therefore \frac{3a-2b}{3a+2b}=\frac{3(4k)-2(3k)}{3(4k)+2(3k)}$

$=\frac{12k-6k}{12k+6k}$

$=\frac{6k}{18k}=\frac{1}{3}$

تنوع الاستراتيجيات

بقسمة بسط ومقام $\frac{3a-2b}{3a+2b}$ على b :

$\therefore \frac{3a-2b}{3a+2b}=\frac{3(\frac{a}{b})-2}{3(\frac{a}{b})+2}$

$\because \frac{a}{b}=\frac{4}{3}$

$\therefore \frac{3a-2b}{3a+2b}=\frac{3(\frac{4}{3})-2}{3(\frac{4}{3})+2}$

$=\frac{4-2}{4+2}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

تقييم ذاتى 3

إذا كانت : a , b , c , d كميات متناسبة، فأثبت أن :

$\frac{4b+7d}{4a+7c}=\frac{5b-8d}{5a-8c}$

فكر وناقش

إذا كان $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

فهل يمكنك تبديل الطرفين وتحصل على تناسب؟ ناقش.

فكر مع زملائك

كيف يمكنك استخدام الضرب التبادلى وخواص علاقة التساوى فى إثبات خاصية 1 ، خاصية 2 المقابلتين؟

تقييم ذاتى 4

إذا كان : $\frac{4}{a}=\frac{3}{b}=\frac{2}{c}$

أثبت أن :

$\frac{a+c}{c}\times\frac{b-c}{b}=1$

3 إذا كان : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots=k$ فإن :

① $\frac{a+c+e+\cdots}{b+d+f+\cdots}=k$ (بمعنى آخر : إحدى النسب = $\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالى}}$)

② $\frac{am+cn+e\ell+\cdots}{bm+dn+f\ell+\cdots}=k$ حيث ... m , n , ℓ أعداد حقيقية لا تساوى الصفر.

مثال 5

إذا كان : $\frac{x}{a}=\frac{y}{6}=\frac{4x-3y}{10}$ فأوجد قيمة a

$\because \frac{x}{a}=\frac{y}{6}=\frac{4x-3y}{10}$

بضرب حدى النسبة الأولى فى 4 والثانية فى 3 – :

$\therefore \frac{4x}{4a}=\frac{-3y}{-18}=\frac{4x-3y}{10}$

بجمع مقدمات وتوالى النسبتين الأولى والثانية :

$\therefore \frac{4x-3y}{4a-18}=\frac{4x-3y}{10}$

$\therefore 4a-18=10 \quad \therefore 4a=10+18 \quad \therefore 4a=28 \quad \therefore a=7$

مثال 6

إذا كان : $2a=3b=4c , a+b+c=52$ فأوجد قيم a ، b ، c

$\because 2a=3b=4c$

$\therefore \frac{2a}{12}=\frac{3b}{12}=\frac{4c}{12}$

(حيث 12 هو المضاعف المشترك الأصغر للأعداد 2 , 3 , 4)

$\therefore \frac{a}{6}=\frac{b}{4}=\frac{c}{3}$

$\therefore \frac{a+b+c}{6+4+3}=\frac{a}{6}=\frac{b}{4}=\frac{c}{3}$

$\therefore \frac{52}{13}=\frac{a}{6}=\frac{b}{4}=\frac{c}{3}$

$\therefore \frac{a}{6}=\frac{b}{4}=\frac{c}{3}=4$

$\therefore a=6\times4=24$

$b=4\times4=16$

$c=3\times4=12$

تنوع الاستراتيجيات

$\because 2a=3b=4c$

$\therefore \frac{2a}{12}=\frac{3b}{12}=\frac{4c}{12}$

$\therefore \frac{a}{6}=\frac{b}{4}=\frac{c}{3}$

بفرض أن : $\frac{a}{6}=\frac{b}{4}=\frac{c}{3}=k$

$\therefore a=6k , b=4k , c=3k$

$\therefore 6k+4k+3k=52$

$\therefore 13k=52$

$\therefore k=4$

$\therefore a=6\times4=24$

$b=4\times4=16$

$c=3\times4=12$

تقييم ذاتى ⑤

إذا كان :

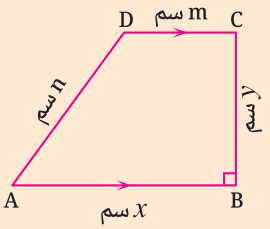
$\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{5}$

$=\frac{4a+mb+5c}{25}$

فأوجد قيمة m

تقييم ذاتى ⑥

فى الشكل التالى :



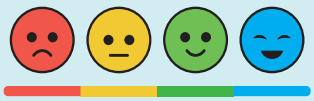
ABCD شبه منحرف قائم الزاوية فى B محيطه يساوى 36 سم،

إذا كان :

$10x=15y=20m=12n$

أوجد قيم : x , y , m , n

تقييم الدرس



أولاً قياس المفاهيم

◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(1) إذا كان : $\frac{x}{6}=\frac{y}{10}$ فما قيمة $\frac{x}{y}$ ؟

(أ) $\frac{5}{3}$ (ب) $\frac{5}{6}$ (جـ) $\frac{3}{5}$ (د) $\frac{5}{10}$

(3) ما الثانى المتناسب للأعداد 12 ، 6 ، 4 ؟

(أ) 18 (ب) 8

(جـ) 6 (د) 2

(5) إذا كان : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{2}{3}$ فإن : $\frac{a+c}{b+d}$ تساوى :

(أ) $\frac{4}{3}$ (ب) $\frac{2}{3}$ (جـ) $\frac{4}{9}$ (د) $\frac{1}{3}$

(7) إذا كان : $3a=6b=8c$ فإن $a:b:c$ تساوى :

(أ) 8 : 4 : 3 (ب) 8 : 6 : 3

(جـ) 3 : 4 : 8 (د) 3 : 6 : 8

(9) إذا كان : $\frac{a}{c+a-b}=\frac{b}{a+b-c}=\frac{c}{b+c-a}$

فإن كل نسبة تساوى :

(أ) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (جـ) $\frac{2}{3}$ (د) 1

(2) إذا كان : $\frac{a}{b}=\frac{2}{7}$ فما قيمة $\frac{2b}{7a}$ ؟

(أ) $\frac{4}{49}$ (ب) $\frac{2}{7}$ (جـ) 1 (د) $\frac{49}{4}$

(4) إذا كان : $5x-3y=0$ فما قيمة $\frac{x}{y}$ ؟

(أ) $\frac{5}{3}$ (ب) $\frac{3}{5}$ (جـ) $-\frac{3}{5}$ (د) $-\frac{5}{3}$

(6) إذا كان : $\frac{a}{5}=\frac{b}{3}$ فما قيمة $\frac{a+b}{a-b}$ ؟

(أ) $\frac{8}{3}$ (ب) $\frac{5}{3}$ (جـ) $\frac{1}{4}$ (د) 4

(8) إذا كان : $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}$ فما قيمة $\frac{3a-b}{b-a}$ ؟

(أ) $\frac{4}{3}$ (ب) $\frac{3}{4}$ (جـ) $\frac{1}{5}$ (د) 5

(10) إذا كان : $\frac{3}{m}=\frac{5}{n}$ ، $m-n=6$ فما قيمة m ؟

(أ) 15 (ب) 9 (جـ) -9 (د) -15

ثانيًا تطبيق المفاهيم

(11) أوجد قيمة x التى تجعل كلًا من الأعداد الآتية متناسبة :

① 4 , 5 , x , 10 ② x , 20 , 30 , 60 ③ 2 , 7 , 5 , $\frac{x}{2}$ ④ $\frac{x}{2}$, $\frac{7}{x}$, $\frac{3x}{2}$, $\frac{7}{3}$

(12) أوجد العدد الذى إذا أُضيف إلى كل من الأعداد

18 , 11 , 12 , 7 تصبح أعدادًا متناسبة.

(13) إذا كانت $x:y=2:5$

فأوجد قيمة $(10x+3y):(5x+2y)$

(14) إذا كانت : a , b , c , d كميات متناسبة، فأثبت كلًا مما يأتى :

① $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ ② $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ ③ $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

(15) إذا كان : $\frac{a-2b}{c-2d}=\frac{5a+b}{5c+d}$
فأثبت أن : a , b , c , d كميات متناسبة.

(16) إذا كانت : a , b , c , d كميات متناسبة، فأثبت أن :
$\frac{3a+4c}{3b+4d}=\frac{2a-c}{2b-d}$

(17) إذا كان : $\frac{a+3b+3c}{3}=\frac{3a+4b-c}{4}$
فأوجد قيمة $\frac{a}{c}$

(18) إذا كان : $\frac{x}{2}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5}$ ، وكان $x+y-2z=12$
فأوجد قيمة z

(19) إذا كانت a , b , c أعدادًا موجبة بحيث $a:b:c=2:3:4$
وكان $a^2+b^2+c^2=725$ فأوجد قيمة $a+b-c$

(20) إذا كان : $\frac{x+y}{7}=\frac{y+z}{5}=\frac{x+z}{8}$
فأوجد قيمة $\frac{x+y+z}{x-z}$

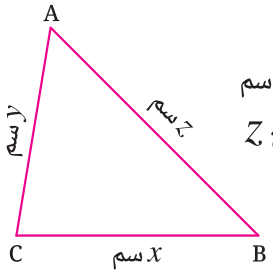
ثالثًا التحليل وتكامل المواد

(21) **ألعاب الكمبيوتر :** فى إحدى ألعاب الكمبيوتر سجل عمر وخالد وحمزة 581 نقطة معًا، بحيث إن أربعة أمثال نقاط عمر تساوى خمسة أمثال نقاط خالد، وتساوى سبعة أمثال نقاط حمزة. أوجد النقاط التى حصل عليها كل منهم.

(22) **تنسيق الحدائق :**
فى الشكل المقابل : حوض للزهور على شكل مثلث قائم الزاوية داخل قطعة أرض مثلثة الشكل أطوال أضلاعها تتناسب مع أطوال الأضلاع التى تناظرها فى حوض الزهور، ما طولا ضلعى القائمة لحوض الزهور ؟

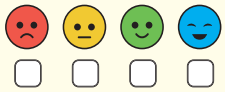
تفكير إبداعى

(23) فى الشكل المقابل :
ABC مثلث محيطه 61 سم، وأطوال أضلاعه x سم ، y سم ، z سم
إذا تم تقليل طول الضلع x بمقدار 8 سم، وتقليل طول الضلع z بمقدار 4 سم، وزيادة طول الضلع y بمقدار 15 سم أصبحت هذه الأطوال تتناسب مع الأعداد 3 ، 5 ، 8 على الترتيب.
احسب طول الضلع $\overline{AB}$



(24) إذا كان $\frac{x^2-9}{y+3}=\frac{y^2+2xy}{x}=13$ أوجد قيمة : $x+y$

قيّم فهمك!
ما مدى فهمك لخواص التناسب ؟
ضع علامة فى المربع المناسب



الدرس
1 - 2

التناسب المتسلسل
(Continued Proportion)

■ **نواتج التعلم**

- تعرف مفهوم التناسب المتسلسل.
- تعرف مفهوم الوسط المتناسب بين عددين.
- تستخدم خواص التناسب المتسلسل فى حل التمارين.
- تستخدم التناسب المتسلسل فى حل بعض المشكلات الحياتية.

■ **المفردات**

- التناسب المتسلسل
Continued proportion
- الوسط المتناسب
Mean proportional

■ **فكر**

◂ هل الأعداد 18 , 9 , 6 متناسبة؟

◂ هل الأعداد 48 , 12 , 3 متناسبة؟

استعد!

المتحف المصرى بالقاهرة

يعتبر المتحف المصرى بالقاهرة من أكبر المتاحف فى العالم، ويقدم المتحف لزائريه فرصة استثنائية لاستكشاف الحضارة المصرية القديمة، والتعرف على الحياة اليومية للمصريين القدماء.
فى حملة إعلانية عبر الإنترنت للترويج لزيارة المتحف المصرى، لاحظ فريق التسويق أن :
تكلفة الإعلان، وعدد مرات ظهوره، وعدد التفاعلات تكون متناسبة،
فإذا كانت تكلفة الإعلان 25,000 جنيه، وعدد التفاعلات 1,440 ، فما عدد مرات ظهور الإعلان؟

في هذا الدرس، سوف تتعرف على مفهوم التناسب المتسلسل وخواصه، مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات.

فكر وناقش!

لدى باسم شريط طوله 19 سم، يريد أن يصنع منه مثلثًا أطوال أضلاعه متناسبة،
بحيث يكون طول أكبر الأضلاع فيه 9 سم ،
فما طول كل من الضلعين الآخرين؟

تعلم!

التناسب المتسلسل

إذا كانت الكميات a , b , c متناسبة، فإن : $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$
ويُسمى هذا التناسب **بالتناسب المتسلسل**.

- يُسمى a بالأول المتناسب.
- يُسمى b بالوسط المتناسب بين a , c
- يُسمى c بالثالث المتناسب.

فمثلًا :

الأعداد 9 , 6 , 4 فى تناسب متسلسل لأن :
$\frac{4}{6}=\frac{6}{9}$ (لاحظ أن كلًا من النسبتين تساوى $\frac{2}{3}$)

الأعداد 15 , 12 , 10 ليست فى تناسب متسلسل لأن : $\frac{12}{10}\neq\frac{15}{12}$

الوسط المتناسب

إذا كان b وسطًا متناسبًا بين a , c ، فإن : $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$

ومن الضرب التبادلى يكون : $b^2=a\,c$ ومنها $b=\pm\sqrt{a\,c}$

مثال 1

1) أوجد الثالث المتناسب للعددين 18 , 6

2) أوجد الوسط المتناسب بين العددين 135 , 15

3) أوجد الوسط المتناسب بين $3(x+y)^2$, $12(x-y)^2$

1) بفرض أن الثالث المتناسب هو x ∴ 18 , 18 , x أعداد متناسبة

$\therefore \frac{6}{18}=\frac{18}{x}$ ∴ $6x=18\times18$ ∴ $x=\frac{18\times18}{6}=54$

أى أن الثالث المتناسب للعددين 18 , 6 هو 54

2) بفرض أن الوسط المتناسب بين العددين 135 , 15 هو x

$\therefore x=\pm\sqrt{15\times135}=\pm45$

أى أن الوسط المتناسب بين العددين 135 , 15 هو ±45

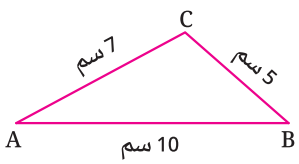
3) بفرض أن الوسط المتناسب بين $12(x-y)^2$, $3(x+y)^2$ هو b

$\therefore b=\pm\sqrt{3(x+y)^2\times12(x-y)^2}=\pm\sqrt{36((x+y)(x-y))^2}$

$=\pm\sqrt{36(x^2-y^2)^2}=\pm6(x^2-y^2)$

أى أن الوسط المتناسب بين $12(x-y)^2$, $3(x+y)^2$ هو $\pm6(x^2-y^2)$

مثال 2



ما عدد السنتيمترات الذى يجب طرحه من طول كل ضلع من أضلاع المثلث المقابل لتصبح أطوال أضلاعه متناسبة؟

بفرض أن عدد السنتيمترات هو x

∴ $10-x$, $7-x$, $5-x$ أعداد متناسبة.

$\therefore \frac{5-x}{7-x}=\frac{7-x}{10-x}$ ∴ $(7-x)^2=(5-x)(10-x)$

$\therefore 49-14x+x^2=50-15x+x^2$

$\therefore 15x-14x=50-49$ ∴ $x=1$

∴ عدد السنتيمترات الذى يجب طرحه هو 1 سم.

معلومة إثرائية

إذا كانت الأعداد a , b , c متناسبة، فإن b يُسمى الوسط الهندسى بين a , c

تقييم ذاتى (1)

1) أوجد الأول المتناسب للعددين 9 , 12

2) أوجد الوسط المتناسب بين العددين 8 , 2

3) أوجد الوسط المتناسب بين : $3xy^3$, $27x^3y$

تقييم ذاتى (2)

إذا كان لدى إبراهيم ثلاثة أبناء أعمارهم الآن 5 سنوات ، 7 سنوات ، 11 سنة، فمنذ كم من الأعوام كانت أعمارهم متناسبة؟

ملاحظة :

إذا كان : $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=k$ حيث k ثابت لا يساوى الصفر فإن :

① $b=ck$

② $a=bk=(ck)k$

$\therefore a=ck^2$

مثال 3

إذا كان b وسطًا متناسبًا بين a , c فأثبت أن : $\frac{3a+5b}{3b+5c}=\frac{2a-3b}{2b-3c}$

$\because b$ وسط متناسب بين a , c

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{b}{c}=k \quad (k\neq 0)$

$\therefore b=ck \ , \ a=ck^2$

$\therefore \frac{3a+5b}{3b+5c}=\frac{3(ck^2)+5(ck)}{3(ck)+5c}$

$=\frac{ck(3k+5)}{c(3k+5)}=k$ (1)

$\frac{2a-3b}{2b-3c}=\frac{2(ck^2)-3(ck)}{2(ck)-3c}$

$=\frac{ck(2k-3)}{c(2k-3)}=k$ (2)

من (1) , (2) نستنتج أن : $\frac{3a+5b}{3b+5c}=\frac{2a-3b}{2b-3c}$

تنوع الاستراتيجيات

$\because \frac{a}{b}=\frac{b}{c}=k \quad (k\neq 0)$

$\therefore \frac{3a}{3b}=\frac{5b}{5c}=k$

$\therefore \frac{3a+5b}{3b+5c}=k$ (1)

$\frac{2a}{2b}=\frac{-3b}{-3c}=k$

$\therefore \frac{2a-3b}{2b-3c}=k$ (2)

من (1) , (2) نستنتج أن :

$\frac{3a+5b}{3b+5c}=\frac{2a-3b}{2b-3c}$

تقييم ذاتى ③

إذا كان b وسطًا متناسبًا بين a , c

فأثبت أن : $(\frac{b-c}{a-b})^2=\frac{c}{a}$

مثال 4

إذا كانت : 18 , y , x فى تناسب، $x+y=20$، فأوجد كلًا من x , y

$\because 18$, y , x فى تناسب.

$\therefore \frac{x+y}{y+18}=\frac{y}{18}$ (خواص التناسب)

$\therefore y^2+18y=360$ (الضرب التبادلى)

$\therefore (y-12)(y+30)=0$

أ، $y+30=0$

$y=-30$

$x=20+30$

$x=50$

$\therefore \frac{x}{y}=\frac{y}{18}$

$\therefore \frac{20}{y+18}=\frac{y}{18}$

$\therefore y^2+18y-360=0$

$\therefore y-12=0$

$\therefore y=12$

$\therefore x=20-12$

$\therefore x=8$

تقييم ذاتى ④

إذا كانت :

27 ، y ، x فى تناسب،

$x-y=30$

فأوجد كلًا من : x ، y

تعميم التناسب المتسلسل

يقال إن الكميات : ... , a , b , c , d فى تناسب متسلسل

إذا كان : $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=...$

ويكون : b وسطًا متناسبًا بين a , c

c وسطًا متناسبًا بين b , d وهكذا ...

فمثلًا :

الأعداد 3 , 6 , 12 , 24 فى تناسب متسلسل.

لأن : $\frac{24}{12}=\frac{12}{6}=\frac{6}{3}$ (لاحظ أن كل نسبة تساوى 2)

مع ملاحظة أن : 12 وسط متناسب بين 6 , 24 حيث : $(12)^2=24\times6$

6 وسط متناسب بين 3 , 12 حيث : $(6)^2=12\times3$

ملاحظة :

إذا كان : $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=k$ حيث k ثابت لا يساوى الصفر فإن :

① $c=dk$

② $b=ck=(dk)k$

$\therefore b=dk^2$

③ $a=bk=(dk^2)k$

$\therefore a=dk^3$

مثال 5

إذا كانت : 24 , b , a , 3 فى تناسب متسلسل، فأوجد قيمة كل من a , b

∵ 24 , b , a , 3 فى تناسب متسلسل.

$\therefore \frac{3}{a}=\frac{a}{b}=\frac{b}{24}=k \quad (k\neq0)$

$\therefore 3=24k^3 \quad \therefore k^3=\frac{3}{24}=\frac{1}{8} \quad \therefore k=\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2}$

$\therefore a=24k^2=24\times(\frac{1}{2})^2=6 \quad ، \quad b=24k=24\times\frac{1}{2}=12$

مثال 6

إذا كانت : a , b , c , d فى تناسب متسلسل، فأثبت أن : $\frac{a^2+c^2}{b^2+d^2}=\frac{ac}{bd}$

∵ a , b , c , d فى تناسب متسلسل.

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=k, \quad (k\neq0) \quad \therefore a=dk^3, b=dk^2, c=dk$

$\therefore \frac{a^2+c^2}{b^2+d^2}=\frac{(dk^3)^2+(dk)^2}{(dk^2)^2+d^2}=\frac{d^2k^6+d^2k^2}{d^2k^4+d^2}=\frac{\cancel{d^2}k^2(\cancel{k^4+1})}{\cancel{d^2}(\cancel{k^4+1})}=k^2$ (1)

$\frac{ac}{bd}=\frac{dk^3\times dk}{dk^2\times d}=\frac{\cancel{d^2}k^4}{\cancel{d^2}k^2}=k^2$ (2)

من (1) , (2) نستنتج أن : $\frac{a^2+c^2}{b^2+d^2}=\frac{ac}{bd}$

■ تقييم ذاتى ⑤

إذا كانت : a , b , c , d فى تناسب متسلسل، فأثبت أن :

$\frac{c^2-d^2}{a-c}=\frac{bd}{a}$

■ تقييم ذاتى ⑥

إذا كانت : a , b , c , d فى تناسب متسلسل فأثبت أن :

$\frac{b^2-c^2}{c+d}=\frac{a^2-bc}{a+b+c}$

■ لاحظ أن

فى مثال ⑥

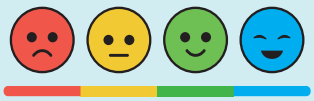
$(dk^3)^2=dk^3\times dk^3$

$=d^2k^6$

$(dk^2)^2=dk^2\times dk^2$

$=d^2k^4$

تقييم الدرس



أولاً قياس المفاهيم

◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(1) أى الأعداد الآتية متناسبة؟

(أ) 2 , 6 , 4 (ب) 3 , 5 , 8

(جـ) 3 , 9 , 27 (د) 1 , 4 , 9

(2) إذا كان a الأول المتناسب للعددين 16 , 4 فما قيمة a ؟

(أ) 8 (ب) 4

(جـ) 2 (د) 1

(3) إذا كان b وسطًا متناسبًا بين 12 , 3 فما قيمة b ؟

(أ) ± 4 (ب) ± 6

(جـ) ± 9 (د) ± 36

(4) إذا كان x هو الوسط المتناسب الموجب بين العددين 54 , 24 فما قيمة x ؟

(أ) 15 (ب) 36 (جـ) 39 (د) 78

(5) ما الثالث المتناسب للعددين $2x^2$, x^3 ؟

(أ) $2x$ (ب) $4x$

(جـ) x^2 (د) $2x^5$

(6) إذا كان b وسطًا متناسبًا بين $(3+\sqrt{2})$, $(12-\sqrt{32})$ ، فما قيمة b ؟

(أ) $\pm\sqrt{7}$ (ب) $\pm 2\sqrt{7}$

(جـ) $\pm 4\sqrt{7}$ (د) $\pm 16\sqrt{7}$

(7) إذا كان : $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=3$ فأى مما يأتى صحيح؟

(أ) $a=3c$ (ب) $a=9b$

(جـ) $a=9c$ (د) $a=6c$

(8) إذا كان : $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{1}{2}$ فأى مما يأتى صحيح؟

(أ) $a=2c$ (ب) $c=2a$

(جـ) $a=4c$ (د) $c=4a$

(9) إذا كان : $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=3$ فما قيمة $\frac{a+b+c}{b+c+d}$ ؟

(أ) 1 (ب) 3

(جـ) 9 (د) 6

(10) إذا كان : $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=4$ فما قيمة $\frac{a+d}{d}$ ؟

(أ) 65 (ب) 49

(جـ) 37 (د) 25

◂ اكتشف الخطأ :

(11) قام كل من مصطفى ومحمد بحل المسألة التالية :

إذا كان b وسطًا متناسبًا بين a , c فأثبت أن : $\frac{3a+4b}{3b+4c}=\frac{a}{b}$

حل مصطفى :

∵ b وسط متناسب بين a , c

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{b}{c}=k$

$\therefore \frac{3a}{3b}=\frac{4b}{4c}=k$

$\therefore \frac{3a+4b}{3b+4c}=k$

$\therefore \frac{3a+4b}{3b+4c}=\frac{a}{b}$

حل محمد :

∵ b وسط متناسب بين a , c

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{b}{c}=k$

$\therefore a=ck^2$, $b=ck$

$\therefore \frac{3a+4b}{3b+4c}=\frac{3ck^2+4ck}{3ck+4c}=\frac{ck(3k+4)}{c(3k+4)}=k$

$\therefore \frac{3a+4b}{3b+4c}=\frac{a}{b}$

أى منهما اتبع الطريقة الصحيحة فى الحل؟ ناقش.

ثانيًا تطبيق المفاهيم

◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(12) إذا كان : $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ فإن : $\frac{a}{c}$ تساوى :

(أ) b^2 (ب) $\frac{a+b}{b+c}$

(جـ) $\frac{a^2}{b^2}$ (د) $\frac{ac}{b^2}$

(13) إذا كان : $\frac{a}{b}=\frac{b}{4}$ ، $a-b=-1$

فما قيمة $a\times b$ ؟

(أ) 1 (ب) 2

(جـ) 4 (د) 8

(14) إذا كان : $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{4}{5}$ وكان $a+b+c=122$ فما قيمة a ؟

(أ) 4 (ب) 32 (جـ) 40 (د) 50

◂ أجب عن الأسئلة الآتية :

(15) فى كل مما يأتى إذا كانت الأعداد التالية فى تناسب، فأوجد قيمة x :

① x , 75 , 25 ② 144 , 24 , x ③ 60 , x , 15

(16) فى كل مما يأتى أوجد قيمة كل من x , y إذا كانت الكميات التالية فى تناسب متسلسل:

① y , 12 , 6 , x ② 54 , y , x , 2

(17) ما العدد الذى إذا أُضيف إلى كل من الأعداد 18 , 8 , 3 تصبح أعدادًا متناسبة ؟

(18) إذا كان : b وسطًا متناسبًا بين a , c فأثبت أن :

① $\frac{a-c}{a+b}=\frac{a-2b+c}{a-b}$ ② $\frac{4a^2-9b^2}{4b^2-9c^2}=\frac{a}{c}$

(19) إذا كانت : a , b , c , d فى تناسب متسلسل، فأثبت أن :

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{b^3+c^3+d^3}=\frac{a}{d}$$

(20) إذا كانت : a , b , c , d فى تناسب متسلسل، فأثبت أن :

$(b+c)$ وسط متناسب بين $(a+b)$ ، $(c+d)$

(21) إذا كان : $\frac{3a-4b}{3b-4c}=\frac{b-a}{c-b}$ فأثبت أن :

b وسط متناسب بين a , c

(22) إذا كانت الأعداد x , y , 3 متناسبة، $x+y=18$ ،

فأوجد قيمة كل من x , y

ثالثًا التحليل وتكامل المواد

(23) **قيم وطنية :** صُمم علم تذكارى على شكل مثلث يُستخدم للتبادل بين الفِرَق فى مباريات كرة القدم كما بالشكل بحيث كانت مساحة الجزء العلوى ، ومساحة الجزء الأوسط ، ومساحة الجزء السفلى متناسبة. فإذا كانت مساحة الجزء الأوسط 80 سم^2 ، بينما مساحة الجزء العلوى 200 سم^2 ، فما مساحة العلم؟

تفكير إبداعى

◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(24) إذا كان $a:b=b:c$ فإن : $a^4:b^4$ يساوى :

(أ) $ac:b^2$ (ب) $a^2:c^2$ (جـ) $c^2:a^2$ (د) $b^2:ac$

(25) إذا كان b وسطاً متناسبًا بين a , c فإن $(a-b)^3:(b-c)^3$ يساوى :

(أ) $a^3:c^3$ (ب) $a^2:c^2$ (جـ) $a^3:b^3$ (د) $b^2:c^2$

قيّم فهمك!

ما مدى فهمك للتناسب المتسلسل ؟

ضع علامة فى المربع المناسب

تقييم الوحدة الأولى

قيم فهمك!

ما مدى فهمك للوحدة الأولى ؟ ضع علامة فى المربع المناسب

☐ ☐ ☐ ☐

◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(1) إذا كان $a : b = c : d$

فإن $\frac{2a+5c}{2b+5d}$ لا تساوى:

(أ) $\frac{a}{b}$ (ب) $\frac{c}{d}$

(جـ) $\frac{a+c}{b+d}$ (د) $\frac{a-c}{d-b}$

(2) إذا كان $3x = 5y = 4z$

فإن $x : y : z$ تساوى:

(أ) $9 : 12 : 16$ (ب) $20 : 12 : 15$

(جـ) $15 : 10 : 9$ (د) $8 : 5 : 3$

(3) إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = 3$ فما قيمة $\frac{2a+3b}{4b-3c}$ ؟

(أ) 1 (ب) 2

(جـ) 3 (د) $\frac{2}{3}$

(4) ما الثالث المتناسب للكميتين $x-y$, x^2-y^2 ؟

(أ) $x+y$ (ب) $x-y$

(جـ) $\frac{x+y}{x-y}$ (د) $\frac{x-y}{x+y}$

◂ أكمل كلًا مما يأتى بالإجابة الصحيحة :

(5) إذا كانت الأعداد $a , b , 32$ متناسبة، $a + b = 10$

فإن : $(a , b) =$ .....

(6) إذا كانت النسبة بين أطوال أضلاع مثلث هى $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ ومحيطه يساوى 104 سم، فإن طول أكبر ضلع فى المثلث يساوى ..... سم.

(7) إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = 2$

فإن : $\frac{a+d}{d} =$ .....

(8) الوسط المتناسب بين العددين 48 , 3 يساوى .....

◂ أجب عن الأسئلة الآتية :

(9) إذا كانت a , b , c , d فى تناسب متسلسل، فأثبت أن : $\frac{a-b}{a-2b+c} = \frac{a+b+c}{a-d}$

(10) إذا كانت الكميات : $2x+1 , 3 , 15 , 35$ متناسبة، فأوجد قيمة x العددية.

(11) إذا كان $\frac{a+b}{25} = \frac{a-b}{11} = \frac{a+b-c}{8}$ فأوجد النسبة $a : b : c$

(12) أوجد العدد الذى إذا طُرح من كل من الأعداد 15 , 9 , 6 فإنها تصبح متناسبة.

نشاط الوحدة الأولى

التناسب فى حياتنا

◂ الهدف من النشاط :

امتلاك مهارة توظيف مفهوم التناسب فى المواقف الحياتية.

◂ خطوات التنفيذ :

قسِّم الفصل إلى مجموعات، كل مجموعة مكونة من 3 طلاب، واطلب منهم تنفيذ الخطوات التالية :

(1) كل مجموعة تستخدم الجدول المقابل، وتقترح أسماء للأصناف وبالتالى تحديد الموقف الذى تعبر عنه بيانات هذا الجدول.

	الكمية / العدد	السعر / التكلفة
الصنف الأول	4	40
الصنف الثانى	.....	60
الصنف الثالث	5	.....

(2) البحث عن القيم المجهولة فى الجدول، ثم إيجاد القيم المناسبة والصحيحة لها لتكون الكميات متناسبة للأصناف المختلفة.

(3) إذا كان هناك صنف رابع وكانت الكمية 15 والسعر 70، فهل يعتبر هذا الصنف متناسبًا مع الأصناف الثلاثة الأولى؟

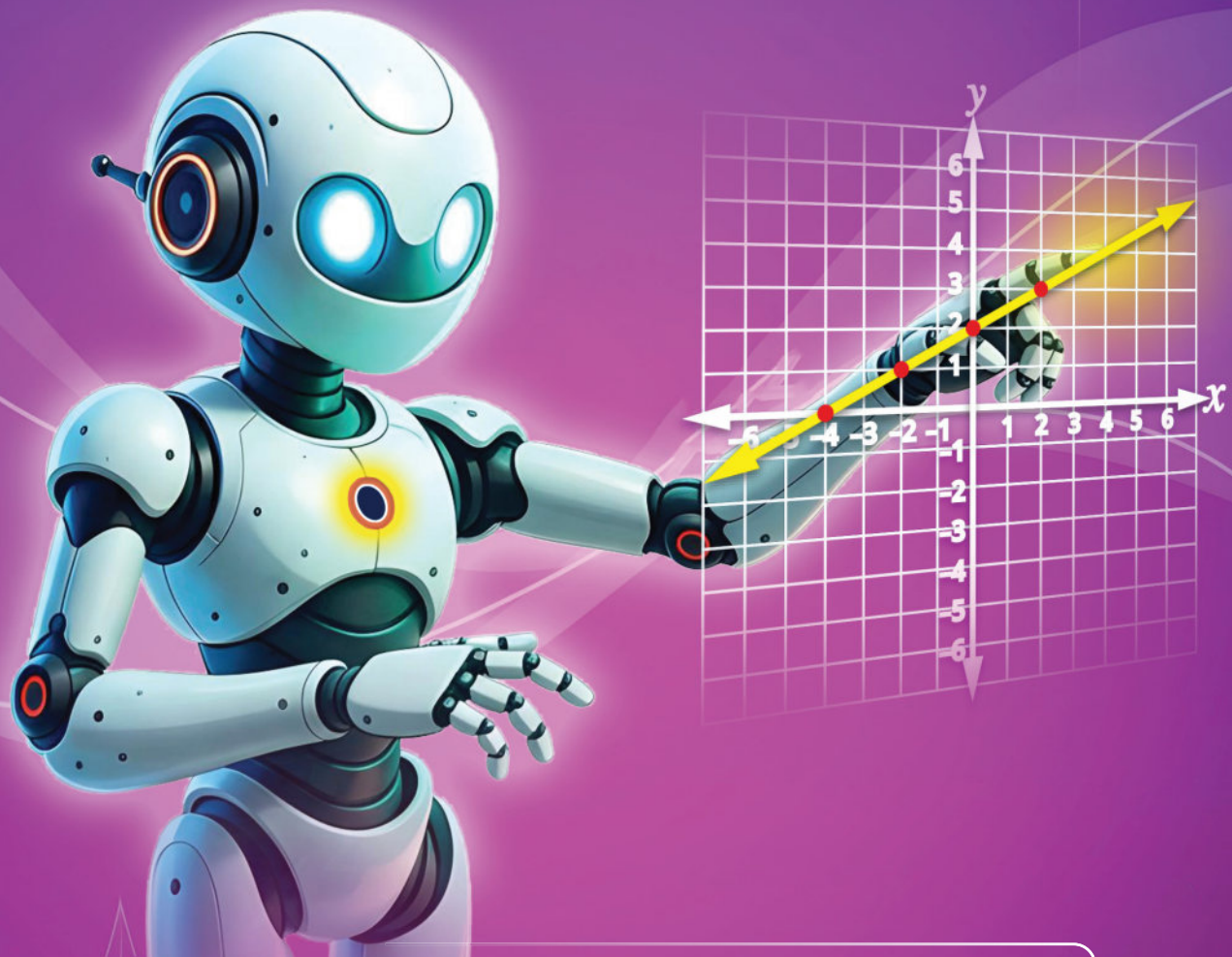
(4) توضيح خطوات الإجابة عن الأسئلة السابقة مع تفسير مدى صحة النتائج التى تم التوصل إليها.

الوحدة 2

الجبـــر

دروس الوحدة

2-1 حاصل الضرب الديكارتى
2-2 العلاقة والدالة
2-3 الدالة الخطية
2-4 معادلات ومتباينات الدرجة الأولى فى متغير واحد



يُعد مفهوم الدالة الخطية من الأسس الرياضية التى تقوم على دراسة النماذج الذكية والتى تظهر بوضوح فى تطبيقات الذكاء الاصطناعى، إذ تعتمد النماذج الذكية على التنبؤ بالنتائج بناء على العلاقات الرياضية بين المتغيرات.

◀ فهل يمكن استخدام مفاهيم وقوانين العلاقات والدوال الخطية فى تطبيقات الذكاء الاصطناعى؟

القضايا والمهارات الحياتية

- التواصل الرياضى
- التفكير الناقد
- التفكير الإبداعى
- التنمية المستدامة

القيـــم

- التذوق الفنى
- احترام الآخر
- الوعى الحضارى
- العمل الجماعى
- الادخار

الدرس

1 - 2

حاصل الضرب الديكارتى
(Cartesian Product)

■ نواتج التعلم

- تعرف مفهوم حاصل الضرب الديكارتى.
- تعرف مفهوم الزوج المرتب.
- تعرف شرط تساوى زوجين مرتبين.
- تمثل حاصل الضرب الديكارتى لمجموعتين بالمخطط السهمى والمخطط الديكارتى.
- تستخدم حاصل الضرب الديكارتى لحل مشكلات حياتية.

■ المفـردات

- الزوج المرتب
Ordered pair
- المسقط الأول
First projection
- المسقط الثانى
Second projection
- حاصل الضرب الديكارتى
Cartesian product
- المخطط السهمى
Arrow diagram
- المخطط الديكارتى
Cartesian diagram

■ تفكير ناقد

اذكر الفرق بين : الزوج المرتب (a , b) والمجموعة {a , b}.

استعد !

تُعد لعبة الشـطرنج من أشهر الألعاب الذهنية التى تحتاج إلى تركيزٍ عـالٍ، وتفكير منطقى، وتخطيط دقيـق، وتعمل على تنمية مهارات التحليل، واتخاذ القرار، وحل المشكلات.

تُلعب على لوحـة تتكون من ثمانية صفوف مرقمة مـن 1 إلى 8، وثمانية أعمدة تحمل الحروف من a إلـى h، ويتقاطع كل صف مـع كل عمود فى مربع واحد من بين 64 مربعًا على اللوحة.

كيف يمكنك تسمية كل مربع لتحديد موقعه بدقة على اللوحة؟

في هذا الدرس، سوف تتعلم مفهوم الزوج المرتب، وحاصل الضرب الديكارتى وكيفية تمثيله؛ مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.

فكر وناقش !

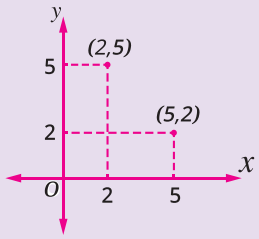
يعرض أحد المتاجر هاتفًا بثلاثة ألوان : أزرق ، ذهبى ، أسود ، وبثلاث سعات تخزين 128 ، 256 ، 512 جيجا بايت.

كم عدد الخيارات المتاحة لشراء هاتف من هذا النوع ؟

تعلـم !

الزوج المرتب

- الزوج المرتب (a , b) يتكون من مسقطين : المسقط الأول a ، والمسقط الثانى b
ويعبِّر الزوج المرتب عن موضع نقطة فى مستوى الإحداثيات المتعامدة.
- إذا كان $a \neq b$ ، فإن $(a , b) \neq (b , a)$
فمثلًا $(5 , 2) \neq (2 , 5)$
لأن كلًا منهما يعبر عن نقطة مختلفة فى المستوى الإحداثى.



تساوى زوجين مرتبين

إذا كان : $(x , y) = (a , b)$ فإن : $y = b$ ، $x = a$

مثال 1 أوجد قيمة كل من x , y فى كل مما يأتى :

1. $(x , y - 2) = (3 , 3)$
2. $(x + 3 , x y) = (5 , -8)$
3. $\left(3x^2 , \frac{y^3}{2}\right) = (12 , -32)$
4. $\left(\sqrt{x} , \frac{y^2}{5}\right) = (3 , 4)$

① $\because (x , y-2) = (3 , 3)$

$\therefore x = 3$

$y - 2 = 3 \quad \therefore y = 3 + 2 = 5$

② $\because (x+3 , xy) = (5 , -8)$

$\therefore x + 3 = 5 \quad \therefore x = 5 - 3 = 2$

$xy = -8 \quad \therefore 2y = -8 \quad \therefore y = -4$

③ $\because \left(3x^2 , \frac{y^3}{2}\right) = (12 , -32)$

$\therefore 3x^2 = 12 \quad \therefore x^2 = 4$

$\therefore x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

$\frac{y^3}{2} = -32 \quad \therefore y^3 = -64$

$\therefore y = \sqrt[3]{-64} = -4$

④ $\because \left(\sqrt{x} , \frac{y^2}{5}\right) = (3 , 4)$

$\therefore \sqrt{x} = 3 \quad \therefore x = 9$

$\frac{y^2}{5} = 4 \quad \therefore y^2 = 20$

$\therefore y = \pm\sqrt{20} = \pm 2\sqrt{5}$

حاصل الضرب الديكارتى لمجموعتين منتهيتين

إذا كانت X , Y مجموعتين غير خاليتين فإن :

① حاصل الضرب الديكارتى للمجموعة X فى المجموعة Y هو مجموعة كل الأزواج المرتبة التى مسقطها الأول عنصر من X ومسقطها الثانى عنصر من Y،
ويُرمز له بالرمز $X \times Y$ وتُقرأ «X ضرب Y»

أى أن : $X \times Y = \{(x , y) : x \in X , y \in Y\}$

② حاصل الضرب الديكارتى للمجموعة Y فى المجموعة X هو مجموعة كل الأزواج المرتبة التى مسقطها الأول عنصر من Y ومسقطها الثانى عنصر من X،
ويُرمز له بالرمز $Y \times X$ وتُقرأ «Y ضرب X»

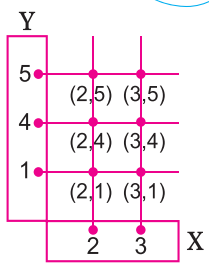
أى أن : $Y \times X = \{(y , x) : y \in Y , x \in X\}$

يمكن تمثيل حاصل الضرب الديكارتى بطريقتين : المخطط السهمى ، المخطط الديكارتى.

