سلسلة الفاروق

فى

الرياضيات

للصف الأول الثانوي

الفصل الدراسي الأول

إعداد : أ /عشري فاروق

ت/ ٠١١١٥٦٢٤٤٤٣١

الدرس الأول

حل معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد فى ح

الصورة العامة

$$أ س^{٢} + ب س + حـ = ٠$$

حيث أ ، ب ، حـ أعداد حقيقية ، $أ \neq ٠$

مثال

* $س^{٢} - ٥ س + ٦ = ٠$
* $س^{٢} + ٣ س = ٠$
* $س^{٢} - ٤ = ٠$

حل المعادلة فى ح

يقصد بحل المعادلة : $أ س^{٢} + ب س + حـ = ٠$

إيجاد قيم المتغير س التي تحقق تساوي طرفيها وتسمى هذه القيم جذور المعادلة

ويتم حل معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد فى ح بطريقتين : جبرياً وبيانياً

أولاً : الطريقة الجبرية

بإحدى طريقتين :

(أ) التحليل :

(ب) القانون العام

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ حـ}}{٢ أ}$$

مثال ١

أوجد فى ح مجموعة الحل للمعادلات الآتية

1. $س^{٢} + ٥ س + ٦ = ٠$
2. $٩ س^{٢} + ١٢ س + ٤ = ٠$
3. $س^{٢} = ٢ (س + ٦)$
4. $٩ س^{٢} = ١٦$
5. $س + \frac{٥}{س} = ٤$ ، $س \neq ٠$

الحل

1. $\because س^{٢} + ٥ س + ٦ = ٠$

$\therefore (س + ٢)(س + ٣) = ٠$

إما $س + ٢ = ٠$ $\therefore س = -٢$ | أو $س + ٣ = ٠$ $\therefore س = -٣$

$\therefore م.ح = \{-٢ ، -٣\}$

2. $٤ س^{٢} + ١٢ س + ٩ = ٠$

$\because$ الحد الأوسط $= ٢ \sqrt{\text{الحد الأول}} \times \sqrt{\text{الحد الأخير}}$

$\therefore$ المقدار ثلاثى مربع كامل

$\therefore (\sqrt{\text{الحد الأول}} + \sqrt{\text{الحد الأخير}})^{٢} = ٠$

$\therefore (٢ س + ٣)^{٢} = ٠$

$\therefore ٢ س + ٣ = ٠$

$\therefore ٢ س = -٣$ $\therefore س = \frac{-٣}{٢}$

$\therefore م.ح = \left\{ \frac{-٣}{٢} \right\}$

٣

$\because \text{س}^٢ = ٢(\text{س} + ٦)$

$\therefore \text{س}^٢ = ٢\text{س} + ١٢$

$\therefore \text{س}^٢ - ٢\text{س} - ١٢ = ٠$

يصعب تحليل المقدار : $(\text{س}^٢ - ٢\text{س} - ١٢)$

لذلك نوجد حل المعادلة التربيعية بالقانون العام

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^٢ - ٤\text{أ}\text{ح}}}{٢\text{أ}}$$

$\because \text{أ} = ١ \text{ ، } \text{ب} = -٢ \text{ ، } \text{ح} = -١٢$

$$\therefore \text{س} = \frac{٢ \pm \sqrt{٤ - ٤ \times ١ \times (-١٢)}}{٢ \times ١}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{٢ \pm \sqrt{٤ + ٤٨}}{٢}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{٢ \pm \sqrt{٥٢}}{٢}$$

إما

$$\therefore \text{س} = \frac{٢ + \sqrt{٥٢}}{٢} \simeq ٤,٦$$

أو

$$\therefore \text{س} = \frac{٢ - \sqrt{٥٢}}{٢} \simeq -٢,٦$$

$\therefore \text{م.ح} = \{٤,٦ \text{ ، } -٢,٦\}$

٤

$٩\text{س}^٢ = ١٦$

$\therefore ٩\text{س}^٢ - ١٦ = ٠$

$\therefore (٣\text{س} - ٤)(٣\text{س} + ٤) = ٠$

إما : $٣\text{س} - ٤ = ٠$

$\therefore ٣\text{س} = ٤$

$\therefore \text{س} = \frac{٤}{٣}$

أو : $٣\text{س} + ٤ = ٠$

$\therefore ٣\text{س} = -٤$

$\therefore \text{س} = \frac{-٤}{٣}$

$\therefore \text{م.ح} = \left\{\frac{٤}{٣} \text{ ، } \frac{-٤}{٣}\right\}$

٥

$\because \text{س} + \frac{٥}{\text{س}} = ٤ \text{ ، } \text{س} \neq ٠$

بالضرب $\times$ س للطرفين

$\therefore \text{س}^٢ + ٥ = ٤\text{س}$

$\therefore \text{س}^٢ - ٤\text{س} + ٥ = ٠$

ويصعب تحليل المقدار إلى عاملين

باستخدام القانون العام :

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^٢ - ٤\text{أ}\text{ح}}}{٢\text{أ}}$$

$\because \text{أ} = ١ \text{ ، } \text{ب} = -٤ \text{ ، } \text{ح} = ٥$

$$\therefore \text{س} = \frac{٢ \pm \sqrt{١٦ - ٤ \times ١ \times ٥}}{٢ \times ١}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{٢ \pm \sqrt{١٦ - ٢٠}}{٢}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{٢ \pm \sqrt{-٤}}{٢}$$

، $\because \sqrt{-٤} \notin \text{ح}$

$\therefore \text{م.ح} = \emptyset$

مثال (٢)

أوجد في ح مجموعة الحل للمعادلات الأتية

(١) $\text{س}^{٢} + ٣\,\text{س} = ٠$

(٢) $٢\text{س}^{٢} - ٥\,\text{س} + ٢ = ٠$

(٣) $\text{س}^{٢} - (١ + \sqrt{٣})\,\text{س} + \sqrt{٣} = ٠$

الحل

(١) $\because \text{س}^{٢} + ٣\,\text{س} = ٠$

بأخذ س عامل مشترك

$\therefore \text{س}\,(\text{س} + ٣) = ٠$

إما $\text{س} = ٠$ | أو $\text{س} + ٣ = ٠$

$\therefore \text{س} = -٣$

$\therefore \text{م.ح} = \{٠ ، -٣\}$

(٢) $٢\,\text{س}^{٢} - ٥\,\text{س} + ٢ = ٠$

$\because$ معامل $\text{س}^{٢}$ لا يساوى ١

$\therefore$ المقدار غير بسيط

$٢\text{س} \quad - \quad ١$

$\text{س} \quad - \quad ٢$

$\therefore (٢\text{س} - ١)\,(\text{س} - ٢) = ٠$

إما $\text{س} - ١ = ٠$ | أو $\text{س} - ٢ = ٠$

$\therefore \text{س} = \frac{١}{٢}$ | $\therefore \text{س} = ٢$

$\therefore \text{م.ح} = \{\frac{١}{٢} ، ٢\}$

(٣) $\text{س}^{٢} - (١ + \sqrt{٣})\,\text{س} + \sqrt{٣} = ٠$

نوجد عددين حاصل ضربهم $= \sqrt{٣}$

ومجموعهم $= -(١ + \sqrt{٣})$

$\therefore$ العددان هما : ١ ، $\sqrt{٣}$

$\therefore (\text{س} - ١)\,(\text{س} - \sqrt{٣}) = ٠$

إما $\text{س} - ١ = ٠$ | أو $\text{س} - \sqrt{٣} = ٠$

$\therefore \text{س} = ١$ | $\therefore \text{س} = \sqrt{٣}$

$\therefore \text{م.ح} = \{١ ، \sqrt{٣}\}$

ثانياً : الطريقة البيانية

ولحل معادلة الدرجة الثانية بيانياً

١ نضع المعادلة على الصورة العامة

أ س^2 + ب س + حـ = ٠

٢ نفرض أن :

د (س) = أ س^2 + ب س + حـ

٣ نوجد نقطة رأس منحنى الدالة التربيعية

وهى ($\frac{-ب}{٢أ}$ ، د ($\frac{-ب}{٢أ}$))

٤ نكون الجدول التالي

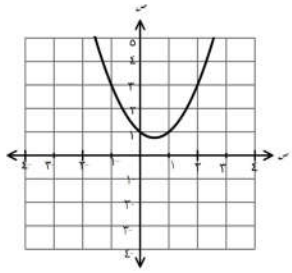
س				$\frac{-ب}{٢أ}$			
د(س)				د($\frac{-ب}{٢أ}$)			

٥ نمثل الدالة بيانياً

وتوجد عدة حالات

١ إذا كان منحنى الدالة التربيعية

لايقطع محور السينات



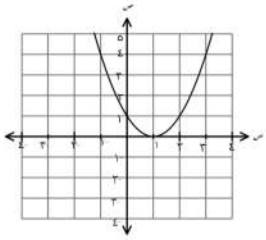
∴ **مجموعة حل المعادلة** د (س) = ٠

فى ح هى ∅

∴ ليس للمعادلة جذور حقيقية

٢ إذا كان منحنى الدالة التربيعية

يمس محور السينات



فإن نقطة التماس هي : ($\frac{-ب}{٢أ}$ ، ٠)

∴ **مجموعة حل المعادلة** د (س) = ٠

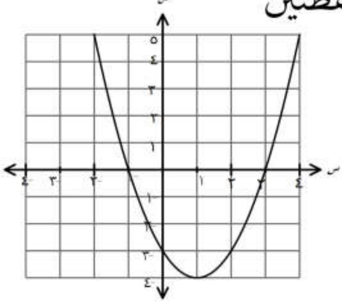
فى ح هى { $\frac{-ب}{٢أ}$ }

ويكون جذرا المعادلة حقيقيان متساويان

وكل منهما يساوي = $\frac{-ب}{٢أ}$

٣ إذا كان منحنى الدالة التربيعية

يقطع محور السينات فى النقطتين



(ل ، ٠) ، (م ، ٠)

مجموعة حل المعادلة د (س) = ٠

فى ح هى { ل ، م }

ويكون جذرا المعادلة حقيقيان مختلفان

مثال (٣)

أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة

س^{٢} - ٢ س = ٣ بيانيا

الحل

(١) **نضع المعادلة على الصورة العامة**

∴ س^{٢} - ٢ س - ٣ = ٠

(٢) **نفرض أن** : د(س) = س^{٢} - ٢ س - ٣

(٣) **نوجد الإحداثى السينى لنقطة رأس المنحنى** : س = $\frac{-ب}{٢ أ}$ = $\frac{٢}{٢}$ = ١

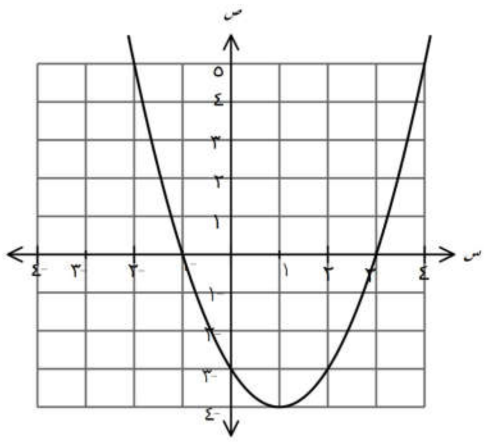
د(١) = (١)^{٢} - ٢ × ١ - ٣

= ١ - ٢ - ٣ = -٤

(٤) **نكون الجدول التالى**

س	٤	٣	٢	١	٠	-١	-٢
د(س)	٥	٠	-٣	-٤	-٣	٠	٥

(٥) **نمثل الدالة بيانياً**



منحنى الدالة التربيعية يقطع محور السينات

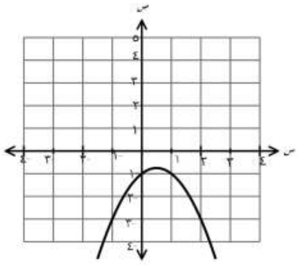
(-١، ٠) ، (٣، ٠)

∴ **مجموعة حل المعادلة** د(س) = ٠

فى ح هى {-١، ٣}

ملاحظات مهمة

(١) الشكل المقابل يمثل منحنى دالة تربيعية



د(س) = أس^{٢} + ب س + حـ

ويكون :

(١) **المنحنى مفتوح لأسفل** ∴ أ < ٠

(٢) **المنحنى لا يقطع محور السينات**

∴ **ليس للمعادلة جذور حقيقية**

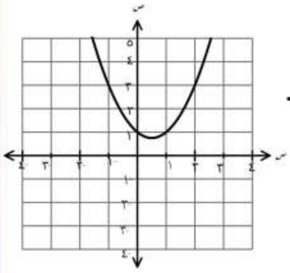
وتكون مجموعة الحل فى ح هى ∅

(٣) **قيمة المقدار** : ب^{٢} - ٤ أ حـ < ٠

(٤) **المنحنى يقطع محور الصادات**

(٠، -١) ∴ حـ = -١

(٢) الشكل المقابل يمثل منحنى دالة تربيعية



د(س) = أس^{٢} + ب س + حـ

ويكون :

(١) **المنحنى مفتوح لأعلى** ∴ أ > ٠

(٢) **المنحنى لا يقطع محور السينات**

∴ **ليس للمعادلة جذور حقيقية**

وتكون مجموعة الحل فى ح هى ∅

③ قيمة المقدار : ب^{٢} − ٤ أ جـ < ٠

④ المنحنى يقطع محور الصادات

(٠ ، ١) ∴ جـ = ١

مثال ٤

إذا كانت : س = ٦ أحد جذرى المعادلة :

س^{٢} + ٥ س + أ = ٠

فأوجد قيمة : أ ثم أوجد الجذر الآخر

الحل

∵ س = ٦ جذر للمعادلة

(٦)^{٢} + ٥ × ٦ + أ = ٠

∴ ٣٦ + ٣٠ + أ = ٠

∴ أ + ٦٦ = ٠

∴ أ = −٦٦

∴ المعادلة هى :

س^{٢} + ٥ س − ٦٦ = ٠

∴ (س + ١١) (س − ٦) = ٠

إما س + ١١ = ٠	أو س − ٦ = ٠
∴ س = −١١	∴ س = ٦

∴ الجذر الآخر هو : س = −١١

مثال ٥

أوجد قيمتى : أ ، ب إذا علم أن : ٢ ، ٣

هما جذرا المعادلة :

أ س^{٢} + ب س + ٦ = ٠

الحل

∵ س = ٢ جذر للمعادلة

∴ ٤ أ + ٢ ب + ٦ = ٠

بالقسمة على ٢ للطرفين

∴ ٢ أ + ب + ٣ = ٠

∴ ٢ أ + ب = −٣ ⟵ ①

∵ س = ٣ جذر للمعادلة

∴ ٩ أ + ٣ ب + ٦ = ٠

بالقسمة على ٣ للطرفين

∴ ٣ أ + ب + ٢ = ٠

∴ ٣ أ + ب = −٢ ⟵ ②

بطرح ① من ②

∴ أ = ١

بالتعويض فى ①

∴ ٢ + ب = −٣

∴ ب = −٥

حل آخر

نكون المعادلة التى جذراها ٢ ، ٣

∴ **المعادلة هى :**

$$(س - ٢)\,(س - ٣) = ٠$$

$$\therefore س\,(س - ٣) - ٢\,(س - ٣) = ٠$$

$$\therefore س^{٢} - ٣\,س - ٢\,س + ٦ = ٠$$

$$\therefore س^{٢} - ٥\,س + ٦ = ٠$$

∴ **المعادلتان :**

$$س^{٢} - ٥\,س + ٦ = ٠$$

$$ا\,س^{٢} + ب\,س + ٦ = ٠$$

جذراهما ٢ ، ٣ وتساوى الحد المطلق فيهما

∴ **بمقارنة المعاملات**

$$\therefore ا = ١ \quad ، \quad ب = -٥$$

==========

مثال ٦

إذا كان $(س - ٣)$ **أحد عاملى المقدار** $س^{٢} - ا\,س + ٦$ **فأوجد قيمة :** $ا$

ثم أوجد العامل الآخر

الحل

∵ $(س - ٣)$ **أحد عاملى المقدار**

$$س^{٢} - ا\,س + ٦$$

∴ $س = ٣$ هو جذر المعادلة

$$س^{٢} - ا\,س + ٦ = ٠$$

$$\therefore (٣)^{٢} - ٣\,ا + ٦ = ٠$$

$$\therefore ٩ - ٣\,ا + ٦ = ٠$$

$$\therefore ١٥ - ٣\,ا = ٠$$

$$\therefore ٣\,ا = ١٥$$

$$\therefore ا = ٥$$

∴ **المقدار هو** $س^{٢} - ٥\,س + ٦$

∴ **بتحليل المقدار إلى عاملين**

$$\therefore س^{٢} - ٥\,س + ٦ = (س - ٢)\,(س - ٣)$$

∴ **العامل الآخر هو :** $س - ٢$

==========

مثال ٧

إذا كانت :

$د(س) = ا\,س^{٢} + ب\,س + حـ$ ، $د(٠) = -٣$

أوجد قيم : $ا$ ، $ب$ ، $حـ$

إذا علم أن جذرى المعادلة $د(س) = ٠$ **هما :** ٣ ، $\frac{-١}{٢}$

الحل

$$\because د(٠) = -٣$$

$$\therefore (٠)^{٢} + ب\,(٠) + حـ = -٣$$

∴ $\boxed{ح = -٣}$

∴ د (س) = أ س^٢ + ب س - ٣

∵ ٣ ، $\frac{-١}{٢}$ هما جذرى المعادلة : د(س) = ٠

∴ ٣ ، $\frac{-١}{٢}$ هما جذرى المعادلة

∴ $\boxed{أ س^٢ + ب س - ٣ = ٠}$ ⟵ (١)

∴ نكون المعادلة التى جذراها ٣ ، $\frac{-١}{٢}$

∴ (س - ٣) (س + $\frac{١}{٢}$) = ٠

∴ (س - ٣) (٢س + ١) = ٠

∴ ٢س^٢ + س - ٦ س - ٣ = ٠

∴ ٢س^٢ - ٥ س - ٣ = ٠ ⟵ (٢)

المعادلتان (١) ، (٢) جذراهما : ٣ ، ٢

والمعادلتان تشتركان فى حد من حدودهما

∴ بمقارنة المعاملات فى المعادلتين

∴ $\boxed{أ = ٢}$ ، $\boxed{ب = -٥}$

مقدمة عن الأعداد المركبة (ك)

نعلم أن

المعادلة : $\text{س}^{٢} + ١ = ٠$ ليس لها حلى فى مجموعة الأعداد الحقيقية (ح)

لأن : $\text{س}^{٢} = -١$

$\therefore \text{س} = \pm \sqrt{-١} \notin \text{ح}$

$\therefore \text{م . ح} = \varnothing$

لابد من البحث عن مجموعة جديدة من الأعداد لحل هذه المعادلة

العدد التخيلي

هو العدد الذى مربعه يساوى (-١)

$\text{ت}^{٢} = -١$ أو $\text{ت} = \sqrt{-١}$

وله الخاصية التالية : $\sqrt{-\text{أ}} = \sqrt{\text{أ}}\ \text{ت}$

$\sqrt{-٣} = \sqrt{٣}\ \text{ت}$

$\sqrt{-٤} = ٢\ \text{ت}$

$\sqrt{-٣} \times \sqrt{-٥} = \sqrt{٣}\ \text{ت} \times \sqrt{٥}\ \text{ت}$

$= \sqrt{١٥}\ \text{ت}^{٢} = -\sqrt{١٥}$

قوى العدد (ت)

١ القوى الأساسية

$\text{ت}^{١} = \text{ت}$ ، $\text{ت}^{٢} = -١$

$\text{ت}^{٣} = -\text{ت}$ ، $\text{ت}^{٤} = ١$

٢ القوى المختلفة

لاحظ :

$\text{ت}^{٤} = ١$

، $\text{ت}^{٨} = \text{ت}^{٤} \times \text{ت}^{٤} = ١ \times ١$

، $\text{ت}^{١٢} = \text{ت}^{٤} \times \text{ت}^{٤} \times \text{ت}^{٤} = ١ \times ١ \times ١ = ١$

$\therefore \text{ت}^{٤} = \text{ت}^{٨} = \text{ت}^{١٢} = \text{ت}^{١٦} = \text{ت}^{؟} = ١$

ملحوظة

$(\text{ت})^{\text{عدد يقبل القسمة على ٤}} = ١$

٣ قوى العدد (ت) السالبة

لإيجاد قيمة $\text{ت}^{-١٤}$ نجمع على الأس مضاعف العدد ٤ الأكبر من ١٤ مباشرة

$\therefore \text{ت}^{-١٤} = \text{ت}^{-١٤+١٦} = \text{ت}^{٢} = -١$

، $\text{ت}^{-١٠٣} = \text{ت}^{-١٠٣+١٠٤} = \text{ت}^{١} = \text{ت}$

٤ ً: قوى العدد (ت) بوجه عام

$\text{ت}^{٤\text{ن}} = ١$ ، ن عدد صحيح

، $(\text{ت})^{٤\text{ن}+١} = \text{ت}^{٤\text{ن}} \times \text{ت}^{١} = \text{ت}$

، $(\text{ت})^{٤\text{ن}+٢} = \text{ت}^{٤\text{ن}} \times \text{ت}^{٢} = ١ \times -١$

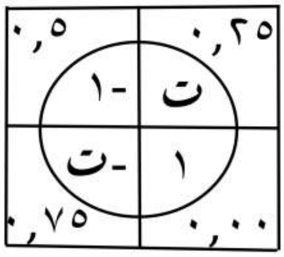
$(\text{ت})^{٤\text{ن}+٣} = \text{ت}^{٤\text{ن}} \times \text{ت}^{٣} = ١ \times -\text{ت} = -\text{ت}$

، $(\text{ت})^{٤\text{ن}+٤} = \text{ت}^{٤\text{ن}} \times \text{ت}^{٤} = ١ \times ١ = ١$

معرفة قيمة (ت) مرفوعة لأس أى عدد

نقسم الأس على ٤ ونحذف العدد الصحيح

فإذا كان المتبقى كما بالشكل



فمثلاً :

$ت^{٢٧٥} = ...$

نقسم الأس على ٤

فيكون : $٢٧٥ \div ٤ = ٦٨,\boxed{٧٥}$

نبحث عن ٠,٧٥ فى الشكل

فيكون الناتج هو : (- ت)

مثال ١

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

① $ت^{١٥} = ...$

Ⓐ ت   Ⓑ - ت   Ⓒ ١   Ⓓ - ١

② $ت^{٢٤} = ...$

Ⓐ ت   Ⓑ -ت   Ⓒ ١   Ⓓ - ١

③ $ت^{٣٣} = ...$

Ⓐ ت   Ⓑ -ت   Ⓒ ١   Ⓓ - ١

④ $ت^{-١٩} = ...$

Ⓐ ت   Ⓑ -ت   Ⓒ ١   Ⓓ - ١

⑤ أبسط صورة للمقدار:

$(١ + ت)^{٢} = ...$

⑥ أبسط صورة للمقدار : $(١ - ت)^{٢} = ...$

Ⓐ ٢ت   Ⓑ -٢ت   Ⓒ ١   Ⓓ صفر

⑦ أبسط صورة للمقدار:

$(١ + ت + ت^{٢})^{٢١} = ...$

Ⓐ ت   Ⓑ - ت   Ⓒ ١   Ⓓ صفر

⑧ أبسط صورة للمقدار:

$(١ + ت + ت^{٢})^{٤ن+٣} = ...$

Ⓐ ت   Ⓑ - ت   Ⓒ ١   Ⓓ صفر

مثال ٢

أوجد فى أبسط صورة كلاً مما يأتى

① $\frac{١}{ت^{٥}}$ ② $ت^{-١٨}$

الحل

① $\frac{١}{ت^{٥}} = ت^{-٥} \times ١$ $\because ت^{٨} = ١$

$= ت^{-٥} \times ت^{٨}$

$= ت^{-٥+٨}$

$= ت^{٣}$

$= - ت$

② $\therefore ت^{-١٨} = ت^{-١٨} \times ١$ $\because ت^{٢٠} = ١$

$= ت^{-١٨} \times ت^{٢٠} = ت^{-١٨+٢٠}$

$= ت^{٢} = - ١$

مثال ٣

أوجد ناتج كلاً مما يأتى فى أبسط صورة

١) $\sqrt{-٢} \times \sqrt{-٨}$

٢) $\sqrt{-٧} \times \sqrt{٧}$

٣) $\sqrt{-٢} \times \sqrt{-٣}\ ت$

٤) $(-٢ت)^{٢} \times (-٣ت)^{٢}$

٥) $(١ + ت)^{١٠}$

الحل

١) $\sqrt{-٢} \times \sqrt{-٨}$

$= \sqrt{٢}\ ت \times \sqrt{٨}\ ت$

$= \sqrt{١٦}\ ت^{٢}$

$= ٤ \times -١$

$= -٤$

---

٢) $\sqrt{-٧} \times \sqrt{٧} = \sqrt{٧}\ ت \times \sqrt{٧}$

$= ٧\ ت$

---

٣) $\sqrt{-٢} \times \sqrt{-٣}\ ت$

$= \sqrt{٢}\ ت \times (\sqrt{٣}\ ت)\ ت$

$= \sqrt{٦} \times ت^{٣}$

$= \sqrt{٦} \times -ت$

$= -\sqrt{٦}\ ت$

---

٤) $(-٢ت)^{٢} \times (-٣ت)^{٢}$

$= ٤ت^{٢} \times ٩ت^{٢}$

$= ٣٦ \times ت^{٤}$

$= ٣٦ \times ١ = ٣٦$

---

٥) $(١ + ت)^{١٠}$

$= [(١ + ت)^{٢}]^{٥}$

$= [١ + ٢ت + ت^{٢}]^{٥}$

$\because ت^{٢} = -١$

$= [\cancel{١} + ٢ت \cancel{-١}]^{٥}$

$= [٢ت]^{٥}$

$= ٣٢ت^{٥}$

$= ٣٢\ ت$

العدد المركب

هو العدد الذى يمكن كتابته على الصورة :

ع = أ + ب ت

حيث : أ ، ب أعداد حقيقية ، ت^{٢} = -١

ويسمى : أ الجزء الحقيقى

ويسمى : ب الجزء التخيلى

ملحوظة

إذا كان : ع = أ + ب ت وكان :

١) ب = صفر أى أن : ع = أ
فإن العدد ع يسمى حقيقى صرف

٢) أ = صفر أى أن : ع = ب ت
فإن العدد ع يسمى تخيلى صرف

٣) إذا كان : ع = صفر
فإن : أ = صفر ، ب = صفر

مثـــال ٤

أوجد قيمتى س ، ص التى تحقق :

(س -٦) + (٣ص + س) ت = ٠

الحـــل

∵ العدد المركب : أ + ب ت = ٠

عندما أ = ٠ ، ب = ٠

∵ العدد المركب : أ + ب ت = ٠

عندما أ = ٠ ، ب = ٠

∴ س -٦ = ٠

∴ س = ٦ ⟵ ①

، ٣ص + س = ٠ ⟵ ②

بالتعويض من ① فى ②

∴ ٣ص + ٦ = ٠

∴ ٣ص = -٦

بالقسمة على ٣ للطرفين

∴ ص = -٢

ملحوظة

١) مجموعة الأعداد الحقيقية هى مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد المركبة

∴ ح ⊂ ك

كل عدد حقيقى هو عدد مركب فيه

الجزء التخيلى = صفر

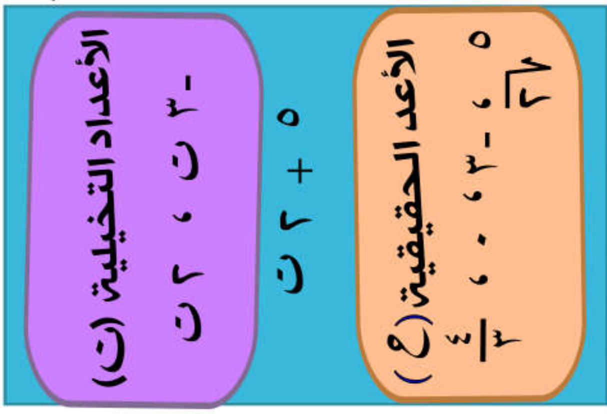
∴ ٣ = ٣ + ٠ ت

٢) جميع الأعداد التخيلية هى أعداد مركبة

فيها الجزء الحقيقى = صفر

٢ت = ٠ + ٢ ت

مجموعة الأعداد المركبة (ك)



تساوى عددين مركبين

إذا كان : $ع_١ = س_١ + ص_١ ت$

، $ع_٢ = س_٢ + ص_٢ ت$

عددان مركبان

فإن : $ع_١ = ع_٢$

إذا تحقق الشرطان الآتيان معا

① $س_١ = س_٢$

② $ص_١ = ص_٢$

مثال ٥

أوجد قيمتى س ، ص التى تحقق :

