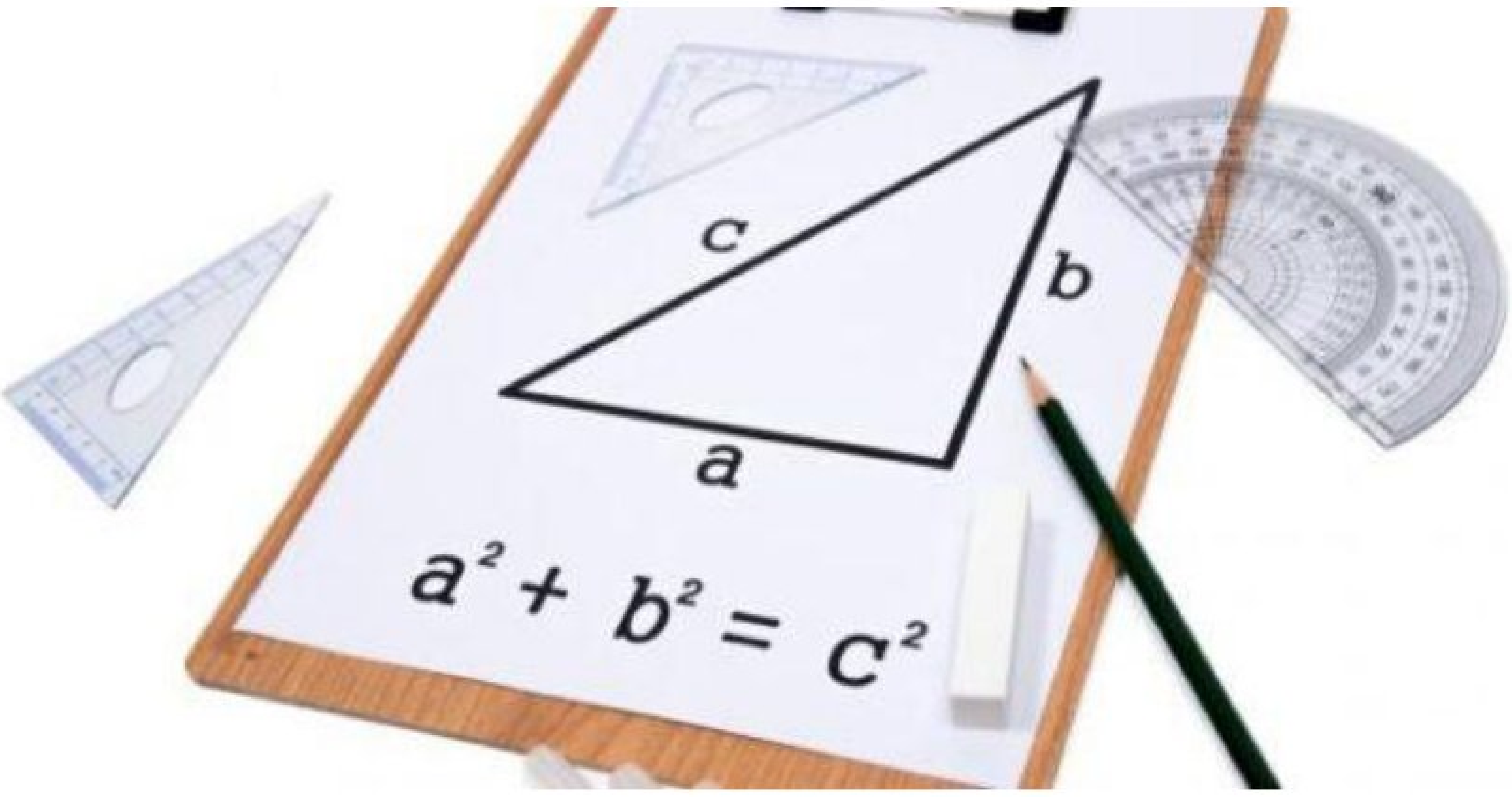
نظام حديث

الجبر وحساب المثلثات

للصف الأول الثانوي

إعداد

أ / محمد عبد الرحيم



مذكرة الشـرح

الفصل الدراسى الأول

المادة : جبر ١ث .... الدرس : معادلة الدرجة الثانية

الدرس الأول
معادلة الدرجة الثانية في مجهول واحد

متطلبات قبلية

الصورة العامة :-

أ س² + ب س + جـ = ٠

أ معامل س²
ب معامل س
جـ الحد المطلق

بشرط
أ ≠ ٠
لتظل من الدرجة الثانية

حل المعادلة (جذور المعادلة)

هما حلان أو جذران وهي قيم س التي تحقق المعادلة.