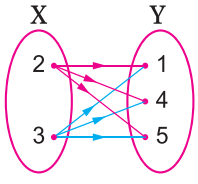
مثال 2

إذا كانت : $X = \{2 , 3\}$ ، $Y = \{1 , 4 , 5\}$ ، أوجد $X \times Y$ ومثله بمخطط سهمى وآخر ديكارتى.

$$X \times Y = \{2 , 3\} \times \{1 , 4 , 5\} = \{(2 , 1) , (2 , 4) , (2 , 5) , (3 , 1) , (3 , 4) , (3 , 5)\}$$



المخطط الديكارتى



المخطط السهمى

◄ حاول بنفسك إيجاد $Y \times X$ ومثله بمخطط سهمى وآخر ديكارتى.

■ تقييم ذاتى ①

أوجد قيم المتغيرات فى كل مما يأتى:

1. $(2x , -3y) = (8 , 6)$
2. $(2a + 1 , 8) = (7 , \frac{1}{2}b)$
3. $(x^2 + 1 , \sqrt[3]{y}) = (5 , -2)$

■ تاريخ الرياضيات

سُمى حاصل الضرب الديكارتى بهذا الاسم نسبةً إلى العالم الفرنسى رينيه ديكارت (René Descartes) مؤسس علم الهندسة التحليلية، وهى التى ربطت الجبر والهندسة باستخدام الإحداثيات.

René Descartes
(1596 - 1650)

■ تقييم ذاتى ②

إذا كانت : $X = \{1 , 2 , 3\}$
$Y = \{2 , 5\}$

1. أوجد : $X \times Y$ ، ومثله بمخطط سهمى.
2. أوجد : $Y \times X$ ، ومثله بمخطط ديكارتى.

■ فكر مع زملائك

إذا كانت X , Y مجموعتين غير خاليتين، فهل $X \times Y = Y \times X$ ؟
إذا كانت الإجابة : لا ،
فمتى يتحقق ذلك؟ ناقش.

ملاحظة :

إذا كانت : X مجموعة غير خالية، فإن : $X \times X = \{(x , y) : x \in X , y \in X\}$

وتكتب أحيانًا X^2 ، وتُقرأ «X اثنين».

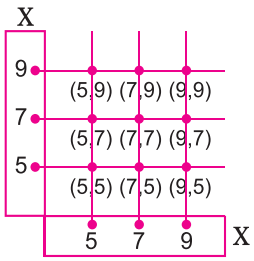
مثال 3

إذا كانت : $X = \{5 , 7 , 9\}$

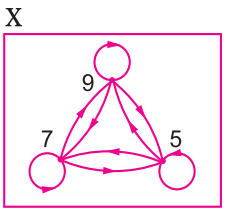
أوجد X^2 ومثله بمخطط سهمى وآخر ديكارتى.

$$X^2 = X \times X = \{5 , 7 , 9\} \times \{5 , 7 , 9\}$$

$$= \{(5 , 5) , (5 , 7) , (5 , 9) , (7 , 5) , (7 , 7) , (7 , 9) , (9 , 5) , (9 , 7) , (9 , 9)\}$$



المخطط الديكارتى



المخطط السهمى

مثال 4

إذا كانت : $X = \{-1 , 0 , 1\}$ ، $Y = \{0 , 1 , 2\}$ ، $Z = \{4\}$

أوجد كلًا مما يأتى :

1) $(X \cup Y) \times Z$ 2) $(X \cap Y) \times Y$ 3) $(X - Y) \times (Y - X)$

1) $(X \cup Y) \times Z = \{-1 , 0 , 1 , 2\} \times \{4\} = \{(-1 , 4) , (0 , 4) , (1 , 4) , (2 , 4)\}$

2) $(X \cap Y) \times Y = \{0 , 1\} \times \{0 , 1 , 2\}$

$= \{(0 , 0) , (0 , 1) , (0 , 2) , (1 , 0) , (1 , 1) , (1 , 2)\}$

3) $(X - Y) \times (Y - X) = \{-1\} \times \{2\} = \{(-1 , 2)\}$

عدد عناصر حاصل الضرب الديكارتى

إذا رمزنا لعدد عناصر المجموعة X بالرمز $n(X)$ ، عدد عناصر المجموعة Y بالرمز $n(Y)$ فإن :

$n(X \times Y) = n(X) \times n(Y)$ ، $n(X^2) = (n(X))^2$

فمثلاً :

إذا كانت : $X = \{0 , 1 , 3\}$ ، $Y = \{7 , 8\}$

فإن : $n(X) = 3$ ، $n(Y) = 2$

ويكون : $n(X \times Y) = n(Y \times X) = 3 \times 2 = 6$ ، $n(X^2) = 3^2 = 9$ ، $n(Y^2) = 2^2 = 4$

تفكير ناقد

إذا كانت X مجموعة غير خالية، فما حاصل الضرب الديكارتى $X \times \varnothing$ ؟

تقييم ذاتى ③

1) إذا كانت : $X = \{7 , 8\}$

أوجد : X^2

ومثله بمخطط سهمى.

2) إذا كانت : $X = \{3 , 4 , 6\}$

أوجد : $X \times X$

ومثله بمخطط ديكارتى.

تقييم ذاتى ④

إذا كانت : $X = \{5\}$

$Y = \{2 , 3\} , Z = \{2 , 4 , 5\}$

أوجد كلًا مما يأتى :

1) $Y \times (Y \cup Z)$

2) $(X \cap Z) \times (Y \cap Z)$

3) $(Z - Y) \times (Z - X)$

مثال 5

إذا كان : $n(X^2) = 16$ ، $n(X \times Y) = 12$ ، $Z = \{1, 5\}$

أوجد : $n(Y \times Z)$

$\because n(X^2) = 16$ $\therefore n(X) = 4$

$\because n(X \times Y) = n(X) \times n(Y)$ $\therefore 12 = 4 \times n(Y)$ $\therefore n(Y) = 3$

$\because n(Z) = 2$ $\therefore n(Y \times Z) = 3 \times 2 = 6$

حاصل الضرب الديكارتى لمجموعتين غير منتهيتين

إذا كانت X مجموعة غير منتهية، فإن $X \times X$ تكون أيضًا مجموعة غير منتهية،

ومن أمثلة ذلك ما يلى:

$N \times N = \{(x, y) : x \in N, y \in N\}$ حيث N مجموعة الأعداد الطبيعية.

$Z \times Z = \{(x, y) : x \in Z, y \in Z\}$ حيث Z مجموعة الأعداد الصحيحة.

$Q \times Q = \{(x, y) : x \in Q, y \in Q\}$ حيث Q مجموعة الأعداد النسبية.

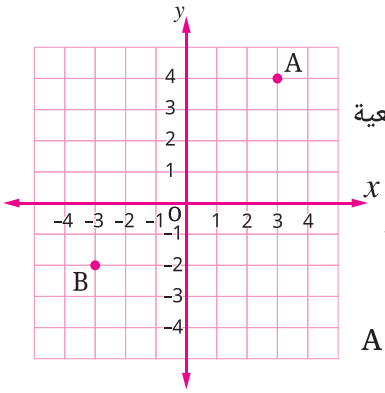
$R \times R = \{(x, y) : x \in R, y \in R\}$ حيث R مجموعة الأعداد الحقيقية.

فمثلًا :

◂ الشكل المقابل يمثل جزءاً صغيرًا من الشبكة التربيعية المتعامدة لحاصل الضرب الديكارتى $Z \times Z$

وكل نقطة من نقاط التقاطع تمثل أحد الأزواج المرتبة فى $Z \times Z$ حيث :

$A(3, 4) \in Z \times Z$ ، $B(-3, -2) \in Z \times Z$



■ تقييم ذاتى 5

إذا كانت : $X = \{1, 2, 3\}$ ،

$n(X \times Y) = 21$

أوجد : $n(Y^2)$

■ فكر مع زملائك

إلى أى من حواصل الضرب الديكارتية التالية :

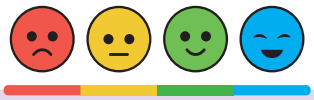
$R \times R, Q \times Q, Z \times Z, N \times N$

ينتمى كل من الأزواج المرتبة التالية :

(اكتب جميع حواصل الضرب الممكنة)

1. $(\sqrt{4}, 5)$
2. $(\sqrt[3]{-8}, 3)$
3. $(2\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$
4. $(\sqrt{5}, 1)$

تقييم الدرس



أولاً قياس المفاهيم

◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(1) إذا كان : $(a, 3) = (-2, b)$ فإن : $a + b =$ .....

(أ) -5 (ب) -1 (جـ) 1 (د) 5

(2) إذا كان : $(x, y - 1) = (4, 3)$ فإن : $\frac{x}{y} =$ .....

(أ) 1 (ب) 2 (جـ) 3 (د) 4

(3) ..... $= \{5\} \times \{3\}$

(أ) $\{15\}$ (ب) $\{3, 5\}$

(جـ) $(3, 5)$ (د) $\{(3, 5)\}$

(4) إذا كانت : $X = \{a, b, c\}$ ، $Y = \{2, 3, 5\}$

فإن : $X \times Y$ ..... $(a, 5)$

(أ) $\in$ (ب) $\notin$ (جـ) $\subset$ (د) $\not\subset$

(5) إذا كانت : $X = \{3 , 5\}$ ، $Y = \{6 , 7\}$

فإن : ..... $\in (6 , 7)$

(أ) $X \times Y$ (ب) $Y \times X$

(جـ) X^2 (د) Y^2

(7) إذا كانت : $X = \{5 , 7 , 9\}$ وكان $n(X \times Y) = 6$

فإن : $n(Y^2) =$ .....

(أ) 4 (ب) 6 (جـ) 9 (د) 12

(9) إذا كانت : $X = \{2 , 3 , 4 , 7 , 8\}$ ، $Y = \{1 , 4 , 5 , 6\}$

فإن : $n(X^2) - n(Y \times X) =$ .....

(أ) 5 (ب) 10 (جـ) 15 (د) 25

(11) إذا كان : $X \times Y = \{(a , 5) , (4 , 7) , (9 , b) , (9 , 5)\}$

فإن : $X =$ .....

(أ) $\{7 , 9\}$ (ب) $\{4 , 7\}$

(جـ) $\{4 , 9\}$ (د) $\{5 , 9\}$

(6) إلى أى حاصل ضرب ديكارتى مما يلى تنتمى النقطة $(\frac{1}{2} , \sqrt{5})$ ؟

(أ) $N \times N$ (ب) $Z \times Z$

(جـ) $Q \times Q$ (د) $R \times R$

(8) إذا كان : $X \times Y = \{(1 , 4) , (1 , 7) , (1 , 8)\}$

فإن : $n(Y^2) =$ .....

(أ) 1 (ب) 3 (جـ) 6 (د) 9

(10) إذا كان : $n(X \times Y) = 12 , n(X^2) = 9$

فإن : $n(Y^2) =$ .....

(أ) 4 (ب) 6 (جـ) 9 (د) 16

(12) إذا كان : $X^2 = \{(4 , 9) , (a , a) , (b , a) , (b , b)\}$

فإن : $X =$ .....

(أ) $\{2 , 3\}$ (ب) $\{4 , 9\}$

(جـ) $\{4\}$ (د) $\{9\}$

ثانيًا تطبيق المفاهيم

(13) أوجد قيمة كل من x ، y في كل مما يأتى :

① $(x^2 , 7) = (4 , y^2 - 2)$ ② $(5^{x-2} , xy) = (1 , 18)$

(14) إذا كان : $(2a - 3 , 4) = (4a , b + 5)$ أوجد قيمة : $|2a - b|$

(15) إذا كانت : $X = \{3 , 2\}$, $Y = \{2 , 4\}$ أوجد كلًا مما يأتى ومثله بمخطط سهمى وآخر ديكارتى:

① $X \times Y$ ② $Y \times X$ ③ X^2 ④ Y^2

(16) إذا كانت : $X = \{1 , 2 , 3\}$, $Y = \{x , y\}$ أوجد كلاً مما يأتى ومثله بمخطط سهمى وآخر ديكارتى :

① $X \times Y$ ② $Y \times X$ ③ X^2 ④ Y^2

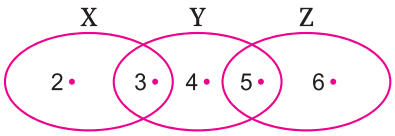
(17) إذا كانت : $X = \{6 , 4 , 8\}$ ، $Y = \{3 , 4 , 5\}$ فأوجد كلاً مما يأتى ومثله بمخطط سهمى وآخر ديكارتى :

① $(X \cap Y) \times Y$ ② $(X - Y) \times Y$ ③ $(Y - X) \times X$

(18) إذا كان : $X \times Y = \{(3,3),(4,3),(3,7),(4,7),(3,8),(4,8)\}$ أوجد كلاً مما يأتى :

① X, Y	② $Y \times (X \cap Y)$	③ $(X - Y) \times (Y - X)$
④ $(X \cup Y) \times (X \cap Y)$	⑤ $n(Y^2)$	⑥ $n(X^2)$

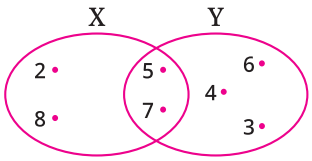
(19) يمثل الشكل المقابل شكل ڤن للمجموعات X ، Y ، Z أوجد :



① $X \times (Y \cap Z)$ ② $(X \cup Y) \times (Y - Z)$

(20) يمثل الشكل المقابل شكل ڤن للمجموعتين X ، Y

أوجد : $(X - Y) \times (Y - X)$



ثالثًا التحليل وتكامل المواد

(21) لترقيم إحدى السيارات التابعة لإحدى الشركات

يتم اختيار رقم واحد من الأرقام $\{1, 3, 5, 7\}$

مع حرف واحد من الحروف $\{a, b, c\}$

بكم طريقة يمكن ترقيم هذه السيارة ؟

يجب الالتزام بقواعد وتعليمات المرور عند قيادة السيارة لضمان سلامة الأفراد.

(22) احتمال :

إذا كانت : $X = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$، اختير زوج مرتب عشوائيًا من حاصل الضرب الديكارتى $X \times X$ ،

ما احتمال أن ينتمى الزوج المرتب المُختار لحاصل الضرب الديكارتى $\{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3\}$ ؟

تفكير إبداعى

(23) إذا كانت $X = \{1, 2, 3\}$ ، $Y = \{a, b, c\}$

كم عدد الأزواج المرتبة $(x, y) \in X \times Y$ وتحقق أن المسقط الأول عدد فردى ، والمسقط الثانى ليس b ؟

(24) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

إذا كان : $n(X) = k$ ، $n(X \times Y) = k + 4$ فإن : $n(Y)$ لا يمكن أن يساوى :

(أ) 2 (ب) 3 (جـ) 4 (د) 5

قيّم فهمك!

ما مدى فهمك لحاصل الضرب الديكارتى ؟

ضع علامة فى المربع المناسب

الدرس

2 - 2

العلاقة والدالة
(Relation and Function)

■ **نواتج التعلم**

- تعرف مفهوم العلاقة.
- تعبر عن العلاقة بطرق مختلفة.
- تعرف مفهوم مجال العلاقة، ومدى العلاقة.
- تعرف مفهوم الدالة.
- تحدد متى تكون العلاقة دالة.
- تعرف مفهوم مجال الدالة، ومجالها المقابل، ومداها.
- تمثل الدالة بطرق مختلفة.
- تعبر عن الدالة بطريقة رمزية.

■ **المفردات**

- العلاقة Relation
- الدالة Function
- المخطط السهمى Arrow diagram
- التمثيل البيانى Graph
- جدول العلاقة Relation table
- المجال Domain
- المدى Range
- المجال المقابل Codomain

استعد !

يضم الوطن العربى 22 دولة، وتضمها جميعًا جامعة الدول العربية. بفرض أن X مجموعة أسماء الدول العربية، Y مجموعة أسماء عواصم الدول العربية، هل يمكنك إيجاد مجموعة جميع الأزواج المرتبة التى مسقطها الأول ينتمى إلى X ومسقطها الثانى ينتمى إلى Y ، بحيث يكون المسقط الأول اسم الدولة والمسقط الثانى اسم عاصمتها ؟

شعار جامعة الدول العربية

- هل هذه المجموعة هى حاصل الضرب الديكارتى $X \times Y$ ؟ أم مجموعة جزئية منه ؟
- هل يمكن أن يكون لإحدى الدول العربية عاصمتان ؟ وهل يمكن ألَّا يكون لإحداها عاصمة ؟

فى هذا الدرس، سوف تتعلم مفهومى العلاقة والدالة، وكيفية التعبير عنهما بطرق مختلفة، وسوف نحدد متى تكون العلاقة دالة، مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات.

فكر وناقش !

إذا كانت $X = \{1 , 2 , 3\}$ ، $Y = \{1 , 2 , 4 , 6\}$

فأوجد حاصل الضرب الديكارتى $X \times Y$

وهل يمكنك تحديد الأزواج المرتبة (x , y) التى تنتمى لحاصل الضرب الديكارتى $X \times Y$ وتحقق أن $y = 2x$ ؟ ناقش.

تعلم !

أولاً العلاقة

إذا كانت X ، Y مجموعتين غير خاليتين، فإن العلاقة من المجموعة X إلى المجموعة Y هى مجموعة جزئية من حاصل الضرب الديكارتى $X \times Y$ وسوف نرمز لها بالرمز R

أى أن : $R \subset X \times Y$ وهى ارتباط يربط بعض أو كل عناصر X ببعض أو كل عناصر Y .

أى أن : العلاقة من المجموعة X إلى المجموعة Y هى مجموعة من الأزواج المرتبة مسقطها الأول ينتمى إلى X ومسقطها الثانى ينتمى إلى Y .

- مجال العلاقة هو مجموعة كل المساقط الأولى للأزواج المرتبة فى العلاقة،

أى أن : مجال R هو $\{x : (x , y) \in R\}$

- مدى العلاقة هو مجموعة كل المساقط الثانية للأزواج المرتبة فى العلاقة،

أى أن : مدى R هو $\{y : (x , y) \in R\}$

طرق التعبير عن العلاقة

يمكن التعبير عن العلاقة بإحدى الطرق التالية :

(1) مجموعة من الأزواج المرتبة.
(2) جدول العلاقة.
(3) المخطط السهمى للعلاقة.
(4) التمثيل البيانى للعلاقة.

والمثال التالى يوضح ذلك.

مثال 1

إذا كانت $X=\{2,4,6\}$ ، $Y=\{1,3,5,7\}$ وكانت R علاقة من X إلى Y حيث "$x\,R\,y$" تعنى "$x+y=7$" لكل $x\in X$ ، $y\in Y$

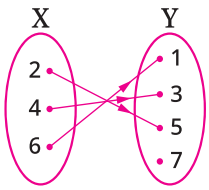
(1) اكتب العلاقة كمجموعة أزواج مرتبة.
(2) اكتب العلاقة فى صورة جدول.
(3) مثل العلاقة بالمخطط السهمى.
(4) مثل العلاقة بيانيًا.
(5) اذكر مجال ومدى العلاقة.

(1) $R=\{(2,5),(4,3),(6,1)\}$

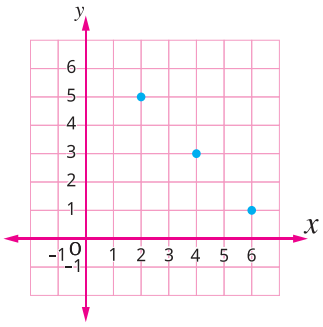
(2)

x	2	4	6
y	5	3	1

(3)



(4)



(5) المجال هو $\{2,4,6\}$ ، المدى هو $\{1,3,5\}$

مثال 2

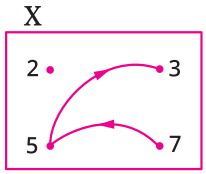
إذا كانت $X=\{2,3,5,7\}$ وكانت R علاقة على X حيث "$x\,R\,y$" تعنى "$y=x-2$" لكل $x\in X$ ، $y\in X$

(1) اكتب R كمجموعة أزواج مرتبة.
(2) اذكر مجال ومدى العلاقة.
(3) مثل العلاقة بالمخطط السهمى.
(4) مثل العلاقة بيانيًا.

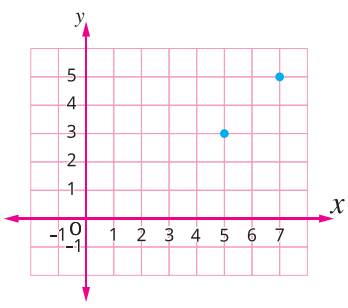
(1) $R=\{(5,3),(7,5)\}$

(2) المجال هو $\{5,7\}$ ، والمدى هو $\{3,5\}$

(3)



(4)



■ الترميز فى الرياضيات

إذا كان $(x,y)\in R$ لكل $x\in X$ ، $y\in Y$ فإننا نعبر عن ذلك بالرموز كالتالى : $x\,R\,y$

■ تقييم ذاتى (1)

إذا كانت $X=\{2,4,6,8\}$ ، $Y=\{2,3,5,7\}$ وكانت R علاقة من X إلى Y حيث "$x\,R\,y$" تعنى "$x\geq y$" لكل $x\in X$ ، $y\in Y$

(1) اكتب العلاقة كمجموعة أزواج مرتبة.
(2) اذكر مجال ومدى العلاقة.
(3) مثل العلاقة بالمخطط السهمى.
(4) مثل العلاقة بيانيًا.

■ ملاحظة

إذا كانت العلاقة R من X إلى X فإننا نقول إن R علاقة على X وبالتالى تكون $R\subset X\times X$

■ تقييم ذاتى (2)

إذا كانت $X=\{1,2,5,8\}$ وكانت R علاقة على X حيث "$x\,R\,y$" تعنى "$x-y$ عدد زوجى موجب" لكل $x\in X$ ، $y\in X$

(1) اكتب العلاقة R كمجموعة أزواج مرتبة.
(2) اذكر مجال ومدى العلاقة.
(3) مثل العلاقة بالمخطط السهمى.
(4) مثل العلاقة بيانيًا.

ثانياً الدالة

الدالة من المجموعة X إلى المجموعة Y هى علاقة من X إلى Y تربط **كل** عنصر من عناصر X بعنصر **واحد فقط** من عناصر Y وتسمى :

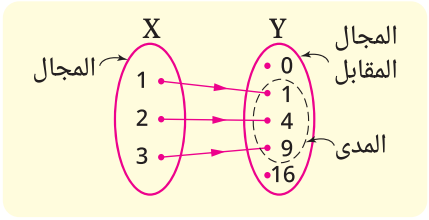
- المجموعة X بـ «مجال الدالة».
- المجموعة Y بـ «المجال المقابل للدالة».
- مجموعة صور عناصر المجال X بـ «مدى الدالة»، وهى مجموعة جزئية من المجال المقابل Y

مثال :

إذا كانت $X = \{1 , 2 , 3\}$ ، $Y = \{0 , 1 , 4 , 9 , 16\}$ وكانت R علاقة من X إلى Y حيث "$x \, R \, y$" تعنى أن "$y = x^2$" لكل $x \in X$ ، $y \in Y$

فإن العلاقة R تمثل «دالة» لأن كل عنصر من X يرتبط بعنصر واحد فقط من Y ويكون :

- المجال $= X = \{1 , 2 , 3\}$
- المجال المقابل $= Y = \{0 , 1 , 4 , 9 , 16\}$
- المدى $= \{1 , 4 , 9\}$



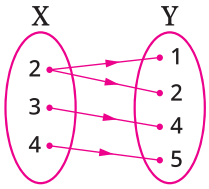
المخطط السهمى

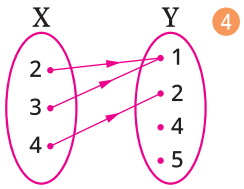
مثال 3

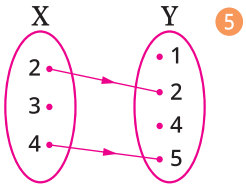
إذا كانت $X = \{2 , 3 , 4\}$ ، $Y = \{1 , 2 , 4 , 5\}$ وكانت كل من العلاقات التالية من X إلى Y بين أيها تمثل دالة وأيها لا تمثل دالة، مع ذكر السبب، وإذا كانت دالة اكتب مداها.

1) $R = \{(2 , 2) , (3 , 2) , (4 , 2)\}$

2) $R = \{(2 , 5) , (3 , 4)\}$

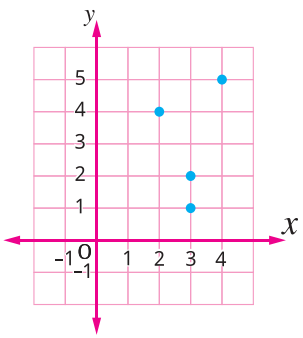
3)


4)


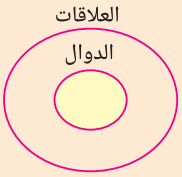
5)


6)

x	2	3	3	4
y	1	2	4	5

7)


متى تكون العلاقة دالة؟



ليس كل علاقة دالة، ولكن كل الدوال علاقات تحقق أن :

- كل عنصر من X يظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط فى مجموعة الأزواج المرتبة الممثلة للعلاقة أو فى جدول العلاقة.
- كل عنصر من X يخرج منه سهم واحد فقط فى المخطط السهمى الممثل للعلاقة.
- كل خط رأسى لكل عنصر من X يمر بنقطة واحدة فقط فى التمثيل البيانى.

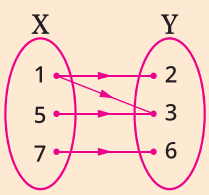
تقييم ذاتى ③

إذا كانت $X = \{1 , 5 , 7\}$ ، $Y = \{2 , 3 , 6\}$ وكانت كل من العلاقات التالية من X إلى Y بين أيها تمثل دالة وأيها لا تمثل دالة مع ذكر السبب. وإذا كانت دالة اكتب مداها.

1) $R = \{(1 , 3) , (5 , 6) , (7 , 2)\}$

2)

x	5	7
y	3	6

3)


(1) العلاقة تمثل دالة، لأن كل عنصر من X يظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط، المدى = {2}

(2) العلاقة لا تمثل دالة، لأن العنصر $4 \in X$ لم يظهر كمسقط أول.

(3) العلاقة لا تمثل دالة، لأن العنصر $2 \in X$ خرج منه أكثر من سهم.

(4) العلاقة تمثل دالة، لأن كل عنصر من X خرج منه سهم واحد فقط، المدى = {1 , 2}

(5) العلاقة لا تمثل دالة لأن العنصر $3 \in X$ لم يخرج منه سهم.

(6) العلاقة لا تمثل دالة، لأن العنصر $3 \in X$ ظهر كمسقط أول أكثر من مرة.

(7) العلاقة لا تمثل دالة، لأن الخط الرأسى عند $3 \in X$ يمر بأكثر من نقطة من النقاط الممثلة للعلاقة.

مثال 4

إذا كانت $X = \{2 , 3 , 4\}$ ، $Y = \{2 , 4 , 8 , 12 , 16\}$ وكانت R علاقة من X إلى Y

حيث "$x \, R \, y$" تعنى "$y = 2^x$" لكل $x \in X$ ، $y \in Y$

(1) اكتب R كمجموعة أزواج مرتبة.

(2) مثل R بالمخطط السهمى.

(3) مثل R بيانيًا.

(4) هل R تمثل دالة أم لا ؟ ولماذا ؟ وإذا كانت دالة أوجد مجالها ومداها.

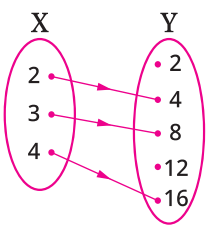
(1) $\because 2^2 = 4 \in Y \quad \therefore (2 , 4) \in R$

$2^3 = 8 \in Y \quad \therefore (3 , 8) \in R$

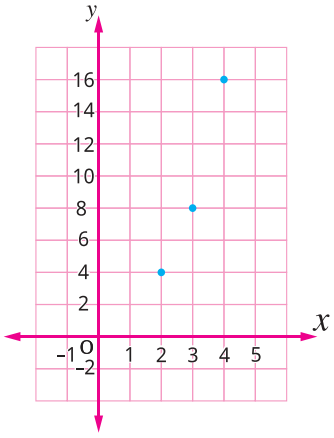
$2^4 = 16 \in Y \quad \therefore (4 , 16) \in R$

$\therefore R = \{(2 , 4) , (3 , 8) , (4 , 16)\}$

(2) المخطط السهمى



(3) التمثيل البيانى



(4) R تمثل دالة من X إلى Y لأن كل عنصر من عناصر X يظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط فى الأزواج المرتبة الممثلة للعلاقة.

المجال = {2 , 3 , 4} ، المدى = {4 , 8 , 16}

تقييم ذاتى (4)

إذا كانت $X = \{3 , 5 , 7\}$ ، $Y = \{6 , 9 , 10 , 16 , 21\}$ وكانت R علاقة من X إلى Y حيث "$x \, R \, y$" تعنى "$\frac{y}{x}$ = عدد طبيعى"

لكل $x \in X$ ، $y \in Y$

(1) اكتب R كمجموعة أزواج مرتبة.

(2) مثل R بالمخطط السهمى.

(3) مثل R بيانيًا.

(4) هل R تمثل دالة أم لا ؟ ولماذا ؟ وإذا كانت دالة أوجد مجالها ومداها.

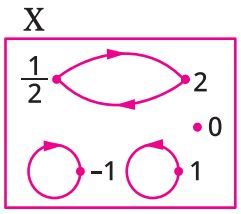
مثال 5

إذا كانت $X=\{\frac{1}{2}, -1, 0, 1, 2\}$ وكانت R علاقة على X حيث "$x\ R\ y$" تعنى "$x\,y=1$" لكل $x\in X$ ، $y\in X$

1) اكتب R كمجموعة أزواج مرتبة.
2) مثلها بمخطط سهمى.
3) هل R تمثل دالة أم لا ؟ ولماذا ؟

1) $R=\{(\frac{1}{2}, 2), (-1, -1), (1, 1), (2, \frac{1}{2})\}$

2)



3) R لا تمثل دالة لأن العنصر $0\in X$ لم يخرج منه سهم فى المخطط السهمى.

التعبير الرمزى عن الدالة

- يرمز للدالة بأحد الرموز : f أو g أو ...
- الدالة f من المجموعة X إلى المجموعة Y تكتب رياضيًا :

$f: X \longrightarrow Y$ وتُقرأ "f دالة من X إلى Y"

- إذا كان الزوج المرتب (x, y) ينتمى للدالة f فإن العنصر y هو صورة العنصر x بالدالة f ونعبر عن ذلك بـ «قاعدة الدالة» أو "المعادلة" التالية : $y=f(x)$
- يُسمى x بالمتغير المستقل ، ويُسمى y بالمتغير التابع.

مثال :

إذا كانت $X=\{2, 3, 4\}$ ، $Y=\{1, 4, 9, 16\}$ وكانت f دالة من X إلى Y حيث $f(x)=x^2$ فإن :

عند $x=2$: $f(2)=2^2=4$ ، عند $x=3$: $f(3)=3^2=9$ ، عند $x=4$: $f(4)=4^2=16$

وبالتالى يكون مدى الدالة هو $\{4, 9, 16\}$

مثال 6

إذا كانت $X=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ، $Y=\{y: y\in Z, -1\le y\le 7\}$

وكانت الدالة $f: X \longrightarrow Y$ حيث $f(x)=3-2x$

1) أوجد صور عناصر X بالدالة f موضحًا مدى الدالة.
2) اكتب الدالة فى صورة جدول.
3) مثل الدالة بيانيًا.

تقييم ذاتى 5

إذا كانت $X=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ وكانت R علاقة على X حيث "$x\ R\ y$" تعنى "$x=-y$" لكل $x\in X$ ، $y\in X$

1) اكتب R كمجموعة أزواج مرتبة.
2) مثلها بمخطط سهمى.
3) مثلها بيانيًا.
4) هل R تمثل دالة أم لا ؟ ولماذا ؟

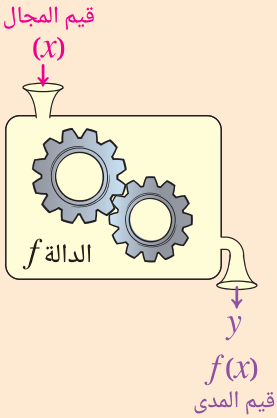
تفكير ناقد

فى مثال 5

إذا كانت $X=\{\frac{1}{2}, -1, 1, 2\}$ فهل العلاقة على X تمثل دالة أم لا ؟ ولماذا ؟

ملاحظة

يمكنك اعتبار الدالة f على أنها ماكينة ندخل إليها قيم المجال (x) وينتج منها قيم المدى (y) كما يلى :



لاحظ أن

$f(x)$ ليست مضروبة فى (x) ولكنها تعنى قيمة f عند x فمثلًا $f(2)$ تعنى قيمة f عند $x=2$

■ **تقييم ذاتى ⑥**

إذا كانت $X=\{1,2,3,5\}$ ،
$Y=\{3,4,5,6,7,8,10\}$
وكانت الدالة $f: X \longrightarrow Y$
حيث $f(x)=x+3$

1. أوجد صور عناصر X بالدالة f موضحًا مدى الدالة.
2. اكتب الدالة فى صورة جدول.
3. مثل الدالة بيانيًا.

■ **لاحظ أن**

إذا لم يُذكر مجال الدالة فإننا نعتبر أن مجالها هو مجموعة الأعداد الحقيقية التى تجعل الدالة معرفة.

■ **تقييم ذاتى ⑦**

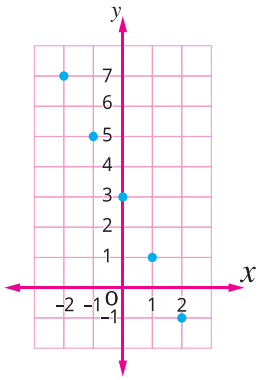
إذا كانت $f(x)=-3x+4$
أوجد :

1. $f(-2)+f(2)$
2. $3f(5)+5f(3)$

① عند $x=-2$ فإن : $f(-2)=3-2(-2)=7$
، عند $x=-1$ فإن : $f(-1)=3-2(-1)=5$
، عند $x=0$ فإن : $f(0)=3-2(0)=3$
، عند $x=1$ فإن : $f(1)=3-2(1)=1$
، عند $x=2$ فإن : $f(2)=3-2(2)=-1$
∴ مدى الدالة هو $\{7,5,3,1,-1\}$

②

x	-2	-1	0	1	2
y	7	5	3	1	-1

③ 

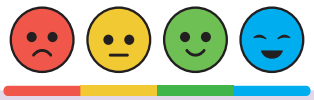
مثال 7

إذا كانت الدالة $f(x)=x^2-3$ أوجد قيمة كل من :

1. $f(0)-f(\frac{1}{3})$
2. $2f(\sqrt{5})+5f(\sqrt{2})$

① $f(0)-f(\frac{1}{3})=[(0)^2-3]-[(\frac{1}{3})^2-3]=\frac{-1}{9}$

② $2f(\sqrt{5})+5f(\sqrt{2})=2[(\sqrt{5})^2-3]+5[(\sqrt{2})^2-3]=-1$

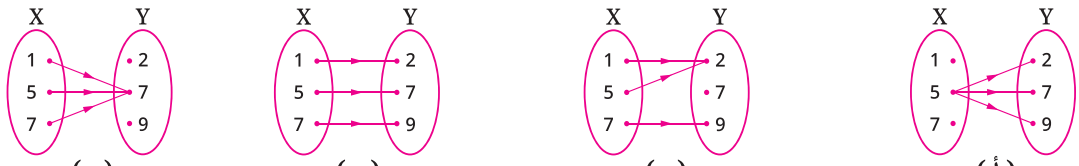


تقييم الدرس

أولاً قياس المفاهيم

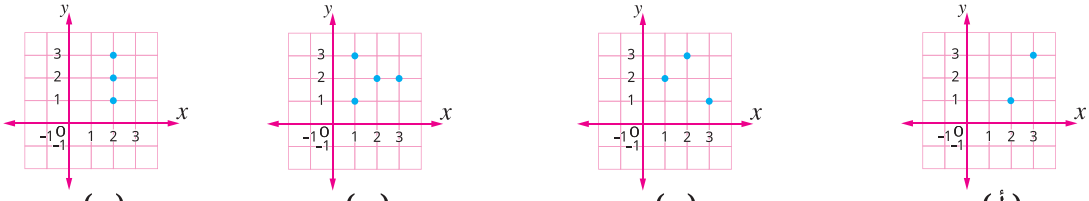
▸ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

① أى العلاقات الآتية ليست دالة من X إلى Y ؟



(أ) (ب) (جـ) (د)

② إذا كانت $X=\{1,2,3\}$، فأى من العلاقات الآتية تمثل دالة على X ؟



(أ) (ب) (جـ) (د)

③ إذا كانت $X = \{1 , 2 , 5\}$ ، $Y = \{6 , 7 , 9\}$ ، فأى من العلاقات الآتية تمثل دالة من X إلى Y ؟

(أ) $\{(5 , 9) , (2 , 9) , (2 , 7) , (1 , 6)\}$ (ب) $\{(5 , 7) , (6 , 2) , (9 , 1)\}$

(جـ) $\{(5 , 9) , (1 , 7)\}$ (د) $\{(5 , 7) , (2 , 7) , (1 , 7)\}$

④ إذا كانت R علاقة حيث $R = \{(1 , 7) , (2 , 8) , (3 , 7) , (5 , 8)\}$ فما مدى العلاقة ؟

(أ) $\{1 , 2 , 3 , 5\}$ (ب) $\{7 , 8 , 5\}$ (جـ) $\{7 , 8\}$ (د) $\{1 , 2 , 7 , 8\}$

⑤ ما مجال الدالة $\{(1 , 2) , (2 , 3) , (4 , 2) , (5 , 3)\}$ ؟

(أ) $\{2 , 3\}$ (ب) $\{1 , 2 , 3 , 4\}$ (جـ) $\{1 , 2 , 4 , 5\}$ (د) $\{2 , 3 , 4 , 5\}$

⑥ إذا كانت $X = \{5 , 7 , 8\}$ ، $Y = \{9 , 10\}$ وكانت R دالة من X إلى Y حيث $R = \{(5 , 9) , (8 , 9) , (k , 9)\}$ ، فما قيمة k ؟

(أ) 5 (ب) 7 (جـ) 8 (د) 9

⑦ إذا كانت $X = \{2 , 3 , 4\}$ وكانت R دالة على X حيث $R = \{(a , 4) , (b , 2) , (3 , 4)\}$ فما قيمة $a + b$ ؟

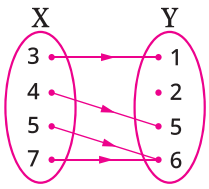
(أ) 4 (ب) 5 (جـ) 6 (د) 7

⑧ إذا كانت $f(x) = x^2$ ، $g(x) = x + 4$ فما قيمة $5f(2) + 2g(5)$ ؟

(أ) 18 (ب) 20 (جـ) 38 (د) 70

ثانيًا تطبيق المفاهيم

⑨ المخطط السهمى المقابل يمثل العلاقة R من X إلى Y :

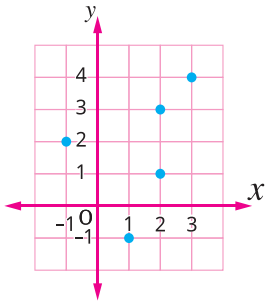


① اكتب العلاقة كمجموعة أزواج مرتبة. ② اكتب العلاقة فى صورة جدول.

③ مثل العلاقة بيانيًا. ④ أوجد مجال ومدى العلاقة.

⑤ هل العلاقة تمثل دالة أم لا ؟ ولماذا ؟

⑩ إذا كان الشكل المقابل هو التمثيل البيانى للعلاقة R من X إلى Y



حيث $X = \{-1 , 1 , 2 , 3\}$ ، $Y = \{-1 , 1 , 2 , 3 , 4\}$

① اكتب العلاقة كمجموعة أزواج مرتبة. ② اكتب العلاقة فى صورة جدول.

③ مثل العلاقة بمخطط سهمى. ④ أوجد مجال ومدى العلاقة.

⑤ هل العلاقة تمثل دالة أم لا ؟ ولماذا ؟

⑪ إذا كانت R علاقة من X إلى Y وكانت $R = \{(2 , 2) , (0 , 2) , (3 , 1) , (4 , 2)\}$

① اكتب العلاقة فى صورة جدول. ② مثل العلاقة بيانيًا. ③ أوجد مجال ومدى العلاقة.

⑫ إذا كانت R علاقة من X إلى Y حيث $X = \{1 , 2 , 3 , 4\}$ ، $Y = \{3 , 5 , 7\}$ وكان "$x \, R \, y$" تعنى "عدد أولى $(x + y)$" لكل $x \in X$ ، $y \in Y$

① اكتب R كمجموعة أزواج مرتبة. ② اكتب العلاقة فى صورة جدول.

