2026

الأستاذ

في الرياضيات

أ/ حمزة فرج

WhatsApp
01270312328

أولاً :

الجبر والإحصاء

١- تساوي زوجين مرتبين

الزوج المرتب : يسمى (٢ ، ب) زوجاً مرتباً ، ويسمى ٢ بالمسقط الأول ، ويسمى ب بالمسقط الثاني .

ملاحظات هامة :

- إذا كان : ٢ ≠ ب فإن : (٢ ، ب) ≠ (ب ، ٢) **فمثلاً :** (٢ ، ٥) ≠ (٥ ، ٢)
- الزوج المرتب ليس مجموعة . **أي أن :** (٢ ، ب) ≠ { ٢ ، ب }
- (٢ ، ٢) زوج مرتب ، بينما في المجموعات لا نكتب { ٢ ، ٢ } بل نكتب { ٢ } بدون تكرار العنصر
- توجد مجموعة خالية من العناصر يرمزلها بالرمز ∅ بينما لا يوجد زوج مرتب خال .

تساوي زوجين مرتبين : إذا كان : (٢ ، ب) = (س ، ص) فإن : ٢ = س ، ب = ص

مثال ١ إذا كان : (س - ١ ، ١١) = (٨ ، ص + ٣) أوجد قيمة : $\sqrt{\text{س} + ٢\text{ص}}$ (أسيوط ٢٤)

الحل

س - ١ = ٨	ص + ٣ = ١١
س = ٨ + ١	ص = ١١ - ٣
∴ س = ٩	∴ ص = ٨

∴ المقدار $\sqrt{\text{س} + ٢\text{ص}} = \sqrt{٩ + ١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥$

مثال ٢ إذا كان : (١٢٥ ، $\sqrt{\text{ص}}$) = ($\text{س}^{٣}$ ، ٤) فأوجد قيمة : س + ص (الشرقية ٢٣)

الحل

$\text{س}^{٣}$ = ١٢٥	$\sqrt{\text{ص}}$ = ٤
س = $\sqrt[٣]{١٢٥}$ ∴ س = ٥	∴ ص = ١٦

∴ المقدار س + ص = ٥ + ١٦ = ٢١

حاول بنفسك : أكمل ما يأتي :

إذا كان : (س + ١ ، ٢) = (٥ ، ص - ٣) فإن $\sqrt{\text{س} + \text{ص}}$ = ... (الدقهلية ٢٠٢٣)

مثال ٣ إذا كان : (س^٥ ، ص+١) = (٣٢ ، $\sqrt[٣]{٢٧}$) فأوجد قيمة : س ، ص (بورسعيد ١٨)

الحل

س^٥ = ٣٢
س^٥ = ٢^٥
∴ س = ٢

ص+١ = $\sqrt[٣]{٢٧}$
ص+١ = ٣
∴ ص = ٢

مثال ٤ إذا كان : (٢س − ١ ، س + ص) = (٥ ، ٨) أوجد قيمة : ص (الجيزة ٢٤)

الحل

٢س − ١ = ٥
٢س = ٥ + ١
٢س = ٦
∴ س = ٣

س + ص = ٨
٣ + ص = ٨
ص = ٨ − ٣
∴ ص = ٥

حاول بنفسك :

١ إذا كان : (م−٣ ، ٧) = (٢ ، ب^٣ −١) أوجد القيمة العددية للمقدار : $\frac{م + ٢ب}{٢م - ب}$ (مطروح ٢٤)

٢ **اختر** الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

❶ إذا كان : (٢س ، ص + ١) = (٢ ، ٥) فإن : س + ص = ... (ج . سيناء ٢٣)

أ ٤ ب ٥ جـ ٧ د ٨

❷ إذا كان : (س^٣ ، ص^٢) = (١ ، ٤) حيث س > ص فإن س ص = ... (الإسماعيلية ٢٣)

أ ٤ ب ٢ جـ −٢ د −٤

❸ إذا كان : (س + ٢ ، ص) = (٢ ، ٣) فإن : س^٥ ص +١ = ... (الشرقية ٢٠)

أ ٣ ب ٢ جـ صفر د ١

2- حاصل الضرب الديكارتي

حاصل الضرب الديكارتي لمجموعتين منتهيتين غير خاليتين س ، ص : (ضرب المجموعات)

س × ص هو مجموعة الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول ينتمي للمجموعة س و مسقطها الثاني ينتمي للمجموعة ص .

فمثلاً : إذا كان س = { أ ، ب } ، ص = { جـ ، د }

فإن : س × ص = { أ ، ب } × { جـ ، د }

= { (أ ، جـ) ، (أ ، د) ، (ب ، جـ) ، (ب ، د) }

أي أن : س × ص = { (أ ، ب) : أ ∈ س ، ب ∈ ص }

مثال ١

إذاكانت : س = { ١ ، ٢ } ، ص = { ٢ ، ٣ ، ٤ }

فأوجد : س × ص ، ص × س ماذا تلاحظ ؟

الحـــل

س × ص = { ١ ، ٢ } × { ٢ ، ٣ ، ٤ }

= { (١ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٤) ، (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٤) }

، ص × س = { ٢ ، ٣ ، ٤ } × { ١ ، ٢ }

= { (٢ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ١) ، (٣ ، ٢) ، (٤ ، ١) ، (٤ ، ٢) }

نلاحظ أن س × ص ≠ ص × س لأن : (١ ، ٢) ≠ (٢ ، ١)

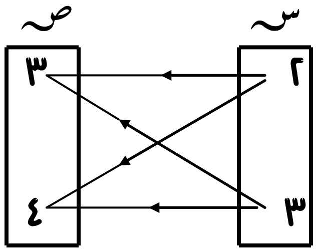
• التمثيل البياني للضرب الديكارتي :

مثال ٢

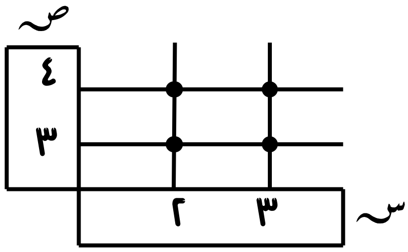
إذاكان س = { ٢ ، ٣ } ، ص = { ٣ ، ٤ }

فأوجد س × ص ومثلها بمخطط سهمي وآخر بياني (ديكارتي)

الحـــل س × ص = { ٢ ، ٣ } × { ٣ ، ٤ } = { (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٣) ، (٣ ، ٤) }



المخطط السهمى



المخطط البيانى (الديكارتى)

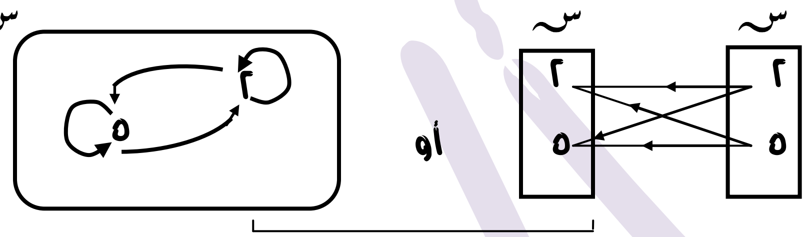
• حاصل الضرب الديكارتي س × س أو س٢

مثال ٣

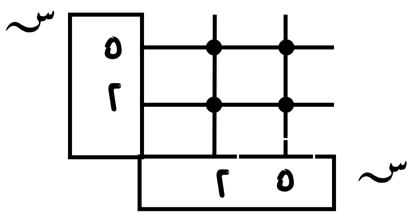
إذا كانت س = { ٢ ، ٥ } أوجد : س٢ ومثلها بمخطط سهمي وآخر بياني (ديكارتي)

الحل

س٢ = س × س = { ٢ ، ٥ } × { ٢ ، ٥ } = { (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٥) ، (٥ ، ٢) ، (٥ ، ٥) }



مخطط سهمي



مخطط بياني

• عدد العناصر يرمز له بالرمز ن

ملاحظات هامة : إذا رمزنا لعدد عناصر أي مجموعة بالرمز ن فإن :

- ن (س × ص) = ن (ص × س) = ن (س) × ن (ص)
- ن (س٢) = ن (س) × ن (س)
- س × ∅ = ∅ × س = ∅ ، ن (س × ∅) = صفر حيث ن (∅) = صفر

مثال ٤

إذا كانت س = { -١ ، ٠ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ٣ ، ٥ ، ٦ } فأوجد:

١ ن (س × ص) ٢ ن (س٢) ٣ ن (ص٢)

الحل

١ ن (س × ص) = ٤ × ٣ = ١٢

٢ ن (س٢) = ٤ × ٤ = ١٦ ٣ ن (ص٢) = ٣ × ٣ = ٩

حاول بنفسك :

١ إذا كانت س = { ٢ ، ٣ } ، ص = { ٣ ، ٤ ، ٥ } أوجد:

١ س × ص ٢ س٢ ٣ ن (ص٢) (الجيزة ٢٢)

---

٢ إذا كانت س = { ٢ ، ٥ } ، ص = { ١ ، ٢ } أوجد:

١ ن (س × ص) ٢ ص × س (السويس ٢٢)

مثال ٥

إذا كانت : س × ص = { (١، ١) ، (١، ٣) ، (١، ٥) } أوجد :

١ س ، ص　　٢ ص × س　　٣ ص٢　　(الأقصر ٢٢ / الغربية ٢٤)

الحل

١ س = {١}　،　ص = {١، ٣، ٥}

٢ ص × س = {١، ٣، ٥} × {١} = {(١،١)، (٣،١)، (٥،١)}

٣ ص٢ = {١، ٣، ٥} × {١، ٣، ٥}

= {(١،١) ، (١، ٣) ، (١، ٥) ، (٣،١) ، (٣، ٣) ، (٣، ٥) ، (٥، ١) ، (٥، ٣) ، (٥، ٥)}

مثال ٦ أكمل ما يأتي :

١ إذا كان : س = {٢} ، ص = {٣} فإن : س × ص = ... (الجيزة ١٧)

الحل س × ص = {٢} × {٣} = {(٢، ٣)}

٢ إذا كان : س = {٢} فإن : س٢ = ... (دمياط ٢٣)

الحل س٢ = {٢} × {٢} = {(٢، ٢)}

٣ إذا كان : س = {٢} ، ص = {٣} فإن : ن(س × ص) = ... (أسوان ٢٣)

الحل ن(س × ص) = ١ × ١ = ١

٤ إذا كان : س = {١، ٤} ، ص = ∅ فإن : ن(س × ص) = ... (السويس ١٨)

الحل ن(س) = ٢ ، ن(ص) = ٠　∴ ن(س × ص) = ٢ × ٠ = ٠

٥ إذا كان : ن(س) = ٣ ، س × ص = {(١، ٣)، (٢، ٣)، (٣، ٣)}
فإن : ن(ص) = ... (سوهاج ٢٢)

الحل ص = {٣}　∴ ن(ص) = ١

٦ إذا كان : ن(س) = ٣ ، ن(س × ص) = ١٢ فإن : ن(ص) = ... (المنيا ٢٢ / البحيرة ٢٤)

الحل ن(ص) = ١٢ ÷ ٣ = ٤

٧ إذا كان : ن(س) = ٢ ، ص = {٣} فإن : ن(س × ص) = ... (المنيا ٢٣ / الإسماعيلية ٢٤)

الحل ن(س × ص) = ٢ × ١ = ٢

٨ إذا كان : ن(س) = ٢ ، ن(ص٢) = ٩ فإن : ن(س × ص) = ... (الوادي الجديد ٢٣)

الحل ن(ص) = $\sqrt{٩}$ = ٣　∴ ن(س × ص) = ٢ × ٣ = ٦

٩ إذا كان : ن(س) = ٣ ، ن(س × ص) = ٦ فإن : ن(ص٢) = ... (الجيزة ٢٣)

الحل ∴ ن(ص) = ٦ ÷ ٣ = ٢　∴ ن(ص٢) = ٢ × ٢ = ٤

☻ العمليات على المجموعات :

- **التقاطع ∩ :** هو مجموعة العناصر المشتركة بين المجموعات .
- **الإتحاد ∪ :** هو مجموعة جميع العناصر مع عدم التكرار .
- **الفرق − :** هو مجموعة العناصر الموجودة في المجموعة الأولى وغير موجودة في المجموعة الثانية .

مثال٧

إذا كانت : س = {٣ ، ٤} ، ص = {٤ ، ٥} ، ع = {٦ ، ٥} أوجد :

[١] س × (ص ∩ ع) [٢] (س ∪ ص) × ع

[٣] (س − ص) × (ص − ع) (المنوفية ٢٠١٨)

الحـــل

[١] س × (ص ∩ ع) = {٣ ، ٤} × {٥} = {(٣ ، ٥) ، (٤ ، ٥)}

[٢] (س ∪ ص) × ع = {٣ ، ٤ ، ٥} × {٦ ، ٥}

= {(٣ ، ٦) ، (٣ ، ٥) ، (٤ ، ٦) ، (٤ ، ٥) ، (٥ ، ٦) ، (٥ ، ٥)}

[٣] (س − ص) × (ص − ع) = {٣} × {٤} = {(٣ ، ٤)}

مثال٨

إذا كانت : س = {١ ، ٢} ، ص = {١ ، ٤} ، ع = {٢ ، ٤ ، ٥} أوجد :

[١] س × ص [٢] (ص ∩ ع) × س [٣] ن (ع٢) (المنوفية ٢٣)

الحـــل

[١] س × ص = {١ ، ٢} × {١ ، ٤} = {(١ ، ١) ، (١ ، ٤) ، (٢ ، ١) ، (٢ ، ٤)}

[٢] (ص ∩ ع) × س = {٤} × {١ ، ٢} = {(٤ ، ١) ، (٤ ، ٢)}

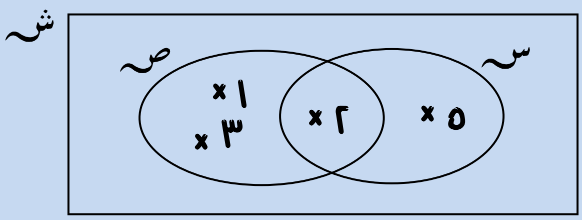
[٣] ن (ع٢) = ن (ع) × ن (ع) = ٣ × ٣ = ٩

مثال٩

في الشكل المقابل أوجد كلاً من :

أولاً : س ، ص

ثانياً : س × (س ∩ ص)



(القاهرة ٢٣)

الحـــل

أولاً : س = {٢ ، ٥} ، ص = {١ ، ٢ ، ٣}

ثانياً : س × (س ∩ ص) = {٢ ، ٥} × {٢} = {(٢ ، ٢) ، (٥ ، ٢)}

ملاحظة هامة

- إذا كانت (أ ، ب) ∋ س × ص فإن : أ ∋ س ، ب ∋ ص

فمثلاً : إذا كانت (٥ ، ٧) ∋ س × ص فإن : ٥ ∋ س ، ٧ ∋ ص

مثال ١٠ أكمل ما يأتي :

❶ إذا كانت : س = { ٢ ، ١ } ، ص = { ٣ ، ٥ } فإن : (٣ ، ٥) ∋ .... (بني سويف ٢٤)

الحل (٣ ، ٥) ∋ ص²

❷ إذا كانت : س × ص = { (١ ، ٢) ، (٣ ، ٢) } فإن : ص = ... (بور سعيد ٢٣)

الحل ص = { ٢ }

❸ إذا كانت : (٣ ، ٥) ∋ { ٣ ، ٦ } × { س ، ٨ } فإن : س = ... (بني سويف ٢٢)

الحل س = ٥

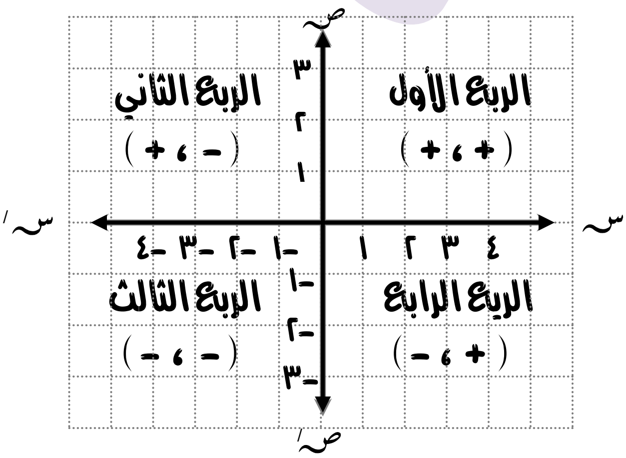
❹ إذا كان : { ٢ } × { س ، ص } = { (٢ ، ٤) ، (٢ ، ٣) } فإن : س − ص = ... (كفر الشيخ ٢٠)

الحل س − ص = ± ١

☺ الشبكة التربيعية المتعامدة :

- تنقسم الشبكة التربيعية إلى ٤ أرباع ومحور سينات ومحور صادات
- يمكن التعرف على الربع الذي تقع فيه أي نقطة من إشارتي إحداثييها كما بالشكل
- إذا كان : س = ٠ (المسقط الأول = ٠) فإن النقطة تقع على محور الصادات مثل (٠ ، عدد)
- إذا كان : ص = ٠ (المسقط الثاني = ٠) فإن النقطة تقع على محور السينات مثل (عدد ، ٠)

فمثلاً :
- النقطة (٢ ، ١) تقع في الربع الأول
- النقطة (−٣ ، ١) تقع في الربع الثاني
- النقطة (−١ ، −٥) تقع في الربع الثالث
- النقطة (٢ ، −٦) تقع في الربع الرابع
- النقطة (٢ ، ٠) تقع على محور السينات
- النقطة (٠ ، −١) تقع على محور الصادات
- النقطة (٠ ، ٠) تسمى نقطة الأصل (و)



مثال (١١) أكمل ما يأتي :

① النقطة (−٣ ، ٤) تقع في الربع .... (السويس ٢٢)

الحل: الثاني

② النقطة (س^٢ ، ص^٢) تقع في الربع .... حيث س ≠ ٠ ، ص ≠ ٠ (كفر الشيخ ٢٢)

الحل: (+ ، +) الربع الأول

③ النقطة (س ، ص) تقع في الربع الثاني فإن النقطة (− س ، ص^٢) تقع في الربع ..... (الشرقية ٢٣)

الحل: ∵ الربع الثاني (− ، +) ∴ النقطة (− − ، (+)^٢) = (+ ، +) ∴ الربع الأول

④ إذا كانت النقطة (٥ ، ب − ١) تقع على محور السينات فإن : ب = ... (أسوان ٢٤)

الحل: ∵ النقطة تقع على محور السينات ∴ المسقط الثاني = ٠ ∴ ب − ١ = صفر

∴ ب = ١

⑤ إذا كانت النقطة (س − ٤ ، ٢ − س) حيث س ∈ ص تقع في الربع الثالث فإن : س = ...

أ ٢ ب ٣ ج ٤ د ٦ (أسيوط ٢٣ / المنيا ٢٤)

الحل: ∵ النقطة تقع في الربع الثالث (− ، −) ∴ س = ٣

حاصل الضرب الديكارتي لفترتين :

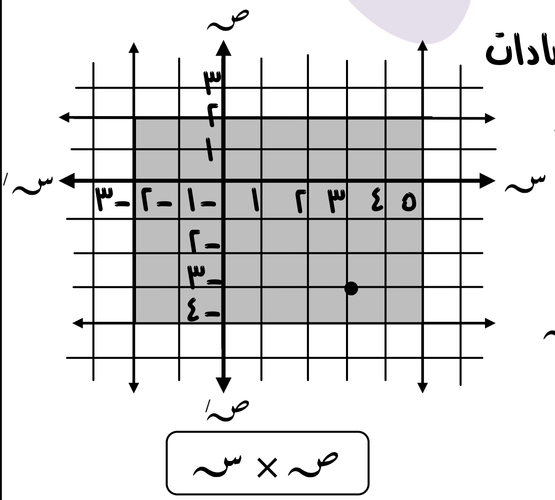
يكون حاصل الضرب الديكارتي لفترتين مجموعة جزئية من حاصل الضرب الديكارتي ح × ح

مثال (١٢) إختر :

إذا كان : س = [−٤ ، ٢] ، ص = [−٢ ، ٥] فإن : (٣ ، −٣) ∈ .... (الدقهلية ٢٢)

أ س × ص ب ص × س ج س^٢ د ص^٢

الحل



تمثل الفترة س على محور السينات ، والفترة ص على محور الصادات ثم تمثل منطقة تقاطع المستقيمات الحاصل الديكارتي س × ص

نجد أن : (٣ ، −٣) ∉ س × ص

نحاول مرة أخرى تمثل الفترة ص على محور السينات والفترة س على محور السينات ثم تمثل منطقة تقاطع المستقيمات ص × س

نجد أن : (٣ ، −٣) ∈ ص × س

3- العلاقة والدالة

☻ العلاقة :

العلاقة من س~ إلى ص~ حيث س~ ، ص~ مجموعتان غير خاليتين هي أرتباط يربط بعض أو كل عناصر س~ ببعض أو كل عناصر ص~

- **بيان العلاقة ع من س~ إلى ص~ :**

هي مجموعة الأزواج المرتبة التي تحقق العلاقة حيث المسقط الأول ∈ س~ والمسقط الثاني ∈ ص~

ملاحظات هامة :

♣ بيان العلاقة ع من س~ إلى ص~ مجموعة جزئية من الحاصل الديكارتي س~ × ص~

أي أن : ع ⊂ س~ × ص~ .

♣ بيان العلاقة ع من س~ إلى س~ فإننا نقول ع علاقة على س~ ويكون : ع ⊂ س~ × س~

☻ الدالة : يقال لعلاقة من س~ إلى ص~ أنها دالة إذا تحققت إحدى الحالات الآتية :

١ في بيان ع : كل عنصر من عناصر س~ يظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط في بيان ع .

٢ في المخطط السهمي : كل عنصر من عناصر س~ يخرج منه سهم واحد فقط إلى أحد عناصر ص~ .

٣ في المخطط البياني : كل خط رأسي تقع عليه نقطة واحدة فقط

☻ المجال و المجال المقابل و المدى : إذا كانت العلاقة دالة من س~ إلى ص~ فإن :

- مجال الدالة : هو عناصر المجموعة س~
- المجال المقابل : هو عناصر المجموعة ص~
- المدى : مجموعة صور عناصر المجال (س~)

ملاحظة هامة : مدى الدالة ⊂ المجال المقابل

كيفية استخراج المدى

- من بيان ع : عناصر المسقط الثاني في الأزواج المرتبة
- من المخطط السهمي : عناصر ص التي خرجت إليها الأسهم فقط
- من المخطط البياني : عناصر الخطوط الأفقية (ص) التي تظهر عليها نقط

- أمثلة على : هل العلاقات الآتية دالة أم لا ؟ ولماذا ؟

مثال ١

إذا كانت : س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ٣ ، ٤ ، ٦ }

فبين أي العلاقات الآتية تمثل دالة من س إلى ص ؟ ولماذا ؟

ع١ = { (١ ، ٣) ، (١ ، ٤) ، (٣ ، ٦) }   ع٢ = { ((١ ، ٤) ، (٣ ، ٤) }

ع٣ = { (١ ، ٣) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٦) }

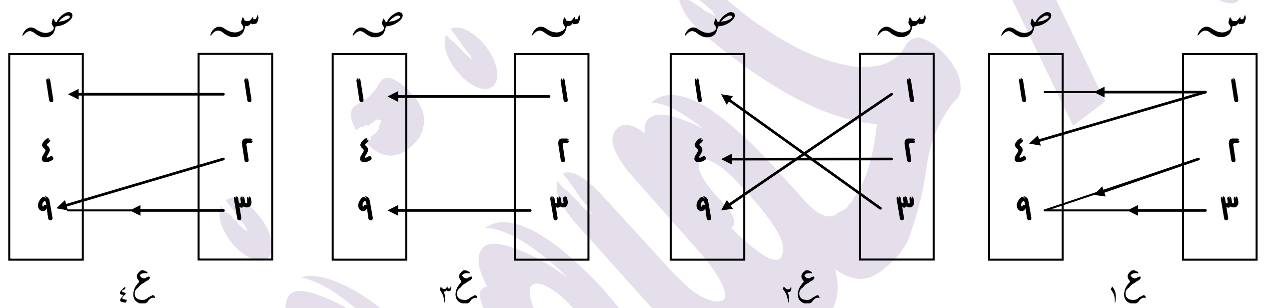
الحل

ع١ <u>ليست دالة</u> لأن العنصر ١ ∋ س وظهر كمسقط أول أكثر من مرة في بيان العلاقة

ع٢ <u>ليست دالة</u> لأن العنصر ٢ ∋ س ولم يظهر كمسقط أول في بيان العلاقة

ع٣ <u>دالة</u> لأن كل عنصر من عناصر س ظهر كمسقط أول مرة واحدة في بيان العلاقة

مثال ٢ بين أي المخططات السهمية الآتية يمثل دالة من س إلى ص ؟ ولماذا ؟



الحل

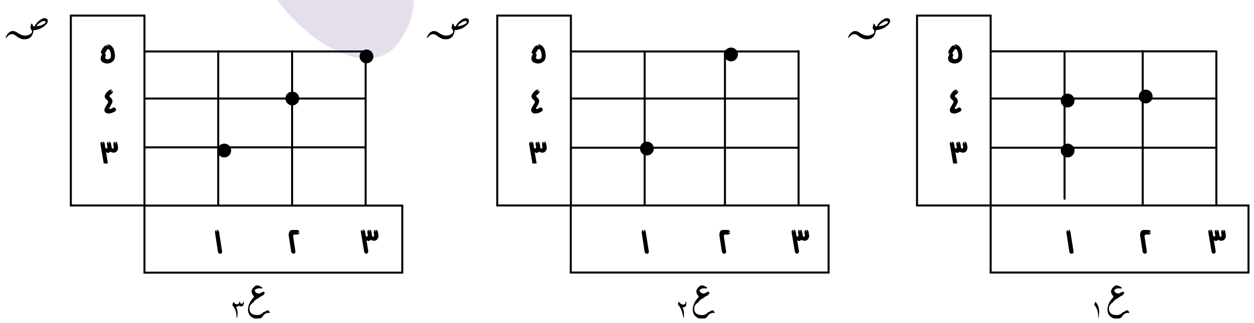
ع١ <u>ليست دالة</u> لأن العنصر ١ ∋ س خرج منه أكثر من سهم

ع٢ <u>دالة</u> لأن كل عنصر من عناصر س خرج منه سهم واحد فقط

ع٣ <u>ليست دالة</u> لأن العنصر ٢ ∋ س لم يخرج منه أي سهم

ع٤ <u>دالة</u> لأن كل عنصر من عناصر س خرج منه سهم واحد فقط

مثال ٣ بين أي المخططات البيانية الآتية يمثل دالة من س إلى ص ؟ ولماذا ؟



الحل

ع١ <u>ليست دالة</u> لوجود نقطتين على الخط الرأسي للعنصر ١

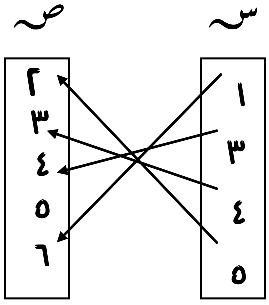
ع٢ <u>ليست دالة</u> لعدم وجود أي نقطة على الخط الرأسى للعنصر ٣

ع٣ <u>دالة</u> لأن كل خط رأسي تقع عليه نقطة واحدة فقط

مثال ٤ إذا كانت : س = { ١ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ، ص = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعني أن « أ + ب = ٧ » لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

أكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي . هل ع دالة ؟ ولماذا ؟ وأوجد مداها . (دمياط ٢٣ / كفر الشيخ ٢٤)

الحل



بيان ع = { (١،٦) ، (٣،٤) ، (٤،٣) ، (٥،٢) }

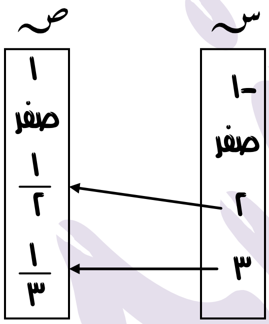
ع دالة : لأن كل عنصر من عناصر س خرج منه سهم واحد فقط

المدى = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ }

مثال ٥ إذا كانت : س = { -١ ، صفر ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ١ ، صفر ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعني أن « العدد أ هو المعكوس الضربي للعدد ب » لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص أكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي ، وبين هل ع دالة أم لا، ولماذا ؟

(الغربية ٢٠٢٠)

الحل



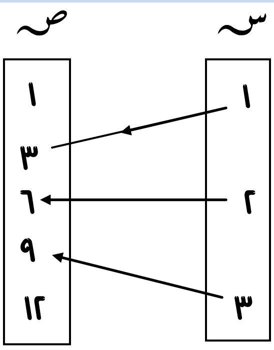
بيان ع = { (٢ ، $\frac{١}{٢}$) ، (٣ ، $\frac{١}{٣}$) }

ع ليست دالة : لأن العنصر -١ ∈ س لم يخرج منه أي سهم .