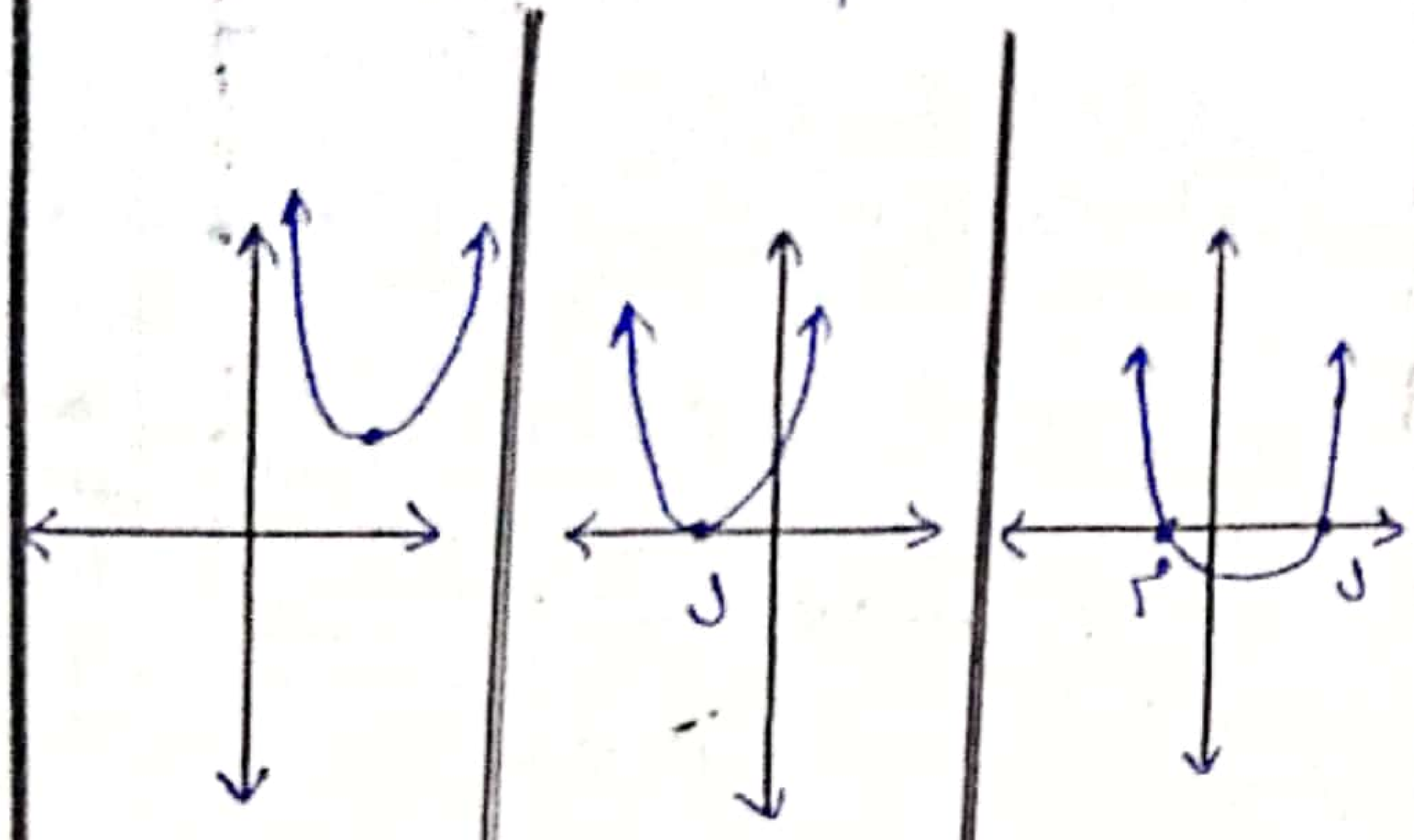
حل المعادلة
التحليل
القانون العام

القانون العام

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$$

يمكن حل المعادلة بيانيا بوضعها في صورة الدالة د(س) = أ س² + ب س + جـ

وترسم منحنى الدالة التربيعية



يوجد حلان	يوجد حل وحيد	لا يوجد حل
{ل ، م}	{ل}	∅
في ح	في ح	في ح

المسائل

أوجد جبريا في ح مجموعة حل المعادلات

(١) س² + ٣ س = ٠

الحل

بالتحليل س (س + ٣) = ٠

س = ٠ أو س + ٣ = ٠ ⟸ س = −٣

∴ م.ح = {٠ ، −٣}

(٢) س² + ٩ = ٠

الحل

س² = −٩ س = √−٩ ∉ ح

ليس لها حل في ح

م.ح = ∅

③ $س^٢ + ٣س + ٥ = ٠$

الحل

يتعذر التحليل فنستخدم القانون العام

$أ = ١$ $ب = ٣$ $ح = ٥$

$س = \frac{-٣ \pm \sqrt{٩ - (٤ \times ١ \times ٥)}}{٢ \times ١}$

$= \frac{-٣ \pm \sqrt{٩ - ٢٠}}{٢} = \frac{-٣ \pm \sqrt{-١١}}{٢} \notin ح$

ليس لها حل في ح

$م.ح = \phi$

$٢س^٢ + ٣س - ٤ = ٠$

الحل

$أ = ٢$ $ب = ٣$ $ح = -٤$

$س = \frac{-٣ \pm \sqrt{٩ - (٤ \times ٢ \times -٤)}}{٢ \times ٢}$

$س = \frac{-٣ \pm \sqrt{٩ + ٣٢}}{٤} = \frac{-٣ \pm \sqrt{٤١}}{٤}$

$س = \frac{-٣ + \sqrt{٤١}}{٤} \simeq ٠,٨٥$

أو $س = \frac{-٣ - \sqrt{٤١}}{٤} \simeq -٢,٣٥$

$\therefore م.ح = \{٠,٨٥ ، -٢,٣٥\}$

يمكن الحل باستخدام الحاسبة العلمية مباشرة

للتأكد من الحل

مجموع الجذرين $= \frac{-ب}{أ}$

اختر الاجابه الصحيحه :-

① اذا كان منحنى الداله التربيعيه يقطع محور السينات في (٢ ، ٠) ، (-٣ ، ٠) فإن مجموعة حل المعادله د(س) = ٠ في ح هي ــــــ

ⓐ {٢ ، ٠} ⓑ {-٣ ، ٠}

ⓒ {-٣ ، ٢} ⓓ {(٢ ، -٣)}

---

② اذا كان س = ٣ أحد جذري المعادله $س^٢ + م س = ٣$ فإن م = ـــــ

[$\boxed{-٢}$ ، ٦ ، ٢ ، ٤ ، ١]

الحل

$س = ٣$ يحقق المعادله

$(٣)^٢ + م(٣) = ٣$

$٩ + ٣م = ٣ \Leftarrow ٣م = ٣ - ٩ = -٦$

$م = \frac{-٦}{٣} = -٢$

---

③ $د(س) = س^٢ + ب س + ح$ وكانت $س = ٢$ أحد جذري المعادله $د(س) = ٠$ فإن $د(٢) = ـــــ$

[٢ ، -٢ ، ٤ ، $\boxed{صفر}$]

$\because س = ٢$ يحقق المعادله

$د(٢) = ٠$

④ الشرط الذي يجعل المعادلة $أ س^2 + ب س + جـ = 0$ تربيعية هو ....

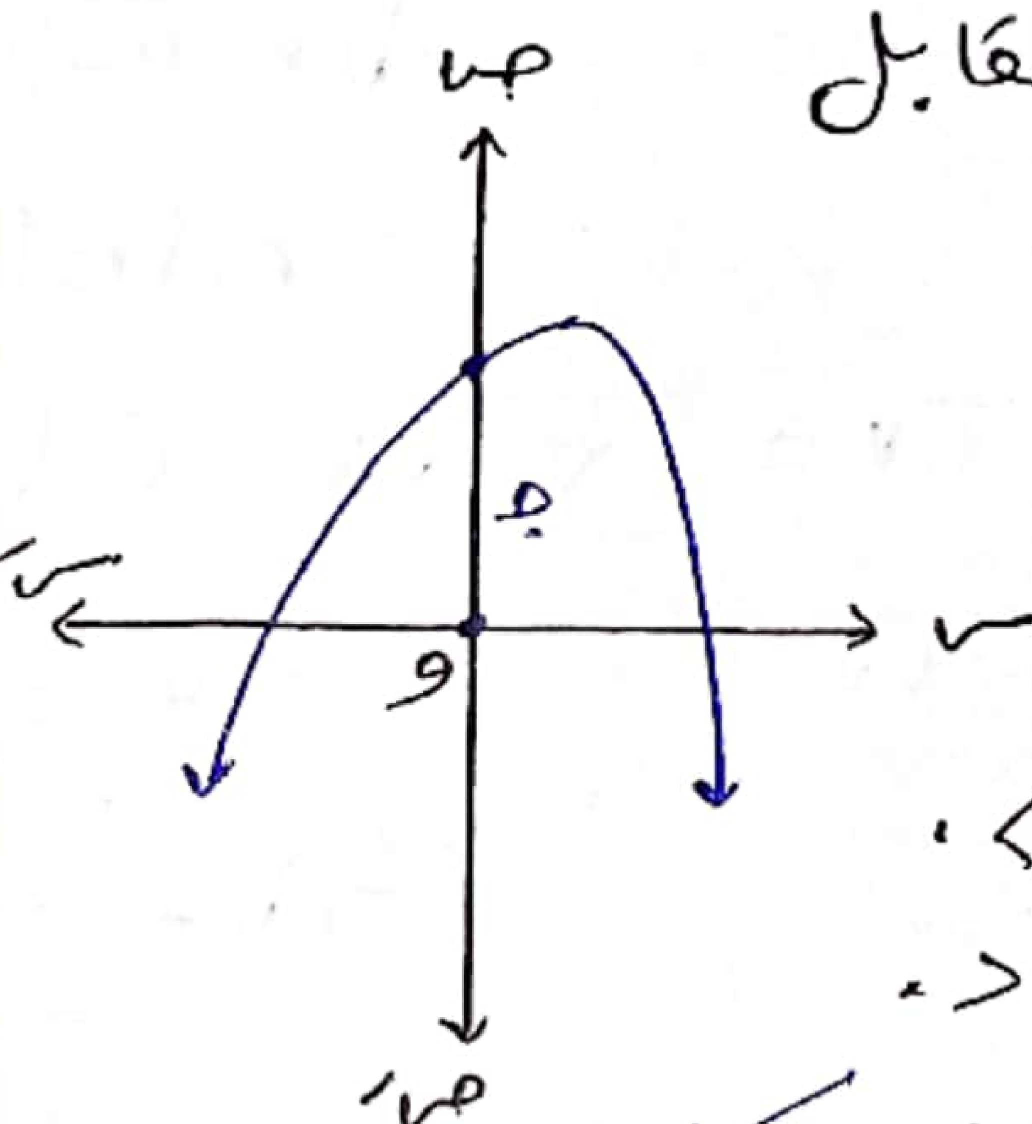
$أ > 0$ $أ < 0$

$\boxed{أ \neq 0}$ $ب \neq 0$

لأنه معامل $س^2$

---

⑤ من الشكل المقابل منحنى $ص = أ س^2 + ب س + جـ$ أيهما صحيح



(أ) $أ > 0 ، جـ > 0$

(ب) $أ > 0 ، جـ < 0$

(ج) $أ < 0 ، جـ > 0$ ✓

(د) $أ < 0 ، جـ < 0$

المنحنى لأسفل $أ < 0$

الجزء المقطوع من محور ص موجب $جـ > 0$

---

⑥ إذا كان ل جذراً أحد جذري المعادلة $س^2 + 3س - 5 = 0$ فإن قيمة المقدار

$ل^2 + 3ل + 4 = ...$

[صفر ، ٢ ، ٩ ، ٥]

الحل

∵ ل يحقق المعادلة

∴ $ل^2 + 3ل - 5 = 0$

المقدار المطلوب $= ل^2 + 3ل + 4$

$= \underline{ل^2 + 3ل - 5} + 5 + 4$

$=$ صفر $+ 9 = 9$

---

⑦ إذا كانت $س = 2$ أحد جذري المعادلة $ل^2 س^2 - ل س = 0$ فإن

$ل = ----$

(أ) $\{0 ، 1\}$ (ب) $\{0\}$

(ج) $\{2\}$

(د) $\{\frac{1}{2}\}$

الحل

$س = 2$ تحقق $4ل^2 - 2ل = 0$

$2ل^2 - ل = 0$ ، $ل(2ل - 1) = 0$

$ل = 0$ مرفوض | $2ل - 1 = 0$

$2ل = 1$

$ل = \boxed{\frac{1}{2}}$

مجموعة الأعداد الصحيحة $(1 + 2 + 3 + ... + ن)$ يعطى $جـ = \frac{ن}{2}(1 + ن)$ فكم عدداً صحيحاً بدءاً من ١ يكون مجموعها $= 78$