③ مثل العلاقة بالمخطط السهمى. ④ أوجد مجال ومدى العلاقة. ⑤ هل العلاقة تمثل دالة أم لا ؟ ولماذا ؟

(13) إذا كانت R علاقة من X إلى Y حيث $X=\{2,3,4,5\}$ ، $Y=\{3,5,6,7,9,11\}$ وكان "$x\,R\,y$"
تعنى "$y=2x+1$" لكل $x\in X$ ، $y\in Y$

① اكتب R كمجموعة أزواج مرتبة.
② مثل العلاقة بالمخطط السهمى.
③ مثل العلاقة بيانيًا.
④ هل العلاقة تمثل دالة أم لا ؟ ولماذا ؟ وإذا كانت دالة أوجد مجالها ومداها.

(14) إذا كانت R علاقة على X حيث $X=\{1,2,3,4,5\}$ وكان "$x\,R\,y$" تعنى "$x+y=5$" لكل $x\in X$ ، $y\in X$

① اكتب R كمجموعة أزواج مرتبة.
② مثل العلاقة بالمخطط السهمى.
③ أوجد مجال ومدى العلاقة.
④ هل العلاقة تمثل دالة أم لا ؟ ولماذا ؟

(15) إذا كانت R علاقة على N حيث N مجموعة الأعداد الطبيعية وكان "$x\,R\,y$" تعنى "$xy=18$" لكل $x\in N$ ، $y\in N$

① اكتب R كمجموعة أزواج مرتبة.
② اكتب العلاقة فى صورة جدول.
③ اكتب مجال ومدى العلاقة.
④ إذا كان $9\,R\,m$ فأوجد قيمة m.
⑤ إذا كان $6\,R\,k$ فأوجد قيمة k.

(16) إذا كانت $X=\{4,6,8\}$ ، $Y=\{-2,-1,0,1,2\}$ وكانت f دالة من X إلى Y حيث $f(x)=4-\frac{1}{2}x$
اكتب f كمجموعة أزواج مرتبة، ثم أوجد مدى الدالة ومثلها بيانيًا.

(17) إذا كانت $X=\{1,2,3,4,5,6\}$ ، N هى مجموعة الأعداد الطبيعية، وكانت f دالة من X إلى N
حيث $f(x)=x^2-1$ اكتب f كمجموعة أزواج مرتبة، ثم أوجد مدى الدالة.

ثالثًا التحليل وتكامل المواد

(18) اذكر أى العلاقات الآتية تعتبر دالة وأيها ليست دالة :

① العلاقة بين «رقم جلوس الطالب» و «درجته بالامتحان».
② العلاقة بين «فنادق شرم الشيخ» و «السائحين».
③ العلاقة بين «أسماء المحافظات» و «العاصمة الإدارية لكل محافظة».
④ العلاقة بين «الطلاب» و «الأنشطة المدرسية».

تفكير إبداعى

(19) إذا كانت R علاقة على X حيث $X=\{x:x\in N,\ 10\le x<100\}$
حيث "$x\,R\,y$" تعنى "$y=5x$" لكل $x\in X$ ، $y\in X$
أوجد عدد عناصر العلاقة R

قيّم فهمك!

ما مدى فهمك للعلاقة والدالة ؟
ضع علامة فى المربع المناسب

الدرس
2 - 3

الدالة الخطية
(Linear Function)

■ **نواتج التعلم**

- تعرف مفهوم الدالة الخطية.
- تمثل الدالة الخطية بيانيًا.
- تعرف مفهوم الدالة الثابتة .
- تمثل الدالة الثابتة بيانيًا.
- تستخدم التكنولوجيا فى تمثيل الدالة الخطية والدالة الثابتة.
- تستخدم الدالة الخطية، والدالة الثابتة لحل بعض المشكلات الحياتية.

■ **المفـردات**

- دالة خطية
Linear function
- دالة ثابتة
Constant function

■ **لاحظ أن**

فى العموم يكون مجال الدالة الخطية هو R ولكن فى بعض التطبيقات الحياتية يكون المجال مجموعة جزئية من R حسب معطيات كل تمرين.

استعد !

جامع محمد على بقلعة صلاح الدين الأيوبى

قلعة صلاح الديـن الأيوبى أحد أهم معالم القاهرة الإسـلامية، وإحدى أعـرق القلاع الحربية، تضـم العديد مـن المعالم الأثرية الإسلامية، منها جامع محمد على باشا.

إذا كان فى القلعة 120 زائرًا عند السـاعة 10 صباحًـا، ومـع مـرور الوقـت، يدخـل 40 زائرًا جديدًا كل سـاعة، فكانت العلاقة بيـن عـدد الزائريـن الكلـى $f(t)$ والزمن بالساعات (t) هى $f(t) = 120 + 40\ t$

هـل يمكنـك تمثيل هذه العلاقـة بيانيًا، وهل يمكنك معرفة بعد كم سـاعة يكـون العدد الكلى للزائرين 360 زائرًا ؟

فى هذا الدرس، سوف تتعلم بعض الصور المختلفة للدالة، منها الدالة الخطية والدالة الثابتة، وطريقة تمثيلهما بيانيًا، مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات.

فكر وناقش !

هل يمكنك تحديد أى من الأزواج المرتبة الآتية يحقق الدالة f حيث $f(x) = 4x - 5$

$(0, 1)$ $(2, 3)$ $(4, 10)$ $(5, 15)$

تعلم !

الدالة الخطية

- الدالة f حيث $f(x) = ax + b$ ، a ، b عددان حقيقيان، $a \neq 0$ تُسمى **دالة خطية**.
- الدالة الخطية تكون من الدرجة الأولى، وتمثل بيانيًا بخط مسـتقيم يقطع محور y فى النقطة $(0, b)$ ، ويقطع محور x فى النقطة $(\frac{-b}{a}, 0)$

فمثلًا :

الدالة f حيث $f(x) = x + 4$ دالة خطية من الدرجة الأولى، وتمثل بيانيًا بخط مستقيم يقطع محور y فى النقطة $(0, 4)$، ويقطع محور x فى النقطة $(-4, 0)$

مثال 1

مثِّل بيانيًا كلًا مما يأتى :

1 $f(x) = 6 - 2x$

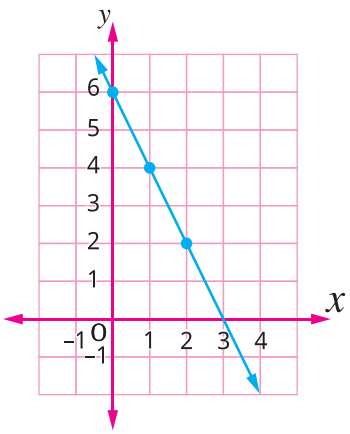
2 $g(x) = \frac{1}{3}x$

1 لتمثيل الدالة f بيانيًا عيِّن أى ثلاثة أزواج مرتبة تنتمى للدالة f حيث $f(x) = 6 - 2x$، وذلك بوضع أى ثلاث قيم لـ (x) ولتكن 0 , 1 , 2 وإيجاد قيم الدالة عندها.

عند $x = 0$:	عند $x = 1$:	عند $x = 2$:
$\therefore f(0) = 6 - 2(0) = 6$	$\therefore f(1) = 6 - 2(1) = 4$	$\therefore f(2) = 6 - 2(2) = 2$
$\therefore (0 , 6) \in f$	$\therefore (1 , 4) \in f$	$\therefore (2 , 2) \in f$

رتب الأزواج المرتبة فى جدول كالتالى :

x	0	1	2
y	6	4	2



لاحظ أن

يمكن إيجاد نقطتى التقاطع مع محورى الإحداثيات واستخدامهما فى التمثيل البيانى.

فمثلًا عند تمثيل $f(x) = 6 - 2x$ تجد أن :

- نقطة التقاطع مع محور y هى $(0 , b)$ وتساوى $(0 , 6)$
- نقطة التقاطع مع محور x هى $(\frac{-b}{a} , 0)$ وتساوى $(3 , 0)$

لاحظ أن

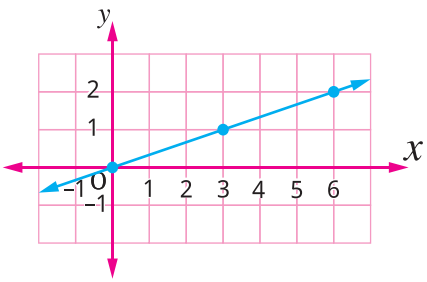
إذا كان معامل x كسرًا، فيفضل أن تختار أعدادًا تقبل القسمة على مقام هذا الكسر لسهولة التمثيل.

2 عيِّن ثلاثة أزواج مرتبة تنتمى للدالة g حيث $g(x) = \frac{1}{3}x$

عند $x = 0$:	عند $x = 3$:	عند $x = 6$:
$\therefore g(0) = \frac{1}{3}(0) = 0$	$\therefore g(3) = \frac{1}{3}(3) = 1$	$\therefore g(6) = \frac{1}{3}(6) = 2$
$\therefore (0 , 0) \in g$	$\therefore (3 , 1) \in g$	$\therefore (6 , 2) \in g$

رتب الأزواج المرتبة فى جدول كالتالى :

x	0	3	6
y	0	1	2



تقييم ذاتى 1

مثِّل بيانيًا كلًا مما يأتى :

1 $f(x) = 2x + 3$

2 $g(x) = -\frac{1}{2}x$

لاحظ أن

عند تمثيل الدالة الخطية يمكن الاكتفاء بإيجاد زوجين مرتبين ينتميان إلى الدالة، ويمكنك إيجاد زوج مرتب ثالث للتحقق أن النقط الثلاث الممثلة للأزواج المرتبة تقع على خط مستقيم واحد.

توظيف التكنولوجيا

- يمكن استخدام برامج متعددة لتمثيل الدالة الخطية ودراستها مثل برنامج GeoGebra
- حاول بنفسك استخدام برنامج GeoGebra لتمثيل الدالتين فى مثال 1

لاحظ أن

الدالة f حيث $f(x) = ax$ ، $a \neq 0$ يمثلها بيانيًا خط مستقيم يمر بنقطة الأصل $(0 , 0)$.

الدالة الثابتة

- الدالة f حيث $f(x) = b$ ، b عدد حقيقى، تُسمى **دالة ثابتة**.
- إذا كانت $b \neq 0$ فإن الدالة الثابتة تكون من الدرجة الصفرية، وتمثل بيانيًا بخط مستقيم يوازى محور x ويمر بالنقطة $(0 , b)$

فمثلًا :

الدالة f حيث $f(x) = 5$ دالة ثابتة من الدرجة الصفرية، وتمثل بيانيًا بخط مستقيم يوازى محور x ويمر بالنقطة $(0 , 5)$

■ حالة خاصة

إذا كانت $b = 0$ فإن الدالة f حيث $f(x) = 0$ دالة ثابتة ليس لها درجة، وتمثل بيانيًا بمحور x.

مثال 2

مثل بيانيًا كلًا مما يأتى :

① $f(x) = 3$ ② $g(x) = -2$

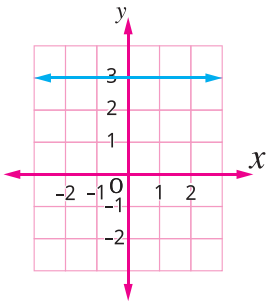
■ تقييم ذاتى ②

مثِّل بيانيًا كلًا مما يأتى :

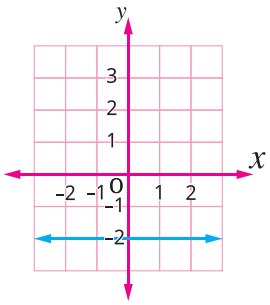
① $f(x) = -1$

② $g(x) = 4$

① $f(x) = 3$



② $g(x) = -2$



تطبيقات على الدالة الخطية

مثال 3

إذا كانت $f(x) = 3x + b$، والنقطة $(4 , 7)$ تقع على المستقيم الذى يمثل الدالة f

أوجد قيمة كل من b ، $f(1)$

■ تقييم ذاتى ③

إذا كانت $f(x) = ax + 3$

والمستقيم الذى يمثل الدالة f يقطع محور x فى النقطة $(\frac{3}{4} , 0)$

أوجد قيمة كل من a ، $f(-1)$

$\because f(x) = 3x + b$

$\because$ النقطة $(4 , 7)$ تقع على المستقيم الذى يمثل الدالة f

$\therefore 7 = 3 \times 4 + b$ $\quad\quad$ $\therefore b = -5$

$\therefore f(4) = 7$

$\therefore f(1) = 3(1) - 5 = -2$

$\therefore f(x) = 3x - 5$

مثال 4

صناعة : إذا كانت تكلفة إنتاج عدد من القمصان تعطى بالدالة f حيث $f(x) = 50x + 100$ حيث x عدد القمصان، $f(x)$ التكلفة بالجنيه. كوِّن جدولًا يبين بعض قيم x والتكلفة المناظرة لها ومثله بيانيًا، ثم أوجد عدد القمصان التى تبلغ تكلفتها 700 جنيه.

■ **تقييم ذاتى ④**

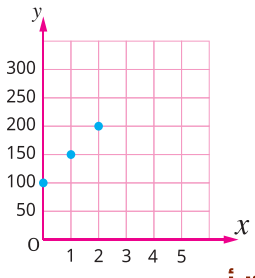
إذا كانت تكلفة إنتاج عدد من الكتب تعطى بالعلاقة $f(x) = 10 + 5x$ حيث x عدد الكتب، $f(x)$ التكلفة بالجنيه.

كوِّن جدولًا يبين بعض قيم x والتكلفة المناظرة لها، ثم مثله بيانيًا، ثم أوجد عدد الكتب التى يمكن إنتاجها بتكلفة تبلغ 90 جنيهًا.

$\because f(x) = 50x + 100$

$\therefore f(0) = 100 , f(1) = 150 , f(2) = 200$

x	0	1	2
y	100	150	200



وإذا كانت التكلفة = 700 جنيه، فإن : $f(x) = 700$

$\therefore 50x + 100 = 700 \quad \therefore x = 12$

أى أن عدد القمصان هو 12 قميصًا.

■ **لاحظ أن**

عند $x = 0$ فإن $y = 100$ أى أنه عندما يكون عدد القمصان المنتجة يساوى الصفر فإن التكلفة تساوى 100 جنيه وهذا المبلغ هو تكلفة ثابتة لا تتوقف على عدد القمصان.

■ **لاحظ فى المثال السابق أن**

قيم x لا يمكن أن تكون سالبة أو أعدادًا موجبة غير صحيحة، فإنه لا يمكن إنتاج (3−) قميص أو (1.5) قميص، وبالتالى يكون المجال هو مجموعة الأعداد الطبيعية N ، وتُمثل الدالة بنقط منفصلة.

وقد يكون للمجال حد أقصى عندما تكون الطاقة الإنتاجية اليومية للمصنع 100 قميص مثلًا، فيكون المجال هو {0 , 1 , 2 , 3 , ... , 100}

■ **تقييم ذاتى ⑤**

خزان سعته 216 لترًا ممتلئ تمامًا بالماء، يتسرب منه الماء بحيث تكون العلاقة بين كمية الماء المتبقية فى الخزان $f(t)$ باللتر والوقت المنقضى (t) بالساعة تعطى بالدالة f حيث $f(t) = 216 - 6t$

1. مثل هذه الدالة بيانيًا، موضحًا المجال.
2. متى يفرغ الخزان تمامًا؟

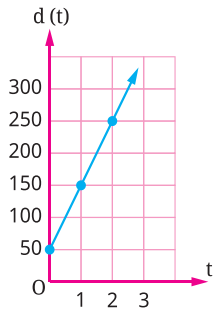
مثال 5

سيارة تسير بسرعة ثابتة من نقطة تبعد 50 كم عن القاهرة، فإذا كانت المسافة (d) بالكيلو متر التى تبعدها السيارة عن القاهرة بعد مرور زمن (t) بالساعة تتحدد بالعلاقة $d(t) = 100t + 50$ مثل الدالة d بيانيًا، وأوجد الزمن اللازم حتى يكون بُعد السيارة عن القاهرة 550 كم.

$\because d(t) = 100t + 50$

$\therefore d(0) = 50 , d(1) = 150 , d(2) = 250$

t	0	1	2
d (t)	50	150	250



وإذا كان البعد عن القاهرة 550 كم :

$\therefore d(t) = 550$

$\therefore 100t + 50 = 550 \quad \therefore t = 5$

أى أن الزمن هو 5 ساعات.

■ **لاحظ فى المثال السابق أن**

قيمة t لا يمكن أن تكون سالبة ولذلك يكون المجال هو $[0 , \infty[$ ونمثل الدالة بشعاع بدايته النقطة (50 , 0).

نشاط تعاونى

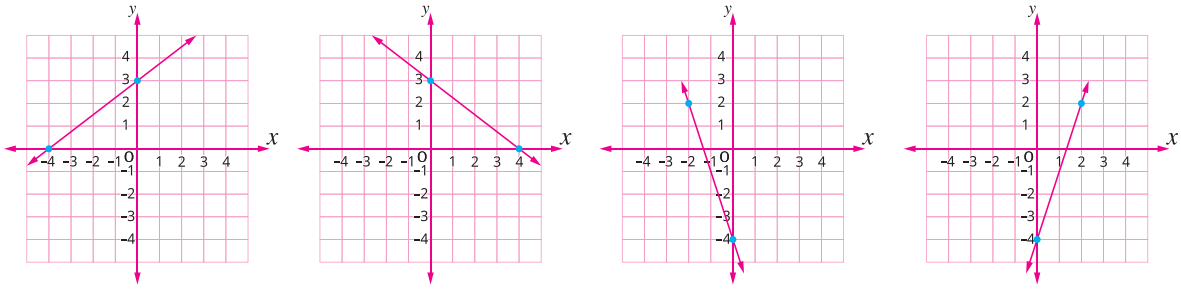
استخدم مصادر مختلفة (مثل : شبكة الإنترنت أو تطبيقات الذكاء الاصطناعى أو مكتبة مدرستك أو ...) وتعاون مع زملائك فى البحث عن علاقات فى علوم مختلفة تمثل كل منها دالة خطية، واستخدم أحد برامج الحاسب مثل GeoGebra لتمثيل كل منها.

تقييم الدرس

أولاً قياس المفاهيم

◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(1) أى من الأشكال التالية يعتبر تمثيلًا بيانيًا للدالة f حيث $f(x) = 3x - 4$ ؟



(أ) (ب) (جـ) (د)

(2) المستقيم الذى يمثل الدالة f حيث $f(x) = 3x - 12$ يقطع محور x فى النقطة:

(أ) $(-12, 0)$ (ب) $(12, 0)$ (جـ) $(4, 0)$ (د) $(-4, 0)$

(3) المستقيم الذى يمثل الدالة f حيث $f(x) = 6 - 2x$ يقطع محور y فى النقطة:

(أ) $(0, -6)$ (ب) $(0, -3)$ (جـ) $(0, 3)$ (د) $(0, 6)$

(4) الزوج المرتب $(2, 1)$ ينتمى للدالة f حيث :

(أ) $f(x) = 2x - 1$ (ب) $f(x) = -3x + 7$

(جـ) $f(x) = 2x + 1$ (د) $f(x) = -3x + 5$

(5) إذا كانت $f: R \longrightarrow R$ وكانت $f(x) = 7$، فما قيمة $\frac{5f(4)}{10f(6)}$ ؟

(أ) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (جـ) $\frac{7}{3}$ (د) $\frac{7}{2}$

ثانيًا تطبيق المفاهيم

◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(6) إذا كان المستقيم الذى يمثل الدالة f حيث $f(x) = kx + 4$ يمر بالنقطة $(1, 1)$ ، فما قيمة $f(-1)$ ؟

(أ) -7 (ب) -1 (جـ) 1 (د) 7

(7) إذا كان المستقيم الذى يمثل الدالة f حيث $f(x) = 2x + b$ يمر بالنقطة $(-1, 5)$ ، فما قيمة $f(0)$ ؟

(أ) -7 (ب) -5 (جـ) 5 (د) 7

(8) إذا كانت النقطة $(k, 5)$ تقع على المستقيم الذى يمثل الدالة f حيث $f(x) = 2x - 7$، فما قيمة k ؟

(أ) 3 (ب) 4 (جـ) 5 (د) 6

(9) إذا كان $(5k, k)$ ينتمى للدالة f حيث $f(x) = 3x + 14$، فما قيمة k ؟

(أ) 14 (ب) 10 (جـ) -7 (د) -1

◂ أجب عن الأسئلة التالية :

(10) مثل بيانيًا كلًا مما يأتى :

① $f(x)=3x$	② $f(x)=\frac{1}{2}x+3$	③ $f(x)=2-x$	④ $f(x)=2$
⑤ $f(x)=2x-5$	⑥ $f(x)=5-3x$	⑦ $f(x)=-\frac{1}{3}x+2$	

(11) إذا كانت $f(x)=2x+3$ وكانت $f(k)=11$ أوجد قيمة k

(12) الجدول المقابل يمثل مجموعة من الأزواج المرتبة للدالة f حيث $f(x)=4x+5$ أوجد قيمة $(a-b)$

x	3	a	8
$f(x)$	17	29	b

ثالثًا التحليل وتكامل المواد

(13) تجارة :

سعر ماكينة تصوير بعد t سنة يُعطى بالجنيه بالدالة f حيث $f(t)=12000-750t$

أوجد سعر ماكينة التصوير بعد 4 سنوات من شرائها ،

أوجد بعد كم سنة يصبح سعر ماكينة التصوير 3000 جنيه.

ممارسة الرياضة بانتظام تحافظ على الصحة، وتنمى روح المثابرة، وتعلم الانضباط والعمل الجماعى.

(14) رياضة :

إذا كانت تكلفة استئجار ملعب كرة قدم بالجنيه تُعطى بالدالة f

حيث $f(t)=120t+80$

حيث t عدد ساعات استئجار الملعب،

أوجد تكلفة استئجار الملعب لمدة ساعتين،

بعد كم ساعة تكون التكلفة 680 جنيهًا ؟

الشراء غير الواعى يرهق الفرد، ويؤثر سلبًا على الاقتصاد.

(15) تسوُّق :

فى محلات السوبر ماركت ستجد غالبًا سلال تسوق متراصة داخل بعضها البعض.

إذا كانت السلال كلها متطابقة وارتفاعها بالسنتيمتر

وهى متداخلة يُعطى بالدالة f حيث $f(n)=3n+20$،

حيث n عدد السلال المتداخلة، أوجد ارتفاع السلال عندما يكون عددها 10 سلال،

ثم أوجد عدد السلال إذا كان الارتفاع 2 متر، مثل بيانيًا الدالة f

تفكير إبداعى

◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(16) إذا كانت $f(x)=-3$ ، $g(x)=4$ فما المسافة العمودية بين المستقيمين الممثلين للدالتين f , g ؟

(أ) 1 (ب) 3 (جـ) 5 (د) 7

قيّم فهمك!

ما مدى فهمك للدالة الخطية ؟

ضع علامة فى المربع المناسب

الدرس

4 - 2

معادلات ومتباينات الدرجة الأولى فى متغير واحد

(Equations and inequalities of the first degree in one variable)

■ نواتج التعلم

- تعرف مفهوم معادلة الدرجة الأولى فى متغير واحد.
- تحل معادلة الدرجة الأولى فى متغير واحد فى R
- تعرف مفهوم متباينة الدرجة الأولى فى متغير واحد.
- تحل متباينة الدرجة الأولى فى متغير واحد فى R
- تستخدم المعادلات والمتباينات لحل بعض المشكلات الحياتية.

■ المفـردات

- معادلة Equation
- متباينة Inequality
- الدرجة الأولى First degree

■ لاحظ أن

معادلة الدرجة الأولى فى متغير واحد يكون فيها المتغير الوحيد مرفوع للأس واحد.

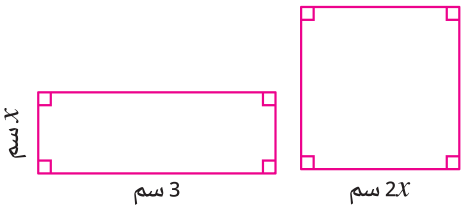
استعد !

يحرص محمد على ممارسة الرياضة بانتظام للحفاظ على صحته ولياقته البدنية. أراد محمد الاشتراك فى نادٍ رياضى قريب من منزله، يتطلب الاشتراك دفع 100 جنيه رسوم تسجيل ثابتة، بالإضافة إلى 20 جنيهًا عن كل يوم تدريب.
يخصص محمد شهريًا 300 جنيه فقط لممارسة الرياضة فى النادى، فكم يومًا يستطيع أن يتدرب دون أن يتجاوز هذا المبلغ ؟

فى هذا الدرس، سوف تتعرف على كيفية حل معادلات ومتباينات الدرجة الأولى فى متغير واحد، مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.

فكر وناقش !

فى الشكل المقابل :
مربع طول ضلعه $2x$ سم، ومستطيل بعداه x سم ، 3 سم
ما قيمة x التى تجعل محيط المربع يساوى محيط المستطيل ؟



تعلم !

أولاً معادلة الدرجة الأولى فى متغير واحد

الصورة العامة لمعادلة الدرجة الأولى فى متغير واحد هى :

$$a x + b = 0$$

حيث a ، b عددان حقيقيان ، $a \neq 0$

أمثلة :

معادلات فى متغير واحد من الدرجة الأولى	معادلات فى متغير واحد ليست من الدرجة الأولى
$2x + 10 = 0$	$2\sqrt{x} - 0.5 = 0$
$\frac{1}{2}n - 3 = 5$	$x^2 - 1 = 3$
$-4(8 + y) = 90$	$\frac{1}{x} + 4 = x - 3$

حل معادلة الدرجة الأولى فى متغير واحد فى R

- يُقصد بحل المعادلة إيجاد قيم المتغير التى تحقق المعادلة.
- معادلة الدرجة الأولى فى متغير واحد لها حل وحيد فى **R**.

مثال 1

أوجد مجموعة حل كل من المعادلتين الآتيتين فى R :

1) $6x+2=4x-4$ 2) $5(\sqrt{3}x-7)+11=6$

1) $\because 6x+2=4x-4$

$\therefore 6x-4x=-4-2$

$\therefore 2x=-6$

$\therefore x=\frac{-6}{2}$

$\therefore x=-3$

$\therefore$ مجموعة الحل $=\{-3\}$

2) $\because 5(\sqrt{3}x-7)+11=6$

$\therefore 5\sqrt{3}x-35+11=6$

$\therefore 5\sqrt{3}x-24=6$

$\therefore 5\sqrt{3}x=6+24$

$\therefore 5\sqrt{3}x=30 \quad \therefore x=\frac{30}{5\sqrt{3}}$

$\therefore x=\frac{6}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$\therefore x=\frac{6\sqrt{3}}{3} \quad \therefore x=2\sqrt{3}$

$\therefore$ مجموعة الحل $=\{2\sqrt{3}\}$

ثانيًا متباينة الدرجة الأولى فى متغير واحد

الصورة العامة لمتباينة الدرجة الأولى فى متغير واحد هى:

$ax+b<0$

حيث a , b عددان حقيقيان ، $a\neq 0$

مع ملاحظة أن علامة التباين يمكن أن تكون واحدة من العلامات $(<,>,\leq,\geq)$

أمثلة :

متباينات فى متغير واحد من الدرجة الأولى	متباينات فى متغير واحد ليست من الدرجة الأولى
$2x-3>0$	$x^2-3x\geq -2$
$x+4<2x$	$\frac{1}{y}-4<5$
$\frac{m+2}{2}\geq\frac{m+1}{4}$	$2\sqrt{x}+1>5$
$2(p-1)+3\leq 4p+6$	

تقييم ذاتى ①

أوجد مجموعة حل كل من المعادلتين الآتيتين فى R:

1) $4x-5\sqrt{3}=7\sqrt{3}$

2) $3(\sqrt{5}x-2)-1=8$

معلومة سابقة

خواص علاقة التساوى :

إذا كانت a , b , c ثلاثة أعداد حقيقية، $a=b$ فإن :

1) $a+c=b+c$

2) $a-c=b-c$

3) $ac=bc$

4) $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$ حيث $c\neq 0$

تفكير ناقد

أوجد مجموعة حل كل من المعادلتين الآتيتين فى R :

1) $2(x+1)+1=2x+3$

2) $3x+2=4(x+1)-x$

لاحظ أن

متباينة الدرجة الأولى فى متغير واحد يكون فيها المتغير الوحيد مرفوع للأس واحد.

حل متباينة الدرجة الأولى فى متغير واحد فى R

يُقصد بحل المتباينة إيجاد قيم المتغير التى تحقق المتباينة.

مثال 2

أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية فى R ، ومثلها على خط الأعداد :

1) $5x+2>12$ 2) $12\geq 5x-3$

3) $2x-3\leq 5x+9$ 4) $2(3x-7)<4x-11$

1) $\because 5x+2>12$ $\therefore 5x>12-2$ $\therefore 5x>10$

$\therefore x>\frac{10}{5}$ $\therefore x>2$

$\therefore$ مجموعة الحل $=]2,\infty[$

2) $\because 5x-3\leq 12$ $\therefore 5x\leq 12+3$ $\therefore 5x\leq 15$

$\therefore x\leq \frac{15}{5}$ $\therefore x\leq 3$

$\therefore$ مجموعة الحل $=]-\infty,3]$

3) $\because 2x-3\leq 5x+9$ $\therefore 2x-5x\leq 9+3$ $\therefore -3x\leq 12$

$\therefore x\geq \frac{12}{-3}$ $\therefore x\geq -4$

$\therefore$ مجموعة الحل $=[-4,\infty[$

4) $\because 2(3x-7)<4x-11$ $\therefore 6x-14<4x-11$

$\therefore 6x-4x<-11+14$ $\therefore 2x<3$ $\therefore x<\frac{3}{2}$

$\therefore$ مجموعة الحل $=]-\infty,\frac{3}{2}[$

ملاحظة :

المتباينة $a<x<b$ تُسمى متباينة مركبة، ويمكن تقسيمها إلى المتباينتين

$x>a$ ، $x<b$

فمثلاً :

مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من 2 وأقل من 5 يمكن التعبير عنها بإحدى الطريقتين :

1) $x>2$ ، $x<5$

2) $2<x<5$

ويمكن تمثيلها على خط الأعداد كما بالشكل المقابل.

2 5

تقييم ذاتى 2

أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية فى R ، ومثلها على خط الأعداد :

1) $3x-4\geq 5$

2) $6-3y\leq 2(y-2)$

3) $\frac{2x}{3}-\frac{x}{6}<-2$

معلومة سابقة

خواص علاقة التباين :

إذا كانت a , b , c ثلاثة أعداد حقيقية، $a<b$ فإن :

1) $a+c<b+c$

2) $a-c<b-c$

3) $ac<bc$ إذا كانت : $c>0$

$ac>bc$ إذا كانت : $c<0$

4) $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$ إذا كانت : $c>0$

$\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$ إذا كانت : $c<0$

مثال 3

استخدم المتباينات للتعبير عن كل مما يأتى بطريقتين، ومثلها على خط الأعداد :

1. مجموعة الأعداد الحقيقية الأقل من 7 وأكبر من أو تساوى 0
2. مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوى 3 وأقل من 6
3. مجموعة الأعداد الحقيقية الأقل من أو تساوى 2 – وأكبر من أو تساوى 6 –

	الطريقة الأولى	الطريقة الثانية	التمثيل على خط الأعداد
1	$x \geq 0 \ ، \ x < 7$	$0 \leq x < 7$	0 — 7
2	$x < 6 \ ، \ x \geq 3$	$3 \leq x < 6$	3 — 6
3	$x \geq -6 \ ، \ x \leq -2$	$-6 \leq x \leq -2$	-6 — -2

مثال 4

أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية فى R ، ومثلها على خط الأعداد:

1. $-1 < x - 3 < 2$
2. $-8 < 3x - 2 \leq 7$
3. $-3 \leq 3(x - 7) - 3 \leq 6$

(1) $\because -1 < x - 3 < 2$

$\therefore x - 3 > -1 \ ، \ x - 3 < 2$

$\therefore x > -1 + 3 \ ، \ x < 2 + 3$

$\therefore x > 2 \ ، \ x < 5$

$\therefore 2 < x < 5$

$\therefore$ مجموعة الحل $=]2 , 5[$

2 — 5

(2) $\because -8 < 3x - 2 \leq 7$ $\therefore -8 + 2 < 3x \leq 7 + 2$

$\therefore -6 < 3x \leq 9$ $\therefore \frac{-6}{3} < x \leq \frac{9}{3}$ $\therefore -2 < x \leq 3$

$\therefore$ مجموعة الحل $=]-2 , 3]$

-2 — 3

(3) $\because -3 \leq 3(x - 7) - 3 \leq 6$ $\therefore -3 \leq 3x - 21 - 3 \leq 6$

$\therefore -3 \leq 3x - 24 \leq 6$ $\therefore -3 + 24 \leq 3x \leq 6 + 24$

$\therefore 21 \leq 3x \leq 30$ $\therefore \frac{21}{3} \leq x \leq \frac{30}{3}$ $\therefore 7 \leq x \leq 10$

$\therefore$ مجموعة الحل $= [7 , 10]$

7 — 10

تنوع الاستراتيجيات

يمكن إيجاد مجموعة الحل مباشرة دون تقسيم المتباينة إلى متباينتين كالتالى مع تطبيق خواص علاقة التباين :

$\because -1 < x - 3 < 2$

$\therefore -1 + 3 < x < 2 + 3$

$\therefore 2 < x < 5$

$\therefore$ مجموعة الحل $=]2 , 5[$

2 — 5

تقييم ذاتى ③

استخدم المتباينات للتعبير عن كل مما يأتى بطريقتين، ومثلها على خط الأعداد:

1. مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من 5 وأقل من 9
2. مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من 2 – وأقل من أو تساوى 4
3. مجموعة الأعداد الحقيقية الأقل من 8 وأكبر من أو تساوى 1 –
4. مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوى 2 – وأقل من أو تساوى 0

تقييم ذاتى ④

أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية فى R، ومثلها على خط الأعداد:

1. $4 \leq x + 2 < 8$
2. $-7 < 5x + 3 < 18$
3. $1 \leq 4 - 3(x - 1) < 13$

لاحظ أن

عند تقسيم المتباينة إلى متباينتين كما فى (1) تكون مجموعة الحل هى مجموعة تقاطع مجموعتى حل هاتين المتباينتين، كالتالى :

$\because x > 2 \ ، \ x < 5$

$\therefore x \in]2 , \infty[, x \in]-\infty , 5[$

$\therefore$ مجموعة الحل

$=]2 , \infty[\cap]-\infty , 5[$

2 — 5

2 — 5

$\therefore$ مجموعة الحل $=]2 , 5[$

فكر مع زملائك

حاول مع زملائك حل المتباينة رقم (2) بتقسيمها إلى متباينتين.

مثال 5

أوجد مجموعة حل كل من المتباينتين الآتيتين فى R، ومثلها على خط الأعداد :

1) $4x-1<3(x-1)\leq 4x+4$ 2) $2x-19\leq 3(x-6)<x-8$

1) $\because 4x-1<3(x-1)\leq 4x+4$ $\therefore 4x-1<3x-3\leq 4x+4$

$\therefore -1<3x-3-4x\leq 4$ $\therefore -1<-x-3\leq 4$

$\therefore -1+3<-x\leq 4+3$ $\therefore 2<-x\leq 7$ $\therefore -2>x\geq -7$

$\therefore$ مجموعة الحل $=]-7,-2[$

---

2) $\because 2x-19\leq 3(x-6)<x-8$ $\therefore 2x-19\leq 3x-18<x-8$

$\therefore 2x-19\leq 3x-18$ ، $3x-18<x-8$

$\therefore 2x-3x\leq 19-18$ ، $3x-x<18-8$

$\therefore -x\leq 1$ ، $2x<10$ $\therefore x\geq -1$ ، $x<5$

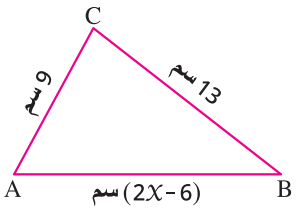
$\therefore -1\leq x<5$

$\therefore$ مجموعة الحل $=[-1,5[$

مثال 6

فى الشكل المقابل :

ما قيم x الممكنة ؟



قيم x الممكنة هى القيم التى تجعل أطوال أضلاع المثلث تحقق متباينة المثلث.

$\therefore 13-9<2x-6<13+9$

$\therefore 4<2x-6<22$

$\therefore 4+6<2x<22+6$

$\therefore 10<2x<28$

$\therefore \frac{10}{2}<x<\frac{28}{2}$

$\therefore 5<x<14$

أى أن : $x\in]5,14[$

تذكر أن

طول أى ضلع فى المثلث أكبر من الفرق بين طولى الضلعين الآخرين وأقل من مجموعهما.

تقييم ذاتى 5

أوجد مجموعة حل كل من المتباينتين الآتيتين فى R، ومثلها على خط الأعداد :

1) $x+8\geq 3x-2\geq 2+x$

2) $5x+17<4(5+x)<3x+25$

تفكير ناقد

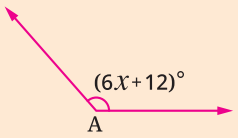
فى مثال 5

هل يمكنك حل المتباينة 1 بتقسيمها إلى متباينتين؟

وهل يمكنك حل المتباينة 2 بتطبيق خواص علاقة التباين دون الحاجة إلى تقسيم المتباينة إلى متباينتين؟

تقييم ذاتى 6

فى الشكل التالى:



$\angle A$ منفرجة

ما قيم x الممكنة؟

تقييم الدرس

أولاً قياس المفاهيم

◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(1) أى من المعادلات الآتية معادلة من الدرجة الأولى فى متغير واحد؟

(أ) $x+y=12$ (ب) $2x-\frac{2}{x}=0$ (جـ) $2\sqrt{x}+3=5$ (د) $2x-4=3$

(2) أى من المتباينات الآتية متباينة من الدرجة الأولى فى متغير واحد؟

(أ) $x^2-x\geq 3$ (ب) $0.4t-7<2t$ (جـ) $\frac{2}{t}+t>5$ (د) $3x<2y+5$

(3) ما مجموعة حل المعادلة $\sqrt{2}x-1=1$ فى R ؟

(أ) $\{2\}$ (ب) $\{1\}$ (جـ) $\{\sqrt{2}\}$ (د) $\varnothing$

(4) أى من المتباينات الآتية يُعبر عن مجموعة حلها فى R بالشكل المقابل؟

(أ) $x>3$ (ب) $x<3$ (جـ) $x\geq 3$ (د) $x\leq 3$

(5) ما مجموعة حل المتباينة $2x<14$ فى R ؟

(أ) $]-\infty,7[$ (ب) $]-7,\infty[$ (جـ) $]7,\infty[$ (د) $[7,\infty[$

(6) ما مجموعة حل المتباينة $-2<x\leq 3$ فى R ؟

(أ) $]-2,3]$ (ب) $[-2,3[$ (جـ) $[-2,3]$ (د) $]-2,3[$

(7) ما مجموعة حل المتباينة $-x>3$ فى R ؟

(أ) $]-\infty,-3[$ (ب) $]-\infty,3[$ (جـ) $]-3,\infty[$ (د) $]3,\infty[$

(8) ما مجموعة حل المتباينة $-3>-x>-5$ فى R ؟

(أ) $[-5,3]$ (ب) $]-5,3[$ (جـ) $[-3,5]$ (د) $]-3,5[$

(9) الفترة $]-1,2]$ هى مجموعة الحل فى R للمتباينة :

(أ) $-1<x<2$ (ب) $-1<x\leq 2$ (جـ) $-1\leq x<2$ (د) $-1\leq x\leq 2$

(10) إذا كانت $-2<2x<6$ ، فإن : ..... $\in x$

(أ) $]-1,3[$ (ب) $]-1,3]$ (جـ) $[-1,3[$ (د) $[-1,3]$

(11) أى مما يأتى تعبر عن قيم x الحقيقية التى تحقق أن : $x<7, -x<7$ ؟

(أ) $7>x>0$ (ب) $0>x>-7$ (جـ) $7>x>-7$ (د) $x<-7$

ثانيًا تطبيق المفاهيم

◂ أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية فى R :

(12) $3x-\sqrt{3}=5\sqrt{3}$

(13) $3(x+7)-5x=x+12$

(14) $4-\sqrt{6}x=|-10|$

(15) $4(\sqrt{5}x+8)+20=72$

◂ أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية فى R، ومثلها على خط الأعداد :

(16) $2x+3<6$

(17) $5-3x\geq 2$

(18) $2(6-2x)\leq 8$

(19) $\frac{x}{2}-3>7$

(20) $\frac{3x}{4}+\frac{x}{2}>5$

(21) $25\leq 5(3-x)$

(22) $2x+9\leq 6x-1$

(23) $3x-2<2(2-x)$

◂ أوجد قيم x الحقيقية التى تحقق كلًا مما يأتى، ومثلها على خط الأعداد :

(24) $-4<3x+2<11$

(25) $-8\leq 4-3(x+1)<10$

(26) $3x-2\leq 4(x-1)\leq 3x+6$

(27) $2x+12<4(5+x)<3x+23$

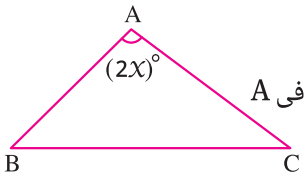
ثالثًا التحليل وتكامل المواد

(28) هندسة :

فى الشكل المقابل :

ABC مثلث منفرج الزاوية فى A

ما قيم x الممكنة؟

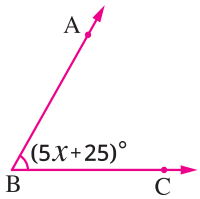


(29) هندسة :

فى الشكل المقابل :

إذا كانت ∠ ABC زاوية حادة،

فأوجد الفترة التى تنتمى إليها قيمة x.