مثال ٦ إذا كانت : س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ١ ، ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعني أن « أ = $\frac{١}{٣}$ ب » لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

أكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي ، وبين أنها دالة واكتب مداها . (مطروح ١٩ / المنيا ٢٤)

الحل



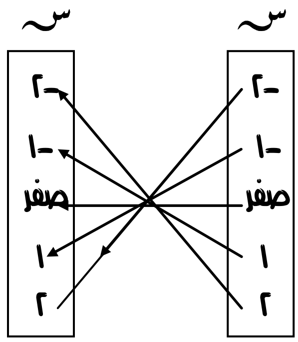
بيان ع = { (١ ، ٣) ، (٢ ، ٦) ، (٣ ، ٩) }

ع دالة لأن كل عنصر من عناصر س خرج منه سهم واحد فقط

المدى = { ٣ ، ٦ ، ٩ }

مثال ٧

إذا كانت : س = { -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ } وكانت ع علاقة علي س حيث ٩ ع ب تعني أن « العدد ٩ معكوس جمعي للعدد ب » لكل ٩ ∈ س ، ب ∈ س أكتب بيان ع و مثلها بمخطط سهمي ، وهل ع دالة أم لا ؟ ولماذا ؟ (المنيا ٢٢)



الحـــل

بيان ع = { (-٢ ، ٢) ، (-١ ، ١) ، (٠ ، ٠) ، (١ ، -١) ، (٢ ، -٢) }

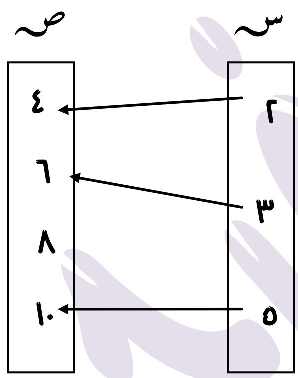
ع دالة لأن كل عنصر من عناصر س خرج منه سهم واحد فقط

مثال ٨

إذا كانت : س = { ٢ ، ٣ ، ٥ } ، ص = { ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث ٩ ع ب تعني أن « ٢٩ = ب » لكل ٩ ∈ س ، ب ∈ ص

١ أكتب بيان العلاقة و مثلها بمخطط سهمي .

٢ هل العلاقة ع دالة ؟ ولماذا ؟ (المنيا ٢٣)



الحـــل

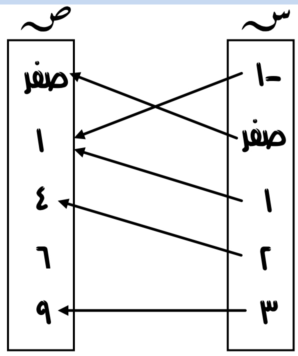
١ بيان ع = { (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٦) ، (٥ ، ١٠) }

٢ ع دالة من س إلى ص لأن كل عنصر من عناصر س خرج منه سهم واحد فقط

مثال ٩

إذا كانت : س = { -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ٠ ، ١ ، ٤ ، ٦ ، ٩ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث ٩ ع ب تعني أن « $٩^٢$ = ب » لكل ٩ ∈ س ، ب ∈ ص

١ أكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي . ٢ بين أن ع دالة وأوجد مداها . (الجيزة ٢٣)



الحـــل

١ بيان ع = { (-١ ، ١) ، (٠ ، ٠) ، (١ ، ١) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٩) }

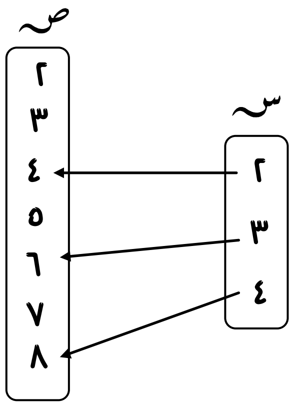
٢ ع دالة لأن كل عنصر من عناصر س خرج منه سهم واحد فقط

المدى = { ١ ، ٠ ، ٤ ، ٩ }

مثال ١٠

إذا كانت : س = { ٢ ، ٣ ، ٤ } ، ص = { ص : ص ∈ ط ، ٢ ≤ ص < ٩ }
حيث ط مجموعة الأعداد الطبيعية وكانت ع علاقة من س إلى ص
حيث أ ع ب تعني أن « أ = $\frac{1}{2}$ ب » لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص
١ أكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي .
٢ بين أن ع دالة من س إلى ص ، وأوجد مداها . (البحر الأحمر ٢٠)

الحل



١ ص = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ }
بيان ع = { (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٦) ، (٤ ، ٨) }
٢ ع دالة لأن كل عنصر من عناصر س يخرج منه سهم واحد فقط
المدى = { ٤ ، ٦ ، ٨ }

مثال ١١

إذا كانت : س = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } وكانت ع علاقة علي س
حيث أ ع ب تعني أن « أ ضعف ب » لكل أ ∈ س ، ب ∈ س
١ أكتب بيان العلاقة ع وبين إذا ما كانت دالة أم لا . ٢ هل « ٢ ع ٤ » ؟
٣ أوجد قيمة س إذا كان « ٦ ع س » (الجيزة ٢٠)

الحل

١ بيان ع = { (٠ ، ٠) ، (٢ ، ١) ، (٤ ، ٢) ، (٦ ، ٣) } ، ع ليست دالة
٢ لا ٣ س = ٣

مثال ١٢

إذا كانت : س = { ١ ، ٣ ، ٥ } وكانت ع دالة علي س وكان بيان
ع = { (أ ، ٣) ، (ب ، ١) ، (١ ، ٥) } فأوجد :
١ مدى الدالة ٢ القيمة العددية للمقدار أ + ب (المنيا / البحيرة ٢٣)

الحل

١ مدى الدالة = { ٣ ، ١ ، ٥ }
٢ ∵ ع دالة ∴ لابد أن يظهر كل عنصر من عناصر س كمسقط أول مرة واحدة في بيان ع
∴ أ = ٣ ، ب = ٥ أو أ = ٥ ، ب = ٣ ∴ أ + ب = ٣ + ٥ = ٨

مثال ١٣ إذا كان : بيان د = { (١ ، ٣) ، (٢ ، ٥) ، (٣ ، ٧) ، (٤ ، ٩) }

١ اكتب مجال الدالة د ٢ اكتب مدى الدالة

٣ اكتب قاعدة للدالة د (كفر الشيخ ٢٢)

الحـــل

١ مجال الدالة = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

٢ مدى الدالة = { ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ }

٣ قاعدة الدالة هي د (س) = ٢ س + ١

حاول بنفسك :

١ إذا كانت : س = { ٢ ، ٣ ، ٤ } ، ص = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعني أن « أ = $\frac{١}{٢}$ ب » لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي . بين أن ع دالة من س إلى ص وأوجد مداها . (بورسعيد ٢٠ / أسوان ٢٤)

---

٢ إذا كانت : س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ١ ، ٤ ، ٦ ، ٩ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعني أن « أ = $\sqrt{ب}$ » لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي ، وأذكر مع بيان السبب هل ع تمثل دالة أم لا ؟ (الإسماعيلية ٢٤)

---

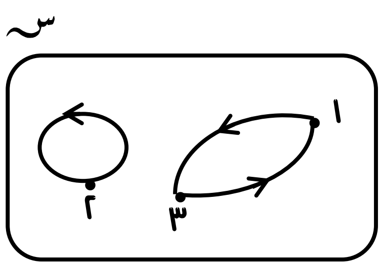
٣ إذا كانت : س = { -١ ، ١ ، ٢ } ، ص = { ٢ ، ٤ ، ٦ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعني أن « ب = ٢ أ + ٤ » لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي وهل ع دالة ؟ ولماذا ؟ (الأسكندرية ١٩)

---

٤ المخطط السهمي المقابل يمثل علاقة معرفة على س حيث : س = { ١ ، ٢ ، ٣ }

١ اكتب بيان ع

٢ هل ع دالة أم لا ؟ وإذا كانت دالة اذكر مداها .



(أسيوط ٢٤)

4- دوال كثيرات الحدود

تعريف : الدالة د : ح ⟵ ح ، د(س) = $أ_٠ + أ_١$ س + $أ_٢$ س^٢ + ... + $أ_ن$ س^ن

حيث $أ_٠$ ، $أ_١$ ، $أ_٢$ ، ..... ، $أ_ن$ ∈ ح ، ن ∈ ط تسمى دالة كثيرة حدود

أي أن : الدالة كثيرة الحدود هي دالة قاعدتها حد أو مقدار جبري ويتوفر فيها الشرطان الآتيان :

١ كل من المجال والمجال المقابل للدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية ح .

٢ قوة (أس) المتغير س في أي حد من حدود قاعدتها هو عدد طبيعي .

مثال ١

أي من الدوال التي لها القواعد الآتية يمثل دالة كثيرات الحدود ؟ مع ذكر السبب :

١ $د_١$(س) = س^٣ + س^٢ + ٣

٢ $د_٢$(س) = س^٣ + $\frac{١}{س}$ + ٧

٣ $د_٣$(س) = س^٢ + $\sqrt{س}$ + ٨

٤ $د_٤$(س) = س (س + $\frac{١}{س}$ + ٢)

الحـــل

١ $د_١$ هي دالة كثيرة حدود (لأن مجالها ح ومجالها المقابل ح وقوة المتغير س عدد طبيعي)

٢ $د_٢$ ليست دالة كثيرة حدود (لأن الدالة غير موجودة في ح إذا كانت س = ٠)

٣ $د_٣$ ليست دالة كثيرة حدود (لأن الدالة غير موجودة في ح إذا كانت س = عدد سالب)

٤ $د_٤$ هي دالة ليست كثيرة حدود (لأن الدالة غير موجودة في ح إذا كانت س = ٠

ملحوظة هامة : عند بحث ما إذا كانت الدالة كثيرة حدود أم لا فإننا لا نقوم بفك الأقواس .

حاول بنفسك : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

الدوال الآتية هي دوال كثيرات الحدود ما عدا الدالة د حيث د (س) = ... (الغربية ١٩)

أ س + ٣

ب $\sqrt{٢}$ س + ٣

جـ س (س + $\frac{١}{س}$)

د س^٢ (س + ٤)

درجة الدالة كثيرة الحدود : هي أكبر قوة (أس) للمتغير في قاعدة الدالة .

ملاحظات هامة :

١ عند بحث درجة الدالة يجب فك الأقواس أولاً قبل تحديد درجتها .

٢ في حالة د (س) = ٠ فإن الدالة د ليس لها درجة .

مثال ٢ اذكر درجة الدوال كثيرات الحدود التي لها القواعد الآتية :

١) $د(س) = ٣ - ٢س$ ٢) $د(س) = ٥س + ٢س^{٢}$

٣) $د(س) = س^{٣} - ٢س + ٣$ ٤) $د(س) = س(س - ٢س^{٢})$

٥) $د(س) = س^{٢} - (س^{٢} - ٣)$ ٦) $د(س) = س^{٢}(س - ٣)^{٢}$

الحل

١) $د(س) = ٣ - ٢س$ دالة كثيرة حدود من الدرجة الأولى (خطية)

٢) $د(س) = ٥س + ٢س^{٢}$ دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية (تربيعية)

٣) $د(س) = س^{٣} - ٢س + ٣$ دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة (تكعيبية)

٤) $د(س) = س(س - ٢س^{٢}) = س^{٢} - ٢س^{٣}$ دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة (تكعيبية)

٥) $د(س) = س^{٢} - (س^{٢} - ٣) = \cancel{س^{٢}} - \cancel{س^{٢}} + ٣ = ٣$ دالة كثيرة حدود من الدرجة صفر (ثابتة)

٦) $د(س) = س^{٢}(س - ٣)^{٢} = س^{٢}(س^{٢} - ٦س + ٩) = س^{٤} - ٦س^{٣} + ٩س^{٢}$

دالة كثيرة حدود من الدرجة الرابعة

حاول بنفسك : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١) الدالة د : $د(س) = س^{٤} - ٢س^{٣} + ٧$ كثيرة حدود من الدرجة .... (بور سعيد ٢٣)

أ) الأولى ب) الثانية جـ) الثالثة د) الرابعة

٢) الدالة د : $د(س) = س^{٢} - (س - ٣)^{٢}$ من الدرجة .... (الدقهلية ٢٠)

أ) صفر ب) الأولى جـ) الثانية د) الثالثة

مثال ٣ إذا كانت $د(س) = س^{٢} - س + ٣$ فأوجد : $د(-٢)$ ، $د(٠)$ ، $د(\sqrt{٣})$

(الإسكندرية ٢٠٢٣)

الحل

$\because د(س) = س^{٢} - س + ٣$

$\therefore د(-٢) = (-٢)^{٢} - (-٢) + ٣ = ٤ + ٢ + ٣ = ٩$

$د(٠) = (٠)^{٢} - (٠) + ٣ = ٠ - ٠ + ٣ = ٣$

$د(\sqrt{٣}) = (\sqrt{٣})^{٢} - (\sqrt{٣}) + ٣ = ٣ - \sqrt{٣} + ٣ = ٦ - \sqrt{٣}$

مثال ٤ إذا كانت : د(س) = س^٢ − ٣س ، ر(س) = س − ٣

١ أوجد : د(√٢) + ٣ر(√٢)

٢ اثبت أن : د(٣) = ر(٣) = صفر (الأقصر ٢٣ / الأسكندرية ٢٤ / أسوان ٢٤)

الحل

١ د(√٢) + ٣ر(√٢)

= (√٢)^٢ − ٣ × √٢ + ٣(√٢ − ٣)

= ٢ − ٣√٢ + ٣√٢ − ٩ = −٧

٢ ∵ د(٣) = (٣)^٢ − ٣ × ٣ = ٩ − ٩ = صفر

، ر(٣) = ٣ − ٣ = صفر ∴ د(٣) = ر(٣) = صفر

حاول بنفسك : إذا كانت د(س) = ٢س^٢ − ٥س + ٢ أثبت أن : د(٢) = د($\frac{١}{٢}$) (الأقصر ١٤)

مثال ٥ إذا كانت د(س) = ٥س − أ ، ر(س) = س − ٢أ

وكان د(١) + ر(٣) = −٧ فأوجد قيمة أ (الأسكندرية ٢٠)

الحل

∵ د(١) + ر(٣) = −٧

∴ ٥ − أ + ٣ − ٢أ = −٧

∴ −٣أ + ٨ = −٧ ∴ −٣أ = −٧ − ٨ ∴ −٣أ = −١٥ ∴ أ = ٥

مثال ٦

إذا كانت : د(س) = ٤س + ب ، د(٣) = ١٥ أوجد : قيمة ب (بني سويف ٢٢)

الحل بالتعويض عن قيمة س = ٣ ، د(س) = ١٥

∴ ٤ × ٣ + ب = ١٥ ∴ ١٢ + ب = ١٥ ∴ ب = ٣

مثال ٧ أكمل ما يأتي :

إذا كانت : د(س) = س^٢ − س + ٣ فإن : د(−٢) = ... (الجيزة ١٥)

الحل بالتعويض عن قيمة س = −٢ في قاعدة الدالة

∴ د(−٢) = (−٢)^٢ − (−٢) + ٣ = ٤ + ٢ + ٣ = ٩

٥- دراسة بعض دوال كثيرات الحدود

أولاً　الدالة الخطية :

تعريف : هي دالة كثيرة الحدود قاعدتها على الصورة د (س) = أ س + ب　حيث أ ∈ ع*، ب ∈ ع
لذا فهي من الدرجة الأولى ومداها ع

فمثلاً : د (س) = س + ٢　،　د (س) = ٢س + ١　،　د (س) = ٣ س　،　د (س) = س
(الدوال ذات القواعد السابقة كلها دوال خطية من الدرجة الأولى لأن أس المتغير س يساوي ١)

التمثيل البياني للدالة الخطية :

- تمثل الدالة الخطية د (س) = أ س + ب بخط مستقيم يقطع محور السينات في النقطة ($\frac{-ب}{أ}$ ، ٠) ويقطع محور الصادات في النقطة (٠ ، ب)
- عند تمثيل الدالة الخطية يكتفى بإيجاد زوجين مرتبين ينتميان إلى بيان الدالة ويفضل إيجاد زوج مرتب ثالث للتحقق من صحة التمثيل البياني .

مثال ١

مثل بيانياً الدالة د : د (س) = ٢س + ١　ثم أوجد نقطتي تقاطع المستقيم الممثل لها مع محوري الإحداثيات .　(سوهاج ١٤)

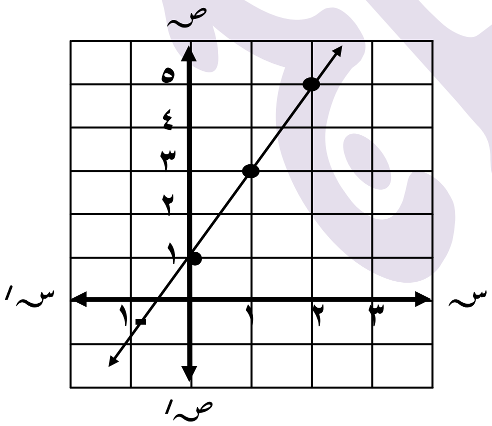
الحـــل

س	٠	١	٢
د(س)	١	٣	٥

∵ أ = ٢　،　ب = ١

نقطة التقاطع مع محور السينات = ($\frac{-ب}{أ}$ ، ٠) = ($\frac{-١}{٢}$ ، ٠)

نقطة التقاطع مع محور الصادات = (٠ ، ب) = (٠ ، ١)



حاول بنفسك :

- مثل بيانياً الدالة د : د (س) = ٢ س - ٣　ثم أوجد نقطتي تقاطع المستقيم الممثل لهذه الدالة مع محوري الإحداثيات حيث س ∈ ع　(البحيرة ٢٣)

ملاحظة هامة : الدالة د : ع ⟵ ع حيث د(س) = ٢ س ، ٢ ∈ ع* يمثلها بيانيا خط مستقيم يمر بنقطة الأصل (٠ ، ٠) مثل : د (س) = ٥ س

حاول بنفسك : إختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

❶ الدالة د : د (س) = ٣ س يمثلها بيانياً خط مستقيم يمر بالنقطة .... (بني سويف ١٧)

أ (٣ ، ٣) ب (٣ ، ٠) ج (٠ ، ٠) د (٠ ، ٣)

❷ إذا كان المستقيم الذي يمثل الدالة د : د (س) = ٣ س – ٢ يمر بنقطة الأصل فإن : ٢ = ... (دمياط ٢٤)

أ –٣ ب صفر ج ٢ د ٣

مثال ٢ أكمل ما يأتي :

❶ الدالة الخطية المعرفة بالقاعدة : ص = ٢ س – ١ يمثلها خط مستقيم يقطع محور الصادات في النقطة .... (مطروح ٢٠)

الحل المستقيم يقطع محور الصادات في النقطة (٠ ، ب) = (٠ ، –١)

❷ الدالة الخطية المعرفة بالقاعدة : ص = ٣ س + ٦ يمثلها خط مستقيم يقطع محور السينات في النقطة ....

الحل المستقيم يقطع محور السينات في النقطة $\left(\frac{-ب}{٢} ، ٠ \right) = \left(\frac{-٦}{٣} ، ٠ \right) = (-٢ ، ٠)$

مثال ٣ إذا كانت النقطة (٢ ، ٣) تقع على الخط المستقيم الممثل للدالة د : ع ⟵ ع حيث د (س) = ٤ س – ٥ فأوجد : قيمة ٢ (الجيزة ٢٢ / مطروح ٢٤)

الحل

∵ (٢ ، ٣) تقع على المستقيم الذي يمثل الدالة د

∴ تحقق الدالة ، نعوض عن س = ٢ ، د (س) = ٣

∴ ٣ = ٤ ٢ – ٥

∴ ٤ ٢ = ٣ + ٥ ∴ ٤ ٢ = ٨ ∴ ٢ = ٢

مثال ٤ إذا كان المستقيم الممثل للدالة د : ع ⟵ ع حيث د (س) = ٤ س + ٢ يقطع محور السينات في النقطة (٢ ، ب) أوجد : قيمة ٢ ، ب (المنيا ٢٤)

الحل

∵ المستقيم يقطع محور السينات في النقطة (٢ ، ب) ∴ ب = ٠

∴ (٢ ، ٠) تحقق الدالة ، نعوض عن س = ٢ ، د (س) = ٠

∴ ٠ = ٤ × ٢ + ٢ ∴ ٠ = ٨ + ٢ ∴ ٢ = -٨

حاول بنفسك :

- إذا كان المستقيم الممثل للدالة د : ع ⟵ ع حيث د (س) = ٤ س + ب يقطع محور السينات في النقطة (٣ ، م - ٥) ، فأوجد قيمة : ب ، م (الوادي الجديد ٢٣)

مثال ٥ إذا كان المستقيم الممثل للدالة د : ع ⟵ ع حيث د (س) = ٦ س - ٢ يقطع محور الصادات في النقطة (ب ، ٣)

أوجد : [١] قيمة ٢ ، ب [٢] ٢٢ + ٧ب (القليوبية ١٨)

الحل

[١] ∵ المستقيم يقطع محور الصادات في النقطة (ب ، ٣) ∴ ب = ٠

∴ (٠ ، ٣) تحقق الدالة ، نعوض عن س = ٠ ، د (س) = ٣

∴ ٣ = ٦ × ٠ - ٢

∴ ٣ = ٠ - ٢ ∴ ٢ = ٠ - ٣ ∴ ٢ = -٣

[٢] ∴ ٢٢ + ٧ب = ٢ × -٣ + ٧ × ٠ = -٦

ثانياً **الدالة الثابتة :**

تعريف : الدالة د : ع ⟵ ع حيث د (س) = ب ، ب ∈ ع تسمى دالة ثابتة .

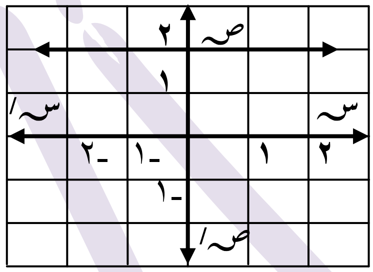
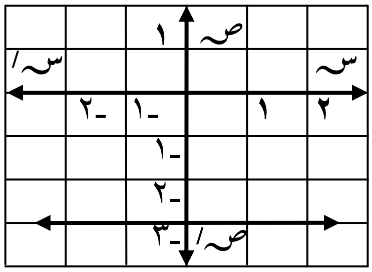
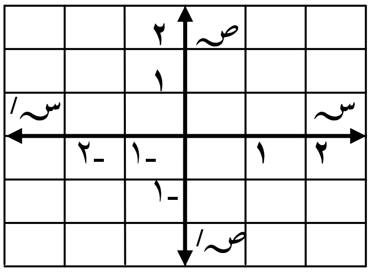
لذا هي من الدرجة صفر (قاعدتها عدد فقط دون رموز)

فمثلاً : د (س) = ٥ دالة ثابتة حيث : د (١) = ٥ ، د (٠) = ٥ ، د (-٢) = ٥ ، ..... وهكذا

التمثيل البياني للدالة الثابتة :

الدالة الثابتة د : د (س) = ب (حيث ب ∈ ع) يمثلها بيانياً خط مستقيم أفقي يوازي محور السينات ويقطع محور الصادات في النقطة (٠ ، ب)

الأمثلة التالية توضح :

د : د (س) = ٢	د : د (س) = -٣	د : د (س) = ٠
		
المستقيم يقطع محور الصادات في النقطة (٠ ، ٢)	المستقيم يقطع محور الصادات في النقطة (٠ ، -٣)	المستقيم منطبق على محور السينات ويمر بالنقطة (٠ ، ٠)

ملاحظة هامة : في حالة د (س) = ٠ فإنها تسمى دالة صفرية ودرجتها غير معرفة (ليس لها درجة) و يمثلها بيانياً خط مستقيم منطبق على محور السينات

حاول بنفسك : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

❶ إذا كانت : د (س) = ٥ فإن : د (-٥) = ... (القليوبية ٢٣)

أ -٥ ب -١٠ ج ٢٥ د ٥

❷ إذا كانت : د (س) = ٣ فإن : د (٥) + د (-٥) = ... (سوهاج ٢٤)

أ ٦ ب ١ ج صفر د -١

❸ إذا كانت : د (٢س) = ٤ فإن : د (-س) = ... (الدقهلية ٠٩)

أ -٢ ب -٤ ج ٤ د ٢

❹ إذا كانت : د (س) = ٣ فإن : $\frac{\text{د (٦)}}{\text{د (صفر)}}$ = ... (الدقهلية ١٧)

أ ٦ ب ١ ج ٣ د غير معرفة

❺ إذا كانت : د (س) = ٢س - م ، د (٢) = ٥ فإن : م = ... (سوهاج ٢٣)

أ ١ ب -١ ج ١١ د -٢

ثالثاً: الدالة التربيعية

تعريف : الدالة $د : ح \longrightarrow ح$ حيث $د(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ$ حيث أ ، ب ، جـ أعداد حقيقية ، $أ \neq ٠$ تسمى دالة تربيعية (وهي كثيرة حدود من الدرجة الثانية)

فمثلاً : $د(س) = س^{٢}$ ، $د(س) = س^{٢} - ١$ ، $د(س) = ٣س^{٢} - ٧س + ٢$ ، $د(س) = ٤ - س^{٢}$

الدوال ذات القواعد السابقة كلها دوال تربيعية من الدرجة الثانية لأن أكبر أس للمتغير س هو ٢

التمثيل البياني للدالة التربيعية :

☻ الدالة د حيث $د(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ$ ، $أ \neq ٠$ تمثل بمنحنى ولها الخصائص الآتية :

١ إذا كان معامل $س^{٢}$ موجب فإن منحني الدالة مفتوح لأعلى و يكون للدالة قيمة صغري $= د\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)$

٢ إذا كان معامل $س^{٢}$ سالباً فإن منحني الدالة مفتوح لأسفل و يكون للدالة قيمة عظمى $= د\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)$

٣ نقطة رأس المنحنى $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، د\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$ ، معادلة محور التماثل هي : $س = \frac{-ب}{٢أ}$

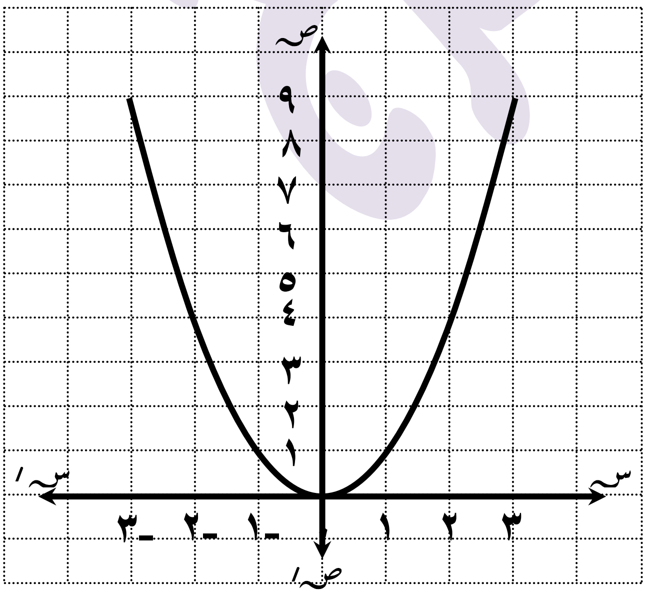
مثال ١ مثل بيانياً منحنى الدالة د حيث $د(س) = س^{٢}$ ، $س \in ح$ متخذاً $س \in [-٣ ، ٣]$

ومن الرسم استنتج : ١ نقطة رأس المنحنى ٢ القيمة الصغرى للدالة

٣ معادلة محور التماثل (أسيوط ٢٣)

الحـــل

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
د(س)	٩	٤	١	٠	١	٤	٩

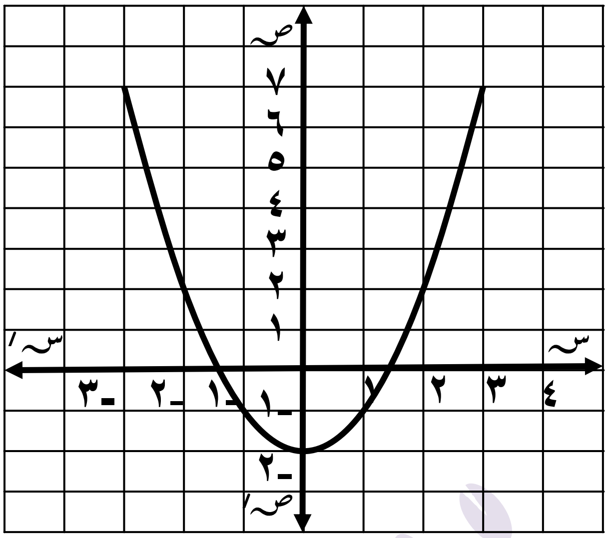


- نقطة رأس المنحنى (٠ ، ٠)
- القيمة الصغرى للدالة = ٠
- معادلة محور التماثل س = ٠

مثال ٢ مثل بيانياً منحنى الدالة د حيث د (س) = س^٢ − ٢ متخذاً س ∈ [−٣ ، ٣]
ومن الرسم استنتج : ١ نقطة رأس المنحنى ٢ القيمة الصغرى للدالة
٣ معادلة محور التماثل (الغربية / بورسعيد ٢٣ / المنيا ٢٤)

الحل

س	−٣	−٢	−١	٠	١	٢	٣
د(س)	٧	٢	−١	−٢	−١	٢	٧

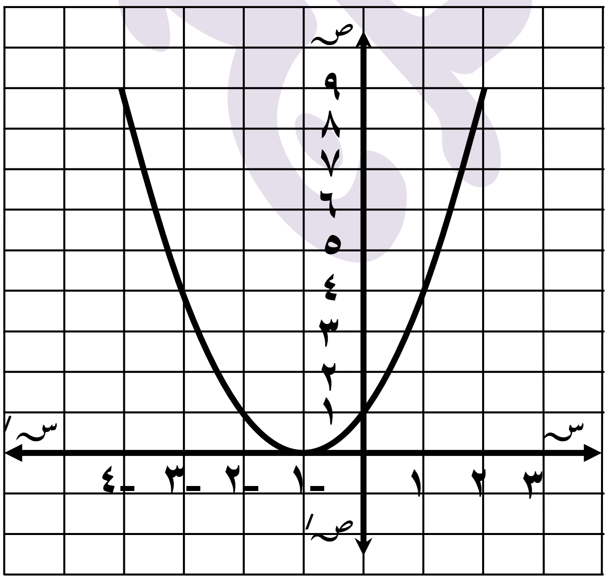


- نقطة رأس المنحنى (٠ ، −٢)
- القيمة الصغرى للدالة = −٢
- معادلة محور التماثل هي س = ٠