الحل

$78 = \frac{ن}{2}(ن + 1)$ (×٢)

$156 = ن(1 + ن) = ن^2 + ن$

∴ $ن^2 + ن - 156 = 0$

$(ن + 13)(ن - 12) = 0$

$ن = -13$ مرفوض | $ن = \boxed{12}$

الدرس الأول
مقدمه عن الأعداد المركبه

نعلم أنه للمعادله

$س^2 + 1 = 0$ ليس لها حل في ح

لذلك تم فرض عدد تخيلي ت

لحل المعادله بحيث $ت = \sqrt{-1}$

$\boxed{ت^2 = -1}$ بحيث $ت \notin ح$

ت عدد غير حقيقي

ويكون حل المعادله $س^2 + 1 = 0$

$س^2 = -1$ $س^2 = \pm\sqrt{-1}$

$\therefore س^2 = \pm ت$

$م.ح = \{ت ، -ت\}$

ومن ذلك نجد أنه

$\sqrt{-2} = \sqrt{-1 \times 2} = \sqrt{-1} \times \sqrt{2}$

$= \sqrt{2}\, ت$

$\sqrt{-4} = \sqrt{-1 \times 4} = \sqrt{-1} \times \sqrt{4}$

$= 2ت$

وللسهوله

$\boxed{\sqrt{-أ} = \sqrt{أ}\, ت}$

حل المعادله $س^2 + 5 = 0$

الحل

$س = \pm\sqrt{-5} = \pm\sqrt{5}\, ت$

$م.ح = \{\sqrt{5}\, ت ، -\sqrt{5}\, ت\}$

ملاحظة هامه

$\sqrt{-أ} \times \sqrt{-ب} = -\sqrt{أب}$

أي أن

$\sqrt{-2} \times \sqrt{-3} = \sqrt{2}\, ت \times \sqrt{3}\, ت$

$= \sqrt{6}\, ت^2 = \sqrt{6} \times -1$

$= -\sqrt{6}$

قوى ت الصحيحه

$ت = \sqrt{-1}$

$ت^2 = -1$

$ت^3 = ت^2 \times ت = -ت$

$ت^4 = ت^2 \times ت^2 = 1$

وهكذا نجد أنه لإيجاد $ت^ن$ فإنه

اذا كان الأس يقبل القسمه على ٤ سواء موجب أو سالب يكون الناتج = ١
اذا كان الأس موجباً نطرح منه أول عدد تحته يقبل القسمه ÷ ٤
اذا كان الأس سالبًا نضيف له أول عدد فوقه يقبل القسمه ÷ ٤

أوجد في أبسط صورة :

$ت^{16} = 1$

$ت^{8} = 1$

$ت^{25} = ت^{25-24} = ت$

$ت^{43} = ت^{43-40} = ت^{3} = -ت$

$ت^{-30} = ت^{-30+32} = ت^{2} = -1$

$ت^{-101} = ت^{-101+104} = ت^{3} = -ت$

$\frac{1}{ت^{15}} = ت^{-15} = ت^{-15+16} = ت$

$\sqrt{-18} \times \sqrt{-12} = -\sqrt{18 \times 12}$

$= -\sqrt{216} = -6\sqrt{6}$

$-4ت \times -6ت = 24ت^{2}$

$= -24$

نستنتج أن الأعداد

ت ، ٢ت ، -٥ت

$\frac{1}{2}$ت

تسمى أعداد تخيلية ∉ ح

بينما حاصل ت عدد حقيقي

العدد المركب

هو العدد الذي يمكن كتابته في الصورة

أ + ب ت حيث أ ، ب ∈ ح

، $ت^{2} = -1$ ويرمز له ع

$ع = \boxed{أ + ب ت}$

جزء حقيقي ، جزء تخيلي

أمثلة

٢ + ٣ت ، ٥ت - ٤ ، ...

لاحظ

ع = ٣ عدد حقيقي وهو أيضاً عدد مركب جزءه التخيلي = ٠

ع = ٢ت عدد تخيلي وهو أيضاً عدد مركب جزءه الحقيقي = ٠

أي أن مجموعة الأعداد المركبة ك هي

ك = { أ + ب ت : أ ، ب ∈ ح ، $ت^{2} = -1$ }

أوجد في ك مجموعة حل المعادلات الآتية

(١) $س^{2} - 4س + 5 = 0$

الحل

أ = ١ ب = -٤ جـ = ٥

س = (٤ ± √(١٦ − (٤ × ١ × ٥))) / (٢ × ١)

س = (٤ ± √(١٦ − ٢٠)) / ٢ = (٤ ± √−٤) / ٢

س = (٤ + ٢ت) / ٢ | س = (٤ − ٢ت) / ٢

= ٢ + ت | ٢ − ت

م.ح = {٢ ± ت}

تساوي عددين مركبين

اذا كان

م + ب ت = جـ + د ت

فإن $\boxed{\text{م = جـ}}$ ، $\boxed{\text{ب = د}}$

الحقيقي = الحقيقي ، التخيلي = التخيلي

أمثلة ١-

أوجد قيمتي س ، ص حيث

س + ت ص = ٣ + ٤ت

الحل

س = ٣ ص = ٤

(٢س − ٣) + (٣ص + ١) ت = ٧ + ١٠ت

الحل

٢س − ٣ = ٧ | ٣ص + ١ = ١٠

٢س = ١٠ | ٣ص = ٩

س = ١٠/٢ = $\boxed{٥}$ | ص = ٩/٣ = $\boxed{٣}$

العمليات على الأعداد المركبة

① الجمع والطرح

(٣ + ٢ت) + (٢ − ٥ت)

الحل

= ٥ − ٣ت

(١ − ٣ت) − (٥ − ت)

الحل

= ١ − ٣ت − ٥ + ت

= −٤ − ٢ت

---

② الضرب

(٢ + ٣ت)(٥ − ٤ت)