(30) هندسة : مثلث أطوال أضلاعه 9 سم ، $(3x+5)$ سم ، 20 سم. ما قيم x الممكنة؟

(31) تأجير سيارات :

شركتان لتأجير السيارات لديهما خطط الدفع التالية :

الشركة الأولى : 900 جنيه فى اليوم، بالإضافة إلى 1.5 جنيه لكل كيلو متر.

الشركة الثانية : 1100 جنيه فى اليوم، بالإضافة إلى جنيه واحد لكل كيلو متر.

ما هو الحد الأقصى لعدد الكيلو مترات التى يمكن قطعها فى يوم واحد مع الشركة الأولى ليكون سعرها أقل مما هو عليه مع الثانية؟

المنافسة الشريفة بين الشركات تحقق جودة أفضل، وسعرًا أنسب للمستهلك.

تفكير إبداعى

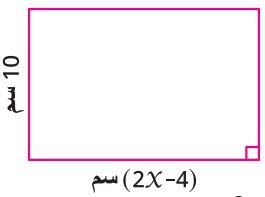
(32) هندسة :

فى الشكل المقابل : مستطيل بعداه 10 سم ، $(2x-4)$ سم

① أوجد قيمة x التى تجعل محيط المستطيل = 52 سم.

② أوجد قيم x التى تجعل محيط المستطيل أكبر من 40 سم.

③ أوجد قيم x التى تجعل مساحة المستطيل أقل من 80 سم^2



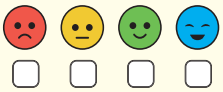
(33) إذا كانت مجموعة حل المتباينة $a\geq \frac{x-1}{2}\geq b$ هى $[1, 7]$

أوجد قيمة $a\times b$

قيم فهمك!

ما مدى فهمك لمعادلات ومتباينات الدرجة الأولى فى متغير واحد ؟

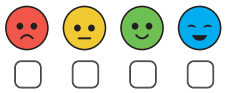
ضع علامة فى المربع المناسب



تقييم الوحدة الثانية

قيّم فهمك!

ما مدى فهمك للوحدة الثانية ؟ ضع علامة فى المربع المناسب



◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(1) ما مجال الدالة $\{(7,9),(6,7),(2,5)\}$ ؟

(أ) $\{2,6,9\}$ (ب) $\{5,7\}$

(جـ) $\{2,5,6,7,9\}$ (د) $\{2,5,6\}$

(2) إذا كان : $n(X^2)=16$ ، $n(X\times Y)=12$

فما قيمة $n(Y^2)$ ؟

(أ) 192 (ب) 36 (جـ) 9 (د) 3

(3) إذا كان سعر سيارة بعد t سنة من شرائها يُعطى بالجنيه بالدالة $f(t)=1200000-50000\,t$

فبعد كم سنة يصبح سعر السيارة 800,000 جنيه ؟

(أ) 10 (ب) 8 (جـ) 6 (د) 4

(4) إذا كانت $f(X)=3$، فما قيمة $\frac{2f(7)}{7f(2)}$ ؟

(أ) 1 (ب) $\frac{6}{7}$ (جـ) $\frac{2}{7}$ (د) $\frac{7}{2}$

◂ أكمل كلًا مما يأتى :

(5) إذا كانت $X=\{1,2,3\}$ ، $Y=\{12,13\}$ وكانت R دالة من X إلى Y حيث $R=\{(1,12),(3,13),(k,12)\}$

فإن $k=$ .....

(6) مجموعة حل المتباينة $2X+3>15$ فى R هى .....

(7) إذا كانت $f(X)=2X^2$، فإن $f(4)-f(2)=$ .....

(8) المستقيم الذى يمثل الدالة f حيث $f(X)=18-4X$ يقطع محور X فى النقطة .....

◂ أجب عن الأسئلة الآتية :

(9) أوجد مجموعة حل المتباينة : $-3<2X+5<13$ فى R

(10) مثل بيانيًا الدالة f حيث $f(X)=3X-1$

(11) إذا كانت $X=\{1,3,7\}$ ، $Y=\{5,9\}$ ، أوجد $X\times Y$ ، Y^2

(12) إذا كانت $X=\{0,1,2,3\}$ ، $Y=\{6,7,8,9,10\}$

وكانت R علاقة من X إلى Y حيث "xRy" تعنى "$x+y=10$" لكل $x\in X$ ، $y\in Y$ اكتب العلاقة كمجموعة أزواج مرتبة، ثم مثل العلاقة بالمخطط السهمى موضحًا مجال ومدى العلاقة. هل العلاقة تمثل دالة أم لا ؟ ولماذا ؟

نشاط الوحدة الثانية

جدول الحصص والأزواج المرتبة

◂ الهدف من النشاط :

توظيف مفهوم الأزواج المرتبة فى تنظيم عناصر وبيانات خاصة بالمواقف الحياتية.

◂ خطوات التنفيذ :

بالاستعانة بما تم تعلمه عن مفهوم الأزواج المرتبة نفذ الخطوات التالية، ثم قارن إجابتك بما توصل إليه أحد زملائك.

1. باستخدام جدول الحصص الأسبوعى عبِّر عما يلى باستخدام الأزواج المرتبة :
   - أزواج مرتبة تعبر عن (اليوم، اسم المادة الدراسية).
   - أزواج مرتبة تعبر عن (اليوم، حصة الرياضيات).
2. كون قائمة بالأزواج المرتبة لأى مادة دراسية أخرى تختارها.
3. قارن إجابتك فى الخطوة (1) مع إجابة أحد زملائك، وحدد مدى التشابه والاختلاف، مع التصحيح.
4. اختر أحد المواقف الحياتية خارج المدرسة التى يمكن أن تعبر عن بياناتها بالأزواج المرتبة مثل : أفراد العائلة (الاسم والعمر)، السوق (الصنف والسعر).

الوحدة 3

الهندسة

دروس الوحدة

3-1 مسلَّمات التباين
3-2 التباين فى المثلثات
3-3 المساقط العمودية ونظرية إقليدس
3-4 الدائرة
3-5 الأسطوانة الدائرية القائمة والمنشور القائم
3-6 البُعد بين نقطتين فى المستوى الإحداثى
3-7 ميل الخط المستقيم

تستخدم النظريات الهندسية فى تطبيقات الذكاء الاصطناعى ، إذ يعتمد الذكاء الاصطناعى على النظريات الهندسية لتحسين دقة الوصول لحل بعض المشكلات الهندسية.

◀ فهل يمكن استخدام النظريات الهندسية للوصول إلى حلول لمشكلات أكثر تعقيدًا فى تطبيقات الذكاء الاصطناعى ؟

القضايا والمهارات الحياتية

- التواصل الرياضى
- التفكير الإبداعى
- التفكير الناقد
- التنمية المستدامة

القيـــم

- الوعى بممارسة الرياضة
- التذوق الجمالى
- العمل الجماعى

الدرس
1 - 3

مسلَّمات التباين
(Axioms of Inequality)

■ **نواتج التعلم**

- تعرف مسلمات التباين.
- تستخدم مسلمات التباين فى التطبيقات الهندسية.

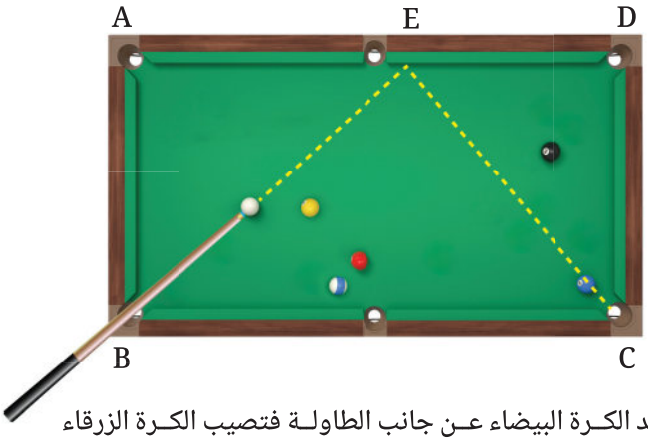
■ **المفردات**

- مسلمات التباين
Axioms of inequality

■ **معلومة إثرائية**

المسلَّمة فى الرياضيات هى عبارة يُفترض صحتها بناءً على مبادئ أساسية.
مثل : مسلَّمات إقليدس التى بُنيت عليها الهندسة الإقليدية.

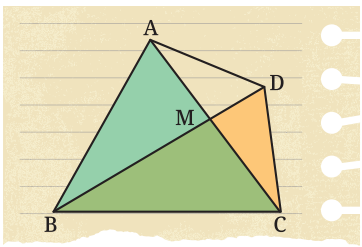
استعد !



تُعد لعبة البلياردو من الألعاب التى تجمع بين الترفيه والدقة والتركيز، وتعتمد بشكل كبير على الفهم الرياضى لمفاهيم الزوايا والانعكاس.
أراد اللاعب أن يصيب الكرة الزرقاء باستخدام الكرة البيضاء، ولتحقيق ذلك، خطط لأن ترتد الكرة البيضاء عن جانب الطاولة فتصيب الكرة الزرقاء كما هو موضح فى المسار المتقطع بالصورة، إذا كانت مساحة Δ EDC > مساحة Δ EAB
فهل مساحة الشكل EDCB > مساحة الشكل EABC؟

فى هذا الدرس، سوف تتعرف على مسلمات التباين، مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.

فكر وناقش !



فى الشكل المقابل :
إذا كان $m(\angle BAC) = m(\angle BDC)$
$m(\angle ADC) > m(\angle BAD)$
قارن بين $m(\angle CAD)$ و $m(\angle BDA)$ ، ناقش.

تعلم !

مسلمات التباين

إذا كانت a , b , c ثلاث كميات، فإن :

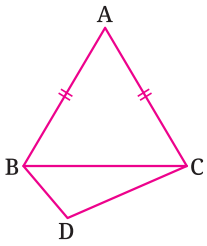
الإضافة	إذا كان : $a < b$ فإن : $a + c < b + c$
الطرح	إذا كان : $a < b$ فإن : $a - c < b - c$
الضرب فى عدد موجب	إذا كان : $a < b$ ، c عددًا موجبًا فإن : $a \times c < b \times c$
انتقال العلاقة	إذا كان : $a < b , b < c$ فإن : $a < c$
المجموع	إذا كان : $a < b , c < d$ فإن : $a + c < b + d$
المقارنة بين الكل والجزء	إذا كان : $a = b + c$ حيث c عدد موجب فإن : $a > b$

مثال 1

فى الشكل المقابل :

$m(\angle DBC) > m(\angle DCB)$ ، $AB = AC$

أثبت أن : $m(\angle ABD) > m(\angle ACD)$



$\because AB = AC$

$\therefore m(\angle ABC) = m(\angle ACB)$ ..... (1)

$\because m(\angle DBC) > m(\angle DCB)$ ..... (2)

من (1) ، (2) نستنتج أن :

$m(\angle DBC) + m(\angle ABC) > m(\angle DCB) + m(\angle ACB)$

$\therefore m(\angle ABD) > m(\angle ACD)$

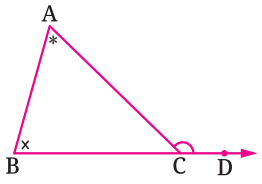
ملاحظة :

قياس الزاوية الخارجة عن المثلث أكبر من قياس أى زاوية داخلة عدا المجاورة لها.

فى الشكل المقابل :

ABC مثلث، $D \in \overrightarrow{BC}$ فإن : $\angle ACD$ خارجة عن ΔABC

$\therefore m(\angle ACD) = m(\angle A) + m(\angle B)$



ومن مسلمة المقارنة بين الكل والجزء نستنتج أن :

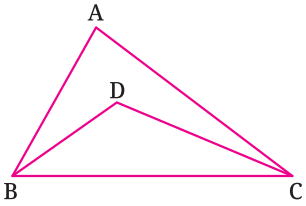
$m(\angle ACD) > m(\angle A)$, $m(\angle ACD) > m(\angle B)$

مثال 2

فى الشكل المقابل :

النقطة D تقع داخل المثلث ABC

أثبت أن : $m(\angle BDC) > m(\angle A)$



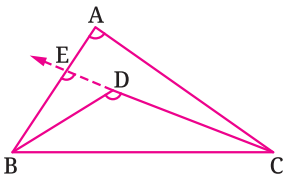
العمل : ارسم $\overrightarrow{CD}$ يقطع $\overline{AB}$ فى E

البرهان : $\because \angle BDC$ خارجة عن ΔEDB

$\therefore m(\angle BDC) > m(\angle BED)$ ..... (1)

$\because \angle BED$ خارجة عن ΔACE

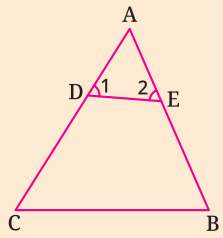
$\therefore m(\angle BED) > m(\angle A)$ ..... (2)



من (1) ، (2) نستنتج أن : $m(\angle BDC) > m(\angle A)$

تقييم ذاتى ①

فى الشكل التالى :



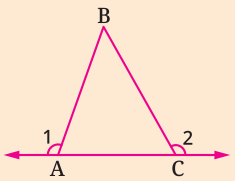
$AC > AB$,

$m(\angle 1) = m(\angle 2)$

أثبت أن : $DC > EB$

تقييم ذاتى ②

فى الشكل التالى :



أثبت أن :

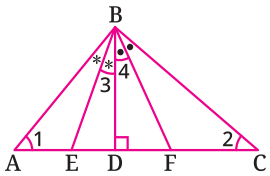
$m(\angle 1) + m(\angle 2) > 180°$

ملاحظة :

- متممة الزاوية الأصغر فى القياس أكبر من متممة الزاوية الأكبر فى القياس.
- مكملة الزاوية الأصغر فى القياس أكبر من مكملة الزاوية الأكبر فى القياس.

مثال 3

فى الشكل المقابل :



$\triangle ABC$ مثلث، $D \in \overline{AC}$ بحيث $\overline{BD} \perp \overline{AC}$

$\overleftarrow{BE}$ ينصف $\angle ABD$ ، $\overleftarrow{BF}$ ينصف $\angle CBD$

إذا كان $m(\angle 1) > m(\angle 2)$

أثبت أن :

$m(\angle 3) < m(\angle 4)$

$\because \overline{BD} \perp \overline{AC}$

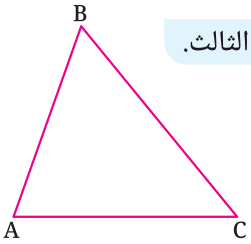
$\therefore m(\angle ADB) = m(\angle CDB) = 90°$

$\therefore \angle 1$ تتمم $\angle ABD$ ، $\angle 2$ تتمم $\angle CBD$

$\because m(\angle 1) > m(\angle 2)$ $\therefore m(\angle ABD) < m(\angle CBD)$

$\therefore \frac{1}{2} m(\angle ABD) < \frac{1}{2} m(\angle CBD)$ $\therefore m(\angle 3) < m(\angle 4)$

معلومة سابقة : متباينة المثلث



مجموع طولى أى ضلعين فى المثلث أكبر من طول الضلع الثالث.

أى أن : فى ΔABC يكون :

$AB + BC > AC$

$AC + CB > AB$

$AC + AB > BC$

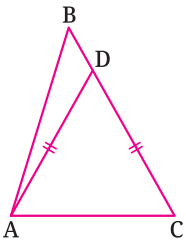
ملاحظة :

طول أى ضلع فى المثلث أكبر من الفرق بين طولى الضلعين الآخرين وأقل من مجموعهما.

$|AC - AB| < BC < AC + AB$

مثال 4

فى الشكل المقابل :



إذا كانت $D \in \overline{BC}$ ، $AD = DC$

أثبت أن : $BC > AB$

فى ΔADB :

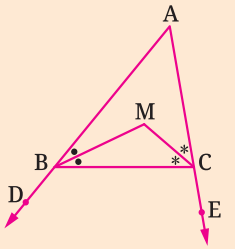
$AD + DB > AB$ (متباينة المثلث)

$\because AD = CD$

$\therefore CD + DB > AB$ $\therefore BC > AB$

تقييم ذاتى 3

فى الشكل التالى :



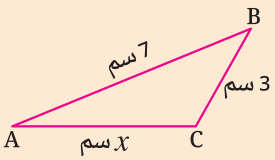
$m(\angle ABM) < m(\angle ACM)$

أثبت أن :

$m(\angle DBC) > m(\angle ECB)$

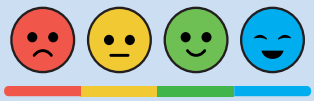
تقييم ذاتى 4

فى الشكل التالى :



أوجد مجموعة قيم x الممكنة.

تقييم الدرس



أولاً قياس المفاهيم

◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(1) فى الشكل التالى :

أى من العبارات الآتية صحيح ؟

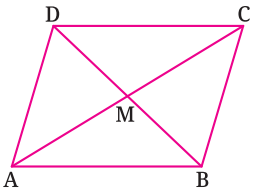
(أ) $AB < CD$

(ب) $AC < BD$

(جـ) $AC > BD$

(د) $AC = BD$

(2) فى الشكل التالى :



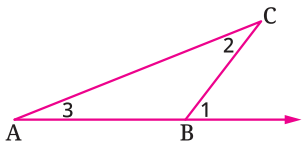
ABCD متوازى أضلاع، $AC > BD$،

فأى مما يأتى صحيح ؟

(أ) $MC < MD$ (ب) $MC = MD$

(جـ) $MC < MB$ (د) $MC > MB$

(3) فى الشكل التالى :



إذا كان $m(\angle 3) > m(\angle 2)$،

فأى مما يأتى صحيح ؟

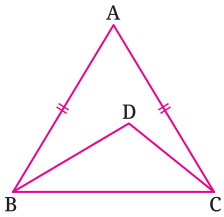
(أ) $m(\angle 3) > m(\angle 2) > m(\angle 1)$

(ب) $m(\angle 1) > m(\angle 2) > m(\angle 3)$

(جـ) $m(\angle 3) > m(\angle 1) > m(\angle 2)$

(د) $m(\angle 2) > m(\angle 3) > m(\angle 1)$

(4) فى الشكل التالى :



$AB = AC$ ، $m(\angle DBC) < m(\angle DCB)$

فأى مما يأتى صحيح ؟

(أ) $m(\angle ABC) < m(\angle ACB)$

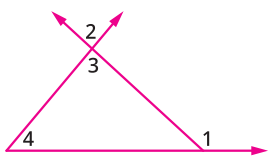
(ب) $m(\angle ACD) < m(\angle ABD)$

(جـ) $m(\angle ACD) > m(\angle ABD)$

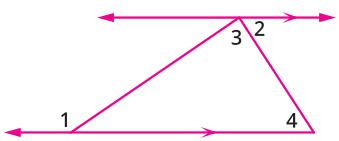
(د) $m(\angle ACD) = m(\angle ABD)$

◂ فى كل من الأشكال الآتية، وضح لماذا $m(\angle 2) > m(\angle 1)$:

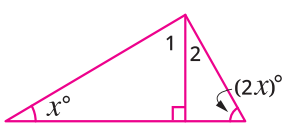
(5)



(6)

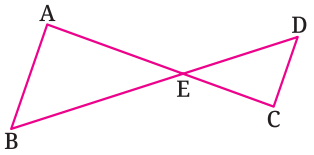


(7)



ثانيًا تطبيق المفاهيم

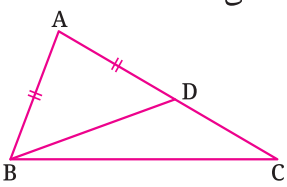
(8) فى الشكل التالى :



$BE > AE$ ، $ED > EC$

أثبت أن : $BD > AC$

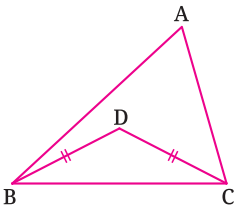
(9) فى الشكل التالى :



$C \in \overrightarrow{AD}$ ، $AB = AD$

أثبت أن : $m(\angle ABD) > m(\angle C)$

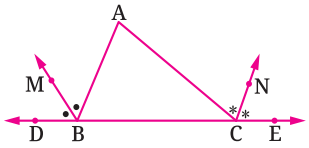
(10) فى الشكل التالى :



$DB = DC$ ، $m(\angle ABC) < m(\angle ACB)$

أثبت أن : $m(\angle ACD) > m(\angle ABD)$

(11) فى الشكل التالى :



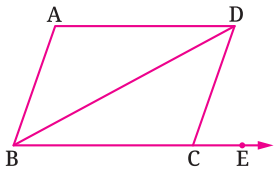
$m(\angle ABC) > m(\angle ACB)$ ،

$\overrightarrow{BM}$ ينصف $\angle ABD$ ،

$\overrightarrow{CN}$ ينصف $\angle ACE$

أثبت أن : $m(\angle ABM) < m(\angle ACN)$

(12) فى الشكل المقابل :



$ABCD$ متوازى أضلاع ،

$E \in \overrightarrow{BC}$

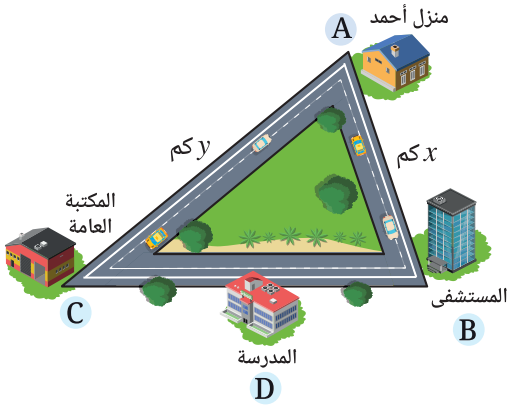
أثبت أن : $m(\angle DCE) > m(\angle ADB)$

ثالثًا التحليل وتكامل المواد

(13) فى الشكل المقابل :

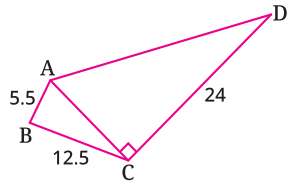
إذا كانت المدرسة تقع فى منتصف المسافة بين المكتبة العامة والمستشفى، وكان $3x = 2y$

أراد أحمد أن يذهب من منزله إلى المدرسة بحيث يسلك الطريق الأقصر. حدد المسار الذى يسلكه أحمد.



تفكير إبداعى

(14) فى الشكل المقابل :



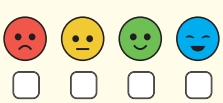
أوجد مجموعة القيم الممكنة

لطول كل من $\overline{AD}$, $\overline{AC}$

قيّم فهمك!

ما مدى فهمك لمسلَّمات التباين ؟

ضع علامة فى المربع المناسب



الدرس
2 - 3

التباين فى المثلثات
(Inequality in Triangles)

■ **نواتج التعلم**

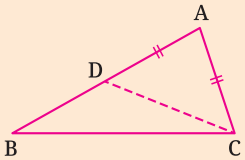
- تعرف نظريات التباين فى مثلث واحد.
- تعرف نظريات التباين فى مثلثين.
- تستخدم نظريات التباين فى المثلثات فى حل بعض المشكلات الحياتية.

■ **المفردات**

- التباين Inequality

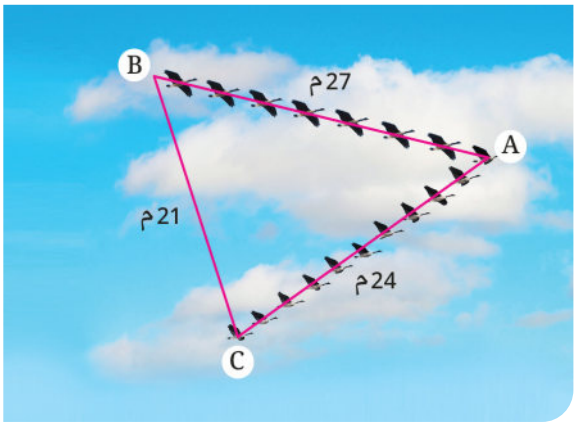
■ **ناقش (إثبات النظرية)**

خذ نقطة D على $\overline{AB}$ بحيث يكون AD = AC، ثم ارسم $\overline{DC}$



ثم استخدم خواص المثلث المتساوى الساقين ADC والزاوية الخارجة عن Δ BDC لإثبات أن :

$m(\angle ACB) > m(\angle B)$



استعد !

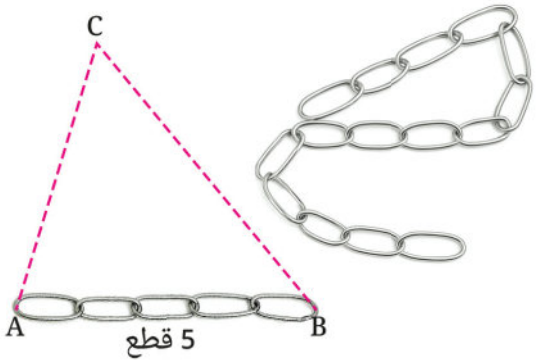
تُعد هجرة الطيور من أعجب الظواهر الطبيعية فى عالم الحيوان، فهى تنتقل كل عام من أماكن معينة إلى أخرى بحثًا عن الغذاء والدفء. تقطع بعض الطيور آلاف الكيلو مترات فى رحلات طويلة عبر البحار والجبال، وتظهر هذه الرحلات قدرة مذهلة على التحمل ودقة التنظيم.

الصورة أمامك تمثل سربًا من الطيور المهاجرة.

هل الزاوية عند مقدمة السرب لها أكبر قياس؟ فسر ما تقول.

فى هذا الدرس، سوف تتعرف على نظريات التباين فى المثلثات، مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.

فكر وناقش !



أرادت سارة تكوين المثلث ABC باستخدام سلسلة مكونة من 15 قطعة متصلة متساوية الطول على أن يكون المثلث مختلف الأضلاع، وفيه $m(\angle A) > m(\angle B)$

فما عدد القطع المناسب لكل من الضلعين $\overline{AC}$ ، $\overline{CB}$؟

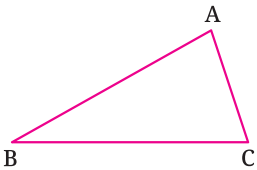
ناقش الاحتمالات المختلفة.

تعلم !

التباين فى المثلث

نظرية

إذا اختلف طولا ضلعين فى مثلث فأكبرهما فى الطول تقابله زاوية أكبر فى القياس من قياس الزاوية المقابلة للضلع الآخر.



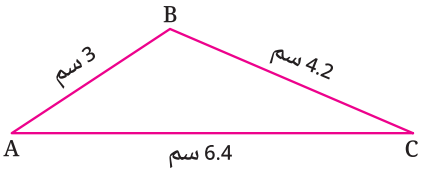
فى Δ ABC :

إذا كان : AB > AC

فإن : $m(\angle C) > m(\angle B)$

فمثلًا :

فى الشكل المقابل :



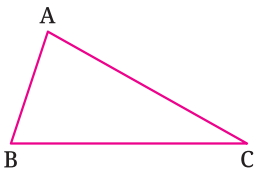
$m(\angle B) > m(\angle A)$ لأن: $AC > BC$ ،

$m(\angle A) > m(\angle C)$ لأن: $BC > BA$

أى أن : $m(\angle B) > m(\angle A) > m(\angle C)$

عكس النظرية

إذا اختلف قياسا زاويتين فى مثلث فأكبرهما فى القياس يقابلها ضلع أكبر فى الطول من الضلع المقابل للزاوية الأخرى.



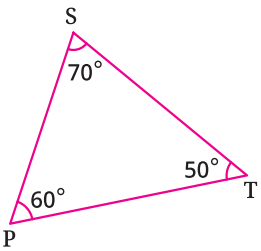
فى ΔABC :

إذا كان : $m(\angle B) > m(\angle C)$

فإن : $AC > AB$

فمثلًا :

فى الشكل المقابل :



$PT > ST$ لأن : $m(\angle S) > m(\angle P)$ ،

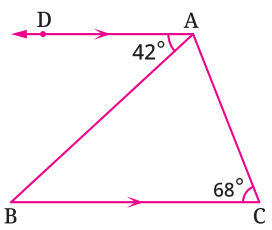
$ST > SP$ لأن : $m(\angle P) > m(\angle T)$

أى أن : $PT > ST > SP$

مثال 1

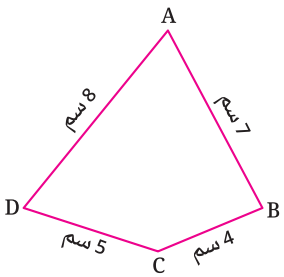
أثبت ما هو مطلوب أسفل كل شكل :

1



أثبت أن : $BC > AC$

2



أثبت أن : $m(\angle ABC) > m(\angle ADC)$

1

$\because \overline{CB} // \overrightarrow{AD}$

$\therefore m(\angle B) = m(\angle DAB) = 42°$ (زاويتان متبادلتان داخليًا)

$\therefore m(\angle BAC) = 180° - (42° + 68°) = 70°$

$\therefore m(\angle BAC) > m(\angle B)$ $\therefore BC > AC$

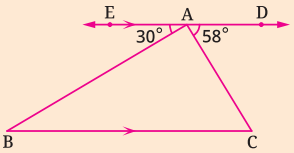
■ ناقش مع زملائك

أى من أضلاع المثلث أكبر طولًا إذا كان :

1. المثلث قائم الزاوية؟
2. المثلث منفرج الزاوية؟

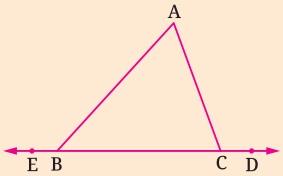
■ تقييم ذاتى (1)

1 فى الشكل التالى :



أثبت أن : $AB > AC$

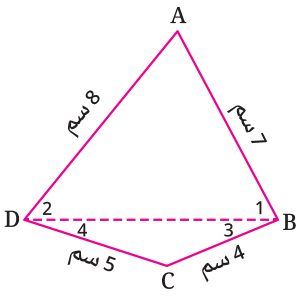
2 فى الشكل التالى :



إذا كان $AB > AC$

أثبت أن :

$m(\angle ABE) > m(\angle ACD)$



② العمل : ارسم $\overline{BD}$

البرهان : فى المثلث ABD

$\because AD > AB \quad \therefore m(\angle 1) > m(\angle 2)$ .... (1)

فى المثلث CBD :

$\because DC > CB \quad \therefore m(\angle 3) > m(\angle 4)$ .... (2)

بجمع (1) ، (2) ينتج أن : $m(\angle 1) + m(\angle 3) > m(\angle 2) + m(\angle 4)$

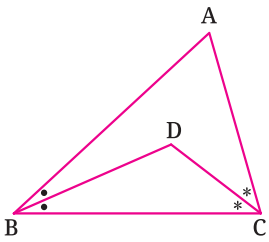
$\therefore m(\angle ABC) > m(\angle ADC)$

مثال 2

فى الشكل المقابل :

$AB > AC$ ، $\overrightarrow{BD}$ ينصف $\angle ABC$ ، $\overrightarrow{CD}$ ينصف $\angle ACB$

أثبت أن : $BD > CD$



$\because \overrightarrow{BD}$ ينصف $\angle ABC$

$\therefore m(\angle DBC) = \frac{1}{2} m(\angle ABC)$

$\because \overrightarrow{CD}$ ينصف $\angle ACB$

$\therefore m(\angle DCB) = \frac{1}{2} m(\angle ACB)$

فى ΔABC :

$\because AB > AC$

$\therefore m(\angle ACB) > m(\angle ABC) \quad \therefore \frac{1}{2} m(\angle ACB) > \frac{1}{2} m(\angle ABC)$

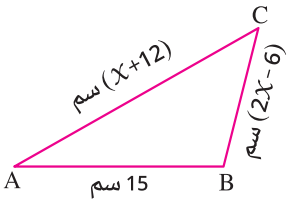
$\therefore m(\angle DCB) > m(\angle DBC) \quad \therefore BD > CD$

مثال 3

فى الشكل المقابل :

أوجد مجموعة قيم x التى تحقق أن

$m(\angle A) < m(\angle B)$



فى ΔABC :

$\because AC + BC > 15$ (متباينة المثلث)

$\therefore x + 12 + 2x - 6 > 15 \quad \therefore 3x + 6 > 15 \quad \therefore 3x > 15 - 6$

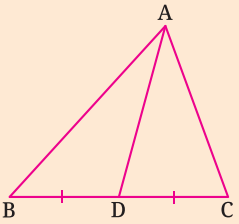
$\therefore 3x > 9 \quad \therefore x > \frac{9}{3} \quad \therefore x > 3$

$\because m(\angle A) < m(\angle B) \quad \therefore BC < AC \quad \therefore 2x - 6 < x + 12$

$\therefore 2x - x < 12 + 6 \quad \therefore x < 18 \quad \therefore 3 < x < 18$

تقييم ذاتى ②

فى الشكل التالى :



$\overline{AD}$ متوسط فى ΔABC

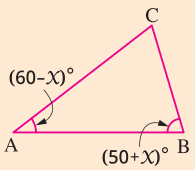
$BC < 2AD$

أثبت أن :

$m(\angle BAC) < 90°$

تقييم ذاتى ③

فى الشكل التالى :



أوجد مجموعة قيم x التى

تحقق أن $AC > BC$

التباين فى المثلثين

نظرية

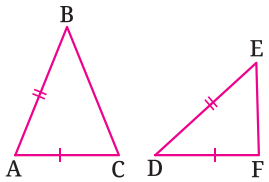
إذا سـاوى فى الطول ضلعان فى مثلث نظيريهما فى مثلث آخر، واختلف قياسا الزاويتين المحصورتين بين الضلعين فى كل منهما، فأكبرهما فى القياس يقابلها ضلع أكبر فى الطول.

إذا كان :

$AC = DF$, $AB = DE$,

$m(\angle A) > m(\angle D)$

فإن : $BC > EF$



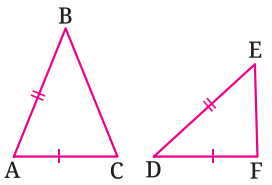
عكس النظرية

إذا ساوى فى الطول ضلعان فى مثلث نظيريهما فى مثلث آخر، واختلف فى الطول الضلع الثالث فى كل منهما، فأكبرهما فى الطول تقابله زاوية أكبر فى القياس.

إذا كان :

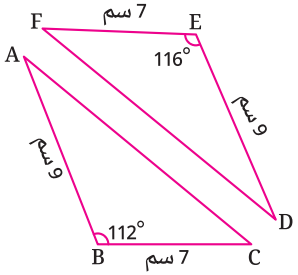
$AC = DF$, $AB = DE$, $BC > EF$

فإن : $m(\angle A) > m(\angle D)$

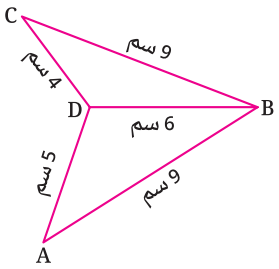


مثال 4

1 قارن بين طول $\overline{AC}$ وطول $\overline{FD}$



2 قارن بين $m(\angle CBD)$ ، $m(\angle ABD)$



1 ∵ $BC = EF$ ، $AB = ED$

∵ $m(\angle B) < m(\angle E)$

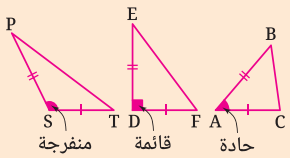
∴ $AC < FD$

2 ∵ $AB = CB$ ، $DB = DB$ (ضلع مشترك)

∵ $AD > CD$

∴ $m(\angle ABD) > m(\angle CBD)$

لاحظ

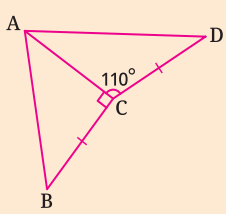


$BC < EF < PT$

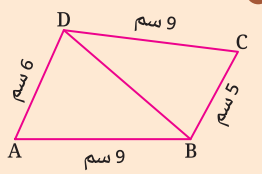
يزداد طول الضلع المقابل للزاوية المحصورة بين ضلعين فى مثلث كلما زاد قياس هذه الزاوية.

تقييم ذاتى 4

1 قارن بين طول $\overline{AD}$ وطول $\overline{AB}$



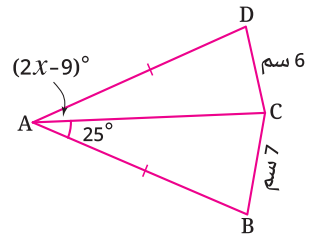
2 قارن بين $m(\angle ABD)$ ، $m(\angle CDB)$



مثال 5

أوجد مجموعة قيم x الممكنة فى كل مما يأتى :

1



$\because AB = AD$

$AC = AC$ (ضلع مشترك)

$DC < BC$

$\therefore m(\angle DAC) < m(\angle BAC)$

$\therefore 2x - 9 < 25$ $\quad \therefore 2x < 25 + 9$

$\therefore 2x < 34$ $\quad \therefore x < 17$

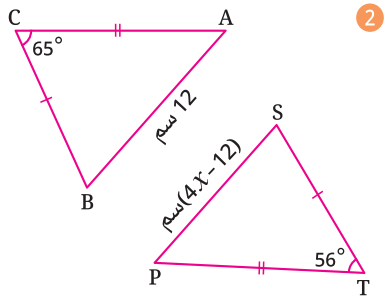
$\because m(\angle DAC) > 0$

$\therefore 2x - 9 > 0$ $\quad \therefore 2x > 9$

$\therefore x > 4.5$

$\therefore 4.5 < x < 17$

2



$\because AC = PT$, $BC = ST$

$m(\angle T) < m(\angle C)$

$\therefore PS < AB$

$\therefore 4x - 12 < 12$

$\therefore 4x < 12 + 12$

$\therefore 4x < 24$ $\quad \therefore x < 6$

$\because PS > 0$

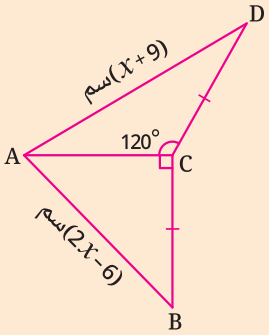
$\therefore 4x - 12 > 0$

$\therefore 4x > 12$ $\quad \therefore x > 3$

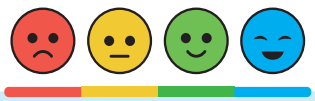
$\therefore 3 < x < 6$

تقييم ذاتى 5

أوجد مجموعة قيم x الممكنة فى الشكل التالى :



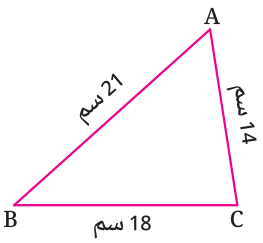
تقييم الدرس



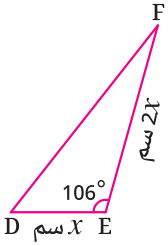
أولًا قياس المفاهيم

1 رتب تصاعديًا قياسات الزوايا فى كل مثلث من المثلثات الآتية :

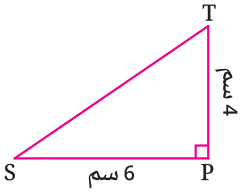
1



2

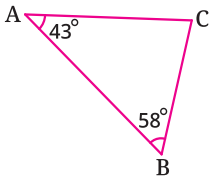


3

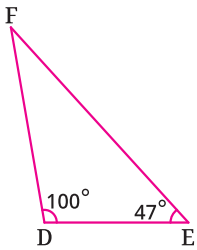


(2) رتب تصاعديًا أطوال الأضلاع فى كل مثلث من المثلثات الآتية :

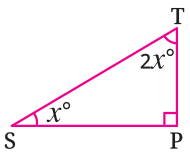
(1)



(2)

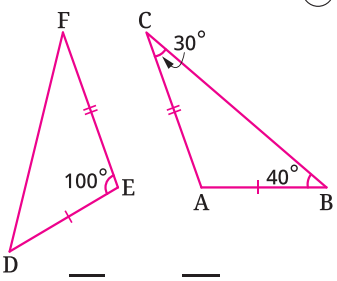


(3)



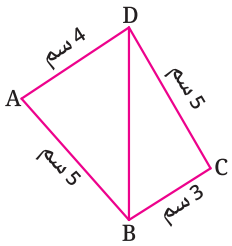
(3) قارن بين القياسات المطلوبة أسفل كل شكل :

(1)



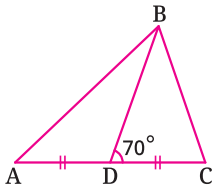
طول $\overline{FD}$ وطول $\overline{CB}$

(2)



m (∠ CDB) ، m (∠ ABD)

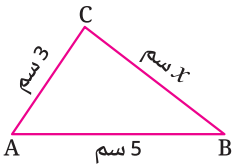
(3)



طول $\overline{AB}$ وطول $\overline{BC}$

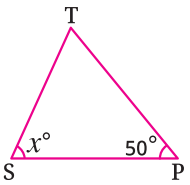
(4) أوجد قيم x الممكنة التى تحقق الشرط أسفل كل شكل :

(1)



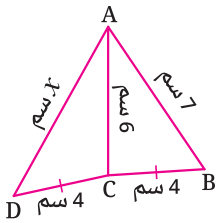
m (∠A) > m (∠B)

(2)



TP > ST

(3)

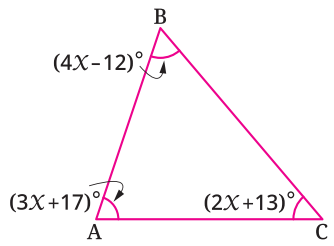


AD > AB

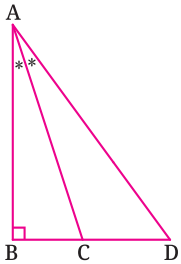
ثانيًا تطبيق المفاهيم

(5) فى كل من الشكلين الآتيين رتب أطوال أضلاع المثلث ABC من الأصغر إلى الأكبر :

(1)



(2)

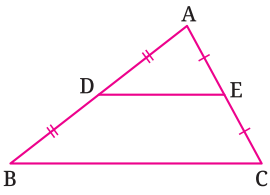


(6) فى الشكل المقابل :

إذا كان AD > AE

أثبت أن :

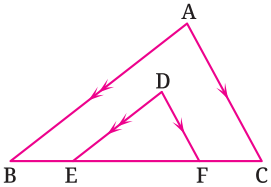
m (∠ C) > m (∠ B)



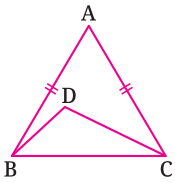
(7) فى الشكل المقابل :

إذا كان AC < AB

أثبت أن : DE > DF



(8) فى الشكل المقابل :

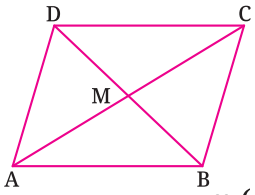


$AB = AC$

$m(\angle ACD) > m(\angle ABD)$

أثبت أن : $DC > DB$

(9) فى الشكل المقابل :



ABCD متوازى أضلاع

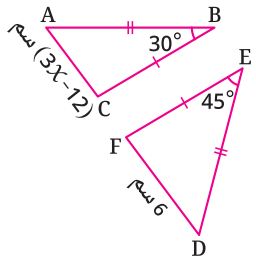
قطراه متقاطعان فى M ،

برهن أن : $AB > BC$

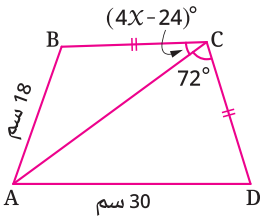
$m(\angle AMB) > m(\angle CMB)$

(10) أوجد قيم X الممكنة فى كل مما يأتى :

(1)



(2)

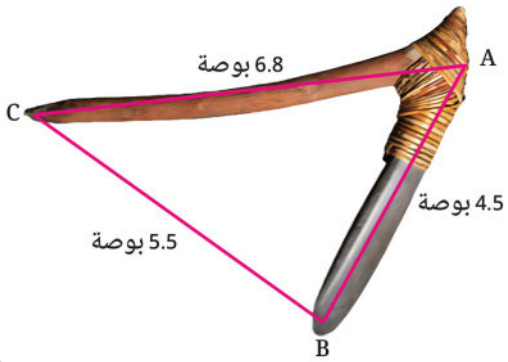


ثالثًا التحليل وتكامل المواد

(11) علم الآثار :

استخدم المصريون القدماء الأداة المقابلة لتنعيم وتشكيل القطع الخشبية.