(س+ص) + ٣ ت = ٥ + (س - ص) ت

الحل

العددان

(س+ص) + ٣ ت ، ٥ + (س - ص) ت

متساويان

∴ س+ص = ٥ ← ①

، س - ص = ٣ ← ②

بجمع المعادلتين ① ، ②

٢ س = ٨ $\boxed{∴ س = ٤}$

بالتعويض فى ①

∴ ٤ + ص = ٥

∴ ص = ٥ - ٤ $\boxed{∴ ص = ١}$

العمليات على الأعداد المركبة

أولاً: جمع وطرح الأعداد المركبة

إذا كان : $ع_١ = س_١ + ص_١ ت$

، $ع_٢ = س_٢ + ص_٢ ت$

عددان مركبان

فإن :

$ع_١ + ع_٢$

$= (س_١ + س_٢) + (ص_١ + ص_٢) ت$

، $ع_١ - ع_٢$

$= (س_١ - س_٢) + (ص_١ - ص_٢) ت$

مثال ٦

أوجد قيمتى س ، ص التى تحقق :

س+ص ت = (١ + ٢ت) + (٣ + ٥ت)

الحل

بوضع الطرف الايسر فى أبسط صورة

س+ص ت = (١ + ٣) + (٢ت + ٥ت)

∴ س+ص ت = ٤ + ٧ت

بمساواة الطرفين

∴ س = ٤ ، ص = ٧

مثال ٧

أوجد قيمتى س ، ص التى تحقق :

س+ص ت = (١ + ٢ت) - (٢ - ٤ت)

الحل

بوضع الطرف الايسر فى أبسط صورة

∵ س+ص ت = (١ + ٢ت) - (٢ - ٤ت)

∴ س+ص ت = ١ + ٢ت - ٢ + ٤ت

∴ س+ص ت = (١ - ٢) + (٢ت + ٤ت)

∴ س+ص ت = -١ + ٦ ت

بمساواة الطرفين

س = -١ ، ص = ٦

ثانياً : ضرب الأعداد المركبة

إذا كان : ع$_1$ = س$_1$ + ص$_1$ ت

، ع$_2$ = س$_2$ + ص$_2$ ت

عددان مركبان

فإن :

ع$_1$ × ع$_2$ = (س$_1$ + ص$_1$ ت)(س$_2$ + ص$_2$ ت)

= (س$_1$ س$_2$ - ص$_1$ ص$_2$) + (س$_1$ ص$_2$ + س$_2$ ص$_1$) ت

مثال ٨

أوجد قيمتى س ، ص التى تحقق

س + ص ت = (٣ + ٢ت)(١ + ٤ت)

الحل

∵ س + ص ت = (٣ + ٢ت)(١ + ٤ت)

= ٣(١ + ٤ت) + ٢ت(١ + ٤ت)

= ٣ + ١٢ت + ٢ت + ٨ت^2

، ∵ ت^2 = -١

= ٣ + ١٢ت + ٢ت - ٨

= -٥ + ١٤ت

∴ س + ص ت = -٥ + ١٤ت

∴ س = -٥ ، ص = ١٤

مثال ٩

أوجد ناتج ما يأتي :

$(٧ - ت)(٣ + ٢ت)$

الحل

$(٧ - ت)(٣ + ٢ت)$

$= ٧(٣ + ٢ت) - ت(٣ + ٢ت)$

$= ٢١ + ١٤ت - ٣ت - ٢ت^{٢}$

$= ٢١ + ١١ت + ٢$

$= ٢٣ + ١١ت$

العددان المترافقان

هما عددان يختلفان فى إشارة الجزء التخيلى فقط

العدد $أ + ب\,ت$ مرافقه هو $أ - ب\,ت$

العدد	٣-٢ت	٥+ت	٣ت	٧	-٥ت	-٢
مرافقه	٣+٢ت	٥-ت	-٣ت	٧	٥ت	-٢

جمع عددان مترافقان

لأى عددين مترافقين

$ع = أ + ب\,ت$ ، $ع_{٢} = أ - ب\,ت$

فإن

$ع_{١} + ع_{٢} = أ + \cancel{ب\,ت} + أ - \cancel{ب\,ت}$

$= ٢أ$

= ضعف الجزء الحقيقى

طرح عددان مترافقان

لأى عددين مترافقين

$ع_{١} = أ + ب\,ت$ ، $ع_{٢} = أ - ب\,ت$

فإن

$ع_{١} - ع_{٢} = \cancel{أ} + ب\,ت - \cancel{أ} + ب\,ت$

$= ٢ب\,ت$

،

$ع_{٢} - ع_{١} = \cancel{أ} - ب\,ت - \cancel{أ} - ب\,ت$

$= -٢ب\,ت$

مثال ١٠

إذا كان $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$ عددان مركبان :

$ع_{١} = ٥ + ٤ت$ ، $ع_{٢} = ٥ - ٤ت$

فأوجد : (١) $ع_{١} + ع_{٢}$ (٢) $ع_{١} - ع_{٢}$

الحل

(١) $ع_{١} + ع_{٢} = ٥ + \cancel{٤ت} + ٥ - \cancel{٤ت}$

$= ١٠$

(٢) $ع_{١} - ع_{٢} = (٥ + ٤ت) - (٥ - ٤ت)$

$= \cancel{٥} + ٤ت - \cancel{٥} + ٤ت$

$= ٨ت$

ضرب العددان المترافقان

لأى عددين مترافقين

$ع_١ = أ + ب ت$ ، $ع_٢ = أ - ب ت$

فإن :

$ع_١ \times ع_٢ = (أ + ب ت)(أ - ب ت)$

$= أ^٢ - \cancel{أ ب ت} + \cancel{أ ب ت} - ب^٢ ت^٢$

$= أ^٢ + ب^٢$

= مربع الجزء الحقيقى + مربع الجزء التخيلى

حاصل ضرب العددان المترافقان

= مربع الجزء الحقيقى + مربع الجزء التخيلى

فمثلاً :

$(٣ + ٢ ت)(٣ - ٢ ت) = ٩ + ٤ = ١٣$

،

$(٥ + ت)(٥ + ت) = ٢٥ + ١ = ٢٦$

مثال ١١

اوجد فى أبسط صورة قيمة المقدار :

$(١ + ت)^٢ + (٣ + ٢ ت)(٣ - ٢ ت)$

الحل

$\because \underbrace{(١ + ت)^٢}_{\text{مربع قوس من حدين}} + \underbrace{(٣ + ٢ ت)(٣ - ٢ ت)}_{\text{حاصل ضرب عددين مترافقين}}$

$= ١ + ٢ ت + ت^٢ + (٩ + ٤)$

$= \cancel{١} + ٢ ت \cancel{- ١} + (١٣)$

$= ١٣ + ٢ ت$

مثال ١٢

قيمة المقدار :

$\frac{(س + ص ت)(س - ص ت)}{س^٢ + ص^٢} = ...$

الحل

$\because$ المقدار $= \frac{(س + ص ت)(س - ص ت)}{س^٢ + ص^٢}$

$= \frac{س^٢ + ص^٢}{س^٢ + ص^٢} = ١$

قسمة عددين مركبين

لوضع العدد : $\frac{أ + ب ت}{جـ + د ت}$ على الصورة : $س + ص ت$ نضرب فى مرافق المقام بسطا ومقاما

وهو $(جـ - د ت)$

مثال ١٣

أكتب العدد : $\frac{٥}{١ + ٢ ت}$

على الصورة : $أ + ب ت$

الحل

بالضرب فى مرافق المقام وهو $(١ - ٢ ت)$

بسطا ومقاما

$$\frac{٥}{١+٢ت} = \frac{٥(١-٢ت)}{(١+٢ت)(١-٢ت)}$$

$$= \frac{٥(١-٢ت)}{١+٤}$$

$$= \frac{\cancel{٥}(١-٢ت)}{\cancel{٥}}$$

$$= ١-٢ت$$

==================================

مثال (١٤)

أوجد قيمتى س ، ص التى تحقق

$$٥+٣ت = \frac{س^٢+ص^٢}{س+ص ت}$$

الحل

$$\because ٥+٣ت = \frac{س^٢+ص^٢}{س+ص ت}$$

بالضرب فى مرافق المقام بسطا ومقاما

$$\therefore ٥+٣ت = \frac{(س^٢+ص^٢)(س-ص ت)}{(س+ص ت)(س-ص ت)}$$

$$\therefore ٥+٣ت = \frac{\cancel{(س^٢+ص^٢)}(س-ص ت)}{\cancel{س^٢+ص^٢}}$$

$$\therefore ٥+٣ت = س - ص ت$$

$$\therefore س = ٥ \quad ، \quad ص = -٣$$

==================================

مثال (١)

إذا كان: $س = \frac{١٣}{٥-ت}$ ، $ص = \frac{٣+٢ت}{١+ت}$

أثبت ان: س ، ص مترافقان

ثم أوجد قيمة المقدار: $س^٢ + س ص + ص^٢$

الحل

$$س = \frac{١٣}{٥-ت}$$

بالضرب × (٥ + ت) بسطاً ومقاماً

$$\therefore س = \frac{١٣(٥+ت)}{(٥-ت)(٥+ت)}$$

$$\therefore س = \frac{١٣(٥+ت)}{٢٥+١}$$

$$\therefore س = \frac{\cancel{١٣}^{١}(٥+ت)}{\cancel{٢٦}_{٢}}$$

$$\therefore س = \frac{٥}{٢} + \frac{١}{٢}ت \longrightarrow (١)$$

$$، \because ص = \frac{٣+٢ت}{١+ت}$$

بالضرب × (١ - ت) بسطاً ومقاماً

$$\therefore ص = \frac{(٣+٢ت)(١-ت)}{(١+ت)(١-ت)}$$

$$\therefore ص = \frac{٣-٣ت+٢ت-٢ت^٢}{١+١}$$

$$\therefore ص = \frac{٣-٣ت+٢ت+٢}{١+١}$$

$$\therefore ص = \frac{٥-ت}{٢}$$

∴ $ص = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}ت$ ← (2)

من : (1) ، (2)

نجد أن $س$ ، $ص$ مترافقان

∵ $س + ص = \frac{5}{2} + \cancel{\frac{1}{2}}ت + \frac{5}{2} - \cancel{\frac{1}{2}}ت$

∴ $س + ص = \frac{5}{2} + \frac{5}{2} = 5$

، $س ص = (\frac{5}{2} + \frac{1}{2}ت)(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}ت)$

، $س ص = \frac{25}{4} + \frac{1}{4} = \frac{26}{4} = 6,5$

المقدار $= س^2 + س ص + ص^2$

بإضافة : $س ص$ ، $- س ص$

∴ المقدار $= س^2 + 2س ص + ص^2 - س ص$

$= (س + ص)^2 - س ص$

$= (5)^2 - 6,5$

$= 25 - 6,5 = 18,5$

تحديد نوع جذري المعادلة التربيعية

عند حل المعادلة: أ س^{٢} + ب س + حـ = ٠ حيث

: أ، ب، حـ أعداد حقيقية، أ ≠ ٠

باستخدام القانون العام فإننا نحصل على الجذرين :

$$س = \frac{-ب + \sqrt{ب^{٢} - ٤أحـ}}{٢أ} \quad ، \quad س = \frac{-ب - \sqrt{ب^{٢} - ٤أحـ}}{٢أ}$$

ونجد أن كلاً من الجذرين يحتوى على المقدار $\sqrt{ب^{٢} - ٤أحـ}$

ويسمى المقدار : ب^{٢} − ٤أحـ مميز المعادلة التربيعية

فإذا كان المميز

المميز > ٠ (موجباً) فإن:

- جذرى المعادلة التربيعية حقيقيان مختلفان

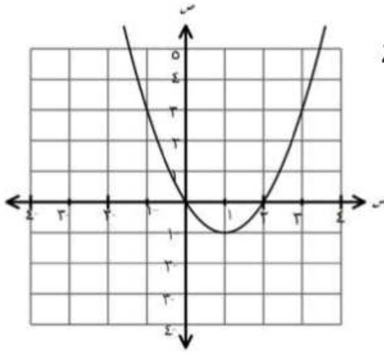
ويكون منحنى الدالة التربيعية المرتبط بالمعادلة التربيعية يقطع محور السينات فى نقطتين مختلفتين

الشكل المقابل

يمثل منحنى دالة تربيعية

ويكون

ب^{٢} − ٤أحـ > ٠



مثال ١

عين نوع جذرى المعادلة التربيعية

$$س + \frac{٦}{س} = ٥ \quad ، \quad س \neq ٠$$

الحل

∵ $س + \frac{٦}{س} = ٥$ ، س ≠ ٠ بالضرب فى س للطرفين

∴ س^{٢} + ٦ = ٥س

∴ س^{٢} − ٥س + ٦ = ٠

∴ أ = ١ ، ب = −٥ ، حـ = ٦

∵ المميز = ب^{٢} − ٤أحـ

∴ المميز = ٢٥ − ٤ × ١ × ٦

= ٢٥ − ٢٤ = ١ > ٠

∴ الجذران حقيقيان مختلفان

المميز = صفر فإن

- جذرى المعادلة التربيعية حقيقيان متساويان وكل منهما يساوى = $\frac{-ب}{٢أ}$

- الجذران مركبان مترافقان

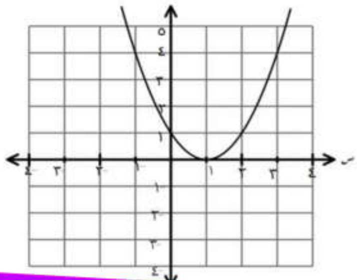
- منحنى الدالة التربيعية المرتبط بالمعادلة يمس محور السينات فى النقطة ($\frac{-ب}{٢أ}$ ، ٠)

الشكل المقابل

يمثل منحنى دالة تربيعية

مميزها يساوى الصفر

ب^{٢} − ٤أحـ = ٠



مثال (٢)

عين نوع جذرى المعادلة التربيعية

$س + \frac{٩}{س} = ٦$ ، $س \neq ٠$

الحل

∵ $س + \frac{٩}{س} = ٦$ ، $س \neq ٠$

بالضرب فى س للطرفين

∴ س^{٢}+٩ = ٦ س

∴ س^{٢} −٦ س +٩ = ٠

∴ أ=١ ، ب = −٦ ، جـ =٩

∵ المميز= ب^{٢} − ٤أجـ

∴ المميز=٣٦−٤×١×٩ = ٣٦ − ٣٦ = ٠

∴الجذران حقيقيان متساويان

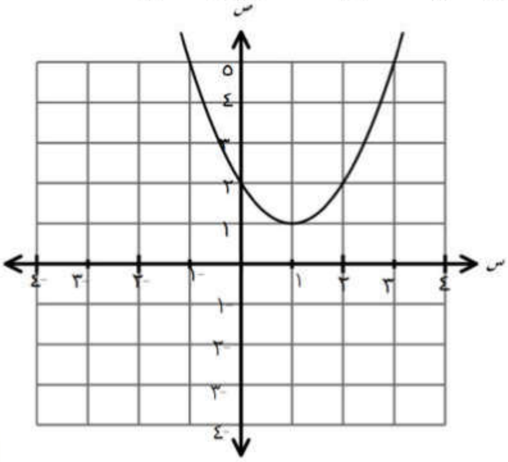
وكل من الجذرين = $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{٦}{٢ \times ١} = ٣$

ومنحنى الدالة التربيعية المرتبط بالمعادلة يمس محور السينات فى (٣ ، ٠)

المميز < صفر (سالب) فإن

- الجذران مركبين غير حقيقيين
- إذا كانت المعاملات: أ، ب، جـ أعداد حقيقية كان الجذران مركبين مترافقين
- منحنى الدالة التربيعية المرتبط بالمعادلة لايقطع مع محور السينات

الشكل المقابل يمثل منحنى دالة تربيعية مميزها < ٠



يمثل منحنى دالة تربيعية

د(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ

ويكون المقدار : ب^{٢} −٤أجـ < ٠

مثال (٣)

عين نوع جذرى المعادلة التربيعية

س^{٢} −٣س +٥ = ٠

الحل

∵ أ=١ ، ب = −٣، جـ = ٥

∴ المميز=ب^{٢} − ٤أجـ

∴ المميز=٩−٤×١×٥

=٩ −٢٠ = −١١ < ٠

∴الجذران مركبان غير حقيقيين

، ∵ المعاملات أعداد حقيقية

∴الجذران مركبان غير حقيقيين مترافقان

مثال ٤

أثبت أن جذرى المعادلة :

$٧س^٢ - ١١س + ٥ = ٠$ مركبان غير حقيقيين ثم استخدم القانون العام لإيجاد هذين الجذرين

الحل

∵ $أ = ٧$ ، $ب = -١١$ ، $حـ = ٥$

∴ المميز $= ١٢١ - ٤ \times ٧ \times ٥$

$= ١٢١ - ١٤٠ = -١٩ < ٠$

∴ الجذران مركبان غير حقيقيين

∴ $س = \frac{١١ \pm \sqrt{-١٩}}{٢ \times ٧}$

∴ $س = \frac{١١ \pm \sqrt{١٩}\,ت}{٢ \times ٧}$

∴ $س = \frac{١١}{١٤} \pm \frac{\sqrt{١٩}}{١٤}ت$

∴ م.ح $= \{\frac{١١}{١٤} + \frac{\sqrt{١٩}}{١٤}ت ، \frac{١١}{١٤} - \frac{\sqrt{١٩}}{١٤}ت\}$

مثال ٥

أوجد قيمة أ التى تجعل جذرى المعادلة :

$س^٢ - أس + ٩ = ٠$ متساويين

الحل

∵ $أ = ١$ ، $ب = -أ$ ، $حـ = ٩$

، ∵ الجذران متساويان

∴ المميز $= ٠$

∴ $ب^٢ - ٤أحـ = ٠$

∴ $أ^٢ - ٤ \times ١ \times ٩ = ٠$

∴ $أ^٢ - ٣٦ = ٠$

∴ $أ = \pm \sqrt{٣٦}$ ∴ $أ = \pm ٦$

مثال ٦

إذا كان جذرا المعادلة :

$س^٢ - ك س + ٢ك - ٤س + ٥ = ٠$

متساويين فأوجد قيمة ك الحقيقية ثم أوجد الجذرين

الحل

نضع المعادلة على الصورة العامة

∴ $س^٢ - (ك + ٤)س + (٢ك + ٥) = ٠$

∵ $أ = ١$ ، $ب = -(ك + ٤)$ ، $حـ = (٢ك + ٥)$

، ∵ الجذران متساويان

∴ المميز $= ٠$

∴ $(ك + ٤)^٢ - ٤ \times ١ \times (٢ك + ٥) = ٠$

∴ $ك^٢ + \cancel{٨ك} + ١٦ - \cancel{٨ك} - ٢٠ = ٠$

∴ $ك^٢ - ٤ = ٠$

∴ $ك^٢ = ٤$ ∴ $ك = \pm \sqrt{٤} = \pm ٢$

عند ك = ٢

∴ المعادلة هى :

$س^{٢} - ٦ س + ٩ = ٠$

$(س - ٣)^{٢} = ٠$ ∴ $س - ٣ = ٠$

∴ $س = ٣$

عند ك = −٢

∴ المعادلة هى :

$س^{٢} - ٢ س + ١ = ٠$

$(س - ١)^{٢} = ٠$ ∴ $س - ١ = ٠$

∴ $س = ١$

∴ الجذران متساويان وكل منهما = ١

مثال ٧

أوجد قيم م التى تجعل المعادلة :

جذور حقيقية :

$(م + ١) س^{٢} - ٢ م س + م = ٠$

ليس لها جذور حقيقية

الحل

∵ $أ = (م + ١)$ ، $ب = -٢م$ ، $جـ = م$

، ∵ ليس للمعادلة جذور حقيقية

∴ المميز < ٠

∴ $ب^{٢} - ٤ أ جـ < ٠$

∴ $(-٢م)^{٢} - ٤ (م + ١) \times م < ٠$

∴ $\cancel{٤ م^{٢}} - \cancel{٤ م^{٢}} - ٤ م < ٠$

∴ $-٤ م < ٠$ بالقسمة على −٤ للطرفين

∴ $م > ٠$ ∴ $م \in]٠ ، \infty[$

مثال ٨

أثبت أنه لجميع قيم أ ، ب يكون جذرا المعادلة

$(س - أ)(س - ب) = ٥$ حقيقيان مختلفان

الحل

نضع المعادلة على الصورة العامة

∴ $س^{٢} - ب س - أ س + أ ب = ٥$

∴ $س^{٢} - (ب + أ) س + (أ ب - ٥) = ٠$

المميز $= ب^{٢} - ٤ أ جـ$

المميز $= (-ب - أ)^{٢} - ٤ \times ١ \times (أ ب - ٥)$

$= ب^{٢} + ٢ أ ب + أ^{٢} - ٤ أ ب + ٢٠$

$= ب^{٢} - ٢ أ ب + أ^{٢} + ٢٠$

$= (ب - أ)^{٢} + ٢٠$

∵ المقدار $(ب - أ)^{٢} \geq ٠$

∴ المميز ≥ ٢٠

∴ جذرا المعادلة حقيقيان مختلفان

ملحوظة

إذا كانت المعاملات : أ، ب، حـ فى المعادلة

أ س^{2} + ب س + حـ = ٠ أعداداً نسبية

وكان المميز مربعاً كاملاً كان الجذران حقيقيين نسبيين

==================================

مثال ٩

أثبت أن : جذرا المعادلة :

٣ س^{2} ـ ٥ س ـ ٢ = ٠ أعداد نسبية

الحل

∵ أ = ٣ ، ب = ـ ٥ ، حـ = ـ ٢

∴ المعاملات أعداد نسبية

، ∵ المميز = ب^{2} ـ ٤ أ حـ

= ٢٥ ـ ٤ × ٣ × (ـ٢)

= ٢٥ + ٢٤ = ٤٩

= (٧)^{2} = مربع كامل

∴ الجذران حقيقيان نسبيان

==================================

مثال ١٠

إذا كان : ل ، م عددين نسبيين فأثبت أن جذرى المعادلة :

ل س^{2} + (ل ـ م) س ـ م = ٠

عددين نسبيان

الحل

∵ أ = ل ، ب = (ل ـ م) ، حـ = ـ م

، ل ، م أعداد نسبية

∴ المعاملات أعداد نسبية

، ∵ المميز = ب^{2} ـ ٤ أ حـ

= (ل ـ م)^{2} ـ ٤ × ل × (ـ م)

= ل^{2} ـ ٢ ل م + م^{2} + ٤ ل م

= ل^{2} + ٢ ل م + م^{2}

= (ل + م)^{2}

= مربع كامل

∴ الجذران نسبيان

==================================

مثال (١١)

أوجد قيم العدد الحقيقى ك التى تحقق أن المعادلة : (ك-٢) س^٢ - ٢ ك س + ك = ٠ لها جذران مركبان غير حقيقيين

الحل

∵ أ = (ك-٢) ، ب = -٢ ك ، حـ = ك

∵ الجذران نسبيان

∴ المميز = ب^٢ - ٤ أ جـ

∴ المميز = ٤ ك^٢ - ٤ × ك × (ك-٢)

= ~~٤ ك^٢~~ - ~~٤ ك^٢~~ + ٨ ك = ٨ ك

∴ الجذران مركبان غير حقيقيين

∴ المميز < ٠ ∴ ٨ ك < ٠

∴ ك < ٠ ∴ ك ∈]-∞ ، ٠[

العلاقة بين جذري المعادلة التربيعية ومعاملات حدودها

إذا كان ل ، م

جذري المعادلة التربيعية : $أس^2 + ب س + جـ = ٠$

فإن :

$$ل = \frac{-ب + \sqrt{ب^2 - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$$

$$، م = \frac{-ب - \sqrt{ب^2 - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$$

ويكون

١ مجموع جذرى المعادلة التربيعية

$$ل + م = \frac{-ب + \sqrt{ب^2 - ٤ أ جـ}}{٢ أ} + \frac{-ب - \sqrt{ب^2 - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$$

$$= \frac{-ب + \sqrt{ب^2 - ٤ أ جـ} - ب - \sqrt{ب^2 - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$$

$$= \frac{-٢ب}{٢ أ} = \frac{-ب}{أ}$$

مجموع جذرى أى معادلة تربيعية

$$= \frac{-ب}{أ} = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^2}$$

فى المعادلة : $٣س^2 + ٥س + ٧ = ٠$

$\because$ أ = ٣ ، ب = ٥

$$\text{مجموع الجذرين} = \frac{-ب}{أ} = \frac{-٥}{٣}$$

٢ حاصل ضرب جذرى المعادلة

$$ل \times م = \frac{-ب + \sqrt{ب^2 - ٤ أ جـ}}{٢ أ} \times \frac{-ب - \sqrt{ب^2 - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$$

$$= \frac{(-ب + \sqrt{ب^2 - ٤ أ جـ})(-ب - \sqrt{ب^2 - ٤ أ جـ})}{٤ أ^2}$$

$$= \frac{ب^2 - (ب^2 - ٤ أ جـ)}{٤ أ^2}$$

$$= \frac{ب^2 - ب^2 + ٤ أ جـ}{٤ أ^2}$$

$$= \frac{٤ أ جـ}{٤ أ^2}$$

$$= \frac{جـ}{أ}$$

$\therefore$ حاصل ضرب جذرى أى معادلة

$$= \frac{جـ}{أ} = \frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^2}$$

فمثلاً :

فى المعادلة : $٣س^2 + ٥س + ٧ = ٠$

$\because$ أ = ٣ ، ب = ٥ ، جـ = ٧

$$\text{حاصل ضرب جذرى المعادلة} = \frac{جـ}{أ} = \frac{٧}{٣}$$

③ الفرق بين الجذرين

$$\text{ل} - \text{م} = \pm \frac{\sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أ}\text{ح}}}{\text{أ}}$$

مثال ١

إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة

$$٣\text{س}^{٢} + ٥\text{س} = ٧$$

فأوجد :

(١) ل + م (٢) ل م (٣) ل - م

الحل

نضع المعادلة على الصورة العامة

∴ $٣\text{س}^{٢} + ٥\text{س} - ٧ = ٠$

∵ أ = ٣ ، ب = ٥ ، ح = -٧

(١) $\text{ل} + \text{م} = \frac{-\text{ب}}{\text{أ}} = \frac{-٥}{٣}$

(٢) $\text{ل}\,\text{م} = \frac{\text{ح}}{\text{أ}} = \frac{-٧}{٣}$

(٣) $\text{ل} - \text{م} = \pm \frac{\sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أ}\text{ح}}}{\text{أ}}$

$= \pm \frac{\sqrt{٢٥ - ٤ \times ٣ \,(-٧)}}{٣}$

$= \pm \frac{\sqrt{٢٥ + ٨٤}}{٣}$

$= \pm \frac{\sqrt{١٠٩}}{٣}$

مثال ٢

أوجد قيمة أ ، ب إذا كان : ٢، ٣ هما جذرا المعادلة $\text{س}^{٢} + \text{أ}\text{س} + \text{ب} = ٠$

الحل

∵ ٣،٢ هما جذرا المعادلة

$٢ + ٣ = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^{٢}}$

$٥ = \frac{-\text{أ}}{١}$ ∴ أ = -٥

∵، حاصل ضرب الجذرين $= \frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^{٢}}$

$٢ \times ٣ = \frac{\text{ب}}{١}$

∴ $٦ = \frac{\text{ب}}{١}$

∴ ب = ٦

مثال ٣

إذا كان مجموع جذرى المعادلة التربيعية : $٢\text{س}^{٢} + \text{ب}\text{س} + \text{ح} = ٠$ هو $\frac{٥}{٢}$

أوجد قيمة ب

الحل

∵ مجموع الجذرين $= \frac{-\text{ب}}{\text{أ}}$

∴ $\frac{٥}{٢} = \frac{-\text{ب}}{٢}$

∴ ٥ = -ب

∴ ب = -٥

مثال ٤

أوجد مجموع الجذرين وحاصل ضربهما لكل من المعادلات الآتية

(١) س (س - ٣) = ٤

(٢) (٢س + ١) (س - ٥) = ٣

الحل

(١) س (س - ٣) = ٤ بوضع المعادلة على الصورة العامة

∴ $\text{س}^{٢}$ - ٣س = ٤

∴ $\text{س}^{٢}$ - ٣س - ٤ = ٠

∴ أ = ١ ، ب = -٣ ، حـ = -١

∴ مجموع الجذرين = $\frac{٣}{١}$ = ٣

حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{حـ}}{\text{أ}}$ = $\frac{-١}{١}$ = -١

---

(٢) (٢س + ١) (س - ٥) = ٣

بوضع المعادلة على الصورة العامة

∴ ٢س (س - ٥) + ١ × (س - ٥) = ٣

∴ $\text{٢س}^{٢}$ - ١٠س + س - ٥ = ٣

∴ $\text{٢س}^{٢}$ - ٩س - ٨ = ٠

∵ أ = ٢ ، ب = -٩ ، حـ = -٨

∴ مجموع الجذرين = $\frac{-\text{ب}}{\text{أ}}$ = $\frac{٩}{٢}$

، حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{حـ}}{\text{أ}}$ = $\frac{-٨}{٢}$ = -٤

مثال ٥

ل ، م هما جذرا المعادلة $\text{٢س}^{٢}$ - ٦س + حـ = ٠ فأوجد قيمة حـ التي تجعل : ل - م = ٧