١٢

= ١٠ − ٨ت + ١٥ت − ~~١٢ت²~~

= ١٠ − ٨ت + ١٥ت + ١٢

= ٢٢ + ٧ت

فك القوس

(٢ − ٥ت)²

−٢٥

= ٤ − ٢٠ت + ~~٢٥ت²~~

= −٢١ − ٢٠ت

ملاحظة

$(1 \pm ت)^{2ن} = (\pm 2ت)^{ن}$

$(1+ت)^{10}$

الحل

$= ((1+ت)^2)^5 = (\cancel{1}+2ت+\cancel{-1})^5$

$= (2ت)^5 = 32ت^5 = 32ت^{5-4}$

$= 32ت$

$(1+ت)^{2020} = (2ت)^{1010}$

$= 2^{1010} \times ت^{1010}$

$= 2^{1010} \times ت^{1010-1008} = 2^{1010} \times ت^2$

$= -2^{1010}$

$(1+\overset{-2}{\cancel{2ت^2}})(2+3ت^5+4ت^6)$

الحل

$= (1-2)(2+3ت^{5-4}+4ت^{6-4})$

$= -1 \times (2+3ت+4\overset{-4}{\cancel{ت^2}})$

$= -1 \times (-2+3ت)$

$= \boxed{2-3ت}$

العددان المترافقان

$أ+ب ت$ ، $أ-ب ت$

يختلفان من اشارة الجزء التخيلي فقط

العدد	مرافقه
$2+3ت$	$2-3ت$
$5-ت$	$5+ت$
$ت+4$	$-ت+4$
$3ت$	$-3ت$
✓	✓

مجموعهما وحاصل ضربهما عدد حقيقي

أوجدنا ع

$(2+3ت)+(2-3ت) = 4$

$(2+3ت)(2-3ت)$

$= 4 - 3ت^2 = 4+3 = 7$

للاختصار

$(أ+ب ت)(أ-ب ت) = أ^2+ب^2$

---

(3) القسمة

$\frac{3+4ت}{5-2ت}$

بالضرب في مرافق المقام بسطاً ومقاماً

$= \frac{3+4ت}{5-2ت} \times \frac{5+2ت}{5+2ت}$

$= \frac{15+6ت+20ت+8\overset{-8}{\cancel{ت^2}}}{25+4}$

$$\frac{٧+٢٦ت}{٢٩} = \frac{٧}{٢٩} + \frac{٢٦}{٢٩}ت$$

اختر الإجابة الصحيحة

① مرافق العدد (٣ت − ٤) هو

الإجابة −٣ت − ٤

تغيير الجزء التخيلي فقط

---

② المعكوس الجمعي للعدد ٤ − ٧ت

هو −٤ + ٧ت

معكوس جمعي للعدد ع هو −ع

---

③ ١٢ + ٣م ت = ٤ن − ٢٧ت

فإن م + ن = ____

الحل

٤ن = ١٢ ، ن = ٣ | −٢٧ = ٣م ، $م = \frac{-٢٧}{٣} = -٩$

م + ن = ٣ + (−٩) = −٦

---

④ $(١+ت^{٤})(١-ت^{٧}) = س + ص ت$

فإن س + ص = ----

الحل

$(١+١)(١-ت^{٧-٤}) = س + ص ت$

$٢(١-ت^{٣}) = س + ص ت$

٢(١ + ت) = ٢ + ٢ت

س + ص = ٢ + ٢ = $\boxed{٤}$

ل ، م جذرا المعادلة $س^{٢} + ١ = ٠$

فإن $ل^{٢٠١٨} + م^{٢٠١٨} = $ ---- −٢

الحل

جذر المعادلة ت ، −ت

٢٠١٨ − ٢٠١٦

$ت^{٢٠١٨} + (-ت)^{٢٠١٨} = ٢(ت)^{٢٠١٨}$

$= ٢ت^{٢} = -٢$

$\left(\frac{١-ت}{١+ت}\right)^{١٠٠} = س + ت ص$ فإن

(س ، ص) = (١ ، ٠)

$$\frac{(١-ت)^{١٠٠}}{(١+ت)^{١٠٠}} = \frac{(-٢ت)^{١٠٠}}{(٢ت)^{١٠٠}} = ١$$

س = ١ ، ص = ٠

مرافق العدد $(٢+ت)^{-١}$ هو ____

$$\frac{١}{٢+ت} \times \frac{٢-ت}{٢-ت} = \frac{٢-ت}{٤+١}$$

$= \frac{٢}{٥} - \frac{١}{٥}ت$

مرافقه = $\frac{٢+ت}{٥}$

أصغر عدد صحيح موجب ن يجعل المقدار

$\left(\frac{١+ت}{١-ت}\right)^{ن} = ١$ هو ؟

ت + ت^٢ + ت^٣ + ... + ت^١٠٠

= صفر

الحل

ت + (−١) + (−ت) + ١ + ...

يكرر المقدار ٢٥ مرة

= ٢٥ (~~ت + (−١) + (−ت) + ١~~)

= ٢٥ × صفر = صفر

إذا كانت ت^م = ت^ن فأي مما يلي صحيح :

(١) م = ن × (ليس بالضرورة)

(٢) (م + ن) عدد زوجي ✓

(٣) (ن − م) مضاعف للعدد ٤ ✓

الحل

(١) ، (٢) فقط

أي من الآتي صحيح

٢ + ٣ت > ٣ + ٤ت

٣ − ٤ت < ٢ − ٣ت

١ + ت > −١ − ت

لا شيء مما سبق (✓)

لأنه لا يوجد ترتيب للأعداد المركبة

ح ك .

الدرس الثاني

تحديد نوع جذري المعادلة التربيعية

أ س^٢ + ب س + جـ = ٠

س = (−ب ± √(ب^٢ − ٤ أ جـ)) / ٢أ

ب^٢ − ٤ أ جـ = المميز

موجب > ٠	صفر	سالب < ٠
الجذران حقيقيان مختلفان	الجذران حقيقيان متساويان	الجذران مركبان غير حقيقيان

حدد نوع جذري المعادلات الآتية

(١) س^٢ − ١١ س + ١٠ = ٠

الحل

المميز = ب^٢ − ٤ أ جـ

= ١٢١ − (٤ × ١ × ١٠)

= ٨١ > ٠

الجذران حقيقيان مختلفان

للتأكد (س − ١٠)(س − ١) = ٠

الجذران ١٠ ، ١

② س² − ١٠ س + ٢٥ = ٠

الحل

المميز = ب² − ٤ أ جـ

= ١٠٠ − (٤ × ١ × ٢٥)

= ١٠٠ − ١٠٠ = صفر

الجذران حقيقيان متساويان

للتأكد (س − ٥)(س − ٥) = ٠

الجذران متساويان

---

③ س² − ٢ س + ٥ = ٠

الحل

المميز = ب² − ٤ أ جـ

= ٤ − (٤ × ١ × ٥)

= ٤ − ٢٠ = −١٦ < ٠

الجذران مركبان غير حقيقيان

للتأكد

س = (+٢ ± √−١٦) / ٢ = (+٢ ± ٤ت) / ٢

الجذران ١ ± ٢ت

(س − ١١) − س(س − ٦) = ٠

الحل

س − ١١ − س² + ٦ س = ٠ ÷ (−١)

س² − ٧ س + ١١ = ٠

المميز = ٤٩ − ٤ × ١ × ١١ = ٤ > ٠

حقيقيان مختلفان

إذا كان جذرا المعادلة الآتية حقيقيان متساويان أوجد قيمة ك في كل حالة :

① ١٨ س² − ك س + ٨ = ٠

الحل

∵ الجذران حقيقيان متساويان ∴ المميز :

ب² − ٤ أ جـ = ٠

ك² − (٤ × ١٨ × ٨) = ٠

ك² = ٥٧٦

ك = ± √٥٧٦ = $\boxed{\pm ٢٤}$

س² + ٢(ك − ١) س + (٢ك + ١) = ٠

الحل

أ = ١   ب = ٢(ك − ١)   جـ = ٢ك + ١

المميز = ب² − ٤ أ جـ

= ٤(ك − ١)² − (٤ × ١ × (٢ك + ١)) = ٠

= ٤ك² − ٨ك + ٤ − ٨ك − ٤ = ٠

٤ك² − ١٦ك = ٠   ÷ ٤

ك² − ٤ك = ٠

$\boxed{ك = ٠}$ $\boxed{ك = ٤}$

س² − ٢ س + ١ = ٠

(س − ١)(س − ١) = ٠

الجذران ١ ، ١

س² + ٦ س + ٩ = ٠

(س + ٣)(س + ٣) = ٠

الجذران −٣ ، −٣

أوجد قيمة ك التي تجعل جذري المعادلة
س² + ٤ س + ك = ٠ حقيقيين
مختلفين

الحل

الجذران حقيقيان مختلفان المميز > ٠

ب² − ٤ أ جـ > ٠

١٦ − ٤ × ١ × ك > ٠

−٤ ك > −١٦

ك < −١٦ / −٤ ⟸ ك < ٤

ك ∈]−∞ ، ٤[

أوجد ك التي تجعل جذري المعادلة
ك س² − ٨ س + ١٦ = ٠
مركبان غير حقيقيان

الحل

المميز < ٠ ب² − ٤ أ جـ < ٠

٦٤ − (٤ × ك × ١٦) < ٠

−٦٤ ك < −٦٤

ك > −٦٤ / −٦٤ ك > ١

ك ∈]١ ، ∞[

ملاحظة (١)

إذا كانت أ ، ب ، جـ أعداد نسبية للمعادلة أ س² + ب س + جـ = ٠ وكان المميز مربعاً كاملاً فإن الجذرين يكونا أعداد نسبية

مثال

إذا كان ل ، م عددين نسبيين فأثبت أن جذري المعادلة
ل س² + (ل − م) س − م = ٠
عددان نسبيان

الحل

ل ، ل − م ، −م ∈ ن

المميز = (ل − م)² − ٤ ل × −م

= ل² − ٢ ل م + م² + ٤ ل م

= ل² + ٢ ل م + م²

= (ل + م)² مربع كامل

∴ الجذران أعداد نسبية

ملاحظة (٢)

إذا كان مميز المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية غير موجب فإن جذري المعادلة يكونان مركبان ومترافقان

أكمل ما يأتي

(١) جذرا المعادلة $\text{س}^2 - 2\sqrt{5}\,\text{س} + 1 = 0$ يكونان ......