أى الزاويتين أكبر ؟ هل $(\angle A)$ ، وهى الزاوية التى تُشكّلها شفرة الأداة مع المقبض، أم $(\angle B)$ ، وهى الزاوية التى تُشكّلها شفرة الأداة مع سطح العمل؟ اشرح ذلك.



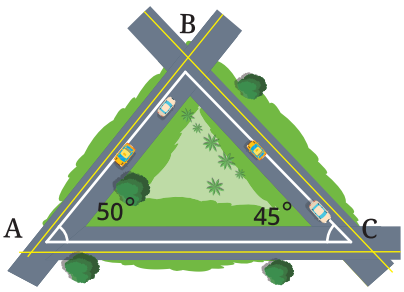
برع المصريون القدماء فى الأعمال اليدوية، فأتقنوا صناعة الحلى والأعمال الخشبية والمعدنية والنقش والبناء بدقة وإبداع مذهلين.

(12) تقاطع طرق :

يلتقى طريقان بزاوية قياسها $50°$ عند النقطة A.

طريق ثالث من B إلى C يصنع زاوية قياسها $45°$ مع الطريق من A إلى C.

أى التقاطعين A أم B أقرب إلى C ؟ اشرح.



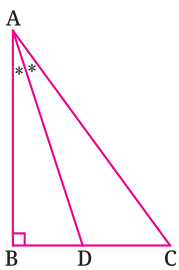
تفكير إبداعى

(13) فى الشكل المقابل :

ΔABC قائم الزاوية فى B ،

$\overrightarrow{AD}$ ينصف $\angle BAC$ ،

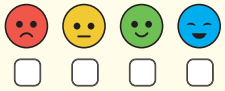
أثبت أن : $DC > DB$



قيّم فهمك!

ما مدى فهمك للتباين فى المثلثات ؟

ضع علامة فى المربع المناسب



الدرس
3 - 3

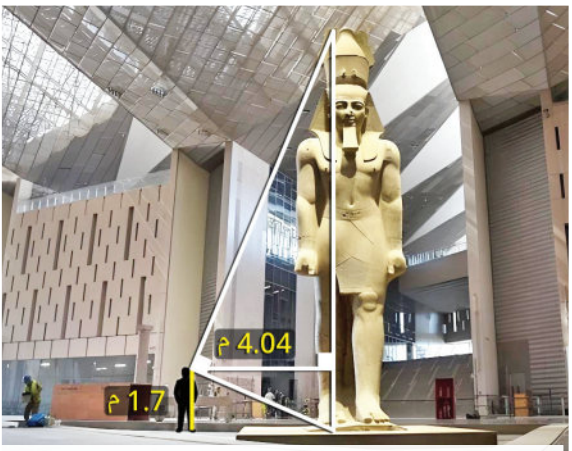
المساقط العمودية ونظرية إقليدس
(The Perpendicular Projections and Euclid's Theorem)

■ **نواتج التعلم**

- تعرف المسقط العمودى لنقطة على مستقيم.
- تعرف المسقط العمودى لقطعة مستقيمة على مستقيم.
- تعرف نظرية إقليدس ونتائجها.
- تستخدم نظرية إقليدس فى حل بعض المشكلات الحياتية.

■ **المفـردات**

- المسقط العمودى
The perpendicular projection
- نظرية إقليدس
Euclid's theorem
- الوسط الهندسى
Geometric mean



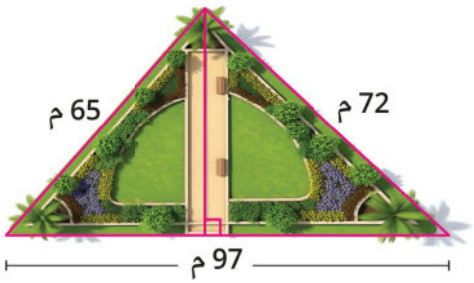
تمثال الملك رمسيس الثانى بالمتحف المصرى الكبير

استعد!

تمثـال الملـك رمسـيس الثانى تحفـة فنية فريـدة تجسِّـد عظمـة الفراعنـة، وإبـداع المصريين القدماء فى فن النحت.
تم اكتشافه عام 1820م بالقرب من منطقة ميـت رهينـة جنـوب الجيـزة، ثم نُقـل إلى ميدان باب الحديد عام 1955م ليتغير اسم الميـدان إلى ميـدان رمسـيس، وظل هناك إلى أن تم نقله إلـى موقعه الحالى بالمتحف المصـرى الكبيـر. هل يمكنك تحديـد ارتفاع التمثال من البيانات الموضحة فى الصورة؟

فـى هـذا الدرس، سوف تتعرف على المساقط العمودية ونظرية إقليدس، مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.

فكر وناقش!



لدى حامد قطعة أرض مثلثة الشكل أبعادها 65 م ، 72 م ، 97 م. يريد تقسيمها بممر عمودى على ضلعها الأطول، هل يمكنك معرفة طول هذا الممر؟

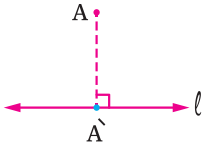
تعلم!

المساقط العمودية

مسقط نقطة على مستقيم

مسقط نقطة على مستقيم هو موقع العمود الساقط من النقطة على هذا المستقيم.

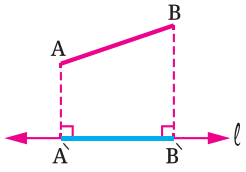
إذا كانت $A \notin \ell$ فإن :
مسقط النقطة A على المستقيم ℓ
هو النقطة A' حيث $\ell \perp \overline{AA'}$



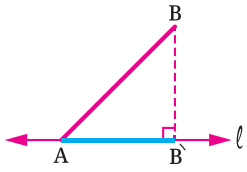
إذا كانت $A \in \ell$ فإن :
مسقط النقطة A على المستقيم ℓ
هو النقطة A نفسها.

مسقط قطعة مستقيمة على مستقيم

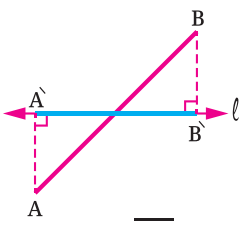
مسـقط قطعة مستقيمة على مستقيم هو القطعة المستقيمة التى طرفاها هما مسقطا طرفى القطعة المستقيمة الأصلية على هذا المستقيم.



مسقط $\overline{AB}$ على المستقيم ℓ هو $\overline{A`B`}$



مسقط $\overline{AB}$ على المستقيم ℓ هو $\overline{AB`}$



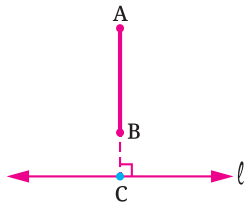
مسقط $\overline{AB}$ على المستقيم ℓ هو $\overline{A`B`}$

ملاحظة

إذا كانت القطعة المسـتقيمة فـى وضع عمودى على المستقيم، فإن مسـقطها على هذا المستقيم يساوى نقطة واحدة هى مسقط كل من طرفيها.

فى الشكل المقابل :

مسقط $\overline{AB}$ على المستقيم ℓ هو النقطة C

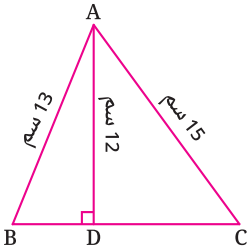


مثال 1

فى الشكل المقابل :

أوجد طول كل مما يأتى :

1. مسقط $\overline{AC}$ على $\overleftrightarrow{BC}$
2. مسقط $\overline{AB}$ على $\overleftrightarrow{BC}$



$\because D \in \overleftrightarrow{BC}$ ، $\overline{AD} \perp \overleftrightarrow{BC}$

$\therefore \overline{DC}$ مسقط $\overline{AC}$ على $\overleftrightarrow{BC}$ ،

$\overline{DB}$ مسقط $\overline{AB}$ على $\overleftrightarrow{BC}$

فى ΔADC القائم الزاوية فى D :

$DC = \sqrt{(15)^2 - (12)^2} = \sqrt{81} = 9$

$\therefore$ طول مسقط $\overline{AC}$ على $\overleftrightarrow{BC}$ يساوى 9 سم

فى ΔADB القائم الزاوية فى D :

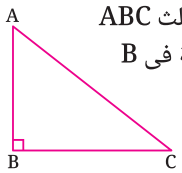
$DB = \sqrt{(13)^2 - (12)^2} = \sqrt{25} = 5$

$\therefore$ طول مسقط $\overline{AB}$ على $\overleftrightarrow{BC}$ يساوى 5 سم

معلومة سابقة

نظرية فيثاغورس :

إذا كان المثلث ABC قائم الزاوية فى B



فإن :

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

ومنها :

$(AB)^2 = (AC)^2 - (BC)^2$

$(BC)^2 = (AC)^2 - (AB)^2$

ناقش مع زملائك

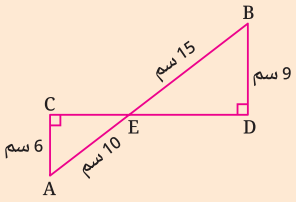
ما العلاقة بين طول القطعة المستقيمة وطول مسقطها على مستقيم معلوم فى كل من الحالات التالية:

1. القطعة المستقيمة توازى المستقيم.
2. القطعة المستقيمة لا توازى المستقيم.
3. القطعة المستقيمة عمودية على المستقيم.

وهل يمكن أن يكون طول مسقط القطعة المستقيمة على مستقيم أكبر من طول القطعة المستقيمة نفسها؟

تقييم ذاتى (1)

فى الشكل التالى :



أوجد طول كل مما يأتى :

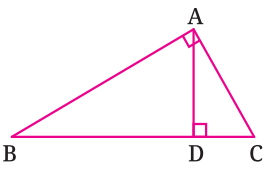
1. مسقط $\overline{AE}$ على $\overleftrightarrow{CD}$
2. مسقط $\overline{BE}$ على $\overleftrightarrow{CD}$
3. مسقط $\overline{AB}$ على $\overleftrightarrow{CD}$

نظرية إقليدس

مساحة المربع المنشأ على أحد ضلعى القائمة فى المثلث القائم الزاوية تساوى مساحة المستطيل الذى بعداه طول مسقط هذا الضلع على الوتر ، وطول الوتر.

إذا كان المثلث ABC قائم الزاوية فى A ،

$D \in \overline{BC}$ بحيث $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ فإن :

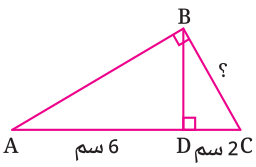


$(AB)^2 = BD \times BC$ ، $(AC)^2 = CD \times CB$

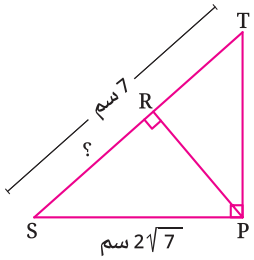
مثال 2

فى كل من الأشكال الآتية ، أوجد طول الضلع المشار إليه بالعلامة (؟).

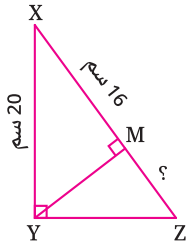
1



2



3



① $\because (BC)^2 = CD \times CA$ (إقليدس)

$\therefore (BC)^2 = 2 \times (2+6) = 16$

$\therefore BC = \sqrt{16}$ $\therefore BC = 4$

أى أن : طول $\overline{BC}$ يساوى 4 سم.

② $\because (SP)^2 = SR \times ST$ (إقليدس)

$\therefore (2\sqrt{7})^2 = SR \times 7$

$\therefore 28 = SR \times 7$ $\therefore SR = \frac{28}{7} = 4$

أى أن : طول $\overline{SR}$ يساوى 4 سم.

③ $\because (XY)^2 = XM \times XZ$ (إقليدس)

$\therefore (20)^2 = 16\,(16 + ZM)$ $\therefore 400 = 16\,(16 + ZM)$

$\therefore 16 + ZM = \frac{400}{16}$ $\therefore 16 + ZM = 25$ $\therefore ZM = 25 - 16 = 9$

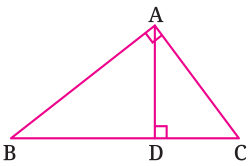
أى أن : طول $\overline{ZM}$ يساوى 9 سم.

نتيجة

إذا كان : ABC مثلثًا قائم الزاوية فى A ،

$D \in \overline{BC}$ بحيث $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

فإن : $(AD)^2 = DB \times DC$



لاحظ فى الشكل السابق أن : $AD = \frac{AB \times AC}{BC}$

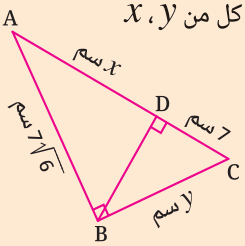
"يمكنك إثبات هذه الملاحظة باستخدام قانون مساحة المثلث"

تاريخ الرياضيات

إقليدس (Euclid) هو عالم رياضيات يونانى عاش فى مدينة الإسكندرية حوالى عام 300 قبل الميلاد ، يُلقب بـ "أبى الهندسة".
اشتهر بكتابه الشهير "الأصول" أو "العناصر" (Elements) الذى يُعد من أهم الكتب فى تاريخ الرياضيات.

تقييم ذاتى ②

فى الشكل التالى، أوجد قيمة كل من x ، y



لاحظ أن

فى الشكل المقابل :

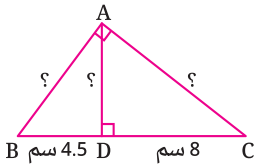
$\because (AD)^2 = DB \times DC$

فإن AD هو الوسط الهندسى الموجب بين DC ، DB

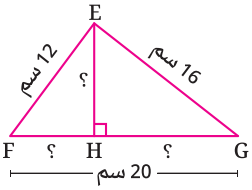
مثال 3

فى كل من الشكلين التاليين، أوجد أطوال الأضلاع المشار إليها بالعلامة (؟):

1



2



1 $\because (AD)^2 = DB \times DC$

$= 4.5 \times 8 = 36$

$\therefore AD = \sqrt{36} = 6$

$\because (AC)^2 = CD \times CB$

$= 8 \times 12.5 = 100$

$\therefore AC = \sqrt{100} = 10$

$\because (AB)^2 = BD \times BC$

$= 4.5 \times 12.5 = 56.25$

$\therefore AB = \sqrt{56.25} = 7.5$

2 فى Δ EFG :

$\because (20)^2 = (12)^2 + (16)^2$

$\therefore m(\angle FEG) = 90°$

$\therefore EH = \dfrac{EF \times EG}{FG}$

$= \dfrac{12 \times 16}{20} = 9.6$

$\because (EG)^2 = GH \times GF$

$\therefore (16)^2 = GH \times 20$

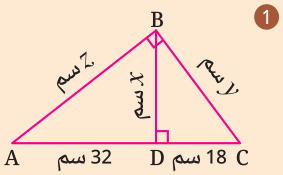
$\therefore GH = \dfrac{(16)^2}{20} = 12.8$

$\therefore FH = 20 - 12.8 = 7.2$

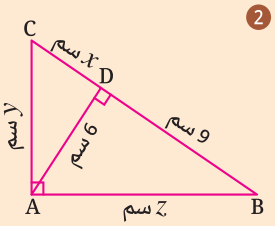
تقييم ذاتى ③

فى كل من الشكلين التاليين أوجد قيم x ، y ، z:

1



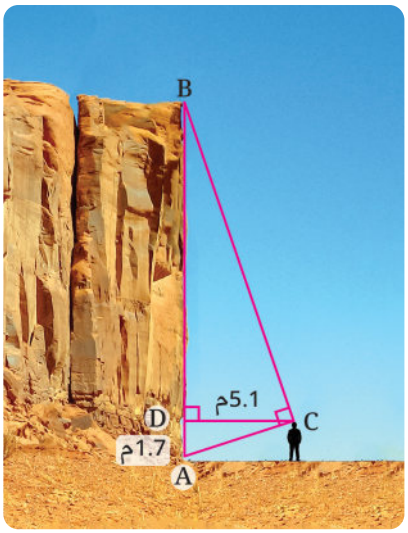
2



مثال 4

الربط بالحياة:

إذا علمت أن طول الرجل 1.7 متر ، ويبعد عن الصخرة مسافة 5.1 متر. فأوجد ارتفاع الصخرة (طول $\overline{AB}$)



$\because m(\angle ACB) = 90°$, $\overline{CD} \perp \overline{AB}$

$\therefore (CD)^2 = AD \times BD$

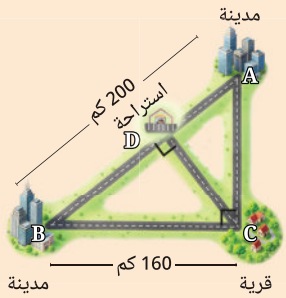
$\therefore (5.1)^2 = 1.7 \times BD$

$\therefore BD = \dfrac{(5.1)^2}{1.7} = 15.3$

$\therefore AB = 1.7 + 15.3 = 17$

∴ ارتفاع الصخرة هو 17 مترًا.

تقييم ذاتى ④



الشكل المرسوم هو مخطط مقترح لبناء استراحة D على الطريق السريع بين مدينتين A ، B. ما طول الطريق الذى يربط هذه الاستراحة بالقرية C ؟

■ تقييم ذاتى (5)

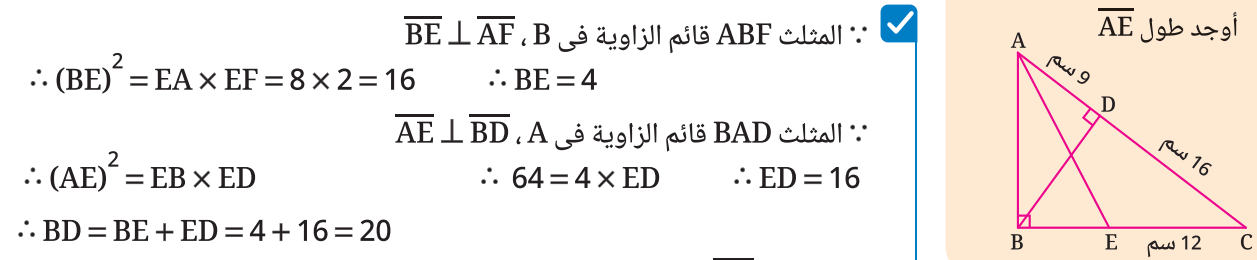
فى الشكل التالى :

ΔABC قائم الزاوية فى B ،

$\overline{BD} \perp \overline{AC}$ ، $AD = 9$ سم ،

$CD = 16$ سم ، $EC = 12$ سم

أوجد طول $\overline{AE}$



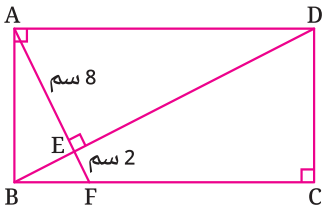
مثال 5

فى الشكل المقابل :

ABCD مستطيل ، $F \in \overline{BC}$ ، $\overline{AF} \perp \overline{BD}$

$AE = 8$ سم ، $EF = 2$ سم

أوجد طول $\overline{BD}$



∵ المثلث ABF قائم الزاوية فى B ، $\overline{BE} \perp \overline{AF}$

$\therefore (BE)^2 = EA \times EF = 8 \times 2 = 16$ $\therefore BE = 4$

∵ المثلث BAD قائم الزاوية فى A ، $\overline{AE} \perp \overline{BD}$

$\therefore (AE)^2 = EB \times ED$ $\therefore 64 = 4 \times ED$ $\therefore ED = 16$

$\therefore BD = BE + ED = 4 + 16 = 20$

أى أن طول $\overline{BD}$ يساوى 20 سم

نشاط تعاونى

استخدم مصادر مختلفة (مثل : شبكة الإنترنت أو مكتبة مدرستك أو ...) وتعاون مع زملائك تحت إشراف معلمك للتعرف على المزيد عن عالم الرياضيات إقليدس، ومسلَّماته التى بنى عليها نظامه الهندسى.

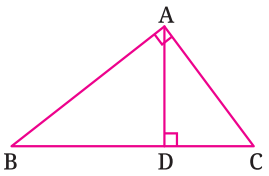
تقييم الدرس

أولاً قياس المفاهيم

◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(1) فى الشكل المقابل :

المثلث ABC قائم الزاوية فى A ، $D \in \overline{BC}$ بحيث $\overline{AD} \perp \overline{BC}$



① ما مسقط $\overline{AB}$ على $\overleftrightarrow{BC}$ ؟

(أ) $\overline{AD}$ (ب) $\overline{DB}$ (جـ) $\overline{DC}$ (د) {D}

② ما مسقط $\overline{AC}$ على $\overleftrightarrow{BC}$ ؟

(أ) $\overline{AD}$ (ب) $\overline{DB}$ (جـ) $\overline{DC}$ (د) {D}

③ ما مسقط $\overline{AD}$ على $\overleftrightarrow{BC}$ ؟

(أ) $\overline{AD}$ (ب) $\overline{DB}$ (جـ) $\overline{DC}$ (د) {D}

④ ما مسقط $\overline{BC}$ على $\overleftrightarrow{AB}$ ؟

(أ) $\overline{BC}$ (ب) $\overline{AC}$ (جـ) $\overline{BA}$ (د) {A}

⑤ ما مسقط $\overline{CB}$ على $\overleftrightarrow{AC}$ ؟

(أ) $\overline{BC}$ (ب) $\overline{CA}$ (جـ) $\overline{AB}$ (د) {A}

⑥ أى مما يأتى صحيح؟

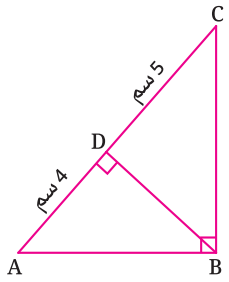
(أ) $(AB)^2 = BD \times DC$ (ب) $(AB)^2 = BC \times AC$

(جـ) $(AB)^2 = BD \times BC$ (د) $(AB)^2 = BC \times CD$

◂ اكتشف الخطأ :

(2) فى الشكل المقابل ، ما طول $\overline{CB}$ ؟

أى من مجدى وإبراهيم إجابته صحيحة ؟ ناقش.



حل مجدى :

$(CB)^2 = CD \times AD$

$= 5 \times 4 = 20$

$\therefore CB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

حل إبراهيم :

$(CB)^2 = CD \times CA$

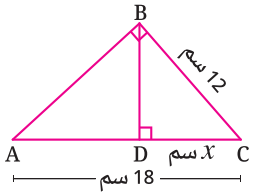
$= 5 \times 9 = 45$

$\therefore CB = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

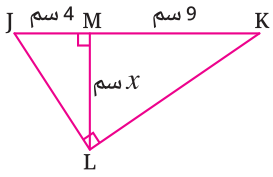
ثانيًا تطبيق المفاهيم

◂ فى كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة x :

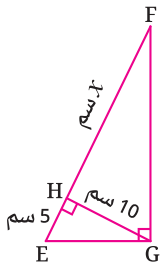
(3)



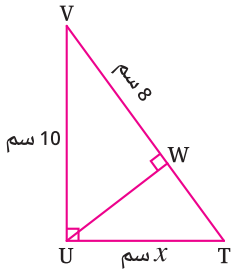
(4)



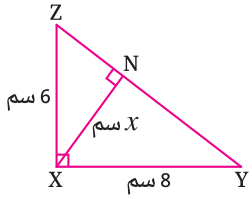
(5)



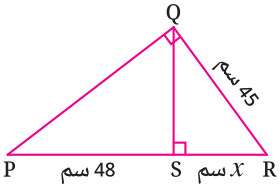
(6)



(7)



(8)



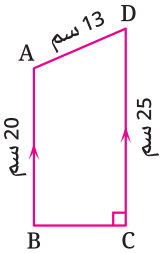
◂ أجب عن الأسئلة التالية :

(9) فى الشكل المقابل :

ABCD شبه منحرف قائم الزاوية

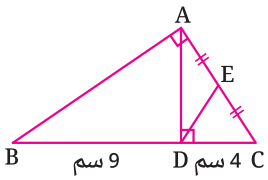
① ما طول مسقط $\overline{AD}$ على $\overleftrightarrow{DC}$ ؟

② ما طول مسقط $\overline{AD}$ على $\overleftrightarrow{BC}$ ؟



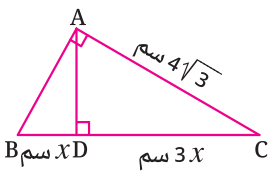
(10) فى الشكل المقابل :

ما طول $\overline{DE}$ ؟



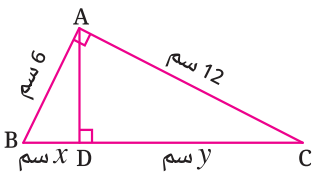
(11) فى الشكل المقابل :

ما طول $\overline{BD}$ ؟



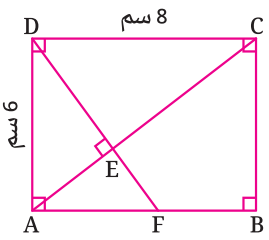
(12) فى الشكل المقابل :

ما قيمة $\frac{x}{y}$ ؟



(13) فى الشكل المقابل :

ما طول $\overline{EF}$ ؟

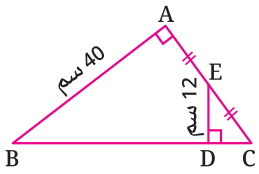


(14) فى الشكل المقابل :

ΔABC قائم الزاوية فى A ،

E منتصف $\overline{AC}$ ، $\overline{ED} \perp \overline{BC}$

أوجد طول $\overline{DC}$



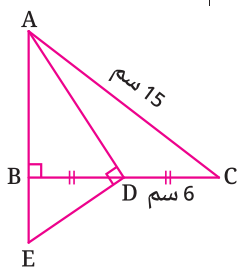
(15) فى الشكل المقابل :

ΔABC قائم الزاوية فى B ،

D منتصف $\overline{BC}$ ، $E \in \overrightarrow{AB}$

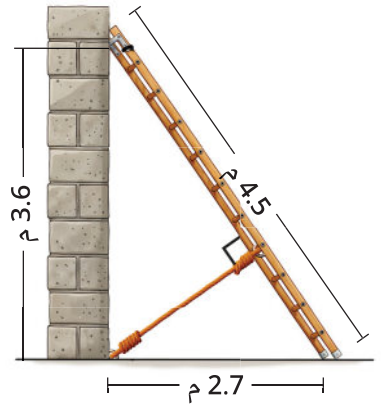
بحيث $m(\angle ADE) = 90°$

أوجد طول $\overline{BE}$



ثالثًا التحليل وتكامل المواد

(16) سلم طوله 4.5 متر، يستند على حائط رأسى، وقاعدته تبعد عن الحائط 2.7 متر، وارتفاع قمته عن الأرض 3.6 متر. رُبط السلم بحبل عمودى عليه كما بالشكل منعًا لانزلاقه، كم يبلغ طول الحبل ؟



اتباع قواعد الأمن والسلامة يعكس
وعى الفرد ومسئوليته تجاه نفسه وتجاه الآخرين.

(17) كم يبلغ طول رافع الهيدروليك فى الوضع الموضح للسيارة ؟

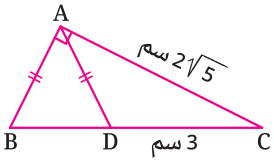
تفكير إبداعى

(18) فى الشكل المقابل :

ΔABC قائم الزاوية فى A ،

$D \in \overline{BC}$ حيث $AB = AD$ ،

أوجد طول $\overline{BD}$



قيّم فهمك!

ما مدى فهمك للمساقط العمودية ونظرية إقليدس ؟
ضع علامة فى المربع المناسب

الدرس
3 - 4

الدائرة
(The Circle)

■ **نواتج التعلم**

- تعرف مفهوم الدائرة.
- تعرف مفهوم قطر الدائرة ونصف قطرها.
- تستخدم الفرجار لرسم دائرة بمعلومية مركزها وطول نصف قطرها.
- تعرف الصيغة الرياضية لحساب كل من محيط ومساحة الدائرة.
- تحل مسائل تتضمن محيط ومساحة الدائرة.
- تستخدم الصيغة الرياضية لحساب كل من محيط ومساحة الدائرة فى حل مشكلات حياتية.

■ **المفردات**

- الدائرة The circle
- مركز الدائرة Center of the circle
- نصف قطر الدائرة Radius
- قطر الدائرة Diameter
- محيط الدائرة Circumference
- مساحة الدائرة Area of the circle

■ **لاحظ أن**

عادة تُسمى الدائرة بمركزها، فنقول الدائرة M لنعنى الدائرة التى مركزها النقطة M.

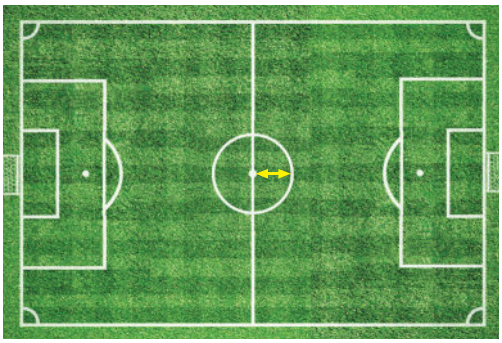
استعد!

تُعد العجلة الدوارة من أبرز الألعاب فى الملاهى، وهى عبارة عن مجموعة من المقاعد تتحرك فى مسار دائرى، وكل مقعد بها يبعد عن مركزها مسافة ثابتة.

هل يمكنك حساب المسافة التى يقطعها أحد المقاعد إذا دار دورة كاملة حول مركز العجلة، بفرض أنه يبعد عن المركز مسافة 7 م؟

فى هذا الدرس، سوف تتعلم مفهوم الدائرة والمفاهيم المرتبطة بها، وكيفية تحديد محيطها ومساحتها؛ مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.

فكر وناقش!



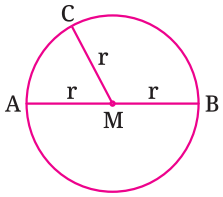
تبدأ مباراة كرة القدم بتنفيذ ركلة البداية من نقطة تقع فى مركز دائرة منتصف الملعب، وهى دائرة تقع فى وسط الملعب تمامًا طول نصف قطرها حوالى 10 ياردات.

كيف يمكن رسم هذه الدائرة بدقة على أرضية الملعب؟ ناقش.

تعلم!

الدائرة

الدائرة هى مجموعة نقط المستوى التى تبعد بُعدًا ثابتًا عن نقطة ثابتة فى المستوى.



- تُسمى النقطة الثابتة «مركز الدائرة»، ويُرمز لها بأحد الحروف مثل «M»، ويُسمى البعد الثابت «طول نصف قطر الدائرة» ويرمز له بالرمز «r».
- نصف قطر الدائرة هو قطعة مستقيمة مرسومة بين مركز الدائرة وأى نقطة عليها.

فمثلًا : كل من $\overline{MA}$ ، $\overline{MB}$ ، $\overline{MC}$ نصف قطر فى الدائرة M.

- قطر الدائرة هو قطعة مستقيمة تمر بمركز الدائرة ومرسومة بين أى نقطتين على الدائرة

فمثلًا : $\overline{AB}$ قطر فى الدائرة M ويرمز لطول قطر الدائرة بالرمز «d» ويكون $d = 2r$

رسم الدائرة

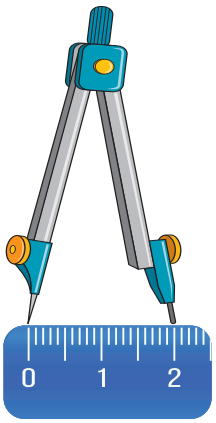
تُستخدم المسطرة والفرجار لرسم الدائرة بمعلومية طول نصف قطرها.

مثال 1

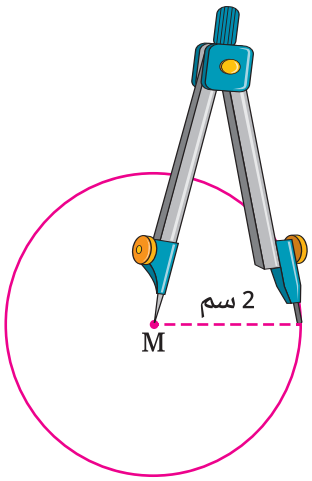
ارسم دائرة M طول نصف قطرها 2 سم.

لرسم الدائرة M التى طول نصف قطرها 2 سم، اتبع ما يلى :

① افتح الفرجار فتحة طولها يساوى طول نصف القطر المطلوب (2 سم).



② ثبت سن الفرجار على الورقة، فتكون هذه النقطة هى مركز الدائرة M، ثم ارسم الدائرة، فتحصل على الدائرة المطلوبة.

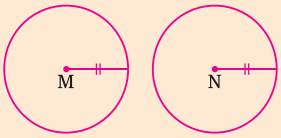


■ تقييم ذاتى ①

ارسم دائرة N طول قطرها 5 سم

■ لاحظ أن

الدوائر المتطابقة هى الدوائر التى لها أنصاف أقطار متساوية فى الطول.



نشاط عملى 1 إيجاد النسبة بين محيط الدائرة وطول قطرها

استخدم العديد من الأجسام الدائرية مثل طبق، ساعة حائط، عملة معدنية، قرص مدمج (CD)، وقم بما يلى :

1. اقطع جزءًا من خيط بطول محيط كل جسم، واستخدم مسطرة لقياس طول هذا الجزء إلى أقرب ملليمتر.
2. قم بقياس طول قطر كل جسم إلى أقرب ملليمتر.
3. سجل قياساتك فى الجدول التالى :

الجسم	محيط الدائرة (C)	طول قطر الدائرة (d)	$\frac{C}{d}$
طبق	_____	_____	_____
ساعة حائط	_____	_____	_____
عملة معدنية	_____	_____	_____
قرص مدمج	_____	_____	_____

4. استخدم الآلة الحاسبة، وأوجد فى كل مرة نسبة محيط الدائرة إلى طول قطرها، وقرب النتائج إلى أقرب جزء من مائة، وسجل النتائج فى كل مرة فى العمود الأخير من الجدول السابق. ماذا تلاحظ بشأن هذه النسبة؟

محيط الدائرة

• محيط الدائرة (C) هو طول الخط المنحنى الذى يمثل الدائرة.

• النسبة بين محيط الدائرة (C) وطول قطرها (d) هى عدد غير نسبى يُرمز له بالرمز π

أى أن $\frac{C}{d} = \pi$

ومنها $C = \pi d$ فيكون $C = 2\pi r$

مثال 2

1 أوجد محيط الدائرة التى طول قطرها 32 سم، وقرب الناتج لأقرب جزء من عشرة ($\pi \approx 3.14$).

2 أوجد بدلالة π محيط الدائرة التى طول نصف قطرها 13.5 قدم.

✓ (1) $\because C = \pi d$

$\therefore C = 32\pi$

$\therefore C \approx 32 \times 3.14$

$\therefore$ محيط الدائرة ≈ 100.5 سم

(2) $\because C = 2\pi r$

$\therefore C = 2 \times 13.5\pi$

$\therefore C = 27\pi$

$\therefore$ محيط الدائرة $= 27\pi$ قدمًا

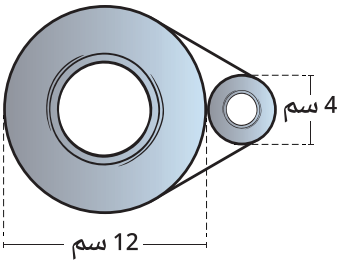
■ **ملاحظة**

استخدام مفتاح π فى الآلة الحاسبة يعطى نتائج أكثر دقة، لأنه يستخدم قيمة للعدد π مقربة لأقرب جزء من مليار. حاول بنفسك إيجاد محيط الدائرة فى جزئية (1) من المثال السابق باستخدام مفتاح π فى الآلة الحاسبة، وقارن النتائج.

مثال 3

الربط بالحياة :

أوجد عدد الدورات التى تدورها البكرة الصغرى عندما تدور البكرة الكبرى 8 دورات كاملة.



✓ $\because$ محيط البكرة الكبرى $= \pi d = 12\pi$ سم،

محيط البكرة الصغرى $= \pi d = 4\pi$ سم

$\therefore$ عدد الدورات التى تدورها البكرة الصغرى عندما تدور البكرة الكبرى دورة واحدة يساوى $\frac{12\pi}{4\pi} = 3$ دورات.

$\therefore$ عدد الدورات التى تدورها البكرة الصغرى عندما تدور البكرة الكبرى 8 دورات يساوى $8 \times 3 = 24$ دورة.

■ **لاحظ أن**

العدد π عدد غير نسبى حيث : $\pi \approx 3.141592654$

وهذه القيمة هى قيمة تقريبية للعدد π ، ولسهولة الحسابات يمكننا استخدام القيم التقريبية التالية للعدد π :

$\pi \approx 3.14$ أ، $\pi \approx \frac{22}{7}$

وهذه القيم التقريبية هى القيم الأكثر شيوعًا.

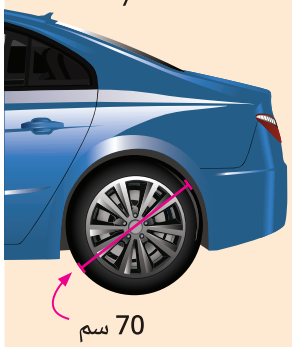
■ **تقييم ذاتى (2)**

1 أوجد محيط الدائرة التى طول قطرها 25 قدمًا ($\pi \approx 3.14$).

2 أوجد بدلالة π محيط الدائرة التى طول نصف قطرها 12 سم.

■ **تقييم ذاتى (3)**

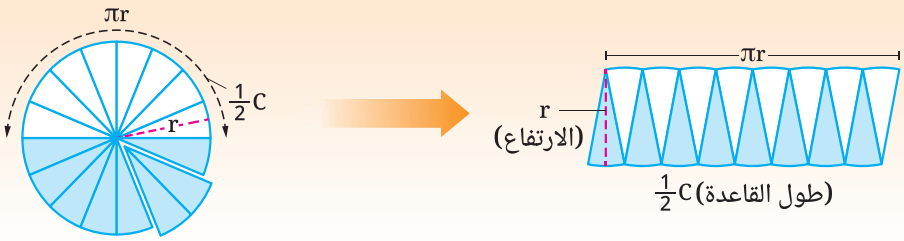
عجلة سيارة طول قطرها 70 سم، ما محيط العجلة؟ وإذا دارت العجلة دورة كاملة، كم المسافة التى تقطعها السيارة؟ وكم دورة تحتاجها العجلة لتقطع 2.2 كم؟ ($\pi \approx \frac{22}{7}$)



نشاط عملى 2 استنتاج الصيغة الرياضية لحساب مساحة الدائرة

1 قم بطى قطعة من الورق على شكل دائرة إلى نصفين أربع مرات متتالية، لتقسيمها إلى 16 جزءًا متساويًا.