الحل

∵ ل ، م هما جذرا المعادلة

ل + م = $\frac{٦}{٢}$ = ٣ ← (١)

∴ ل م = $\frac{\text{حـ}}{٢}$ ← (٢)

، ∵ ل - م = ٧ ← (٣)

بجمع المعادلتين (١) ، (٣) ينتج أن

٢ل = ١٠ ∴ ل = ٥

بالتعويض في (١)

∴ ٥ + م = -٣ ← م = -٨

بالتعويض في (٣)

∴ ٥ × (-٨) = $\frac{\text{حـ}}{٢}$

∴ -٤٠ = $\frac{\text{حـ}}{٢}$

∴ حـ = -٨٠

ملحوظة

في المعادلة التربيعية :

$ا س^٢ + ب س + حـ = ٠$ التي معاملات حدودها حقيقية إذا كان أحد الجذرين عدد مركب غير حقيقي فإن الجذر الآخر يكون عدد مركب مرافق له

مثال ٦

إذا كان $(١ + \sqrt{٢}\,ت)$ هو أحد جذري المعادلة $س^٢ - ٢ س + حـ = ٠$ حيث $حـ \in ح$

أوجد

(١) قيمة الجذر الآخر (٢) قيمة : حـ

الحل

∵ المعاملات حقيقية وأحد الجذرين عدد مركب غير حقيقي

∴ الجذر الآخر مرافق له

∴ الجذر الآخر هو $(١ - \sqrt{٢}\,ت)$

∴ $(١ - \sqrt{٢}\,ت)$ ، $(١ + \sqrt{٢}\,ت)$ هما جذرا المعادلة

∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{حـ}{ا}$

∴ $(١ - \sqrt{٢}\,ت)(١ + \sqrt{٢}\,ت) = \frac{حـ}{١}$

∴ $١ + ٢ = حـ$

∴ $حـ = ٣$

حل آخر

∵ $ا = ١$ ، $ب = -٢$ ، $ج = حـ$

نفرض أن الجذر الآخر هو ل

∴ ل ، $(١ + \sqrt{٢}\,ت)$ هما جذرا المعادلة

∵ مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{ا}$

∴ $ل + ١ + \sqrt{٢}\,ت = ٢$

∴ $ل = ٢ - ١ - \sqrt{٢}\,ت = ١ - \sqrt{٢}\,ت$

∴ الجذران هما $١ - \sqrt{٢}\,ت$ ، $١ + \sqrt{٢}\,ت$

∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{حـ}{ا}$

∴ $(١ - \sqrt{٢}\,ت)(١ + \sqrt{٢}\,ت) = \frac{حـ}{١}$

∴ $١ + ٢$

∴ $حـ = ٣$

ملاحظات مهمة

(١) في المعادلة التربيعية : $ا س^٢ + ب س + حـ = ٠$

إذا كان : $ا = ١$

فإن : مجموع الجذرين = $-ب$

، حاصل ضرب الجذرين = حـ

في المعادلة : $س^٢ - ٦ س + ٥ = ٠$

مجموع الجذرين = ٦

، حاصل ضرب الجذرين = ٥

(٢) فى المعادلة التربيعية أ س^{٢} + ب س + حـ = ٠

إذا كان أحد جذرى المعادلة معكوس جمعى للآخر فإن : فإن مجموع الجذرين = صفر

∴ $\frac{-ب}{أ}$ = ٠ ∴ ب = ٠

(حيث ب معامل س)

(٣) فى المعادلة التربيعية أ س^{٢} + ب س + حـ = ٠

إذا كان أحد جذرى المعادلة معكوس ضربي للآخر فإن : حاصل ضرب الجذرين = ١

∴ $\frac{حـ}{أ}$ = ١ ∴ حـ = أ

مثال ٧

أوجد قيمة ك التى تجعل أحد جذرى المعادلة

٣ س^{٢} - (ك - ٢) س + (ك + ٤) = ٠

معكوس ضربي للجذر الآخر

الحل

أحد جذرى المعادلة معكوس ضربي للآخر

فإن : حاصل ضرب الجذرين =١

∴ $\frac{حـ}{أ}$ = ١ ∴ حـ = أ

، حـ = ك + ٤ ، أ = ٣

∴ ك + ٤ = ٣

ك = ٣ - ٤

∴ ك = - ١

(٤) إذا كانت النسبة بين جذرى المعادلة ٣ : ٢

نفرض أن الجذرين هما : ٣ل ، ٢ل

مثال ٨

إذا كانت النسبة بين جذرى المعادلة :

٨ س^{٢} - ب س + ٣ = ٠ هى ٢ : ٣

والجذرين موجبين أوجد قيمة ب

الحل

نفرض أن الجذرين هما ٢ل ، ٣ل

مجموع الجذرين = $\frac{- \text{معامل س}}{\text{معامل س}^{٢}}$

٢ل + ٣ل = $\frac{ب}{٨}$

∴ ٥ل = $\frac{ب}{٨}$

∴ ب = ٤٠ ل ← (١)

، حاصل ضرب الجذرين = $\frac{حـ}{أ}$

∴ ٢ل × ٣ل = $\frac{٣}{٨}$

∴ ٦ل^{٢} = $\frac{٣}{٨}$

∴ ل^{٢} = $\frac{٣}{٨}$ × $\frac{١}{٦}$ = $\frac{١}{١٦}$

∴ ل = ± $\frac{١}{٤}$ ← (٢)

بالتعويض من (٢) فى (١)

عند ل = $\frac{١}{٤}$

∴ ب $= 40 \times \frac{1}{4} = 10$

عند ل $= -\frac{1}{4}$ مرفوض (لأن الجذرين موجبين)

مثال ٩

إذا كانت النسبة بين جذرى المعادلة :

$أ س^2 + ب س + ح = 0$ كنسبة ٢ : ٣ أثبت أن

$25 أ ح = 6 ب^2$

الحل

نفرض أن الجذرين هما ٢ ل ، ٣ ل

مجموع الجذرين $= \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^2}$

∴ $2ل + 3ل = \frac{-ب}{أ}$

∴ $5ل = \frac{-ب}{أ}$

∴ $\boxed{ل = \frac{-ب}{5أ}}$ ← (١)

، ∵ حاصل ضرب الجذرين $= \frac{ح}{أ}$

∴ $2ل \times 3ل = \frac{ح}{أ}$

∴ $\boxed{6ل^2 = \frac{ح}{أ}}$ ← (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢)

∴ $6\left(\frac{-ب}{5أ}\right)^2 = \frac{ح}{أ}$

∴ $6 \times \frac{ب^2}{25أ^2} = \frac{ح}{أ}$

∴ $6ب^2 = 25أ^2 \times \frac{ح}{أ}$

∴ $6ب^2 = 25أ ح$

مثال ١٠

أوجد قيمة م التى تجعل أحد جذرى المعادلة

$4س^2 - م س + 7 = 0$ يزيد عن الجذر الآخر بمقدار ٣

الحل

$أ = 4$ ، $ب = -م$ ، $ح = 7$

نفرض أن الجذرين هما : ل ، ل + ٣

، مجموع الجذرين $= \frac{-ب}{أ}$

∴ $ل + ل + 3 = \frac{م}{4}$

$2ل + 3 = \frac{م}{4}$ بالضرب × ٤ للطرفين

∴ $م = 8ل + 12$ ← (١)

، ∵ حاصل ضرب الجذرين $= \frac{ح}{أ}$

∴ $ل(ل + 3) = \frac{7}{4}$

∴ $ل^2 + 3ل - \frac{7}{4} = 0$ بالضرب × ٤ للطرفين

∴ $4ل^2 + 12ل - 7 = 0$

$(2ل - 1)(2ل + 7) = 0$

إما $2ل - 1 = 0$ ∴ $ل = \frac{1}{2}$

او $2ل + 7 = 0$ ∴ $ل = \frac{-7}{2}$

بالتعويض فى (١)

عند ل $= \frac{١}{٢}$

م $= ٨ \times \frac{١}{٢} + ١٢ = ٤ + ١٢$

∴ م $= ١٦$

عند ل $= \frac{-٧}{٢}$

م $= ٨ \times \frac{-٧}{٢} + ١٢ = -٢٨ + ١٢$ ∴ م $= -١٦$

∴ م $= \pm ١٦$

مثال ١١

أوجد قيمة ﻫ التى تجعل مجموع جذرى المعادلة : س^٢ -(ﻫ + ٢) س + ٦ = ٠ يساوى حاصل ضرب جذرى المعادلة س^٢ + ٥س + ﻫ^٢ = ٠

الحل

∵ مجموع جذرى المعادلة الاولى $= \frac{ﻫ + ٢}{١}$

$= ﻫ + ٢$

،∵ حاصل ضرب جذرى المعادلة الثاني $= \frac{ﻫ^٢}{١}$

∴ ﻫ^٢ = ﻫ + ٢

∴ ﻫ^٢ - ﻫ - ٢ = ٠

(ﻫ + ١) (ﻫ - ٢) = ٠

∴ ﻫ = -١ أو ﻫ = ٢

مثال ١٢

أوجد الشرط اللازم ليكى يكون أحد جذرى المعادلة

ﻫ س^٢ + ب س + حـ = ٠

مساويا ضعف الجذر الآخر

الحل

∵ أحد الجذرين ضعف الجذر الآخر

∴ نفرض أن الجذرين هما : ل ، ٢ ل

∵ مجموع الجذرين $= \frac{-ب}{ﻫ}$

∴ ل + ٢ ل $= \frac{-ب}{ﻫ}$

∴ ٣ ل $= \frac{-ب}{ﻫ}$

∴ ل $= \frac{-ب}{٣ﻫ}$ ⟵ (١)

حاصل ضرب الجذرين $= \frac{حـ}{ﻫ}$

∴ ل × ٢ ل $= \frac{حـ}{ﻫ}$

∴ ٢ ل^٢ $= \frac{حـ}{ﻫ}$ ⟵ (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢)

٢ $\left(\frac{-ب}{٣ﻫ} \right)^٢ = \frac{حـ}{ﻫ}$

∴ ٢ $\left(\frac{ب^٢}{٩ﻫ^٢} \right) = \frac{حـ}{ﻫ}$

بالضرب فى ٩ ﻫ^٢ للطرفين

∴ ٢ ب^٢ $= \frac{حـ}{ﻫ} \times ٩ ﻫ^٢$

∴ ٢ ب^٢ = ٩ ﻫ حـ

وهذا هو الشرط اللازم لكى يكون أحدجذرى المعادلة: ﻫ س^٢ + ب س + حـ = ٠ ضعف الجذر الآخر

تكوين المعادلة التربيعية متى علم جذراها

إذا كان ل ، م هما جذرا معادلة تربيعية فإن المعادلة هي :

$س^٢ - (ل + م)س + ل م = ٠$

$س^٢$ -(مجموع الجذرين)س+حاصل ضربهما = ٠

مثال (١)

(١) ٥ ، ٣

(٢) $٢ + \sqrt{٣}$ ، $٢ - \sqrt{١٣}$

(٣) $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٣}{٢}$

(٤) $\frac{-٢+٢ت}{١+ت}$ ، $\frac{-٢+٤ت}{٢-ت}$

الحل

(١) مجموع الجذرين = ٥+٣ = ٨

، حاصل ضرب الجذرين = ٥×٣ = ١٥

المعادلة هي : $س^٢ - ٨س + ١٥ = ٠$

(٢) مجموع الجذرين = $٢+\sqrt{٣} + ٢-\sqrt{٣} = ٤$

وحاصل ضرب الجذرين = $(٢+\sqrt{٣})(٢-\sqrt{٣})$

$= ٤ - ٣ = ١$

∴ المعادلة هي : $س^٢ - ٤س + ١ = ٠$

(٣) مجموع الجذرين = $\frac{٢}{٣} + \frac{٣}{٢} = \frac{٤+٩}{٦} = \frac{١٣}{٦}$

، حاصل ضرب الجذرين = $\frac{٢}{٣} \times \frac{٣}{٢} = ١$

∴ المعادلة هي $س^٢ - \frac{١٣}{٦}س + ١ = ٠$

بالضرب × ٦ للطرفين

∴ $٦س^٢ - ١٣س + ٦ = ٠$

(٤) بفرض أن جذرى المعادلة هما ل ، م

، $ل = \frac{-٢+٢ت}{١+ت}$ بالضرب × مرافق المقام بسطاً ومقاماً

∴ $ل = \frac{-٢+٢ت}{١+ت} \times \frac{١-ت}{١-ت}$

$= \frac{-٢+٢ت+٢ت+٢}{١+١} = \frac{٤ت}{٢} = ٢ت$

، $م = \frac{-٢+٤ت}{٢-ت}$ بالضرب × مرافق المقام بسطا ومقاما

∴ $م = \frac{-٢+٤ت}{٢-ت} \times \frac{٢+ت}{٢+ت} = \frac{-٤-٢ت-٨ت ٤ت^٢}{٤+١}$

$= \frac{-١٠ت}{٥} = -٢ت$

مجموع الجذرين = ٢ت + (-٢ت) = صفر

، حاصل ضرب الجذرين = ٢ت × (-٢ت)

$= -٤ت^٢ = ٤$

∴ المعادلة هي : $س^٢ + ٤ = ٠$

بعض العلاقات المهمة

(١) $ل^{٢} + م^{٢} = (ل + م)^{٢} - ٢لم$

(٢) $(ل - م)^{٢} = (ل + م)^{٢} - ٤لم$

(٣) $ل^{٣} + م^{٣} = (ل + م)[(ل + م)^{٢} - ٣لم]$

(٤) $ل^{٣} - م^{٣} = (ل - م)[(ل + م)^{٢} - لم]$

(٥) $\frac{١}{ل} + \frac{١}{م} = \frac{ل + م}{لم}$

(٦) $\frac{ل}{م} + \frac{م}{ل} = \frac{ل^{٢} + م^{٢}}{لم} = \frac{(ل + م)^{٢} - ٢لم}{لم}$

(٧) $ل - م = \pm \frac{\sqrt{ب^{٢} - ٤أح}}{أ}$

$= \pm \sqrt{(ل + م)^{٢} - ٤لم}$

مثال ٢

إذا كان ل، م هما جذرا المعادلة $س^{٢} - ٥س + ٢ = ٠$ فأوجد قيمة المقادير الآتية

(١) $ل^{٢} + م^{٢}$ (٢) $ل - م$

(٣) $ل^{٣} + م^{٣}$ (٤) $\frac{ل}{م} + \frac{م}{ل}$

(٥) $\frac{١}{ل} + \frac{١}{م}$ (٦) $ل^{٢} - ٥ل + ٩$

(٧) $٢ل^{٢} - ٥ل + م^{٢} + ٢$ (٨) $م^{٢} - ٤م + ل + ٣$

الحل

∵ ل، م هما جذرا المعادلة $س^{٢} - ٥س + ٢ = ٠$

∴ $ل + م = ٥$ ، $لم = ٢$

∵ ل، م هما جذرا المعادلة $س^{٢} - ٥س + ٢ = ٠$

∴ $ل + م = ٥$ ، $لم = ٢$

(١) ∵ $ل^{٢} + م^{٢} = (ل + م)^{٢} - ٢لم$

$= (٥)^{٢} - ٢ \times ٢ = ٢٥ - ٤ = ٢١$

(٢) $ل - م = \pm \sqrt{(ل + م)^{٢} - ٤لم}$

$= \sqrt{(٥)^{٢} - ٤ \times ٢}$

$= \pm \sqrt{٢٥ - ٨} = \pm \sqrt{١٧}$

(٣) $ل^{٣} + م^{٣} = (ل + م)[(ل + م)^{٢} - ٣لم]$

$= ٥ \times [(٥)^{٢} - ٣ \times ٢]$

$= ٥ [٢٥ - ٦] = ٥ \times ١٩ = ٩٥$

(٤) ∵ $\frac{ل}{م} + \frac{م}{ل} = \frac{ل^{٢} + م^{٢}}{لم}$

$= \frac{(ل + م)^{٢} - ٢لم}{لم}$

$= \frac{(٥)^{٢} - ٢ \times ٢}{٢}$

$= \frac{٢٥ - ٤}{٢} = \frac{٢١}{٢}$

(٥) ∵ $\frac{١}{ل} + \frac{١}{م} = \frac{ل + م}{لم}$

$= \frac{٥}{٢}$

(٦) ∵ ل جذر للمعادلة:

$س^{٢} - ٥س + ٢ = ٠$ ∴ يحقق تساوى طرفيها

∴ $ل^{٢} - ٥ل + ٢ = ٠$

∴ $ل^{٢} - ٥ل = -٢$

∴ المقدار $= (ل^{٢} - ٥ل) + ٩$

$= (-٢) + ٩ = ٧$

(٧) ∵ المقدار = ٢ ل^{٢} - ٥ ل + م^{٢} + ٢

∴ المقدار = ل^{٢} + ل^{٢} - ٥ ل + م^{٢} + ٢

= (ل^{٢} + م^{٢}) + (ل^{٢} - ٥ ل) + ٢

= (ل + م)^{٢} - ٢ ل م + (ل^{٢} - ٥ ل) + ٢

= (٥)^{٢} - ٢ × ٢ + (-٢) + ٢

= ٢٥ - ٤ - ٤ = ٢٥ - ٨ = ١٧

---

(٨) ∵ المقدار = م^{٢} - ٤ م + ل + ٣

بإضافة : م ، -م للمقدار

المقدار = م^{٢} - ٤ م + م - م + ل + ٣

= م^{٢} - ٥ م + (م + ل) + ٣

= -٢ + ٥ + ٣ = ٦

مثال ٣

إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة :

س^{٢} + ٣ س - ٢ = ٠

فكون المعادلة التي جذراها : ل^{٢} ، م^{٢}

الحل

∵ ل ، م هما جذرا المعادلة المعطاة

∴ ل + م = -٣

، ل م = -٢

∴ مجموع جذري المعادلة المطلوبة = ل^{٢} + م^{٢}

= (ل + م)^{٢} - ٢ ل م

= (-٣)^{٢} - ٢ × (-٢)

= ٩ + ٤ = ١٣

، ∵ حاصل ضرب جذري المعادلة المطلوبة = ل^{٢} م^{٢} = (ل م)^{٢} = (-٢)^{٢} = ٤

∴ المعادلة المطلوبة هي :

س^{٢} - (١٣) س + (٤) = ٠

س^{٢} - ١٣ س + ٤ = ٠

مثال ٤

إذا كان ل، م هما جذرا المعادلة

س^{٢} - ٦ س + ٨ = ٠

فكون المعادلة التي جذراها : ل + ١ ، م + ١

الحل

من المعادلة المعطاة :

∵ مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ}$

∴ ل + م = $\frac{-ب}{أ}$

∴ ل + م = ٦

، حاصل ضرب الجذرين (ل م) = $\frac{جـ}{أ}$

∴ ل م = ٨

∵ جذرا المعادلة المطلوبة هما ل + ١ ، م + ١

∴ مجموع الجذرين = (ل + ١) + (م + ١)

= ل + م + ٢

= ٦ + ٢ = ٨

، ∵ حاصل ضرب الجذرين = (ل + ١) (م + ١)

= ل م + ل + م + ١

= ٨ + ٦ + ١ = ١٥

∴ المعادلة هي : س^{٢} - ٨ س + ١٥ = ٠

مثال ٥

إذا كان ل+٢ ، م +٢ هما جذرا المعادلة : $\text{س}^{٢}$ - ١١س + ٣ = ٠

فكون المعادلة التى جذراها : ل ، م

الحل

أ = ١ ، ب = -١١ ، حـ = ٣

∵ جذرى المعادلة المعطاة هما : ل+٢ ، م+٢

، مجموع الجذرين = $\frac{-\text{ب}}{\text{أ}}$

∵ ل+٢ + م + ٢ = ١١

∴ ل + م + ٤ = ١١

∴ ل+م = ٧ ← (١)

، حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{حـ}}{\text{أ}}$

∴ (ل+٢)(م+٢) = ٣

∴ ل م + ٢ل + ٢م + ٤ = ٣

∴ ل م + ٢(ل+م) = -١ ← (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢)

∴ ل م + ٢(٧) = -١

∴ ل م + ١٤ = -١

∴ ل م = -١٥ ← (٣)

∵ المعادلة المطلوبة جذراها : ل ، م

∴ مجموع الجذرين = ل + م = ٧

∴ حاصل ضرب الجذرين = ل م = -١٥

∴ المعادلة المطلوبة هى

$\text{س}^{٢}$ - (٧)س + (-١٥) = ٠

$\text{س}^{٢}$ - ٧س - ١٥ = ٠

مثال ٦

إذا كان الفرق بين جذرى المعادلة

$\text{٢س}^{٢}$ - ٩س + ٤ + ك = ٠ هو $\frac{٣}{٢}$

فأوجد قيمة : ك

الحل

بفرض أن جذرى المعادلة المعطاة هما ل، م

∴ ل+م = $\frac{٩}{٢}$

، ل م = $\frac{٤+\text{ك}}{٢}$

∵ ل-م = $\frac{٣}{٢}$ بالتربيع للطرفين

$(\text{ل-م})^{٢}$ = $\frac{٩}{٤}$

∴ $(\text{ل+م})^{٢}$ - ٤ل م = $\frac{٩}{٤}$

$(\frac{٩}{٢})^{٢}$ - ٤$(\frac{٤+\text{ك}}{٢})$ = $\frac{٩}{٤}$

$\frac{١٨}{٤}$ - ٢(٤+ك) = $\frac{٩}{٤}$ بالضرب × ٤

٨١ - ٨(٤+ك) = ٩

٨١ - ٣٢ - ٨ك = ٩

٤٩ - ٨ك = ٩

٨ك = ٤٩ - ٩

٨ك = ٤٠

∴ ك = ٥

حل آخر

أ = ٢ ، ب = -٩ ، حـ = ٤+ك

∵ ل-م = ± $\frac{\sqrt{\text{ب}^{٢}-٤\text{أ حـ}}}{\text{أ}}$

، ل-م = $\frac{٣}{٢}$

$\therefore \frac{٣}{٢} = \pm \frac{\sqrt{(-٩)^٢ - ٤ \times ٢ \times (٤ + ك)}}{٢}$

بالضرب × ٢ للطرفين

$\therefore ٣ = \pm \sqrt{(-٩)^٢ - ٤ \times ٢ \times (٤ + ك)}$

$\therefore ٣ \pm \sqrt{٨١ - ٣٢ - ٨ ك}$

$\therefore ٣ = \pm \sqrt{٤٩ - ٨ ك}$ بالتربيع للطرفين

$\therefore ٩ = ٤٩ - ٨ ك$

$\therefore ٨ ك = ٤٩ - ٩$

$\therefore ٨ ك = ٤٠$

$\therefore ك = ٥$

مثال ٧

إذا كان ل، م هما جذرا المعادلة

$س^٢ - ٣ س - ١ = ٠$

كون المعادلة التى جذراها $\frac{١}{ل^٢}$ ، $\frac{١}{م^٢}$

الحل

من المعادلة المعطاة :

$\because$ مجموع الجذرين $= \frac{-ب}{أ}$

$\boxed{\therefore ل + م = ٣}$

، حاصل ضرب الجذرين $= \frac{ح}{أ}$

$\boxed{\therefore ل م = -١}$

$\because$ المعادلة الطلوبة جذراها : $\frac{١}{ل^٢}$ ، $\frac{١}{م^٢}$

مجموع الجذرين $= \frac{١}{ل^٢} + \frac{١}{م^٢}$

$= \frac{ل^٢ + م^٢}{ل^٢ \; م^٢}$

$= \frac{(ل + م)^٢ - ٢ ل م}{(ل م)^٢}$

$= \frac{(٣)^٢ - ٢(-١)}{(-١)^٢}$

$= ٩ + ٢ = ١١$

، حاصل ضرب الجذرين $= \frac{١}{ل^٢} \times \frac{١}{م^٢}$

$= \frac{١}{(ل م)^٢}$

$= \frac{١}{(-١)^٢} = ١$

$\therefore$ المعادلة هى : $س^٢ - ١١ س + ١ = ٠$

مثال ٨

كون المعادلة التربيعية التى يزيد كل من جذريها بمقدار ١ عن جذرى المعادلة

$س^٢ - ٧ س - ٩ = ٠$

الحل

نفرض أن جذرى المعادلة المعطاة هما : ل ، م

$\therefore ل + م = ٧$ ، $ل م = -٩$

$\therefore$ جذرا المعادلة المطلوبة هما

$ل + ١$ ، $م + ١$

$\therefore$ مجموع الجذرين $= ل + ١ + م + ١$

$= ل + م + ٢$

$= ٧ + ٢ = ٩$

، حاصل ضرب الجذرين $= (\text{ل} + ١)\ (\text{م} + ١)$

$= \text{ل م} + \text{ل} + \text{م} + ١$

$= (-٩) + ٧ + ١ = -١$

∴ المعادلة هي : $\text{س}^{٢} - ٩\text{س} - ١ = ٠$

مثال ٩

إذا كان : ل، م هما جذري المعادلة

$\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٨ = ٠$ وكان ل > م

كوّن المعادلة التي جذراها : ل-١ ، م+٣

الحل

نوجد جذري المعادلة المعطاة:

$\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٨ = ٠$

$(\text{س} + ٢)(\text{س} - ٤) = ٠$

إما $\text{س} + ٢ = ٠$ ∴ $\text{س} = -٢$ | أو $\text{س} - ٤ = ٠$ ، $\text{س} = ٤$

∵ ل > م

∴ ل = ٤ ، م = -٢

∴ المعادلة المطلوبة جذراها : ل-١ ، م+٣

∴ مجموع الجذرين = ل - ١ + م + ٣

= ل + م + ٢

$= ٤ - ٢ + ٢ = ٤$

، حاصل ضرب الجذرين $= (\text{ل} - ١)(\text{م} + ٣)$

$= (٤ - ١)(-٢ + ٣) = ٣ \times ١ = ٣$

∴ المعادلة هي : $\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٣ = ٠$

مثال ١٠

إذا كان ل، م هما جذرا المعادلة :

$٤\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + \text{أ} = ٠$

وكان: $\text{ل}^{٢} + \text{م}^{٢} = ٣\ \text{ل م}$ فأوجد قيمة أ

الحل

∵ ل، م هما جذرا المعادلة

، $\text{ل} + \text{م} = \frac{-\text{ب}}{\text{أ}}$

∴ $\text{ل} + \text{م} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

، $\text{ل م} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$

∴ $\text{ل م} = \frac{\text{أ}}{٤}$

∵ $\text{ل}^{٢} + \text{م}^{٢} = ٣\ \text{ل م}$

∴ $(\text{ل} + \text{م})^{٢} - ٢\ \text{ل م} = ٣\ \text{ل م}$

∴ $(\text{ل} + \text{م})^{٢} = ٥\ \text{ل م}$

$\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} = ٥ \times \frac{\text{أ}}{٤}$

$\frac{١}{٤} = \frac{٥\text{أ}}{٤}$

∴ $٥\text{أ} = ١$

∴ $\text{أ} = \frac{١}{٥}$

مثال ١١

إذا كان ل، م هما جذرا المعادلة :

$\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ٦ = ٠$ كوّن المعادلة التي جذراها

ل + م ، ل م

الحل

الحل

∵ ل ، م هما جذرا المعادلة

، $ل + م = \frac{-ب}{أ}$ ∴ $ل + م = ٢$

، $ل م = \frac{جـ}{أ}$ ∴ $ل م = ٦$

، ∵ جذرا المعادلة المطلوبة هما ل + م ، ل م

∴ مجموع الجذرين = ل + م + ل م

= ٢ + ٦ = ٨

، ∵ حاصل ضرب الجذرين = (ل + م) (ل م)

= ٦ × ٢ = ١٢

∴ المعادلة هي : $س^٢ - ٨س + ١٢ = ٠$

مثال ١٢

إذا كان : $\frac{٢}{ل}$ ، $\frac{٢}{م}$ هما جذرا المعادلة

$س^٢ - ٦س + ٤ = ٠$

فأوجد المعادلة التي جذراها : ل ، م

الحل

∵ $\frac{٢}{ل}$ ، $\frac{٢}{م}$ هما جذرا المعادلة المعطاة

∴ $\frac{٢}{ل} \times \frac{٢}{م} = ٤$

∴ $\frac{٤}{ل م} = ٤$ ∴ $ل م = ١$

، $\frac{٢}{ل} + \frac{٢}{م} = ٦$

∴ $\frac{٢م + ٢ل}{ل م} = ٦$ ، ∵ $ل م = ١$

∴ $\frac{٢(ل + م)}{١} = ٦$ بالقسمة على ٢ للطرفين

$ل + م = ٣$

، ∵ ل ، م هما جذرا المعادلة المطلوبة

∴ $ل + م = ٣$

، $ل م = ١$

∴ المعادلة هي

$س^٢ - ٣س + ١ = ٠$

إشارة الدالة

إذا كانت : ص = د (س)

فإنه يقصد بإشارة الدالة قيم س التى تجعل

(١) د (س) موجبة

(٢) د (س) سالبة

(٣) د (س) = صفر

أولاً : إشارة الدالة الثابتة

إذا كانت : د (س) = ٲ حيث ٲ ∈ ح ، ٲ ≠ ٠

فإن إشارة الدالة هى نفس إشارة ٲ لجميع قيم س الحقيقية

(١) إشارة الدالة د : د (س) = ٥ تكون ....فى ....