المميز $= (-2\sqrt{5})^2 - (4 \times 1 \times 1)$

$= 20 - 4 = 16$ موجب مربع كامل

لكن $\text{ب} \notin \text{ن}$

∴ الجذرين حقيقين وغير نسبيين

---

(٢) $\text{أ}\,\text{س}^2 + \text{ب}\,\text{س} + \text{جـ} = 0$ وكان $\text{أ} \in \text{ع}^*$ ، $\text{ب} \in \text{ع}$ ، $\text{جـ} \in \text{ع}$

$(\text{ب}^2 - 4\,\text{أ}\,\text{جـ})$ غير موجب فإن جذري المعادلة مركبين ومترافقين

---

(٣) أ ، ب ، جـ أعداداً حقيقية

$\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ} = 0$ ، $\text{أ} \neq \text{جـ}$ فإن جذري المعادلة

$(\text{ب} + \text{جـ} - \text{أ})\,\text{س}^2 + (\text{جـ} + \text{أ} - \text{ب})\,\text{س} + (\text{أ} + \text{ب} - \text{جـ}) = 0$ يكونان ......

الحل

يمكن كتابة المعادلة

$-2\text{أ}\,\text{س}^2 + (-2\text{ب})\,\text{س} + (-2\text{جـ}) = 0$

$\text{أ}\,\text{س}^2 + \text{ب}\,\text{س} + \text{جـ} = 0$

المميز $= \text{ب}^2 - 4\,\text{أ}\,\text{جـ} = (-\text{أ} - \text{جـ})^2 - 4\,\text{أ}\,\text{جـ}$

$= \text{أ}^2 + 2\,\text{أ}\,\text{جـ} + \text{جـ}^2 - 4\,\text{أ}\,\text{جـ} = (\text{أ} - \text{جـ})^2$

∴ الجذران حقيقيان مختلفان نسبيان

---

(٤) إذا كان للمعادلة $\text{س}^2 - 2\sqrt{2}\,\text{س} + \text{أ} = 0$ جذران مركبان مترافقان فإن $\text{أ} \in$ ......

الحل

الجذران مركبان مترافقان

∴ المميز < 0 ، المعاملات حقيقية

$\text{ب}^2 - 4\text{أ} < 0$

$8 - 4\text{أ} < 0 \Leftarrow -4\text{أ} < -8$

$\text{أ} > \frac{-8}{-4}$ ، $\text{أ} > 2$

$\text{أ} \in \,]2 ، \infty[$

إذا كان جذرا المعادلة $4\,\text{س}^2 - 2\,\text{س} + \text{م} = 0$ ينتميان للفترة $]-1 ، 1[$ فإن ......

(أ) $0 \le \text{م} < 2$ (ب) $-6 < \text{م} \le \frac{1}{8}$

(جـ) $-2 < \text{م} \le \frac{1}{4}$ (د) $-6 < \text{م} < -2$

الحل

$$\frac{2 + \sqrt{4 - 16\text{م}}}{2 \times 4} < 1$$

$2 + \sqrt{4 - 16\text{م}} < 8 \Leftarrow \sqrt{4 - 16\text{م}} < 6$

$0 \le 4 - 16\text{م} < 36$

$-4 \le -16\text{م} < 32$

$\frac{-4}{16} \le -\text{م} < \frac{32}{16} \Leftarrow -2 < \text{م} \le \frac{1}{4}$

الدرس الثالث

العلاقة بين جذري المعادلة ومعاملات حدودها

أ س^2 + ب س + جـ = ٠

جذريها هما ل ، م

$\boxed{\text{مجموع الجذرين} = ل + م = \frac{-ب}{أ}}$

$\boxed{\text{حاصل ضربهما} = ل\, م = \frac{جـ}{أ}}$

ل + م = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^2}$	ل م = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^2}$

ملاحظات هامة

① اذا كان أحد الجذرين معكوس جمعي للآخر $\boxed{ب = ٠}$

② اذا كان أحد الجذرين معكوس ضربي للآخر $\boxed{أ = جـ}$

③ اذا كان مجموع الجذرين = حاصل ضربهما ⇐ $\boxed{ب = -جـ}$

المسائل

دون حل المعادلات أوجد مجموع وحاصل ضرب جذريها:

٤ س^2 + ٤ س − ٣٥ = ٠

الحل

ل + م = $\frac{-٤}{٤}$ = $\boxed{-١}$

ل م = $\frac{-٣٥}{٤}$

اختر الاجابة الصحيحة

① حاصل ضرب جذري المعادلة ٣ + ٢ س − $\frac{١}{٤}$ س^2 = ٠ يساوي

[$\frac{-٢}{٣}$ ، ١٢ ، $\boxed{-١٢}$ ، $\frac{٣}{٤}$]

حاصل ضربهما = ٣ ÷ $\frac{-١}{٤}$ = -١٢

② المعادلة ب س^2 + جـ س + أ = ٠

حاصل ضرب جذريها = ------

الحل

ل م = $\frac{أ}{ب}$

③ اذا كان أحد جذري المعادلة أ س^2 − ٣ س + ٢ = ٠ معكوساً ضربياً للآخر فإن أ = ----

الحل

أ = جـ = ٢

اذا كان أحد جذري المعادلة الآتية

$س^2 - (ب - ٣) س + ٥ = ٠$

معكوساً جمعياً للآخر فإن ب = ...

[$\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، ٢ ، $\boxed{٣}$]

∴ معامل س = ٠ ⟸ ب − ٣ = ٠

ب = ٣

اذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة

$(ك - ٢) س^2 - ٦ س + ١٢ = ٠$ هو ٣

فإن ك = ———

[٠ ، ٤ ، $\boxed{٦}$ ، ٣٨]

$\frac{ح}{أ} = ٣ \Leftarrow \frac{١٢}{ك-٢} = \frac{٣}{١}$

$ك - ٢ = \frac{١٢ \times ١}{٣} = ٤ \Leftarrow ك = ٦$

اذا كانت (١ + ت) أحد جذري

$س^2 - ٢ س + أ = ٠$ فإن أ = ...

حيث أ ∈ ح.

الحل

∴ المعاملات حقيقية وأحد الجذرين

مركب يكون الآخر مرافقه

∴ الجذر الآخر ١ − ت

حاصل ضربهم = (١ − ت)(١ + ت) = أ

⟸ أ = ١ + ١ = $\boxed{٢}$

أوجد قيمتي أ ، ب اذا كان :-

(١) −٣ ، ٧ جذري المعادلة

$أ س^2 - ب س - ٢١ = ٠$

الحل

$(س + ٣)(س - ٧) = ٠$

$س^2 - ٤ س - ٢١ = ٠$

$أ س^2 - ب س - ٢١ = ٠$

∴ أ = ١ ، ب = ٤

---

(٢) $\sqrt{٣}$ ت ، $-\sqrt{٣}$ ت جذري المعادلة

$س^2 + أ س + ب = ٠$

الحل

مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ}$ = − أ ⟸ أ = ٠

حاصل ضربهم = $-٣ ت^2$ = ٣ = ب

$\boxed{أ = ٠}$ $\boxed{ب = ٣}$

ملاحظات

اذا كان أحد الجذرين ل وكان الثاني

ضعف الآخر ٢ل

ثلاثة أمثال الآخر ٣ ل

نصف الآخر $\frac{ل}{٢}$

معكوس جمعي للآخر − ل

معكوس ضربي للآخر $\frac{١}{ل}$

مربع الآخر $ل^2$

أوجد الشرط اللازم لكي يكون أحد جذري المعادلة $\text{أ}س^2 + \text{ب}س + \text{جـ} = 0$ ضعف الآخر.

الحل

الجذران ل ، ٢ل

مجموعهم = ٣ل = $\frac{-\text{ب}}{\text{أ}}$ ⇐ $\boxed{ل = \frac{-\text{ب}}{٣\text{أ}}}$