2 قم بقص كل جزء، ثم أعد تجميع وترتيب الأجزاء لتكوين شكل جديد أقرب إلى متوازى الأضلاع.



3 ارتفاع متوازى الأضلاع هو طول نصف قطر الدائرة الأصلية (r)،
وطول قاعدته هو نصف محيط الدائرة الأصلية $(\frac{1}{2}C = \pi r)$.

4 مساحة الدائرة = مساحة متوازى الأضلاع $= \pi r \times r = \pi r^2$ أى أن $A = \pi r^2$

مساحة الدائرة

مساحة الدائرة تساوى حاصل ضرب مربع طول نصف القطر فى النسبة التقريبية π

أى أن $A = \pi r^2$

مثال 4

1 باستخدام مفتاح π بالآلة الحاسبة، أوجد مساحة الدائرة التى طول نصف قطرها 9.2 سم، وقرب الناتج لأقرب جزء من عشرة.

2 أوجد بدلالة π مساحة الدائرة التى طول قطرها 8 أقدام.

(1) $\because A = \pi r^2$

$\therefore A = (9.2)^2 \pi \approx 265.9$

$\therefore$ مساحة الدائرة ≈ 265.9 سم^2

(2) $\because d = 8 \quad \therefore r = \frac{8}{2} = 4$

$\because A = \pi r^2$

$\therefore A = (4)^2 \pi = 16\pi$

$\therefore$ مساحة الدائرة $= 16\pi$ قدمًا مربعًا.

مثال 5

دائرة مساحتها π 81 سم^2، أوجد طول نصف قطرها،
ثم أوجد محيطها لأقرب جزء من عشرة.

$\because A = 81\pi \quad \therefore \pi r^2 = 81\pi$

$\therefore r^2 = 81 \quad \therefore r = \sqrt{81} = 9$

أى أن طول نصف قطر الدائرة = 9 سم

$\therefore C = 2\pi r = 2 \times 9 \times \pi = 18\pi \approx 56.5$

أى أن محيط الدائرة ≈ 56.5 سم

تقييم ذاتى 4

1 أوجد بدلالة π مساحة الدائرة التى طول نصف قطرها 5 سم.

2 باستخدام مفتاح π بالآلة الحاسبة، أوجد مساحة الدائرة التى طول قطرها 19 بوصة وقرب الناتج لأقرب جزء من عشرة.

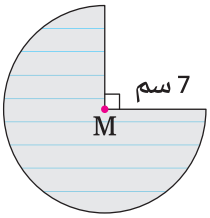
تقييم ذاتى 5

دائرة محيطها π 20 سم،
أوجد مساحتها $(\pi \approx 3.14)$

مثال 6

الربط بالحياة :

قطعة من الورق مستديرة الشكل، قُطع منها جزء يمثل ربع دائرة كما بالشكل المقابل.



أوجد مساحة ومحيط الجزء المتبقى $(\pi \approx \frac{22}{7})$

مساحة الجزء المتبقى $= \frac{3}{4}$ مساحة الدائرة

$$= \frac{3}{4}\pi r^2$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{22}{7} \times 7^2 = 115.5 \text{ سم}^2$$

محيط الجزء المتبقى $= \frac{3}{4}$ محيط الدائرة $+ 2r$

$$= 2r + 2\pi r \times \frac{3}{4}$$

$$= 2r + \frac{3}{2}\pi r$$

$$= 2 \times 7 + \frac{3}{2} \times \frac{22}{7} \times 7$$

$$= 14 + 33 = 47 \text{ سم}$$

■ **تقييم ذاتى ⑥**

نافورة دائرية مركزها M وطول نصف قطرها 4 م، يُراد عمل ممر دائرى حولها من البلاط بعرض 2 م. ما مساحة الممر بدلالة π ؟

نشاط تعاونى

تعـاون مع زملائك فـى تصميم مجموعـة مختلفة من الميداليـات دائرية الشكل ، لإهدائها لأعضاء الفريق الفائز فى مسابقة أوائل الطلبة بمدرستك.
احسب محيط ومساحة كل منها.

تقييم الدرس

أولاً قياس المفاهيم

◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(1) دائرة طول نصف قطرها 4 سم، فما طول قطرها؟

(أ) 2 سم (ب) 4 سم

(جـ) 8 سم (د) 16 سم

(2) فى أى دائرة، ما قيمة $\frac{c}{d}$ ؟

(أ) $\frac{\pi}{2}$ (ب) $\frac{2}{\pi}$

(جـ) π (د) 2π

(3) ما محيط الدائرة التى طول قطرها 12 سم؟

(أ) 3π سم (ب) 6π سم

(جـ) 12π سم (د) 36π سم

(4) ما مساحة الدائرة التى طول نصف قطرها 10 م؟

(أ) 5π م^2 (ب) 10π م^2

(جـ) 25π م^2 (د) 100π م^2

ثانيًا تطبيق المفاهيم

◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(5) ما طول نصف قطر دائرة محيطها 13π سم؟

(أ) $\frac{\pi}{2}$ سم (ب) 6.5 سم

(جـ) 13 سم (د) 26 سم

(6) ما طول قطر دائرة مساحتها 36π بوصة مربعة؟

(أ) 6 بوصات (ب) 12 بوصة

(جـ) 18 بوصة (د) 36 بوصة

(7) دائرتان مساحتاهما 64π ، 100π ، فما النسبة بين محيطيهما؟

(أ) 3 : 4 (ب) 4 : 5

(جـ) 9 : 16 (د) 16 : 25

(8) دائرة محيطها 10π سم، فما مساحتها؟

(أ) 25π سم^2 (ب) 50π سم^2

(جـ) 75π سم^2 (د) 100π سم^2

◂ أجب عن الأسئلة التالية :

(9) فى كل مما يأتى ارسم دائرة، ثم احسب محيطها ومساحتها :

① طول نصف القطر 3 سم $(\pi \approx 3.14)$ ② طول القطر 7 سم $(\pi \approx \frac{22}{7})$

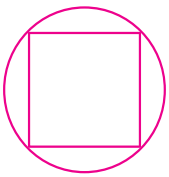
(10) دائرة محيطها 18.84 سم. أوجد طول نصف قطرها ومساحتها $(\pi \approx 3.14)$

(11) دائرة مساحتها 78.5 قدم مربع. أوجد طول نصف قطرها ومحيطها $(\pi \approx 3.14)$

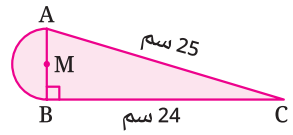
(12) فى الشكل المقابل :

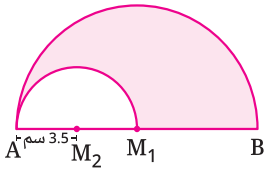
إذا كان محيط الدائرة 75.36 سم

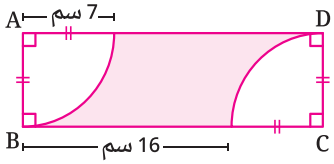
أوجد مساحة المربع (علمًا بأن $\pi \approx 3.14$)



(13) فى كل مما يأتى أوجد محيط ومساحة الجزء الملون (علمًا بأن $\pi \approx \frac{22}{7}$) :

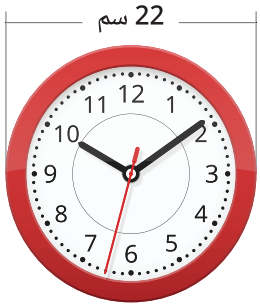
① 

② 

③ 

ثالثًا التحليل وتكامل المواد

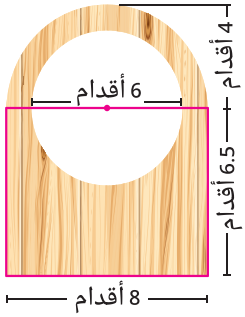
(14) احسب لأقرب جزء من عشرة ما هو مطلوب أسفل كل شكل:

① 

مساحة الساعة

②

محيط العملة

③ 

مساحة الخشب

(15) ديكور :

اشترت أمل سجادة دائرية طول قطرها 2 متر.

ما مساحة السجادة لأقرب متر مربع؟

وإذا كانت تكلفة المتر المربع من السجادة 150 جنيهاً،

فما التكلفة الإجمالية لأقرب جنيه؟

العناية بالديكور تعكس حسًا جماليًا، وتعبر عن الذوق الرفيع.

(16) رياضة : تحتوى دراجة روزان على عجلتى توازن صغيرتين مثبتتين فى العجلة الخلفية لمنع سقوطها على الأرض، فإذا كانت العجلتان الأمامية والخلفية للدراجة متطابقتين ويبلغ طول قطر كل منهما 42 سم، وكان طول قطر عجلة التوازن 14 سم.
إذا قطعت الدراجة مسافة 66 مترًا، احسب الفرق بين عدد الدورات التى تدورها عجلة التوازن وعدد الدورات التى تدورها العجلة الأمامية على الترتيب ($\pi \approx \frac{22}{7}$).

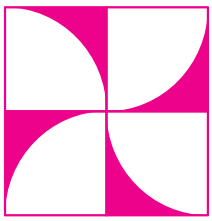
من الضرورى فحص الفرامل والإطارات قبل قيادة الدراجة، والسير بسرعة مناسبة حفاظًا على السلامة.

تفكير إبداعى

(17) فى الشكل المقابل :

إذا كان طول ضلع المربع 6 سم

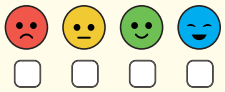
احسب مساحة المنطقة الملونة لأقرب جزء من عشرة.



قيّم فهمك!

ما مدى فهمك للدائرة ؟

ضع علامة فى المربع المناسب



الدرس

3 - 5

الأسطوانة الدائرية القائمة والمنشور القائم

(Right Circular Cylinder and Right Prism)

■ **نواتج التعلم**

- تعرف مفهوم كل من الأسطوانة الدائرية القائمة، والمنشور القائم.
- تحسب حجم الأسطوانة الدائرية القائمة، ومساحتها الجانبية والكلية.
- تحسب حجم المنشور القائم، ومساحته الجانبية والكلية.
- تستخدم قوانين حساب الحجم، والمساحة الجانبية والكلية لكل من الأسطوانة الدائرية القائمة والمنشور القائم فى حل مشكلات حياتية.

■ **المفردات**

- المنشور Prism
- الأسطوانة Cylinder
- الحجم Volume
- المساحة الجانبية Lateral area
- المساحة الكلية Surface area

استعد!

محمية وادى دجلة هى محمية طبيعية تقع فى منطقة المعادى شرق القاهرة، وتتميز بتكويناتها الصخرية القديمة من الحجر الجيرى، وتعيش فيها أنواع مختلفة من النباتات والحيوانات البرية مثل الغزلان والثعالب، وتُعد مكانًا متميزًا لمحبى التخييم واستكشاف الطبيعة.

قام أسامة بإنشاء خيمة على شكل منشور ثلاثى قائم مصنوعة من القماش، هل يمكنك حساب المساحة الكلية للقماش المستخدم فى صناعة الخيمة؟

فى هذا الدرس، سوف تتعلم كيفية حساب الحجم والمساحة الكلية لكل من المنشور القائم والأسطوانة الدائرية القائمة، مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات.

فكر وناقش!

يستخدم أحد محال المشروبات أكوابًا أسطوانية الشكل ارتفاعها 10 سم، وطول نصف قطر قاعدتها 3.5 سم.

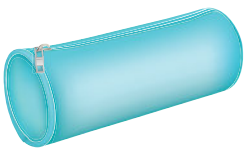
إذا أراد صاحب المحل طباعة شعار على السطح الجانبى لكل كوب، فكم تبلغ المساحة المتاحة للطباعة للكوب الواحد؟ ناقش.

تعلم!

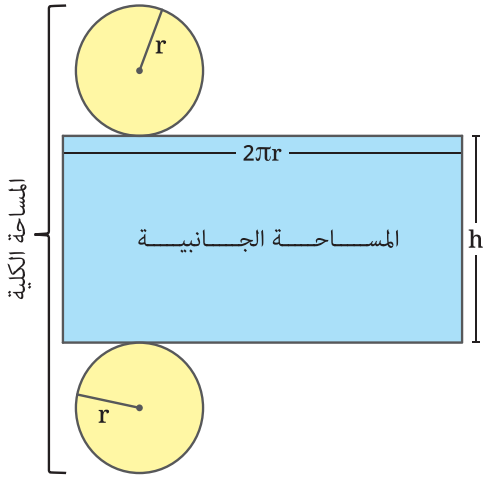
أولاً الأسطوانة الدائرية القائمة

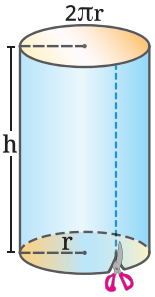
- الأسطوانة الدائرية القائمة هى مجسم ثلاثى الأبعاد، له قاعدتان دائريتان متطابقتان ومتوازيتان، ويكون سطحه الجانبى عموديًا على القاعدتين.
- ارتفاع الأسطوانة الدائرية القائمة هو طول العمود المرسوم بين مركزى قاعدتيها.

أمثلة للأسطوانة الدائرية القائمة :



حجم الأسطوانة الدائرية القائمة ومساحتها الجانبية والكلية





إذا كان طول نصف قطر القاعدة الدائرية $= r$، وارتفاع الأسطوانة $= h$ فإن :

محيط القاعدة $= 2\pi r$ ، مساحة القاعدة $= \pi r^2$ ويكون :

◄ حجم الأسطوانة (V) = مساحة القاعدة × الارتفاع

أى أن : $V = \pi r^2 h$

◄ المساحة الجانبية للأسطوانة $(L.A)$ = محيط القاعدة × الارتفاع

أى أن : $L.A = 2\pi r h$

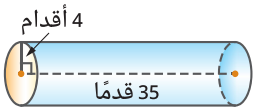
◄ المساحة الكلية للأسطوانة $(S.A)$ = المساحة الجانبية للأسطوانة + ضعف مساحة القاعدة

أى أن : $S.A = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r (h + r)$

مثال 1

فى الشكل المقابل :

أوجد الحجم والمساحة الجانبية والسطحية للأسطوانة مقربًا الناتج لأقرب جزء من عشرة.



$\because r = 4 , h = 35$

$\therefore V = \pi r^2 h = \pi (4)^2 (35) = 560\pi \approx 1759.3$

∴ حجم الأسطوانة ≈ 1759.3 قدم مكعب

$L.A = 2\pi r h = 2\pi (4) (35) = 280\pi \approx 879.6$

∴ المساحة الجانبية ≈ 879.6 قدم مربع

$S.A = 2\pi r (h + r) = 2\pi (4) (35 + 4) = 312\pi \approx 980.2$

∴ المساحة الكلية (السطحية) ≈ 980.2 قدم مربع

■ لاحظ أن

عند فرد الأسطوانة الدائرية القائمة نحصل على سطح مستطيل بالإضافة إلى سطحى دائرتين هما قاعدتا الأسطوانة.

■ تفكير ناقد

ماذا يحدث لحجم الأسطوانة إذا :

1. زاد ارتفاعها إلى الضعف؟
2. زاد طول نصف قطر قاعدتها إلى الضعف؟
3. زاد كل من ارتفاعها وطول نصف قطر قاعدتها إلى الضعف؟

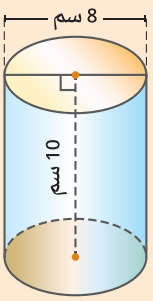
■ لاحظ أن

يطلق على المساحة الكلية أحيانًا المساحة السطحية.

■ تقييم ذاتى (1)

فى الشكل التالى :

أوجد الحجم والمساحة الجانبية والسطحية للأسطوانة بدلالة π



مثال 2

أسطوانة دائرية قائمة حجمها 125.6 سم^3 وارتفاعها 2.5 سم

أوجد مساحتها الكلية ($\pi \approx 3.14$)

∵ حجم الأسطوانة = 125.6 سم^3

∵ $V = \pi r^2 h$ ∴ $125.6 = 3.14\ (r^2)\ (2.5)$

∴ $r^2 = 16$ ∴ $r = \sqrt{16} = 4$

∴ $S.A = 2\pi r\ (h + r) = 2\ (3.14)\ (4)\ (2.5 + 4) = 163.28$

∴ المساحة الكلية للأسطوانة تساوى 163.28 سم^2

ثانيًا المنشور القائم

- المنشـور القائم هو مجسـم ثلاثى الأبعاد له قاعدتان متطابقتـان ومتوازيتان كل منهما مضلع وأحرفه الجانبية عمودية على قاعدتيه.
- جميع الأوجه الجانبية للمنشور القائم مستطيلات.
- ارتفاع المنشور القائم هو طول أى حرف جانبى.

أمثلة للمنشور :

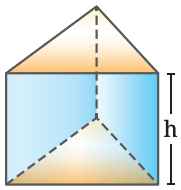
يُسمى المنشور بناءً على شكل قاعدته كما يلى :

القاعدة مثلث
"منشور ثلاثى"

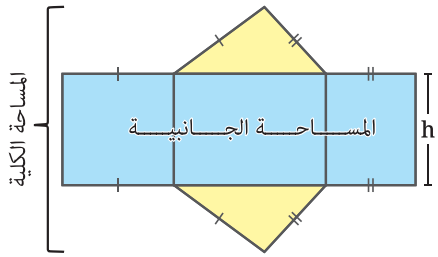
القاعدة شكل رباعى
"منشور رباعى"

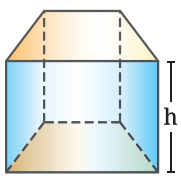
القاعدة شكل خماسى
"منشور خماسى"

حجم المنشور القائم ومساحته الجانبية والكلية

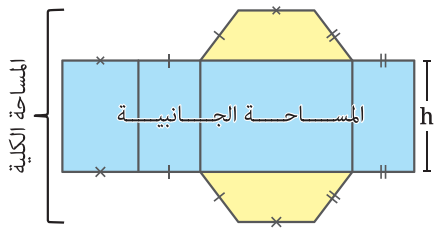


منشور ثلاثى





منشور رباعى



تقييم ذاتى ②

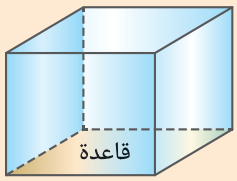
أسطوانة دائرية قائمة مساحتها الجانبية 110 م^2، وطول قطر قاعدتها 10 م.

أوجد حجمها ومساحتها الكلية

(حيث $\pi \approx \frac{22}{7}$)

لاحظ أن

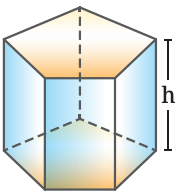
إذا كانت جميع أوجه المنشور القائم عبارة عن مستطيلات كما فى متوازى المستطيلات



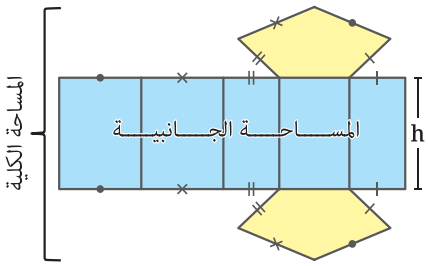
لا بد من تحديد أى من هذه المستطيلات يعتبر قاعدة لهذا المنشور.

معلومات سابقة

- محيط أى شكل = مجموع أطوال أضلاعه
- مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ طول القاعدة × الارتفاع
- مساحة المستطيل = الطول × العرض
- مساحة المربع = طول الضلع × نفسه
- مساحة شبه المنحرف = نصف مجموع طولى القاعدتين المتوازيتين × الارتفاع



منشور خماسى



◄ حجم المنشور القائم (V) = مساحة القاعدة × الارتفاع

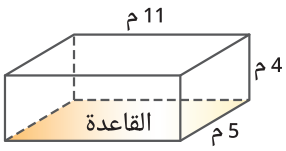
◄ المساحة الجانبية للمنشور القائم (L.A) = محيط القاعدة × الارتفاع

◄ المساحة الكلية للمنشور القائم (S.A) = المساحة الجانبية + ضعف مساحة القاعدة.

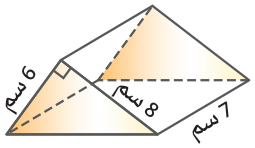
مثال 3

أوجد المساحة الكلية والحجم لكل من المجسمين الآتيين :

1



2

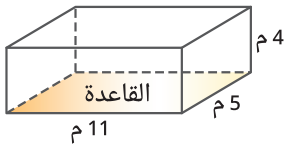


1 • مساحة القاعدة = $5 \times 11 = 55$ م^2

• المساحة الجانبية = $4 \times (5 + 11) 2 = 128$ م^2

• المساحة الكلية = $55 \times 2 + 128 = 238$ م^2

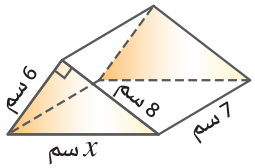
• الحجم = $4 \times 55 = 220$ م^3



2 نلاحظ أن القاعدة هى الوجه المثلث.

من نظرية فيثاغورس تجد أن :

$$x = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$



• مساحة القاعدة = $\frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$ سم^2

• المساحة الجانبية = $7 \times (6 + 8 + 10) = 168$ سم^2

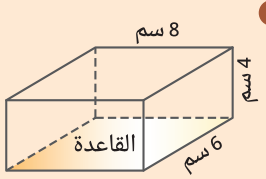
• المساحة الكلية = $24 \times 2 + 168 = 216$ سم^2

• الحجم = $7 \times 24 = 168$ سم^3

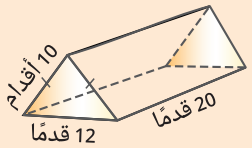
■ تقييم ذاتى ③

أوجد المساحة السطحية والحجم لكل من المجسمين الآتيين :

1



2



مثال 4

منشور رباعى قاعدته على شكل مستطيل بعداه 8 سم ، 4 سم ومساحته الكلية 280 سم^2 ، أوجد حجمه.

∵ مساحة القاعدة = $8 \times 4 = 32$ سم^2 ،

محيط القاعدة = $2\,(4 + 8) = 24$ سم ،

المساحة الكلية = 280 سم^2

∴ $24 \times h + 32 \times 2 = 280$ ∴ $h = 9$

∴ حجم المنشور = $32 \times 9 = 288$ سم^3

■ تقييم ذاتى ④

منشور رباعى قاعدته على شكل مربع طول ضلعه 4 سم وحجمه 192 سم^3
أوجد مساحته السطحية.

مثال 5

سبيكة على شكل منشور ثلاثى قاعدته مثلث قائم الزاوية، طولا ضلعى القائمة 9 سم ، 12 سم ، وارتفاع المنشور 20 سم. صُهر وحُول إلى مكعبات طول حرف كل منها 3 سم.
أوجد عدد المكعبات.

∵ حجم المنشور الثلاثى = مساحة القاعدة × الارتفاع

$= 20 \times 12 \times 9 \times \frac{1}{2}$

$= 1{,}080$ سم^3

∵ حجم المكعب = $3 \times 3 \times 3 = 27$ سم^3

∴ عدد المكعبات = $\frac{1{,}080}{27} = 40$ مكعبًا.

■ تقييم ذاتى ⑤

مكعب من المعدن مجموع أطوال أحرفه 144 سم.
صُهر وصُنع من مادته 16 منشورًا متطابقًا قاعدة كل منها على شكل مربع طول ضلعه 6 سم.
أوجد ارتفاع كل منشور.

تقييم الدرس

أولاً قياس المفاهيم

◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(1) أسطوانة دائرية قائمة طول قطر قاعدتها 10 سم، وارتفاعها 15 سم، ما حجمها؟

(أ) 75π سم^3 (ب) 150π سم^3

(جـ) 375π سم^3 (د) 1500π سم^3

(2) أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها 5 سم، وارتفاعها 15 سم، ما مساحتها السطحية؟

(أ) 75π سم^2 (ب) 200π سم^2

(جـ) 250π سم^2 (د) 375π سم^2

(3) منشور رباعى قائم قاعدته على شكل مربع طول ضلعه 10 سم. إذا كان ارتفاع المنشور 8 سم، فما حجمه؟

(أ) 80 سم^3 (ب) 160 سم^3

(جـ) 320 سم^3 (د) 800 سم^3

(4) إذا كانت المساحة الجانبية لأسطوانة دائرية قائمة تساوى $2\pi r^2$ سم^2 ، فما ارتفاعها؟

(أ) $\frac{1}{2}r$ سم (ب) $\frac{3}{4}r$ سم

(جـ) r سم (د) $2r$ سم

(5) منشور خماسى قائم قاعدته مضلع خماسى منتظم مساحته 10 م^2، ومساحة أحد المستطيلات الجانبية 9 م^2 ، فما المساحة الكلية للمنشور؟

(أ) 19 م^2 (ب) 38 م^2 (جـ) 55 م^2 (د) 65 م^2

ثانيًا تطبيق المفاهيم

◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(6) أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها 6 بوصات وطول نصف قطر قاعدتها يساوى نصف ارتفاعها، فما حجمها بالبوصة المكعبة؟

(أ) 18π (ب) 36π

(جـ) 54π (د) 108π

(7) أسطوانة دائرية قائمة حجمها 320π سم^3 وارتفاعها 20 سم، فما طول قطر قاعدتها؟

(أ) 2 سم (ب) 4 سم

(جـ) 8 سم (د) 16 سم

(8) إذا كانت قاعدة منشور قائم عبارة عن مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه 5 سم، وكان ارتفاع المنشور يساوى 4 سم، فما المساحة الجانبية للمنشور؟

(أ) 15سم^2 (ب) 30 سم^2

(جـ) 60 سم^2 (د) 240 سم^2

(9) منشور خماسى قائم ارتفاعه 8 سم ، وحجمه 168 سم^3 ، فما مساحة قاعدته؟

(أ) 1344 سم^2 (ب) 176 سم^2

(جـ) 21 سم^2 (د) 18 سم^2

(10) أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها يساوى ارتفاعها، إذا كان حجم الأسطوانة 125π سم^3 ، فما مساحتها الجانبية؟

(أ) 150π سم^2 (ب) 125π سم^2

(جـ) 100πسم^2 (د) 50π سم^2

(11) **فى الشكل المقابل :**

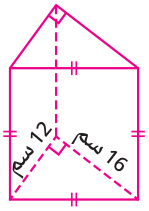
ما حجم المنشور الثلاثى القائم؟

(أ) 1960 سم^3

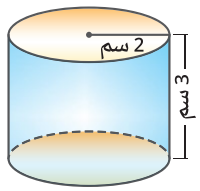
(ب) 1920 سم^3

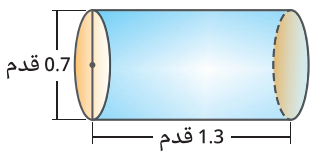
(جـ) 1260 سم^3

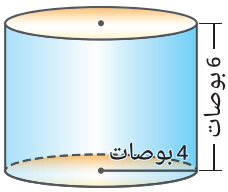
(د) 960 سم^3



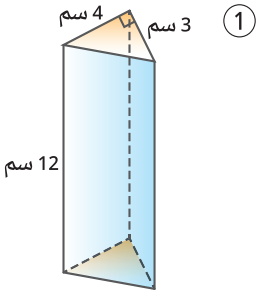
(12) أوجد الحجم والمساحة السطحية لكل من المجسمات التالية ($\pi \approx 3.14$) :

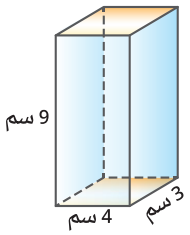
① 

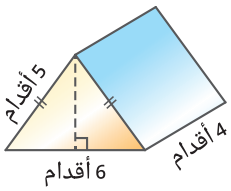
② 

③ 

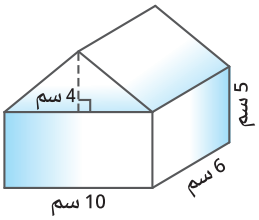
(13) أوجد الحجم والمساحة السطحية لكل من المجسمات التالية :

① 

② 

③ 

(14) أوجد حجم المنشور الخماسى المقابل :



(15) أسطوانة دائرية قائمة حجمها 45π سم^3 وارتفاعها 5 سم وطول نصف قطر قاعدتها يساوى طول حرف مكعب أوجد المساحة الكلية للمكعب.

(16) قاعدة منشور ثلاثى هى مثلث قائم الزاوية، طول وتره 17 مترًا، وطول أحد أضلاعه 8 أمتار. إذا كان ارتفاع المنشور 12 مترًا، فما حجمه؟

(17) أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها 12 سم وارتفاعها 22 سم، فإذا زاد طول نصف قطر قاعدتها بنسبة 25% وظل ارتفاعها ثابتًا، احسب حجم الأسطوانة بعد الزيادة.

(18) منشور خماسى قائم من المعدن مساحة قاعدته 105 سم^2 وارتفاعه 11 سم. صُهر وحُول إلى أسطوانات دائرية قائمة متطابقة ارتفاع كل منها 2 سم وطول نصف قطر قاعدتها 3.5 سم. أوجد عدد الأسطوانات ($\pi \approx \frac{22}{7}$).

ثالثًا التحليل وتكامل المواد

(19) الشكل المقابل يمثل قطعة من الورق على شكل مستطيل ABCD طويت على شكل أسطوانة دائرية قائمة بحيث ينطبق $\overline{AB}$ على $\overline{DC}$ أوجد حجم الأسطوانة الناتجة ($\pi \approx \frac{22}{7}$)

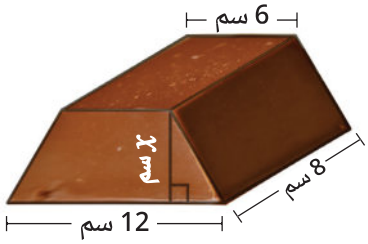
(20) خزان شاحنة أسطوانى الشكل
طول نصف قطر قاعدته 7 أقدام.
أوجد حجم الخزان بالقدم المكعب.

(21) صندوق هدايا على شكل منشور ثلاثى
قاعدته مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه 20 سم
وارتفاع المنشور 10 سم. احسب كلًا من المساحة
الجانبية وحجم الصندوق.

(22) خزان ماء أسطوانى، طول نصف قطر قاعدته 0.5 متر وارتفاعه 1.2 متر.
إذا أراد مجدى طلاء سطحه الجانبى بطلاء سعر المتر المربع منه
210 جنيهات، فكم تكلفة الطلاء؟

الماء أساس الحياة. ترشيد استهلاك الماء
دليل على وعى وتحضُّر الإنسان.

(23) قطعة من الشيكولاتة على شكل منشور رباعى
حجمه 360 سم^3. أوجد قيمة x



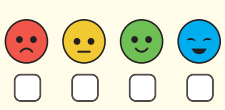
تفكير إبداعى

(24) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :
إذا كان ارتفاع أسطوانة دائرية قائمة يساوى أربعة أمثال محيط قاعدة الأسطوانة (C)
فما حجم الأسطوانة بدلالة (C) ؟

(أ) $\frac{C^3}{\pi}$ (ب) $\frac{2C^3}{\pi}$ (جـ) $\frac{2C^2}{\pi^2}$ (د) $4\pi C^3$

قيّم فهمك!

ما مدى فهمك للأسطوانة الدائرية
القائمة والمنشور القائم؟
ضع علامة فى المربع المناسب

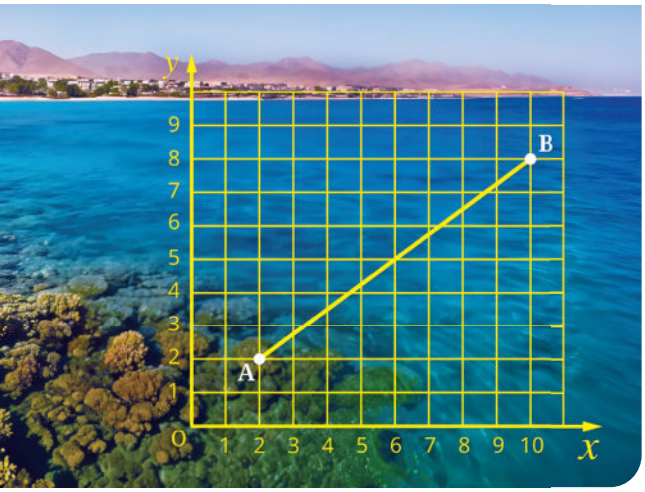


الدرس

6 - 3

البُعد بين نقطتين فى المستوى الإحداثى

(The Distance between Two Points in the Coordinate Plane)



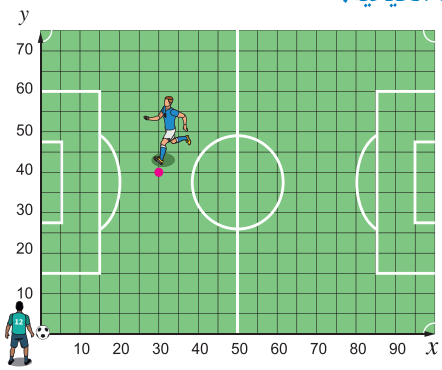
استعد !

مدينة شرم الشيخ من أجمل المدن السياحية فى مصر، وتشتهر بشواطئها الرائعة وشعابها المرجانية الملونة التى تجذب الغواصين من جميع أنحاء العالم.

يعمل فريق من علماء البيئة البحرية على دراسة المسافات بين مواقع الغوص المختلفة فى البحر الأحمر لتحديد مناطق انتشار الشعاب المرجانية.

فهل يمكنك مساعدتهم فى تحديد المسافة بين الموقعين A , B فى الصورة ؟

فى هذا الدرس، سوف تتعرف على الصيغة الرياضية لحساب البُعد بين نقطتين فى المستوى الإحداثى؛ مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.



فكر وناقش !

فى إحدى مباريات كرة القدم يريد مجدى تمرير الكرة من ركن الملعب عند النقطة (0 , 0) إلى صديقه أسامة الواقف عند النقطة (40 , 30) هل يمكنك معرفة المسافة بين مجدى وأسامة؟ ناقش.

تعلم !

البُعد بين نقطتين فى المستوى الإحداثى

المسافة «d» بين النقطتين $A(x_1 , y_1)$, $B(x_2 , y_2)$ تُعطى بالصيغة الرياضية :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

يمكنك استنتاج القانون السابق كما يلى :

بفرض أن $A(x_1 , y_1)$ ، $B(x_2 , y_2)$

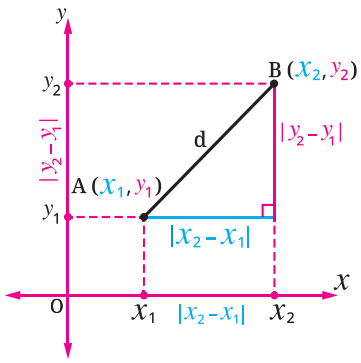
والمسافة بينهما d فإن :

$$b = |x_2 - x_1| \quad , \quad a = |y_2 - y_1|$$

ومن نظرية فيثاغورس تجد أن :

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\therefore d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



نواتج التعلم

- تعرف الصيغة الرياضية لحساب البُعد بين نقطتين فى المستوى الإحداثى.
- تستخدم الصيغة الرياضية لحساب البُعد بين نقطتين فى حل المشكلات.

المفردات

- البعد بين نقطتين
  The distance between two points
- المستوى الإحداثى
  The coordinate plane

لاحظ أن

مربع أى كمية يكون غير سالب دائمًا؛ لذلك عند تربيع المقدار ليس من الضرورى أخذ القيمة المطلقة.

ناقش

يمكن كتابة القانون بالصيغة :

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

فسر ذلك.

مثال 1

1 أوجد المسافة بين النقطتين :
A (6 , – 3) , B (– 2 , 3)

$\because d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ①

$\therefore d = \sqrt{(-2-6)^2 + (3-(-3))^2}$

$= \sqrt{(-8)^2 + (6)^2}$

$= \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$

∴ المسافة بين A , B هى 10 وحدات طول.

2 إذا كانت المسافة بين النقطتين
A (4 , k) , B (1 , 7) تساوى 5 وحدات طول فأوجد قيم k الممكنة.

$\because d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ②

$\therefore \sqrt{(1-4)^2 + (7-k)^2} = 5$

$\therefore (-3)^2 + (7-k)^2 = (5)^2$

$\therefore 9 + (7-k)^2 = 25$

$\therefore (7-k)^2 = 25 - 9 = 16$

$\therefore 7 - k = \pm\sqrt{16}$

$\therefore 7 - k = 4$ أ، $7 - k = -4$

$\therefore k = 7 - 4$ | $k = 7 + 4$

$\therefore$ $k = 3$ | $k = 11$

مثال 2

أوجد محيط Δ ABC الذى فيه A (– 1 , 2) , B (13 , 2) , C (4 , 14)

$\because d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\therefore AB = \sqrt{(13+1)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{196} = 14$

$AC = \sqrt{(4+1)^2 + (14-2)^2} = \sqrt{169} = 13$

$BC = \sqrt{(4-13)^2 + (14-2)^2} = \sqrt{225} = 15$

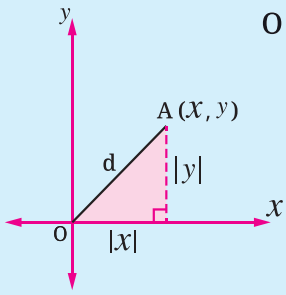
∴ محيط Δ ABC = 14 + 13 + 15 = 42 وحدة طول.

البُعد بين نقطة ونقطة الأصل

المسافة «d» بين النقطة A (x , y) ونقطة الأصل O (0 , 0)

تُعطى بالصيغة الرياضية :

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$



فمثلًا :

إذا كانت A (– 3 , 4) ، d بُعد النقطة A عن نقطة الأصل، فإن :

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

أى أن A (– 3 , 4) تبعد عن نقطة الأصل مسافة 5 وحدات طول.

تقييم ذاتى ①

1 أوجد طول $\overline{AB}$ إذا كانت
A (5 , – 7) , B (2 , – 3)

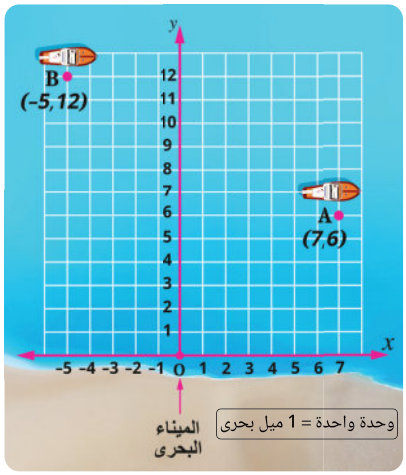
2 إذا كان البُعد بين النقطتين
A (– 1 , 3) , B (k , 5)
يساوى $\sqrt{5}$ 2 وحدة طول فأوجد قيم k الممكنة.

تقييم ذاتى ②

أوجد محيط Δ ABC الذى فيه
A (5 , 6) , B (29 , 13) , C (5 , 31)

مثال 3

يُوضح الشكل المقابل موضعىّ سفينتين A ، B بالنسبة لميناء بحرى O،
أوجد بُعد كل سفينة عن الميناء البحرى.
أى من السفينتين أقرب إلى الميناء؟



$\because d = \sqrt{x^2 + y^2}$

بالنسبة للسفينة فى الموضع A :

$d = \sqrt{7^2 + 6^2} = \sqrt{49 + 36} = \sqrt{85} \approx 9.2$

∴ السفينة A تبعد عن الميناء مسافة 9.2 ميل بحرى تقريبًا.

بالنسبة للسفينة فى الموضع B :

$d = \sqrt{(-5)^2 + (12)^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$

∴ السفينة B تبعد عن الميناء مسافة 13 ميلًا بحريًا.

∴ السفينة A أقرب للميناء من السفينة B

ملاحظة :

لأى ثلاث نقط A , B , C ، إذا كانت $\overline{AC}$ أكبر فى الطول من كل من $\overline{AB}$ ، $\overline{BC}$ فإن :

1. النقط A , B , C تقع على استقامة واحدة، إذا كان $AB + BC = AC$.
2. النقط A , B , C هى رؤوس مثلث، إذا كان $AB + BC > AC$.

مثال 4

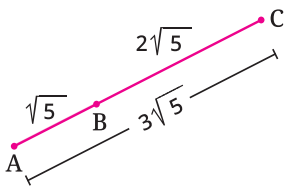
باستخدام قانون البُعد بين نقطتين أثبت أن النقط A (– 2 , 3) , B (0 , 4) , C (4 , 6) تقع على استقامة واحدة.

$\because d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\therefore AB = \sqrt{(0+2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

$AC = \sqrt{(4+2)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{36+9} = 3\sqrt{5}$

$BC = \sqrt{(4-0)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$

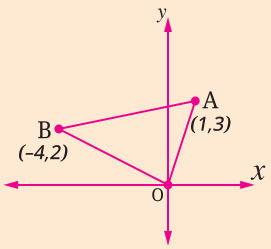


$\because AC = AB + BC$

∴ النقط A , B , C تقع على استقامة واحدة ، $B \in \overline{AC}$

تقييم ذاتى ③

فى الشكل التالى :



احسب محيط Δ OAB مقربًا الناتج لأقرب جزء من عشرة من وحدات الطول.

تقييم ذاتى ④

باستخدام قانون البُعد بين نقطتين، أى من مجموعتى النقط التالية تقع على استقامة واحدة :

1. A (4 , 7)
   B (– 5 , 19)
   C (7 , 3)
2. A (5 , –5)
   B (– 1 , 7)
   C (15 , 15)

مثال 5

أثبت أن النقط A (1 , – 2) , B (2 , 2) , C (– 1 , 2) , D (– 2 , – 2) هى رؤوس متوازى الأضلاع ABCD.