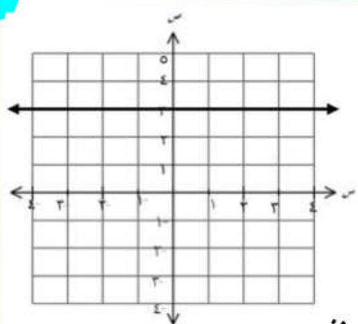
(٢) إشارة الدالة د : د (س) = -٢ تكون ......فى ....

(٣) الدالة د : د(س) = (٣)$^{-٢}$ تكون ....فى الفترة ....

(٤) الشكل المقابل

يمثل الدالة د :

د(س) = ...

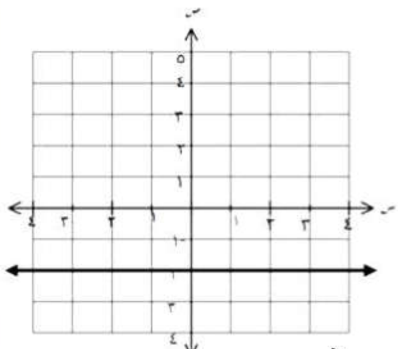


وإشارة الدالة تكون ....فى ح

(٥) الشكل المقابل

يمثل الدالة د :

د(س) = ...



وإشارة الدالة تكون ....فى ح

ملاحظات مهمة

(١) فى الفترة التى يقع فيها منحنى الدالة أعلى محور السينات تكون الدالة موجبة فى هذه الفترة

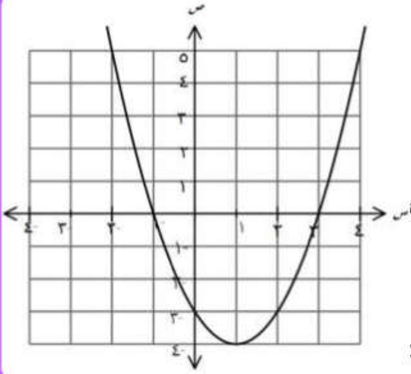
(٢) إذا كان : منحنى الدالة يقطع محور السينات فى (ٲ ، ٠) ، (ب ، ٠) فإن :

د (س) = ٠ عندما س ∈ { ٲ ، ب }

(٣) فى الفترة التى يكون فيها منحنى الدالة يقع أسفل محور السينات تكون الدالة سالبة فى هذه الفترة

فمثلاً

فى الشكل المقابل :



(١) منحنى الدالة يقع فوق محور السينات فى الفترة :

] ٣ ، ∞ [،] -∞ ، -١ [

∴ الدالة موجبة فى] ٣ ، ∞ [،] -∞ ، -١ [

(٢) منحنى الدالة يقطع محور السينات فى (٣ ، ٠) ، (-١ ، ٠)

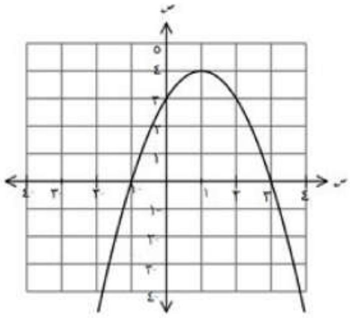
∴ د (س) = ٠ عندما س ∈ { ٣ ، -١ }

(٣) منحنى الدالة يقع اسفل محور السينات فى الفترة :] -١ ، ٣ [

∴ الدالة تكون سالبة فى الفترة] -١ ، ٣ [

مثال ١

الشكل المقابل يمثل منحنى دالة أكمل ما يأتي



(١) د(س) > ٠ في ....

(٢) د(س) < ٠ في ....، ....

(٣) د(س) = ٠ في الفترة ....

ثانياً : إشارة الدالة الخطية

الدالة د : د(س) = أس + ب

= أ(س + $\frac{ب}{أ}$)

تكون

١) د(س) = ٠ عندما س = $\frac{-ب}{أ}$

(٢) د(س) لها نفس إشارة أ عندما س > $\frac{-ب}{أ}$

(٣) د(س) تخالف إشارة ا عندما س < $\frac{-ب}{أ}$

مثال ٢

ابحث إشارة الدالة د : د(س) = ٣س - ٢

الحل

بوضع د(س) = ٠

∴ ٣س - ٢ = ٠

∴ ٣س = ٢

∴ س = $\frac{٢}{٣}$

(١) د(س) = ٠ عندما س = $\frac{٢}{٣}$

(٢) د(س) > ٠ عندما س ∈] $\frac{٢}{٣}$ ، ∞ [

(٣) د(س) < ٠ عندما س ∈] -∞ ، $\frac{٢}{٣}$ [

مثال ٣

عين إشارة الدالة د : د(س) = ٦ - ٢س

الحل

بوضع د(س) = ٠

∴ ٦ - ٢س = ٠

∴ ٦ = ٢س

∴ س = ٣

(١) د(س) = ٠ عندما س = ٣

(٢) د(س) < ٠ عندما س ∈] ٣ ، ∞ [

(٣) د(س) > ٠ عندما س ∈] -∞ ، ٣ [

ثالثاً : إشارة الدالة التربيعية

لبحث إشارة الدالة التربيعية د :

د(س) = أس² + ب س + حـ

نوجد المميز = ب² - ٤ أ حـ

وتوجد ثلاث حالات

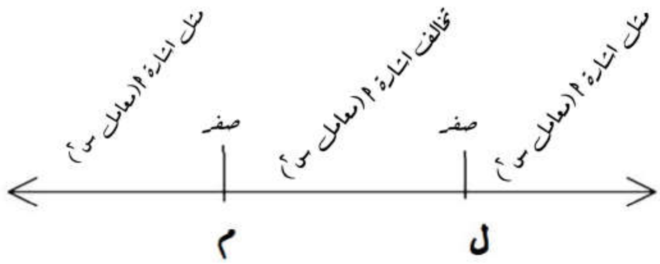
(١) إذا كان المميز > ٠

∴ للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان

نوجد هذين الجذرين (بالتحليل – القانون العام – بالحاسبة) وليكن :

س = ل ، س = م هما الجذران فإن

حيث ل > م



(١) د(س) = ٠ عندما س ∈ {ل، م}

(٢) د(س) تخالف إشارة أ عندما
س ∈]ل ، م[

(٣) د(س) لها نفس إشارة أ
عندما س ∈]ل، ∞[،]-∞، م[

أى عندما س ∈ ح - [ل ، م]

مثال ٤

ابحث إشارة الدالة د: د(س) = س² - ٥س + ٦

الحل

بوضع د(س) = ٠

∴ س² - ٥س + ٦ = ٠

∴ أ = ١ ، ب = -٥ ، حـ = ٦

المميز = ب² - ٤ أ حـ

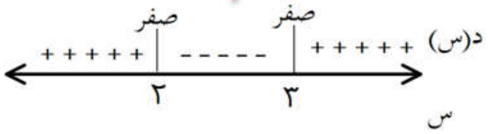
= (-٥)² - ٤ × ١ × ٦ = ٢٥ - ٢٤ = ١ > ٠

∴ للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان نوجدهما بالتحليل

∴ (س - ٢)(س - ٣) = ٠

إما س - ٢ = ٠ | أو س - ٣ = ٠

∴ س = ٢ | س = ٣



(١) د(س) = ٠ عندما س ∈ {٢، ٣}

(٢) د(س) < ٠ عندما س ∈]٢ ، ٣[

(٣) د(س) > ٠ عندما س ∈ ح - [٢ ، ٣]

مثال ٥

ابحث إشارة الدالة د: د(س) = ٤ + ٣س - س²

الحل

بوضع د(س) = ٠

∴ ٤ + ٣س - س² = ٠

∴ أ = -١ ، ب = ٣ ، حـ = ٤

المميز = ب² - ٤ أ حـ

= (٣)² - ٤ × (-١) × ٤ = ٩ + ١٦ = ٢٥ > ٠

∴ للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان نوجدهما بالتحليل

(لأن المميز مربع كامل)

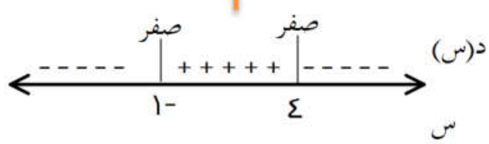
∵ ٤ + ٣س - س² = ٠ بالضرب × (-١) للطرفين

∴ س² - ٣س - ٤ = ٠

∴ (س - ٤)(س + ١) = ٠

إما س - ٤ = ٠ | أو س + ١ = ٠

∴ س = ٤ | س = -١



(١)) د(س) = ٠ عندما $\frac{-ب}{٢أ}$

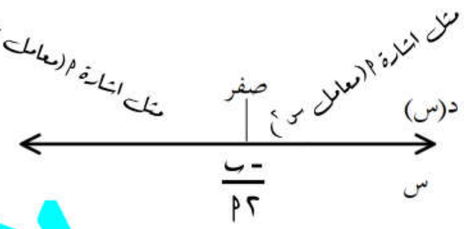
(٢) د(س) > ٠ عندما س ∈]-١ ، ٤[

(٣) د(س) < ٠ عندما س ∈ ح - [-١ ، ٤]

(٢) إذا كان المميز = ٠

∴ للمعادلة جذران حقيقيان

متساويان وكل منهما= $\frac{-ب}{٢أ}$



(١) د(س)= صفر عندما س = $\frac{-ب}{٢أ}$

(٢) د(س) لها نفس اشارة أ

عندما س ∈ ح - { $\frac{-ب}{٢أ}$ }

مثال ٦

ابحث إشارة الدالة د : د(س) = س² - ٦س + ٩

الحل

بوضع د(س) = ٠

∴ س² - ٦س + ٩ = ٠

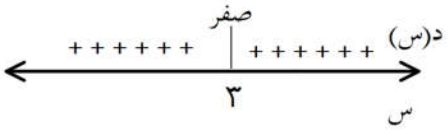
∴ أ = ١ ، ب = -٦ ، حـ = ٩

المميز = ب² - ٤أحـ

= (-٦)² - ٤ × ١ × ٩ = ٣٦ - ٣٦ = ٠

∴ للمعادلة جذران حقيقيان متساويان وكل منهما

س = $\frac{-ب}{٢أ}$ ∵ س = $\frac{٦}{٢ \times ١}$ = ٣



(١) د(س) = صفر عندما س = ٣

(٢) د(س) > ٠ عندما س ∈ ح - {٣}

(٣) إذا كان المميز < ٠

∴ ليس للمعادلة جذور حقيقية

والدالة تكون

لها نفس إشارة أ لجميع قيم س الحقيقية

مثال ٧

ابحث اشارة الدالة د : د(س) = س² - ٣س + ٩

الحل

بوضع د(س) = ٠

∴ س² - ٣س + ٩ = ٠

∴ أ = ١ ، ب = -٣ ، حـ = ٩

المميز = ب² - ٤أحـ

= (-٣)² - ٤ × ١ × ٩ = ٩ - ٣٦ = -٢٧ < ٠

ليس للمعادلة جذور حقيقية

∴ الدالة لها نفس اشارة معامل س²

لجميع قيم س الحقيقية

، ∵ أ > ٠

∴ د(س) > ٠ عندما س > ٠

مثال ٨

ابحث اشارة الدالة د :

د(س) = -س² + ٨س - ١٥ على الفترة [١ ، ٧]

الحل

نضع : د(س) = ٠

∴ -س² + ٨س - ١٥ = ٠

∴ أ = -١ ، ب = ٨ ، حـ = -١٥

∵ المميز = ب² - ٤ أ حـ

= (٨)² - ٤×(-١)×(-١٥)

= ٦٤ - ٦٠ = ٤ > ٠

∴ للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان

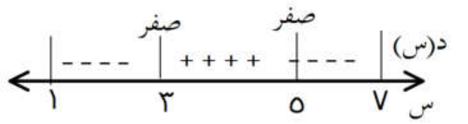
∵ -س² + ٨س - ١٥ = ٠ بالضرب × (-١) للطرفين

ى س² - ٨س + ١٥ = ٠

∴ (س - ٥)(س - ٣) = ٠

إما س - ٥ = ٠ أو س - ٣ = ٠

∴ س = ٥ ، س = ٣



(١) د(س) = ٠ عندما س ∈ {٣، ٥}

(٢) د(س) < ٠

عندما س ∈ [١ ، ٣[أو س ∈]٥ ، ٧]

(٣) د(س) > ٠ عندما س ∈]٢ ، ٣[

مثال ٩

إذا كانت :

د(س) = س² - ٦س + ٥ ، ر(س) = ٤س - س²

فعين الفترات التي تكون فيها الدالتين موجبتين معا

الحل

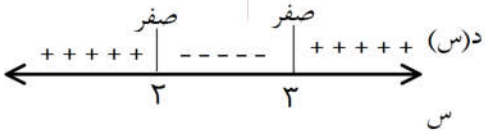
نبحث اشارة الدالة د :

بوضع : س² - ٥س + ٦ = ٠

∴ (س - ٢)(س - ٣) = ٠

إما س - ٢ = ٠ أو س - ٣ = ٠

∴ س = ٢ ، س = ٣



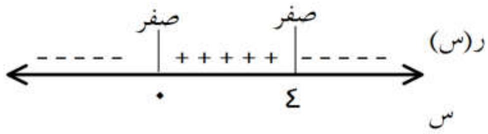
نبحث اشارة الدالة ر

بوضع : ٤س - س² = ٠

∴ س(٤ - س) = ٠

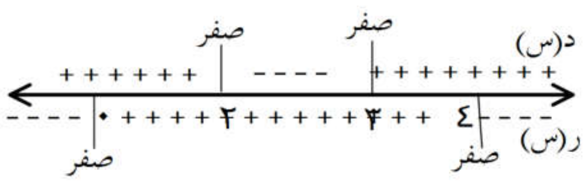
إما س = ٠ أو ٤ - س = ٠

∴ س = ٤



نبحث اشارة الدالتين على خط أعداد واحد

كما بالشكل :



نلاحظ أن الدالتين موجبتين معا في :

]٠ ، ٢[،]٣ ، ٤[

حل متباينة الدرجة الثانية في متغير واحد في ح

$أ س^{٢} + ب س + حـ > ٠$

١) نجعل أحد طرفي المتباينة = صفر

٢) نوجد الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

وهي $د(س) = أ س^{٢} + ب س + حـ$

٣) نبحث إشارة هذه الدالة

٤) نوجد قيم س التي تجعل المقدار :

$أ س^{٢} + ب س + حـ$ موجبا

مثال ١

أوجد في ح مجموعة حل المتباينة :

$س^{٢} + ٤ > ٥$

الحل

١- بوضع المتباينة

$أ س^{٢} + ب س + حـ > ٠$

$\therefore$ $س^{٢} - ٥ س + ٤ > ٠$

٢- الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة هي

$د(س) = س^{٢} - ٥ س + ٤$

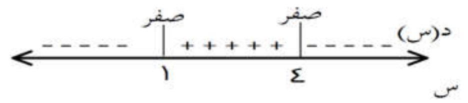
٣- نبحث إشارة هذه الدالة

بوضع :

$س^{٢} - ٥ س + ٤ = ٠$

$(س - ٤)(س - ١) = ٠$

إما $س - ٤ = ٠$ $\therefore$ $س = ٤$ | أو $س - ١ = ٠$ $س = ١$



$\because$ $د(س) > ٠$ عندما $س \in]١ ، ٤[$

$\therefore$ م . ح = $]١ ، ٤[$

مثال ٢

أوجد في ح مجموعة حل المتباينة :

$س^{٢} \le ٦ س - ٩$

الحل

$\because$ $س^{٢} - ٦ س + ٩ \ge ٠$

بوضع $د(س) = س^{٢} - ٦ س + ٩$

$\therefore$ $أ = ١$ ، $ب = -٦$ ، $حـ = ٩$

$\because$ المميز $= ب^{٢} - ٤ أ حـ$

$= (-٦)^{٢} - ٤ \times ١ \times ٩ = ٣٦ - ٣٦ = ٠$

$\therefore$ للمعادلة $د(س) = ٠$ جذران متساويان

وكل منهما : $س = \frac{-ب}{٢ أ}$

$س = \frac{٦}{٢ \times ١} = ٣$

$\therefore$ $د(س) > ٠$ عندما $س \in ح - \{٣\}$

$د(س) = ٠$ عندما $س = ٣$

$\therefore$ $د(س) \ge ٠$ عندما $س \in ح$

$\therefore$ مجموعة الحل = ح

مثال ٣

أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة

(س + ٣)^{٢} ≤ ١٠ - ٣(س + ٣)

الحل

س^{٢} + ٦س + ٩ ≤ ١٠ - ٣س - ٩

س^{٢} + ٦س + ٩ ≤ ١ - ٣س

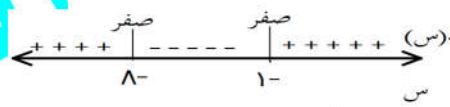
∴ س^{٢} + ٩س + ٨ ≤ ٠

بوضع د(س) = س^{٢} + ٩س + ٨

= (س + ٨)(س + ١)

∴ جذرا المعادلة د(س) = ٠

هما س = -٨ ، س = -١



المقدار (س^{٢} + ٩س + ٨) يكون أكبر من الصفر

س ∋ ح - [-٨ ، -١]

والمقدار = صفر عندما س ∋ {-٨ ، -١}

∴ م.ح = ح - [-٨ ، -١] ∪ {-٨ ، -١}

= ح -]-٨ ، -١[

سلسلة الفاروق

فى

حساب المثلثات

للصف الأول الثانوي

الفصل الدراسي الأول

إعداد : أ /عشري فاروق
ت/ ٠١١١٥٦٢٤٤٤٣١

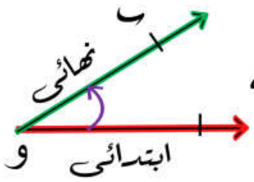
الزاويـــــة الموجهـــــة

حساب مثلثات

الزاوية الموجهة:
هى زوج مرتب من شعاعين لهما نفس نقطة البداية ويسمى المسقط الأول الضلع الإبتدائى ويسمى المسقط الثانى الضلع النهائى

الشكل المقابل

يمثل : ∠ أ و ب الموجهة



ويمكن التعبير عنها كزوج مرتب:

(وأ ، وب)

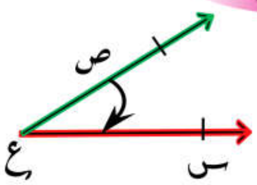
ويسمى :

الضلع : وأ الضلع الإبتدائى

والضلع : وب الضلع النهائى

مثـــال ١

فى الشكل المقابل :



أكمل مايأتى :

١ الشكل يمثل : ∠ .... الموجهة

٢ يعبر عن هذه الزاوية بالزوج المرتب :

(.... ، ....)

٣ الضلع الإبتدائى هو ....

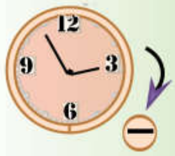
٤ الضلع النهائى هو ....

القياس الموجب والقياس السالب للزاوية الموجهة

يرسم داخل الزاوية الموجهة سهم ليشير من الضلع الإبتدائى إلى الضلع النهائى

:

أ إذا كان اتجاه السهم فى إتجاه دوران عقارب الساعة كان قياسها سالبا

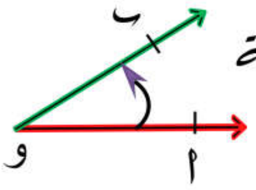


ب إذا كان السهم فى اتجاه عكس إتجاه دوران عقارب الساعة كان قياسها موجبا

الشكل المقابل

يمثل: ∠ أ و ب الموجهة

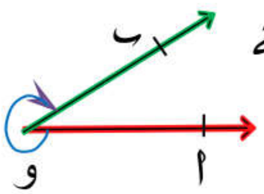
وهى زاوية قياسها موجب



الشكل المقابل

يمثل: ∠ أ و ب الموجهة

وهى زاوية قياسها موجب



∴ للزاوية الموجهة قياسان أحدهما موجب والآخر سالب ويكون

القياس الموجب + القيمة المطلقة للقياس السالب = ٣٦٠°

الزاوية التى قياسها الموجب = ١٥٠°

يكون قياسها السالب = ١٥٠° − ٣٦٠°

= −٢١٠°

الزاوية التى قياسها السالب = − ٧٢°

يكون قياسها الموجب = −٧٢ + ٣٦٠°

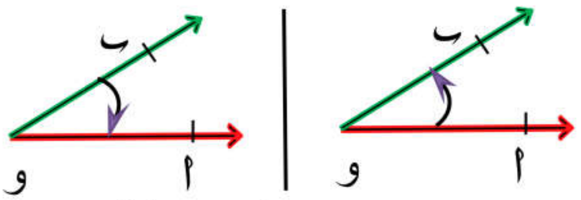
= ٢٨٨°

الزاوية التى قياسها الموجب = θ

يكون قياسها السالب = θ − ٣٦٠°

الزاوية التى قياسها السالب = −θ

يكون قياسها الموجب = −θ + ٣٦٠°



(∠ أ و ب) الموجهة ≠ (∠ ب و أ) الموجهة

مثال ٢

أوجد القياس الآخر للزوايا الموجهة التى قياساتها كالتالى

١) −٦٠°   ٢) ١٢٠°

٣) −٣٠٠°   ٤) ١٠٥°

الحل

١) القياس الموجب للزاوية التى قياسها (−٦٠°) = −٦٠° + ٣٦٠°

= ٣٠٠°

٢) القياس السالب للزاوية الموجهة التى قياسها (١٢٠°) = ١٢٠° − ٣٦٠°

= −٢٤٠°

٣) القياس الموجب للزاوية التى قياسها (−٣٠٠°) = −٣٠٠° + ٣٦٠°

= ٦٠°

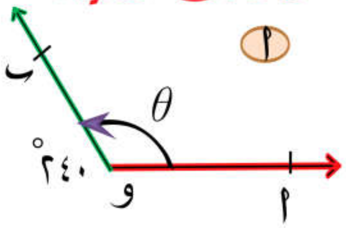
٤) القياس السالب للزاوية الموجهة التى قياسها (١٠٥°) = ١٠٥° − ٣٦٠°

= −٢٥٥°

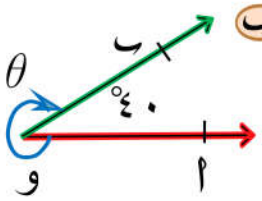
مثال ٣

أوجد قياس الزاوية (θ) فى كل من الأشكال التالية

أ)



ب)



الحل

أ) ∵ اتجاه السهم فى عكس اتجاه دوران عقارب الساعة

∴ θ قياسها موجبا

$\theta = ٣٦٠^\circ - ٢٤٠^\circ = ١٢٠^\circ$

ب) اتجاه السهم فى اتجاه دوران عقارب الساعة

θ قياسها سالبا

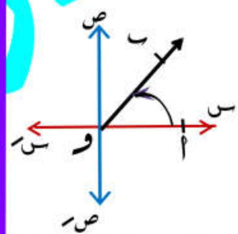
∴ $\theta = -(٣٦٠^\circ - ٤٠^\circ) = -٣٢٠^\circ$

الوضع القياسي للزاوية الموجهة

تكون الزاوية الموجهة مرسومة فى الوضع القياسى إذا تحقق الشرطان الآتيان معاً

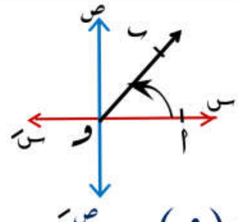
١) رأسها نقطة الأصل (و)

٢) ضلعها الإبتدائى هو الجزء الموجب لمحور السينات



(∠ا و ب) الموجهة فى الوضع القياسى

الشكل المقابل : يمثل ∠ ا و ب الموجهة



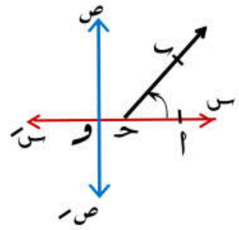
- رأسها نقطة الأصل (و)
- ضلعها الإبتدائى هو $\overrightarrow{وا}$ ينطبق على الجزء الموجب لمحور السينات
- ضلعها النهائى هو $\overrightarrow{وب}$
- السهم المرسوم بداخلها فى عكس اتجاه دوران الساعة

∴ قياسها موجب

مثال ٤

أى من الزوايا الموجهة الآتية فى وضعها القياسى

١)

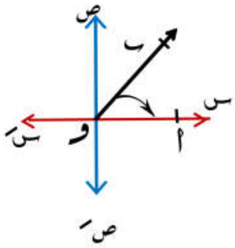


الحل

∠ ا حـ ب الموجهة ليست فى الوضع القياسى

لأن رأسها لا تقع على نقطة الأصل

٢)

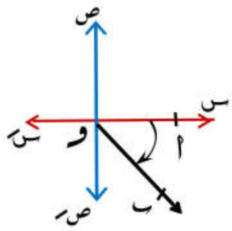


الحل

∠ ب ا و) الموجهة ليست فى الوضع القياسى

لأن ضلعها الإبتدائى لا ينطبق على الجزء الموجب لمحور السينات

③



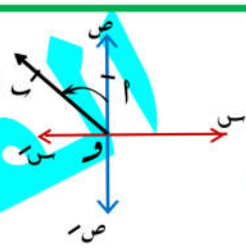
الحل

(∠ أ و ب) الموجهة

في الوضع القياسي لأن :

- رأسها نقطة الأصل (و)
- ضلعها الإبتدائي هو الجزء الموجب لمحور السينات

④



الحل

(∠ ب أ و) الموجهة

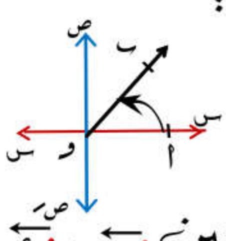
ليست في الوضع القياسي

لأن ضلعها الإبتدائي $\overleftarrow{\text{و أ}}$ لا ينطبق على الجزء الموجب لمحور السينات

موقع الزاوية الموجهة

إذا كانت: (∠ أ و ب) الموجهة في الوضع القياسي وقياسها θ فإنها :

① تقع في الربع الأول

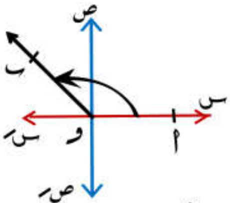


إذا كان :

■ ضلعها النهائي $\overleftarrow{\text{و ب}}$ يقع بين $\overleftarrow{\text{و س}}$ ، $\overleftarrow{\text{و ص}}$

■ $\theta \in]0^\circ , 90^\circ[$

② تقع في الربع الثاني

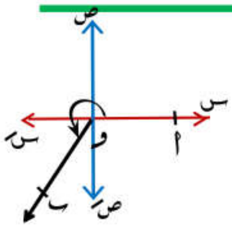


إذا كان :

■ ضلعها النهائي $\overleftarrow{\text{و ب}}$ يقع بين $\overleftarrow{\text{و ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{و س َ}}$

■ $\theta \in]90^\circ , 180^\circ[$

③ تقع في الربع الثالث

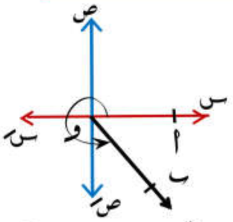


إذا كان :

■ ضلعها النهائي $\overleftarrow{\text{و ب}}$ يقع بين $\overleftarrow{\text{و س َ}}$ ، $\overleftarrow{\text{و ص َ}}$

■ $\theta \in]180^\circ , 270^\circ[$

④ تقع في الربع الرابع



إذا كان :

■ ضلعها النهائي $\overleftarrow{\text{و ب}}$ يقع بين $\overleftarrow{\text{و ص َ}}$ ، $\overleftarrow{\text{و س}}$

■ $\theta \in]270^\circ , 360^\circ[$

⑤ إذا وقع الضلع النهائي للزاوية الموجهة على أحد محاور الإحداثيات سميت زاوية ربعية

∴ الزوايا الموجهة : ٠ ، ٩٠ ، ١٨٠ ، ٢٧٠ ، ٣٦٠ ، ٤٥٠ ، ..... هي زوايا ربعية

مثال ⑤

عين الربع الذي تقع فيه الزوايا الموجهة المرسومة في الوضع القياسي التي قياساتها كالتالي

① ٤٠°

الحل

∵ $40^\circ \in]0^\circ , 90^\circ[$

∴ تقع في الربع الأول

(٢) ‎−٥٠°

الحل

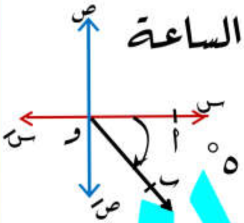
القياس الموجب للزاوية = ‎−٥٠° + ٣٦٠°
= ٣١٠°

، ∵ ٣١٠° ∈]٢٧٠° ، ٣٦٠°[

∴ الزاوية تقع فى الربع الرابع

أو

ترسم من الجزء الموجب لمحور السينات فى إتجاه دوران عقارب الساعة

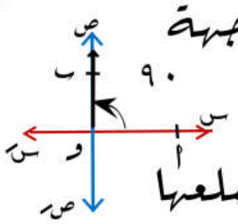


∴ الزاوية تقع فى الربع الرابع

(٣) ٩٠°

الحل

∵ عند رسم الزاوية الموجهة التى قياسها ٩٠° فى الوضع القياسى فإن ضلعها النهائى يقع على الجزء الموجب لمحور الصادات



∴ الزاوية التى قياسها ٩٠° هى زاوية ربعية

(٤) ‎−١٨٠°

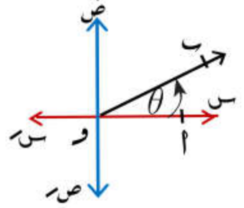
الحل

الزاوية الموجهة التى قياسها ‎−١٨٠° فى الوضع القياسى فإن ضلعها النهائى يقع على الجزء السالب لمحور السينات

∴ ‎−١٨٠° هى زاوية ربعية

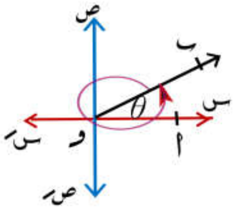
الزوايا المتكافئة

يقال لعدة زوايا فى الوضع القياسى أنها متكافئة إذا كان الضلع النهائى لهم جميعا واحد



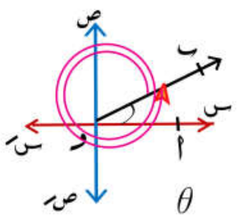
الشكل المقابل يمثل زاوية قياسها θ

■ عند دوران الضلع النهائى للزاوية وهو $\overrightarrow{وب}$ دورة كاملة حول نقطة الأصل فإنه يعود إلى وضعه الأصلى



∴ الزاويتان : θ ، $\boxed{\theta + 1 \times 360}$ متكافئتان

وكذلك عند دوران الضلع النهائى $\overrightarrow{وب}$ دورتين حول نقطة الأصل فإنه ينطبق على الضلع النهائى للزاوية التى قياسها



∴ الزاويتان : θ ، $\theta + 2 \times 360°$ متكافئتان

وهكذا ......