مثال ٣ مثل بيانياً منحنى الدالة د حيث د (س) = س^٢ + ٢ س + ١ متخذاً س ∈ [−٤ ، ٢]
ومن الرسم استنتج : نقطة رأس المنحنى و القيمة الصغرى للدالة و معادلة محور التماثل
(بني سويف ٢٣ / المنوفية ٢٤ / أسوان ٢٤)

الحل

س	−٤	−٣	−٢	−١	٠	١	٢
د(س)	٩	٤	١	٠	١	٤	٩

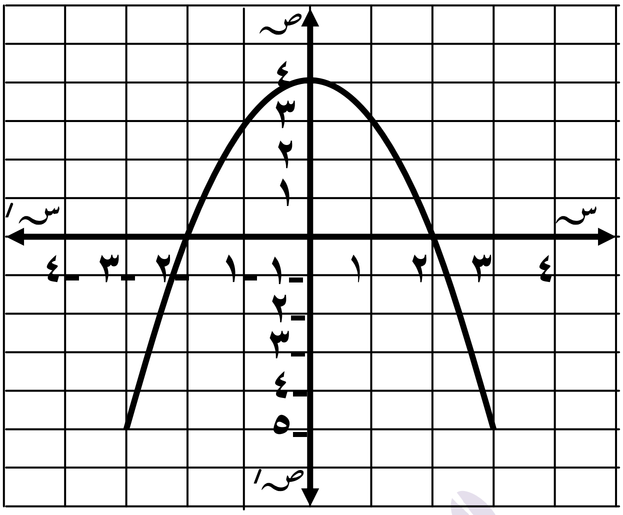


- نقطة رأس المنحنى (−١ ، ٠)
- القيمة الصغرى للدالة = ٠
- معادلة محور التماثل هي س = −١

مثال ٤ مثل بيانياً منحنى الدالة د حيث د (س) = ٤ − س٢ متخذاً س ∈ [−٣ ، ٣]
ومن الرسم استنتج : ١ نقطة رأس المنحنى　٢ القيمة العظمى أو الصغرى للدالة
٣ معادلة محور التماثل　(الجيزة ٢٣ / دمياط ٢٤ / أسيوط ٢٤)

الحل

س	−٣	−٢	−١	٠	١	٢	٣
د(س)	−٥	٠	٣	٤	٣	٠	−٥

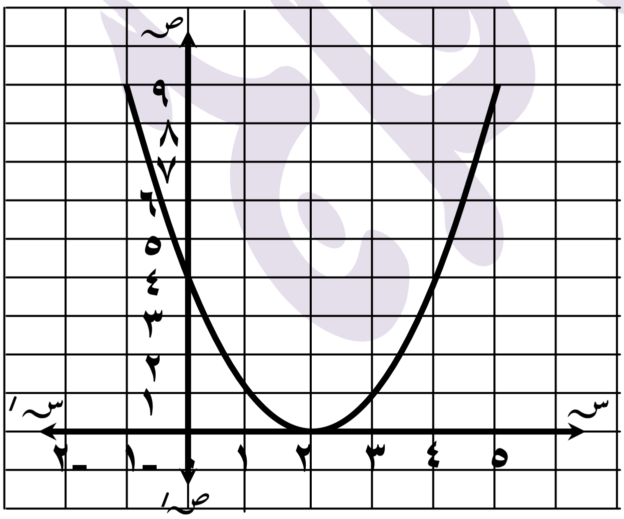


- نقطة رأس المنحنى (٠ ، ٤)
- القيمة العظمى للدالة = ٤
- معادلة محور التماثل هي س = ٠

مثال ٥ مثل بيانياً منحنى الدالة د حيث د (س) = (س − ٢)٢ متخذاً س ∈ [−١ ، ٥]
ومن الرسم استنتج : ١ نقطة رأس المنحنى　٢ القيمة الصغرى للدالة
٣ معادلة محور التماثل　(الغربية ٢٠ / البحيرة ٢٤)

الحل

س	−١	٠	١	٢	٣	٤	٥
د(س)	٩	٤	١	٠	١	٤	٩



- نقطة رأس المنحنى (٢ ، ٠)
- القيمة الصغرى للدالة = ٠
- معادلة محور التماثل هي س = ٢

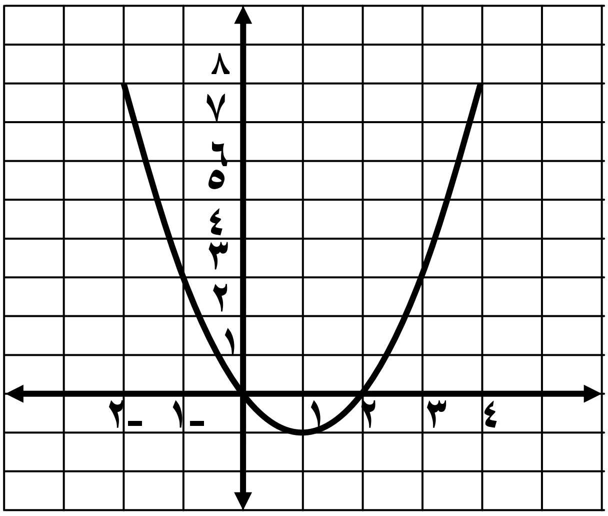
حاول بنفسك مثل بيانياً منحنى الدالة د حيث د (س) = س٢ − ٤ متخذاً س ∈ [−٣ ، ٣]
ومن الرسم استنتج : نقطة رأس المنحنى و القيمة الصغرى للدالة و معادلة محور التماثل
(الأقصر ٢٣ / كفر الشيخ ٢٤)

مثال ٦

مثل بيانياً منحنى الدالة د حيث د (س) = س٢ – ٢ س متخذاً س ∋ [-٢ ، ٤]

ومن الرسم استنتج : ١ نقطة رأس المنحنى　　٢ القيمة الصغرى للدالة

٣ معادلة محور التماثل　　(الشرقية ٢٣)



الحـــل

س	-٢	-١	٠	١	٢	٣	٤
د(س)	٨	٣	٠	-١	٠	٣	٨

- نقطة رأس المنحنى (١ ، -١)
- القيمة الصغري للدالة = -١
- معادلة محور التماثل هي س = ١

مثال ٧

الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

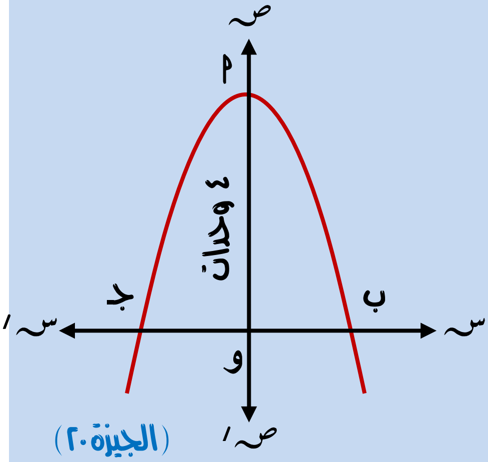
حيث د (س) = م – س٢

فإذا كان : م و = ٤ وحدات

أوجد : ١ قيمة م

٢ إحداثي كلاً من النقطتين ب ، جـ

٣ مساحة سطح المثلث الذي رؤوسه النقط م ، ب ، جـ



(الجيزة ٢٠)

الحـــل

∵ م و = ٤ وحدات　∴ نقطة م = (٠ ، ٤)　، ∵ النقطة م (٠ ، ٤) تنتمي لمنحنى الدالة

∴ م تحقق معادلة المنحنى ، نعوض عن س = ٠ ، د (س) = ٤

∴ ٤ = م – (٠)٢　∴ م = ٤　(المطلوب أولاً)

∵ منحنى الدالة يقطع محور السينات في النقطتين ب ، جـ

∴ ٠ = ٤ – س٢　∴ س٢ = ٤　∴ س = ٢ أو -٢

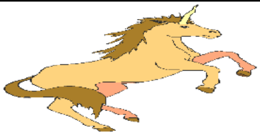
∴ ب = (٢ ، ٠) ، جـ = (-٢ ، ٠)　(المطلوب ثانياً)

∴ ب جـ = ٤ وحدات طول

∴ مساحة Δ م ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٤ = ٨ وحدات مربعة　(المطلوب ثالثاً)

الوحدة الثانية

١ – النسبة



أولاً النسبة :

النسبة : هي علاقة بين كميتين من نفس النوع ولهما نفس الوحدات

إذا كان أ ، ب عددين حقيقين فإن النسبة بين أ ، ب تكتب أ : ب أو $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ وتقرأ أ إلي ب حيث :

يُسمي أ مقدم النسب ، يُسمي ب تالي النسبة ، يُسمي أ ، ب معاً حدي النسبة .

خواص النسبة :

١ إذا كانت $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{٣}{٤}$ فإن : أ = ٣م ، ب = ٤م

٢ إذا كانت $\frac{\text{أ}}{٢} = \frac{\text{ب}}{٥}$ فإن : أ = ٢م ، ب = ٥م

٣ قيمة النسبة لا تتغير إذا ضُرب حداها في أو قُسما على عدد حقيقي لا يساوي الصفر .

$$\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{٥\text{س}}{٥\text{ص}} \quad ، \quad \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{س} \div ٥}{\text{ص} \div ٥}$$

٤ قيمة النسبة تتغير إذا أُضيف إلى حديها أو طُرح منهما عدد حقيقي لا يساوي الصفر .

$$\frac{\text{س}}{\text{ص}} \neq \frac{\text{س} + ٢}{\text{س} + ٢} \quad ، \quad \frac{\text{س}}{\text{ص}} \neq \frac{\text{س} - ٢}{\text{س} - ٢}$$

٥ إذا كان : ٥ س = ٤ ص فإن : $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{٤}{٥}$

مثال ١

أوجد العدد الذى إذا أُضيف إلى حدى النسبة ٥ : ١١ فإنها تصبح ٤ : ٧ (القاهرة ٢٤)

الحـــل

نفرض أن العدد = س ∴ $\frac{٥ + \text{س}}{١١ + \text{س}} = \frac{٤}{٧}$ (مقص)

∴ ٣٥ + ٧س = ٤٤ + ٤س

∴ ٧س – ٤س = ٤٤ – ٣٥

∴ ٣س = ٩ (÷٣) ∴ س = ٣ ∴ العدد المطلوب = ٣

مثال ٢

أوجد العدد الذى إذا أُضيف مربعه إلى كل من حدى النسبة ٧ : ١١ فإنها تصبح ٤ : ٥ (المنوفية ٢٠)

الحـــل

نفرض أن العدد = س ، مربعه س٢ ∴ $\frac{٧ + س^٢}{١١ + س^٢} = \frac{٤}{٥}$ (مقص)

∴ ٣٥ + ٥ س٢ = ٤٤ + ٤ س٢

∴ ٥ س٢ − ٤ س٢ = ٤٤ − ٣٥

∴ س٢ = ٩ ∴ س = ± ٣ ∴ العدد المطلوب = ٣ أو −٣

مثال ٣

أوجد العدد الذى إذا طُرح ثلاثة أمثاله من حدي النسبة $\frac{٤٩}{٦٩}$ فإنها تصبح $\frac{٢}{٣}$ (البحيرة ٢٠)

الحـــل

نفرض أن العدد = س ، ثلاثة أمثاله ٣ س ∴ $\frac{٤٩ - ٣س}{٦٩ - ٣س} = \frac{٢}{٣}$ (مقص)

∴ ١٤٧ − ٩ س = ١٣٨ − ٦ س

∴ −٩ س + ٦ س = ١٣٨ − ١٤٧

∴ −٣ س = −٩ ∴ س = ٣ ∴ العدد المطلوب = ٣

مثال ٤

عددان صحيحان النسبة بينهما ٣ : ٧ ، إذا طُرح من كل منهما ٥ أصبحت النسبة بينهما ١ : ٣
أوجد العددين . (المنوفية / سوهاج ٢٣)

الحـــل

نفرض أن العددين هما ٣ س ، ٧ س ∴ $\frac{٣س - ٥}{٧س - ٥} = \frac{١}{٣}$ (مقص)

∴ ٩ س − ١٥ = ٧ س − ٥

∴ ٩ س − ٧ س = −٥ + ١٥ ∴ ٢ س = ١٠ ∴ س = ٥

∴ العدد الأول = ٣ س = ٣ × ٥ = ١٥

∴ العدد الثاني = ٧ س = ٧ × ٥ = ٣٥ ∴ العددان هما ١٥ ، ٣٥

2- التناسب

تعريف : التناسب هو تساوي نسبتين أو أكثر .

- إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{ى}$ فإن أ ، ب ، جـ ، ى تكون متناسبة
- إذا كانت الكميات أ ، ب ، جـ ، ى متناسبة فإن $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{ى}$

ويُسمى $\boxed{أ}$ بالأول المتناسب ، $\boxed{ب}$ بالثاني المتناسب

، $\boxed{جـ}$ بالثالث المتناسب ، $\boxed{ى}$ بالرابع المتناسب

كما يُسمى $\boxed{أ ، ى}$ بطرفي التناسب ، $\boxed{ب ، جـ}$ بوسطي التناسب

خواص التناسب

خاصية (١)

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{ى}$ فإن أ × ى = ب × جـ (حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين)

مثال ١ أكمل ما يأتي :

❶ الثاني المتناسب للأعداد : ٢ ، ... ، ٨ ، ١٢ هو .... (المنيا ١٨)

الحل: نفرض أن الثاني المتناسب هو س ∴ الكميات ٢ ، س ، ٨ ، ١٢ متناسبة

∴ $\frac{٢}{س} = \frac{٨}{١٢}$ ∴ ٨ × س = ٢ × ١٢ ∴ س = $\frac{٢ \times ١٢}{٨}$ = ٣

❷ الثالث المتناسب للأعداد : ٤ ، ١٢ ، ... ، ٤٨ هو .... (كفر الشيخ ١٩)

الحل: $\frac{٤}{١٢} = \frac{س}{٤٨}$ ∴ س = $\frac{٤ \times ٤٨}{١٢}$ = ١٦ (حل مختصر)

مثال ٢

أوجد الرابع المتناسب للكميات : ٣ ، ٥ ، ٦ هو .... (القاهرة ٢٤)

الحل: $\frac{٣}{٥} = \frac{٦}{س}$ ∴ س = $\frac{٥ \times ٦}{٣}$ = ١٠

حاول بنفسك :

❶ إذا كانت : ٤ ، س ، ١٦ ، ٤٨ كميات متناسبة فإن : س = ... (سوهاج ٢٢)

❷ الرابع المتناسب للأعداد : ٤ ، ١٢ ، ١٦ هو .... (الغربية ٢٠)

❸ إذا كانت : س ، ٣ ، ٤ ، ٦ كميات متناسبة فإن س = ... (القاهرة ٢٠)

مثال ٣

أوجد العدد الذي إذا أُضيف إلى كل من الأعداد الآتية ٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٢ فإنها تكون متناسبة (أسيوط ١٨ / الشرقية ٢٤)

الحـــل

بفرض أن العدد = س

∴ ٣ + س ، ٥ + س ، ٨ + س ، ١٢ + س متناسبة

$$\frac{٣ + س}{٥ + س} = \frac{٨ + س}{١٢ + س}$$ يضرب الطرفين و الوسطين

∴ ٣٦ + ٣ س + ١٢ س + $\cancel{س^٢}$ = ٤٠ + ٥ س + ٨ س + $\cancel{س^٢}$

∴ ٣٦ + ١٥ س = ٤٠ + ١٣ س

∴ ١٥ س − ١٣ س = ٤٠ − ٣٦　∴ ٢ س = ٤　∴ س = ٢　∴ العدد المطلوب = ٢

مثال ٤

إذا كان : (٢ س + ٥) : (٣ س − ٣) = ٥ : ٤ فأوجد : قيمة س (ج. سيناء ١٩)

الحـــل

$$\because \frac{٢ س + ٥}{٣ س − ٣} = \frac{٥}{٤}$$

∴ ٨ س + ٢٠ = ١٥ س − ١٥

∴ ٨ س − ١٥ س = −١٥ − ٢٠

∴ −٧ س = −٣٥　(÷ −٧)

∴ س = ٥

خاصية (٢)

إذا كان : $أ \times ء = ب \times جـ$ فإن : $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{ء}$

مثال ٥

❶ إذا كان : $٣أ - ٤ب = ٠$ فإن $أ : ب = ...$ (البحيرة ٢٤)

الحـل $٣أ = ٤ب$ ∴ $أ : ب = ٤ : ٣$

❷ إذا كان : $٢أ = ٣ب$ فإن $\frac{٣أ}{٢ب} = ...$ (الدقهلية ١٨)

الحـل $٢أ = ٣ب$ ∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٢}$ ∴ $\frac{٣أ}{٢ب} = \frac{٣ \times ٣}{٢ \times ٢} = \frac{٩}{٤}$

مثال ٦

إذا كان : $\frac{س - ٢ص}{٢س + ص} = \frac{١}{٣}$ أوجد : $\frac{س}{ص}$ (أسيوط ٢٣)

الحـل

بضرب الطرفين والوسطين ∴ $٣س - ٦ص = ٢س + ص$

∴ $٣س - ٢س = ص + ٦ص$

∴ $س = ٧ص$ ∴ $\frac{س}{ص} = \frac{٧}{١} = ٧$

مثال ٧

إذا كانت : $٤س^٢ = ٩ص^٢$ فإن : $\frac{س}{ص} = ...$ (بني سويف ١٦)

الحـل

$\frac{س^٢}{ص^٢} = \frac{٩}{٤}$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

∴ $\frac{س}{ص} = \pm \frac{٣}{٢}$

خاصية (٣)

إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{ء}$ فإن : $\frac{أ}{جـ} = \frac{ب}{ء}$ أي أن : $\frac{\text{مقدم}}{\text{مقدم}} = \frac{\text{تالي}}{\text{تالي}}$

مثال ٨

إذا كانت : أ ، س ، ب ، ٢ س كميات متناسبة فإن : $\frac{أ}{ب} = \dots\dots\dots$ (السويس ٢٢ / المنوفية ٢٤)

الحل

∵ أ ، س ، ب ، ٢ س كميات متناسبة

∴ $\frac{أ}{س} = \frac{ب}{٢ س}$ ∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{\cancel{س}}{٢ \cancel{س}}$ ∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{١}{٢}$

خاصية (٤)

إذا كانت أ ، ب ، جـ ، ء كميات متناسبة

فإن : $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{ء} = م$ ويكون أ = ب م ، جـ = ء م حيث م ∈ ع*

فمثلاً : $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٤}$ فإن : أ = ٣ م ، ب = ٤ م (حيث م ثابت ≠ صفر)

مثال ٩

إذا كان : $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٣}$ أوجد قيمة النسبة : $\frac{٣ س + ٢ ص}{٦ ص - س}$ (المنيا ٢٠ / قنا ٢٤)

الحل

∵ $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٣}$ ∴ س = ٢ م ، ص = ٣ م

∴ $\frac{٣ س + ٢ ص}{٦ ص - س} = \frac{٦ م + ٦ م}{١٨ م - ٢ م} = \frac{١٢ \cancel{م}}{١٦ \cancel{م}} = \frac{٣}{٤}$

حاول بنفسك :

إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٥}$ أوجد قيمة $\frac{٧ أ + ٩ ب}{٤ أ + ٢ ب}$ (القاهرة ٢٠ / أسوان ٢٤)

مثال ١٠

إذا كانت : ٥ أ = ٣ ب أوجد قيمة (٧ أ + ٩ ب) : (٤ أ + ٢ ب)   (الجيزة / الإسكندرية ٢٣ / الغربية ٢٤)

$\because \text{٥أ} = \text{٣ب} \quad \therefore \frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{٣}}{\text{٥}} \quad \therefore \text{أ} = \text{٣م} \ ، \ \text{ب} = \text{٥م}$

$$\therefore \frac{\text{٧أ} + \text{٩ب}}{\text{٤أ} + \text{٢ب}} = \frac{\text{٢١م} + \text{٤٥م}}{\text{١٢م} + \text{١٠م}} = \frac{\text{٦٦م}}{\text{٢٢م}} = \text{٣}$$

مثال ١١

إذا كان : $\frac{\text{س}}{\text{٣}} = \frac{\text{ص}}{\text{٤}} = \frac{\text{ع}}{\text{٥}}$ فأثبت أن : $\frac{\text{٢ص} - \text{ع}}{\text{٣س} - \text{٢ص} + \text{ع}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}$ (بورسعيد ٢٢ / إسكندرية ٢٤)

الحل

$\text{س} = \text{٣م} \ ، \ \text{ص} = \text{٤م} \ ، \ \text{ع} = \text{٥م}$

$$\text{الطرف الأيمن} = \frac{\text{٢ص} - \text{ع}}{\text{٣س} - \text{٢ص} + \text{ع}} = \frac{\text{٢}\times\text{٤م} - \text{٥م}}{\text{٣}\times\text{٣م} - \text{٢}\times\text{٤م} + \text{٥م}} = \frac{\text{٨م} - \text{٥م}}{\text{٩م} - \text{٨م} + \text{٥م}}$$

$$= \frac{\text{٣م}}{\text{٦م}} = \frac{\text{٣}}{\text{٦}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}$$

مثال ١٢

إذا كان : $\frac{\text{س}}{\text{٣}} = \frac{\text{ص}}{\text{٤}} = \frac{\text{ع}}{\text{٥}}$ فأثبت أن : $\sqrt{\text{٣س}^{\text{٢}} + \text{٣ص}^{\text{٢}} + \text{ع}^{\text{٢}}} = \text{٢س} + \text{ص}$ (دمياط ١٩)

الحل

$\text{س} = \text{٣م} \ ، \ \text{ص} = \text{٤م} \ ، \ \text{ع} = \text{٥م}$

$$\text{الطرف الأيمن} = \sqrt{\text{٣س}^{\text{٢}} + \text{٣ص}^{\text{٢}} + \text{ع}^{\text{٢}}} = \sqrt{\text{٣}\times\text{٩م}^{\text{٢}} + \text{٣}\times\text{١٦م}^{\text{٢}} + \text{٢٥م}^{\text{٢}}}$$

$$= \sqrt{\text{٢٧م}^{\text{٢}} + \text{٤٨م}^{\text{٢}} + \text{٢٥م}^{\text{٢}}} = \sqrt{\text{١٠٠م}^{\text{٢}}} = \text{١٠م}$$

$$\text{الطرف الأيسر} = \text{٢س} + \text{ص} = \text{٢}\times\text{٣م} + \text{٤م} = \text{٦م} + \text{٤م} = \text{١٠م}$$

مثال ١٣

إذا كانت أ : ب : جـ = ٥ : ٧ : ٣ وكان : أ + ب = ٢٧,٦

فأوجد قيمة كل من : أ ، ب ، جـ (القليوبية ١٦)

الحل

∵ أ : ب : جـ = ٥ : ٧ : ٣

∴ أ = ٥م ، ب = ٧م ، جـ = ٣م

∵ أ + ب = ٢٧,٦ ∴ ٥م + ٧م = ٢٧,٦

∴ ١٢م = ٢٧,٦ (÷ ١٢) ∴ م = ٢,٣

∴ أ = ٥ × ٢,٣ = ١١,٥ ، ب = ٧ × ٢,٣ = ١٦,١ ، جـ = ٣ × ٢,٣ = ٦,٩

مثال ١٤

إذا كان : $\frac{\text{أ}}{\text{ب} - \text{أ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د} - \text{جـ}}$ فأثبت أن : أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة (أسوان ٢٠)

الحل

بضرب الطرفين والوسطين ∴ أ (د − جـ) = جـ (ب − أ)

∴ أ د − $\cancel{\text{أ جـ}}$ = جـ ب − $\cancel{\text{أ جـ}}$

∴ أ د = جـ ب ∴ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ ∴ أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

مثال ١٥

إذا كان : أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة فأثبت أن : $\frac{\text{أ}}{\text{ب} - \text{أ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د} - \text{جـ}}$ (الوادي الجديد ٢٣)

الحل

أ = ب م

جـ = د م

∵ أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة ∴ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{م}$

الطرف الأيمن = $\frac{\text{أ}}{\text{ب} - \text{أ}} = \frac{\text{ب م}}{\text{ب} - \text{ب م}} = \frac{\cancel{\text{ب}}\,\text{م}}{\cancel{\text{ب}}\,(١ - \text{م})} = \frac{\text{م}}{(١ - \text{م})}$

الطرف الأيسر = $\frac{\text{جـ}}{\text{د} - \text{جـ}} = \frac{\text{د م}}{\text{د} - \text{د م}} = \frac{\cancel{\text{د}}\,\text{م}}{\cancel{\text{د}}\,(١ - \text{م})} = \frac{\text{م}}{(١ - \text{م})}$

مثال ١٦

إذا كان : س ، ص ، ع ، ل كميات متناسبة فأثبت أن : $\frac{ص - س}{س} = \frac{ل - ع}{ع}$ (المنيا ٢٠٢٢)

الحـــل

$$س = ص م \qquad ع = ل م$$

∵ س ، ص ، ع ، ل كميات متناسبة ∴ $\frac{س}{ص} = \frac{ع}{ل} = م$

الطرف الأيمن $= \frac{ص - س}{س} = \frac{ص - ص م}{ص م} = \frac{\cancel{ص}(١ - م)}{\cancel{ص} م} = \frac{(١ - م)}{م}$

الطرف الأيسر $= \frac{ل - ع}{ع} = \frac{ل - ل م}{ل م} = \frac{\cancel{ل}(١ - م)}{\cancel{ل} م} = \frac{(١ - م)}{م}$

مثال ١٧

إذا كان : أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة فأثبت أن : $\frac{٣أ - ٢جـ}{٥أ + ٣جـ} = \frac{٣ب - ٢د}{٥ب + ٣د}$ (ج . سيناء ٢٢)

الحـــل

$$أ = ب م \qquad جـ = د م$$

∵ أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة ∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} = م$

الطرف الأيمن $= \frac{٣أ - ٢جـ}{٥أ + ٣جـ} = \frac{٣ب م - ٢د م}{٥ب م + ٣د م} = \frac{\cancel{م}(٣ب - ٢د)}{\cancel{م}(٥ب + ٣د)} = \frac{٣ب - ٢د}{٥ب + ٣د}$

الطرف الأيسر $= \frac{٣ب - ٢د}{٥ب + ٣د}$ ∴ الطرفان متساويان

مثال ١٨

إذا كان : أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة فأثبت أن : $\frac{أ جـ}{ب د} = \left(\frac{أ - جـ}{ب - د}\right)^٢$ (الجيزة ٢٣)

الحـــل

$$أ = ب م \qquad جـ = د م$$

∵ أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة ∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} = م$

الطرف الأيمن $= \frac{أ جـ}{ب د} = \frac{ب م \times د م}{ب د} = \frac{\cancel{ب د} م^٢}{\cancel{ب د}} = \frac{م^٢}{١} = م^٢$

الطرف الأيسر $= \left(\frac{أ - جـ}{ب - د}\right)^٢ = \left(\frac{ب م - د م}{ب - د}\right)^٢ = \left(\frac{م\cancel{(ب - د)}}{\cancel{ب - د}}\right)^٢ = \frac{م^٢}{١} = م^٢$

خاصية (٥)

إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{ء} = \frac{هـ}{و} = م$ فإن : $\frac{أ + جـ + هـ}{ب + ء + و} = م$

أي أن : $\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالي}} =$ إحدى النسب

حاول بنفسك :

إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{ء} = \frac{٣}{٥}$ فإن : $\frac{أ + جـ}{ب + ء} =$ ....   (بور سعيد ٢٣)

أ $\frac{٥}{٣}$ ب $\frac{٣}{٥}$ جـ $\frac{٦}{٥}$ ء $\frac{٥}{٦}$

مثال ١

إذا كان : $\frac{أ}{٢} = \frac{ب}{٣} = \frac{جـ}{٤} = \frac{٢أ - ب + ٥جـ}{٣س}$ فأوجد قيمة س .   (أسيوط ٢٣ / مطروح ٢٤)

الحل

بضرب النسبة الأولى × ٢ والثانية × -١ والثالثة × ٥ وجمعهما

$$\frac{٢أ - ب + ٥جـ}{٤ - ٣ + ٢٠} = \frac{\cancel{٢أ - ب + ٥جـ}}{٣س}$$

∴ ٤ − ٣ + ٢٠ = ٣س   ∴ ٢١ = ٣س   (÷ ٣)   ∴ س = ٧

حاول بنفسك :

❶ إذا كان : $\frac{أ}{٢} = \frac{ب}{٥} = \frac{٢أ + ب}{ك}$ فإن : ك = ...   (الجيزة ٢٤)

أ ٣   ب ٤   جـ ٧   ء ٩

❷ إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{ء} = \frac{٥}{٨}$ فإن : $\frac{ب + ء}{أ + جـ} =$ ....   (الفيوم ٢٢)

أ $\frac{٥}{٨}$ ب $\frac{٨}{٥}$ جـ $\frac{١٣}{٨}$ ء $\frac{٥}{١٣}$

مثال ٢

إذا كان : $\dfrac{\text{س}}{\text{٢أ}+\text{ب}} = \dfrac{\text{ص}}{\text{٢ب}-\text{جـ}} = \dfrac{\text{ع}}{\text{٢جـ}-\text{أ}}$ فأثبت أن : $\dfrac{\text{٢س}+\text{ص}}{\text{٤أ}+\text{٤ب}-\text{جـ}} = \dfrac{\text{٢س}+\text{٢ص}+\text{ع}}{\text{٣أ}+\text{٦ب}}$

(الأسكندرية / البحيرة ٢٣)

الحل

بضرب النسبة الأولى × ٢ والجمع مع النسبة الثانية

$$\dfrac{\text{٢س}+\text{ص}}{\text{٤أ}+\text{٢ب}+\text{٢ب}-\text{جـ}} = \dfrac{\text{٢س}+\text{ص}}{\text{٤أ}+\text{٤ب}-\text{جـ}} \qquad (١)$$