$\because d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\therefore AB = \sqrt{(1-2)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{17}$

$BC = \sqrt{(2+1)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{9} = 3$

$CD = \sqrt{(-2+1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{17}$

$AD = \sqrt{(-2-1)^2 + (-2+2)^2} = \sqrt{9} = 3$

$\because AB = CD \quad , \quad BC = AD$

أى أن كل ضلعين متقابلين متساويان فى الطول.

$\therefore$ الشكل ABCD متوازى أضلاع.

■ **تقييم ذاتى (5)**

أثبت أن النقط
B (4 , 1) , A (3 , – 2) ,
D (– 3 , 0) , C (– 2 , 3)
هى رؤوس مستطيل.

مثال 6

إذا كانت النقطتان X (5 , k) , Y (– 4 , 6) تقعان على دائرة واحدة مركزها M (1 , 2) فأوجد قيم k الممكنة، واحسب مساحة الدائرة M.

$\because d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\therefore MY = \sqrt{(-4-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$

$\therefore$ طول نصف قطر الدائرة M المارة بالنقطتين X , Y يساوى $\sqrt{41}$ وحدة طول.

$\because MX = MY = r$ (طولا نصفى قطرين فى الدائرة M)

$\therefore \sqrt{(5-1)^2 + (k-2)^2} = \sqrt{41}$

$\therefore 16 + (k-2)^2 = 41$ $\quad\quad$ $\therefore (k-2)^2 = 25$

$\therefore k - 2 = \pm\sqrt{25}$

$\therefore k - 2 = 5$ أ، $k - 2 = -5$

$\therefore k = 5 + 2$ $\quad\quad$ $k = -5 + 2$

$\therefore$ $k = 7$ $\quad\quad$ $k = -3$

$\because A = \pi r^2$ $\quad\quad$ $\therefore A = \pi \times (\sqrt{41})^2 = 41\,\pi$

أى أن مساحة الدائرة M تساوى 41 π وحدة مربعة.

■ **تقييم ذاتى (6)**

إذا كانت النقطة A (15 , – 9) تقع على بُعدين متساويين من النقطتين B(–5,k), C(8,15) فأوجد قيم k الممكنة.

تقييم الدرس

أولاً قياس المفاهيم

◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(1) ما بُعد النقطة A (– 3 , 4) عن نقطة الأصل؟

(أ) 3 وحدات طول (ب) 4 وحدات طول
(جـ) 5 وحدات طول (د) 7 وحدات طول

(2) إذا كانت : A (0 , 4) ، B (– 3 , 0) فما طول $\overline{AB}$؟

(أ) 1 وحدة طول (ب) 3 وحدات طول
(جـ) 5 وحدات طول (د) 7 وحدات طول

◂ اكتشف الخطأ :

(3) قامت كل من أمل وسمر بحساب المسافة بين النقطتين A (– 5 , 3) , B (4 , 15) ، فكانت إجاباتهما كما يلى:

حل أمل :

$$AB = \sqrt{(4+5)^2 + (15-3)^2}$$
$$AB = (4+5) + (15-3)$$
$$AB = 9 + 12 = 21$$

حل سمر :

$$AB = \sqrt{(-5-4)^2 + (3-15)^2}$$
$$AB = \sqrt{(-9)^2 + (-12)^2}$$
$$AB = \sqrt{81+144} = \sqrt{225}$$
$$AB = 15$$

أى من الحلين صحيح؟ ولماذا؟

ثانيًا تطبيق المفاهيم

(4) أوجد طول $\overline{AB}$ فى كل مما يأتى :

① A (– 1 , 2) , B (3 , 5) ② A (2 , 1) , B (– 2 , 3) ③ A (8 , – 4) , B (– 7 , 4)

◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

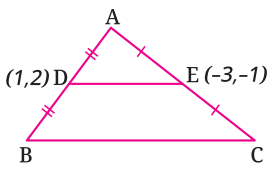
(5) إذا كانت المسافة بين النقطتين A (X , 0) , B (3 , 2) تساوى $2\sqrt{5}$ وحدة طول، فما مجموعة قيم X الممكنة ؟

(أ) {– 1 , 7} (ب) {7} (جـ) {– 4 , 4} (د) {– 4 , 7}

(6) ما مساحة الدائرة التى مركزها النقطة A (– 3 , 5) ، وتمر بالنقطة B (9 , – 4) ؟

(أ) 15 π وحدة مربعة (ب) 225 π وحدة مربعة (جـ) 13 π وحدة مربعة (د) 144 π وحدة مربعة

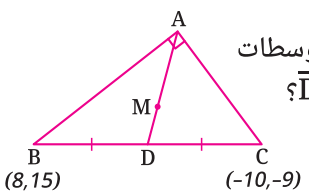
(7) فى الشكل المقابل :



ما طول $\overline{BC}$ ؟

(أ) 12 وحدة طول
(ب) 10 وحدات طول
(جـ) 8 وحدات طول
(د) 5 وحدات طول

(8) فى الشكل المقابل :



إذا كانت M نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC ، فما طول $\overline{DM}$؟

(أ) 5 وحدات طول
(ب) 6 وحدات طول
(جـ) 7 وحدات طول
(د) 8 وحدات طول

◂ أجب عن الأسئلة الآتية :

(9) أثبت أن النقط A (– 3 , 7) , B (3 , – 2) , C (– 1 , 4) على استقامة واحدة.

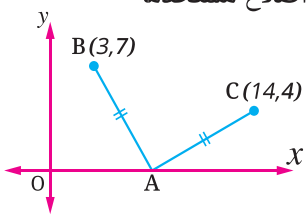
(10) أثبت أن النقط A (7 , – 4) , B (– 1 , 2) , C (5 , – 6) هى رؤوس مثلث، وحدد نوعه بالنسبة لزواياه.

(11) أثبت أن النقط A (3 , 2) , B (8 , 7) , C (1 , 4) رؤوس مثلث قائم الزاوية واحسب مساحته.

(12) أثبت أن النقط A (2 , 3) , B (1 , – 1) , C (– 4 , – 3) , D (– 3 , 1) رؤوس متوازى أضلاع مستخدمًا قانون البعد بين نقطتين.

(13) فى الشكل المقابل :

أوجد إحداثيى النقطة A



ثالثًا التحليل وتكامل المواد

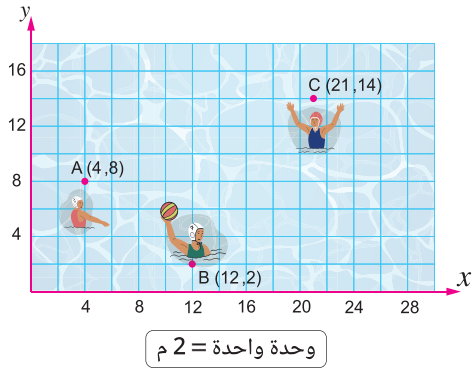
(14) الأمان البحرى :

تلقى المنارة الضوء فى مسار دائرى ليصل الضوء فى أقصى مداه إلى الرصيف البحرى، فهل يصل الضوء إلى السفينة فى الموقع الموضح؟

(15) رياضة :

يوضح الرسم البيانى مواقع ثلاثة لاعبين خلال جزء من مباراة كرة ماء. يرمى اللاعب A الكرة إلى اللاعب B الذى يرميها بدوره إلى اللاعب C ، ثم يعيدها اللاعب C إلى اللاعب A.

أوجد المسافات بالمتر التى قطعتها الكرة بفرض أنها تتحرك فى خط مستقيم.

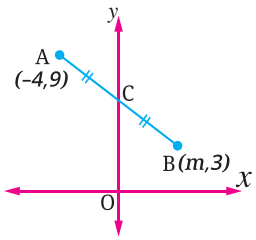


تفكير إبداعى

(16) فى الشكل المقابل :

نظام إحداثى متعامد، C منتصف $\overline{AB}$

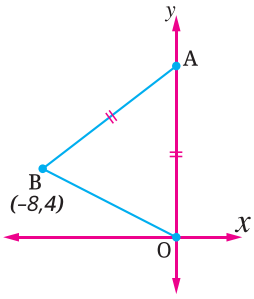
أوجد القيمة العددية للمقدار : AB + OC



(17) فى الشكل المقابل :

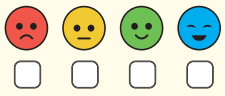
احسب مساحة

Δ AOB



قيّم فهمك!

ما مدى فهمك للبعد بين نقطتين فى المستوى الإحداثى ؟
ضع علامة فى المربع المناسب



الدرس

3 - 7

ميل الخط المستقيم
(Slope of a Straight Line)

■ **نواتج التعلم**

- تعرف مفهوم ميل الخط المستقيم.
- توجد ميل الخط المستقيم فى النظام الإحداثى.
- تستخدم ميل الخط المستقيم فى حل بعض التطبيقات الحياتية.

استعد!

يُعدّ المعيار العالمى المستخدم لقياس ميل الممرات الخاصة بالكراسى المتحركة هو نسبة 12 : 1 بحد أقصى، ومعنى ذلك أنه لكل 1 متر ارتفاع نحتاج إلى مسافة أفقية 12 مترًا، فإذا تم إنشاء الممر فى الصورة طبقًا لهذا المعيار العالمى، فما ارتفاع نهاية الممر ؟

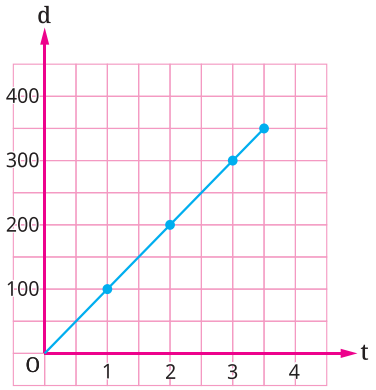
فى هذا الدرس، سوف تتعرف على ميل الخط المستقيم وتطبيقاته؛ لحل مثل هذه المشكلات الحياتية.

■ **المفردات**

- ميل Slope
- التغير فى x The change of x
- التغير فى y The change of y
- سرعة Velocity

فكر وناقش!

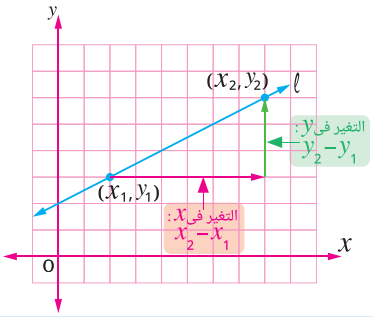
يمثل الشكل البيانى المقابل العلاقة بين المسافة (d) بالكيلو متر والزمن (t) بالساعة لرحلة سامح بسيارته على إحدى الطرق السريعة التى تسمح بسرعة 120 كم/ساعة بحد أقصى، فهل تجاوز سامح السرعة المقررة أثناء رحلته؟ ناقش.



تعلم!

ميل الخط المستقيم

ميل الخط المستقيم هو مقياس لشدة انحدار الخط، وهو النسبة بين التغير الرأسى (التغير فى y) والتغير الأفقى (التغير فى x) بين أى نقطتين عليه فى المستوى الإحداثى، ويُرمز له عادةً بالحرف "m".



ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين $(x_1 , y_1) ، (x_2 , y_2)$ فى النظام الإحداثى يعطى بالعلاقة :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

■ **ناقش**

هل يمكن استخدام الصيغة :

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

لإيجاد ميل المستقيم (m) المار بالنقطتين $(x_1 , y_1) ، (x_2 , y_2)$؟

مثال 1

فى كل مما يأتى أوجد ميل $\overleftrightarrow{AB}$:

1) A (1 , 2) , B (4 , 5)

2) A (– 1 , 2) , B (3 , 1)

3) A (– 2 , 5) , B (1 , 5)

4) A (– 2 , 1) , B (– 2 , 5)

✓

1) باعتبار أن : (1 , 2) هى (x_1 , y_1) ، (4 , 5) هى (x_2 , y_2)

$$\therefore m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-2}{4-1} = \frac{3}{3} = 1$$

∴ ميل $\overleftrightarrow{AB}$ = 1

2) باعتبار أن : (– 1 , 2) هى (x_1 , y_1) ، (3 , 1) هى (x_2 , y_2)

$$\therefore m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-2}{3-(-1)} = -\frac{1}{4}$$

∴ ميل $\overleftrightarrow{AB}$ = $-\frac{1}{4}$

3) باعتبار أن : (– 2 , 5) هى (x_1 , y_1) ، (1 , 5) هى (x_2 , y_2)

$$\therefore m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-5}{1-(-2)} = \frac{0}{3} = 0$$

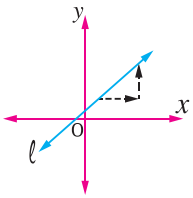
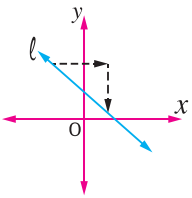
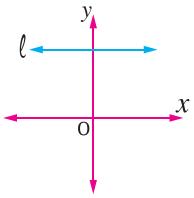
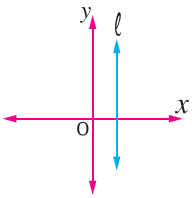
∴ ميل $\overleftrightarrow{AB}$ = صفر

4) باعتبار أن : (– 2 , 1) هى (x_1 , y_1) ، (– 2 , 5) هى (x_2 , y_2)

$$\therefore m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-1}{-2-(-2)} = \frac{4}{0}$$

∴ ميل $\overleftrightarrow{AB}$ غير معرف

ملاحظة :

الميل الموجب	الميل السالب	الميل يساوى الصفر	الميل غير معرف
			
قيمة y تزداد بزيادة x لكل نقطة تتحرك على المستقيم.	قيمة y تتناقص بزيادة x لكل نقطة تتحرك على المستقيم.	قيمة y ثابتة لكل نقطة على المستقيم.	قيمة x ثابتة لكل نقطة على المستقيم.

تقييم ذاتى (1)

فى كل مما يأتى أوجد ميل $\overleftrightarrow{AB}$:

1) A (5 , 4) , B (3 , 1)

2) A (3 , – 4) , B (2 , –1)

3) A (1 , 2) , B (7 , 2)

4) A (– 5 , 3) , B (– 5 , 4)

تذكر أن

الكسـر الذى مقامه 0 يكون غير معرف.

مثال 2

أوجد قيمة k فى كل مما يأتى إذا كان :

1 ميل المستقيم المار بالنقطتين (7 , k) , (−1 , 5) يساوى $\frac{3}{2}$

2 المستقيم المار بالنقطتين (3 , 7) , (5 , k) يوازى محور x

1

$\because m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$\therefore \frac{3}{2} = \frac{k-5}{7-(-1)}$

$\therefore \frac{3}{2} = \frac{k-5}{8}$

$\therefore 2k - 10 = 24$

$\therefore 2k = 34$ $\quad \therefore k = 17$

2

$\because$ المستقيم // محور x

$\therefore$ ميل المستقيم $= 0$

$\because m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$\therefore \frac{7-k}{3-5} = 0$ $\quad \therefore \frac{7-k}{-2} = 0$

$\therefore 7 - k = 0$ $\quad \therefore k = 7$

تقييم ذاتى 2

1 إذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين (7 , a) , (6 , 1) يساوى 6 − فما قيمة a ؟

2 إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (k , 7) , (−3 , 2) يوازى محور y فأوجد قيمة k

مثال 3

أثبت أن النقط A (0 , 1) , B (3 , 3) , C (9 , 7) تقع على استقامة واحدة.

بفرض أن : ميل $\overleftrightarrow{AB} = m_1$ ، ميل $\overleftrightarrow{BC} = m_2$

$m_2 = \frac{7-3}{9-3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ، $\therefore m_1 = \frac{3-1}{3-0} = \frac{2}{3}$

$\because m_1 = m_2$

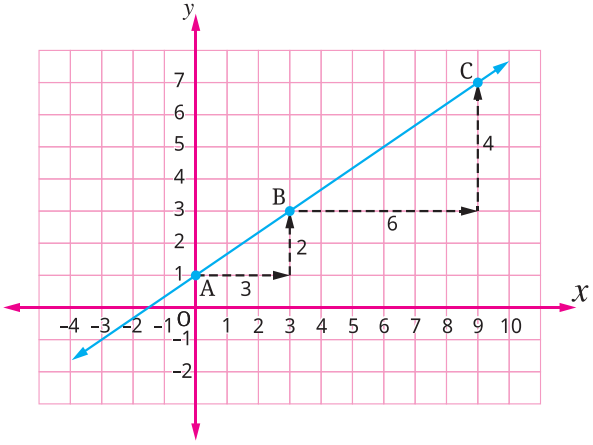
$\therefore$ النقط A , B , C تقع على استقامة واحدة

التحقق من صحة الحل :

عند التمثيل البيانى للنقط A , B , C تجد أن :

نسبة التغير الرأسى (التغير فى y) إلى التغير الأفقى (التغير فى x) ثابتة بين كل نقطتين

أى أن الميل ثابت، لذلك النقط تقع على نفس الخط المستقيم.



تقييم ذاتى 3

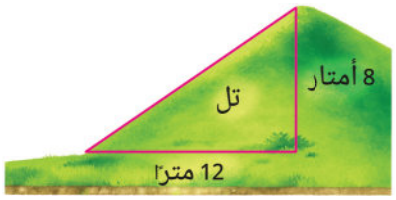
أوجد قيمة k التى تجعل النقط A (−2 , −5) , B (1 , 1) , C (4 , k) تقع على استقامة واحدة.

تطبيقات حياتية على ميل الخط المستقيم

ميل الخط المستقيم هو نسبة بين التغير الرأسى والتغير الأفقى لأى نقطتين عليه وهى نسبة ثابتة تعبر عن معدل تغير y بالنسبة إلى x لذلك يستخدم ميل الخط المستقيم فى العديد من التطبيقات التى نحتاج فيها حساب المعدل مثل انحدار الطرق والسرعة ومعدلات النمو واستهلاك الوقود.

مثال 4

فى الشكلين التاليين :



أيهما أكثر صعوبة فى الصعود : التل أم المنحدر؟

باعتبار أن : m_1 هو ميل التل، m_2 هو ميل المنحدر

$$\because m_1 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \quad , \quad m_2 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

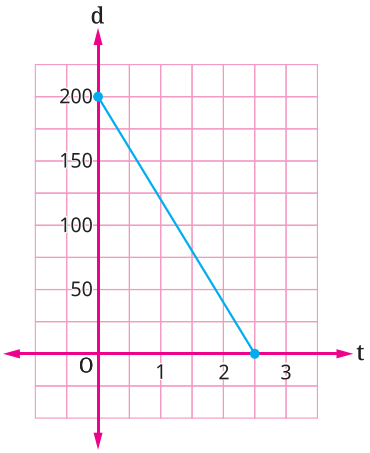
$$\therefore m_2 > m_1$$

∴ المنحدر أكثر صعوبة فى الصعود من التل.

مثال 5

يعبر الشكل البيانى المقابل عن العلاقة بين المسافة (d) بالكيلو متر والزمن (t) بالساعة لرحلة العودة لسيارة مجدى من القاهرة إلى الإسكندرية.

أوجد مقدار السرعة المنتظمة للسيارة.



باعتبار أن : $(0 , 200)$ هى (t_1 , d_1) ، $(2.5 , 0)$ هى (t_2 , d_2)

ميل الخط المستقيم يعبر عن السرعة المنتظمة (V) للسيارة.

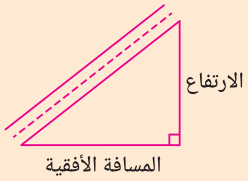
$$\therefore V = \frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1} = \frac{0 - 200}{2.5 - 0} = -80$$

∴ مقدار سرعة السيارة = 80 كيلو متر/ساعة

والإشارة السالبة تدل على أن الرحلة فى اتجاه العودة.

■ انحدار الطرق

يستخدم ميل الخط المستقيم كمقياس لشدة انحدار الطرق.



$$\text{ميل الطريق} = \frac{\text{الارتفاع}}{\text{المسافة الأفقية}}$$

■ تقييم ذاتى (4)

طريق يرتفع بمعدل 2 متر لكل 25 مترًا أفقيًا فما هو ارتفاع نهاية الطريق إذا كان طوله 300 متر؟

■ تقييم ذاتى (5)

يعبر الجدول التالى عن العلاقة بين كمية الوقود المستهلكة أثناء حركة سيارة والمسافة المقطوعة. احسب معدل استهلاك الوقود.

المسافة المقطوعة بالكيلو متر	100	200	300
كمية الوقود المستهلكة باللتر	10	20	30

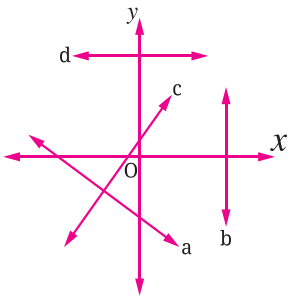
تقييم الدرس

أولاً قياس المفاهيم

(1) فى الشكل المقابل :

صنِّف ميل كل مستقيم من المستقيمات a ، b ، c ، d

من حيث كونه (موجب - سالب - صفر - غير معرف)



◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(2) ما ميل المستقيم المار بالنقطتين A (– 2 , 3) , B (5 , 7)؟

(أ) $\frac{7}{4}$ (ب) $\frac{4}{7}$ (جـ) $\frac{4}{3}$ (د) $\frac{2}{3}$

(3) ما ميل المستقيم المار بالنقطتين A (3 , 2) , B (4 , 2)؟

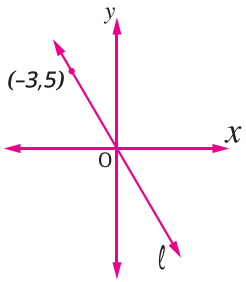
(أ) 2 (ب) 1 (جـ) 0 (د) غير معرف

(4) إذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين (a , 3) ، (2 , b) يساوى $\frac{1}{2}$ ، فما قيمة a؟

(أ) 4 – 2 b (ب) 8 – 2 b (جـ) 2 b – 4 (د) 2 b – 8

(5) فى الشكل المقابل :

ما ميل المستقيم ℓ؟



(أ) $\frac{5}{3}$ (ب) $\frac{3}{5}$

(جـ) $-\frac{3}{5}$ (د) $-\frac{5}{3}$

ثانيًا تطبيق المفاهيم

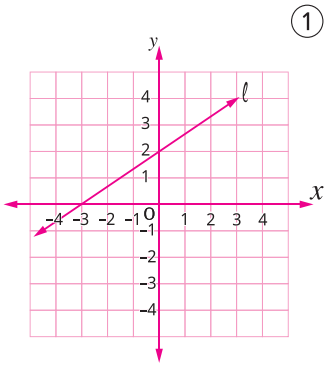
(6) أوجد ميل المستقيم المار بكل نقطتين مما يأتى :

① (6 , 3) , (2 , 4) ② (– 3 , 4) , (1 , – 6) ③ (6 , 0) , (– 6 , 0)

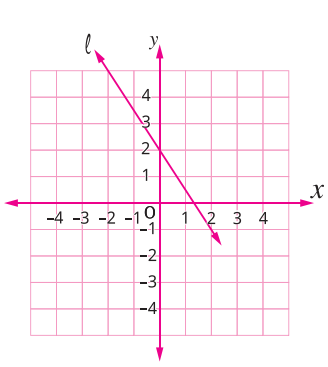
④ (2 , 0) , (2 , 6) ⑤ (– 5 , – 3) , (6 , 3) ⑥ (– 2 , 2) , (4 , – 4)

(7) أوجد ميل المستقيم ℓ فى كل مما يأتى :

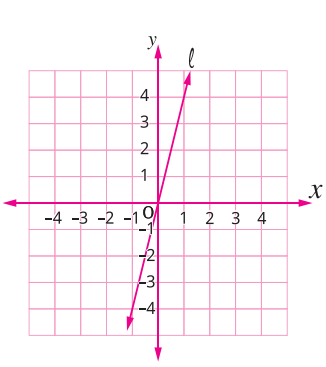
①



②



③



⑧ أوجد قيمة k فى كل مما يأتى :

① $A(-2,5), B(3,k)$ ، $m=2$

② $A(2,3), B(k,-6)$ ، $m=-\frac{3}{2}$

③ $A(3,-2), B(-2,k)$ ، $m=0$

⑨ إذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين $A(a+2,3), B(-a,-9)$ يساوى 2 فأوجد قيمة a

⑩ فى كل مما يأتى، بيِّن هل النقاط الثلاث المعطاة على استقامة واحدة أم لا.

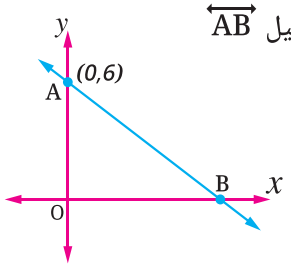
① $A(2,1), B(-4,4), C(6,-1)$

② $D(5,-5), E(7,-11), F(-7,-1)$

⑪ فى الشكل التالى :

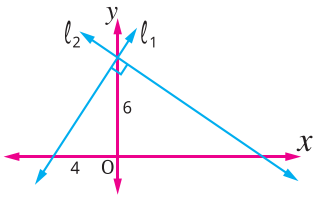
إذا كانت مساحة المثلث OAB = 24 وحدة مربعة

أوجد ميل $\overleftrightarrow{AB}$



⑫ فى الشكل التالى :

أوجد ميل كل من المستقيمين ℓ_1 , ℓ_2.



ثالثًا التحليل وتكامل المواد

⑬ تسلق مرتفعات : يتسلق عمر مرتفعًا صخريًا يرتفع 12 مترًا لكل 6 أمتار أفقية.
ويتسلق خالد مرتفعًا آخر يرتفع 25 مترًا لكل 12 مترًا أفقيًا. أى المرتفعين أكثر انحداراً ؟

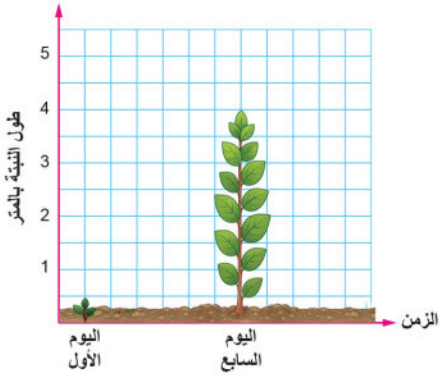
⑭ نباتات :

أُجرى قياس أولى لطول إحدى النبتات المتسلقة فكان 0.5 متر، وبعد سبعة أيام أصبح طول النبتة 4 أمتار.

① ارسم خطًا بيانيًا يمثل العلاقة بين طول النبتة والزمن.

② ما ميل الخط فى الرسم ؟ وماذا يمثل هذا الميل ؟

③ بافتراض أن معدل نمو النبتة يستمر بنفس الوتيرة فكم سيكون طول النبتة بعد 15 يومًا ؟

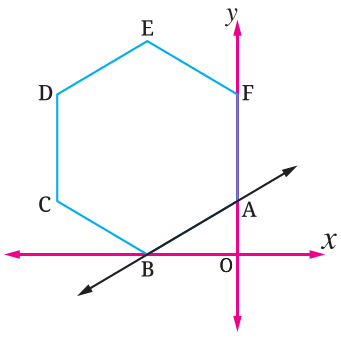


تفكير إبداعى

⑮ فى الشكل المقابل :

ABCDEF شكل سداسى منتظم

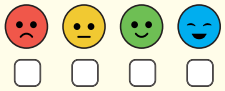
أوجد ميل $\overleftrightarrow{AB}$



قيّم فهمك!

ما مدى فهمك لميل الخط المستقيم ؟

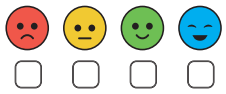
ضع علامة فى المربع المناسب



تقييم الوحدة الثالثة

قيم فهمك!

ما مدى فهمك للوحدة الثالثة ؟
ضع علامة فى المربع المناسب



◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(1) إذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين $(6,-7)$, $(-4,k)$ يساوى $-\frac{1}{3}$ فما قيمة k ؟

(أ) 23 (ب) -23

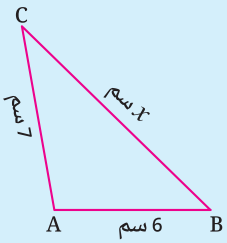
(جـ) $\frac{11}{3}$ (د) $-\frac{11}{3}$

(2) ما مساحة الدائرة التى محيطها يساوى 14π سم ؟

(أ) 7π سم^2 (ب) 14π سم^2

(جـ) 49π سم^2 (د) 196π سم^2

(3) فى الشكل المقابل :



ما قيم x الممكنة التى تجعل $m(\angle A) > m(\angle B)$ ؟

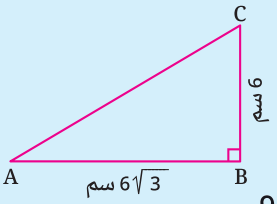
(أ) $6 < x < 7$

(ب) $1 < x < 13$

(جـ) $7 < x < 13$

(د) $x > 7$

(4) فى الشكل المقابل :



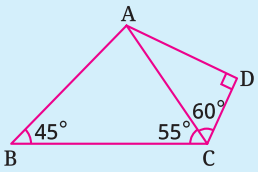
ما طول مسقط $\overline{AB}$ على $\overleftrightarrow{AC}$ ؟

(أ) 12 سم (ب) 9 سم

(جـ) 6 سم (د) 3 سم

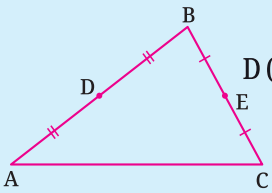
◂ أكمل كلًا مما يأتى بالإجابة الصحيحة :

(5) فى الشكل المقابل :



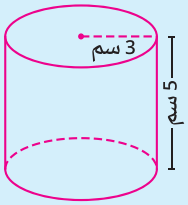
الترتيب التصاعدى للقطع المستقيمة الخمسة المرسومة وفقًا لأطوالها هو .....

(7) فى الشكل المقابل :



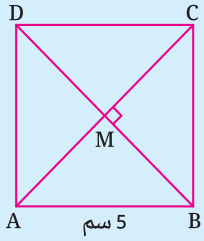
إذا كانت $D(-1,-2)$, $E(2,3)$ منتصفى $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ فإن طول $\overline{AC}$ = ... وحدة طول.

(6) فى الشكل المقابل :



المساحة السطحية للأسطوانة تساوى ..... سم^2 ($\pi \approx 3.14$)

(8) فى الشكل المقابل :



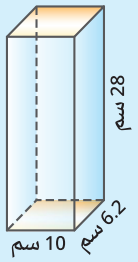
إذا كان ABCD مربعًا فإن طول مسقط $\overline{AC}$ على $\overleftrightarrow{BD}$ = ... سم

◂ أجب عن الأسئلة الآتية :

(9) النقط فى الجدول المقابل تقع على استقامة واحدة أوجد ميل المستقيم وقيمة k

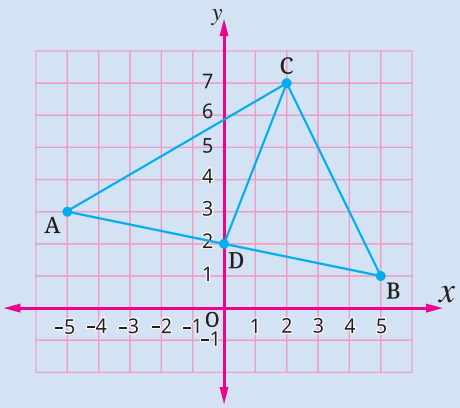
x	-3	2	7	k
y	0	2	4	6

(10) فى الشكل المقابل :



منشور قائم ارتفاعه 28 سم، إذا ازداد الارتفاع بمقدار 0.7 سم ، فما مقدار الزيادة فى المساحة السطحية للمنشور؟

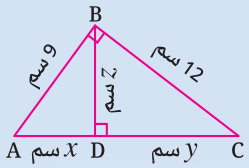
(11) فى الشكل المقابل :



أثبت أن :

$m(\angle ADC) > m(\angle BDC)$

(12) فى الشكل المقابل :



أوجد قيم x , y , z

نشاط الوحدة الثالثة

الدائرة فى حياتنا

◂ **الهدف من النشاط :**

توظيف مفاهيم ومهارات الهندسة فى المواقف الحياتية.

◂ **خطوات التنفيذ :**

قسم الفصل إلى مجموعات كل مجموعة مكونة من (4 - 5) طلاب، واطلب منهم تنفيذ الخطوات الموضحة:

1. تحديد عدد (3) من الأشكال والمجسمات المحيطة بهم (مثل : ساعة حائط - طبق - ...) والتى تحتوى على نماذج لدائرة.
2. تحديد الوسيلة المناسبة وفقًا لهذا الشكل / المجسم لقياس طول نصف القطر أو طول القطر.
3. حساب محيط ومساحة الدائرة فى كل شكل / مجسم.
4. استكمال الجدول التالى :

اسم الشكل	وسيلة القياس	طول القطر أو نصف القطر	قيمة المحيط	قيمة المساحة
.1				
.2				
.3				

5. كتابة فقرة توضح مستوى الدقة فى عملية القياس وحساب البيانات الموضحة فى الجدول.

الوحدة 4

الإحصاء والاحتمال

دروس الوحدة

4-1 العينات

4-2 الاحتمال - توقع الأحداث المستقبلية

يعد مفهوم العينة واختيارها من الأسس التى تقوم عليها توفر البيانات التى يتعامل معها الذكاء الاصطناعى، بينما يحدد الاحتمال النظرى القواعد الرياضية التى يستخدمها النموذج فى التنبؤ واستخلاص النتائج، وكلما كانت العينة جيدة مع حسابات احتمالية صحيحة يساعد الذكاء الاصطناعى للوصول إلى نتائج أكثر دقة.

◀ فهل يمكن تطوير أساليب وطرق اختيار العينات فى مساعدة الذكاء الاصطناعى للحصول على نتائج أكثر دقة؟

القضايا والمهارات الحياتية

- التواصل الرياضى
- التفكير الناقد
- التنبؤ
- اتخاذ القرار

القيم

- التكافل
- الأمن الغذائى
- الوعى الرياضى

الدرس
4 - 1

العينـات
(Samples)

■ **نواتـج التعلم**

- تعرف مصادر جمع البيانات.
- تعرف أساليب جمع البيانات.
- تعرف مفهوم العينة.
- تعرف أنواع العينات وطرق اختيارها.
- تحدد الطريقة الأفضل لاختيار عينة ما.

■ **المفـردات**

- الاختيار المتحيز
Biased selection
- الاختيار العشوائى
Random selection
- عينة عشوائية بسيطة
Simple random sample
- عينة عشوائية طبقية
Layer random sample

استعد !

فـى كل عام، تُمنح الكـرة الذهبية لأفضل لاعب كرة قدم فى العالم، هل تتخيل كم سيكون صعبًا لـو طُلـب من كل مشـجع فى العالـم التصويت لاختيار اللاعب الفائز؟!

لهذا السبب، لا يُستطلع رأى جميع مشجعى لعبة كرة القدم، بـل يتم اختيار مجموعة صغيرة من الصحفيين الرياضيين، والمحللين، والخبراء من دول مختلفة ليمثلوا آراء المشجعين فى العالم.

هذه المجموعة الصغيرة تُسمى عينة، وهى تمثل المجتمع الكبير المكوَّن من ملايين المشجعين. إذا أردت اختيـار اللاعـب الأفضل فى مدرسـتك هذا العـام، فكيف يمكنك اختيـار عينة من الطلاب تعبر عن رأى الجميع؟

فى هذا الدرس، سوف تتعلم مفهوم العينة، وأنواعها، وكيفية اختيار العينات؛ مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات.

فكر وناقش !

أراد أحـد الطـلاب معرفة الرياضـة المفضلة لدى الطلاب بمدرسته، فسأل طلاب فريق كرة السلة فقط، فكانـت النتيجة التى توصل إليها أن «كرة السـلة هى الرياضة المفضلة لجميع الطلاب فى المدرسة»، فهل هذا الاستنتاج دقيق؟ ناقش.

تعلـم !

جمع البيانات

- يقوم الباحـث الإحصائى بجمع البيانـات وتنظيمها وتحليلها، وذلـك للوصول إلى نتائج دقيقة تُستخدم فى اتخاذ القرارات الصحيحة.
- جمع البيانات يتطلب معرفة مصادرها وتحديد أسلوب جمعها.

مصادر جمع البيانات

1 مصادر أولية :

هـى مصـادر نحصل منها على البيانات بشـكل مباشـر عـن طريق المقابلة الشـخصية أو الاستبيان أو الملاحظة، وتتميز بالدقة، ولكنها تحتاج إلى وقت ومجهود وتكلفة كبيرة.

2 مصادر ثانوية :

هـى مصادر نحصـل منها علـى البيانـات التى تم تجميعها وتسـجيلها من قبل بواسـطة بعض الهيئـات أو المؤسسـات، مثل : نشـرات الجهاز المركـزى للتعبئة العامة والإحصـاء، والإنترنت، وقاعـدة بيانـات الموظفيـن، ... وتتميـز هـذه المصادر بتوفير الوقت والجهد والمال.

الجهـاز المركـزي للتعبئة العامة والإحصاء
C A P M A S

أساليب جمع البيانات

يتوقف الأسـلوب المسـتخدم لجمع البيانات على الهدف المراد لأجله جمـع هذه البيانات، كما يتوقف على حجم المجتمع الإحصائى، ومن أساليب جمع البيانات ما يلى :

1 أسلوب الحصر الشامل :

يقوم هذا الأسـلوب على جمع البيانات من جميع مفردات المجتمع الإحصائى، ويسـتخدم فى حصر جميع مفردات المجتمع، مثل : «التعداد العام للسـكان» ، «الانتخابات»، وغيرها، ويتميز بدقة النتائج والشمول وعدم التحيز، ولكنه يحتاج إلى وقت طويل ومجهود كبير وتكلفة عالية.

2 أسلوب العينات :

يقـوم هذا الأسـلوب علـى جمع البيانـات من عينة ممثلـة للمجتمـع وإجـراء البحـث عليها، ثـم تُعمَّم النتائـج على المجتمع كله، ومـن أمثلته : «عينة من دم مريض لإجراء بعض الفحوصات الطبية»، «عينة مـن بعض منتجـات مصنـع لبحث مـدى مطابقتها للمواصفات»، وغيرها.

وهـذا الأسـلوب يوفر الوقـت والجهـد والتكاليف، ولكنـه يعطـى نتائج غيـر دقيقة خاصـة إذا كانت العينة غير ممثلـة للمجتمع تمثيلًا صادقًا، وتُسـمى فى هذه الحالة بالعينة المتحيزة.

مفهوم العينة

هى جزء صغير من مجتمع كبير تشبه المجتمع وتمثِّله.

أنواع العينات حسب طريقة اختيارها

أولاً الاختيار المتحيز (عينة غير عشوائية)

وهو يعنى اختيار مفردات بعينها من مفردات المجتمع بحيث تناسب أهداف البحث.

فمثـلًا : عند دراسـة مدى رضا تلاميذ مدرسـة عن رحلة مدرسـية، فيجب اختيـار العينة من التلاميذ الذين ذهبوا إلى الرحلة المدرسية دون باقى التلاميذ، وهذا الاختيار لا يعتبر عشوائيًا.

■ فكر مع زملائك

أى من مصادر البيانات الإحصائية التالية أولية، وأيها ثانوية؟

1 البحـث فى مواقع الإنترنت عن نتائج المنتخب المصرى لكرة القدم فى بطولة الأمم الأفريقية السابقة.

2 استطلاع آراء زملائك بالفصل عن اسم المادة الدراسية المفضلة لديهم.

■ ما هو المجتمع الإحصائى؟

المجتمـع الإحصائـى هـو جميع المفـردات التـى يهتـم الباحـث بدراستها والتى تجمعها خصائص عامـة واحـدة، فمثـلًا : تلاميـذ مدرسة ما تمثل مجتمعًا إحصائيًا مفردته هى «التلميذ».

■ فكر

لماذا نسـتخدم أسلوب العينات لدراسة المجتمعات التالية :

1 المجتمعات اللا محدودة مثل مجتمع (رمال الصحراء)؟

2 فحص دم مريض؟

ثانيًا الاختيار العشوائى (عينة عشوائية)

وهو يعنى اختيار العينة بحيث تكون كل مفردة من مفردات المجتمع لها نفس الفرصة فى الاختيار، ومن أهم أنواع العينات العشوائية :

1 العينة العشوائية البسيطة :

وتستخدم مع المجتمعات المتجانسة، ويتم اختيارها بطريقتين حسب عدد مفردات المجتمع كما يلى :

الطريقة الأولى : (إذا كان حجم المجتمع صغيرًا)

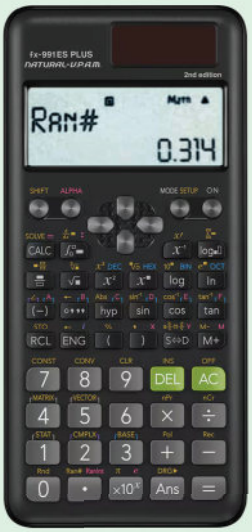
تتم هذه الطريقة كما يلى :

- يتم تحضير بطاقة لكل مفردة من مفردات المجتمع يُكتب عليها اسم أو رقم المفردة، بحيث تكون جميع البطاقات متماثلة من حيث اللون والمقاس.
- تُطبق البطاقات بطريقة متماثلة، وتوضع فى صندوق، ثم تُخلط جيدًا.
- تسحب بطاقة من الصندوق عشوائيًا، ثم تُقلب البطاقات جيدًا ونختار بطاقة ثانية، وهكذا حتى ننتهى من اختيار العدد المطلوب للعينة.