∴ الزاويتان θ ، $\theta \pm ن \times 360$ حيث ن ∈ ص متكافئتان

أصغر قياس موجب و أكبر قياس سالب

■ لإيجاد أصغر قياس موجب مكافىء للزاوية التي قياسها ١٦٧٨°

نكتب الزاوية

١٦٧٨° = θ + ن × ٣٦٠

نوجد :

■ ن = ١٦٧٨° ÷ ٣٦٠

≃ ٤,٦٦١١١

حيث ن عدد الدورات الكاملة

∴ ن = ٤

■ θ = الزاوية المعطاة ـ ن × ٣٦٠°

∴ θ = ١٦٧٨° ـ ٤ × ٣٦٠°

= ٢٣٨°

لإيجاد أكبر قياس سالب مكافىء للزاوية التي قياسها ١٦٧٨°

أكبر قياس سالب

= ١٦٧٨° ـ (ن + ١) × ٣٦٠°

= ١٦٧٨° − ٥ × ٣٦٠° = −١٢٢°

مثال (٦)

أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب مكافىء للزواية الموجهة التي قياساتها كالتالى :

(١) ٥٠°

الحل

القياس الموجب = ٥٠° + ٣٦٠° = ٤١٠°

القياس السالب = ٥٠° − ٣٦٠° = −٣١٠°

(٢) −١٢٠°

الحل

القياس الموجب = −١٢٠° + ٣٦٠° = ٢٤٠°

القياس السالب = −١٢٠° − ٣٦٠° = −٤٨٠°

(٣) ٣٤٥٦°

الحل

نوجد عدد الدورات الكاملة

∵ ٣٤٥٦ ٣٦٠ ≃ ٩,٦

∴ ن = ٩

الزاوية المكافئة الموجبة قياسها

= ٣٤٥٦ − ٩ × ٣٦٠° = ٢١٦°

الزاوية المكافئة السالبة قياسها

= ٣٤٥٦ − ١٠ ٣٦٠° = ٢١٦°

= −١٤٤°

(٤) −٣٤٥٦°

الحل

عدد الدورات الكاملة

∵ ٣٤٥٦ ÷ ٣٦٠ ≃ ٩,٦

∴ ن = ٩

الزاوية المكافئة الموجبة قياسها

= −٣٤٥٦ + ٩ × ٣٦٠° = −٢١٦°

= −٣٤٥٦° + ١٠ × ٣٦٠° = ١٤٤°

مثال ٧

حدد الربع الذى تقع فيه الزوايا الموجهة الذى قياساتها كالتالى

(١) −٢١٩٦°

الحل

∵ ٢١٩٦° ÷ ٣٦٠ ≃ ٦٫١

∴ ن = ٦

الزاوية المكافئة الموجبة قياسها

= −٢١٩٦° ٧ × ٣٦٠° = ٣٢٤°

، ∵ ٣٢٤ ∈]٢٧٠°، ٣٦٠°[

∴ الزاوية تقع فى الربع الرابع

(٢) ١٦١٥°

الحل

∵ ١٦١٥ ÷ ٣٦٠ ≃ ٤٫٤٩

∴ ن = ٤

الزاوية المكافئة الموجبة قياسها

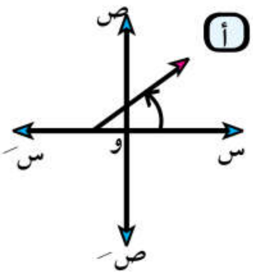
= ١٦١٥° − ٤ × ٣٦٠° = ١٧٥°

، ∵ ١٧٥ ∈]٩٠°، ١٨٠°[

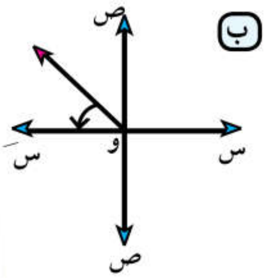
مثال ٨

أى من الزوايا الآتية تكون فى الوضع القياسى

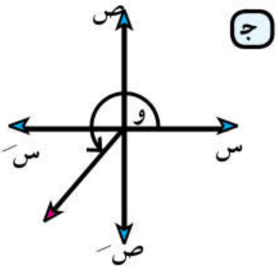
أ



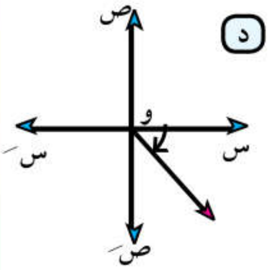
ب



ج



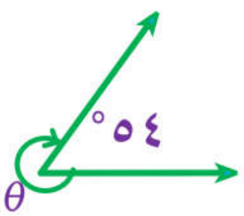
د



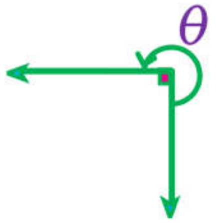
مثال ٩

أوجد قياس الزاوية (θ) في كل مما يأتي

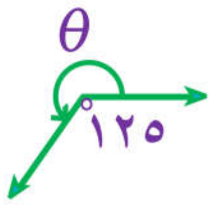
أ



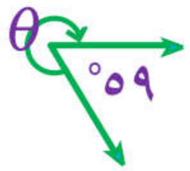
ب



ج)



د)



....

....

....

....

....

....

مثال (١٠)

أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب مكافئ للزوايا الموجهة التى قياساتها كالتالى

(١) ١٧٠°

....

....

....

....

(٢) −٣٩٥١°

....

....

....

....

(٣) ١٢٠٠°

....

....

....

....

....

مثال (١١)

حدد الربع الذى تقع فيه الزوايا الموجهة التى قياساتها كالتالى

(١) ٧٥٠°

....

....

....

(٢) −١٥٢٠°

....

....

....

(٣) −٢٧٠°

....

....

....

مثال (١٢)

عين أصغر قياس موجب للزوايا الموجهة التى قياساتها كالتالى

(١) −٣٠٠°

....

....

....

٢) ١٢٣٧°

٣) -٥٩٠٨°

مثال ١٣

عين أكبر قياس سالب للزوايا الموجهة التى قياساتها كالتالى

١) ٢٣٦٧°

٢) -٢٥٦٧°

٣) -٤٩٨٧°

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① الزاوية التى قياسها ٦٠° فى الوضع القياسى تكافئ الزاوية التى قياسها ....

(أ) ١٢٠°　　(ب) ٢٤٠°　　(جـ) ٣٠٠°　　(د) ٤٢٠°

② الزاوية التى قياسها ٥٨٥° تكافئ فى الوضع القياسى الزاوية التى قياسها ....

(أ) ٤٥°　　(ب) ١٣٥°　　(جـ) ٢٢٥°　　(د) ٣١٥°

③ الربع الذى تقع فيه الزاوية التى قياسها ١٦٧٠° هو ....

(أ) الأول.　　(ب) الثانى.　　(جـ) الثالث.　　(د) الرابع.

④ الزاوية التى قياسها (– ١٣٥°) تقع فى الربع ....

(أ) الأول.　　(ب) الثانى.　　(جـ) الثالث.　　(د) الرابع.

⑤ الزاوية التى قياسها (– ٨٥٠°) تقع فى الربع ....

(أ) الأول.　　(ب) الثانى.　　(جـ) الثالث.　　(د) الرابع.

⑥ جميع الزوايا التى قياساتها كالآتى تقع فى الربع الثانى ماعدا ....

(أ) – ٢٤٠°　　(ب) ١٠٠°　　(جـ) – ١٢٠°　　(د) ٨٦٠°

⑦ جميع قياسات الزوايا التالية مكافئة للزاوية ٧٥° فى الوضع القياسى ماعدا ....

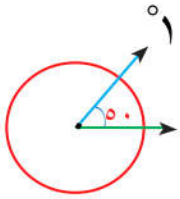
(أ) – ٢٨٥°　　(ب) – ٦٤٥°　　(جـ) ٢٨٥°　　(د) ٤٣٥°

الدرس الثاني

القياس الستيني والقياس الدائري للزاوية الموجهة

أولاً : القياس الستيني

تعتمد فكرة هذا القياس على تقسيم الدائرة إلى ٣٦٠ قوساً متساوية وكل زاوية مركزية تقابل قوساً من هذه الأقواس يكون قياسها 1°



الزاوية التي قياسها ٥٠° تقابل ٥٠ قوساً من هذه الأقواس

وفي هذا القياس تقدر فيه الزاوية بالدرجات والدقائق والثواني

- وتنقسم الدرجة إلى ٦٠ جزء وكل جزء يسمى دقيقة :

∴ ١° = ٦٠َ

- وتنقسم الدقيقة إلى ٦٠ جزء كل جزء كل جزء منها يسمى ثانية

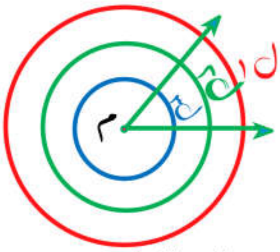
∴ ١َ = ٦٠ً

- ٣٢ً ١٥َ ١٢٣°

وتقرأ ١٢٣ درجة و ١٥ دقيقة ٣٢ ثانية

ثانيا : القياس الدائري للزاوية

في الشكل المقابل :



عند قسمة طول أي قوس على نصف القطر المناظر له في نفس الدائرة تنتج القياس الدائري للزاوية $(\theta^{أ})$

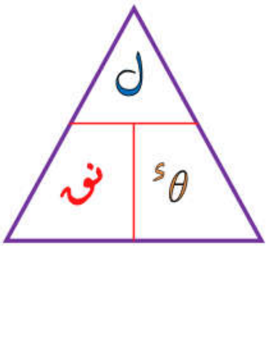
$$\theta^{أ} = \frac{ل_1}{نق_1} = \frac{ل_2}{نق_2} = \frac{ل_3}{نق_3}$$

==

القياس الدائري

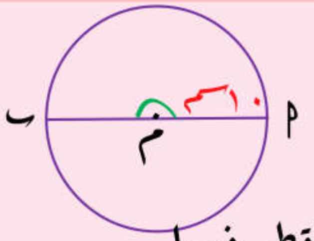
القياس الدائري لزاوية مركزية تحصر بين ضلعيها قوساً طوله ل في دائرة طول نصف قطرها يساوي نق هو النسبة بين طول القوس إلى طول نصف القطر

$$\boxed{\theta^{ء} = \frac{ل}{نق}}$$



مثال ١

في الشكل المقابل : م دائرة طول نصف قطرها ١٠ سم ، $\overline{أب}$ قطر فيها



أوجد :

ق (∠ أ م ب) المركزية بالراديان

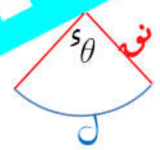
الحل

∵ طول القوس $\overset{\frown}{أب}$ = نصف طول محيط الدائرة

طول القوس $\overset{\frown}{أب}$ = π نق ، نق = ١٠ سم

∴ ل = ١٠ π سم

∵ ، $\boxed{\theta^{د} = \frac{ل}{نق}}$



$\theta^{د} = \frac{١٠\pi}{١٠} = \pi$

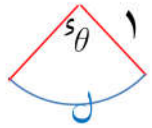
لاحظ

من المثال السابق نجد أن الزاوية الزاوية المركزية التي قياسها ١٨٠° قياسها الدائري هو π

ملحوظة

في دائرة الوحدة يكون طول نصف قطرها وحدة الأطوال

أي : نق = ١ ∴ $\theta^{د} = \frac{ل}{\quad} = ل$



∴ في دائرة الوحدة يكون القياس الدائري للزاوية المركزية = طول القوس المحصور بين ضلعيها

الزاوية النصف قطرية (الراديان)

هي زاوية مركزية في دائرة تحصر بين ضلعيها قوساً طوله يساوي طول نصف قطر الدائرة

ل = نق

نق = ل

∴ $\theta^{د} = \frac{نق}{نق} = ١^{د}$

∴ قياس الزاوية النصف قطرية = $١^{د}$

∴ الزاوية النصف قطرية هي وحدة قياس القياس الدائري

مثال ٢

قياس الزاوية المركزية التي تحصر قوس في دائرة طوله يساوي ثلاثة امثال طول نصف قطر دائرتها = ...^{د}

مثال ٣

زاوية مركزية فى دائرة طول نصف قطر دائرتها ١٥ سم وتحصر بين ضلعيها قوسا طوله ٢٥ سم
احسب قياسها الدائرى

الحل

∵ ل = ٢٥ سم ، نق = ١٥ سم

، $\theta^{ء} = \frac{ل}{نق}$

∴ $\theta^{ء} = \frac{٢٥}{١٥}$

$= ١,٦٦٧^{ء}$

مثال ٤

زاوية مركزية قياسها $١,٢^{ء}$ فى دائرة وتحصر بين ضلعيها قوساً طوله ١٢ سم
احسب محيط دائرتها

الحل

∵ $\theta^{ء} = ١,٢^{ء}$ ، ل = ١٢ سم

، ∵ $نق = \frac{ل}{\theta^{ء}}$

∴ $نق = \frac{١٢}{١,٢} = ١٠$ سم

، ∵ محيط الدائرة = ٢ π نق

∴ محيط الدائرة = ٢ × π × ١٠

= ٢٠ π سم

مثال ٥

زاوية مركزية قياسها $١,٥^{ء}$ فى دائرة طول نصف قطرها ١٠ سم
أوجد طول قوسها

الحل

∵ ل = $\theta^{ء}$ × نق

، نق = ١٠ سم ، $\theta^{ء} = ١,٥^{ء}$

ل = ١٠ × ١,٥ = ١٥ سم

مثال ٦

زاوية مركزية قياسها $١,٢^{ء}$ فى دائرة مساحتها ٢٥ π سم^{٢}
احسب
طول القوس المحصور بين ضلعيها

الحل

∵ $\theta^{ء} = ١,٢^{ء}$

، ∵ مساحة الدائرة = π نق^{٢}

∴ ٢٥ $\cancel{\pi}$ = $\cancel{\pi}$ نق^{٢}

∴ ٢٥ = نق^{٢} ∴ نق = ٥ سم

∵ ل = $\theta^{ء}$ × نق ∴ ل = ١,٢ × ٥ = ٦ سم

العلاقة بين القياس الستيني والقياس الدائري

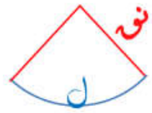
يوجد للزاوية وحدتى قياس هما

والقياس الستينى (س°)

القياس الدائرى ($\theta^{ء}$)

ويمكن التحويل بينهما

سبق أن تناولنا علاقة



$$\frac{\text{قياس القوس}}{\text{قياس الدائرة}} = \frac{\text{طول القوس}}{\text{محيط الدائرة}}$$

قياس القوس = قياس الزاوية المركزية

$$\therefore \frac{\text{س}^\circ}{\text{٣٦٠}^\circ} = \frac{\text{ل}}{\text{٢}\pi\,\text{نق}}$$ بالضرب × ٢ للطرفين

$$\therefore \frac{\text{س}^\circ}{\text{١٨٠}^\circ} = \frac{\text{ل}}{\pi\,\text{نق}} \qquad \theta^{ء} = \frac{\text{ل}}{\text{نق}}$$

$$\boxed{\therefore \frac{\text{س}^\circ}{\text{١٨٠}^\circ} = \frac{\theta^{ء}}{\pi}}$$

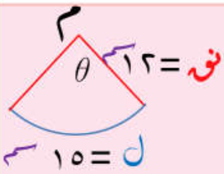
$$\frac{\text{القياس الستينى}}{\text{١٨٠}^\circ} = \frac{\text{القياس الدائرى}}{\pi}$$

$$\therefore \text{القياس الستينى} = \frac{\text{القياس الدائرى}}{\pi} \times \text{١٨٠}^\circ$$

$$\text{، القياس الدائرى} = \frac{\text{القياس الستينى}}{\text{١٨٠}^\circ} \times \pi$$

مثال (١)

فى الشكل المقابل : زاوية مركزية قياسها θ



فإن :

(١) $\theta = \text{.........}^{ء}$

(٢) $\theta = \text{.........}^\circ$

الحل

$\because$ نق = ١٢ سم ، ل = ١٥ سم

$$\text{،}\ \theta^{ء} = \frac{\text{ل}}{\text{نق}}$$

$$\therefore \theta^{ء} = \frac{\text{١٥}}{\text{١٢}}$$

$$= \text{١,٢٥}^{ء}$$

بالتحويل إلى القياس الستينى

$$\therefore \text{س}^\circ = \frac{\theta^{ء} \times \text{١٨٠}^\circ}{\pi}$$

$$\therefore \text{س}^\circ = \frac{\text{١,٢٥} \times \text{١٨٠}^\circ}{\pi}$$

$$= \text{٧١}^\circ\ \text{٣٧}'\ \text{١١}''$$

مثال ٢

الشكل المقابل يمثل زاوية مركزية قياسها ١٢٠° في دائرة طول نصف قطرها ٢٠ سم احسب طول القوس المقابل لها

الحل

نوجد القياس الدائري للزاوية المركزية

$\because \theta^{ء} = \frac{س^\circ}{١٨٠^\circ} \times \pi \qquad \therefore \theta^{ء} = \frac{١٢٠^\circ}{١٨٠^\circ} \times \pi$

نضغط على المفتاح

فنحصل على النتيجة

$\theta^{ء} \simeq ٢,٠٩٤$

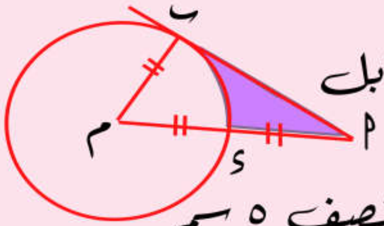
$\because ل = \theta^{ء} \times نق$

$\therefore ل = ٢,٠٩٤ \times ٢٠$

$\simeq ٤١,٨٨$

مثال ٣

في الشكل المقابل



م دائرة طول نصف قطرها ٥ سم

رسم $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة عند ب

، $\overline{أم}$ تقطع الدائرة في ء بحيث أء = ءم

إحسب محيط الشكل المظلل

الحل

∵ أء = ءم = م ب = ٥ سم

∴ أم = ١٠

∵ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة عند ب

ق(∠أ ب م) = ٩٠°

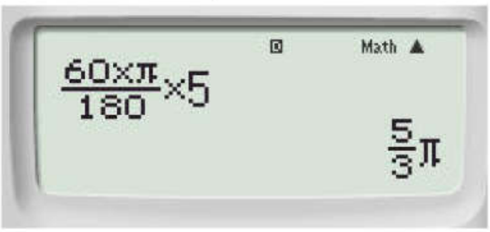
$\therefore$ جتا م $= \frac{ب م}{أ م} = \frac{٥}{١٠} = \frac{١}{٢}$

∴ ق(∠ أ م ب) = ٦٠°

، ∵ طول $\overset{\frown}{ء ب} = \theta^{ء} \times$ نق

$\therefore$ طول $\overset{\frown}{ء ب} = \frac{\quad}{١٨٠^\circ} \times ٥$

$= \frac{٥}{٣}\pi$ سم



∵ Δ أ ب م قائم الزاوية فى ب

من نظرية فيثاغورث

∴ $أ ب = \sqrt{(أ م)^2 - (ب م)^2}$

$= \sqrt{(١٠)^2 - (٥)^2}$

$= \sqrt{١٠٠ - ٢٥}$

$= \sqrt{٧٥} = ٥\sqrt{٣}$

∵ محيط الشكل المظلل

= أ ب + أ ء + طول $\frown{ب ء}$

$= ٥\sqrt{٣} + ٥ + \frac{٥}{٣}\pi$

$= ٥\left(\sqrt{٣} + ١ + \frac{\pi}{٣}\right)$ سم

$\simeq ١٨,٨٩$ سم

مثال ٤

مثلث قياس إحدى زواياه ٧٠° وقياس زاوية أخرى منه $\frac{\pi}{٣}$

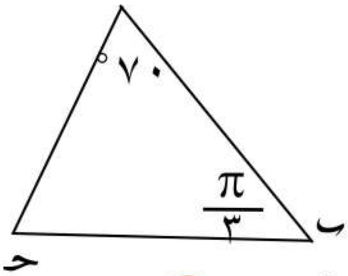
أوجد :

القياس الستينى والقياس الدائرى للزاوية الثالثة

الحل

فى Δ أ ب حـ

نفرض أن



ق (∠ أ) = ٧٠° ← ١

، ق (∠ ب) = $\frac{\pi}{٣}$

نوجد القياس الستينى للزاوية ب

ق (∠ ب) = $\frac{\frac{\cancel{\pi}}{٣} \quad ١٨٠°}{\cancel{\pi}}$ = ٦٠° ← ٢

مجموع قياسات الزوايا المثلث الداخلة

= ١٨٠°

ق (∠ حـ) = ١٨٠° − (٦٠° + ٧٠°)

= ٥٠°

∴ ق (∠ حـ) = $\frac{٥٠° \times \pi}{١٨٠°}$

$\frac{٥}{١٨}\pi$

∴ ق (∠ حـ) = ٠,٨٧ ء

ملحوظة

الزاوية التى قياسها ١٨٠° قياسها الدائرى يساوى π

∴ إذا كانت الزاوية الموجهة بدلالة π لتحويلها إلى قياس ستينى مباشرة بدون تطبيق القانون نحول π إلى ١٨٠°

مثال ٥

أوجد القياس الستينى للزاوية الموجهة التى قياساتها كالتالى

① $\frac{٥\pi}{٣}$

الحل

القياس الستينى = $\frac{٥\cancel{\pi}}{٣} \times \frac{١٨٠^\circ}{\cancel{\pi}}$

$= \frac{٥ \times ١٨٠^\circ}{٣} = ٣٠٠^\circ$

---

② ٠,٧٥

الحل

القياس الستينى = $\frac{١٨٠^\circ \times ٠,٥٧}{\pi}$

$= ٣٢^\circ\ ٣٩'\ ٣١''$

مثال ٦

△ أ ب حـ فيه : ق(∠أ) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ب) = $\frac{١}{٣}$ ق(∠حـ)

أوجد القياس الستيني و الدائري لزاوية حـ

الحل

نفرض أن :

ق(∠أ) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ب) = $\frac{١}{٣}$ ق(∠حـ) = ك

∴ ق(∠أ) = ك ← ①

، $\frac{١}{٢}$ ق(∠ب) = ك

∴ ق(∠ب) = ٢ك ← ①

، $\frac{١}{٣}$ ق(∠حـ) = ك

∴ ق(∠حـ) = ٣ك ← ①

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق(∠أ) + ق(∠ب) + ق(∠حـ) = ١٨٠°

∴ ك + ٢ك + ٣ك = ١٨٠

ك + ٢ك + ٣ك = ١٨٠

∴ ٦ك = ١٨٠°

∴ ك = ٣٠°

∵ ق(∠حـ) = ٣ك

∴ ق(∠حـ) = ٣ × ٣٠° = ٩٠°

∴ ق ∠حـ = $\frac{٩٠ \times \pi}{١٨٠^\circ} = \frac{\pi}{٢}$

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :

(١) الزاوية التى قياسها $\frac{25\pi}{9}$ تقع فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(٢) الزاوية التى قياسها $\frac{31\pi}{6}$ تقع فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(٣) الزاوية التى قياسها $\frac{-9\pi}{4}$ تقع فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(٤) إذا كان القياس الستينى لزاوية $43^\circ\ 12'$ فإن قياسها الدائرى = ...

(أ) 0.24° (ب) 0.24π (جـ) 0.28° (د) 0.28π

(٥) الزاوية التى قياسها $\frac{8\pi}{3}$ قياسها الستينى يساوى ....

(أ) 540° (ب) 820° (جـ) 150° (د) 480°

(٦) طول القوس فى دائرة طول قطرها ١٢ سم ويقابل زاوية مركزية قياسها 60° يساوى .... سم.

(أ) 5π (ب) 4π (جـ) 3π (د) 2π

(٧) القوس الذى طوله 5π سم فى دائرة طول نصف قطرها ١٥ سم يقابل زاوية مركزية قياسها يساوى ....

(أ) 30° (ب) 60° (جـ) 90° (د) 180°

(٨) إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث 75° وقياس زاوية أخرى $\frac{\pi}{3}$ فإن القياس الدائرى للزاوية الثالثة يساوى ....

(أ) $\frac{\pi}{3}$ (ب) $\frac{\pi}{4}$ (جـ) $\frac{\pi}{6}$ (د) $\frac{5\pi}{12}$

(٩) إذا كان مجموع قياسات زوايا أى مضلع منتظم تساوى $180^\circ \times (n-2)$ حيث n عدد الأضلاع ، فإن قياس زاوية الشكل الخماسى المنتظم بالقياس الدائرى تساوى ....

(أ) $\frac{\pi}{3}$ (ب) $\frac{7\pi}{2}$ (جـ) $\frac{3\pi}{5}$ (د) $\frac{2\pi}{3}$

(١٠) مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعى بالتقدير الدائرى تساوى ....

(أ) 2π (ب) π (جـ) $\frac{3\pi}{2}$ (د) 3π

(١١) فى الدائرة التى طول نصف قطرها وحدة الأطوال قياس الزاوية المركزية بالتقدير الدائرى يساوى ....

(أ) $\frac{1}{4}$ طول قوسها. (ب) $\frac{1}{2}$ طول قوسها.

(جـ) طول قوسها. (د) ضعف طول قوسها.

(١٢) إذا كان طول قوس من دائرة يساوى $\frac{3}{8}$ محيطها فإن الزاوية المركزية التى تقابل هذا القوس قياسها الستينى ....

(أ) 30° (ب) $67^\circ\ 30'$ (جـ) 135° (د) 43° تقريبًا.