بضرب النسبة الأولى × ٢ والثانية × ٢ وجمع النسب الثلاثة

$$\dfrac{\text{٢س}+\text{٢ص}+\text{ع}}{\text{٤أ}+\text{٢ب}+\text{٤ب}-\cancel{\text{٢جـ}}+\cancel{\text{٢جـ}}-\text{أ}} = \dfrac{\text{٢س}+\text{٢ص}+\text{ع}}{\text{٣أ}+\text{٦ب}} \qquad (٢)$$

من ١، ٢ ينتج أن : $\dfrac{\text{٢س}+\text{ص}}{\text{٤أ}+\text{٤ب}-\text{جـ}} = \dfrac{\text{٢س}+\text{٢ص}+\text{ع}}{\text{٣أ}+\text{٦ب}}$

مثال ٣

إذا كان : $\dfrac{\text{س}+\text{ص}}{٥} = \dfrac{\text{ص}+\text{ع}}{٣} = \dfrac{\text{ع}+\text{س}}{٦}$ فأثبت أن : $\dfrac{\text{س}-\text{ع}}{٢} = \dfrac{\text{س}+\text{ص}+\text{ع}}{٧}$

(مطروح ٢٣)

الحل

بضرب النسبة الثانية × ١- والجمع مع النسبة الأولى

$$\dfrac{\text{س}+\cancel{\text{ص}}-\cancel{\text{ص}}-\text{ع}}{٥-٣} = \dfrac{\text{س}-\text{ع}}{٢} \qquad (١)$$

بجمع مقدمات وتوالي النسب الثلاثة

$$\dfrac{\text{س}+\text{ص}+\text{ص}+\text{ع}+\text{ع}+\text{س}}{٥+٣+٦} = \dfrac{\text{٢س}+\text{٢ص}+\text{٢ع}}{١٤}$$

$$\dfrac{\overset{١}{\cancel{٢}}(\text{س}+\text{ص}+\text{ع})}{\underset{٧}{\cancel{١٤}}} = \dfrac{\text{س}+\text{ص}+\text{ع}}{٧} \qquad (٢)$$

من ١، ٢ ينتج أن : $\dfrac{\text{س}-\text{ع}}{٢} = \dfrac{\text{س}+\text{ص}+\text{ع}}{٧}$

مثال ٤

إذا كان : $\frac{\text{س}+\text{ص}}{٧} = \frac{\text{ص}+\text{ع}}{٥} = \frac{\text{ع}+\text{س}}{٨}$ فأثبت أن : $\frac{\text{س}+\text{ص}+\text{ع}}{\text{س}-\text{ع}} = ٥$ (أسيوط ٢٤)

الحل

بجمع مقدمات وتوالي النسب الثلاثة

$$\frac{\text{س}+\text{ص}+\text{ص}+\text{ع}+\text{ع}+\text{س}}{٧+٥+٨} = \frac{٢\text{س}+٢\text{ص}+٢\text{ع}}{٢٠} = \frac{٢(\text{س}+\text{ص}+\text{ع})}{٢٠} = \frac{\text{س}+\text{ص}+\text{ع}}{١٠} \quad (١)$$

بضرب النسبة الثانية × ‎-١ والجمع مع النسبة الأولى

$$\frac{\text{س}+\cancel{\text{ص}}-\cancel{\text{ص}}-\text{ع}}{٧-٥} = \frac{\text{س}-\text{ع}}{٢} \quad (٢)$$

من ١ ، ٢ ينتج أن : $\frac{\text{س}+\text{ص}+\text{ع}}{١٠} = \frac{\text{س}-\text{ع}}{٢}$

$$\frac{\text{مقدم}}{\text{مقدم}} = \frac{\text{تالي}}{\text{تالي}}$$

$$\therefore \frac{\text{س}+\text{ص}+\text{ع}}{\text{س}-\text{ع}} = ٥$$

مثال ٥

إذا كان : $\frac{\text{أ}+\text{ب}}{٣} = \frac{\text{ب}+\text{جـ}}{٦} = \frac{\text{جـ}+\text{أ}}{٥}$ فأثبت أن : $\frac{\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ}}{\text{أ}} = ٧$ (السويس ١٩)

الحل

بجمع مقدمات وتوالي النسب الثلاثة

$$\frac{\text{أ}+\text{ب}+\text{ب}+\text{جـ}+\text{جـ}+\text{أ}}{٣+٦+٥} = \frac{٢\text{أ}+٢\text{ب}+٢\text{جـ}}{١٤} = \frac{٢(\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ})}{١٤} = \frac{\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ}}{٧} \quad (١)$$

بضرب النسبة الثانية × ‎-١ وجمع النسب الثلاثة

$$\frac{\text{أ}+\cancel{\text{ب}}-\cancel{\text{ب}}-\cancel{\text{جـ}}+\cancel{\text{جـ}}+\text{أ}}{٣-٦+٥} = \frac{\cancel{٢}\text{أ}}{\cancel{٢}} = \frac{\text{أ}}{١} \quad (٢)$$

من ١ ، ٢ ينتج أن : $\frac{\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ}}{٧} = \frac{\text{أ}}{١}$ $\quad \therefore \frac{\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ}}{\text{أ}} = ٧$

3- التناسب المتسلسل

- إذا كانت ب وسطاً متناسباً بين ٩ ، جـ فإن :

٩ الأول المتناسب ، ب الوسط المتناسب ، جـ الثالث المتناسب

- الوسط المتناسب بين عددين = ± $\sqrt{\text{الأول} \times \text{الثالث}}$

مثال ١ إختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

❶ الوسط المتناسب بين العددين : ٣ ، ٢٧ هو .... (البحيرة ٢٠)

أ ± ١٨ ب ٩ جـ -٩ د ± ٩

الحل الوسط المتناسب = ± $\sqrt{٣ \times ٢٧}$ = ± $\sqrt{٨١}$ = ± ٩

❷ الثالث المتناسب للعددين : ٣ ، ٦ هو .... (المنيا ٢٣ / الإسكندرية ٢٤)

أ $\frac{١}{٢}$ ب ٩ جـ ٢ د ١٢

الحل ٣ ، ٦ ، س كميات متناسبة ∴ $\frac{٣}{٦} = \frac{٦}{س}$ ∴ س = $\frac{٦ \times ٦}{٣}$ = ١٢

❸ الوسط المتناسب <u>الموجب</u> للكميتين ٩ ، جـ هو .... (القاهرة ٢٢)

أ ٩ جـ ب - $\sqrt{٩ جـ}$ جـ $\frac{٩}{جـ}$ د $\sqrt{٩ جـ}$

مثال ٢

إذا كانت : ٣ ، ب ، ١٢ ثلاث كميات موجبة متناسبة أوجد قيمة : ٤ ب + ١ (ش . سيناء ٢٢)

الحل

الوسط المتناسب (ب) = ± $\sqrt{٣ \times ١٢}$ = ± $\sqrt{٣٦}$ = ± ٦

السالب مرفوض لأنها كميات موجبة ∴ ب = ٦

∴ ٤ب + ١ = ٤ × ٦ + ١ = ٢٥

ملاحظات هامة

- إذا كانت ب وسطاً متناسباً بين أ ، جـ فإن : $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = م$

  ∴ ب = جـ م ، أ = جـ $م^2$

- إذا كانت أ ، ب ، جـ ، ء في تناسب متسلسل فإن : $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{ء} = م$

  ∴ جـ = ء م ، ب = ء $م^2$ ، أ = ء $م^3$

مثال ٣

إذا كانت ب وسطاً متناسباً بين أ ، جـ فأثبت أن : $\frac{أ^2 + ب^2}{ب^2 + جـ^2} = \frac{أ}{جـ}$ (دقهلية / بحيرة / أسيوط ٢٤)

الحل

ب = جـ م
أ = جـ $م^2$

∵ أ ، ب ، جـ في تناسب متسلسل فإن : $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = م$

الطرف الأيمن = $\frac{أ^2 + ب^2}{ب^2 + جـ^2} = \frac{جـ^2 م^4 + جـ^2 م^2}{جـ^2 م^2 + جـ^2} = \frac{\cancel{جـ^2} م^2 \cancel{(م^2 + 1)}}{\cancel{جـ^2} \cancel{(م^2 + 1)}} = م^2$

الطرف الأيسر = $\frac{أ}{جـ} = \frac{\cancel{جـ} م^2}{\cancel{جـ}} = م^2$ ∴ الطرفان متساويان

مثال ٤

إذا كانت ب وسطاً متناسباً بين أ ، جـ فأثبت أن : $\frac{أ - ب}{أ - جـ} = \frac{ب}{ب + جـ}$ (المنيا ٢٢)

الحل

ب = جـ م
أ = جـ $م^2$

∵ أ ، ب ، جـ في تناسب متسلسل فإن : $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = م$

الطرف الأيمن = $\frac{أ - ب}{أ - جـ} = \frac{جـ م^2 - جـ م}{جـ م^2 - جـ} = \frac{جـ م (م - 1)}{جـ (م^2 - 1)} = \frac{\cancel{جـ} م \cancel{(م - 1)}}{\cancel{جـ} \cancel{(م - 1)} (م + 1)} = \frac{م}{(م + 1)}$

الطرف الأيسر = $\frac{ب}{ب + جـ} = \frac{جـ م}{جـ م + جـ} = \frac{\cancel{جـ} م}{\cancel{جـ} (م + 1)} = \frac{م}{(م + 1)}$ الطرفان متساويان

مثال ٥

إذا كانت ب وسطاً متناسباً بين ٢ ، جـ فأثبت أن : $\frac{٢جـ^٢ - ٣ب^٢}{٢ب^٢ - ٣\,٢^٢} = \frac{جـ}{٢} = \frac{جـ^٢}{ب^٢}$ (قنا ٢٢)

الحل

$\boxed{ب = جـ م \quad ٢ = جـ م^٢}$

$\because$ ٢ ، ب ، جـ في تناسب متسلسل فإن : $\frac{٢}{ب} = \frac{ب}{جـ} = م$

الطرف الأيمن $= \frac{٢جـ^٢ - ٣ب^٢}{٢ب^٢ - ٣\,٢^٢} = \frac{٢جـ^٢ - ٣جـ^٢م^٢}{٢جـ^٢م^٢ - ٣جـ^٢م^٤} = \frac{\cancel{جـ^٢}(\cancel{٢ - ٣م^٢})}{\cancel{جـ^٢}م^٢(\cancel{٢ - ٣م^٢})} = \frac{١}{م^٢}$

الطرف الأوسط $= \frac{جـ}{٢} = \frac{\cancel{جـ}}{\cancel{جـ}م^٢} = \frac{١}{م^٢}$

الطرف الأيسر $= \frac{جـ^٢}{ب^٢} = \frac{\cancel{جـ^٢}}{\cancel{جـ^٢}م^٢} = \frac{١}{م^٢}$ $\therefore$ الطرفان متساويان

مثال ٦

إذا كانت ص وسطاً متناسباً بين س ، ع فأثبت أن : $\frac{س ع}{ص(ص + ع)} = \frac{س}{س + ص}$ (المنيا ٢٢)

الحل

$\boxed{ص = ع م \quad س = ع م^٢}$

$\because$ س ، ص ، ع في تناسب متسلسل فإن : $\frac{س}{ص} = \frac{ص}{ع} = م$

الطرف الأيمن $= \frac{س ع}{ص(ص + ع)} = \frac{ع م^٢ \times ع}{ص^٢ + ص ع} = \frac{ع^٢م^٢}{ع^٢م^٢ + ع م \times ع}$

$= \frac{ع^٢م^٢}{ع^٢م^٢ + ع^٢م} = \frac{\cancel{ع^٢م}^{م}}{\cancel{ع^٢م}(م + ١)} = \frac{م}{(م + ١)}$

الطرف الأيسر $= \frac{س}{س + ص} = \frac{ع م^٢}{ع م^٢ + ع م} = \frac{\cancel{ع م}^{م}}{\cancel{ع م}(م + ١)} = \frac{م}{(م + ١)}$

$\therefore$ الطرفان متساويان

مثال ٧

إذا كانت ٢ ، ب ، جـ ، ء في تناسب متسلسل فأثبت أن : $\frac{جـ^٢ - ء^٢}{٢ - جـ} = \frac{ب ء}{٢}$ (الغربية ٢٢)

الحل

$\because$ أ ، ب ، جـ ، د في تناسب متسلسل فإن : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{م}$

$\text{جـ} = \text{د}\,\text{م}$ ، $\text{ب} = \text{د}\,\text{م}^2$ ، $\text{أ} = \text{د}\,\text{م}^3$

الطرف الأيمن $= \frac{\text{جـ}^2 - \text{د}^2}{\text{أ} - \text{جـ}} = \frac{\text{د}^2\text{م}^2 - \text{د}^2}{\text{د}\,\text{م}^3 - \text{د}\,\text{م}} = \frac{\text{د}^{\cancel{2}}\cancel{(\text{م}^2 - 1)}}{\cancel{\text{د}}\,\text{م}\cancel{(\text{م}^2 - 1)}} = \frac{\text{د}}{\text{م}}$

الطرف الأيسر $= \frac{\text{ب}\,\text{د}}{\text{أ}} = \frac{\text{د}\,\text{م}^2 \times \text{د}}{\text{د}\,\text{م}^3} = \frac{\text{د}^{\cancel{2}}\cancel{\text{م}^2}}{\cancel{\text{د}^2}\cancel{\text{م}^3}} = \frac{\text{د}}{\text{م}}$ $\therefore$ الطرفان متساويان

مثال ٨

إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د في تناسب متسلسل فأثبت أن : $\frac{\text{أ}\text{ب} - \text{جـ}\,\text{د}}{\text{ب}^2 - \text{جـ}^2} = \frac{\text{أ} + \text{جـ}}{\text{ب}}$ (المنوفية ٢٢)

الحل

$\because$ أ ، ب ، جـ ، د في تناسب متسلسل فإن : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{م}$

$\text{جـ} = \text{د}\,\text{م}$ ، $\text{ب} = \text{د}\,\text{م}^2$ ، $\text{أ} = \text{د}\,\text{م}^3$

الطرف الأيمن $= \frac{\text{أ}\text{ب} - \text{جـ}\,\text{د}}{\text{ب}^2 - \text{جـ}^2} = \frac{\text{د}\,\text{م}^3 \times \text{د}\,\text{م}^2 - \text{د}\,\text{م} \times \text{د}}{\text{د}^2\text{م}^4 - \text{د}^2\text{م}^2} = \frac{\text{د}^2\text{م}^5 - \text{د}^2\text{م}}{\text{د}^2\text{م}^4 - \text{د}^2\text{م}^2}$

$= \frac{\text{د}^2\text{م}(\text{م}^4 - 1)}{\text{د}^2\text{م}^2(\text{م}^2 - 1)} = \frac{\cancel{\text{د}^2\text{م}}(\text{م}^2 + 1)\cancel{(\text{م}^2 - 1)}}{\cancel{\text{د}^2}\text{م}^{\cancel{2}}\cancel{(\text{م}^2 - 1)}} = \frac{(\text{م}^2 + 1)}{\text{م}}$

الطرف الأيسر $= \frac{\text{أ} + \text{جـ}}{\text{ب}} = \frac{\text{د}\,\text{م}^3 + \text{د}\,\text{م}}{\text{د}\,\text{م}^2} = \frac{\cancel{\text{د}\,\text{م}}(\text{م}^2 + 1)}{\cancel{\text{د}}\,\text{م}^{\cancel{2}}} = \frac{(\text{م}^2 + 1)}{\text{م}}$

مثال ٩

إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د في تناسب متسلسل فأثبت أن : $\frac{\text{أ}^2 - 3\text{جـ}^2}{\text{ب}^2 - 3\text{د}^2} = \frac{\text{ب}}{\text{د}}$ (اسكندرية / الشرقية ٢٤)

الحل

$\because$ أ ، ب ، جـ ، د في تناسب متسلسل فإن : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{م}$

$\text{جـ} = \text{د}\,\text{م}$ ، $\text{ب} = \text{د}\,\text{م}^2$ ، $\text{أ} = \text{د}\,\text{م}^3$

الطرف الأيمن $= \frac{\text{أ}^2 - 3\text{جـ}^2}{\text{ب}^2 - 3\text{د}^2} = \frac{\text{د}^2\text{م}^6 - 3\text{د}^2\text{م}^2}{\text{د}^2\text{م}^4 - 3\text{د}^2} = \frac{\cancel{\text{د}^2}\text{م}^2\cancel{(\text{م}^4 - 3)}}{\cancel{\text{د}^2}\cancel{(\text{م}^4 - 3)}} = \text{م}^2$

الطرف الأيسر $= \frac{\text{ب}}{\text{د}} = \frac{\cancel{\text{د}}\,\text{م}^2}{\cancel{\text{د}}} = \text{م}^2$ $\therefore$ الطرفان متساويان

مثال ١٠

إذا كانت الكميات $٦ م^٢ ب^٢$ ، $٣ م ب$ ، جـ في تناسب متسلسل فأوجد : قيمة جـ (دمياط ٢٤)

الحل

∵ $٦ م^٢ ب^٢$ ، $٣ م ب$ ، جـ في تناسب متسلسل

فإن : $\frac{٦ م^٢ ب^٢}{٣ م ب} = \frac{٣ م ب}{جـ}$ بضرب الطرفين و الوسطين

∴ $٦ \cancel{م^٢ ب^٢}$ جـ $= ٩ \cancel{م^٢ ب^٢}$

∴ ٦ جـ = ٩ (÷٦)

∴ جـ $= \frac{٩}{٦} = \frac{٣}{٢}$

مثال ١١

إذا كان : م ، ٢ ، ٤ ، ب في تناسب متسلسل فأوجد : قيمة م + ب (سوهاج ٢٤)

الحل

∵ م ، ٢ ، ٤ ، ب في تناسب متسلسل

فإن : $\frac{م}{٢} = \frac{٢}{٤} = \frac{٤}{ب}$

∴ م $= \frac{٢ \times ٢}{٤} = ١$ ، ب $= \frac{٤ \times ٤}{٢} = ٨$

∴ م + ب = ١ + ٨ = ٩

حاول بنفسك :

إذا كان : ٢ ، م ، ب ، ٥٤ في تناسب متسلسل أوجد قيمة م + ب (القليوبية ٢٤)

4- التغير الطردي

- إذا كانت ص تتغير طردياً مع س فإنها تكتب ص $\propto$ س ومنها يكون :

لإيجاد العلاقة	لحساب الثابت (م)	لإيجاد قيمة
ص = م س	م = $\frac{ص}{س}$	$\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{س_١}{س_٢}$

- العلاقة الطردية يمثلها بيانياً خط مستقيم يمر بنقطة الأصل (٠ ، ٠)
- لإثبات أن ص $\propto$ س نثبت أن ص = (ثابت) س

مثال ١

إذا كانت : ص $\propto$ س وكانت ص = ٦ عندما س = ٣ فأوجد :

١ العلاقة بين س ، ص ٢ قيمة ص عندما س = ٥ (أسيوط ٢٢)

الحل

∵ ص $\propto$ س ∴ ص = م س

∴ ٦ = م × ٢ ∴ م = $\frac{٦}{٣}$ = ٢ ∴ العلاقة هي $\boxed{\text{ص = ٢ س}}$

بالتعويض عن س = ٥ ∴ ص = ٢ × ٥ = ١٠

مثال ٢

إذا كانت : ص $\propto$ س وكانت ص = ١٤ عندما س = ٤٢ فأوجد :

أولاً : العلاقة بين ص ، س ثانياً : قيمة ص عندما س = ٦٠ (الجيزة / القليوبية ٢٣ / المنيا ٢٤)

الحل

∵ ص $\propto$ س ∴ ص = م س

∴ ١٤ = ٤٢ × م ∴ م = $\frac{١٤}{٤٢}$ = $\frac{١}{٣}$ ∴ العلاقة هي $\boxed{\text{ص} = \frac{١}{٣}\text{ س}}$

بالتعويض عن س = ٦٠ ∴ ص = $\frac{١}{٣}$ × ٦٠ = ٢٠

حاول بنفسك :

إذا كانت ص تتغير طردياً مع س ، وكانت ص = ٢٠ عندما س = ٧ فأوجد :

١ العلاقة بين ص ، س ٢ قيمة ص عندما س = ١٤ (المنوفية ٢٤ / دمياط ٢٤)

مثال ٣

إذا كانت : ص ∝ س^3 وكانت ص = ٦٤ عندما س = ٢ فأوجد :

١ العلاقة بين س ، ص ٢ قيمة ص عندما س = $\frac{1}{2}$ (الأقصر ٢٠)

الحل

∵ ص ∝ س^3 ∴ ص = م س^3

∴ ٦٤ = م × ٨ ∴ م = $\frac{64}{8}$ = ٨ ∴ العلاقة هي $\boxed{\text{ص = ٨ س}^3}$

بالتعويض عن س = $\frac{1}{2}$ ∴ ص = ٨ × $\frac{1}{8}$ = ١

مثال ٤

تسير سيارة بسرعة ثابتة بحيث تتناسب المسافة المقطوعة طردياً مع الزمن ، فإذا قطعت السيارة ١٥٠ كم في ٦ ساعات ، فكم كيلو متراً تقطعها السيارة في ١٠ ساعات ؟ (القليوبية ١٣ / الدقهلية ٢٤)

الحل

∵ ف ∝ ز

∴ $\frac{ف_1}{ف_2} = \frac{ز_1}{ز_2}$ ∴ $\frac{150}{ف_2} = \frac{6}{10}$ ∴ ف$_2$ = $\frac{150 \times 10}{6}$ = ٢٥٠ كم

حاول بنفسك :

إذا كانت : ص = أ + ٢ ، أ ∝ س أوجد العلاقة بين أ ، س عندما س = ٢ ، أ = ٤

ثم أوجد قيمة ص عندما س = ١ (الشرقية ٢٤)

مثال ٥

إذا كان : $\frac{٢١ س - ص}{٧ س - ع} = \frac{ص}{ع}$ فأثبت أن : ص ∝ ع (دمياط ٢٣ / أسيوط ٢٤)

الحل

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$٢١ س ع - \cancel{ص ع} = ٧ س ص - \cancel{ص ع}$

$٢١ ع \cancel{س} = ٧ ص \cancel{س}$

$٢١ ع = ٧ ص$ ∴ $ص = \frac{٢١}{٧} ع$ ∴ ص ∝ ع

مثال ٦

إذا كان : $٤ أ^٢ + ٩ ب^٢ = ١٢ أ ب$ فأثبت أن : أ تتغير طردياً بتغير ب (مطروح ١٧)

الحل

$٤ أ^٢ - ١٢ أ ب + ٩ ب^٢ = ٠$ تحليل مربع كامل

$(٢ أ - ٣ ب)^٢ = ٠$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$٢ أ - ٣ ب = ٠$ ∴ $٢ أ = ٣ ب$ ∴ $أ = \frac{٣}{٢} ب$ ∴ أ ∝ ب

حاول بنفسك : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

❶ العلاقة التي تمثل تغيراً طردياً بين المتغيرين ص ، س هي : (بور سعيد ٢٣)

أ) س ص = ٥ ب) $ص = س^٢ + ٣$ ج) $\frac{س}{٣} = \frac{٤}{ص}$ د) $\frac{س}{٥} = \frac{ص}{٣}$

❷ إذا كانت : ص ∝ س وكانت س = ٣ عندما ص = ٢ فإن ثابت التناسب = ... (قنا ٢٤)

أ) ٢ ب) ٣ ج) $\frac{٢}{٣}$ د) ٦

❸ إذا كانت : ص = ٥ س فإن ص ∝ .... (القليوبية ٢٢)

أ) $\frac{١}{س}$ ب) $\frac{-١}{س}$ ج) س د) ٥

التغير العكسي

- إذا كانت ص تتغير عكسياً مع س فإنها تكتب $ص \propto \frac{١}{س}$ ومنها يكون :

لإيجاد العلاقة	لحساب الثابت (م)	لإيجاد قيمة
$ص = \frac{م}{س}$	$م = ص \times س$	$\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{س_٢}{س_١}$

- يمكن كتابة العلاقة العكسية على الصورة ص س = م أو $ص = \frac{م}{س}$
- لإثبات أن $ص \propto \frac{١}{س}$ نثبت أن ص س = ثابت

مثال ١

إذا كانت : $ص \propto \frac{١}{س}$ وكانت ص = ٣ عندما س = ٢ فأوجد :

[١] العلاقة بين س ، ص　[٢] قيمة ص عندما س = ١,٥　(إسماعيلية ٢٣ / إسكندرية / قنا ٢٤)

الحل

$\because ص \propto \frac{١}{س}$　$\therefore ص = \frac{م}{س}$

$\therefore ٣ = \frac{م}{٢}$　$\therefore م = ٣ \times ٢ = ٦$　$\therefore$ العلاقة هي $\boxed{ص = \frac{٦}{س}}$

بالتعويض عن س = ١,٥　$\therefore ص = \frac{٦}{١,٥} = ٤$

مثال ٢

من بيانات الجدول المقابل أجب عن الأسئلة الآتية :

س	٢	٤	٦
ص	٦	٣	٢

[١] بين نوع التغير بين ص ، س

[٢] أوجد ثابت التناسب　[٣] أوجد قيمة ص عندما س = ٣　(بورسعيد ٢٢ / دمياط ٢٤)

الحل

[١] نوع التغير عكسي (لأنه كلما زادت س نقصت ص)

[٢] ثابت التناسب م = ص × س = ٦ × ٢ = ١٢

[٣] $\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{س_٢}{س_١}$　$\therefore \frac{٦}{ص_٢} = \frac{٣}{٢}$　$\therefore ص_٢ = \frac{٦ \times ٢}{٣} = ٤$

مثال ٣

إذا كان (ع) ارتفاع أسطوانة دائرية قائمة (حجمها ثابت) يتغير عكسياً بتغير مربع طول نصف قطرها (نق) وكان ع = ٢٧ سم عندما نق = ١٠,٥ سم فأوجد (ع) عندما نق = ١٥,٧٥ سم (قنا ١٩)

الحل

$\because$ ع $\propto \frac{١}{\text{نق}^٢}$ $\therefore$ $\frac{\text{ع}_١}{\text{ع}_٢} = \frac{(\text{نق}_٢)^٢}{(\text{نق}_١)^٢}$ $\therefore$ $\frac{٢٧}{\text{ع}_٢} = \frac{(١٥,٧٥)^٢}{(١٠,٥)^٢}$

$\therefore$ $\frac{٢٧}{\text{ع}_٢} = \frac{٢٤٨,٠٦٢٥}{١١٠,٢٥}$ $\therefore$ $\text{ع}_٢ = \frac{٢٧ \times ١١٠,٢٥}{٢٤٨,٠٦٢٥} = ١٢$ سم

مثال ٤

إذا كان: ص = م − ٩ وكان ص $\propto \frac{١}{\text{س}^٢}$ وكان م = ١٨ عندما س = $\frac{٢}{٣}$ فأوجد:

[١] العلاقة بين ص ، س [٢] قيمة ص عندما س = ١ (الأقصر ٢٣)

الحل

$\because$ ص $\propto \frac{١}{\text{س}^٢}$ $\therefore$ ص $= \frac{\text{م}}{\text{س}^٢}$ بالتعويض عن ص = م − ٩

$\therefore$ م − ٩ $= \frac{\text{م}}{\text{س}^٢}$ $\therefore$ ١٨ − ٩ $= \frac{\text{م}}{(\frac{٢}{٣})^٢}$ $\therefore$ ٩ $= \frac{\text{م}}{\frac{٤}{٩}}$ $\therefore$ م $= ٩ \times \frac{٤}{٩} = ٤$

$\therefore$ العلاقة هي $\boxed{\text{ص} = \frac{٤}{\text{س}^٢}}$ عندما س = ١ $\therefore$ ص $= \frac{٤}{(١)^٢} = ٤$

مثال ٥

إذا كان: $\text{س}^٤\text{ص}^٢ - ١٤\,\text{س}^٢\text{ص} + ٤٩ = ٠$ فأثبت أن: ص $\propto \frac{١}{\text{س}^٢}$ (الدقهلية / المنيا ٢٤)

الحل

$\text{س}^٤\text{ص}^٢ - ١٤\,\text{س}^٢\text{ص} + ٤٩ = ٠$ تحليل مربع كامل

$(\text{س}^٢\text{ص} - ٧)^٢ = ٠$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$\text{س}^٢\text{ص} - ٧ = ٠$ $\therefore$ $\text{س}^٢\text{ص} = ٧$ $\therefore$ ص $\propto \frac{١}{\text{س}^٢}$

حاول بنفسك : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

❶ إذا كان : س ص = ٥ فإن ص ∝ .... (الجيزة / كفر الشيخ ٢٤)

أ $\frac{١}{س}$ ب س جـ ٥ + س د $\frac{٥}{س}$

❷ إذا كانت : ص تتغير عكسياً مع س وكانت س = $\sqrt{٣}$ عندما ص = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$
فإن ثابت التناسب = ... (الوادي الجديد ٢٠)

أ $\frac{١}{٢}$ ب $\frac{٢}{٣}$ جـ ٢ د ٦

❸ إذا كان : س ص = ٣ فإن : ص ∝ .... (الشرقية ١٨ / الغربية ٢٤)

أ $س^{-١}$ ب س جـ ٥ س د $س^٢$

❹ إذا كان : ٢ س ص = ٥ فإن : ص ∝ .... (أسوان ٢٤)

أ $\frac{١}{س}$ ب س – ٥ جـ س د س + ٥

❺ إذا كان : $س^٢ ص^٢$ – ٤ س ص + ٤ = صفر فإن : ....