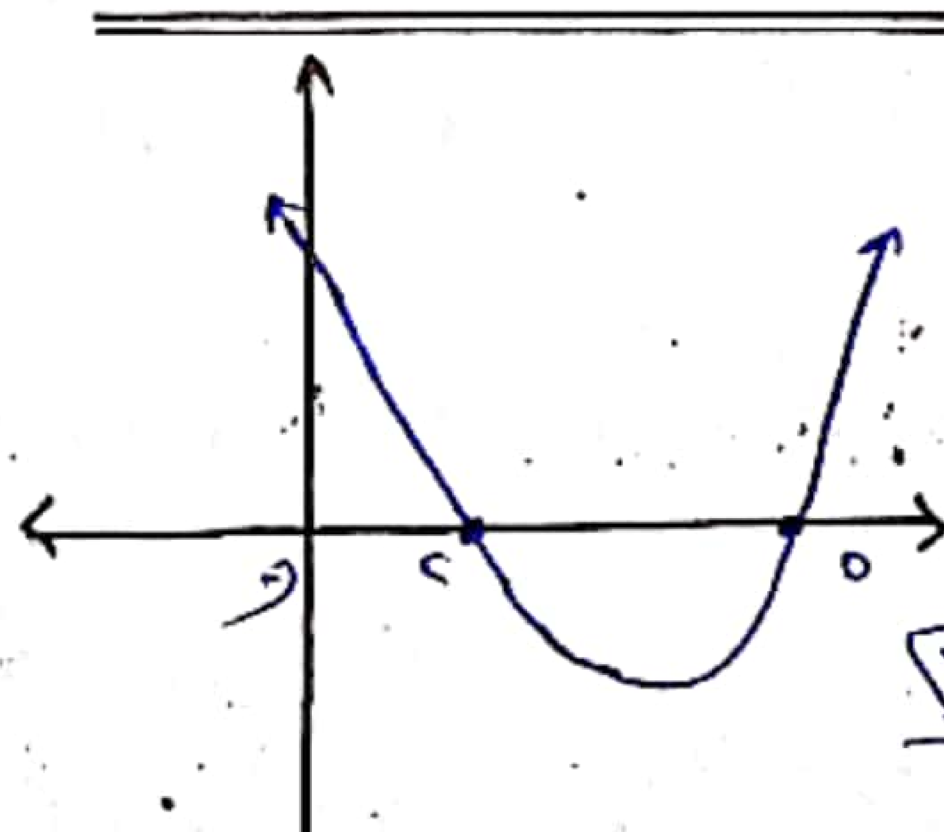
ضربهم = ٢ل^2 = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$ بالتعويض عن ل

$٢\left(\frac{-\text{ب}}{٣\text{أ}}\right)^2 = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$

$\frac{٢\text{ب}^2}{٩\text{أ}^{\cancel{2}}} = \frac{\text{جـ}}{\cancel{\text{أ}}}$ ⇐ $\frac{٢\text{ب}^2}{٩\text{أ}} = \frac{\text{جـ}}{١}$

الشرط اللازم $\boxed{٢\text{ب}^2 = ٩\text{أ}\,\text{جـ}}$

في الشكل المقابل منحنى د(س) = $\text{أ}س^2 + \text{ب}س + \text{جـ}$



أوجد $\frac{\text{ب} + \text{جـ}}{\text{أ}} = \boxed{٣}$

$= \frac{\text{ب}}{\text{أ}} + \frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$

= − مجموع الجذرين + حاصل ضربهم

= −(٥ + ٢) + (٥ × ٢)

= −٧ + ١٠ = $\boxed{٣}$

الدرس الرابع
تكوين المعادلة التربيعية متى علم جذراها

اذا كان ل ، م جذري المعادلة

$\text{أ}س^2 + \text{ب}س + \text{جـ} = 0$

بالقسمة ÷ أ ≠ 0 للطرفين

$س^2 - \left(\frac{-\text{ب}}{\text{أ}}\right)س + \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = 0$

س^2 − (مجموع الجذرين) س + (حاصل ضربهم) = 0

كون المعادلة التربيعية التي جذراها

① −٢ ، ٤

الحل

مجموعهم = ٤−٢ = $\boxed{٢}$ ضربهم = $\boxed{-٨}$

$س^2 - ٢س - ٨ = 0$

---

② ٥$\sqrt{٣}$ ، −٢$\sqrt{٣}$

الحل

جمعهم = ٣$\sqrt{٣}$ ضربهم = −١٠×٣

= −٣٠

المعادلة

$س^2 - ٣\sqrt{٣}\,س - ٣٠ = 0$

③ $٣ - ٢ت$ ، $٣ + ٢ت$

الحل

جـ = $\boxed{٦}$ ، ضرب = $٩ + ٨ = \boxed{١٧}$

المعادلة هي

$س^٢ - ٦س + ١٧ = ٠$

اختر الإجابة الصحيحة

① إذا كان ل ، $ل^٢$ هما جذرا المعادلة

$٢س^٢ + ب س + ٥٤ = ٠$ فإن ب = ...

[$\boxed{-١٢}$ ، -٢٤ ، ٢٧ ، ٣٦]

الحل

ضرب = $ل^٣ = \frac{٥٤}{٢} = ٢٧$

ل = ٣ $ل^٢ = ٩$

جـ = $٩ + ٣ = ١٢$ ∴ ب = -١٢

---

② إذا كان م ، $\frac{٢}{م}$ هما جذرا المعادلة

$م س^٢ + ب س + ١٢ = ٠$ فإن م = ...

[٣ ، ٥ ، $\boxed{٦}$ ، ٩]

الحل

ضرب = $م \times \frac{٢}{م} = ٢ = \frac{١٢}{م}$

∴ م = $\frac{١٢}{٢} = \boxed{٦}$

تكوين معادلة من معادلة أخرى معطاه

تذكر المتطابقات الآتية

① $ل^٢ + م^٢ = (ل + م)^٢ - ٢ ل م$

② $ل^٣ + م^٣ = (ل + م) [(ل + م)^٢ - ٣ ل م]$

③ $(ل - م)^٢ = (ل + م)^٢ - ٤ ل م$

④ $\frac{ل}{م} + \frac{م}{ل} = \frac{(ل+م)^٢ - ٢ ل م}{ل م}$

المسائل

إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة

$س^٢ - ٥س + ٣ = ٠$ كون المعادلة التي جذراها

① ل - ٤ ، م - ٤

الحل

المعطاه ل ، م

ل + م = ٥ ل م = ٣

المطلوب (ل - ٤ ، م - ٤)

جـ = ل - ٤ + م - ٤ = ل + م - ٨

= ٥ - ٨ = -٣

ضرب = (ل - ٤)(م - ٤) = ل م - ٤ ل - ٤ م + ١٦

= ل م - ٤ (ل + م) + ١٦

= ٣ - ٤ × ٥ + ١٦ = -١

المعادلة هي

س² + ٣س − ١ = ٠

② ٢ل ، ٢م

الحل

مجـ = ٢ل + ٢م = ٢(ل + م)

= ٢ × ٥ = ١٠

ضـ = ٤ل م = ٤ × ٣ = ١٢

س² − ١٠س + ١٢ = ٠

③ ١/ل ، ١/م

الحل

مجـ = ١/ل + ١/م = (ل + م)/(ل م)

= ٥/٣

ضـ = ١/ل × ١/م = ١/(ل م) = ١/٣

س² − ٥/٣ س + ١/٣ = ٠ (×٣)

٣س² − ٥س + ١ = ٠

④ ل² ، م²

الحل

مجـ = ل² + م² = (ل + م)² − ٢ل م

= ٢٥ − ٢ × ٣ = ١٩

ضـ = (ل م)² = (٣)² = ٩

المعادلة س² − ١٩س + ٩ = ٠

⑤ ل/م ، م/ل

الحل

مجـ = ل/م + م/ل = ((ل + م)² − ٢ل م)/(ل م)

= ((٥)² − ٢ × ٣)/٣ = $\boxed{١٩/٣}$

ضـ = ل/م × م/ل = $\boxed{١}$

المعادلة

س² − ١٩/٣ س + ١ = ٠ (×٣)

٣س² − ١٩س + ٣ = ٠

⑥ ل³ ، م³

الحل

مجـ = ل³ + م³ = (ل + م) [(ل + م)² − ٣ل م}

= ٥ [٢٥ − ٢ × ٣} = $\boxed{٨٠}$

ضـ = (ل م)³ = ٢٧

المعادلة

س² − ٨٠س + ٢٧ = ٠

⑦ ل + م ، ل م

الحل

مجـ = (ل + م) + ل م = ٥ + ٣ = ٨

ضـ = (ل + م) (ل م) = ٥ × ٣ = ١٥

س² − ٨س + ١٥ = ٠

(٨) ٣ل + ٢م ، ٢ل + ٣م

الحل

مجموع = ٣ل + ٢م + ٢ل + ٣م

= ٥ل + ٥م = ٥(ل + م)

= ٥ × ٥ = $\boxed{٢٥}$

ضرب = (٣ل + ٢م)(٢ل + ٣م)

= ٦ل² + ٩لم + ٤لم + ٦م²

= ٦(ل² + م²) + ١٣لم

= ٦ × ١٩ + ١٣ × ٣

= $\boxed{١٥٣}$

س² − ٢٥س + ١٥٣ = ٠

قانون الفرق بين الجذرين

$$ل - م = \frac{\pm\sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{أ}$$

مثال

اذا كان الفرق بين جذري المعادلة س² + ك س + ٢ك = ٠ يساوي ضعف حاصل ضرب جذري المعادلة س² + ٣س + ك = ٠ فأوجد قيمة ك ؟

الحل

الفرق بين جذري المعادلة الأولى

$$= \frac{\pm\sqrt{ك^٢ - ٨ك}}{١}$$

حاصل ضرب جذري المعادلة الثانية

= ك

الفرق الثانية = ضعف حاصل الضرب الأولى

بتربيع الطرفين

± √(ك² − ٨ك) = ٢ك

ك² − ٨ك = ٤ك²

٣ك² + ٨ك = ٠

ك(٣ك + ٨) = ٠

$\boxed{ك = ٠}$ أو $\boxed{ك = \frac{-٨}{٣}}$

اذا كان ل + ١ ، م + ١ جذرا المعادلة س² + ٥س + ٣ = ٠ كون المعادلة التي جذراها ل ، م .