٢ أوجد بدلالة π القياس الدائرى لكل من الزوايا التى قياساتها كالآتى :

(١) 135°	(٢) 90°	(٣) 300°	(٤) -235°
(٥) -210°	(٦) $112^\circ\ 30'$	(٧) 390°	(٨) 780°

٣ أوجد القياس الدائرى لكل من الزوايا التى قياساتها الستينية كالآتى مقربًا الناتج لثلاثة أرقام عشرية :

(١) 58°	(٢) 56.6°	(٣) $37^\circ\ 15'$
(٤) $115^\circ\ 38'\ 9''$	(٥) $257^\circ\ 54'$	(٦) $160^\circ\ 50'\ 48''$

٤ أوجد القياس الستينى (بالدرجات والدقائق والثوانى) لكل من الزوايا التى قياساتها الدائرية كالآتى :

(١) $\frac{11}{15}\pi$	(٢) 0.72π	(٣) $0.49^{\text{د}}$
(٤) $-1.67^{\text{د}}$	(٥) $2.27^{\text{د}}$	(٦) $-3\frac{1}{2}^{\text{د}}$

٥

٦ أوجد طول نصف قطر الدائرة المرسوم بها زاوية مركزية قياسها (θ) وطول القوس المحصور (ل) فى كل من الحالات الآتية :

(١) $\theta = \frac{9}{8}\pi$ ، ل = ٢٢,٥ سم	(٢) $\theta = 0.767^{\text{د}}$ ، ل = ٣٨,٣٥ سم
(٣) $\theta = 139^\circ$ ، ل = ٢٤,٣٢٥ سم	(٤) $\theta = 78^\circ\ 36'\ 26''$ ، ل = ٤٣,٩٢ سم

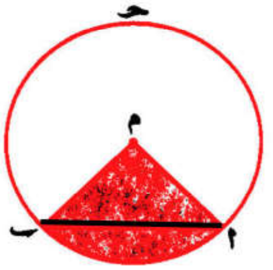
٧ **أوجد لأقرب جزء من عشرة من السنتيمتر طول قوس من دائرة طول نصف قطرها (نق) ويقابل زاوية مركزية قياسها θ فى كل من الحالات الآتية :**

① نق = ١٢,٥ سم ، θ = ١,٦ ء	② نق = ٧,٥ سم ، θ = ٦٧° ٤٠َ
③ نق = ٢٠ سم ، θ = ٢,٤٣ ء	④ نق = ١٥ سم ، θ = ١٠٤° ٥٨َ ٩ً

٨ **أوجد محيط الدائرة التى فيها قوس طوله ١٢ سم ويقابل زاوية محيطية قياسها ٤٥°**

٩ شكل رباعى قياس إحدى زواياه $\frac{١١}{٦}$ ء وقياس زاوية أخرى منه ٢ $\frac{٤}{٩}$ ء وقياس زاوية ثالثة منه ٤٥° أوجد القياس الستينى والقياس الدائرى لزاويته الرابعة. ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

١٠



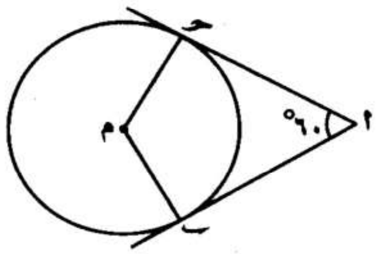
فى الشكل المقابل إذا كان مساحة المثلث م أ ب القائم الزاوية فى م = ٣٢ سم²

فأوجد محيط الشكل المظلل مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين.

١١ **فى الشكل المقابل :** $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أحـ}$ مماسان للدائرة م

، ق (∠ حـ أ ب) = ٦٠° ، أ ب = ١٢ سم.

أوجد لأقرب عدد صحيح طول القوس الأكبر $\frown{بحـ}$



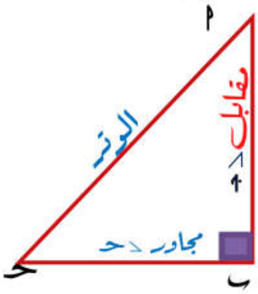
الدوال المثلثية

الدوال المثلثية للزاوية الحادة

تذكر أن :

إذا كان : △ أ ب ح قائم الزاوية في ∠ ب

فإن كلاً من أ ، ح حادتين



فإن الدوال المثلثية للزاوية ح هي

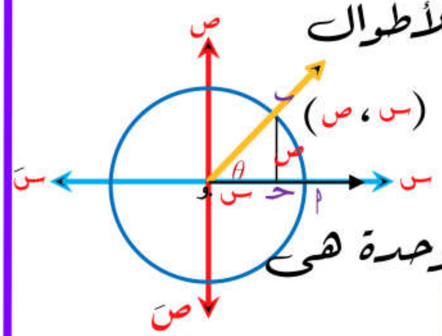
١) حتا ح = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ب ح}}{\text{أ ح}}$

٢) حا ح = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ح}}$

٣) طا ح = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب ح}}$

دائرة الوحدة

هي دائرة مركزها نقطة الأصل في نظام إحداثي متعامد وطول نصف قطرها وحدة الأطوال



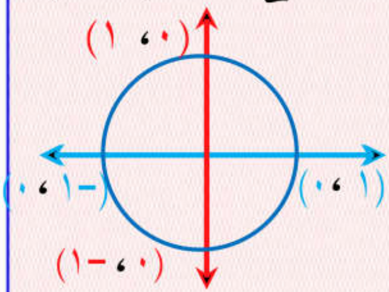
، معادلة دائرة الوحدة هي

$\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 1$

ملاحظات مهمة

١ دائرة الوحدة تقطع محاور الإحداثيات في النقط

(١ ، ٠)
(٠ ، ١)
(−١ ، ٠)
(٠ ، −١)



∴ فإن :

- س ∈ [−١ ، ١]
- ص ∈ [−١ ، ١]

٢ لأي نقطة (س ، ص) تقع على دائرة الوحدة فإنها تحقق معادلتها

$\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 1$

مثال ١

إذا كانت النقطة (٣ أ ، ٤ أ) ، أ > ٠ تقع على دائرة الوحدة أوجد : قيمة أ

الحل

∵ النقطة (٣ أ ، ٤ أ) تقع على دائرة الوحدة

∴ تحقق معادلتها $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 1$

∴ $(3\text{أ})^2 + (4\text{أ})^2 = 1$

∴ $9\text{أ}^2 + 16\text{أ}^2 =$

∴ $25\text{أ}^2 = 1$ ∴ $\text{أ} = \frac{1}{25}$

∴ م = ± $\sqrt{\frac{١}{٢٥}}$ ∴ م = ± $\sqrt{\frac{١}{٥}}$

∵ م > ٠   ∴ م = $\sqrt{\frac{١}{٥}}$

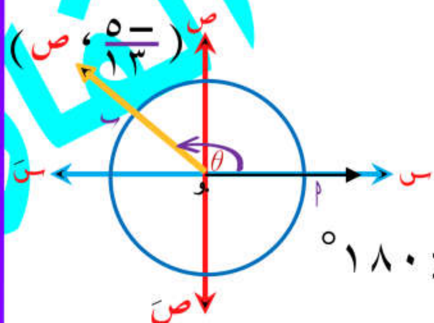
مثال ٢

إذا كان θ هو قياس زاوية موجهة فى الوضع القياسى ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة $(\frac{-٥}{١٣}$ ، ص$)$

حيث : ٩٠ < θ < ١٨٠

أوجد قيمة : ص

الحل



∵ ٩٠° < θ < ١٨٠°

∴ تقع فى الربع الثانى

∴ ص > ٠

، ∵ النقطة $(\frac{-٥}{١٣}$ ، ص$)$ تقع على دائرة الوحدة

∴ $(\frac{-٥}{١٣})^٢$ + (ص)^٢ = ١

∴ $\frac{٢٥}{١٦٩}$ + ص^٢ = ١

∴ ص^٢ = ١ − $\frac{٢٥}{١٦٩}$

∴ ص^٢ = $\frac{١٤٤}{١٦٩}$ ∴ ص = ± $\sqrt{\frac{١٤٤}{١٦٩}}$

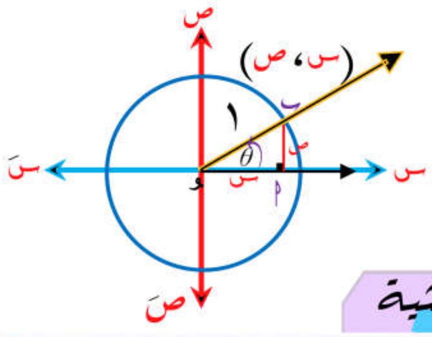
∴ ص = ± $\frac{١٢}{١٣}$ ، ∵ ص > ٠

∴ ص = $\frac{١٢}{١٣}$

الدوال المثلثية

إذا كان : θ هو قياس زاوية موجهة فى الوضع القياسى ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة (س ، ص)

فإن :



الدوال المثلثية

١) حتا θ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{س}}{١}$ = س   cosθ

∴ حتا θ = الإحداثى السينى لنقطة ب

٢) حا θ = $\frac{\text{القابل}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{ص}}{١}$ = ص

∴ حا θ = الإحداثى الصادى لنقطة ب   sinθ

٣) طا θ = $\frac{\text{القابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ tanθ

∴ طا θ = $\frac{\text{الإحداثى الصادى للنقطة ب}}{\text{الإحداثى السينى للنقطة ب}}$

فمثلاً :

إذا كانت : θ قياس زاوية موجهة فى الوضع القياسى ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب $\left(\frac{٣}{٥} ، \frac{٤}{٥}\right)$

فإن :

① جتا θ = س = $\frac{٣}{٥}$

② جا θ = ص = $\frac{٤}{٥}$

③ طا θ = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{٤}{٣}$

مثال ٣

إذا كانت : θ هو قياس زاوية موجهة فى الوضع القياسى يقطع ضلعها النهائى دائرة الوحدة فى النقطة ب (-٠,٦ ، ص) حيث : θ ∈]١٨٠° ، ٢٧٠°[فأوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية التى قياسها θ

الحل

∵ ١٨٠° < θ < ٢٧٠°

تقع فى الربع الثالث

∴ ص < ٠

، ∵ النقطة ب (-٠,٦ ، ص) تقع على دائرة الوحدة

∴ س² + ص² = ١

∴ (-٠,٦)² + (ص)² = ١

∴ ٠,٣٦ + ص² = ١

∴ ص² = ١ - ٠,٣٦

∴ ص² = ٠,٦٤ ∴ ص = ± $\sqrt{٠,٦٤}$

∴ ص = ± ٠,٨ ، ∵ ص < ٠

∴ ص = -٠,٨

∴ نقطة تقاطع الضلع النهائى مع دائرى الوحدة هى ب (-٠,٦ ، -٠,٨) فيكون

① جتا θ = س = -٠,٦

② جا θ = ص = -٠,٨

③ طا θ = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{-٠,٨}{-٠,٦}$ = $\frac{٤}{٣}$

مقلوبات الدوال المثلثية

مقلوبات الدوال المثلثية

① قاطع الزاوية θ = قا θ = $\frac{١}{جتا\ \theta}$ — $\sec\theta$

② قاطع تمام الزاوية θ = قتا θ = $\frac{١}{جا\ \theta}$ — $\csc\theta$

③ ظل تمام الزاوية θ = ظتا θ = $\frac{١}{طا\ \theta}$ — $\cot\theta$

مثال ٤

إذا كانت: θ قياس زاوية موجهة فى الوضع القياسى ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب $\left(\frac{٥}{١٣} ، \frac{١٢}{١٣}\right)$ فأوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية θ ومقلوباتها

الحل

① جتا θ = س = $\frac{٥}{١٣}$

ومقلوبها

قا θ = $\frac{١}{\text{جتا}\ \theta}$ = $\frac{١}{\text{س}}$ = $\frac{١٣}{٥}$

② جا θ = ص = $\frac{١٢}{١٣}$

ومقلوبها

قتا θ = $\frac{١}{\text{جا}\ \theta}$ = $\frac{١}{\text{ص}}$ = $\frac{١٣}{١٢}$

③ ظا θ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ = $\frac{١٢}{٥}$

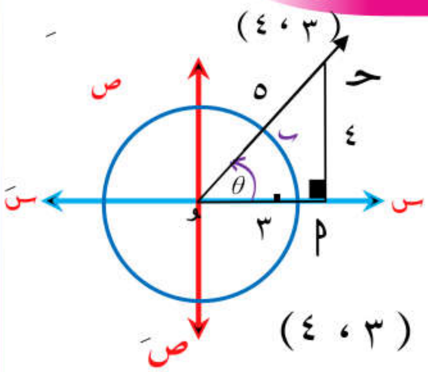
ومقلوبها

ظتا θ = $\frac{١}{\text{ظا}\ \theta}$ = $\frac{\text{جتا}\ \theta}{\text{جا}\ \theta}$ = $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ = $\frac{٥}{١٢}$

مثال ٥

إذا كانت: قياس زاوية موجهة فى الوضع القياسى والنقطة (٣ ، ٤) تقع على ضلعها النهائى أوجد نقطة تقاطع ضلعها النهائى مع دائرة الوحدة ثم أوجد جميع الدوال المثلثية ومقلوباتها للزاوية θ

الحل



∵ النقطة ح (٣ ، ٤) تقع على الضلع النهائى للزاوية

∴ و أ = ٣ وحدات طول

، أ ح = ٤ وحدات طول

∴ و ح = ٥ وحدات طول

∴ جتا θ = $\frac{٣}{٥}$ ، جا θ = $\frac{٤}{٥}$

نقطة ب $\left(\frac{٣}{٥} ، \frac{٤}{٥}\right)$ هى نقطة تقاطع ضلعها النهائى مع دائرة الوحدة

① جتا θ = س = $\frac{٣}{٥}$ ، قا θ = $\frac{٥}{٣}$

② جا θ = ص = $\frac{٤}{٥}$ قتا θ = $\frac{٥}{٤}$

③ ظا θ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ = $\frac{٤}{٣}$ ، ظتا θ = $\frac{٣}{٤}$

∴ $\text{جتا}\,\theta = \frac{٣}{٥}$ ، $\text{حا}\,\theta = \frac{٤}{٥}$

نقطة ب $(\frac{٣}{٥} ، \frac{٤}{٥})$ هى نقطة تقاطع ضلعها النهائى مع دائرة الوحدة

(١) $\text{جتا}\,\theta = \text{س} = \frac{٣}{٥}$ ، $\text{قا}\,\theta = \frac{٥}{٣}$

---

(٢) $\text{حا}\,\theta = \text{ص} = \frac{٤}{٥}$ $\text{قتا}\,\theta = \frac{٥}{٤}$

---

(٣) $\text{طا}\,\theta = \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{٤}{٣}$ ، $\text{ظتا}\,\theta = \frac{٣}{٤}$

مثال ٦

إذا كان الضلع النهائى لزاوية موجهة فى الوضع القياسى قياسها θ يقطع دائرة الوحدة فى النقطة (٢أ ، أ) ، أ > ٠

أوجد قيمة أ

أوجد قيمة المقدار :

$١ + \text{طا}^٢\theta - \text{قا}^٢\theta$

الحل

∵ النقطة ب (٢أ ، أ) تقع على دائرة الوحدة

∴ $\boxed{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = ١}$

∴ $(٢\text{أ})^٢ + (\text{أ})^٢ = ١$

∴ $٤\text{أ}^٢ + \text{أ}^٢ = ١$

∴ $٥\text{أ}^٢ = ١$

∴ $\text{أ}^٢ = \frac{١}{٥}$ ∴ $\text{أ} = \pm\sqrt{\frac{١}{٥}}$

∵ أ > ٠ ،

∴ $\text{أ} = \sqrt{\frac{١}{٥}} = \frac{١}{\sqrt{٥}}$

∴ النقطة هى $(\frac{٢}{\sqrt{٥}} ، \frac{١}{\sqrt{٥}})$

(١) $\text{جتا}\,\theta = \text{س} = \frac{٢}{\sqrt{٥}}$

ومقلوبها

$\text{قا}\,\theta = \frac{١}{\text{جتا}\,\theta} = \frac{١}{\text{س}} = \frac{\sqrt{٥}}{٢}$

---

(٢) $\text{حا}\,\theta = \text{ص} = \frac{١}{\sqrt{٥}}$

ومقلوبها

$\text{قتا}\,\theta = \frac{١}{\text{حا}\,\theta} = \frac{١}{\text{ص}} = \sqrt{٥}$

---

(٣) $\text{طا}\,\theta = \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{١}{٢}$

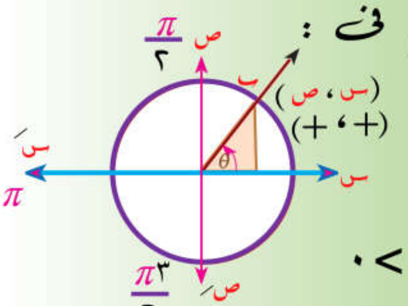
ومقلوبها

$\text{ظتا}\,\theta = \frac{١}{\text{طا}\,\theta} = \frac{\text{جتا}\,\theta}{\text{حا}\,\theta} = \frac{\text{س}}{\text{ص}} = ٢$

إشارات الدوال المثلثية

إذا كانت: θ قياس زاوية موجهة فى الوضع القياسى ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب(س، ص)

إذا كانت θ تقع فى :



١ الربع الأول

فإن :

- س > ٠ ، ص > ٠
- الضلع النهائى يقع بين $\overrightarrow{\text{و س}}$ ، $\overrightarrow{\text{و ص}}$
- $\theta \in$]٠ ، ٩٠[أ، $\theta \in$]٠ ، $\frac{\pi}{2}$[
- كل النسب المثلثية للزاوية θ اشارتها موجبة

مثال ٧

عين إشارة كل من :

١ حا ٥٠° ٢ قا ٧٠°

الحل

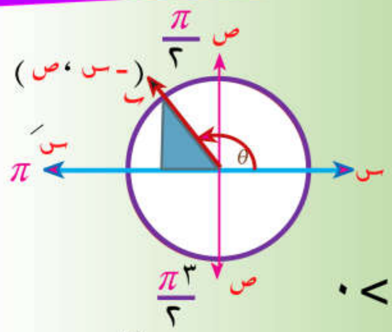
١ ∵ ٥٠° تقع فى الربع الأول

∴ إشارة حا ٥٠° موجبة

----

٢ ∵ ٧٠° تقع فى الربع الأول

∴ إشارة قا ٧٠° موجبة



٢ الربع الثانى

- س < ٠ ، ص > ٠
- الضلع النهائى يقع بين $\overrightarrow{\text{و س}'}$ ، $\overrightarrow{\text{و ص}}$
- $\theta \in$]٩٠ ، ١٨٠[أ، $\theta \in$]$\frac{\pi}{2}$ ، π[
- إشارة كل من : حا θ ، قتا θ موجبتان

وباقى النسب المثلثية للزاوية θ تكون سالبة

مثال ٨

عين إشارة كل من :

١ حتا ١٢٠°

الحل

∵ ١٢٠° تقع فى الربع الثانى

∴ إشارة حتا ١٢٠° سالبة

----

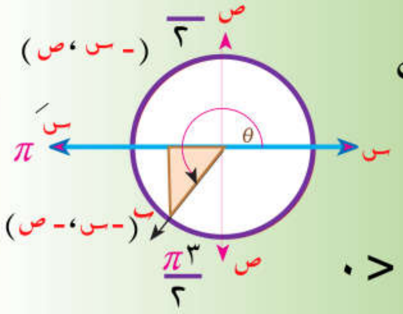
٢ قتا ١٧٠°

الحل

∵ ١٧٠° تقع فى الربع الثانى

∴ إشارة قتا ١٧٠° موجبة

٣ الربع الثالث



- س < ٠ ، ص < ٠
- الضلع النهائى يقع بين و س َ ، و ص َ

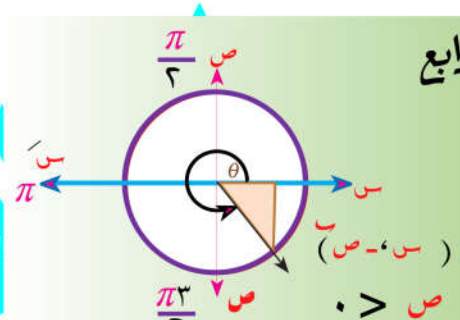
θ ∈]١٨٠ ، ٢٧٠[أ، θ ∈]π ، $\frac{٣\pi}{٢}$[

- إشارة كل من :

ظا θ ، ظتا θ موجبتان

وباقى النسب المثلثية للزاوية θ تكون سالبة

٤ الربع الرابع



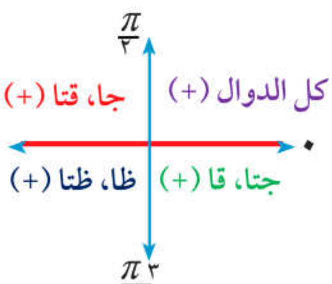
- س > ٠ ، ص < ٠
- الضلع النهائى يقع بين و س ، و ص َ

θ ∈]١٨٠ ، ٢٧٠[أ، θ ∈]$\frac{٣\pi}{٢}$ ، ٢π[

- إشارة كل من :

جتا θ ، قا θ موجبتان

وباقى النسب المثلثية للزاوية θ تكون سالبة



الضلع النهائى يقع فى الربع	الفترة التى يقع فيها قياس الزاوية	إشارات الدوال المثلثية		
		جا، قتا	جتا، قا	ظا، ظتا
الأول	]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[	+	+	+
الثانى	]$\frac{\pi}{٢}$ ، π[	+	−	−
الثالث	]π ، $\frac{٣\pi}{٢}$[	−	−	+
الرابع	]$\frac{٣\pi}{٢}$ ، ٢π[	−	+	−

مثال ٩

عين إشارة النسب المثلثية الآتية :

١) جا ٤٧٠° ٢) قا(−٣٠°)

٣) قتا $\frac{٥\pi}{٣}$ ٤) طا ٣٨٥٠°

الحل

١) ∵ الزاوية ٤٧٠° تكافئ الزاوية

٤٧٠° − ٣٦٠° = ١١٠°

∴ ٤٧٠° تقع فى الربع الثانى

∴ إشارة جا ٤٧٠° موجبة

٢) ∵ الزاوية ٤٧٠° تكافئ الزاوية

(−٣٠°) تكافئ زاوية

−٣٠ + ٣٦٠° = ٣٣٠

∵ الزاوية −٣٠° تقع فى الربع الرابع

∴ قا(−٣٠°) موجبة

٣) القياس الستينى للزاوية $\frac{٥\pi}{٣}$

يساوى $\frac{٥ \times ١٨٠}{٣}$ = ٣٠٠°

∴ الزاوية تقع فى الربع الرابع

∴ قتا $\frac{5\pi}{3}$ سالبة

④ طا ٣٨٥٠°

∵ الزاوية ٣٨٥٠° تكافئ الزاوية

٣٨٥٠° − ١٠ × ٣٦٠° = ٢٥٠°

∴ الزاوية ٣٨٥٠° تقع فى الربع الثالث

مثال ١٠

إذا كان : $\theta \in$] ٠ ، $\frac{\pi}{2}$ [، جتا θ = ٠,٦

فأوجد قيمة المقدار : قتا^2 θ − طتا^2 θ

الحل

∵ جتا θ = ٠,٦

نفرض أن الضلع النهائى للزاوية θ يقطع دائرة الوحدة فى النقطة (٠,٦ ، ص) ، θ تقع فى الربع الأول

∴ ص > ٠

∵ س^2 + ص^2 = ١

∴ (٠,٦)^2 + (ص)^2 = ١

∴ ٠,٣٦ + ص^2 = ١

∴ ص^2 = ١ − ٠,٣٦

∴ ص^2 = ٠,٦٤ ∴ ص = ± $\sqrt{٠,٦٤}$

∴ ص = ± ٠,٨ ، ∵ ص > ٠

ص = ٠,٨

∴ ب (٠,٦ ، ٠,٨)

∵ طتا θ = $\frac{س}{ص}$ = $\frac{٠,٦}{٠,٨}$ = $\frac{٣}{٤}$

، قتا θ = $\frac{١}{ص}$ = $\frac{١}{٠,٨}$ = $\frac{٥}{٤}$

∴ المقدار = قتا^2 θ − طتا^2 θ

= $(\frac{٥}{٤})^2 - (\frac{٣}{٤})^2$

= $\frac{٢٥}{١٦} - \frac{٩}{١٦}$

= $\frac{١٦}{١٦}$

= ١

مثال ١١

إذا كانت : ١٨٠° ⩽ θ ⩽ ٢٧٠°

، وكان ظا θ = $\frac{٧}{٢٤}$ أوجد قيمة جميع النسب المثلثية للزاوية

الحل

∵ ١٨٠° ⩽ θ ⩽ ٢٧٠°

∴ θ تقع فى الربع الثالث

∴ ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى (−س ، −ص)

∵ $\text{طا}\ \theta = \frac{٧}{٢٤}$

∴ $\frac{-\text{ص}}{-\text{س}} = \frac{٧}{٢٤}$ ، $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{٧}{٢٤}$

ص = ٧ ك ، س = ٢٤ ك ، ك > ٠

∵ $\boxed{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = ١}$

∴ $(٢٤\ \text{ك})^٢ + (٧\ \text{ك})^٢ = ١$

$٥٧٦\ \text{ك}^٢ + ٤٩\ \text{ك}^٢ = ١$

∴ $٦٢٥\ \text{ك}^٢ = ١$

∴ $\text{ك}^٢ = \frac{١}{٦٢٥}$

∴ $\text{ك} = \pm \frac{١}{٢٥}$ ، ∵ ك > ٠

∴ $\text{ك} = \frac{١}{٢٥}$

النقطة هي $\left(-\frac{٢٤}{٢٥} ، -\frac{٧}{٢٥}\right)$

(١) $\text{حتا}\ \theta = \text{س} = -\frac{٢٤}{٢٥}$

ومقلوبها

$\text{قا}\ \theta = \frac{١}{\text{حتا}\ \theta} = \frac{١}{\text{س}} = -\frac{٢٥}{٢٤}$

(٢) $\text{حا}\ \theta = \text{ص} = -\frac{٧}{٢٥}$

ومقلوبها

$\text{قتا}\ \theta = \frac{١}{\text{حا}\ \theta} = \frac{١}{\text{ص}} = -\frac{٢٥}{٧}$

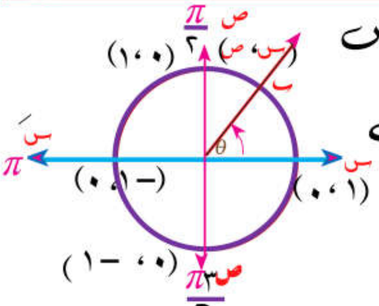
(٣) $\text{طا}\ \theta = \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{٧}{٢٤}$

ومقلوبها

$\text{طتا}\ \theta = \frac{١}{\text{طا}\ \theta} = \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{٢٤}{٧}$

الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

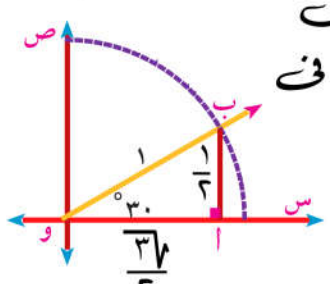
إذا كان: θ هو قياس زاوية موجهة فى الوضع القياسى ، ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب (س ، ص)



(١) الزوايا الربعية

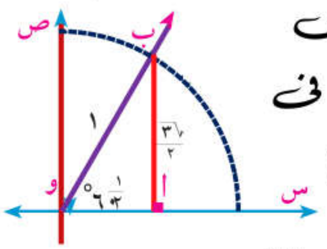
قياس الزاوية	النقطة على دائرة الوحدة	قيم الدوال المثلثية: حتا θ	حا θ	طا θ
٠° أو ٣٦٠°	(١ ، ٠)	١	٠	٠
٩٠°	(٠ ، ١)	٠	١	غير معرف
١٨٠°	(−١ ، ٠)	−١	٠	٠
٢٧٠°	(٠ ، −١)	٠	−١	غير معرف

(٢) إذا كانت θ = ٣٠° $\left(\frac{\pi}{٦}\right)$ فإن ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{١}{٢}\right)$



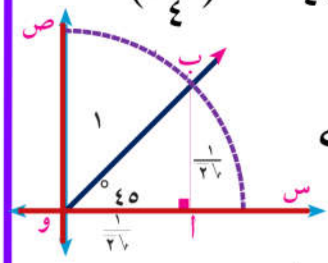
$\text{حتا}\ ٣٠° = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\text{حا}\ ٣٠° = \frac{١}{٢}$ ، $\text{طا}\ ٣٠° = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

(٣) إذا كانت θ = ٦٠° $\left(\frac{\pi}{٣}\right)$ فإن ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة $\left(\frac{١}{٢} ، \frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$



$\text{حتا}\ ٦٠° = \frac{١}{٢}$ ، $\text{حا}\ ٦٠° = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\text{طا}\ ٦٠° = \sqrt{٣}$

(٢) إذا كانت θ = ٤٥° $\left(\frac{\pi}{4}\right)$



فإن ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} ، \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

جتا ٤٥° = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، جا ٤٥° = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، ظا ٤٥° = ١

مثال ١٢

أثبت صحة المتطابقة الآتية :

جا ٦٠° جتا ٣٠° − جتا ٦٠° جا ٣٠° = جا² $\frac{\pi}{4}$

الحل

الطرف الأيمن

= جا ٦٠° جتا ٣٠° − جتا ٦٠° جا ٣٠°

= $\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

= $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}$

= $\frac{2}{4}$

= $\frac{1}{2}$ ⟵ ①

∵ الطرف الأيسر = جا² $\frac{\pi}{4}$

= جا² ٤٥°

= $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

= $\frac{1}{2}$ ⟵ ②

من ① ، ② ينتج أن الطرفين متساويان

جا ٦٠° جتا ٣٠° − جتا ٦٠° جا ٣٠° = جا² $\frac{\pi}{4}$

مثال ١٣

بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة كل مما يأتى :

(١) جا ٣٠° جتا ٦٠° + جا ٩٠° − جتا² ٤٥°

الحل

∵ المقدار

= جا ٣٠° جتا ٦٠° + جا ٩٠° − جتا² ٤٥°

= $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

= $\frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{2}$

= $\frac{3}{4}$

(٢) جتا ٣٠° ظا ٦٠° + جا² ٤٥° − جتا ١٨٠°

الحل

∵ المقدار

جتا ٣٠° ظا ٦٠° + جا² ٤٥° − جتا ١٨٠°

= $\frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - (-1)$

= $\frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 1$

= $\frac{4}{2} + 1$

= $2 + 1$

(٣) ظا² ٦٠° − قا² ٦٠° + جا ٩٠° + ٤ جا ٤٥° جتا ٤٥°

الحل

المقدار

= $(\sqrt{3})^2 - (2)^2 + 1 + 4 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= ٣ - ٤ + ١ + ٤ \times \frac{١}{٢}$

$= \cancel{٤} - \cancel{٤} + ٢$

$= ٢$

مثال ١٤

أثبت صحة المتطابقات التالية

(أ) جا ٣٠° جتا ٦٠° + جتا ٣٠° جا ٦٠° = جا ٩٠°

الحل

الأيمن = جا ٣٠° جتا ٦٠° + جتا ٣٠° جا ٦٠

$= \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$= \frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤}$

$= \frac{٤}{٤}$

= ١ ← (١)

الأيسر = جا ٩٠° = ١ ← (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن الطرفين متساويان

(ب) $\frac{\text{جتا } ٣٠° \text{ جتا } ٤٥° - \text{جا } ٤٥° \text{ جا } ٣٠°}{\text{جا } ٤٥° \text{ جتا } ٣٠° - \text{جتا } ٤٥° \text{ جا } ٣٠°} = ١$

الحل

الأيمن = $\frac{\text{جتا } ٣٠° \text{ جتا } ٤٥° - \text{جا } ٤٥° \text{ جا } ٣٠°}{\text{جا } ٤٥° \text{ جتا } ٣٠° - \text{جتا } ٤٥° \text{ جا } ٣٠°}$

$= \frac{\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{٢}}{\frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{٢}}$

$= \frac{\frac{\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٢}} - \frac{١}{٢\sqrt{٢}}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٢}} - \frac{١}{٢\sqrt{٢}}}$ ∵ البسط = المقام

= ١ = الأيسر

مثال ١٥

بدون استخدام حاسبة الجيب اوجد قيمة س إذا كان :

(١) س = جتا² ٣٠° ظا² ٣٠° ظا² ٤٥°

الحل

$س = (\frac{\sqrt{٣}}{٢})^٢ \times (\frac{١}{\sqrt{٣}})^٢ \times (١)^٢$

∴ $س = \frac{٣}{٤} \times \frac{١}{٣} \times ١$

∴ $س = \frac{١}{٤}$

(٢) س² = ٣ جتا ٦٠° − ٤ جا² ٣٠° + $\frac{١}{٢}$ ظا⁴ ٤٥°

الحل

∵ س² = ٣ جتا ٦٠° − ٤ جا² ٣٠° + $\frac{١}{٢}$ ظا⁴ ٤٥

$س^٢ = ٣ \times \frac{١}{٢} - ٤ \times (\frac{١}{٢})^٢ + \frac{١}{٢} \times (١)^٤$

∴ $س^٢ = \frac{٣}{٢} - ١ + \frac{١}{٢}$

∴ $س^٢ = ١$

∴ $س = \pm ١$

تمارين

❶ أكمل العبارات الآتية :

(١) ظتا ٦٠° = ...