أ ص ∝ س ب ص ∝ $س^٢$ جـ ص ∝ $\frac{١}{س}$ د ص ∝ $\frac{١}{س^٢}$

❻ إذا كان : ص ∝ س ، ص ∝ $\frac{١}{ع}$ فإن : ص ∝ ...... (بور سعيد ٢٣)

أ $\frac{س}{ع}$ ب $\frac{ع}{س}$ جـ س ع د س + ع

حاول بنفسك :

إذا كانت ص تتغير عكسياً مع س ، وكانت ص = ٤ عندما س = ٣

أولاً : اكتب العلاقة بين ص ، س ثانياً : أوجد قيمة ص عندما س = ٦ (القاهرة ٢٤)

الإحصاء

التشتت

التشتت : يقصد به التباعد أو الإختلاف بين مفردات المجموعة .

■ مقاييس التشتت :-

١ المدى :

هو أبسط وأسهل مقاييس التشتت . وهو الفرق بين أكبر المفردات و أصغرها

المدى = أكبر قيمة - أصغر قيمة

فمثلاً : المدى لمجموعة القيم : ٥ ، ٩ ، ٨ ، ١٣ ، ١١ يساوي ...... (الحل) ١٣ - ٥ = ٨

٢ الإنحراف المعياري σ :

♣ هو الجذر التربيعي الموجب لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي .

♣ الانحراف المعياري هو أكثر مقاييس التشتت انتشاراً و أدقها

♣ إذا كانت جميع المفردات متساوية في القيمة فإن : σ = صفر و المدى = صفر

أولاً : حساب الانحراف المعياري لمجموعة من المفردات

مثال ١ احسب الوسط الحسابي و الانحراف المعياري للقيم ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩

الحـــل (الدقهلية / المنوفية / بني سويف / المنيا ٢٤)

$$\text{الوسط الحسابي } \overline{\text{س}} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددهم}} = \frac{٥ + ٦ + ٧ + ٨ + ٩}{٥} = \frac{٣٥}{٥} = ٧$$

$$\text{الانحراف } \sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(\text{س} - \overline{\text{س}})^{٢}}{\text{ن}}}$$

$$= \sqrt{\frac{١٠}{٥}} = \sqrt{٢} = ١,٤١$$

س	$\text{س} - \overline{\text{س}}$	$(\text{س} - \overline{\text{س}})^{٢}$
٥	٥ - ٧ = -٢	٤
٦	٦ - ٧ = -١	١
٧	٧ - ٧ = ٠	٠
٨	٨ - ٧ = ١	١
٩	٩ - ٧ = ٢	٤
	المجموع	١٠

ثانياً : حساب الانحراف المعياري للجدول التكراري

بسيط
ذي مجموعات

مثال ٢ فيما يلي توزيع تكراري يبين أعمار ١٠ أطفال : (أسيوط ٢٢)

العمر بالسنوات	٥	٨	٩	١٠	١٢	المجموع
عدد الأطفال	١	٢	٣	٣	١	١٠

احسب الانحراف المعياري للعمر بالسنوات

بسيط

الحل

س	ك	س × ك	$س - \overline{س}$	$(س - \overline{س})^٢$	$(س - \overline{س})^٢ \times ك$
٥	١	٥	٤-	١٦	١٦
٨	٢	١٦	١-	١	٢
٩	٣	٢٧	٠	٠	٠
١٠	٣	٣٠	١	١	٣
١٢	١	١٢	٣	٩	٩
مجـ	١٠	٩٠			٣٠

$$\overline{س} = \frac{مجـ (س \times ك)}{مجـ ك} = \frac{٩٠}{١٠} = ٩ \qquad \sigma = \sqrt{\frac{مجـ (س - \overline{س})^٢ \times ك}{مجـ ك}} = \sqrt{\frac{٣٠}{١٠}} = ١,٧ \text{ سنة}$$

مثال ٣ احسب الوسط الحسابي و الانحراف المعياري للتوزيع التكراري التالي : (الغربية ١٧)

المجموعات	صفر –	٤ –	٨ –	١٢ –	١٦ – ٢٠	المجموع
التكرار	٣	٤	٧	٢	٩	٢٥

ذي مجموعات

الحل

المجموعات	ك	س	س × ك	$س - \overline{س}$	$(س - \overline{س})^٢$	$(س - \overline{س})^٢ \times ك$
صفر –	٣	٢	٦	٩,٦ –	٩٢,١٦	٢٧٦,٤٨
٤ –	٤	٦	٢٤	٥,٦ –	٣١,٣٦	١٢٥,٤٤
٨ –	٧	١٠	٧٠	١,٦ –	٢,٥٦	١٧,٩٢
١٢ –	٢	١٤	٢٨	٢,٤	٥,٧٦	١١,٥٢
١٦ – ٢٠	٩	١٨	١٦٢	٦,٤	٤٠,٩٦	٣٦٨,٦٤
مجـ	٢٥		٢٩٠			٨٠٠

$$\overline{س} = \frac{مجـ (س \times ك)}{مجـ ك} = \frac{٢٩٠}{٢٥} = ١١,٦ \qquad \sigma = \sqrt{\frac{مجـ (س - \overline{س})^٢ \times ك}{مجـ ك}} = \sqrt{\frac{٨٠٠}{٢٥}} = ٥,٧$$

حاول بنفسك : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ المدى لمجموعة القيم ٧ ، ٣ ، ٦ ، ٩ ، ٥ يساوي .... (الجيزة / الأسكندرية / البحيرة / أسوان ٢٤)

أ ٣ ب ٤ ج ٦ د ١٢

٢ أبسط مقاييس التشتت .... (القاهرة ٢٢ / الإسماعيلية ٢٤)

أ الوسط الحسابي ب الوسيط ج المدى د المنوال

٣ من مقاييس التشتت .... (كفر الشيخ / المنيا ٢٤)

أ الوسيط ب الوسط الحسابي ج الانحراف المعياري د المنوال

٤ الجذر التربيعي الموجب لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي .... (القليوبية ٢٤)

أ المدى ب الوسط الحسابي ج الانحراف المعياري د المنوال

٥ إذا كانت جميع المفردات متساوية في القيمة فإن .... (الغربية ٢٢ / سوهاج ٢٤)

أ $س - \bar{س} < ٠$ ب $س - \bar{س} > ٠$ ج $\sigma = ٠$ د $\bar{س} = ٠$

٦ إذا كان المدى للقيم ٦ ، ٧ ، س ، ٩ ، ١٠ هو ٨ فإن : س = ... (أسيوط ٢٤)

أ ١ ب ٢ ج ٣ د ٤

٧ الفرق بين أكبر المفردات و أصغرها لمجموعة من المفردات يسمى .... (القاهرة / دمياط ٢٤)

أ الوسط الحسابي ب المدى ج الوسيط د الانحراف المعياري

٨ إذا كان مجـ $(س - \bar{س})^٢ = ٣٦$ لمجموعة من القيم عددها ٩ فإن $\sigma =$ ..... (الإسماعيلية ٢٣)

أ ٢ ب ٤ ج ١٨ د ٢٧

٩ إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة من القيم = ٣ و عدد القيم = ٢ فأن مجـ $(س - \bar{س})^٢ =$ ......

أ ١ ب ١٨ ج ١٢ د ٢٤ (الشرقية ٢٤)

١٠ إذا كان الانحراف المعياري للقيم س+١ ، ص ، ٤ يساوي الصفر فإن س ص = ... (قنا ٢٤)

أ ٤ ب ١٢ ج ١٦ د ٢٠

ثانياً :

حساب المثلثات و الهندسة

١- النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة

☻ القياس الستيني للزاوية :

الدرجة هي وحدة القياس الستيني للزاوية

لاحظ : ▫ الدرجة = ٦٠ دقيقة (١° = ٦٠َ)
▫ الدقيقة = ٦٠ ثانية (١َ = ٦٠ً)

يمكن تحويل الدقائق والثواني إلى أجزاء من الدرجة والعكس

مثال ١

اكتب الزاوية ٢٠ً ٣٥َ ٣٤° بالدرجات

الحل : نستخدم الآلة الحاسبة على النحو التالي :

ابدأ ← ٣٤ [°'''] ٣٥ [°'''] ٢٠ [°'''] = [°''']

فيكون الناتج = ٣٤,٥٨٨٨٨٨٩

مثال ٢

اكتب الزاوية ٥٦,١٨° بالدرجات والدقائق والثواني (القياس الستيني)

الحل : نستخدم الآلة الحاسبة على النحو التالي :

ابدأ ← ٥٦,١٨ = [°''']

فيكون الناتج = ٤٨ً ١٠َ ٥٦°

حاول بنفسك :

١ اكتب كلاً من الزوايا التالية بالدرجات :

(أ) ١٦َ ٧٦°	(ب) ٤٣ً ٢٦َ ٦٥°

٢ اكتب كلاً من الزوايا الآتية بالقياس الستيني :

(أ) ٦,٣٤°	(ب) ٨٣,٢٤٦°

ملاحظات هامة

١ مجموع قياسي الزاويتين المتتامتين = ٩٠°

٢ مجموع قياسي الزاويتين المتكاملتين = ١٨٠°

٣ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

مثال ٣

إذا كانت النسبة بين قياس زاويتين متكاملتين ٣ : ٥
فأوجد : القياس الستيني لكل منهما (الأقصر ٢٢)

الحــل

نفرض أن قياس الزاوية الأولى ٣ س° وقياس الزاوية الثانية ٥ س°

∵ مجموع قياسي الزاويتين المتكاملتين = ١٨٠°

∴ ٣ س + ٥ س = ١٨٠°

∴ ٨ س = ١٨٠° ∴ س = $\frac{١٨٠°}{٨}$ = ٢٢,٥°

∴ قياس الزاوية الأولي = ٣ × ٢٢,٥ = ٦٧,٥° = ٣٠َ ٦٧°

∴ قياس الزاوية الثانية = ٥ × ٢٢,٥ = ١١٢,٥° = ٣٠َ ١١٢°

حاول بنفسك :

إذا كانت النسبة بين قياس زاويتين متتامتين ٣ : ٥
فأوجد : القياس الستيني لكل منهما (مطروح ١٨)

مثال ٤

إذا كانت النسبة بين قياسات الزوايا الداخلة لمثلث ٣ : ٤ : ٧
فأوجد : القياس الستيني لكل زاوية (البحيرة ١٣)

الحــل

نفرض أن قياسات الزوايا هي ٣ س ، ٤ س ، ٧ س

∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمثلث = ١٨٠°

∴ ٣ س + ٤ س + ٧ س = ١٨٠°

∴ ١٤ س = ١٨٠° ∴ س = $\frac{١٨٠°}{١٤}$ = ١٢,٨٦°

∴ قياس الزاوية الأولي = ٣ × ١٢,٨٦° = ٣٨,٥٨° = ١٧ً ٣٤َ ٣٨°

∴ قياس الزاوية الثانية = ٤ × ١٢,٨٦° = ٥١,٤٤° = ٤٣ً ٢٥َ ٥١°

∴ قياس الزاوية الثالثة = ٧ × ١٢,٨٦° = ٩٠°

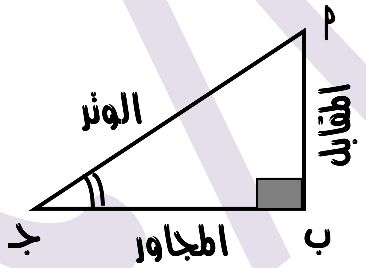
☻ النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة :

١ جيب الزاوية : ويرمز له بالعربية (جا) و بالإنجليزية Sin = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

٢ جيب تمام الزاوية : ويرمز له بالعربية (جتا) و بالإنجليزية Cos = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

٣ ظل الزاوية : ويرمز له بالعربية (ظا) و بالإنجليزية Tan = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

إذا كان أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب فإن :

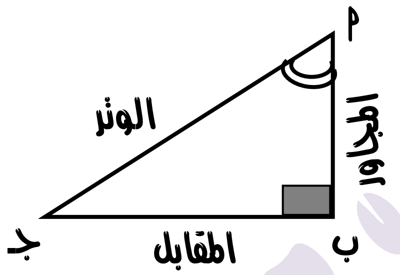


النسب المثلثية للزاوية ج

جا ج = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}}$

جتا ج = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{أ ج}}$

ظا ج = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب ج}}$



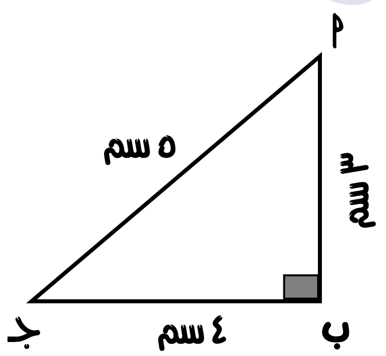
النسب المثلثية للزاوية أ

جا أ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{أ ج}}$

جتا أ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}}$

ظا أ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{أ ب}}$

فمثلاً : أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب ، أ ب = ٣ سم ، ب ج = ٤ سم ، أ ج = ٥ سم فإن :



جا ج = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}} = \frac{٣}{٥}$ ، جا أ = $\frac{\text{ب ج}}{\text{أ ج}} = \frac{٤}{٥}$

جتا ج = $\frac{\text{ب ج}}{\text{أ ج}} = \frac{٤}{٥}$ ، جتا أ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}} = \frac{٣}{٥}$

ظا ج = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب ج}} = \frac{٣}{٤}$ ، ظا أ = $\frac{\text{ب ج}}{\text{أ ب}} = \frac{٤}{٣}$

نقاط هامة :

١ إذا كانت جا ٲ = جتا ب فإن ∠ ٲ تتمم ∠ ب (مجموعهما = ٩٠°)
ويكون جا ٲ - جتا ب = صفر ، جا ٲ + جتا ب = ٢ جا ٲ أو ٢ جتا ب

٢ إذا كانت جا ب = جتا ب فإن ∠ ب = ٤٥°

٣ إذا كانت ∠ ٲ هي زاوية حادة في △ ٲ ب جـ القائم في ب فإن ظا ٲ = $\frac{\text{جا ٲ}}{\text{جتا ٲ}}$

حاول بنفسك : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

❶ إذا كانت جا ٣٠° = جتا هـ حيث هـ قياس زاوية حادة فإن هـ = ... ° (الجيزة ٢٤)

ٲ ١٥   ب ٣٠   جـ ٤٥   د ٦٠

❷ في △ ٲ ب جـ إذا كان ق (ٲ) = ٨٥° ، جا ب = جتا ب فإن ق (جـ) = ... ° (البحيرة ٢٤)

ٲ ٣٠   ب ٤٥   جـ ٥٠   د ٦٠

❸ في △ ٲ ب جـ القائم الزاوية في ب يكون جا جـ + جتا ٲ = ... (مطروح ٢٤)

ٲ ٢ جا جـ   ب ٢ جا ٲ   جـ ٢ جتا جـ   د ٢ جا ب

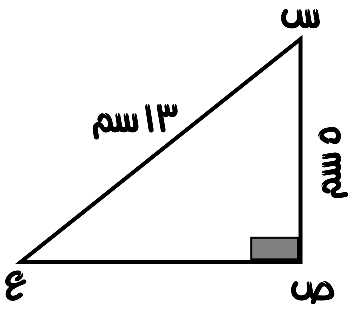
مثال ٥

س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص ، س ص = ٥ سم ، س ع = ١٣ سم أوجد :
١ طول $\overline{\text{ص ع}}$ ٢ قيمة : جتا س جتا ع - جا س جا ع (قنا ٢٢ / جنوب سيناء ٢٣)

الحـــل

باستخدام نظرية فيثاغورث

ص ع = $\sqrt{(١٣)^٢ - (٥)^٢}$ ∴ ص ع = $\sqrt{١٤٤}$ = ١٢ سم



∴ جتا س جتا ع – جا س جا ع

= $\frac{٥}{١٣} \times \frac{١٢}{١٣} - \frac{١٢}{١٣} \times \frac{٥}{١٣}$

= $\frac{٦٠}{١٦٩} - \frac{٦٠}{١٦٩} = \frac{٦٠ - ٦٠}{١٦٩} = \frac{\text{صفر}}{١٦٩}$ = صفر

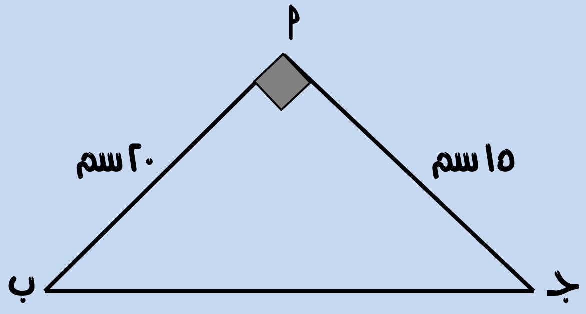
مثال ٦

في الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث فيه ق (أ) = ٩٠°

، أ جـ = ١٥ سم ، أ ب = ٢٠ سم

أثبت أن : جتا جـ جتا ب - جا جـ جا ب = صفر



(الجيزة ٢٠)

الحـــل

باستخدام نظرية فيثاغورث

ب جـ = $\sqrt{(٢٠)^٢ + (٢٥)^٢}$　　∴ ب جـ = $\sqrt{٦٢٥}$ = ٢٥ سم

∴ جتا جـ جتا ب - جا جـ جا ب

$$= \frac{١٥}{٢٥} \times \frac{٢٠}{٢٥} - \frac{٢٠}{٢٥} \times \frac{١٥}{٢٥}$$

$$= \frac{٣٠٠}{٦٢٥} - \frac{٣٠٠}{٦٢٥} = \frac{٣٠٠ - ٣٠٠}{٦٢٥} = \frac{\text{صفر}}{٦٢٥} = \text{صفر}$$

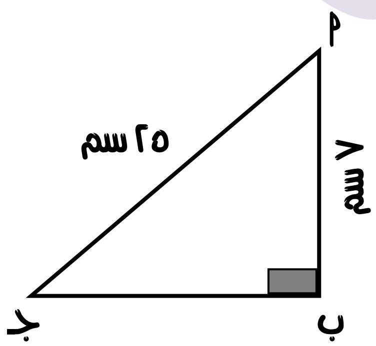
مثال ٧

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، أ ب = ٧ سم ، أ جـ = ٢٥ سم

أوجد قيمة : جا^٢ أ + جا^٢ جـ　　(دمياط ١٩)

الحـــل

باستخدام نظرية فيثاغورث



ب جـ = $\sqrt{(٢٥)^٢ - (٧)^٢}$　　∴ ب جـ = $\sqrt{٥٧٦}$ = ٢٤ سم

∴ جا^٢ أ + جا^٢ جـ

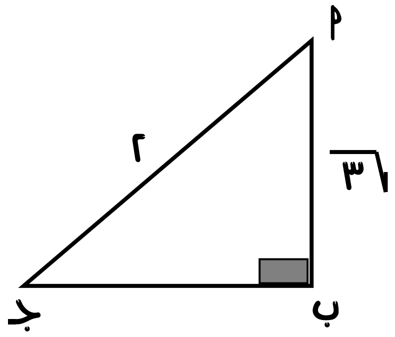
$$= \left(\frac{٢٤}{٢٥}\right)^٢ + \left(\frac{٧}{٢٥}\right)^٢ = \frac{٥٧٦}{٦٢٥} + \frac{٤٩}{٦٢٥} = \frac{٦٢٥}{٦٢٥} = ١$$

مثال ٨

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب : فإذا كان ٢ أ ب = $\sqrt{٣}$ أ جـ

أوجد النسب المثلثية للزاوية جـ　　(الوادي الجديد ٢٣)

الحل



٢ أ ب = $\sqrt{٣}$ أ جـ　∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

باستخدام نظرية فيثاغورث

ب جـ = $\sqrt{(٢)^٢ - (\sqrt{٣})^٢}$　∴ ب جـ = $\sqrt{١}$ = ١

جا جـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$　،　جتا جـ = $\frac{١}{٢}$　،　ظا جـ = $\sqrt{٣}$

مثال ٩

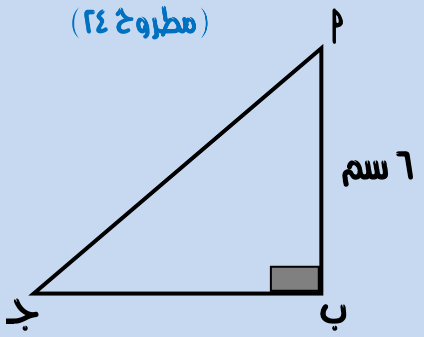
في الشكل المقابل :　　(مطروح ٢٤)

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب

، أ ب = ٦ سم　،　ظا جـ = $\frac{٣}{٤}$

أوجد :　$\boxed{١}$ طول كل من : $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$

$\boxed{٢}$ جا أ + جتا أ



الحل

$\boxed{١}$ ظا جـ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$　∴ $\frac{٣}{٤} = \frac{٦}{\text{ب جـ}}$　∴ ب جـ = $\frac{٤ \times ٦}{٣}$ = ٨ سم

أ جـ = $\sqrt{(٦)^٢ + (٨)^٢}$　∴ أ جـ = $\sqrt{١٠٠}$ = ١٠ سم

$\boxed{٢}$ جا أ + جتا أ = $\frac{٨}{١٠} + \frac{٦}{١٠} = \frac{١٤}{١٠} = \frac{٧}{٥}$

حاول بنفسك

$\boxed{١}$ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، أ جـ = ١٣ سم ، ب جـ = ١٢ سم

أثبت أن : جا^٢ جـ + جتا^٢ جـ = ١　　(القاهرة ٢٤)

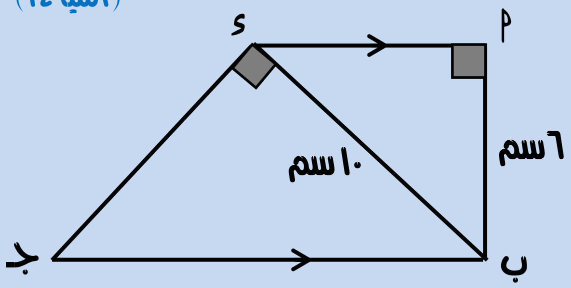
$\boxed{٢}$ إذا كان أ ب جـ مثلث فيه ق ($\angle$ب) = ٩٠° ، أ ب = ٣ سم ، أ جـ = ٥ سم

أوجد قيمة : جا^٢ أ + جا^٢ جـ　　(شمال سيناء ٢٣)

مثال ١٠

في الشكل المقابل :

(المنيا ٢٤)



م ب جـ ء شبه منحرف قائم الزاوية في م

، م ء // ب جـ ، ق (< ب ء جـ) = ٩٠°

، م ب = ٦ سم ، ب ء = ١٠ سم

أوجد : ظا (< م ء ب) ، طول ء جـ

الحـــل

من فيثاغورث م ء = $\sqrt{(١٠)^٢ - (٦)^٢}$ ∴ م ء = $\sqrt{٦٤}$ = ٨ سم

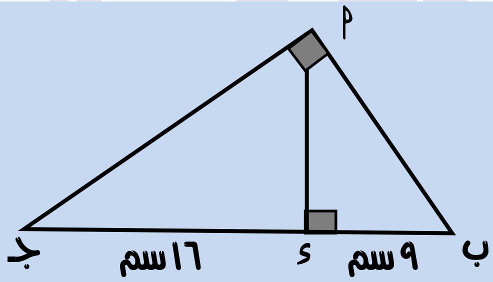
∴ ظا (< م ء ب) = $\frac{٦}{٨}$ = $\frac{٣}{٤}$

∵ م ء // ب جـ ∴ ق (< م ء ب) = ق (< ء ب جـ) بالتبادل

∴ ظا (< م ء ب) = ظا (< ء ب جـ)

∴ $\frac{٣}{٤}$ = $\frac{ء جـ}{١٠}$ ∴ ء جـ = $\frac{٣ \times ١٠}{٤}$ = ٧,٥ سم

مثال ١١



في الشكل المقابل :

أوجد قيمة : ظا ب ظا جـ (الفيوم ٢٤)

الحـــل

من إقليدس (م ء)^٢ = ٩ × ١٦ ∴ م ء = $\sqrt{٩ \times ١٦}$ = ١٢ سم

∴ ظا ب = $\frac{١٢}{٩}$ ، ظا جـ = $\frac{١٢}{١٦}$

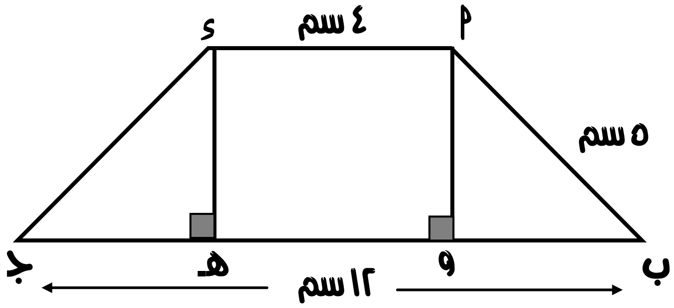
∴ ظا ب ظا جـ = $\frac{١٢}{٩}$ × $\frac{١٢}{١٦}$ = $\frac{١٤٤}{١٤٤}$ = ١

مثال ١٢

ا ب جـ ى شبه منحرف متساوي الساقين فيه $\overline{اى} \parallel \overline{ب جـ}$ ، ا ى = ٤ سم ،
ا ب = ٥ سم ، ب جـ = ١٢ سم أثبت أن : $\frac{٥ \text{ ظا ب جتا جـ}}{\text{جا}^٢ \text{جـ} + \text{جتا}^٢ \text{ب}} = ٣$

(الوادي الجديد ١٧)

الحـــل



نرسم $\overline{او}$ ، $\overline{ىهـ}$ عموديان علي $\overline{ب جـ}$ ،

∵ $\overline{اى} \parallel \overline{ب جـ}$ ∴ ا و هـ ى مستطيل

∴ ا ى = و هـ = ٤ سم

∴ ب و = هـ جـ = ٤ سم (تطابق مثلثين)

∵ △ ا ب و قائم الزاوية في و ∴ ا و = $\sqrt{(٥)^٢ - (٤)^٢}$ = ٣ سم ∴ ى هـ = ا و = ٣ سم

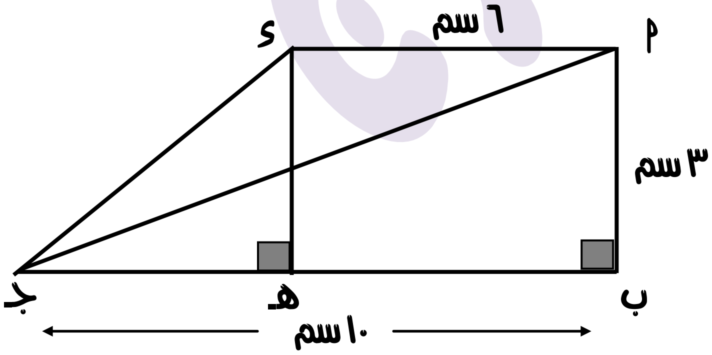
$\frac{٥ \text{ ظا ب جتا جـ}}{\text{جا}^٢ \text{جـ} + \text{جتا}^٢ \text{ب}} = \frac{٥ \times \frac{٣}{٤} \times \frac{٤}{٥}}{(\frac{٣}{٥})^٢ + (\frac{٤}{٥})^٢} = \frac{٣}{١} = ٣$

مثال ١٣

ا ب جـ ى شبه منحرف فيه $\overline{اى} \parallel \overline{ب جـ}$ ، ق (< ب) = ٩٠° ، ا ب = ٣ سم ، ا ى = ٦سم
، ب جـ = ١٠ سم أثبت أن : جتا (< ى جـ ب) – ظا (< ا جـ ب) = $\frac{١}{٢}$

(كفر الشيخ ٢٢ / الجيزة ٢٣)

الحـــل



نرسم $\overline{ىهـ} \perp \overline{ب جـ}$ ، نصل $\overline{ا جـ}$

∵ الشكل ا ب هـ ى مستطيل

∴ ا ب = ى هـ = ٣ سم

∴ ا ى = ب هـ = ٦سم ∴ هـ جـ = ٤ سم

باستخدام نظرية فيثاغورث

ى جـ = $\sqrt{(٣)^٢ + (٤)^٢}$ ∴ ى جـ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ سم

∴ المقدار جتا (< ى جـ ب) – ظا (< ا جـ ب) $= \frac{٤}{٥} - \frac{٣}{١٠} = \frac{٨ - ٣}{١٠} = \frac{٥}{١٠} = \frac{١}{٢}$

2- النسب المثلثية الأساسية لبعض الزوايا

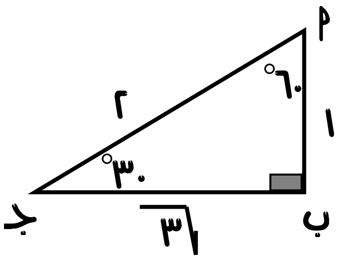
أولاً : النسب المثلثية الأساسية للزاويتين اللتين قياسهما ٣٠° , ٦٠° :

☻ **المثلث الثلاثيني الستيني :**

هو المثلث الذي قياسات زواياه ٣٠° ، ٦٠° ، ٩٠°

في △ ٲ ب جـ يكون ٲ ب : ٲ جـ : ب جـ = ١ : ٢ : $\sqrt{٣}$

وتكون النسبة بين أضلاعه ١ : ٢ : $\sqrt{٣}$



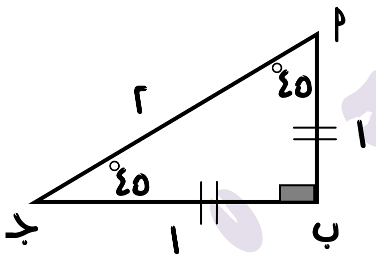
ثانياً : النسب المثلثية الأساسية للزاوية التي قياسها ٤٥° :

☻ **المثلث القائم الزاوية و المتساوي الساقين :**

هو المثلث الذي قياسات زواياه ٤٥° ، ٤٥° ، ٩٠°

في △ ٲ ب جـ يكون ٲ ب : ب جـ : ٲ جـ = ١ : ١ : $\sqrt{٢}$

وتكون النسبة بين أضلاعه ١ : ١ : $\sqrt{٢}$



☻ و الجدول التالي يلخص لنا النسب المثلثية الأساسية للزوايا التي قياسها ٣٠° ، ٦٠° ، ٤٥°