الحل

المعطاه

(ل + ١ + م + ١) = −٥

ل + م + ٢ = −٥ ل + م = $\boxed{-٧}$

(ل + ١)(م + ١) = ٣

لم + (ل + م) + ١ = ٣

لم − ٧ + ١ = ٣ لم = $\boxed{٩}$

∴ س² + ٧س + ٩ = ٠

اختر الإجابة الصحيحة :-

① إذا كان $م^2 + 3م + 1 = 0$ ، $ب^2 + 3ب + 1 = 0$ حيث م ، ب عددان حقيقيان مختلفان فإن $\frac{م}{ب} + \frac{ب}{م} = ...$

الحل

م ، ب هما جذرا المعادلة $س^2 + 3س + 1 = 0$

$م + ب = -3$ ، $م ب = 1$

المقدار $\frac{م}{ب} + \frac{ب}{م} = \frac{م^2 + ب^2}{م ب}$

$= \frac{(م+ب)^2 - 2م ب}{م ب} = \frac{9 - 2}{1} = \boxed{7}$

---

② إذا كان جذرا المعادلة التربيعية $س^2 + ب س + جـ = 0$ عددين فرديين متتاليين فإن $ب^2 - 4جـ = ...$

الحل

الجذران فرديان متتاليان ∴ $ل - م = 2$

∴ $ل - م = \frac{\pm\sqrt{ب^2 - 4 م جـ}}{م}$

$2 = \frac{\pm\sqrt{ب^2 - 4جـ}}{1}$

بتربيع الطرفين

$ب^2 - 4جـ = \boxed{4}$

الدرس الخامس
إشارة الدالة

بحث إشارة الدالة ص = د(س) هي قيم س التي تجعل د(س)

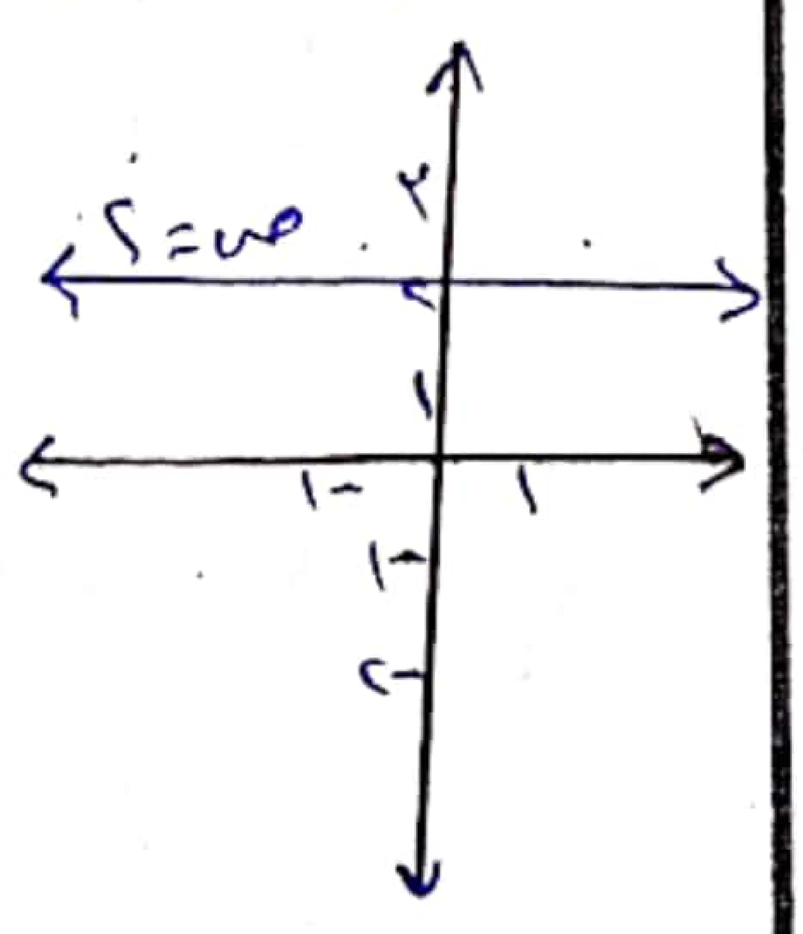
- موجبة: د(س) > ٠
- صفر: د(س) = ٠
- سالبة: د(س) < ٠