(٢) جتا ١٨٠° = ...

(٣) قتا ٩٠° = ...

(٤) ظا ٣٠° = ...

(٥) جا ٣٠° × جتا ٣٠° = ...

(٦) ظتا^{٢} ٣٠° + جا^{٢} ٤٥° = ...

(٧) ظا ٩٠° = ...

(٨) جتا ٢٧٠° = ...

(٩) إذا كان : س جا ٣٠° + جتا ١٨٠° = ٠ فإن : س = ...

(١٠) إذا كان : س^{٢} = ٢ جتا ٤٥° جا ٤٥° فإن : س = ...

❷ بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كلاً مما يأتي :

(١) ٤ جا ٣٠° ظا ٤٥° + ٢ قا^{٢} ٤٥° − ظا^{٢} ٦٠°

(٢) ٢ جا ٣٠° + ٨ جتا^{٢} ٦٠° − ظا ٤٥° جتا ١٨٠°

(٣) قا ٦٠° − ٤ جا^{٢} ٤٥° + جا ٢٧٠°

(٤) جتا ٩٠° قتا ٣٠° + قا^{٢} ٤٥° جا ٣٠° − جتا ٢٧٠° جا ١٨٠°

(٥) جا ٩٠° جتا ٣٠° − جتا ٩٠° جا ٣٠°

(٦) جتا ٩٠° قتا ٣٠° + قا^{٢} ٤٥° جا ٣٠° − جتا ٢٧٠° جا ١٨٠°

❸ إثبت بدون استخدام الآلة الحاسبة أن :

(١) جتا ٣٠° جتا ٦٠° − جا ٣٠° جا ٦٠° = جتا ٩٠°

(٢) ٢ جا ٣٠° جتا ٣٠° = جا ٦٠°

(٣) جتا ٩٠° = جتا^{٢} ٤٥° − جا^{٢} ٤٥°

(٤) جا ٩٠° = ٢ جا ٤٥° جتا ٤٥° + ٣ جتا ٢٧٠°

(٥) قتا ٦٠° ظتا ٣٠° ظا ٦٠° = ٢ قا^{٢} ٤٥° جتا ٣٠°

(٦) جتا ٦٠° = ٢ جتا^{٢} ٣٠° − ١

❹ أوجد قيمة س إذا كان :

(١) س جا^{٢} $\frac{\pi}{٤}$ جتا π = ظا^{٢} $\frac{\pi}{٣}$ جا $\frac{٣\pi}{٢}$

(٢) س جا $\frac{\pi}{٤}$ جتا $\frac{\pi}{٤}$ ظتا $\frac{\pi}{٦}$ = ظا^{٢} $\frac{\pi}{٤}$ − جتا^{٢} $\frac{\pi}{٣}$

الزوايا المنتسبة

الزاويتان المنتسبتان هما زاويتان مجموع قياسيهما أو الفرق بين قياسيهما عدد صحيح من القوائم

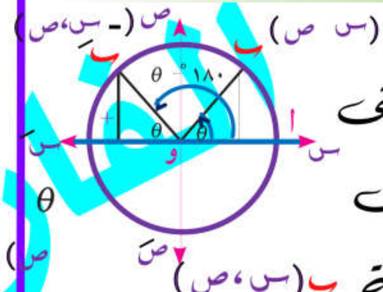
إذا كان : ء ، ب هما قياسا زاويتان منتسبتان

فإن : ء + ب = ٩٠ ن

أو ء ـ ب = ٩٠ ن

حيث ن عدد صحيح

١ الزاويتان المنتسبتان θ ، ١٨٠ ـ θ



إذا كانت الزاوية التي قياسها θ تعين على دائرة الوحدة النقطة ب (س، ص)

فإن الزاوية التي قياسها ١٨٠ ـ θ تعين على دائرة الوحدة النقطة ب َ (ـ س، ص)

ويلاحظ أن الزاويتان لهما نفس الإحداثي الصادي فيكون :

جا θ = ص ، جا (١٨٠ ـ θ) = ص

جا θ = جا (١٨٠ ـ θ) ، قتا θ = قتا (١٨٠ ـ θ)

جا زاوية = جا مكملة هذه الزاوية

إذا كان الشكل ء ب حـ ى رباعي دائري

فإن : ء + حـ = ١٨٠°

جا ء = جا حـ ، قتا ء = قتا حـ

مثال ١

إذا كان الشكل ء ب حـ ى رباعي دائري

فإن : $\frac{\text{جا ء}}{\text{جا حـ}} + \frac{\text{قتا ب}}{\text{قتا ى}} = \dots\dots\dots\dots$

(ء) ١ (ب) ـ١ (حـ) ٢ (ى) صفر

مثال ٢

أكمل : ① جا ٣٠ = جا ......

② قتا ١٠٠° = قتا ......

③ جا ٥٠° ـ ...... = ٠

④ جا (١٨٠ ـ θ) ـ ...... = ٠

الزاويتان θ ، ١٨٠ ـ θ تعينان على دائرة الوحدة النقطتان ب (س، ص) ب َ (ـ س، ص)

∴ الزاويتان تختلفان في إشارة الإحداثي السيني

∴ حتا θ = س ، حتا (١٨٠ ـ θ) = ـ س

فيكون

① حتا θ = ـ حتا (١٨٠ ـ θ)

② حتا θ + حتا (١٨٠ ـ θ) = صفر

③ إذا كان : ء + ب = ١٨٠°

حتا ء + حتا ب = صفر

مثال ٣

إذا كان الشكل ا ب حـ ء رباعى دائرى

فإن :

① $\frac{\text{حتا ا}}{\text{حتا حـ}} + \frac{\text{جا ب}}{\text{جا ء}} =$ ....

(ا) ١ (ب) −١ (حـ) ٢ (ء) صفر

② حتا ب = ...

(ا) حتاء (ب) −حتاء (حـ) حتاحـ (ء) −حتاحـ

مثال ٤

إذا كان الشكل ا ب حـ ء متوازى أضلاع

فإن : حتا ا + حتا ب + $\frac{\text{جا حـ}}{\text{جا ء}} =$ ......

مثال ٥

فى △ ا ب حـ أكمل

① جا (ا + ب) − جا حـ = ...

② حتا (ا + ب) + حتا حـ = ...

③ $\frac{\text{جا (ب + حـ)}}{\text{جا ا}} =$ ....

مثال ٦

أكمل ما يأتى :

① حتا ١٣٠° + حتا ....° = ٠

② قا ٧٠ + قا ١١٠° = ...

الزاويتان θ ، ١٨٠ − θ تعينان على دائرة الوحدة النقطتان ب(س، ص) ، بَ(−س، ص)

∴ الزاويتان تختلفان فى إشارة الإحداثى السينى

∴ طاθ = $\frac{ص}{س}$ ، طا(١٨٠° − θ) = $-\frac{ص}{س}$

فيكون

① طا θ = − طا (١٨٠° − θ)

② طا θ + طا (١٨٠° − θ) = صفر

③ إذا كان : ا + ب = ١٨٠°

، طا ا + طا ب = صفر

طتا ا + طتا ب = صفر

مثال ٧

أكمل : ① طا ٢٠° + طا ....° = ٠

② جا ١٢٠° = ...

③ حتا ١٥٠° = ...

④ قا ١٣٥° = ...

الدوال المثلثية للزاويتان : θ ، ١٨٠° − θ

① جتا (١٨٠° − θ) = − جتا θ

② جا (١٨٠° − θ) = جا θ

③ ظا (١٨٠° − θ) = − ظا θ

④ قتا (١٨٠° − θ) = قتا θ

⑤ قا (١٨٠° − θ) = − قا θ

⑥ ظتا (١٨٠° − θ) = − ظتا θ

مثال (٨)

بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة جتا ١٢٠°

متكاملتان

∵ ١٢٠ ، ٦٠

∴ جتا ١٢٠° = − جتا ٦٠

جتا ١٢٠° = $-\frac{1}{2}$

حل آخر

∵ ١٢٠° تقع فى الربع الثانى

∴ ١٢٠° = ١٨٠° − ٦٠°

∴ جتا ١٢٠° = جتا (١٨٠° − ٦٠°)

∴ جتا ١٢٠° = − جتا ٦٠°

= $-\frac{1}{2}$

مثال (٩)

إذا كانت : θ زاوية موجهة فى الوضع القياسى ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ($\frac{3}{5}$ ، $\frac{-4}{5}$)

فأكمل ما يأتى

١) جتا (١٨٠° − θ) = ...

٢) جا (١٨٠° − θ) = ...

٣) ظا (١٨٠° − θ) = ...

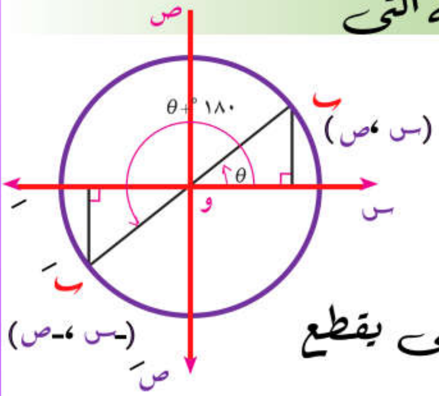
٤) قتا (١٨٠° − θ) = ...

٥) قا (١٨٠° − θ) = ...

٦) ظتا (١٨٠° − θ) = ...

٢ الدوال المثلثية للزاويتان: θ ، ١٨٠ + θ

إذا كانت الزاوية التى قياسها θ ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة النقطة ب (س ،ص)



فإن الزاوية التى قياسها (١٨٠ + θ) ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى ب َ(− س، − ص)

ونلاحظ :

١) جتا θ = س ، جتا (١٨٠° + θ) = − س

∴ جتا (١٨٠° + θ) = − جتا θ

٢) جا θ = ص ، جا (١٨٠ + θ) = − ص

∴ جا (١٨٠° + θ) = − جا θ

٣) ظا θ = $\frac{ص}{س}$ ، ظا (١٨٠° + θ) = $\frac{-ص}{-س}$ = $\frac{ص}{س}$

∴ ظا θ = ظا (١٨٠° + θ)

الخلاصة

إيجاد نسبة مثلثية للزاوية للزاوية (١٨٠° + θ) =

جا (١٨٠° + θ) = − جا θ

الربع الثالث

إشارة النسبة المثلثية فى هذا الربع

النسبة المثلثية للزاوية

مثال ١٠

إذا كانت : θ زاوية موجهة فى الوضع القياسى ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة $\left(\frac{-5}{13} ، \frac{12}{13}\right)$

فأكمل ما يأتى

١) جتا $(180° + \theta)$ = ...

٢) جا $(180° + \theta)$ = ...

٣) ظا $(180° + \theta)$ = ...

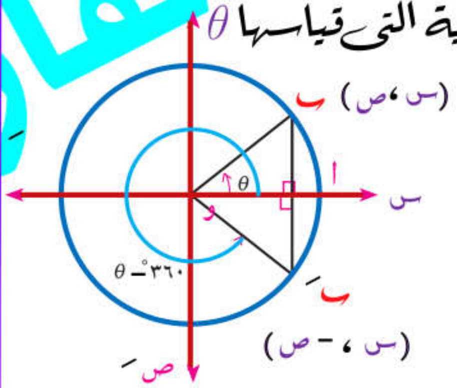
٤) قتا $(180° + \theta)$ = ...

٥) قا $(180° + \theta)$ = ...

٦) ظتا $(180° + \theta)$ = ...

٣ الدوال المثلثية للزاويتان : θ ، $360° - \theta$

إذا كانت الزاوية التى قياسها θ



ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة النقطة ب (س ، ص)

فإن الزاوية التى قياسها $(360° - \theta)$

ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى ب َ (س ، –ص)

ونلاحظ أن :

١) جتا θ = س ، جتا $(360° - \theta)$ = س

$\therefore$ جتا $(360° - \theta)$ = جتا θ

٢) جا θ = ص ، جا $(360° - \theta)$ = –ص

$\therefore$ جا $(360° - \theta)$ = – جا θ

٣) ظا $\theta = \frac{ص}{س}$ ، ظا $(180° + \theta) = \frac{-ص}{س}$

$\therefore$ ظا θ = – ظا $(360° - \theta)$

٤

الدوال المثلثية للزاويتان : θ ، $360° - \theta$

١) جتا $(360° - \theta)$ = – جتا θ

٢) جا $(360° - \theta)$ = – جا θ

٣) ظا $(360° - \theta)$ = – ظا θ

٤) قتا $(360° - \theta)$ = – قتا θ

٥) قا $(360° - \theta)$ = قا θ

٦) ظتا $(360° - \theta)$ = – ظتا θ

ملحوظة

مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعى ا ب حـ ء يساوى $360°$

$\therefore$ ا + ب + حـ + ء = $360°$

$\therefore$ ا + ب + حـ = $360° - ء$

$\therefore$ جتا (ا + ب + حـ) = جتا $(360° - ء)$
= جتا ء

مثال ١١

في أي شكل رباعي أ ب ج د يكون

$$\frac{\text{طا}(أ+ب+ج)}{\text{طا}\, د} + \frac{\text{جا}\, ب}{\text{جا}\,(أ+ج+د)} = \dots$$

مثال ١٢

بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة:

① جا ٣٠٠°

الحل

∵ ٣٠٠° تقع في الربع الرابع

∴ ٣٠٠° = ٣٦٠° − ٦٠°

∴ جا ٣٠٠° = جا (٣٦٠° − ٦٠°) = − جا ٦٠°

$= \frac{-\sqrt{3}}{2}$

② طا ٣٣٠°

الحل

∵ ٣٣٠° تقع في الربع الرابع

∴ ٣٣٠° = ٣٦٠° − ٣٠°

∴ طا ٣٣٠° = طا (٣٦٠° − ٣٠°) = − طا ٣٠°

$= -\frac{\sqrt{3}}{3}$

③ قا ٣١٥°

الحل

∵ ٣١٥° تقع في الربع الرابع

∴ ٣١٥° = ٣٦٠° − ٤٥°

∴ قا ٣١٥° = قا (٣٦٠° − ٤٥°) = قا ٤٥°

$= \sqrt{2}$

④ طا ٢١٠°

الحل

∵ ٢١٠° تقع في الربع الثالث

∴ ٢١٠° = ١٨٠° + ٣٠°

∴ طا ٢١٠° = طا (١٨٠° + ٣٠°) = طا ٣٠°

$= \frac{1}{\sqrt{3}}$

⑤ قتا ١٥٠°

الحل

∵ ١٥٠° تقع في الربع الثاني

∴ ١٥٠° = ١٨٠° − ٣٠°

∴ قتا ١٥٠° = قتا (١٨٠° − ٣٠°) = قتا ٣٠°

= ٢

⑥ حتا ٢٤٠°

الحل

∵ ٢٤٠° تقع في الربع الثاني

∴ ٢٤٠° = ١٨٠° + ٦٠°

∴ حتا ٢٤٠° = حتا (١٨٠° + ٦٠°) = − حتا ٣٠°

$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$

مثال ١٣

بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن:

جا ٦٠٠° حتا (−٣٠°) + جا ١٥٠° حتا (−٢٤٠°) = −١

الحـــل

٦٠٠° ، (−٣٠°) ، (−٢٤٠°)

٦٠٠ = ٢٤٠ + ٣٦٠

∴ الزاوية التي قياسها ٦٠٠°

تكافئ زاوية قياسها ٢٤٠°

(−٣٠°) قياسها الموجب هو ٣٣٠°

(−٢٤٠°) قياسها الموجب هو ١٢٠°

الأيمن

= حا ٦٠٠° حتا (−٣٠°) + حا ١٥٠° حتا (−٢٤٠°)

= حا ٢٤٠° حتا ٣٣٠° + حا ١٥٠° حتا ١٢٠°

= حا (١٨٠°+٦٠°) حتا (٣٦٠°−٣٠°) + حا (١٨٠°−٣٠°) حتا (١٨٠°−٦٠°)

= − حا ٦٠° حتا ٣٠° + حا ٣٠° (− حتا ٦٠°)

$= -\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}$

$= -\frac{٣}{٤} - \frac{١}{٤}$

= −١

= الايسر

تدريب

بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد

قيمة : قتا $\frac{٥\pi}{٣}$

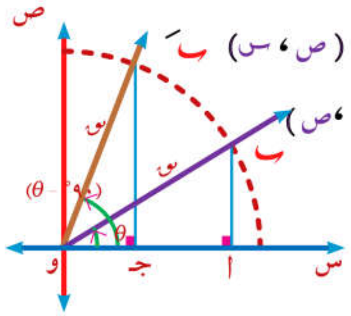
مثـــال

٤ الدوال المثلثية للزاويتان θ ، ٩٠−θ

إذا كانت الزاوية الموجهة التي قياسها θ

ضلعها النهائي

في النقطة ب (س، ص)



فإن الزاوية التي قياسها ٩٠°−θ

ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة

في النقطة ب´ (ص، س)

ونلاحظ :

١ حتا θ = س ، حا (٩٠°−θ) = س

∴ حا (٩٠°−θ) = حتا θ

٢ حا θ = ص ، حتا (٩٠°−θ) = ص

∴ حتا (٩٠°−θ) = حا θ

٣ طا θ = $\frac{ص}{س}$ ، طتا (٩٠−θ) = $\frac{ص}{س}$

∴ طتا (٩٠−θ) = طا θ

لأي زاويتين متتامتين أ ، ب فإن

■ حتا أ = حا ب	■ قا أ = قتا ب
■ حا أ = حتا ب	■ قتا أ = قا ب
■ طا أ = طتا ب	■ طتا أ = طا ب

الزاويتان : ٢٠° ، ٧٠°

هما زاويتان متتامتان

∴ جتا ٢٠° = حا ٧٠°

حا ٢٠° = جتا ٧٠°

مثال ١٤

أكمل

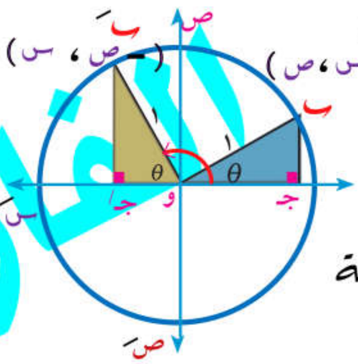
١) جتا ٥٠° − حا ٤٠° = ...

٢) $\frac{\text{قا } ٨٠°}{\text{قتا } ١٠°} - \frac{\text{طا } ١٥°}{\text{ظتا } ٧٥°}$ = ...

٣) جتا ٢٠° جتا ٢٠° − حا ٧٠° حا ٧٠° =

٥ الدوال المثلثية للزاويتان θ ، ٩٠ + θ

إذا كان الضلع النهائى للزاوية الموجهة التى قياسها θ يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب (س ، ص)



فإن الزاوية التى قياسها ٩٠° + θ ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب´ (− ص، س)

الدوال المثلثية للزاويتان: θ ، ٩٠° + θ

حا (٩٠° + θ) = جتا θ ، قتا (٩٠° + θ) = قا θ

جتا (٩٠° + θ) = − حا θ ، قا (٩٠° + θ) = − قتا θ

طا (٩٠° + θ) = − ظتا θ ، ظتا (٩٠° + θ) = − طا θ

مثال ١٥

إذا كانت : θ زاوية موجهة فى الوضع القياسى ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ($\frac{-٥}{١٣}$ ، $\frac{١٢}{١٣}$)

فأكمل ما يأتى

١) جتا (٩٠ + θ) = ...

٢) حا (٩٠ + θ) = ...

٣) ظا (٩٠ + θ) = ...

٤) قتا (٩٠ + θ) = ...

٥) قا (٩٠ + θ) = ...

٦) ظتا (٩٠ + θ) = ...

تدريب

بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد

١) جتا ١٢٠ =

٢) حا ١٥٠ =

٣) ظا ١٣٥ =

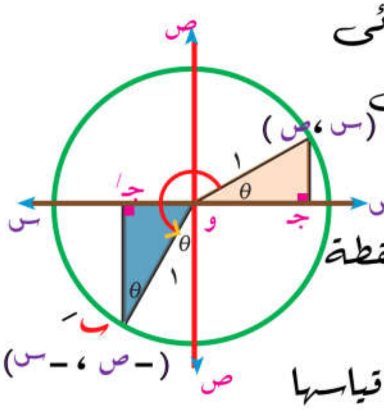
٤) قتا ١٢٠ =

٥) قا ١٥٠ =

٦) ظتا ١٣٥ =

٦ الدوال المثلثية للزاويتان: θ ، ٢٧٠ − θ

إذا كان الضلع النهائى للزاوية الموجهة التى قياسها θ يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب (س ،ص)



فإن الزاوية التى قياسها ٢٧٠° − θ ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة بَ (−ص ، −س)

الدوال المثلثية للزاويتان: θ ، ٢٧٠° − θ

حا (٢٧٠° − θ) = − جتا θ

حتا (٢٧٠° − θ) = − جا θ

طا (٢٧٠° − θ) = ظتا θ

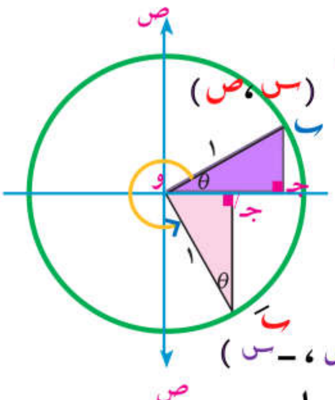
قتا (٢٧٠° − θ) = − قا θ

قا (٢٧٠° − θ) = − قتا θ

طتا (٢٧٠° − θ) = طا θ

٧ الدوال المثلثية للزاويتان: θ ، ٢٧٠ + θ

إذا كان الضلع النهائى للزاوية الموجهة التى قياسها θ يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب (س ،ص)



فإن الزاوية التى قياسها ٢٧٠° + θ ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة بَ (ص ، − س)

الدوال المثلثية للزاويتان: θ ، ٢٧٠° + θ

حا (٢٧٠° + θ) = − جتا θ

حتا (٢٧٠° + θ) = جا θ

طا (٢٧٠° + θ) = − ظتا θ

قتا (٢٧٠° + θ) = − قا θ

قا (٢٧٠° + θ) = قتا θ

طتا (٢٧٠° + θ) = طا θ

٨ الدوال المثلثية للزاويتين (θ ، −θ)

① جتا (−θ) = جتا θ

② جا (−θ) = −جا θ

③ قا (−θ) = قا θ

④ قتا (−θ) = − قتا θ

⑤ ظا (−θ) = − ظا θ

⑥ ظتا (−θ) = − ظتا θ

ملاحظات

١

الزوايا التي لها القياس : θ ، (٩٠° − θ) تقع في الربع الأول

الزوايا التي لها القياس : (٩٠° + θ) ، (١٨٠° − θ) تقع في الربع الثاني

الزوايا التي لها القياس : (١٨٠ + θ) ، (٢٧٠ − θ) تقع في الربع الثالث

الزوايا التي لها القياس (٢٧٠° + θ) ، (٣٦٠° − θ) ، (−θ) تقع في الربع الرابع.