قياس الزاوية / النسبة المثلثية	٣٠°	٦٠°	٤٥°
جا	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$
جتا	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$
ظا	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	$\sqrt{٣}$	١

لاحظ أن : جيب أي زاوية يساوي جيب تمام الزاوية المتممة لها

فمثلا : جا ٣٠° = جتا ٦٠° ، جتا ٣٠° = جا ٦٠° ، جا ٤٥° = جتا ٤٥°

الفكرة الأولى

مثال ١

بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد القيمة العددية للمقدار :

جتا ٦٠° جا ٣٠° − جا ٦٠° ظا ٦٠° + جتا² ٣٠°　　(سوهاج ٢٤)

الحل

$$\text{المقدار} = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \sqrt{٣} + \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢}$$

$$= \frac{١}{٤} - \frac{٣}{٢} + \frac{٣}{٤} = \frac{-١}{٢}$$

مثال ٢

بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد القيمة العددية للمقدار :

جا ٤٥° جتا ٤٥° + جا ٣٠° جتا ٦٠° − جتا² ٣٠°　　(المنوفية ٢٢ / بني سويف ٢٣)

الحل

$$\text{المقدار} = \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} - \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢}$$

$$= \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} - \frac{٣}{٤} = \text{صفر}$$

مثال ٣

أوجد قيمة المقدار : $\frac{\text{١ + ظا ٦٠° ظا ٣٠°}}{\text{جتا² ٣٠°}}$　　(دمياط ١٨)

الحل

$$\text{المقدار} = \frac{١ + \sqrt{٣} \times \frac{١}{\sqrt{٣}}}{\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢}} = \frac{٢}{\frac{٣}{٤}} = \frac{٢ \times ٤}{٣} = \frac{٨}{٣}$$

حاول بنفسك :

١ بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد القيمة العددية للمقدار :

جتا ٦٠° جا ٣٠° ـ جا ٦٠° جتا ٣٠° (سوهاج ٢٣)

٢ بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد القيمة العددية للمقدار :

جا ٢ ٦٠° + جتا ٢ ٦٠° + ظا ٢ ٤٥° (أسيوط ٢٤)

الفكرة الثانية

مثال ٤

أوجد قيمة س التي تحقق : س جا ٣٠° جتا ٢ ٤٥° = جا ٢ ٦٠° (أسيوط ٢٠ / القليوبية ٢٤)

الحل

$$س \times \frac{١}{٢} \times \left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^٢ = \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^٢$$

$$\therefore س \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٤}$$

$$\therefore س \times \frac{١}{٤} = \frac{٣}{٤} \qquad \therefore س = \frac{٣}{\cancel{٤}} \times \frac{\cancel{٤}}{١} = ٣$$

مثال ٥

أوجد قيمة س إذا كان : ٤ س = جتا ٢ ٣٠° ظا ٢ ٣٠° ظا ٢ ٤٥° (الغربية / المنيا ٢٤)

الحل

$$٤ س = \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^٢ \times \left(\frac{١}{\sqrt{٣}}\right)^٢ \times (١)^٢$$

$$\therefore ٤ س = \frac{\cancel{٣}}{٤} \times \frac{١}{\cancel{٣}} \times ١$$

$$\therefore ٤ س = \frac{١}{٤} \qquad \therefore س = \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٤} = \frac{١}{١٦}$$

حاول بنفسك :

أوجد قيمة س التي تحقق : ظا س = ٤ جتا ٦٠° جا ٣٠° (الإسماعيلية ٢٣)

الفكرة الثالثة

مثال ٦

بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن : جتا ٦٠° = ٢ جتا^{٢} ٣٠° − ١ (البحر الأحمر ٢٣ / مطروح ٢٤)

الحل

الطرف الأيمن = جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$

الطرف الأيسر = ٢ جتا^{٢} ٣٠° − ١ = ٢ × $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢}$ − ١

= ٢ × $\frac{٣}{٤}$ − ١ = $\frac{١}{٢}$

مثال ٧

أثبت صحة المتساوية الآتية مبيناً الخطوات : ظا ٦٠° = $\frac{\text{٢ ظا ٣٠°}}{\text{١ − ظا}^{٢}\text{ ٣٠°}}$ (المنيا ٢٤)

الحل

الطرف الأيمن = ظا ٦٠° = $\sqrt{٣}$

الطرف الأيسر = $\frac{\text{٢ ظا ٣٠°}}{\text{١ − ظا}^{٢}\text{ ٣٠°}}$ = $\frac{٢ \times \frac{١}{\sqrt{٣}}}{١ - \left(\frac{١}{\sqrt{٣}}\right)^{٢}}$ = $\frac{\frac{٢}{\sqrt{٣}}}{١ - \frac{١}{٣}}$ = $\frac{\frac{٢}{\sqrt{٣}}}{\frac{٢}{٣}}$

= $\frac{\cancel{٢}}{\sqrt{٣}} \times \frac{٣}{\cancel{٢}}$ = $\frac{٣}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}}$ = $\sqrt{٣}$

حاول بنفسك :

بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن : جا^{٣} ٣٠° = ٩ جتا^{٣} ٦٠° − ظا^{٢} ٤٥° (الإسكندرية ٢٤)

☻ استخدام الآلة الحاسبة :

أولاً : إيجاد النسب المثلثية الأساسية لزاوية معلومة :

في الآلة الحاسبة توجد ثلاثة مفاتيح : Tan Cos Sin

١ المفتاح Sin ويعني (جا)

٢ المفتاح Cos ويعني (جتا)

٣ المفتاح Tan ويعني (ظا)

مثال ٨

باستخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل مما يأتي مقرباً الناتج لأربع أرقام عشرية :

١ جا ٣٦°   ٢ جتا ٣٥′ ٧٢°   ٣ ظا ١٧″ ١٣′ ٥٢°

الحـــل

١ استخدم مفاتيح الحاسبة بالتتابع الآتي من اليسار :

ابدأ ← Sin ٣ ٦ =

∴ جا ٣٦° ≃ ٠,٥٨٧٨

---

٢ استخدم مفاتيح الحاسبة بالتتابع الآتي من اليسار :

ابدأ ← Cos ٧ ٢ °′″ ٣ ٥ °′″ =

∴ جتا ٣٥′ ٧٢° ≃ ٠,٢٩٩٣

---

٣ استخدم مفاتيح الحاسبة بالتتابع الآتي من اليسار :

ابدأ ← Tan ٥ ٢ °′″ ١ ٣ °′″ ١ ٧ °′″ =

∴ ظا ١٧″ ١٣′ ٥٢° ≃ ١,٢٩٠٢

حاول بنفسك :

باستخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل مما يأتي مقرباً الناتج لثلاثة أرقام عشرية :

١ جا ٥٥′ ٤١°   ٢ جتا ٣٢°   ٣ ظا ٢٥″ ٤٣′ ٢٨°

ثانياً : إيجاد قياس زاوية إذا علمت إحدى النسب المثلثية لها :

ابدأ ← Shift ← Sin / Cos / Tan ← النسبة المثلثية = °,,,

إذا كان جا هـ = ٠,٦٢١٨ فإن هـ هو قياس الزاوية التي جيبها ٠,٦٢١٨ ولإيجاد قيمة هـ

نستخدم مفاتيح الآلة الحاسبة بالتتابع التالي من اليسار :

ابدأ ← | Shift | Sin | , | ٦ | ٢ | ١ | ٨ | = | °,,, |

∴ ق (∠ هـ) ≃ ٣٨° ٢٦َ ٥٢ً

حاول بنفسك :

أوجد هـ في كل مما يأتي حيث هـ قياس زاوية حادة :

١ جا هـ = ٠,٨   ٢ جتا هـ = ٠,٧١٥٢   ٣ ظا هـ = ٠,٥١٥٦

مثال ٩ أكمل ما يأتي :

١ إذا كانت : جا س = $\frac{1}{2}$ حيث س زاوية حادة فإن : ق (∠ س) = ... (الفيوم ٢٤)

الحل : ق (∠ س) = ٣٠°

٢ إذا كانت : ظا س = ١ حيث س زاوية حادة فإن : س = ... (قنا ٢٢)

الحل : س = ٤٥°

٣ إذا كانت : ظا (س + ١٠)° = $\sqrt{3}$ حيث (س + ١٠) زاوية حادة

فإن : س = ... (الجيزة ٢٣ / الدقهلية ٢٤)

الحل : ∵ ظا (س + ١٠°) = $\sqrt{3}$ ∴ س + ١٠° = ٦٠° ∴ س = ٦٠° − ١٠° = ٥٠°

٤ إذا كانت : جتا ٣ س = $\frac{1}{2}$ ، ٣ س قياس زاوية حادة

فإن : س = ... (الدقهلية ٢٠)

الحل : ∵ جتا ٣ س = $\frac{1}{2}$ ∴ ٣ س = ٦٠° (÷ ٣) ∴ س = ٢٠°

مثال ١٠

أوجد هـ حيث هـ قياس زاوية حادة : جا هـ = جا ٦٠° جتا ٣٠° - جتا ٦٠° جا ٣٠°

الحل (أسوان ٢٢ / الجيزة ٢٣)

$$\text{جا هـ} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$\text{جا هـ} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \quad \therefore \text{جا هـ} = \frac{1}{2} \quad \therefore \text{هـ} = 30^\circ$$

مثال ١١

بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة س التي تحقق :

٢ جا س = ظا٢ ٦٠° - ٢ ظا ٤٥° حيث س قياس زاوية حادة

الحل (كفر الشيخ ٢٣ / الإسماعيلية ٢٤)

$$\text{٢ جا س} = (\sqrt{3})^2 - 2 \times 1$$

$$\text{٢ جا س} = 3 - 2$$

$$\text{٢ جا س} = 1 \quad (\div 2) \quad \therefore \text{جا س} = \frac{1}{2} \quad \therefore \text{س} = 30^\circ$$

مثال ١٢

أوجد قيمة هـ حيث هـ قياس زاوية حادة : جا٢ ٤٥° = جتا هـ ظا ٣٠°

الحل (بني سويف ١٩ / سوهاج ٢٣)

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \text{جتا هـ} \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$\therefore \text{جتا هـ} = \frac{1}{2} \div \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore \text{هـ} = 30^\circ$$

حاول بنفسك :

إذا كان : ظا س - ٤ جتا ٦٠° جا ٣٠° = ٠ أوجد قيمة س حيث س زاوية حادة (بني سويف ٢٤)

مثال ١٣

إذا كان : ٢ جتا س − $\sqrt{3}$ = ٠ حيث س قياس زاوية حادة أوجد قيمة ظا ٢ س (قنا ٢٤)

الحل

٢ جتا س = $\sqrt{3}$ (÷ ٢)

∴ جتا س = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

∴ س = ٣٠°

∴ ظا ٢ س = ظا (٢ × ٣٠°) = ظا ٦٠° = $\sqrt{3}$

مثال ١٤

أوجد قيمة س : إذا كان جتا س ظا س + جا ٣٠° = ١ ، حيث (س ∠) حادة (الشرقية ٢٤)

الحل

~~جتا س~~ × $\frac{\text{جا س}}{\cancel{\text{جتا س}}}$ + $\frac{1}{2}$ = ١

∴ جا س + $\frac{1}{2}$ = ١

∴ جا س = ١ − $\frac{1}{2}$

∴ جا س = $\frac{1}{2}$ ∴ س = ٣٠°

حاول بنفسك :

إذا كان ٢ جا س = جا ٣٠° جتا ٦٠° + جتا ٣٠° جا ٦٠° فأوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة س حيث س قياس زاوية حادة (الجيزة ٢٤)

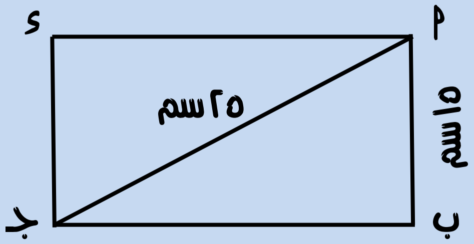
مثال ١٥

في الشكل المقابل :

أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = ١٥ سم ، أ جـ = ٢٥ سم

أوجد [١] ق (∠ أ جـ ب)

[٢] مساحة سطح المستطيل أ ب جـ د



(الفيوم ٢٠ / دمياط ٢٤)

الحل

∵ أ ب جـ د مستطيل　∴ ق (∠ ب) = ٩٠°

في Δ أ ب جـ ∵ جا (∠ أ جـ ب) = $\frac{١٥}{٢٥}$　∴ ق (∠ أ جـ ب) = ١٢″ ٥٢′ ٣٦°

باستخدام نظرية فيثاغورث　ب جـ = $\sqrt{(٢٥)^٢ - (١٥)^٢}$　∴ ب جـ = $\sqrt{٤٠٠}$ = ٢٠ سم

∴ مساحة المستطيل أ ب جـ د = ٢٠ × ١٥ = ٣٠٠ سم^٢

حاول بنفسك :

أ ب جـ مثلث متساوي الساقين فيه أ ب = أ جـ = ١٠ سم ، ب جـ = ١٢ سم ، $\overline{أ د}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$

أوجد : [١] ق (∠ ب)　[٢] مساحة سطح المثلث أ ب جـ　(الإسكندرية ٢٣)

مثال ١٦

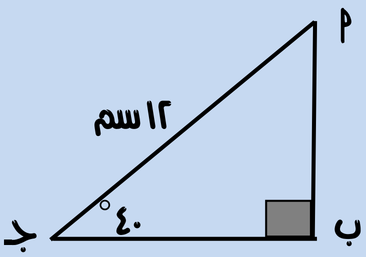
في الشكل المقابل :

Δ أ ب جـ قائم الزاوية في ب ،

ق (∠ جـ) = ٤٠° ، أ جـ = ١٢ سم

أوجد : طول كلاً من $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب جـ}$

(الإسماعيلية ٢٢)



الحل

جا جـ = $\frac{أ ب}{أ جـ}$　∴ جا ٤٠° = $\frac{أ ب}{١٢}$　∴ أ ب = ١٢ جا ٤٠° ≃ ٧,٧ سم

جتا جـ = $\frac{ب جـ}{أ جـ}$　∴ جتا ٤٠° = $\frac{ب جـ}{١٢}$　∴ ب جـ = ١٢ جتا ٤٠° ≃ ٩ سم

الوحدة الخامسة

1 - البُعد بين نقطتين

البُعد بين نقطتين : إذا كانت أ = (س١ ، ص١) ، ب = (س٢ ، ص٢)

فإن : أ ب = $\sqrt{(س_١ - س_٢)^٢ + (ص_١ - ص_٢)^٢}$

أي أن : البُعد بين نقطتين = $\sqrt{\text{مربع فرق السينات + مربع فرق الصادات}}$

مثال ١

أوجد البُعد بين النقطتين أ (١ ، ٢) ، ب (٤ ، ٦) ؟

الحـــل أ ب = $\sqrt{(١-٤)^٢ + (٢-٦)^٢}$ = $\sqrt{(-٣)^٢ + (٤)^٢}$ = $\sqrt{٩+١٦}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدة طول

مثال ٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

البُعد بين النقطتين (٣ ، ٠) ، (٠ ، -٤) = ... وحدة طول (٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧) (أسوان / الوادي ٢٣)

الحـــل أ ب = $\sqrt{(٣-٠)^٢ + (٠-(-٤))^٢}$ = $\sqrt{(٣)^٢ + (٤)^٢}$ = $\sqrt{٩+١٦}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدة طول

حاول بنفسك :

أوجد طول $\overline{\text{أ ب}}$ في كل مما يأتي :

١ أ (٥ ، ١) ، ب (١ ، ٤) ٢ أ (٢ ، ١) ، ب (٥ ، -٣)

ملاحظات هامة

١ بُعد النقطة (س ، ص) عن نقطة الأصل (٠ ، ٠) يساوي $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$

مثال ٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

البُعد بين النقطة (٣ ، -٤) و نقطة الأصل يساوي ...... وحدة طول (٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧) (الإسماعيلية ٢٢)

الحـــل أ ب = $\sqrt{(٣)^٢ + (-٤)^٢}$ = $\sqrt{٩+١٦}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدة طول

٢ بُعد النقطة (س ، ص) عن محور السينات يساوي | ص |

مثال ٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

بُعد النقطة (-٤ ، -٣) عن محور السينات يساوي ...... وحدة طول (-٣ ، ٣ ، ٤ ، -٤) (أسيوط ٢٤)

الحل بُعد النقطة (-٤ ، -٣) عن محور السينات = | -٣ | = ٣ وحدة طول

٣ بُعد النقطة (س ، ص) عن محور الصادات يساوي | س |

مثال ٥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

بُعد النقطة (-٤ ، ٢) عن محور الصادات يساوي ...... وحدة طول (٤ ، -٢ ، ٢ ، ٤) (القليوبية ٢٣)

الحل بُعد النقطة (-٤ ، ٢) عن محور الصادات = | -٤ | = ٤ وحدة طول

٤ البُعد العمودي بين المستقيمين ص = م ، ص = ب يساوي | م - ب |

مثال ٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة : (القاهرة ٢٤)

البُعد العمودي بين المستقيمين س + ٢ = ٠ ، س = ٣ يساوي ...... وحدة طول (١ ، ٢ ، ٣ ، ٥)

الحل س = -٢ ، س = ٣ ∴ البعد بين المستقيمين = | -٢ - ٣ | = | -٥ | = ٥ وحدة طول

حاول بنفسك : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ بُعد النقطة ($\sqrt{3}$ ، ١) عن نقطة الأصل يساوي .... وحدة طول . (جنوب سيناء ٢٣)

أ ٤   ب ٣   جـ ٢   د ١

٢ إذا كان : م ب جـ د مستطيلاً م (-٤ ، -١) ، جـ (٤ ، ٥)

فإن طول $\overline{\text{ب د}}$ = ... وحدة طول (الفيوم ٢٢)

أ ٤   ب ٥   جـ ٦   د ١٠

٣ دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٢ وحدة طول ، فأي من النقط الآتية تنتمي للدائرة ؟ (مطروح ٢٤)

أ (١ ، ٢)   ب (-٢ ، ١)   جـ ($\sqrt{2}$ ، ١)   د ($\sqrt{3}$ ، ١)

الفكرة الأولى

لإثبات أن أ , ب , جـ تقع على استقامة واحدة نوجد أب ، ب جـ ، أجـ
ثم نثبت أن : البُعد الأكبر = مجموع البعدين الآخرين

مثال ٧

أثبت أن النقط أ (-٣ ، -١) ، ب (٦ ، ٥) ، جـ (٣ ، ٣) تقع على استقامة واحدة .

الحـــل (كفر الشيخ ٢٢ / القليوبية ٢٣)

أب = $\sqrt{(-٣ - ٦)^٢ + (-١ - ٥)^٢}$ = $\sqrt{(-٩)^٢ + (-٦)^٢}$ = $\sqrt{٨١ + ٣٦}$ = ٣ $\sqrt{١٣}$ وحدة طول .

ب جـ = $\sqrt{(٦ - ٣)^٢ + (٥ - ٣)^٢}$ = $\sqrt{(٣)^٢ + (٢)^٢}$ = $\sqrt{٩ + ٤}$ = $\sqrt{١٣}$ وحدة طول .

أجـ = $\sqrt{(-٣ - ٣)^٢ + (-١ - ٣)^٢}$ = $\sqrt{(-٦)^٢ + (-٤)^٢}$ = $\sqrt{٣٦ + ١٦}$ = ٢ $\sqrt{١٣}$ وحدة طول .

∵ أب = ب جـ + أجـ ∴ أ ، ب ، جـ تقع على استقامة واحدة

الفكرة الثانية

تحديد نوع المثلث أ ب جـ بالنسبة لأطوال أضلاعه نوجد أب ، ب جـ ، أجـ

- إذا كان : أب = ب جـ = أجـ فإن المثلث متساوي الأضلاع
- إذا كان : أب = ب جـ ≠ أجـ فإن المثلث متساوي الساقين
- إذا كان : أب ≠ ب جـ ≠ أجـ فإن المثلث مختلف الأضلاع

مثال ٨

بين نوع المثلث الذي رؤوسه النقط أ (-٢ ، ٤) ، ب (٣ ، -١) ، جـ (٤ ، ٥) بالنسبة لأضلاعه .

الحـــل (الجيزة / بني سويف ٢٤)

أب = $\sqrt{(-٢ - ٣)^٢ + (٤ + ١)^٢}$ = $\sqrt{(-٥)^٢ + (٥)^٢}$ = $\sqrt{٢٥ + ٢٥}$ = ٥ $\sqrt{٢}$ وحدة طول .

ب جـ = $\sqrt{(٣ - ٤)^٢ + (-١ - ٥)^٢}$ = $\sqrt{(-١)^٢ + (-٦)^٢}$ = $\sqrt{١ + ٣٦}$ = $\sqrt{٣٧}$ وحدة طول .

أجـ = $\sqrt{(-٢ - ٤)^٢ + (٤ - ٥)^٢}$ = $\sqrt{(-٦)^٢ + (-١)^٢}$ = $\sqrt{٣٦ + ١}$ = $\sqrt{٣٧}$ وحدة طول .

∵ ب جـ = أجـ ≠ أب ∴ Δ أ ب جـ متساوي الساقين

مثال ٩

أثبت أن المثلث الذي رؤوسه أ (٤ ، ٥) ، ب (٣ ، -١) ، جـ (-٢ ، ٤) متساوي الساقين . (سوهاج ٢٢)

الحل

أب = $\sqrt{(٤-٣)^{٢}+(٥+١)^{٢}} = \sqrt{(١)^{٢}+(٦)^{٢}} = \sqrt{١+٣٦} = \sqrt{٣٧}$ وحدة طول .

ب جـ = $\sqrt{(٣+٢)^{٢}+(-١-٤)^{٢}} = \sqrt{(٥)^{٢}+(-٥)^{٢}} = \sqrt{٢٥+٢٥} = \sqrt{٥٠}$ وحدة طول .

أ جـ = $\sqrt{(٤+٢)^{٢}+(٥-٤)^{٢}} = \sqrt{(٦)^{٢}+(١)^{٢}} = \sqrt{٣٦+١} = \sqrt{٣٧}$ وحدة طول .

∵ أب = أ جـ   ∴ Δ أ ب جـ متساوي الساقين

الفكرة الثالثة

تحديد نوع المثلث أ ب جـ بالنسبة لزواياه نوجد أب ، ب جـ ، أ جـ

- إذا كان : $(\text{أ جـ})^{٢} > (\text{أب})^{٢} + (\text{ب جـ})^{٢}$ فإن المثلث منفرج الزاوية في ب
- إذا كان : $(\text{أ جـ})^{٢} = (\text{أب})^{٢} + (\text{ب جـ})^{٢}$ فإن المثلث قائم الزاوية في ب
- إذا كان : $(\text{أ جـ})^{٢} < (\text{أب})^{٢} + (\text{ب جـ})^{٢}$ فإن المثلث حاد الزوايا

حيث أ جـ أكبر الأضلاع طولاً

مثال ١٠

أثبت أن المثلث الذي رؤوسه أ (١ ، ٤) ، ب (-١ ، -٢) ، جـ (٢ ، -٣) قائم الزاوية ثم أوجد مساحته .

(مطروح / الشرقية / كفر الشيخ ٢٤)

الحل

أب = $\sqrt{(١+١)^{٢}+(٤+٢)^{٢}} = \sqrt{(٢)^{٢}+(٦)^{٢}} = \sqrt{٤+٣٦} = \sqrt{٤٠}$ وحدة طول .

ب جـ = $\sqrt{(-١-٢)^{٢}+(-٢+٣)^{٢}} = \sqrt{(-٣)^{٢}+(١)^{٢}} = \sqrt{٩+١} = \sqrt{١٠}$ وحدة طول .

أ جـ = $\sqrt{(١-٢)^{٢}+(٤+٣)^{٢}} = \sqrt{(-١)^{٢}+(٧)^{٢}} = \sqrt{١+٤٩} = \sqrt{٥٠}$ وحدة طول .

∵ $(\text{أب})^{٢} = ٤٠$ ، $(\text{ب جـ})^{٢} = ١٠$ ، $(\text{أ جـ})^{٢} = ٥٠$

∴ $(\text{أ جـ})^{٢} = (\text{أب})^{٢} + (\text{ب جـ})^{٢}$ ∴ Δ أ ب جـ قائم الزاوية في ب

∴ مساحة Δ أ ب جـ = $\frac{١}{٢} \times \sqrt{٤٠} \times \sqrt{١٠} = ١٠$ وحدة مربعة

الفكرة الرابعة

لإثبات أن النقط أ ، ب ، جـ تقع على دائرة واحدة مركزها م

تثبت أن : م أ = م ب = م جـ ويكون : م أ = م ب = م جـ = نق

- محيط الدائرة = ٢ π نق
- مساحة الدائرة = π نق^{٢}

مثال (١١)

اثبت أن النقط أ(٣ ، -١) ، ب(-٤ ، ٦) ، جـ(٢ ، -٢) تقع على دائرة مركزها النقطة م(-١ ، ٢) ثم أوجد محيط الدائرة بدلالة π . (المنوفية ٢٢ / الأقصر / الوادي ٢٣)

الحل

م أ = $\sqrt{(٣+١)^{٢}+(-١-٢)^{٢}}$ = $\sqrt{(٤)^{٢}+(-٣)^{٢}}$ = $\sqrt{١٦+٩}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدة طول.

م ب = $\sqrt{(-٤+١)^{٢}+(٦-٢)^{٢}}$ = $\sqrt{(-٣)^{٢}+(٤)^{٢}}$ = $\sqrt{٩+١٦}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدة طول.

م جـ = $\sqrt{(٢+١)^{٢}+(-٢-٢)^{٢}}$ = $\sqrt{(٣)^{٢}+(-٤)^{٢}}$ = $\sqrt{٩+١٦}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدة طول.

$\because$ م أ = م ب = م جـ = ٥ $\therefore$ أ ، ب ، جـ تقع على دائرة مركزها م

$\therefore$ محيط الدائرة = ٢ π نق = ٢ π × ٥ = ١٠ π وحدة طول.

حاول بنفسك :

إذا كانت : أ(٦ ، م) تقع على محور تماثل $\overline{\text{جـ د}}$ ، حيث جـ(٣ ، ١) ، د(-٣ ، ٧) فأوجد قيمة م

الفكرة الخامسة

لإثبات أن الشكل الرباعي أ ب جـ د :

- <u>متوازي أضلاع</u> تثبت أن : أ ب = جـ د ، ب جـ = أ د
- <u>مستطيل</u> تثبت أن : أ ب = جـ د ، ب جـ = أ د ، أ جـ = ب د
- <u>مربع</u> تثبت أن : أ ب = جـ د = ب جـ = أ د ، أ جـ = ب د
- <u>معين</u> تثبت أن : أ ب = جـ د = ب جـ = أ د

مثال ١٢

اثبت أن النقط أ $(-٣ ، -١)$ ، ب $(٦ ، ٥)$ ، جـ $(٢ ، ٤)$ ، ء $(-٧ ، -٢)$ هي رؤوس متوازي أضلاع .

(القليوبية ٢٢)

الحل

$\text{أب} = \sqrt{(-٣-٦)^٢+(-١-٥)^٢} = \sqrt{(-٩)^٢+(-٦)^٢} = \sqrt{٨١+٣٦} = \sqrt{١١٧}$ وحدة طول .

$\text{ب جـ} = \sqrt{(٦-٢)^٢+(٥-٤)^٢} = \sqrt{(٤)^٢+(١)^٢} = \sqrt{١٦+١} = \sqrt{١٧}$ وحدة طول .

$\text{جـ ء} = \sqrt{(٢+٧)^٢+(٤+٢)^٢} = \sqrt{(٩)^٢+(٦)^٢} = \sqrt{٨١+٣٦} = \sqrt{١١٧}$ وحدة طول .

$\text{أ ء} = \sqrt{(-٣+٧)^٢+(-١+٢)^٢} = \sqrt{(٤)^٢+(١)^٢} = \sqrt{١٦+١} = \sqrt{١٧}$ وحدة طول .

$\because$ أب = جـ ء ، ب جـ = أ ء $\therefore$ الشكل أ ب جـ ء متوازي أضلاع

مثال ١٣

أ ب جـ ء شكل رباعي حيث أ $(٥ ، ٣)$ ، ب $(٦ ، -٢)$ ، جـ $(١ ، -١)$ ، ء $(٠ ، ٤)$

اثبت أن الشكل أ ب جـ ء معين ثم أوجد مساحته

(قنا ١٩ / المنوفية ٢٣)

الحل

$\text{أب} = \sqrt{(٥-٦)^٢+(٣+٢)^٢} = \sqrt{(-١)^٢+(٥)^٢} = \sqrt{١+٢٥} = \sqrt{٢٦}$ وحدة طول .

$\text{ب جـ} = \sqrt{(٦-١)^٢+(-٢+١)^٢} = \sqrt{(٥)^٢+(-١)^٢} = \sqrt{٢٥+١} = \sqrt{٢٦}$ وحدة طول .

$\text{جـ ء} = \sqrt{(١-٠)^٢+(-١-٤)^٢} = \sqrt{(١)^٢+(-٥)^٢} = \sqrt{١+٢٥} = \sqrt{٢٦}$ وحدة طول .

$\text{أ ء} = \sqrt{(٥-٠)^٢+(٣-٤)^٢} = \sqrt{(٥)^٢+(-١)^٢} = \sqrt{٢٥+١} = \sqrt{٢٦}$ وحدة طول .

$\because$ أب = جـ ء = ب جـ = أ ء $\therefore$ الشكل أ ب جـ ء معين

$\text{أ جـ} = \sqrt{(٥-١)^٢+(٣+١)^٢} = \sqrt{(٤)^٢+(٤)^٢} = \sqrt{١٦+١٦} = ٤\sqrt{٢}$ وحدة طول .