وهذه الطريقة تعتبر مناسبة لاختيار عينة مكونة من 5 تلاميذ من فصل به 40 تلميذًا.

الطريقة الثانية : (إذا كان حجم المجتمع كبيرًا)

تتم هذه الطريقة كما يلى :



- يتم ترقيم جميع مفردات المجتمع.
- تُستخدم خاصية الرقم العشوائى الموجود بالآلة الحاسبة العلمية، وذلك يتم بالضغط على المفاتيح التالية بالترتيب.

فيظهر رقم عشرى بين 0.000 ، 0.999 ،
وفى حالة ظهور رقم عشرى واحد بعد العلامة العشرية نضيف صفرين لجعله جزءًا من ألف (0.3 ← 0.300)،
وفى حالة ظهور رقمين عشريين بعد العلامة العشرية نضيف صفرًا على اليمين لجعله جزءًا من ألف (0.82 ← 0.820)، ثم نأخذ تلك الأرقام بعد تجاهل العلامة العشرية ونختار المفردة الممثلة لمجتمع الدراسة.

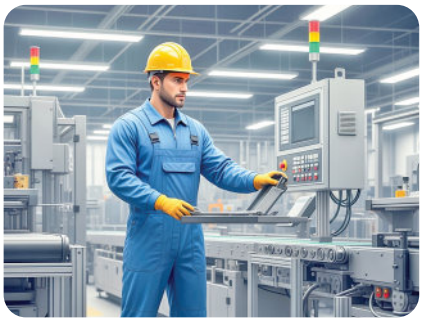
- مع تكرار الضغط على مفتاح = يتوالى ظهور الأرقام حتى نصل إلى عدد العينة الذى نريده، وتُستبعد الأرقام الأكبر من عدد مجتمع الدراسة، كما تستبعد أيضًا الأرقام التى تم اختيارها من قبل.

وهذه الطريقة تعتبر مناسبة لاختيار عينة مكونة من 40 طالبًا من مدرسة بها 800 طالب.

■ لاحظ أن

عدد مفردات العينة الأنسب يكون فى المتوسط 10% من عدد مفردات مجتمع الدراسة.

مثال 1



شركة بها 300 عامل ومطلوب معرفة رأى العمال فى نظام التأمين الصحى الخاص بالشركة من خلال استبيان تم إعداده لهذا الغرض، فإذا كان هذا الاستبيان لعينة عشوائية حجمها 10% من إجمالى عدد العاملين بهذه الشركة، وضح كيف يتم اختيار هذه العينة باستخدام الآلة الحاسبة.

∵ عدد العاملين بالشركة = 300 عامل.

∴ عدد العينة العشوائية = $\frac{10}{100} \times 300 = 30$ عاملًا.

ويتم اختيار الـ 30 عاملًا كما يلى :

- يعطى لكل عامل من العاملين بالشركة رقمًا من 1 إلى 300
- تستخدم الآلة الحاسبة لاختيار 30 عاملًا بالطريقة السابق ذكرها والتى تنحصر بين 0 ، 300 والأرقام العشوائية التى تظهر أكبر من 300 يتم استبعادها، وكذلك يتم استبعاد الأرقام المكررة.

فمثلًا : بالضغط على المفاتيح :

إذا حصلنا على الكسر العشرى 0.162 يكون رقم العامل المختار 162

وإذا حصلنا على الكسر العشرى 0.24 يكون رقم العامل المختار 240

وإذا حصلنا على الكسر العشرى 0.511 يتم استبعاده، لأن رقم 511 أكبر من 300 وهكذا حتى نحصل على 30 رقمًا.

2 العينة العشوائية الطبقية :

وتستخدم مع المجتمعات غير المتجانسة، أى المقسمة إلى مجموعات نوعية تختلف فى الصفات، وتتم كما يلى :

- تُقسم مفردات المجتمع الإحصائى إلى طبقات حسب الصفات المكونة له.
- يختار الباحث عينة عشوائية تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها فى المجتمع، وتُسمى بالعينة الطبقية.

فمثلًا : عند دراسة المستوى الدراسى لمجتمع ما مكون من 450 تلميذًا من تلاميذ الصفين الأول والثانى الإعدادى، وكانت النسبة بين عدد تلاميذ الصف الأول إلى الثانى كنسبة $\frac{4}{5}$، ونريد اختيار عينة مكونة من 54 تلميذًا، فلا بد أن نختار 24 تلميذًا من الصف الأول، 30 تلميذًا من الصف الثانى بطريقة عشوائية.

■ تقييم ذاتى (1)

إذا كنت تريد أخذ عينة من مدرستك لعمل بحث عن ممارسة الرياضة من قِبَل الطلاب بشكل يومى أم لا، يتم أخذ عينة عشوائية من المدرسة حجمها 10% من إجمالى عدد المدرسة.

بيِّن كيف يتم اختيار هذه العينة باستخدام الآلة الحاسبة علمًا بأن العدد الكلى للمدرسة 500 طالب.

■ **تقييم ذاتى ②**

قام أحد المصانع بإنتاج 400 ثلاجة من النوع "16 قدمًا"، 300 ثلاجة من النوع "18 قدمًا"، 100 ثلاجة من النوع "20 قدمًا"، فإذا أردنا سحب عينة طبقية مكونة من 72 ثلاجة بحيث تكون ممثلة لكل الأنواع المنتجة لفحصها، احسب عدد مفردات كل طبقة فى العينة.

مثال 2

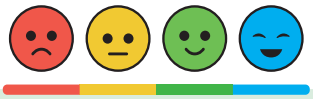
مدرسة بها 400 طالب، 500 طالبة، أرادت عمل استبيان على عينة طبقية مكونة من 45 طالبًا وطالبة تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها، احسب عدد مفردات كل طبقة فى العينة.

العدد الكلى للطلاب = 400 + 500 = 900 طالب وطالبة.

عدد مفردات الطلاب فى العينة = $\frac{400}{900} \times 45 = 20$ طالبًا.

عدد مفردات الطالبات فى العينة = $\frac{500}{900} \times 45 = 25$ طالبة.

تقييم الدرس



أولًا قياس المفاهيم

▸ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① يعتبر أسلوب العينات هو الأسلوب المناسب لكل مما يأتى، ما عدا .....

(أ) فحص إنتاج مصنع. (ب) فحص رمال الصحراء. (جـ) معرفة تعداد السكان. (د) فحص دم مريض.

② مستشفى بها 40 طبيبًا، 200 ممرضة، أخذت عينة طبقية حجمها 36 فردًا تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها، فإن عدد الممرضات فى هذه العينة يساوى ..... ممرضة.

(أ) 6 (ب) 18 (جـ) 24 (د) 30

ثانيًا تطبيق المفاهيم

③ قامت مدرسة بها 350 طالبًا بعمل استطلاع رأى لمعرفة أى من المنتجات التى تباع فى المقصف المدرسى أفضل بالنسبة للطلاب (مشروب ساخن - بيتزا - عصائر مثلجة - وجبة ساخنة) وتم إعطاء رقم لكل طالب، ثم اختيرت عينة عشوائية لعمل هذا الاستطلاع حجمها 10% من عدد المدرسة. حدد باستخدام الآلة الحاسبة أرقام الطلاب فى هذه العينة.

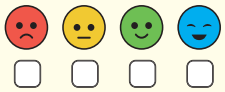
④ يوجد فى أحد المصانع 180 عاملًا، 120 فنيًا، 80 مهندسًا، أخذت عينة طبقية حجمها 57 شخصًا، أوجد عدد مفردات كل طبقة فى العينة.

⑤ يراد سحب عينة عشوائية طبقية تمثل فيها كل طبقة حسب حجمها من مجتمع مكون من 5000 مفردة ومقسم إلى أربع طبقات، بحيث كان عدد مفردات الطبقة الأولى 1500 مفردة، وكان عدد مفردات الطبقة الأولى فى العينة 225 مفردة، أوجد حجم العينة.

قيّم فهمك!

ما مدى فهمك للعينات ؟

ضع علامة فى المربع المناسب



الدرس
4 - 2

الاحتمال - توقع الأحداث المستقبلية
(Probability – Prediction of Future Events)

■ **نواتج التعلم**

- تذكر مفهوم الاحتمال النظرى.
- تستخدم قوانين الاحتمال لتوقع حدوث أحداث مستقبلية.

■ **المفردات**

- الاحتمال Probability
- توقع الأحداث المستقبلية Prediction of future events

كوبرى ستانلى أحد معالم مدينة الإسكندرية

استعد !

تتابع هيئة الأرصاد الجوية المصرية حالة الطقس يوميًا وتصدر توقعاتها بشأن الظواهر الجوية المختلفة ومن بينها سقوط الأمطار.
فإذا أعلنت هيئة الأرصاد الجوية أن احتمال سقوط الأمطار فى مدينة الإسكندرية فى أحد أيام شهر نوفمبر هو 0.4 ، فكم عدد الأيام المتوقع أن تسقط فيها الأمطار فى ذلك الشهر؟

فى هذا الدرس، سوف تتعلم مفهوم الاحتمال وتتوقع الأحداث المستقبلية؛ مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.

فكر وناقش !

يتدرب مازن على تسديد ضربات الجزاء فى لعبة كرة القدم. سدد مازن 5 ضربات فأحرز منها 3 أهداف، فإذا سدد مازن 20 ضربة، فما عدد الأهداف المتوقع أن يحرزها مازن ؟ ناقش.

تعلم !

الاحتمال وتوقع الأحداث المستقبلية

يساعد الاحتمال على توقع حدوث الأحداث المستقبلية بناءً على المعلومات المتاحة لدينا، فهو يمنحنا فكرة عن مدى إمكانية حدوث كل نتيجة، ويستخدم فى حياتنا اليومية فى كثير من المجالات، مثل : الأرصاد الجوية، الاقتصاد، الألعاب الرياضية والمنافسات، الأبحاث العلمية، وغيرها.

معلومة سابقة : الاحتمال النظرى

الاحتمال النظرى يقوم على مبدأ تكافؤ الفرص أو تساوى الإمكانات، ويساوى النسبة بين عدد نواتج الحدث والعدد الكلى للنواتج.

أى أن: احتمال وقوع أى حدث $(A) = \frac{\text{عدد نواتج الحدث A}}{\text{العدد الكلى للنواتج}}$

ويُرمز لاحتمال وقوع الحدث A بالرمز $P(A)$.

مثال 1

عنـد أخذ عينـة مكونة من 30 طالبًا من بيـن 750 طالبًا فى إحـدى المدارس وسـؤالهم عن النشـاط المفضـل لهم، كانت إجاباتهم كما بالجدول المقابل :

النشاط	التكرار
كرة قدم	15
سباحة	8
كرة يد	4
كرة طائرة	3

1) إذا اختير طالب عشـوائيًا، فما احتمـال أن يكون الطالب من مفضلى نشاط السباحة؟

2) ما العدد المتوقع للطلاب الذين يفضلون نشـاط السـباحة فى المدرسة؟

3) مـا العدد المتوقـع للطلاب الذيـن يفضلون نشـاط الكرة الطائرة فى المدرسة؟

1) احتمال أن يكون الطالب من مفضلى نشاط السباحة $= \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$

2) العدد المتوقع للطلاب الذين يفضلون نشاط السباحة فى المدرسة $= 750 \times \frac{4}{15}$

$= 200$ طالب

3) ∵ احتمال أن يكون الطالب من مفضلى نشاط الكرة الطائرة $= \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$

∴ العدد المتوقع للطلاب الذين يفضلون نشاط الكرة الطائرة فى المدرسة

$= \frac{1}{10} \times 750 = 75$ طالبًا

مثال 2

ينتـج مصنع للهواتـف المحمولة نوعيـن (A1) ، (A2) من الهواتف ولإجراء دراسـة لتعديل كمية الإنتاج وفقًا لمتطلبات السـوق تم اختيار عينة عشوائية من مبيعات 5 منافـذ بيع للمصنـع حجم كل منهـا 60 هاتفًا وكانت البيانات مقسمة كما يلى :

رقم المنفذ	1	2	3	4	5
مبيعات النوع الأول (A1)	35	48	24	19	45
مبيعات النوع الثانى (A2)	25	12	36	41	15

1) أى النوعين الأكثر طلبًا ؟ وبماذا تنصح المصنع ؟

2) إذا كان الإنتـاج الكلى لهـذا المصنع 5,000 هاتف فما العدد الـذى تتوقع إنتاجه من النوع الأول وفقًا لهذه الدراسة ؟

■ تقييم ذاتى (1)

فـى أحـد الأيـام كانـت أعداد عبـوات الألبـان المبيعـة فـى إحدى سلاسل المحال الغذائية كما بالجدول التالى:

نوع اللبن	عدد العبوات المبيعة
كامل الدسم	100
نصف دسم	25
خالى الدسم	75

ونتوقع أن يـزداد إجمالى عدد العبوات المبيعة غدًا ليصل إلى 600 عبـوة، فكم عبوة من نوع خالى الدسـم من المتوقع بيعها غدًا؟

■ تذكر أن

يمكـن كتابـة الاحتمـال علـى صورة كسـر اعتيادى أو كسـر عشرى أو نسبة مئوية.

■ تقييم ذاتى (2)

ينتج مصنع نوعين من الأحذية، لإجـراء دراسـة لتعديـل كمية الإنتاج وفق متطلبات السـوق تـم اختيار عينة عشـوائية من مبيعـات 5 منافذ بيـع للمصنع حجم كل منها 80 حذاء، فكانت بياناتها مقسمة كما يلى:

رقم المنفذ	مبيعات النوع الأول	مبيعات النوع الثانى
1	45	35
2	19	61
3	27	53
4	36	44
5	39	41

1) أى النوعيـن الأكثـر طلبًا ؟ وبماذا تنصح المصنع ؟

2) إذا كان الإنتـاج الكلـى لهذا المصنع 4,800 حذاء، فما العدد الذى تتوقع إنتاجه من النوع الأول ؟

① المبيعات الكلية فى الخمسة منافذ من النوع الأول (A1)

$= 35 + 48 + 24 + 19 + 45 = 171$ هاتفًا

، المبيعات الكلية فى الخمسة منافذ من النوع الثانى (A2)

$= 25 + 12 + 36 + 41 + 15 = 129$ هاتفًا

∴ النوع الأول (A1) هو الأكثر طلبًا، وننصح المصنع بزيادة الإنتاج من هذا النوع.

② احتمال البيع من النوع الأول $= \frac{\text{عدد الأجهزة المبيعة من النوع الأول}}{\text{عدد الأجهزة المبيعة من كلا النوعين}}$

$= \frac{171}{300} = 0.57$

∴ العدد المتوقع إنتاجه من النوع الأول $= 0.57 \times 5{,}000 = 2{,}850$ هاتفًا

مثال 3

عينة عشوائية تتكون من 80 طالبًا فى إحدى المدارس شملهم استطلاع للرأى، وجد أن 60 طالبًا منهم يفضلون مادة الرياضيات، 45 طالبًا منهم يفضلون مادة الدراسات الاجتماعية، 35 طالبًا يُفضلون المادتين معًا، فإذا اختير طالب عشوائيًا:

أولًا : احسب احتمال كل من الحدثين الآتيين :

① A حدث «الطالب المختار يفضل إحدى المادتين على الأقل».

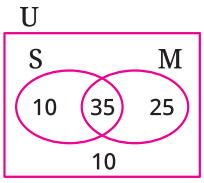
② B حدث «الطالب المختار يفضل إحدى المادتين فقط».

ثانيًا : إذا كان العدد الكلى فى المدرسة 2,000 طالب :

① ما العدد المتوقع للطلاب الذين يفضلون مادة الدراسات الاجتماعية فقط؟

② ما العدد المتوقع للطلاب الذين يفضلون مادة واحدة على الأكثر من الرياضيات والدراسات الاجتماعية؟

بفرض أن M هى مجموعة الطلاب الذين يفضلون الرياضيات، S هى مجموعة الطلاب الذين يفضلون الدراسات الاجتماعية يمكن توضيح أعداد الطلاب الذين شملهم الاستطلاع باستخدام شكل ڤن المقابل.



أولًا :

① احتمال (A) $= \frac{\text{عدد الطلاب الذين يفضلون إحدى المادتين على الأقل}}{\text{عدد الطلاب الكلى بالعينة}}$

$\therefore P(A) = \frac{25 + 35 + 10}{80} = \frac{70}{80} = \frac{7}{8}$

② احتمال (B) $= \frac{\text{عدد الطلاب الذين يفضلون إحدى المادتين فقط}}{\text{عدد الطلاب الكلى بالعينة}}$

$\therefore P(B) = \frac{25 + 10}{80} = \frac{35}{80} = \frac{7}{16}$

■ تقييم ذاتى ③

اختيرت عينة عشوائية من المتقدمين لاختبار إحدى الوظائف مكونة من 60 شخصًا فوجد أن 45 شخصًا يجيدون الإنجليزية، 30 شخصًا يجيدون الفرنسية، 25 شخصًا يجيدون اللغتين معًا.

1. إذا اختير أحد المتقدمين عشوائيًا فما احتمال ألَّا يجيد الشخص المختار أيًا من اللغتين؟
2. إذا كان العدد الكلى للمتقدمين للاختبار 2,400 شخص أوجد العدد المتوقع للأشخاص الذين يجيدون اللغة الإنجليزية فقط.

■ لاحظ أن

عدد من يفضلون الرياضيات 60 طالبًا، عدد من يفضلون الرياضيات والدراسات الاجتماعية معًا 35 طالبًا.

∴ عدد من يفضلون الرياضيات فقط :

$60 - 35 = 25$

وبالمثل عدد من يفضلون الدراسات الاجتماعية فقط :

$45 - 35 = 10$

∴ عدد من لا يفضلون أيًا من المادتين :

$80 - (10 + 25 + 35) = 10$

ثانيًا :

① احتمال أن يكون الطالب يفضل مادة الدراسات الاجتماعية فقط $= \frac{1}{8} = \frac{10}{80}$

∴ العدد المتوقع لطلاب المدرسة الذين يفضلون الدراسات الاجتماعية فقط $= 2,000 \times \frac{1}{8}$

$= 250$ طالبًا

② ∵ احتمال أن يكون الطالب يفضل مادة واحدة على الأكثر من الرياضيات والدراسات الاجتماعية $= \frac{25+10+10}{80} = \frac{45}{80} = \frac{9}{16}$

∴ العدد المتوقع لطلاب المدرسة الذين يفضلون مادة واحدة على الأكثر من الرياضيات والدراسات الاجتماعية $= 2,000 \times \frac{9}{16} = 1,125$ طالبًا

مثال 4

عينة عشوائية تتكون من 60 زائرًا لأحد المتاحف موزعين كما بالجدول المقابل :

	عربى	أجنبى	المجموع
ذكر	24	.....	32
أنثى	16	12	.....
المجموع	.....	.....	.....

أولًا : أكمل الجدول.

ثانيًا : إذا اختير عشوائيًا أحد الزوار احسب احتمال كل من الأحداث الآتية :

1. A حدث «الشخص المختار من الإناث».
2. B حدث «الشخص المختار من الأجانب».
3. C حدث «الشخص المختار من الذكور الأجانب».
4. D حدث «الشخص المختار من الذكور أو الأجانب».

ثالثًا : إذا كان العدد الكلى لزوار المتحف خلال آخر شهر يساوى 2250 زائرًا، فما العدد المتوقع للذكور الأجانب فى هذا الشهر ؟

أولًا :

	عربى	أجنبى	المجموع
ذكر	24	8	32
أنثى	16	12	28
المجموع	40	20	60

ثانيًا :

① $P(A) = \frac{28}{60} = \frac{7}{15}$

② $P(B) = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$

③ $P(C) = \frac{8}{60} = \frac{2}{15}$

④ $P(D) = \frac{24+8+12}{60} = \frac{44}{60} = \frac{11}{15}$

ثالثًا : ∵ احتمال أن يكون الشخص المختار من الذكور الأجانب $= \frac{2}{15}$

∴ العدد المتوقع للذكور الأجانب $= 2,250 \times \frac{2}{15} = 300$ زائر

تقييم ذاتى ④

اختيرت عينة عشوائية مكونة من 25 طالبًا من الطلاب المتقدمين لمسابقة الرياضيات فى إحدى المدارس الإعدادية المشتركة، وكان الطلاب موزعين كما بالجدول التالى :

	الصف الأول	الصف الثانى	المجموع
طالب	8	.....	.....
طالبة	.....	4	10
المجموع	.....	.....	.....

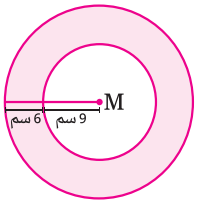
أولًا : أكمل الجدول السابق.

ثانيًا : أوجد احتمال أن يكون الفائز بالمركز الأول :

1. طالبًا من الصف الأول.
2. طالبة.
3. من الصف الثانى.
4. طالبًا أو من الصف الأول.

ثالثًا : إذا كان العدد الكلى للطلاب فى هذه المسابقة 1550 طالبًا فما العدد المتوقع لطالبات الصف الثانى ؟

مثال 5



فى يوم رياضى بالمدرسة يطلب من الطلاب التصويب على اللوحة المقابلة، فإذا أصاب كل الطلاب اللوحة :

1. ما احتمال أن يصيب الطالب الجزء الملون من اللوحة؟
2. إذا لعب 300 طالب هذه اللعبة فما العدد المتوقع للطلبة الذين يستطيعون إصابة الجزء الملون من اللوحة؟

1) احتمال إصابة الجزء الملون $= \frac{\text{مساحة الجزء الملون}}{\text{المساحة الكلية}}$

∵ مساحة الدائرة الكبرى $= \pi (15)^2 = 225\ \pi$ سم^2

مساحة الدائرة الصغرى $= \pi (9)^2 = 81\ \pi$ سم^2

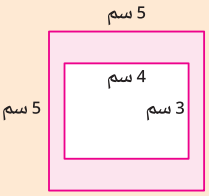
مساحة الجزء الملون $= 225\ \pi - 81\ \pi = 144\ \pi$ سم^2

∴ احتمال إصابة الجزء الملون $= \frac{144\ \pi}{225\ \pi} = \frac{16}{25}$

2) العدد المتوقع للطلبة الذين يستطيعون إصابة الجزء الملون $= \frac{16}{25} \times 300$

$= 192$ طالبًا

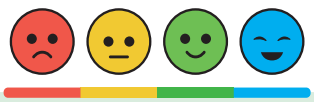
■ تقييم ذاتى (5)



إذا صوب شخص سهمًا على هذه اللوحة وأصابها :

1. أوجد احتمال إصابة المنطقة الملونة.
2. إذا صوب 75 شخصًا كل منهم سهمًا، فما العدد المتوقع لعدد مرات إصابة المنطقة الملونة؟

تقييم الدرس



أولاً قياس المفاهيم

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

1) إذا كان احتمال فوز فريق ما فى كرة القدم فى مباراة واحدة هو 0.75، فكم مباراة متوقع أن يفوز بها من إجمالى 24 مباراة ؟

(أ) 6 (ب) 12 (جـ) 18 (د) 20

2) مصنع ينتج 800 لمبة يوميًا فإذا كان احتمال أن تكون اللمبة معيبة 0.03 فإن عدد اللمبات السليمة المتوقع إنتاجها فى اليوم هو ..... لمبة.

(أ) 24 (ب) 124 (جـ) 560 (د) 776

3) إذا كان احتمال الحصول على محصول أرز جيد فى إحدى القرى هو $\frac{3}{5}$ ، وقام الفلاحون بزراعة x فدان أرز، وكان عدد الأفدنة المتوقع أن تنتج محصولًا جيدًا هو 30 فدانًا، فما قيمة x ؟

(أ) 18 (ب) 36 (جـ) 42 (د) 50

4) فى مدرسة مشتركة بها 1,200 تلميذ، اختيرت منهم عينة عشوائية مكونة من 90 تلميذًا، فوجد أن عدد البنات 54، فما عدد البنات المتوقع فى المدرسة ؟

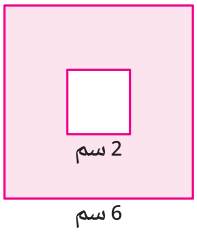
(أ) 480 بنتًا (ب) 660 بنتًا (جـ) 720 بنتًا (د) 840 بنتًا

5) إذا كان الفريق الإعلامى للمدرسة مكونًا من 18 عضوًا، منهم 4 معلمين، 6 طالبات، 8 طلاب، واختير أحد أعضاء الفريق عشوائيًا لإلقاء خطاب، فما احتمال أن يكون طالبًا أو معلمًا ؟

(أ) $\frac{2}{9}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (جـ) $\frac{4}{9}$ (د) $\frac{2}{3}$

ثانيًا تطبيق المفاهيم

6 أمامك لوحة على هيئة مربعين، إذا صوب شخص سهمًا أصاب هذه اللوحة.



① أوجد احتمال إصابة المنطقة الملونة.

② إذا صوب 90 شخصًا كل منهم سهمًا أصاب اللوحة، فما العدد المتوقع لعدد مرات إصابة المنطقة الملونة؟

7 فصل دراسى به بعض التلاميذ يرتدون نظارات، والبعض الآخر لا يرتدون نظارات، فإذا أُختير تلميذ عشوائيًا من هذا الفصل، وكان احتمال أن يكون هذا التلميذ يرتدى نظارة هو 0.1، فأوجد احتمال أن يكون هذا التلميذ لا يرتدى نظارة، وإذا كان عدد تلاميذ هذا الفصل 40 تلميذًا، فأوجد العدد المتوقع للتلاميذ الذين يرتدون نظارات.

8 قام أحد التلاميذ بإجراء استبيان على عينة مكونة من 25 تلميذًا من تلاميذ مدرسته لمعرفة أى الألعاب الرياضية يفضلون ممارستها وسجل النتائج فى الجدول المقابل :

اللعبة	كرة قدم	كرة سلة	كرة طائرة	المجموع
عدد التلاميذ	.....	4	2	25

① إذا أُختير أحد تلاميذ المدرسة عشوائيًا، أوجد احتمال أن يفضل ممارسة كرة القدم.

② أوجد العدد المتوقع للتلاميذ الذين يفضلون ممارسة كرة القدم من تلاميذ المدرسة البالغ عددهم 600 تلميذ.

9 فصل دراسى به 36 تلميذًا نجح منهم 27 تلميذًا فى الرياضيات، 12 تلميذًا فى اللغة العربية، 9 تلاميذ فى الامتحانين معًا. فإذا اختير تلميذ عشوائيًا.

أولًا : أوجد احتمال أن يكون التلميذ المختار :

① ناجحًا فى الرياضيات.
② ناجحًا فى اللغة العربية.
③ راسبًا فى اللغة العربية.
④ راسبًا فى الرياضيات واللغة العربية معًا.

ثانيًا : إذا كان العدد الكلى للمدرسة 540 تلميذًا فما العدد المتوقع للتلاميذ الناجحين فى الرياضيات فقط؟

10 مصنعان لإنتاج التليفزيونات ينتجان كل يوم 210 تليفزيونات وبعض هذه التليفزيونات معيب حسب الجدول المعطى.

	إنتاج المصنع الأول	إنتاج المصنع الثانى	المجموع
معيب	12	.....	30
غير معيب	.....	.....	.....
المجموع	100	.....	210

أولًا : أكمل الجدول المقابل.

ثانيًا : إذا أُختير عشوائيًا أحد التليفزيونات، احسب احتمالات الأحداث الآتية :

① A حدث «التليفزيون المختار معيب».
② B حدث «التليفزيون المختار من إنتاج المصنع الثانى».
③ C حدث «التليفزيون المختار معيب ومن إنتاج المصنع الثانى».
④ D حدث «التليفزيون المختار معيب أو من إنتاج المصنع الثانى».

ثالثًا : إذا كان إنتاج المصنعين فى الشهر القادم سوف يصل إلى 7,000 تليفزيون، فما العدد المتوقع للتليفزيونات غير المعيبة فى ذلك الشهر؟

ثالثًا التحليل وتكامل المواد

(11) فى يوم معين شـاهد 60 طالبًا فى مدرسـة ما فيديوهات على إحدى المنصات، 35 منهم شاهدوا فيديوهات تعليمية، 25 شاهدوا فيديوهات ترفيهية، 10 شاهدوا النوعين معًا، ما احتمال أن يختار طالب عشوائيًا ويكون قد شـاهد فيديو تعليميًا فقط ؟ ما احتمال أن يكون قد شـاهد فيديو تعليميًا أو ترفيهيًا؟ وإذا كان العدد الكلى للمدرسة 2,400 طالب فما العدد المتوقع للطلبة الذين شاهدوا فيديوهات تعليمية؟

الالتزام بإشارات المرور والسرعات المقررة
سلوك حضارى يحافظ على سلامة الجميع.

(12) تقوم شـركة تأمين سـيارات بدفع مبلغ 3,500 جنيه تعويضًا للسيارة التـى تتعرض لحادث، فإذا كان احتمال إصابة السـيارة 0.006 وكان عـدد المشـتركين فى هـذه الوثيقة 9,000 مشـترك، فمـا توقعك لما تتحمله الشركة من تعويضات؟

(13) فى العام الماضى كانت صادرات إحدى الدول من البصل 96,280 طنًا، ومـن البطاطـا 82,220 طنًا، ومن العنـب 11,500 طن، فإذا كان من المتوقـع أن يزداد إجمالى صـادرات هذه الدولة فى العـام الحالى من البصـل والبطاطا والعنب لكى يصل إلـى 380,000 طن، فكم طنًا من العنب سوف يتم تصديره العام الحالى؟

تفكير إبداعى

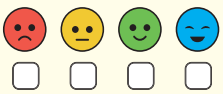
(14) الجدول التالى يوضح نتائج اختبار مصمم ليعطى نتائج إيجابية إذا كان المريض مصابًا بفيروس أو يعطى نتائج سلبية إذا كان المريض غير مصاب بالفيروس.

	نتيجة سلبية	نتيجة إيجابية	المجموع
المريض مصاب بالفيروس	14	.....	200
المريض غير مصاب بالفيروس	.....	46	.....
المجموع	.....	.....	480

أكمل الجدول السابق، ثم أوجد احتمال أن يعطى الاختبار نتائج خطأ.

قيّم فهمك!

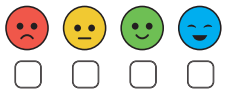
ما مدى فهمك للاحتمال - توقع الأحداث المستقبلية ؟
ضع علامة فى المربع المناسب



تقييم الوحدة الرابعة

قيّم فهمك!

ما مدى فهمك للوحدة الرابعة ؟
ضع علامة فى المربع المناسب



◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(1) مصنع به 320 عاملًا ومهندسًا، اختيرت منهم عينة عشوائية مكونة من 16 عاملًا ومهندسًا، فوجد أن عدد المهندسين بالعينة 5، فما عدد المهندسين المتوقع فى المصنع؟

(أ) 50 (ب) 100

(جـ) 160 (د) 220

(2) أى مما يأتى من المصادر الثانوية لجمع البيانات؟

(أ) المقابلة الشخصية

(ب) الاستبيانات

(جـ) قاعدة بيانات الموظفين

(د) الملاحظة والقياس

(3) إذا كان احتمال تسجيل هدف من رمية جزاء فى مباراة لكرة اليد هو 60 %، فما عدد الأهداف المتوقع تسجيلها عند رمى 30 رمية؟

(أ) 9 (ب) 12

(جـ) 18 (د) 30

(4) يعتبر أسلوب الحصر الشامل مناسبًا لأى مما يأتى؟

(أ) بحث مكونات رمال الصحراء.

(ب) فحص نسبة العذوبة لمياه أحد الآبار.

(جـ) بحث نسبة وجود أحد المعادن فى مناطق التعدين.

(د) معرفة عدد الطلاب الحاصلين على الدرجة النهائية فى امتحان الرياضيات بالفصل.

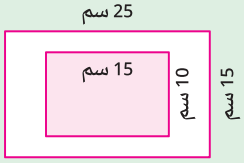
◂ أكمل كلًا مما يأتى :

(5) مصنع ينتج 120 غسالة يوميًا، فإذا كان احتمال أن تكون الغسالة معيبة 0.05 فإن عدد الغسالات السليمة المتوقع إنتاجها فى اليوم هو ..... غسالة.

(6) إذا كان الفريق المعالج فى إحدى المستشفيات مكونًا من 60 ممرضًا، و12 طبيبًا، واختير أحد أعضاء الفريق عشوائيًا فإن احتمال أن يكون ممرضًا يساوى .....

(7) من أساليب جمع البيانات ..... ، .....

(8) فى الشكل المقابل :



إذا صوب شخص على اللوحة المقابلة،

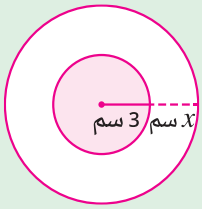
فإن احتمال إصابة المنطقة الملونة يساوى .....

◂ أجب عن الأسئلة الآتية :

(9) عينة عشوائية تتكون من 50 طالبًا، شملهم استطلاع للرأى، وجد أن 25 طالبًا منهم يفضلون مادة اللغة العربية، 20 طالبًا يفضلون العلوم، 15 طالبًا يفضلون اللغة العربية والعلوم معًا، فإذا اختير طالب عشوائيًا أوجد احتمال أن يكون الطالب المختار يفضل إحدى المادتين على الأقل، وإذا كان العدد الكلى للمدرسة 750 طالبًا، فما العدد المتوقع للطلبة الذين يفضلون مادة العلوم فقط فى المدرسة؟

(10) فى الشكل المقابل :

إذا كان احتمال إصابة المنطقة الملونة يساوى $\frac{1}{9}$، فما قيمة x ؟



(11) عينة عشوائية من مدرسة تتكون من 24 ولدًا و16 بنتًا، منهم 9 أولاد، 4 بنات يلبسون نظارة، فإذا اختير عشوائيًا شخص من هذه المدرسة أوجد احتمال أن يكون هذا الشخص ولدًا لا يلبس نظارة، وإذا كان العدد الكلى فى المدرسة 440 طالبًا، أوجد العدد المتوقع للأولاد الذين لا يلبسون نظارة فى المدرسة.

(12) أحد مصانع السيارات يقوم بإنتاج 3 موديلات من السيارات فى العام وتعدادها هو 500 سيارة من الموديل الأول، 700 من الموديل الثانى، 300 من الموديل الثالث، إذا أرادت إدارة المصنع أخذ عينة تقدر بـ 7% من الإنتاج الإجمالى لها يمثل فيها كل موديل حسب حجم إنتاجه، أوجد عدد مفردات كل موديل فى العينة.

نشاط الوحدة الرابعة

قائمة التنبؤات أو الأنشطة المستقبلية

◂ الهدف من النشاط :

امتلاك مهارة توظيف مفاهيم الاحتمال وتوقع الأحداث المستقبلية فى المواقف الحياتية.

◂ خطوات التنفيذ :

قسم الفصل إلى مجموعات كل مجموعة مكونة من (4 – 5) طلاب، واطلب منهم دراسة الموقف التالى، ثم تنفيذ الخطوات الموضحة :

ترغب المدرسة فى تنفيذ أحد الأنشطة التالية، وتبحث عن مساعدة لتوقع الاختيار المستقبلى الأفضل بالنسبة للطلاب :

- أنشطة رياضية (كرة سلة - كرة قدم - كرة طائرة).
- عقد مسابقات (ثقافية - علمية - رياضية).
- تنظيم رحلات (مكتبة الإسكندرية - المتحف المصرى الكبير - العاصمة الإدارية).

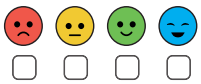
◂ مهام الطلاب :

1. على كل مجموعة أن تختار موضوعًا واحدًا فقط من الموضوعات الثلاثة السابقة.
2. تحديد أسلوب جمع البيانات المناسب عن هذا الموضوع.
3. إعداد الأداة المناسبة لجمع البيانات، وتحديد العينة التى سيتم التطبيق عليها.
4. استخدام الأداة والبدء فى جمع البيانات وتنظيمها.
5. ترجمة البيانات إلى أحد التمثيلات البيانية التى تم تعلمها من قبل.
6. تقديم التوصية المناسبة للمدرسة فى ضوء التنبؤ الذى تم الوصول إليه من تلك النتائج.

تقييم نهائى

قيم فهمك!

ما مدى فهمك لموضوعات الصف الثانى الإعدادى ؟
ضع علامة فى المربع المناسب



المجموعة الأولى

◂ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(1) إذا كانت 30 , 12 , 5 , x متناسبة، فما قيمة x ؟
(أ) 2 (ب) 3 (جـ) 4 (د) 16

(2) ما مجموعة حل المتباينة $-x > 4$ فى R ؟
(أ) $]-\infty , -4[$ (ب) $]-\infty , 4[$
(جـ) $]-4 , \infty[$ (د) $]4 , \infty[$

(3) إذا كانت $f(x) = x + 3$ ، $g(x) = x^2$
فما قيمة $2f(3) + 3g(2)$ ؟
(أ) 12 (ب) 18 (جـ) 24 (د) 36

(4) إذا كان احتمال فوز فريق ما فى أى مباراة هو 80%،
فكم مباراة متوقع أن يفوز بها من إجمالى 35 مباراة ؟
(أ) 7 (ب) 14 (جـ) 21 (د) 28

(5) أسطوانة دائرية قائمة محيط قاعدتها 16π سم
وارتفاعها 2 سم، فما حجمها ؟
(أ) 16π سم^3 (ب) 32π سم^3
(جـ) 64π سم^3 (د) 128π سم^3

(6) ما ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين
$(2 , 7)$ ، $(-4 , 8)$ ؟
(أ) $-\frac{1}{2}$ (ب) $-\frac{1}{6}$ (جـ) $-\frac{2}{3}$ (د) -6

(7) ما البُعد بين النقطتين $(4 , 7)$ ، $(1 , 11)$ ؟
(أ) 5 وحدات طول (ب) 6 وحدات طول
(جـ) 7 وحدات طول (د) 8 وحدات طول

(8) دائرة طول قطرها 12 سم، فما محيطها؟
(أ) 6π سم (ب) 12π سم
(جـ) 18π سم (د) 24π سم

(9) منشور قائم قاعدته على شكل مربع طول ضلعه 5 سم،
وارتفاع المنشور 6 سم، فما مساحته الجانبية؟
(أ) 30 سم^2 (ب) 120 سم^2
(جـ) 150 سم^2 (د) 170 سم^2

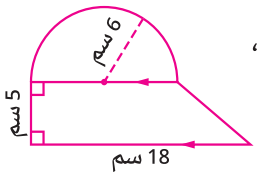
المجموعة الثانية

◂ أجب عن الأسئلة الآتية :

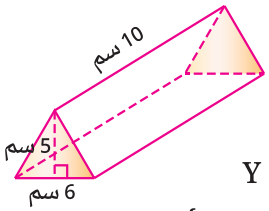
(1) إذا كان b وسطًا متناسبًا بين a , c ،
أثبت أن : $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a+3b}{3c+b}$

(2) مثل بيانيًا الدالة f حيث $f(x) = 4 - 2x$

(3) أوجد مساحة الشكل المقابل،
علمًا بأن : $(\pi \approx \frac{22}{7})$

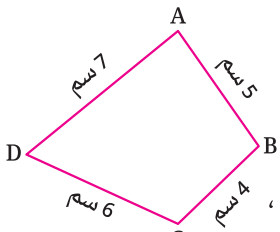


(4) فى الشكل المقابل :
أوجد حجم المنشور.

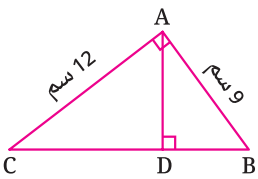


(5) إذا كانت R علاقة من X إلى Y
حيث $X = \{2 , 3 , 5\}$ ، $Y = \{5 , 7 , 8\}$
وكانت "$x\ R\ y$"
تعنى "$x + y = 10$" لكل $x \in X$ ، $y \in Y$
اكتب R كمجموعة أزواج مرتبة، ومثلها بمخطط سهمى
وآخر بيانى. هل العلاقة تمثل دالة أم لا ؟ ولماذا ؟

(6) فى الشكل المقابل :
ABCD شكل رباعى فيه
$AB = 5$ سم ،
$BC = 4$ سم ، $CD = 6$ سم ،
$DA = 7$ سم
أثبت أن : $m(\angle ABC) > m(\angle ADC)$



(7) فى الشكل المقابل :
إذا كانت
$\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ، $\overline{AB} \perp \overline{AC}$
أوجد طول كل من $\overline{CD}$ ، $\overline{AD}$



ألوان الغلاف	وزن الغلاف	ألوان المتن	وزن المتن	عدد الصفحات	المقاس
4 لون	180 جم كوشيه	4 لون	70 جم ورق أبيض	116	19 × 27 سم

دار درويش للطباعة
الرفاعى ابراهيم درويش

تم تحميل هذه الأوراق مجانًا من
أكبر وأضخم مكتبة تعليمية
موقع وتطبيق مذكرات جاهزة

تطبيق

مذكرات جاهزة للطباعة

لتحميل الملفات التعليمية مجانًا للمعلم والطالب

مذكرات وملازم / مراجعات وملخصات / امتحانات / كتب الوزارة /
أدلة المعلم / دفاتر التحضير / سجلات مدرسية / أوراق تأسيس

امسح الكود بموبايلك علشان تقدر تثبت التطبيق
وتقدر فـ أي وقت تحمّل الـ نفسك فيه ببلاش
هيغنيك عن البحث والجروبات والقنوات الكتيرة

تطبيق الموبايل لتحميل الملفات