٢) **الزوايا التي قياسها:** θ ، $(١٨٠^\circ - \theta)$ ، $(١٨٠^\circ + \theta)$ ، $(٣٦٠^\circ - \theta)$ ، $(-\theta)$

تكون نفس الدالة المثلثية لها جميعاً متساوية من حيث القيمة العددية فقط وتختلف فقط في الإشارة حسب الربع الذي تقع فيه كل منها

---

٣) **الزوايا التي قياسها:**

$(٩٠^\circ - \theta)$ ، $(٩٠^\circ + \theta)$ ، $(٢٧٠^\circ - \theta)$ ، $(٢٧٠^\circ + \theta)$

تتغير فيها الدالة المثلثية للزاوية التي قياسها " θ " بوضع حرف (ت) في الدالة التي ليس بها حرف (ت) - أو بحذف حرف (ت) من الدالة التي بها حرف (ت)

: (جتا) تصبح (جا)، (قتا) تصبح (قا) وتختلف في الإشارة حسب الربع الذي تقع فيه الزاوية قبل تغيير الدالة المثلثية

مثال ١٦

بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة

جتا ١٢٠° ظا ٣١٥° + جا ٢٤٠° ظا ٣٠٠°

الحل

جتا ١٢٠° = جتا $(١٨٠^\circ - ٦٠^\circ)$ = − جتا ٦٠° = $-\frac{١}{٢}$

ظا ٣١٥° = ظا $(٣٦٠^\circ - ٤٥^\circ)$ = − ظا ٤٥° = −١

جا ٢٤٠° = جا $(١٨٠^\circ + ٦٠^\circ)$ = − جا ٦٠° = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ظا ٣٠٠° = ظا $(٣٦٠^\circ - ٦٠^\circ)$ = − ظا ٦٠° = $-\sqrt{٣}$

∴ جتا ١٢٠° ظا ٣١٥° + جا ٢٤٠° ظا ٣٠٠°

$= (-\frac{١}{٢} \times -١) + (-\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times -\sqrt{٣}) = \frac{١}{٢} + \frac{٣}{٢} = ٢$

حل المعادلات المثلثية البسيطة

١) **إذا كان : جا α = جتا β فإن :**

- $\alpha \pm \beta = ٩٠^\circ + ٣٦٠^\circ ن$
- أ، $\alpha \pm \beta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi ن$

حيث ن عدد صحيح

---

٢) **إذا كان : قتا α = قا β فإن:**

- $\alpha \pm \beta = ٩٠^\circ + ٣٦٠^\circ ن$
- أ، $\alpha \pm \beta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi ن$

حيث ن عدد صحيح

---

٣) **إذا كان : ظا α = ظتا β فإن :**

- $\alpha + \beta = ٩٠^\circ + ١٨٠^\circ ن$
- أ، $\alpha + \beta = \frac{\pi}{٢} + \pi ن$

حيث ن عدد صحيح

مثال (١٧)

أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية

ثم أوجد قيم θ حيث $\theta \in]٠، \frac{\pi}{٢}[$

(١) $جا٤\theta = جتا٢\theta$

الحل

$\therefore ٢\theta \pm ٤\theta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi ن$

$٤\theta + ٢\theta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi ن$	$٤\theta - ٢\theta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi ن$
$\therefore ٦\theta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi ن$	$٢\theta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi ن$
بالقسمة على ٦ للطرفين	بالقسمة على ٢ للطرفين
$\therefore \theta = \frac{\pi}{١٢} + \frac{\pi}{٣} ن$	$\therefore \theta = \frac{\pi}{٤} + \pi ن$

الحل العام هو :

$\theta = \frac{\pi}{١٢} + \frac{\pi}{٣} ن$ أو $\theta = \frac{\pi}{٤} + \pi ن$

لإيجاد قيم θ

بوضع ن = ٠

$\therefore \theta = \frac{\pi}{١٢} = ١٥^\circ$ | $\theta = \frac{\pi}{٤} = ٤٥^\circ$

بوضع ن = ١

$\therefore \theta = \frac{\pi}{١٢} + \frac{\pi}{٣}$

$= ١٥^\circ + ٦٠^\circ$

$= ٧٥^\circ$

$\theta = \frac{\pi}{٤} + \pi$

$\theta = ٤٥^\circ + ١٨٠^\circ$

$= ٢٢٥^\circ$

مرفوض

لأن $\theta \in]٠، \frac{\pi}{٢}[$

بوضع ن = ٢

$\theta = \frac{\pi}{١٢} + \frac{\pi}{٣} \times ٢$

$= ١٥^\circ + ١٢٠^\circ$

$= ١٣٥$ مرفوض

$\therefore \theta \in \{١٥^\circ ، ٤٥^\circ ، ٧٥^\circ\}$

(٢) $ظا(٢\theta - ١٠^\circ) = ظتا(٣\theta + ٢٠^\circ)$

الحل

$(٢\theta - ١٠^\circ) + (٣\theta + ٢٠^\circ) = ٩٠^\circ + ١٨٠^\circ ن$

$\therefore ٥\theta + ١٠^\circ = ٩٠^\circ + ١٨٠^\circ ن$

$\therefore ٥\theta = ٨٠ + ١٨٠^\circ ن$

بالقسمة على للطرفين

$\therefore$ الحل العام هو : $\theta = ١٦^\circ + ٣٦^\circ ن$

بوضع ن = ٠ $\therefore \theta = ١٦^\circ$

بوضع ن = ١ $\therefore \theta = ١٦^\circ + ٣٦^\circ$

$\therefore \theta = ٥٢$

بوضع ن = ٢

$\therefore \theta = ١٦^\circ + ٣٦^\circ \times ٢$

$\therefore \theta = ٨٨^\circ$

بوضع ن = ٣

$\therefore \theta = ١٦^\circ + ٣٦^\circ \times ٣$

$= ١٦^\circ + ١٠٨^\circ$

$= ١٢٤$ مرفوض

لأن $\theta \in]٠، \frac{\pi}{٢}[$

$\therefore \theta \in \{١٦^\circ ، ٥٢^\circ ، ٨٨^\circ\}$

③ قتا ٥θ = قا(θ + ٣٠°)

الحل

٥θ ± (θ + ٣٠°) = ٩٠° + ٣٦٠ن

٦θ + ٣٠° = ٩٠° + ٣٦٠ن

٦θ = ٦٠ + ٣٦٠ن

بالقسمة على ٦ للطرفين

$\therefore$ θ = ١٠° + ٦٠°ن

بوضع ن = ٠ $\therefore$ θ = ١٠°

بوضع ن = ١ θ = ١٠ + ٦٠ = ٧٠°

بوضع ن = ٢ $\therefore$ θ = ١٣٠ مرفوض

٥θ − (θ + ٣٠°) = ٩٠° + ٣٦٠ن

٤θ − ٣٠° = ٩٠° + ٣٦٠ن

٤θ = ١٢٠ + ٣٦٠ن

بالقسمة على ٤ للطرفين

$\therefore$ θ = ٣٠° + ٩٠°ن

بوضع ن = ٠ $\therefore$ θ = ٣٠°

بوضع ن = ١ $\therefore$ θ = ٣٠ + ٩٠ = ١٢٠ مرفوض

$\therefore$ θ $\in$ {١٠°، ٣٠°، ٧٠°}

مثال ١٧

أوجد مجموعة حل المعادلات الأتية حيث θ $\in$ [٠، ٢ط]

① $\sqrt{3}$ ظا θ = ١

الحل

$\because$ $\sqrt{3}$ ظا θ = ١

ظا θ = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ > صفر

θ تقع في الربع الأول او الثالث

θ = ٣٠° | θ = ١٨٠° + ٣٠° = ٢١٠°

م.ح = {٣٠°، ٢١٠°}

---

② ٢ جا θ − ١ = صفر

الحل

جا θ = $\frac{1}{2}$ > صفر

θ تقع في الربع الأول او الثاني

θ = ٣٠° | θ = ١٨٠° − ٣٠° = ١٥٠°

م.ح = {٣٠°، ١٥٠°}

---

③ جا θ جتا θ = صفر

الحل

جا θ = صفر | جتا θ = صفر

θ = ٠° أ، ١٨٠° | θ = ٩٠° أ، ٢٧٠°

م.ح = {٠°، ٩٠°، ١٨٠°، ٢٧٠°}

٢جتا θ + ١ = صفر

θ تقع في الربع الثاني او الثالث

θ = ١٨٠° − ٦٠° = ١٢٠° | θ = ١٨٠° + ٦٠° = ٢٤٠°

م.ح = {١٢٠°، ٢٤٠°}

تمارين (١٣)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : ٥ $جتا\,(٩٠^\circ - \theta) = ٤$ ، $٠^\circ < \theta < ٩٠^\circ$ فإن : $جا\,\theta = ...$

(أ) $\frac{٥}{٤}$ (ب) $\frac{-٣}{٥}$ (جـ) $\frac{٤}{٥}$ (د) $\frac{٣}{٥}$

② إذا كانت : $ظتا\,(٩٠^\circ + \theta) + ١ = ٠$ حيث $٠^\circ < \theta < ٩٠^\circ$ فإن : $جتا\,٤\theta = ...$

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) صفر (د) -١

③ إذا كان : $جتا\,(٩٠^\circ + \theta) + جا\,(٩٠^\circ - ٢\theta) = ٠$ حيث $\theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٤}[$

فإن : $جا\,٢\theta = ...$

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) صفر (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

④ إذا كان : $جتا\,(٢٧٠^\circ - \theta) = \frac{١}{٢}$ حيث θ قياس أصغر زاوية موجبة

فإن : $\theta = ...$

(أ) ٣٠° (ب) ١٥٠° (جـ) ٢١٠° (د) ٣٣٠°

⑤ إذا كان : $ظا\,\theta = \frac{-٥}{١٢}$ ، $جتا\,\theta < ٠$ فإن : $قا\,\theta = ...$

(أ) $\frac{٥}{١٣}$ (ب) $\frac{-٥}{١٣}$ (جـ) $\frac{١٣}{٥}$ (د) $\frac{-١٣}{٥}$

⑥ إذا كان : $جا\,\theta = \frac{-١}{٢}$ ، $ظا\,\theta > ٠$ فإن : $\theta = ...$

(أ) ٣٠° (ب) ١٥٠° (جـ) ٢١٠° (د) ٣٣٠°

٢ إذا كان $جتا\,\theta = -\frac{٣}{٥}$ حيث $١٨٠^\circ < \theta < ٢٧٠^\circ$ **فأوجد قيمة كل من :**

① $قا\,(١٨٠^\circ + \theta)$	② $قا\,(-\theta)$	③ $ظا\,(٣٦٠^\circ - \theta)$
④ $ظتا\,(\theta - ٩٠^\circ)$	⑤ $قا\,(٩٠^\circ + \theta)$	⑥ $ظا\,(٢٧٠^\circ - \theta)$

⑦ $ظتا\,(٢٧٠^\circ + \theta)$

٣ أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية :

① $جا\,٢\theta = جتا\,\theta$ ② $جتا\,٥\theta = جا\,\theta$

٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : جا θ = جتا ٢ θ ، θ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[فإن : جا ٣ θ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) صفر (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(٢) إذا كان : طا θ = ظتا ٢ θ ، ٠° < θ < ٩٠° فإن : جا θ + جتا ٢ θ = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ٢ (د) $\frac{١}{٤}$

(٣) 📖 إذا كان : جا α = جتا β فإن : طا (α + β) = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) غير معرف (د) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

(٤) 📖 إذا كان : جا ٢ θ = جتا ٤ θ حيث θ زاوية حادة موجبة

فإن : طا (٩٠° − ٣ θ) = ...

(أ) −١ (ب) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (جـ) ١ (د) $\sqrt{٣}$

---

٥ أوجد قيمة كل مما يأتى :

(١) جتا ١٢٠° + طا ٢٢٥° + قتا ٣٣٠° + جتا ٤٢٠°

(٢) جا ٤٢٠° طا ٣٣٠° + جتا (−١٢٠°) قتا ٢١٠°

(٣) جا ٣٩٠° جتا (−٦٠°) + جتا ٣٠° جا ١٢٠°

(٤) جا ٦٩٠° جتا (−٢٤٠°) + جا ٥١٠° طا ٨٥٥°

(٥) 📖 جا ١٥٠ جتا (−٣٠٠°) + جتا ٩٣٠° ظتا ٢٤٠°

(٦) جا ١٥٠° جتا (− ٦٠°) + جا ٣٠٠° جا (− ١٢٠°)

(٧) طا $\frac{٢\pi}{٣}$ قا $\frac{١١\pi}{٣}$ + ظتا $\frac{١١\pi}{٦}$ قتا $\frac{١٩\pi}{٦}$ + طا $\frac{٢٥\pi}{٦}$ قتا $\left(\frac{-١٩\pi}{٣}\right)$

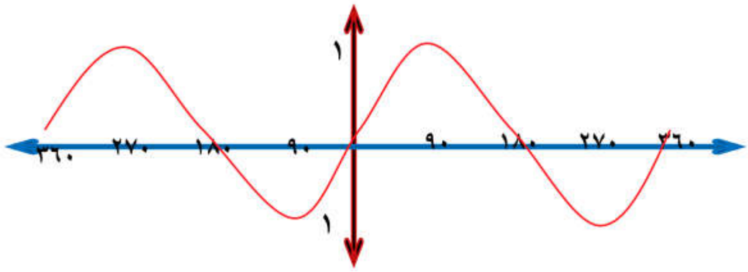
التمثيل البياني للدوال المثلثية

دالة الجيب

عند تمثيل الدالة د : د(θ) = جا θ

θ	٠	٣٠	٦٠	٩٠	١٢٠	١٥٠	١٨٠	٢١٠	٢٤٠	٢٧٠	٣٠٠	٣٣٠	٣٦٠
جا θ	٠	٠,٥	٠,٨٧	١	٠,٨٧	٠,٥	٠	−٠,٥	−٠,٨٧	−١	−٠,٨٧	−٠,٥	٠

نحصل على المنحنى المقابل



① مدى الدالة هو الفترة [−١، ١]

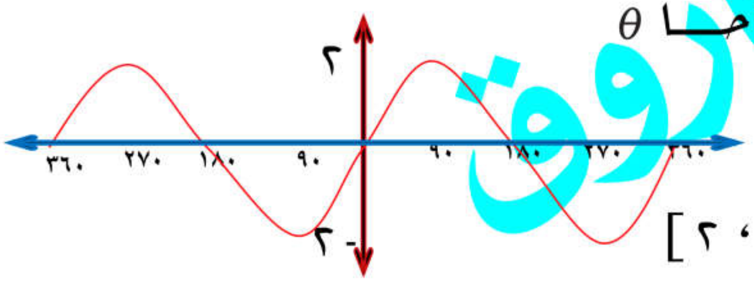
② مجال الدالة هو ح

③ الدالة دورية دورتها = ٢ π

④ القيمة العظمى للدالة = ١ وتبلغها عند θ = ٩٠° + ٣٦٠° ن ، ن ∈ ص

⑤ القيمة الصغرى للدالة = −١ وتبلغها عند θ = ٢٧٠° + ٣٦٠° ن ، ن ∈ ص

عند تمثيل الدالة د : د(θ) = ٢ جا θ



نلاحظ أن :

① مدى الدالة هو الفترة [−٢ ، ٢]

② القيمة العظمى للدالة = ٢ وتبلغها عند θ = ٩٠° + ٣٦٠° ن ، ن ∈ ص

⑤ القيمة الصغرى للدالة = −٢ وتبلغها عند θ = ٢٧٠° + ٣٦٠° ن ، ن ∈ ص

ملحوظة

■ إذا كانت د(θ) = أ جا θ ، أ > ٠ فإن

① مدى الدالة هو الفترة [−أ ، أ]

② القيمة العظمى = أ

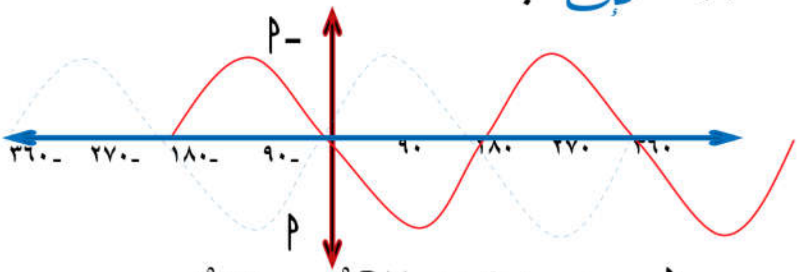
③ القيمة الصغرى = −أ

④ الدالة دورية و دورتها = ٢ π

■ إذا كانت د(θ) = جا ب θ فإن :

الدالة دورية ودورتها = $\frac{٢\pi}{|ب|}$

إذا كانت د (θ) = − أ حا θ ، أ > ٠ فإن :



(١) هو نفس منحنى الدالة

ص = أ حا θ

بالإنعكاس فى محور السينات

(٢) المنحنى يبلغ القيمة العظمى = أ عندما θ = ٢٧٠° + ٣٦٠° ن

(٢) القيمة الصغرى = −أ عندما θ = ٩٠° + ٣٦٠° ن

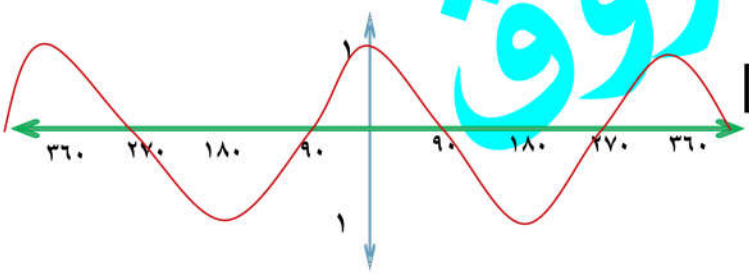
(٢) الدالة دورية و دورتها = ٢ π

دالة جيب التمام

عند تمثيل الدالة د : د (θ) = حتا θ

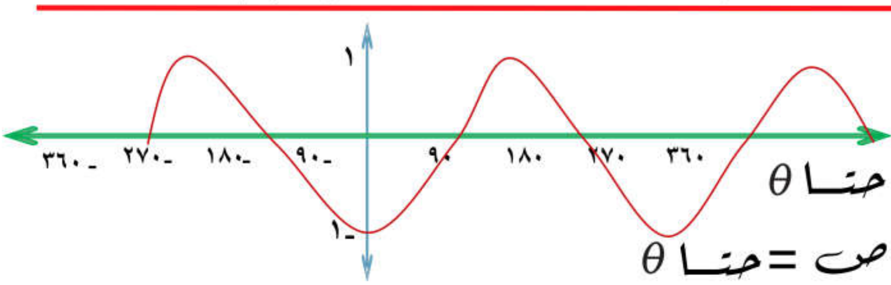
θ	٠	٣٠	٦٠	٩٠	١٢٠	١٥٠	١٨٠	٢١٠	٢٤٠	٢٧٠	٣٠٠	٣٣٠	٣٦٠
حتا θ	١	٠,٨٧	٠,٥	٠	−٠,٥	−٠,٨٧	−١	−٠,٨٧	−٠,٥	٠	٠,٥	٠,٨٧	١

نحصل على المنحنى المقابل



- مدى الدالة هو الفترة [−١ ، ١]
- مجال الدالة هو ح
- الدالة دورية دورتها = ٢ π
- القيمة العظى للدالة = ١ عند θ = ٣٦٠° ن ، ن ∈ ص
- القيمة الصغرى للدالة = −١ عند θ = ١٨٠° + ٣٦٠° ن ، ن ∈ ص

ملحوظة



منحنى الدالة د : د (θ) = − حتا θ

هو نفس منحنى الدالة : ص = حتا θ

بالإنعكاس فى محور السينات

■ من منحنى الدالة د :

د(θ) = − جتا θ

① القيمة العظمى للدالة = ١

وتبلغها الدالة عند :

θ = ١٨٠° + ٣٦٠° ن ، ن ∈ ص

② القيمة الصغرى للدالة = −١

وتبلغها الدالة عند :

θ = ٣٦٠° ن ، ن ∈ ص

ملاحظات على دالتي الجيب وجيب التمام

د(θ) = أجا ب θ ، د(θ) = أجتا ب θ دالة دورية

■ المدى = [− أ، أ]

■ الدورة = $\frac{2\pi}{|ب|}$

مثال ①

أوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى والمدى والدورة لكل من الدوال الآتية

① ص = جا θ

الحل

ص = جا θ　　أ = ١ ، ب = ١

القيمة العظمى = أ = ١

= − أ = −١

المدى = [− أ، أ] = [− ١، ١]

الدورة = $\frac{2\pi}{|ب|}$ = ٢π

② ص = ٣ جتا θ

الحل

أ = ٣ ، ب = ١

القيمة العظمى = أ = ٣

القيمة الصغرى = − أ = −٣

المدى = [−أ، أ] = [−٣، ٣]

الدورة = $\frac{2\pi}{|ب|}$ = ٢π

③ ص = ٥ جا ٣ θ

الحل

أ = ٥ ، ب = ٣

القيمة العظمى = أ = ٥

القيمة الصغرى = − أ = −٥

القيمة الصغرى = [−أ، أ] = [−٥، ٥]

الدورة = $\frac{2\pi}{|ب|}$ = $\frac{2\pi}{3}$

❶ أكمل العبارات الآتية:

① مدى الدالة د حيث د(θ) = جا θ هو ....
② مدى الدالة ن حيث ن (θ) = ٢ جا θ هو ....
③ مدى الدالة ع حيث ع(θ) = ٤ جتا θ هو ....
④ القيمة الصغرى للدالة ت حيث ت(θ) = ٥ جتا θ هي ....
⑤ دورة الدالة هـ(θ) حيث هـ(θ) = جا ٨ θ هي ....
⑥ القيمة العظمى للدالة ر حيث ر(θ) = -٣ جتا θ هي ....

❷ أوجد القيمة العظمى و الصغرى للدالة د وأكتب المدى في كل مما يأتي:

① د (θ) = ٨ جا θ
② د (θ) = - جا θ
③ د (θ) = ٣ جتا θ
④ د (θ) = ٦ جتا θ
⑤ د (θ) = ٤ جتا θ
⑥ د (θ) = -٢ جا θ

❸ أوجد المدى والدورة للدالة د في كل مما يأتي:

① د (θ) = ٢ جتا ٤ θ
② د (θ) = ٩ جتا ٩ θ
③ د (θ) = ٥ جا ٦ θ
④ د (θ) = ٦ جا ٥ θ
⑤ د (θ) = ٤ جتا ٢ θ
⑥ د (θ) = -٢ جتا π θ

....

إيجاد قياس زاوية إذا علم إحدى نسبها المثلثية

إذا كانت: حا θ = م فيمكن كتابتها بصورة أخرى مكافئة هى

θ = حا^-١ م

فمثلا :

إذا كان : حا θ = ١/٢

فيمكن كتابتها على الصورة

θ = حا^-١ (١/٢)

ويقصد بذلك إيجاد الزاوية التى جيبها = ١/٢

مثال ١

أوجد " θ " حيث ٠° < θ < ٣٦٠° والتي تحقق أن :

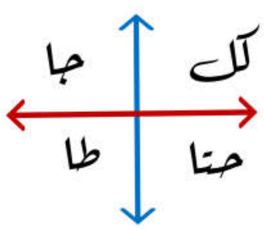
① θ = جتا^-١ (١/٢)

الحل

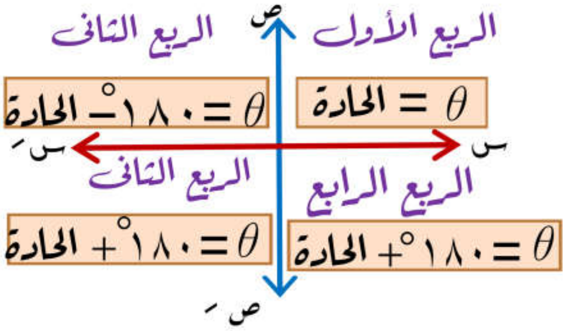
نوجد زاوية حادة جيب تمامها = ١/٢

∴ الزاوية الحادة هى ٦٠°

من اشارة النسبة المثلثية نحدد ربعين تقع فيهم الزاوية



فإذا كانت الزاوية تقع فى



∵ جتا θ موجبة

∴ تقع فى الربع الأول أو الرابع

فى الأول	فى الرابع
θ = الحادة	θ = ٣٦٠° − الحادة
∴ θ = ٦٠°	θ = ٣٦٠° − ٦٠°
	θ = ٣٠٠°

---

② θ = جا^-١ (− ٠,٦٨٧٤)

الحل

الزاوية الحادة التى جيبها = ٠,٦٨٧٤ هى ٢٩° ٢٥َ ٤٣ً

θ = جا^-١ (− ٠,٦٨٧٤) < صفر

θ تقع في الربع الثالث

θ = ١٨٠° + ٢٩° ٢٥َ ٤٣ً = ٢٩ً ٢٥َ ٢٢٣°

أو الرابع

$\theta = ٣٦٠^\circ - ٤٣^\circ\ ٢٥'\ ٢٩'' = ٣١٦^\circ\ ٣٤'\ ٣١''$

ملحوظة

إذا علم إحدى النسب للزاوية المثلثية

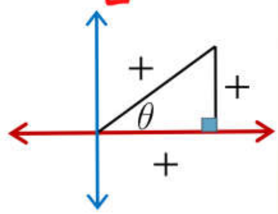
نرسم الزاوية فى الوضع القياسى

ثم نرسم المثلث القائم الخاص بها فى

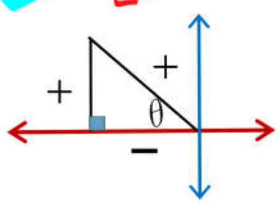
هذا الربع موزعا عليه الإشارات

ثم نوجد الضلع المجهول من نظرية فيثاغورث

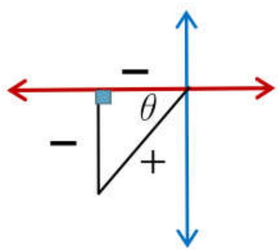
١) إذا كانت θ تقع فى الربع الأول



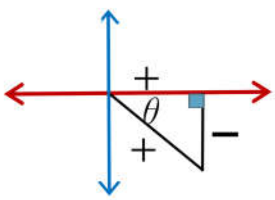
٢) إذا كانت θ تقع فى الربع الثانى



٣) إذا كانت θ تقع فى الربع الثالث



٤) إذا كانت θ تقع فى الربع الرابع



مثال ١

إذا كانت : ١٢ ظا α − ٥ = ٠

حيث α أكبر زاوية موجبة ،

٢٥ جا β − ٢٤ = ٠ حيث

$\beta \in]٩٠^\circ ، ١٨٠^\circ[$ فأوجد قيمة المقدار

قتا $(١٨٠^\circ + \alpha)$ + جتا $(١٨٠^\circ - \beta)$

الحل

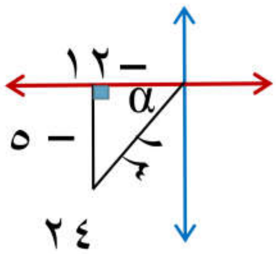
∵ ١٢ ظا α − ٥ = صفر ∴ ظا $\alpha = \frac{٥}{١٢}$

حيث α أكبر زاوية موجبة

∴ α تقع في الربع الثالث

∵ ظا $\alpha = \frac{٥}{١٢}$

$= \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$



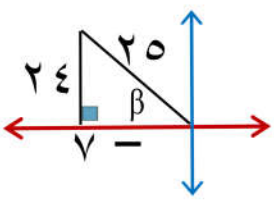
∵ ٢٥ جا β − ٢٤ = ٠ ∴ جا $\beta = \frac{٢٤}{٢٥}$

، ∵ $\beta \in]٩٠^\circ ، ١٨٠^\circ[$

حيث $\hat{\beta}$ تقع في الربع الثاني

جا $\beta = \frac{٢٤}{٢٥}$

$= \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$



قتا $(١٨٠^\circ + \alpha)$ = − قتا α

$= -(-\frac{١٣}{٥}) = \frac{١٣}{٥}$

جتا $(180^\circ - \beta)$ = - جتا β

$= -(\frac{-7}{25}) = \frac{7}{25}$

قتا $(180^\circ + \alpha)$ + جتا $(180^\circ - \beta)$

$= \frac{13}{5} + \frac{7}{25} = \frac{72}{25}$

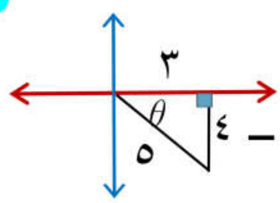
مثال (٢)

إذا كان : جتا $\theta = \frac{3}{5}$ حيث $270^\circ < \theta < 360^\circ$ فأوجد قيمة المقدار

حا $(180^\circ - \theta)$ + طا $(90^\circ - \theta)$ - طا $(270^\circ - \theta)$

الحل

θ تقع فى الربع الرابع



المقدار =

حا $(180^\circ - \theta)$ + طا $(90^\circ - \theta)$ - طا $(270^\circ - \theta)$

= حا θ + ~~طتا~~ θ - ~~طتا~~ θ

= حا $\theta = \frac{-4}{5}$

تمـــارين

١ أوجد " θ " حيث $٠° < \theta < ٣٦٠°$ و التي تحقق أن :

(١) $\theta =$ جتا$^{-١}$ $\left(\frac{١}{٢}\right)$ (٢) $\theta =$ جا$^{-١}$ $\left(\frac{\sqrt{٢}}{٢}\right)$

(٣) $\theta =$ قتا$^{-١}$ $\left(-\frac{٢}{\sqrt{٣}}\right)$ (٤) $\theta =$ ظتا$^{-١}$ (١)

(٥) $\theta =$ قا$^{-١}$ (٢) (٦) $\theta =$ ظا$^{-١}$ $(-\sqrt{٣})$

---

٢ أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية حيث $٠° < \theta < ٣٦٠°$

(١) جا $\theta = ٠,٨٦٦٠٣$ (٢) جتا $\theta = -٠,٤٧٥٢$

(٣) ظا $\theta = ١,٥٤١٧$ (٤) قتا $\theta = -١,٢٥٧٦$

(٥) قتا $\theta = -١,٨٧١٥$ (٦) قا $\theta = ٢,٠٥١٥$

(٧) ظا $\theta = -١,٠٨٩٩$ (٨) جتا $\theta = -٠,٧٣٤٩$

---

٣ إذا كانت ١٢ ظا هـ = ٥ حيث هـ زاوية حادة فأوجد قيمة كلاً من :

(١) جتا^٢ هـ - جا^٢ هـ (٢) جتا ١٢٠° جا (١٨٠° - هـ) + جا ٥١٠° جتا هـ

---

٤ إذا كانت : ٣ ظا هـ = ٤ حيث هـ ∈] ٠° ، ١٨٠° [

فأوجد قيمة المقدار : ٥ جتا هـ + ظا (١٨٠° - هـ) + جتا ١٢٠° - ظا ٣١٥°

---

٥ إذا كانت جا س $= \frac{١٢}{١٣}$ حيث س أكبر زاوية موجبة

فأوجد قيمة المقدار: قتا(١٨٠° - س) ظا س - جتا (١٨٠° + س)

---

٦ إذا كانت ٤ ظا س = ٣ حيث س ∈] ط ، $\frac{٣ط}{٢}$ [

، ١٣ جا ص - ١٢ = ٠ حيث ص ∈] $\frac{ط}{٢}$ ، ط [

فأوجد قيمة المقدار: $\frac{\text{ظا}(٩٠° - \text{ص})\ \text{جا}(-\text{س}) + \text{جا}\ ٣٠°}{\text{جتا}^٢\ ٤٥° - ٢\ \text{جا}\ ٦٠°\ \text{ظا}\ ٦٠°}$

كراسة

الفاروق

للملاحظات

أ/ عشرى فاروق

ملاحظات

الموضوع | اليوم | التاريخ / / ٢٠

ملاحظات

الموضوع | اليوم | التاريخ / / ٢٠

ملاحظات

الموضوع		اليوم		التاريخ	/ / ٢٠

ملاحظات

الموضوع		اليوم		التاريخ	/ / ٢٠