$\text{ب ء} = \sqrt{(٦-٠)^٢+(-٢-٤)^٢} = \sqrt{(٦)^٢+(-٦)^٢} = \sqrt{٣٦+٣٦} = ٦\sqrt{٢}$ وحدة طول .

$\therefore$ مساحة المعين $= \frac{١}{٢} \times ٤\sqrt{٢} \times ٦\sqrt{٢} = ٢٤$ وحدة مربعة

حاول بنفسك :

١ اثبت أن النقط : أ(−١، ٣) ، ب(٥، ١) ، جـ(٦، ٤) ، ء(٠، ٦)
هي رؤوس المستطيل أ ب جـ ء .　　(الإسماعيلية ٢٢ / الأسكندرية ٢٣)

٢ أ ب جـ ء شكل رباعي فيه : أ(٢، ٤) ، ب(−٣، ٠) ، جـ(−٧، ٥) ، ء(−٢، ٩)
اثبت أن الشكل أ ب جـ ء مربع .　　(المنوفية ٢٠ / القليوبية ٢٤)

الفكرة السادسة

المسائل العكسية : وفيها يكون البعد معلوم ومطلوب أحد المجاهيل

مثال ١٤

إذا كان البعد بين النقطتين (أ ، ٧) ، (٠ ، ٣) يساوي ٥ وحدات طول فأوجد : قيمة أ　　(أسيوط ٢٢)

الحـــل

$\therefore \sqrt{(\text{أ} - ٠)^2 + (٧ - ٣)^2} = ٥$

$\therefore \sqrt{(\text{أ})^2 + ١٦} = ٥$　بتربيع الطرفين　$\therefore \text{أ}^2 + ١٦ = ٢٥$

$\therefore \text{أ}^2 = ٢٥ - ١٦$　$\therefore \text{أ}^2 = ٩$　بأخذ $\sqrt{\ }$　$\therefore \text{أ} = \pm ٣$

مثال ١٥

إذا كان بُعد النقطة (س ، ٥) عن النقطة (٦ ، ١) يساوي $٢\sqrt{٥}$ وحدة طول
فأوجد : قيمة س　　(الدقهلية / المنوفية ٢٣ / الجيزة ٢٤)

الحـــل

$\therefore \sqrt{(\text{س} - ٦)^2 + (٥ - ١)^2} = ٢\sqrt{٥}$

$\therefore \sqrt{(\text{س} - ٦)^2 + ١٦} = ٢\sqrt{٥}$　بتربيع الطرفين

$\therefore (\text{س} - ٦)^2 + ١٦ = ٢٠$　$\therefore (\text{س} - ٦)^2 = ٢٠ - ١٦$　$\therefore (\text{س} - ٦)^2 = ٤$　بأخذ $\sqrt{\ }$

$\therefore$ إما $\text{س} - ٦ = ٢$　|　أو $\text{س} - ٦ = -٢$

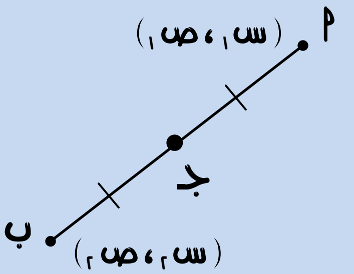
$\text{س} = ٨$　|　$\text{س} = ٤$

2- إحداثيا منتصف قطعة مستقيمة

إذا كانت ٢ (س١ ، ص١) ، ب (س٢ ، ص٢) فإنه يمكن حساب إحداثي نقطة منتصف $\overline{\text{٢ب}}$ بالقانون :

إحداثي المنتصف = $\left(\dfrac{\text{مجموع السينات}}{٢} ، \dfrac{\text{مجموع الصادات}}{٢}\right)$

= $\left(\dfrac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{٢} ، \dfrac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{٢}\right)$



الفكرة الأولى

المسائل المباشرة : يكون معلوم لديك إحداثي البداية والنهاية ويطلب منك إحداثي المنتصف

مثال ١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كانت : ٢ (١ ، ٢) ، ب (٣ ، ٤) فإن نقطة منتصف $\overline{\text{٢ب}}$ هي .... (القليوبية ٢٢)

أ (-٢ ، -٣)　　ب (-٣ ، -٢)　　جـ (٣ ، ٢)　　د (٢ ، ٣)

الحل

منتصف $\overline{\text{٢ب}}$ = $\left(\dfrac{\text{مجموع السينات}}{٢} ، \dfrac{\text{مجموع الصادات}}{٢}\right)$ = $\left(\dfrac{١ + ٣}{٢} ، \dfrac{٢ + ٤}{٢}\right)$ = (٢ ، ٣)

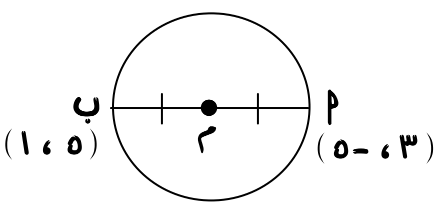
٢ إذا كان : $\overline{\text{٢ب}}$ قطراً في دائرة حيث ٢ (٣ ، -٥) ، ب (٥ ، ١) فإن مركز الدائرة هو ...... (مطروح ١٩)

أ (٤ ، -٢)　　ب (٤ ، ٢)　　جـ (٢ ، -٢)　　د (٨ ، -٢)

الحل

إحداثي المنتصف = $\left(\dfrac{\text{مجموع السينات}}{٢} ، \dfrac{\text{مجموع الصادات}}{٢}\right)$

= $\left(\dfrac{٣ + ٥}{٢} ، \dfrac{-٥ + ١}{٢}\right)$ = (٤ ، -٢)



الفكرة الثانية

لإثبات أن الشكل الرباعي أ ب جـ د : متوازي أضلاع (القطران ينصف كل منهما الآخر)

نثبت أن : نقطة منتصف $\overline{\text{أجـ}}$ = نقطة منتصف $\overline{\text{بد}}$

مثال٢

اثبت أن النقط أ(-٣ ، -١) ، ب(٦ ، ٥) ، جـ(٢ ، ٤) ، د(-٧ ، -٢)

هي رؤوس متوازي أضلاع . (القليوبية ٢٢)

الحـــل

منتصف $\overline{\text{أجـ}} = \left(\frac{-٣+٢}{٢} ، \frac{-١+٤}{٢}\right) = \left(\frac{-١}{٢} ، \frac{٣}{٢}\right)$

منتصف $\overline{\text{بد}} = \left(\frac{٦+-٧}{٢} ، \frac{٥+-٢}{٢}\right) = \left(\frac{-١}{٢} ، \frac{٣}{٢}\right)$

∵ منتصف $\overline{\text{أجـ}}$ = منتصف $\overline{\text{بد}}$ ∴ القطران ينصف كل منهما ∴ أ ب جـ د متوازي أضلاع

مثال٣

إذا كانت : أ(-١ ، -١) ، ب(٢ ، ٣) ، جـ(٦ ، ٠) ، د(٣ ، -٤) أربع نقط في مستوى إحداثي متعامد

أثبت أن : $\overline{\text{أجـ}}$ ، $\overline{\text{بد}}$ ينصف كل منهما الآخر . (السويس ١٩)

الحـــل

منتصف $\overline{\text{أجـ}} = \left(\frac{-١+٦}{٢} ، \frac{-١+٠}{٢}\right) = \left(\frac{٥}{٢} ، \frac{-١}{٢}\right)$

منتصف $\overline{\text{بد}} = \left(\frac{٢+٣}{٢} ، \frac{٣+-٤}{٢}\right) = \left(\frac{٥}{٢} ، \frac{-١}{٢}\right)$

∵ منتصف $\overline{\text{أجـ}}$ = منتصف $\overline{\text{بد}}$ ∴ $\overline{\text{أجـ}}$ ، $\overline{\text{بد}}$ ينصف كل منهما

الفكرة الثالثة

المسائل غير مباشرة : (المنتصف معلوم)

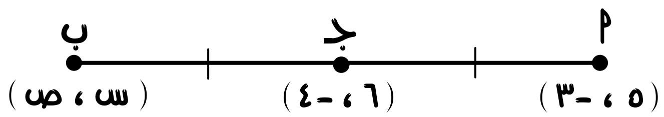
- ☻ يكون معلوم لديك إحداثي المنتصف و البداية و يطلب منك إحداثي النهاية
- أو ☻ يكون معلوم لديك إحداثي المنتصف و النهاية و يطلب منك إحداثي البداية

مثال ٤

إذا كانت جـ (٦ ، -٤) هي منتصف $\overline{\text{أب}}$ حيث أ (٥ ، -٣) فأوجد إحداثي نقطة ب

(الجيزة / دمياط / أسوان ٢٣)

الحل



نفرض أن ب = (س ، ص)

$$\text{إحداثي المنتصف} = \left(\frac{\text{مجموع السينات}}{٢} \text{ ، } \frac{\text{مجموع الصادات}}{٢} \right)$$

$$\therefore (٦ \text{ ، } -٤) = \left(\frac{٥ + \text{س}}{٢} \text{ ، } \frac{-٣ + \text{ص}}{٢} \right)$$

$$\frac{٥ + \text{س}}{٢} = ٦ \qquad \Big| \qquad \frac{-٣ + \text{ص}}{٢} = -٤$$

$$٥ + \text{س} = ١٢ \qquad \Big| \qquad -٣ + \text{ص} = -٨$$

$$\text{س} = ٧ \qquad \Big| \qquad \text{ص} = -٥$$

$\therefore$ إحداثي ب = (٧ ، -٥)

مثال ٥

أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه أ (٣ ، ٢) ، ب (٤ ، -٥) ، جـ (٠ ، -٣)

أوجد : [١] إحداثي نقطة تقاطع قطريه [٢] إحداثي نقطة د (الشرقية ٢٣)

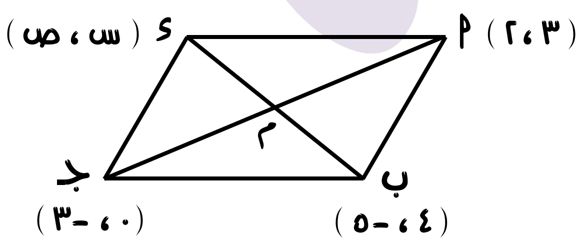
الحل

$$\text{م منتصف } \overline{\text{أجـ}} = \left(\frac{٣ + ٠}{٢} \text{ ، } \frac{٢ + -٣}{٢} \right) = \left(\frac{٣}{٢} \text{ ، } \frac{-١}{٢} \right)$$

نفرض أن د (س ، ص)

$\because$ منتصف $\overline{\text{أجـ}}$ = منتصف $\overline{\text{ب د}}$

$$\therefore \left(\frac{٣}{٢} \text{ ، } \frac{-١}{٢} \right) = \left(\frac{٤ + \text{س}}{٢} \text{ ، } \frac{-٥ + \text{ص}}{٢} \right)$$



$$\frac{٤ + \text{س}}{٢} = \frac{٣}{٢} \qquad \Big| \qquad \frac{-٥ + \text{ص}}{٢} = \frac{-١}{٢}$$

$$٤ + \text{س} = ٣ \qquad \Big| \qquad -٥ + \text{ص} = -١$$

$$\text{س} = -١ \qquad \Big| \qquad \text{ص} = ٤$$

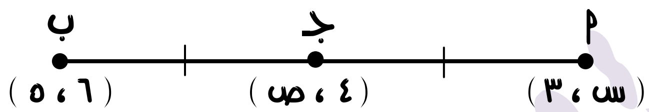
$\therefore$ إحداثي د = (-١ ، ٤)

مثال ٦

إذا كانت النقطة جـ (٤ ، ص) هي منتصف $\overline{\text{أب}}$ حيث أ (س ، ٣) ، ب (٦ ، ٥)

فأوجد قيمة : س + ص (دمياط / بني سويف ٢٤)

الحل



إحداثي المنتصف = $\left(\frac{\text{مجموع السينات}}{٢} ، \frac{\text{مجموع الصادات}}{٢} \right)$

∴ (٤ ، ص) = $\left(\frac{\text{س} + ٦}{٢} ، \frac{٣ + ٥}{٢} \right)$

$\frac{\text{س} + ٦}{٢} = ٤$ | $\frac{٣ + ٥}{٢} = \text{ص}$

س + ٦ = ٨ | ٤ = ص

س = ٢ | ص = ٤

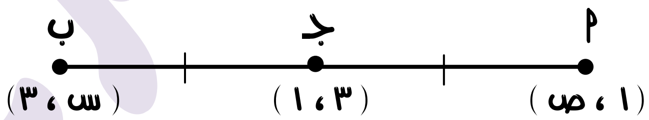
∴ س + ص = ٢ + ٤ = ٦

مثال ٧

إذا كانت النقطة جـ (٣ ، ١) هي منتصف البعد بين النقطتين أ (١ ، ص) ، ب (س ، ٣)

أوجد النقطة : (س ، ص) (الوادي الجديد ٢٣ / القليوبية ٢٤)

الحل



إحداثي المنتصف = $\left(\frac{\text{مجموع السينات}}{٢} ، \frac{\text{مجموع الصادات}}{٢} \right)$

∴ (٣ ، ١) = $\left(\frac{١ + \text{س}}{٢} ، \frac{\text{ص} + ٣}{٢} \right)$

$\frac{١ + \text{س}}{٢} = ٣$ | $\frac{\text{ص} + ٣}{٢} = ١$

١ + س = ٦ | ص + ٣ = ٢

س = ٥ | ص = -١

∴ النقطة (س ، ص) = (٥ ، -١)

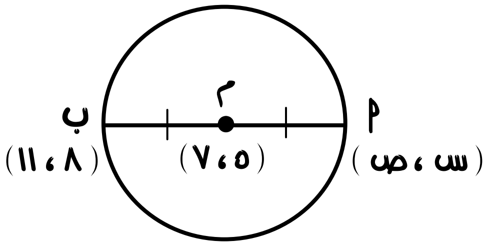
مثال ٨

$\overline{\text{أب}}$ قطر في دائرة مركزها م فإذا كانت : ب (٨ ، ١١) ، م (٥ ، ٧) فأوجد :

١ إحداثي أ ٢ محيط الدائرة حيث π = ٣,١٤ (سوهاج ٢٣ / قنا ٢٤)

الحل

إحداثي المنتصف = $\left(\frac{\text{مجموع السينات}}{٢} \text{ ، } \frac{\text{مجموع الصادات}}{٢} \right)$



∴ (٥ ، ٧) = $\left(\frac{\text{س} + ٨}{٢} \text{ ، } \frac{\text{ص} + ١١}{٢} \right)$

$\frac{\text{س} + ٨}{٢}$ = ٥ | $\frac{\text{ص} + ١١}{٢}$ = ٧

س + ٨ = ١٠ | ص + ١١ = ١٤

س = ٢ | ص = ٣

∴ إحداثي أ = (٢ ، ٣)

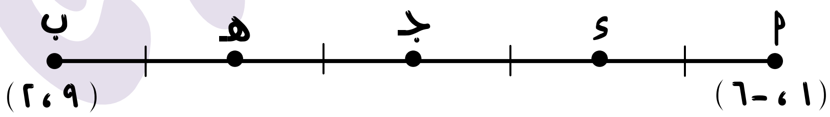
نق = م ب = $\sqrt{(٥ - ٨)^٢ + (٧ - ١١)^٢}$ = $\sqrt{٩ + ١٦}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدة طول

محيط الدائرة = ٢ π نق = ٢ × ٣,١٤ × ٥ = ٣١,٤ وحدة طول

مثال ٩

إذا كانت أ (١ ، -٦) ، ب (٩ ، ٢) فأوجد إحداثيات النقط التي تقسم $\overline{\text{أب}}$ إلى أربعة أجزاء متساوية في الطول . (الأقصر ٢٢)

الحل



إحداثي جـ (منتصف أب) = $\left(\frac{١ + ٩}{٢} \text{ ، } \frac{-٦ + ٢}{٢} \right)$ = (٥ ، -٢)

إحداثي ء (منتصف أجـ) = $\left(\frac{١ + ٥}{٢} \text{ ، } \frac{-٦ + -٢}{٢} \right)$ = (٣ ، -٤)

إحداثي هـ (منتصف جـب) = $\left(\frac{٥ + ٩}{٢} \text{ ، } \frac{-٢ + ٢}{٢} \right)$ = (٧ ، ٠)

مثال ١٠

إذا كانت أ (٣ ، ٢) ، ب (٤ ، -٣) ، جـ (-١ ، -٢) ، ء (-٢ ، ٣) هي رؤوس معين فأوجد :

[١] إحداثي نقطة تقاطع القطرين [٢] مساحة المعين (الغربية / سوهاج ٢٤)

الحـــل

∵ القطران ينصف كل منهما الآخر ∴ إحداثي نقطة تقاطع القطرين هي منتصف أ جـ ، ب ء

∴ منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ = $\left(\frac{٣ + -١}{٢} ، \frac{٢ + -٢}{٢}\right)$ = (١ ، ٠)

أ جـ = $\sqrt{(٣+١)^٢ + (٢+٢)^٢}$ = $\sqrt{(٤)^٢ + (٤)^٢}$ = $\sqrt{١٦+١٦}$ = ٤ $\sqrt{٢}$ وحدة طول .

ب ء = $\sqrt{(٤+٢)^٢ + (-٣-٣)^٢}$ = $\sqrt{(٦)^٢ + (-٦)^٢}$ = $\sqrt{٣٦+٣٦}$ = ٦ $\sqrt{٢}$ وحدة طول .

∴ مساحة المعين = $\frac{١}{٢}$ × ٤ $\sqrt{٢}$ × ٦ $\sqrt{٢}$ = ٢٤ وحدة مربعة

مثال ١١

أوجد قيمة أ ، ب التي تجعل النقطة (٢أ - ٣ ، ٥ + ب) منتصف القطعة المستقيمة التي طرفاها النقطتين (٧ ، -١) ، (٣ ، ٧) (البحيرة ٢٤)

الحـــل

المنتصف = $\left(\frac{٧ + ٣}{٢} ، \frac{-١ + ٧}{٢}\right)$ = (٥ ، ٣)

∴ (٥ ، ٣) = (٢أ - ٣ ، ٥ + ب)

∴ ٢أ - ٣ = ٥	٥ + ب = ٣
٢أ = ٨	ب = -٢
أ = ٤	

حاول بنفسك : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

إذا كانت نقطة الأصل هي منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ حيث أ (٥ ، -٢) فإن النقطة ب هي .... (سوهاج ٢٤)

(أ) (٢ ، ٥) (ب) (٥ ، -٢) (جـ) (-٢ ، -٥) (د) (-٥ ، ٢)

٣ - ميل الخط المستقيم

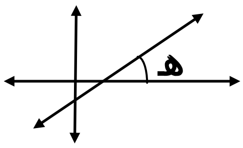
☻ يرمز للميل بالرمز م ويمكن حسابه بالقوانين التالية : (حسب المعطى في المسألة)

١ إذا كان المستقيم يمر بنقطتين (س١ ، ص١) ، (س٢ ، ص٢) فإن :

$$\text{م} = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{\text{ص}_1 - \text{ص}_2}{\text{س}_1 - \text{س}_2}$$

٢ إذا كان المستقيم يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها هـ

م = ظا هـ



٣ إذا كان للمستقيم معادلة على الصورة

ا س + ب ص + جـ = ٠ (س ، ص مع بعض)

$$\text{م} = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$$

٤ إذا كان للمستقيم معادلة على الصورة

ص = ا س + جـ (ص لوحدها)

م = معامل س

مثال ١ أجب على كلاً مما يأتي :

١ ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين ا (٥ ، ١) ، ب (٣ ، ٣) هو .... (الفيوم ٢٤)

الحل

$$\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{1-3}{5-3} = \frac{-2}{2} = -1$$

٢ أوجد ميل الخط المستقيم الذي يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥°

الحل م = ظا هـ = ظا ٤٥° = ١

٣ أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته : ٢ س + ٣ ص - ٥ = ٠

الحل

$$\text{م} = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-2}{3}$$

٤ أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته : ٢ ص = ٦ س + ١

الحل بالقسمة على ٢ ∴ ص = ٣ س + $\frac{1}{2}$ م = معامل س ∴ م = ٣

٥ ميل المستقيم الذي يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها الموجب س° يساوي ......

(أ) جا س° (ب) جتا س° (جـ) ظا س° (د) جا س° + جتا س°

الحل: الميل = ظا س°

٦ إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٤) ، (٣ ، ك) يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن ك .... (الشرقية ٢٤)

(أ) ٣ (ب) ١ (جـ) ٥ (د) ٦

الحل: $\frac{ك - ٤}{٣ - ٢} = ١$ ∴ ك − ٤ = ١ ∴ ك = ٥

٧ ميل المستقيم الذي معادلته : س − ٥ = ٠ هو .... (الفيوم ٢٢)

(أ) ٥ (ب) صفر (جـ) غير معرف (د) $\frac{١}{٥}$

الحل: س = ٥ ∴ المستقيم يوازي محور الصادات ∴ الميل غير معرف

٨ ميل المستقيم الذي معادلته : ص = ٣ هو .... (الدقهلية ٢٢)

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٣ (د) غير معرف

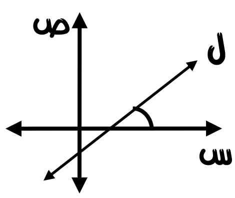
الحل: ص = ٣ ∴ المستقيم يوازي محور السينات ∴ الميل = صفر

٩ أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته : $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٣} = ١$ (للشطار حاول بنفسك)

ملاحظات هامة

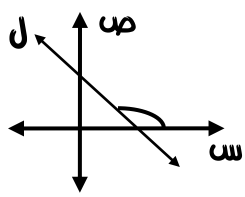
١ الزاوية التي يصنعها المستقيم ل مع الاتجاه الموجب لمحور السينات تأخذ إحدى الحالات الآتية :

(١) حادة



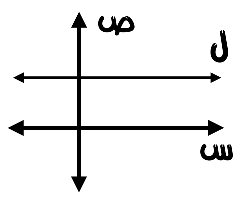
م > ٠
الميل موجب

(٢) منفرجة



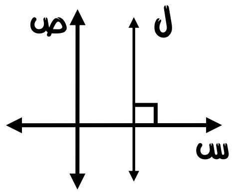
م < ٠
الميل سالب

(٣) صفرية



المستقيم يوازي محور السينات
الميل = صفر

(٤) قائمة



المستقيم يوازي محور الصادات
الميل غير معرف

٢ إذا كان المستقيم يمر بنقطتين ويوازي محور الصادات فإن السينات تكون متساوية .

مثال ٢

إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // محور الصادات ، حيث أ (س ، ٧) ، ب (٣ ، ٥) فأوجد قيمة س .

الحل   (الأقصر ١٩)

م = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$ = $\frac{٧ - ٥}{س - ٣}$

∵ أب // محور الصادات   ∴ م غير معرف (يعني المقام = صفر)

∴ س - ٣ = صفر   ∴ س = ٣

٣ إذا كان المستقيم يمر بنقطتين ويوازي محور السينات فإن الصادات تكون متساوية .

مثال ٣

إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ // محور السينات ، حيث جـ (٤ ، ٢) ، د (-٥ ، ص) فأوجد قيمة ص .

الحل   (دمياط ٢٢)

م = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$ = $\frac{٢ - ص}{٤ - -٥}$

∵ أب // محور السينات   ∴ م = صفر (يعني البسط = صفر)

∴ ص - ٢ = صفر   ∴ ص = ٢

حاول بنفسك : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ ميل المستقيم الموازي لمحور السينات يساوي .... (الجيزة / مطروح ٢٤)

أ غير معرف   ب صفر   جـ ١   د -١

٢ ميل المستقيم الموازي لمحور الصادات .... (الفيوم ٢٣)

أ غير معرف   ب = صفر   جـ = ١   د = -١

٣ المستقيم الذي يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ميله ...... (الوادي الجديد ٢٢)

أ أكبر من الصفر   ب أصغر من صفر   جـ يساوي صفر   د غير معرف

العلاقة بين ميلى المستقيمين المتوازيين

إذا كان : $ل_١ // ل_٢$ فإن : $م_١ = م_٢$ (إذا كان المستقيمان متوازيان فإن : ميل الأول = ميل الثاني)

فمثلاً : إذا كان ميل المستقيم ل هو $\frac{٢}{٣}$ فإن ميل المستقيم الموازي له هو $\frac{٢}{٣}$

حاول بنفسك : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان : $\overleftrightarrow{أب} // \overleftrightarrow{جـ ء}$ وكان ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{٢}{٣}$ فإن : ميل $\overleftrightarrow{جـ ء}$ = ... (بني سويف ٢٤)

أ $\frac{٢}{٣}$ ب $\frac{-٢}{٣}$ جـ $\frac{٣}{٢}$ ء $-\frac{٣}{٢}$

٢ إذا تساوى ميلا مستقيمين كان المستقيمان = ... (كفر الشيخ ٢٢)

أ متوازيين ب متقاطعين جـ متعامدين ء خلاف ذلك

٣ إذا كان المستقيم $ل_١ // ل_٢$ ، م ميل المستقيم $ل_١$ ، ن ميل المستقيم $ل_٢$ فإن .... (الفيوم ٢٤)

أ م + ن = ٠ ب م − ن = ٠ جـ م ن = −١ ء $\frac{م}{ن}$ = −١

الفكرة الأولى

لإثبات أن المستقيمان متوازيان : نحسب $م_١$ ، $م_٢$ ثم نثبت أن : $م_١ = م_٢$

مثال ٤

أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين : (٢ ، −١) ، (٦ ، ٣) يوازي المستقيم الذي يصنع زاوية موجبة قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات . (سوهاج ٢٢ / جنوب سيناء ٢٣)

الحل

$م_١ = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{-١ - ٣}{٢ - ٦} = \frac{-٤}{-٤} = ١$

$م_٢$ = ظا ٤٥° = ١

∵ $م_١ = م_٢$ ∴ المستقيمان متوازيان

مثال ٥

أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين : (-١ ، ٣) ، (٢ ، ٤) يوازي المستقيم ٣ ص - س - ١ = ٠

(القليوبية ٢٢)

الحل

$م_١ = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٣ - ٤}{-١ - ٢} = \frac{-١}{-٣} = \frac{١}{٣}$

$م_٢ = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{١}{٣}$ ∵ $م_١ = م_٢$ ∴ المستقيمان متوازيان

مثال ٦

أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٣) ، (٠ ، ٠) يوازي المستقيم المار بالنقطتين (-١ ، ٤) ، (١ ، ٧)

(ج . سيناء ٢٢)

الحل

$م_١ = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٣ - ٠}{٢ - ٠} = \frac{٣}{٢}$

$م_٢ = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٤ - ٧}{-١ - ١} = \frac{-٣}{-٢} = \frac{٣}{٢}$

∵ $م_١ = م_٢$ ∴ المستقيمان متوازيان

الفكرة الثانية

لو عندك مستقيمين متوازين و عايز قيمة مجهول :

نحسب $م_١$ ، $م_٢$ ثم نساوي : الميل المجهول = الميل المعلوم

مثال ٧ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

إذا كان المستقيمان اللذان ميلاهما $\frac{-٣}{٢}$ ، $\frac{٦}{ك}$ متوازيين فإن : ك = ... (القليوبية ٢٤)

أ -٤ ب ٢ جـ $\frac{٣}{٢}$ د ٩

الحل ∵ المستقيمان متوازيين ∴ $م_١ = م_٢$

∴ $\frac{-٣}{٢} = \frac{٦}{ك}$ (مقص) ∴ -٣ ك = ١٢ ∴ ك = -٤

حاول بنفسك : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

إذا كان المستقيمان : س + ص = ٥ ، ك س + ٢ص = ٠ متوازيين فإن ك = …… (سوهاج ١٦)

أ -٢ ب -١ ج ١ د ٢

مثال ٨

إذا كان المستقيم ل$_١$ يمر بالنقطتين (٣ ، ١) ، (٢ ، ك) والمستقيم ل$_٢$ يصنع زاوية مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ٤٥° فأوجد قيمة ك إذا كان : ل$_١$ // ل$_٢$ (المنوفية ٢٢)

الحل

م$_١$ = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$ = $\frac{١ - ك}{٣ - ٢}$ = $\frac{١ - ك}{١}$ = ١ - ك

م$_٢$ = ظا ٤٥° = ١

∵ المستقيمان متوازيان ∴ م$_١$ = م$_٢$

∴ ١ - ك = ١ ∴ - ك = ١ - ١ ∴ - ك = صفر ∴ ك = صفر

مثال ٩

إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (-١ ، ٣) ، (ل ، ٤) يوازي المستقيم الذي معادلته :

٣ص - س - ١ = صفر أوجد قيمة ل (الغربية ٢٢)

الحل

م$_١$ = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$ = $\frac{٣ - ٤}{-١ - ل}$ = $\frac{-١}{-١ - ل}$

م$_٢$ = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{١}{٣}$

∵ المستقيمان متوازيان ∴ م$_١$ = م$_٢$

∴ $\frac{-١}{-١ - ل}$ = $\frac{١}{٣}$ (مقص)

∴ -١ - ل = -٣ ∴ - ل = -٣ + ١ ∴ - ل = -٢ ∴ ل = ٢

بعض الإثباتات الهامة

إثبات أن : النقط ٩ ، ب ، جـ تقع على استقامة

نحسب : ميل ٩ب ، ب جـ   ثم نثبت أن : ميل ٩ب = ميل ب جـ

مثال ١٠

أثبت أن النقط ٩ (−٣ ، −١) ، ب (٦ ، ٥) ، جـ (٣ ، ٣) تقع على استقامة واحدة . (كفر الشيخ ٢٢)

الحـــل

ميل ٩ب = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$ = $\frac{-١ - ٥}{-٣ - ٦}$ = $\frac{-٦}{-٩}$ = $\frac{٢}{٣}$

ميل ب جـ = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$ = $\frac{٥ - ٣}{٦ - ٣}$ = $\frac{٢}{٣}$

∵ ميل ٩ب = ميل ب جـ ∴ وهما مشتركان في النقطة ب

∴ النقط ٩ ، ب ، جـ تقع على استقامة

مثال ١١

إذا كان النقط (٠ ، ١) ، (٩ ، ٣) ، (٢ ، ٥) تقع على استقامة واحدة فأوجد قيمة ٩

(القليوبية / كفر الشيخ ٢٤)

الحـــل

نفرض أن س (٠ ، ١) ، ص (٩ ، ٣) ، ع (٢ ، ٥)

ميل س ص = $\frac{١ - ٣}{٠ - ٩}$ = $\frac{-٢}{-٩}$ = $\frac{٢}{٩}$

ميل س ع = $\frac{١ - ٥}{٠ - ٢}$ = $\frac{-٤}{-٢}$ = ٢

∵ النقط ٩ ، ب ، جـ تقع على استقامة ∴ ميل س ص = ميل س ع

∴ $\frac{٢}{٩}$ = ٢ ∴ ٢٩ = ٢ ∴ ٩ = ١

إثبات أن : أ ب جـ د **متوازي أضلاع**   نثبت أن : كل ضلعان متقابلان متوازيان

ميل أب = ميل جـ د ∴ أب // جـ د ، ميل ب جـ = ميل أ د ∴ ب جـ // أ د

مثال ١٢

اثبت أن النقط أ(−١، ١) ، ب(٠، ٥) ، جـ(٥، ٦) ، د(٤، ٢) هي رؤوس لمتوازي أضلاع . (كفر الشيخ ٢٢)

الحل

ميل أب = $\frac{١ - ٥}{-١ - ٠} = \frac{-٤}{-١} = ٤$ ، ميل ب جـ = $\frac{٥ - ٦}{٠ - ٥} = \frac{-١}{-٥} = \frac{١}{٥}$

ميل جـ د = $\frac{٦ - ٢}{٥ - ٤} = \frac{٤}{١} = ٤$ ، ميل أ د = $\frac{١ - ٢}{-١ - ٤} = \frac{-١}{-٥} = \frac{١}{٥}$

∵ ميل أب = ميل جـ د ∴ أب // جـ د ، ∵ ميل ب جـ = ميل أ د ∴ ب جـ // أ د

∴ أ ب جـ د متوازي أضلاع

إثبات أن : أ ب جـ د **شبه منحرف**   نثبت أن : ضلعان متوازيان وضلعان غير متوازيان

ميل ب جـ = ميل أ د ، ميل أب ≠ ميل جـ د

مثال ١٣

اثبت أن النقط أ(٢، ٣) ، ب(٦، ٢) ، جـ(٠، −١) ، د(−٢، ١) هي رؤوس شبه منحرف .

الحل

ميل أب = $\frac{٣ - ٢}{٢ - ٦} = \frac{١}{-٤} = \frac{-١}{٤}$ ، ميل ب جـ = $\frac{٢ - -١}{٦ - ٠} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

ميل جـ د = $\frac{-١ - ١}{٠ - -٢} = \frac{-٢}{٢} = -١$ ، ميل أ د = $\frac{٣ - ١}{٢ - -٢} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

∵ ميل ب جـ = ميل أ د ∴ ب جـ // أ د

∵ ميل أب ≠ ميل جـ د ∴ أب لا يوازي جـ د

∴ أ ب جـ د شبه منحرف

العلاقة بين ميلى المستقيمين المتعامدين

إذا كان : $ل_١ \perp ل_٢$ فإن : $م_١ \times م_٢ = -١$ (حاصل ضرب ميلي المستقيمين المتعامدين = -١)

$م_١ = \frac{-١}{م_٢}$ (يعني لو عايز الميل العمودي ⟵ شقلب وغير الإشارة)

فمثلاً : إذا كان ميل المستقيم ل هو $\frac{-٢}{٣}$ فإن ميل المستقيم العمودي عليه $\frac{٣}{٢}$

إذا كان ميل المستقيم ل هو ٢ فإن ميل المستقيم العمودي عليه $\frac{-١}{٢}$

مثال ١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان $ل_١$ ، $ل_٢$ مستقيمان في المستوى ميلاهما $م_١$ ، $م_٢$ ، $ل_١ \perp ل_٢$ فإن .... (قنا ٢٤)

أ $م_١ = م_٢$ ب $م_١ = -م_٢$ جـ $م_١ م_٢ = -١$ د $م_١ م_٢ = ١$

٢ إذا كان $م_١$ ، $م_٢$ ميلى مستقيمين متعامدين وكان $م_١ = \frac{١}{٣}$ فإن $م_٢ =$ .... (كفر الشيخ ٢٤)

أ -٣ ب $\frac{١}{٣}$ جـ $-\frac{١}{٣}$ د -١

٣ حاصل ضرب ميلي المستقيمين المتعامدين = ... (دمياط ٢٢)

أ $\frac{١}{٢}$ ب صفر جـ -١ د ١

٤ المستقيمان اللذان ميلاهما $\frac{-٣}{٥}$ ، $\frac{٥}{٣}$ يكونان .... (القاهرة ٢٢)

أ متعامدين ب متوازيين جـ متقاطعين وغير متعامدين د منطبقان

٥ إذا كان : $م_١$ ، $م_٢$ ميلي مستقيمين متعامدين ، $م_١ = ٠,٧٥$ فإن : $م_٢ =$ .... (الشرقية ١٣)

أ $-\frac{٣}{٤}$ ب $\frac{٤}{٣}$ جـ $-\frac{٤}{٣}$ د $\frac{٣}{٤}$

٦ ميل المستقيم العمودي على المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٣)،(٥ ، ١) يساوي ..... (الجيزة ١٧)

أ $\frac{٣}{٢}$ ب $\frac{٢}{٣}$ جـ $\frac{-٣}{٢}$ د $\frac{-٢}{٣}$

الفكرة الأولى

لإثبات أن المستقيمان متعامدان : نحسب $م_١$ ، $م_٢$

ثم نثبت أن : $م_١ \times م_٢ = -١$ أو   ميل = صفر والميل الآخر غير معرف

مثال٢

أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٤ ، ٣$\sqrt{٣}$) ، (٥ ، ٢$\sqrt{٣}$) عمودي على المستقيم الذي يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٣٠° (القليوبية / مطروح ٢٤)

الحل

$$م_١ = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٣\sqrt{٣} - ٢\sqrt{٣}}{٤ - ٥} = \frac{\sqrt{٣}}{-١} = -\sqrt{٣}$$

$$م_٢ = \text{ظا } ٣٠° = \frac{١}{\sqrt{٣}}$$

$$\because م_١ \times م_٢ = -\sqrt{٣} \times \frac{١}{\sqrt{٣}} = -١$$ $\therefore$ المستقيمان متعامدان

مثال٣

أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٢) ، (١ ، ٣) عمودي على الخط المستقيم :

ص = ٢س + ٥ (القاهرة ٢٤)

الحل

$$م_١ = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٢ - ٣}{٣ - ١} = \frac{-١}{٢}$$

$$م_٢ = \text{معامل س} = ٢$$

$$\because م_١ \times م_٢ = \frac{-١}{٢} \times ٢ = -١$$ $\therefore$ المستقيمان متعامدان

مثال ٤

أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين : أ (−٣ ، ٤) ، جـ (−٣ ، −٢) عمودي على المستقيم المار بالنقطتين ب (١ ، ٢) ، ء (−٣ ، ٢) . (أسوان ٢٣)

الحل

م١ = فرق الصادات / فرق السينات = $\frac{٤ - -٢}{-٣ - -٣}$ = $\frac{٦}{٠}$ غير معرف (يوازي محور الصادات)

م٢ = فرق الصادات / فرق السينات = $\frac{٢ - ٢}{١ - -٣}$ = $\frac{٠}{٤}$ = صفر (يوازي محور السينات)

∴ المستقيمان متعامدان

مثال ٥

إذا كان المستقيم ل١ يمر بالنقطتين (٣ ، ١) ، (٢ ، ٢) و المستقيم ل٢ يصنع زاوية مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها هـ° حيث جا هـ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

أثبت أن : ل١ ، ل٢ متعامدان (الدقهلية ٢٢)

الحل

م١ = فرق الصادات / فرق السينات = $\frac{١ - ٢}{٣ - ٢}$ = $\frac{-١}{١}$ = −١

∵ جا هـ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ∴ هـ = ٤٥°

م٢ = ظا ٤٥° = ١

∵ م١ × م٢ = −١ × ١ = −١ ∴ المستقيمان متعامدان

الفكرة الثانية

لو عندك مستقيمين متعامدين و عايز قيمة مجهول :

نحسب $م_١$ ، $م_٢$ ثم نساوي : الميل المجهول = ـ شقلوب المعلوم

مثال ٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان المستقيمان اللذان ميلاهما $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{أ}{٢}$ متعامدين فإن : أ = ... (الوادي الجديد ٢٢)

أ $\frac{٤}{٣}$ ب ٣   جـ $-\frac{٤}{٣}$ د $\frac{٣}{٤}$

الحل ∵ المستقيمان متعامدين

∴ $\frac{أ}{\cancel{٢}} = \frac{٣}{\cancel{٢}}$ ∴ أ = ٣

٢ إذا كان المستقيم $ل_١$ ميله $\frac{أ}{٥}$ ، والمستقيم $ل_٢$ ميله $\frac{-ب}{٣}$ حيث أ ≠ ٠ ، ب ≠ ٠

وكان : $ل_١ \perp ل_٢$ فإن : أ ب = ... (الشرقية ١٩)

أ $\frac{٣}{٥}$ ب $-\frac{٣}{٥}$ جـ ١٥   د ـ ١٥

الحل ∵ المستقيمان متعامدين

∴ $\frac{أ}{٥} = \frac{٣}{ب}$ (مقص)   ∴ أ ب = ١٥

مثال ٧

إذا كان المستقيمان : ٣ س ـ ٤ ص ـ ٣ = ٠ ، ك ص + ٤ س ـ ٨ = ٠ متعامدين

فأوجد قيمة : ك (كفر الشيخ ٢٢)

الحل

$م_١ = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-٣}{-٤} = \frac{٣}{٤}$ ، $م_٢ = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-٤}{ك}$

∵ المستقيمان متعامدين   ∴ $\frac{ك}{\cancel{٤}} = \frac{٣}{\cancel{٤}}$ ∴ ك = ٣

مثال ٨

إذا كان المستقيم ل$_١$ يمر بالنقطتين (٣ ، ١) ، (٢ ، ك) والمستقيم ل$_٢$ يصنع زاوية مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ٤٥°

أوجد قيمة ك إذا كان المستقيمان ل$_١$ ، ل$_٢$ متعامدان (الجيزة ٢٣ / الغربية ٢٤)

الحل

م$_١$ = فرق الصادات / فرق السينات = $\frac{١ - ك}{٣ - ٢}$ = $\frac{١ - ك}{١}$ = ١ - ك

م$_٢$ = ظا ٤٥° = ١

∵ المستقيمان متعامدان

∴ ١ - ك = -١ ∴ - ك = -١ - ١ ∴ - ك = -٢ ∴ ك = ٢

بعض الإثباتات الهامة

<u>إثبات أن</u> : Δ أ ب جـ قائم الزاوية في ب

نحسب : ميل أ ب ، ب جـ (المتعامدان) ثم نثبت أن : ميل أ ب × ميل ب جـ = -١

مثال ٩

إذا كانت : أ (-١ ، -١) ، ب (٢ ، ٣) ، جـ (٦ ، ٠)

أثبت أن : المثلث أ ب جـ قائم الزاوية في ب (البحيرة / الإسماعيلية ٢٤)

الحل

ميل أ ب = $\frac{-١ - ٣}{-١ - ٢}$ = $\frac{-٤}{-٣}$ = $\frac{٤}{٣}$

ميل ب جـ = $\frac{٣ - ٠}{٢ - ٦}$ = $\frac{٣}{-٤}$ = $\frac{-٣}{٤}$

∵ م$_١$ × م$_٢$ = $\frac{٤}{٣}$ × $\frac{-٣}{٤}$ = -١ ∴ أ ب ⊥ ب جـ

∴ المثلث أ ب جـ قائم الزاوية في ب

مثال ١٠

إذا كان المثلث الذي رؤوسه النقط ص (٤ ، ٢) ، س (٣ ، ٥) ، ع (-٥ ، م) قائم الزاوية في ص فأوجد قيمة م

(الفيوم ٢٢)

الحـــل

ميل ص س = $\frac{٢ - ٥}{٤ - ٣}$ = $\frac{-٣}{١}$ = -٣

ميل ص ع = $\frac{٢ - م}{٤ - -٥}$ = $\frac{٢ - م}{٩}$

∵ المثلث س ص ع قائم الزاوية في ص

∴ $\frac{٢ - م}{٩}$ = $\frac{١}{٣}$ ∴ ٦ - ٣م = ٩ ∴ - ٣م = ٩ - ٦

∴ - ٣م = ٣ ∴ م = -١

اثبات أن : م ب جـ ء مستطيل

نثبت أنه : متوازي أضلاع ثم نثبت : ضلعان متجاوران متعامدان

مثال ١١

اثبت باستخدام الميل أن النقط م (-١ ، ٣) ، ب (٥ ، ١) ، جـ (٦ ، ٤) ، ء (٠ ، ٦) هي رؤوس مستطيل .

(الإسماعيلية ٢٢)

الحـــل

ميل م ب = $\frac{٣ - ١}{-١ - ٥}$ = $\frac{٢}{-٦}$ = $\frac{-١}{٣}$ ، ميل ب جـ = $\frac{١ - ٤}{٥ - ٦}$ = $\frac{-٣}{-١}$ = ٣

ميل جـ ء = $\frac{٤ - ٦}{٦ - ٠}$ = $\frac{-٢}{٦}$ = $\frac{-١}{٣}$ ، ميل م ء = $\frac{٣ - ٦}{-١ - ٠}$ = $\frac{-٣}{-١}$ = ٣

∵ ميل م ب = ميل جـ ء ∴ م ب // جـ ء

∵ ميل ب جـ = ميل م ء ∴ ب جـ // م ء ∴ م ب جـ ء متوازي أضلاع

∵ ميل ا ب × ميل ب جـ = $\frac{-١}{٣}$ × ٣ = -١ ∴ م ب ⊥ ب جـ ∴ الشكل مستطيل

٤- معادلة الخط المستقيم

أولاً : إيجاد ميل الخط المستقيم وطول الجزء المقطوع من محور الصادات (إذا علمت معادلة الخط المستقيم)

١ إذا كانت معادلة الخط المستقيم على الصورة : ص = م س + جـ (ص لوحدها خالص)

الميل = م (معامل س)

طول الجزء المقطوع من محور الصادات = | الحد المطلق |

طول الجزء المقطوع من محور السينات نضع ص = ٠

مثال ١

أوجد الميل وطول الجزء المقطوع من محور الصادات بالمستقيم الذي معادلته : ص = ٢ س - ٥

الحـــل

م = معامل س = ٢ ، جـ = | الحد المطلق | = | -٥ | = ٥

٢ إذا كانت معادلة الخط المستقيم على الصورة :

أ س + ب ص = جـ أو أ س + ب ص + جـ = ٠ (س ، ص مع بعض)

$$\text{الميل} = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$$

$$\text{طول الجزء المقطوع من محور الصادات} = \left| \frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل ص}} \right|$$

مثال ٢

أوجد الميل وطول الجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذي معادلته ٢ س - ٣ ص + ٦ = صفر

(الجيزة ٢٤)

الحـــل

$$\text{م} = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-٢}{-٣} = \frac{٢}{٣}$$

$$\text{طول الجزء المقطوع من محور الصادات} = \left| \frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل ص}} \right| = \left| \frac{٦}{-٣} \right| = | -٢ | = ٢$$

حاول بنفسك :

أوجد الميل للمستقيم الذي معادلته : ٤ س + ٥ ص - ١٠ = صفر

و كذلك أوجد طول الجزء المقطوع من محور الصادات . (قنا ٢٢ / سوهاج ٢٣)

مثال٣

أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته : $\frac{\text{ص} - ٢}{\text{س}} = \frac{١}{٢}$ ثم أوجد طول الجزء المقطوع من محور الصادات (بني سويف ٢٤)

الحـــل

نضبط شكل المعادلة (بالمقص) ∴ ٢ ص - ٤ = س

∴ ٢ ص - س - ٤ = ٠

$م = \frac{- \text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{١}{٢}$

طول الجزء المقطوع من محور الصادات = $\left| \frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل ص}} \right| = \left| \frac{- ٤}{٢} \right| = | - ٢ | = ٢$

مثال٤

أوجد ميل الخط المستقيم : $\frac{\text{س}}{٢} + \frac{\text{ص}}{٣} = ١$ ثم أوجد طول الجزء المقطوع من محور الصادات (الإسكندرية / أسيوط ٢٤)

الحـــل

بضرب المعادلة × ٦ ∴ ٣ س + ٢ ص = ٦

$م = \frac{- \text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-٣}{٢}$

طول الجزء المقطوع من محور الصادات = $\left| \frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل ص}} \right| = \left| \frac{٦}{٢} \right| = | ٣ | = ٣$

ثانياً : إيجاد معادلة الخط المستقيم إذا علم ميل الخط المستقيم وطول الجزء المقطوع من محور الصادات

معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله (م) وطول الجزء المقطوع من محور الصادات (جـ)

تكون المعادلة على الصورة : ص = م س + جـ

م : الميل

جـ : طول الجزء المقطوع من محور الصادات

مثال ٥

أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله = ٢ ويقطع جزءاً موجباً من محور الصادات طوله ٧ وحدات (الوادي الجديد ٢٣)

الحـــل

ص = م س + جـ ، م = ٢ ، جـ = ٧

المعادلة هي : ص = ٢ س + ٧

مثال ٦

أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله = $\frac{-١}{٢}$ ويقطع جزءاً سالباً من محور الصادات طوله وحدة واحدة

الحـــل

ص = م س + جـ

م = $\frac{-١}{٢}$ ، جـ = -١

المعادلة هي : ص = $\frac{-١}{٢}$ س - ١

مثال ٧

أوجد معادلة المستقيم الذي يقطع من الجزء السالب لمحور الصادات جزءاً طوله ٣ وحدات و يوازي المستقيم الذي معادلته ٢ س - ٣ ص = ٦ (سوهاج ٢٤)

الحـــل

ص = م س + جـ

م = $\frac{\text{- معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{-٢}{-٣}$ = $\frac{٢}{٣}$ $\therefore$ م الموازي = $\frac{٢}{٣}$ ، جـ = -٣

المعادلة هي : ص = $\frac{٢}{٣}$ س - ٣

عند حساب قيمة جـ لازم يكون معاك :

١ ميل المستقيم المطلوب معادلته .

٢ زوج مرتب يمر به المستقيم المطلوب معادلته لنأخذ منه قيمة س ، ص

مثال ٨

أوجد معادلة المستقيم الذي ميله ٢ ويمر بالنقطة (١ ، ٠) (الإسكندرية ٢٢)

الحـــل

ص = م س + جـ

م = ٢   ∴ ص = ٢ س + جـ

بالتعويض في النقطة (١ ، ٠) عن س = ١ ، ص = ٠

∴ ٠ = ٢ × ١ + جـ   ∴ ٠ = ٢ + جـ   ∴ جـ = ٠ − ٢   ∴ جـ = − ٢

∴ المعادلة هي : ص = ٢ س − ٢

مثال ٩

أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٣ ، −٥) و يوازي المستقيم س + ٢ ص − ٧ = ٠

(البحيرة / الفيوم ٢٤)

الحـــل

ص = م س + جـ

م = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{-1}{2}$ ∴ الميل الموازي = $\frac{-1}{2}$

∴ ص = $\frac{-1}{2}$ س + جـ

بالتعويض في النقطة (٣ ، −٥) عن س = ٣ ، ص = −٥

∴ −٥ = $\frac{-1}{2}$ × ٣ + جـ   ∴ −٥ = $\frac{-3}{2}$ + جـ   ∴ جـ = −٥ + $\frac{3}{2}$ = $\frac{-7}{2}$

∴ المعادلة هي : ص = $\frac{-1}{2}$ س + $\frac{-7}{2}$

مثال ١٠

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٥ ، −٢) و عمودي على الخط المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٢) ، (−١ ، ٠) (الشرقية ٢٤)

الحـــل

ص = م س + جـ

ميل أب = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٢ - ٠}{٣ + ١} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$ ∴ الميل العمودي = −٢

∴ ص = −٢س + جـ

بالتعويض في النقطة (٥ ، −٢) عن س = ٥ ، ص = −٢

∴ −٢ = −٢ × ٥ + جـ ∴ −٢ = −١٠ + جـ ∴ جـ = −٢ + ١٠ ∴ جـ = ٨

∴ المعادلة هي : ص = −٢ س + ٨

مثال ١١

أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، −١) ، (١ ، ١) (الغربية / أسيوط ٢٤)

الحـــل

ص = م س + جـ

م = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{-١ - ١}{٢ - ١} = \frac{-٢}{١} = -٢$

∴ ص = −٢ س + جـ

بالتعويض في النقطة (١ ، ١) عن س = ١ ، ص = ١

∴ ١ = −٢ × ١ + جـ

∴ ١ = −٢ + جـ

∴ جـ = ١ + ٢

∴ جـ = ٣

∴ المعادلة هي : ص = −٢ س + ٣

مثال ١٢

أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٣) ، (-١ ، -٣) ثم أثبت أنه يمر بنقطة الأصل .

(الجيزة ٢٢)

الحل

ص = م س + جـ

م = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$ = $\frac{٣ - -٣}{١ - -١}$ = $\frac{٦}{٢}$ = ٣

∴ ص = ٣ س + جـ

بالتعويض في النقطة (١ ، ٣) عن س = ١ ، ص = ٣

∴ ٣ = ٣ × ١ + جـ

∴ ٣ = ٣ + جـ

∴ جـ = ٣ - ٣

∴ جـ = صفر   ∴ المعادلة هي : ص = ٣ س

∵ طول الجزء المقطوع من محور الصادات = صفر   ∴ المستقيم يمر بنقطة الأصل

مثال ١٣

أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يقطع من محوري الإحداثيات السيني والصادي جزءين موجبين ٤ ، ٩ وحدات طول على الترتيب .

(القليوبية ٢٠١٩)

الحل

ص = م س + جـ

∵ المستقيم يمر بالنقطتين (٤ ، ٠) ، (٠ ، ٩)

ميل أ ب = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$ = $\frac{٠ - ٩}{٤ - ٠}$ = $\frac{-٩}{٤}$

∵ جـ = ٩

∴ المعادلة هي : ص = $\frac{-٩}{٤}$ س + ٩

مثال ١٤

أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله يساوي ميل المستقيم $\frac{ص - ١}{س} = \frac{١}{٣}$ ويقطع جزءاً سالباً من محور الصادات مقداره ٤ وحدات طول (دمياط ٢٤)

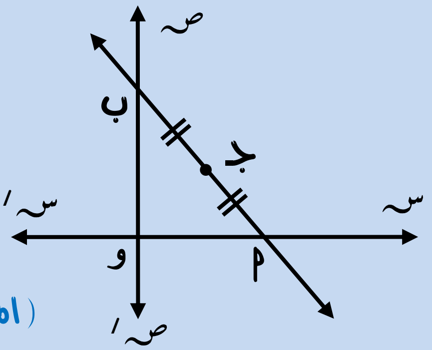
الحـــل

نضبط شكل المعادلة (بالمقص) ∴ ٣ص − ٣ = س ∴ ٣ص − ٣ − س = ٠

$م = \frac{- \text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{١}{٣}$

∵ جـ = −٤ ∴ المعادلة هي : $ص = \frac{١}{٣} س - ٤$

مثال ١٥



في الشكل المقابل :

النقطة جـ منتصف $\overline{ٲب}$ حيث جـ (٤ ، ٣)

١ أوجد إحداثي كل من النقطتين ٲ ، ب

٢ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{ٲب}$

٣ ميل $\overleftrightarrow{جـ و}$

(المنيا ٢٤)

الحـــل

∵ ٲ (س ، ٠) ، ب (٠ ، ص)

∴ $(٤ ، ٣) = \left(\frac{س + ٠}{٢} ، \frac{٠ + ص}{٢} \right)$

$\frac{س}{٢} = ٤$ ∴ س = ٨ | $\frac{ص}{٢} = ٣$ ∴ ص = ٦ ∴ ٲ (٨ ، ٠) ، ب (٠ ، ٦)

ميل $\overleftrightarrow{ٲب} = \frac{٠ - ٦}{٨ - ٠} = \frac{-٦}{٨} = \frac{-٣}{٤}$

∴ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{ٲب}$ هي $ص = \frac{-٣}{٤} س + ٦$

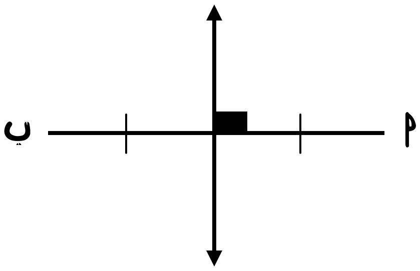
∵ جـ (٤ ، ٣) ، و (٠ ، ٠) ∴ ميل $\overleftrightarrow{جـ و} = \frac{٣ - ٠}{٤ - ٠} = \frac{٣}{٤}$

مثال ١٦

أوجد معادلة الخط المستقيم العمودي على $\overline{\text{أب}}$ من نقطة منتصفها حيث أ (١ ، ٣) ، ب (٣ ، ٥) .

(جنوب سيناء ٢٣)

الحل



ميل $\overline{\text{أب}}$ = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$ = $\frac{٣ - ٥}{١ - ٣}$ = $\frac{-٢}{-٢}$ = ١

∴ ميل المستقيم العمودي عليه = −١

∴ ص = − س + جـ

منتصف $\overline{\text{أب}}$ = $\left(\frac{١ + ٣}{٢} ، \frac{٣ + ٥}{٢}\right)$ = $\left(\frac{٤}{٢} ، \frac{٨}{٢}\right)$ = (٢ ، ٤)

∵ المستقيم المطلوب يمر بمنتصف $\overline{\text{أب}}$ ∴ بالتعويض في النقطة (٢ ، ٤) عن س = ٢ ، ص = ٤

∴ ٤ = −١ × ٢ + جـ   ∴ ٤ = −٢ + جـ   ∴ جـ = ٤ + ٢   ∴ جـ = ٦

∴ المعادلة هي : ص = − س + ٦

مثال ١٧

الجدول الآتي يمثل علاقة خطية :

س	١	٢	٣
ص = د (س)	١	٣	أ

أ - أوجد معادلة الخط المستقيم .

ب - أوجد طول الجزء المقطوع من محور الصادات .

جـ - أوجد قيمة أ .

(الإسكندرية ١٥)

الحل

(١ ، ١) ، (٢ ، ٣)

م = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$ = $\frac{١ - ٣}{١ - ٢}$ = $\frac{-٢}{-١}$ = ٢

∴ ص = ٢ س + جـ   ∴ بالتعويض في النقطة (١ ، ١) عن س = ١ ، ص = ١

∴ ١ = ٢ × ١ + جـ   ∴ ١ = ٢ + جـ   ∴ جـ = ١ − ٢   ∴ جـ = −١

∴ المعادلة هي : ص = ٢س − ١

∴ طول الجزء المقطوع من محور الصادات = ١

لإيجاد قيمة أ نعوض في النقطة (٣ ، أ) عن س = ٣ ، ص = أ

أ = ٢ × ٣ − ١   ∴ أ = ٥

ملاحظات هامة

١ معادلة المستقيم الذي يمر بنقطة الأصل و (٠ ، ٠) هي $\boxed{\text{ص = م س}}$ حيث م ميل المستقيم

٢ معادلة محور السينات هي $\boxed{\text{ص = ٠}}$ ٣ معادلة محور الصادات هي $\boxed{\text{س = ٠}}$

٤ معادلة المستقيم الذي يوازي محور السينات ويمر بالنقطة (٠ ، ل) هي $\boxed{\text{ص = ل}}$

٥ معادلة المستقيم الذي يوازي محور الصادات ويمر بالنقطة (ك ، ٠) هي $\boxed{\text{س = ك}}$

حاول بنفسك : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ معادلة المستقيم الذي ميله = ١ و يمر بنقطة الأصل هي .... (مطروح / سوهاج ٢٤)

أ ص = س   ب س = ١   جـ ص = ١   د ص = ـ س

٢ معادلة محور السينات هي .... (القاهرة ٢٢)

أ س = ٠   ب س = ١   جـ ص = ٠   د ص = ١

٣ معادلة محور الصادات هي .... (دمياط ٢٤)

أ س = صفر   ب ص = س   جـ ص = صفر   د ص = ـ س

٤ معادلة المستقيم المار بالنقطة (ـ٢ ، ـ٣) ويوازي محور السينات هي .... (الجيزة ٢٢)

أ س = ـ٢   ب س = ـ٣   جـ ص = ـ٢   د ص = ـ٣

٥ معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٣) ويوازي محور الصادات هي .... (الغربية ٢٤)

أ س = ٢   ب س = ٣   جـ ص = ٢   د ص = ٣

٦ المستقيم الذي معادلته : ٢ س ـ ٣ ص = ٦ يقطع من محور الصادات جزءاً طوله .... وحدة طول .

أ ـ٦   ب ـ٢   جـ ٣   د ٢

٧ مساحة المثلث بالوحدات المربعة المحدد بالمستقيمات : ٣ س ـ ٤ ص = ١٢ ، س = ٠ ، ص = ٠ تساوي .... (بني سويف ٢٣)

أ ٦   ب ٧   جـ ١٢   د ـ٦

مذكرات

مذكــرات


الأستاذ في الرياضيات
أ/ حمزة فرج
ت/ 01270312328