أولاً : الدالة الثابتة :-

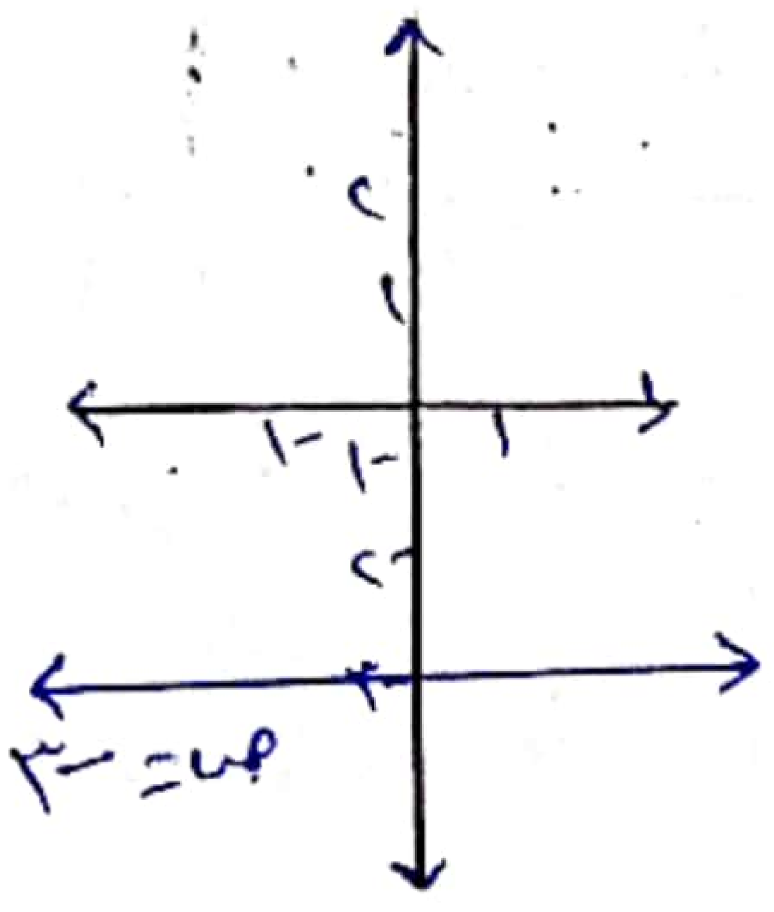
د(س) = جـ حيث جـ ∈ ح

إشارتها نفس إشارة جـ لجميع قيم س ∈ ح

د(س) = ٢ موجبة لجميع قيم س ∈ ح



د(س) = −٣ سالبة لجميع قيم س ∈ ح



نلاحظ بحث الإشارة بيانياً

المنحنى أعلى محور السينات موجب

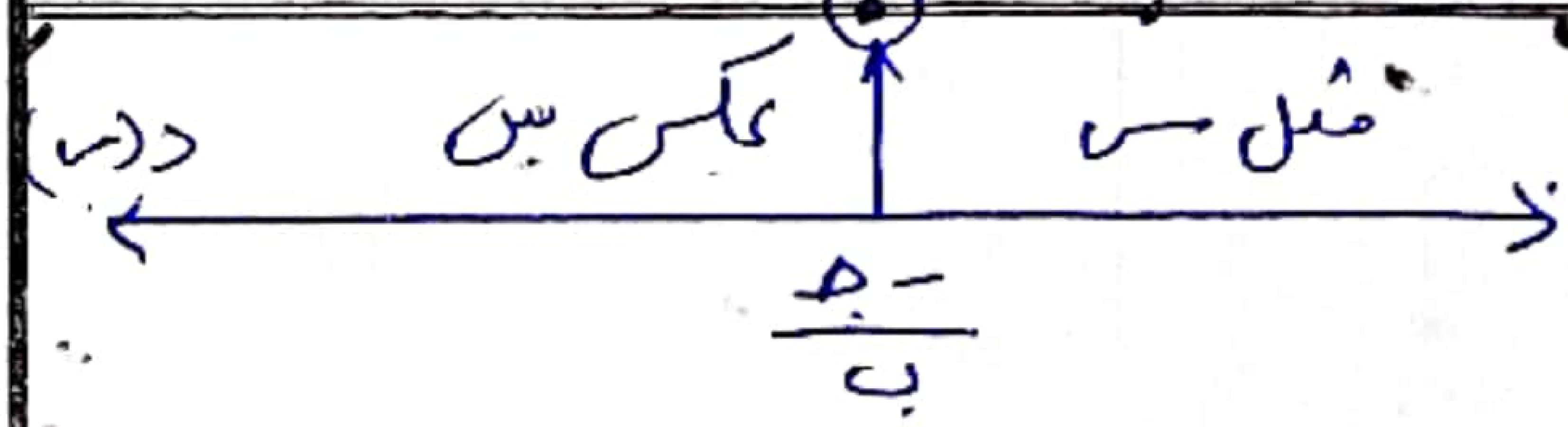
" أسفل محور السينات سالب

ثانياً: الدالة الخطية

د(س) = ب س + جـ

لبحث الإشارة نضع د(س) = ٠

س = $\frac{-جـ}{ب}$ ونلاحظ



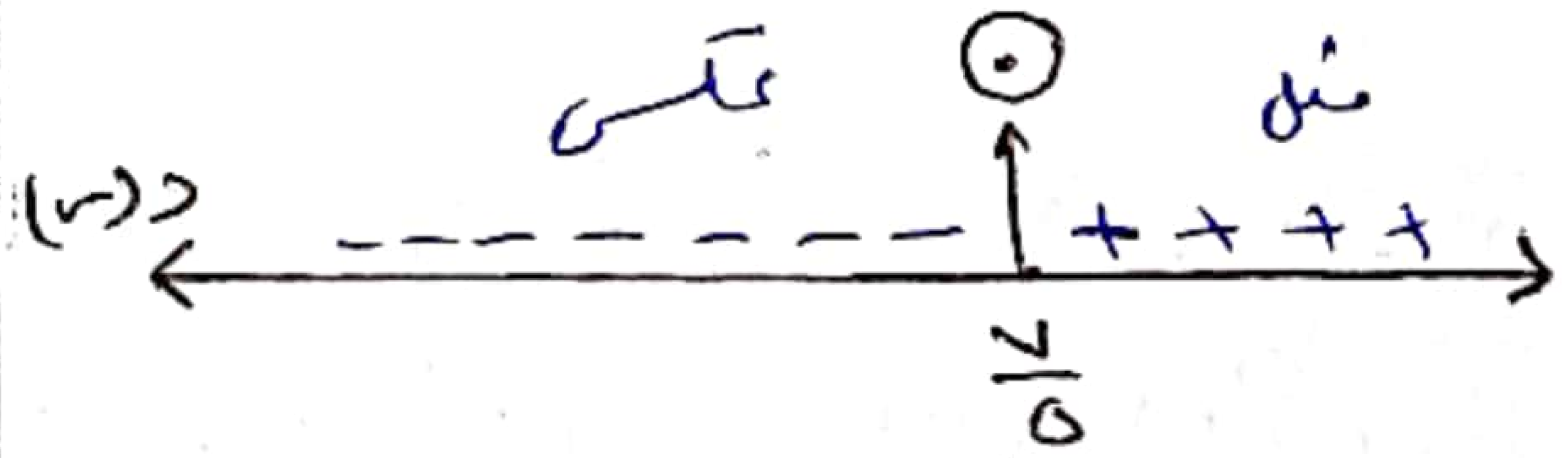
ابحث إشارة الدوال الآتية

(١) د(س) = ٥س - ٧

الحل

٥س - ٧ = ٠   س = $\frac{٧}{٥}$

نستخدم خط الأعداد



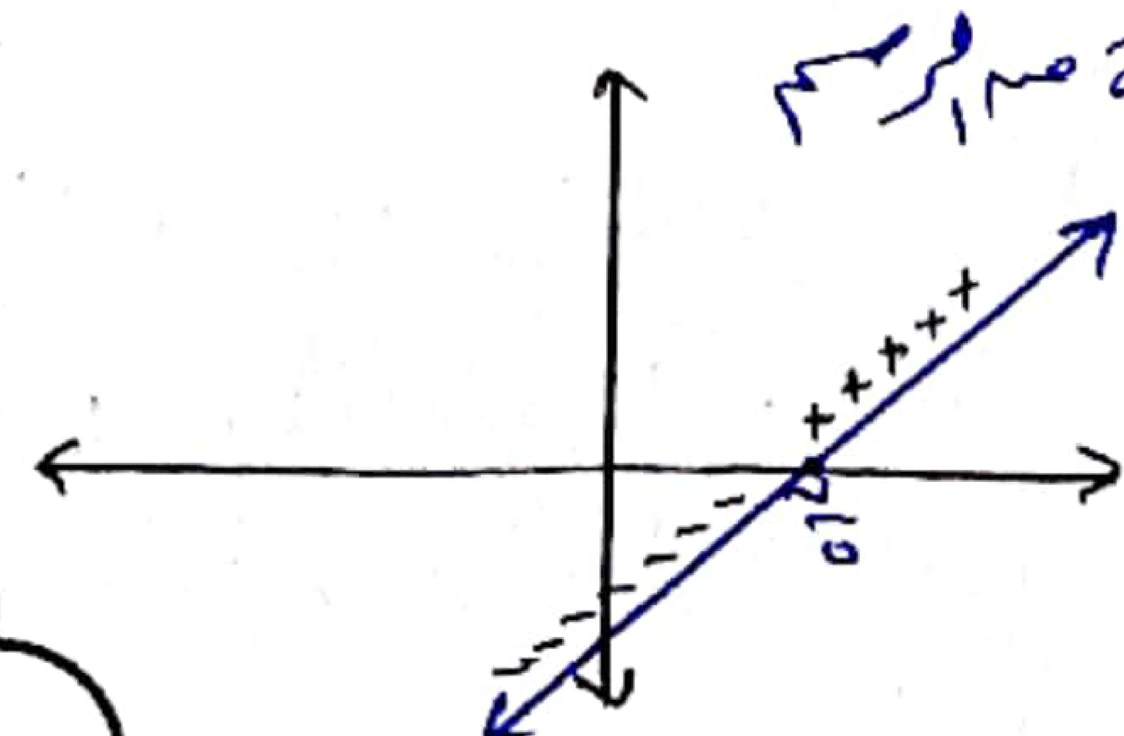
د(س) > ٠ عند س > $\frac{٧}{٥}$

أي في الفترة]$\frac{٧}{٥}$ ، ∞[

د(س) < ٠ عند س < $\frac{٧}{٥}$ في]-∞، $\frac{٧}{٥}$[

د(س) = ٠ عند س = $\frac{٧}{٥}$

لاحظ الإشارة من الرسم



+ موجب

٠ =

− سالب

اختر الإجابة الصحيحة

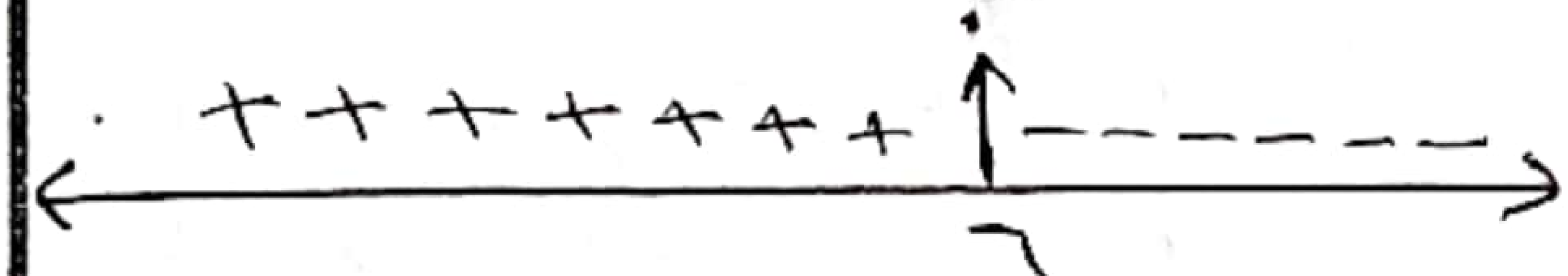
(١) د(س) = -٤ تكون سالبة في ...... ح

الحل ح =]-∞، ∞[

(٢) د(س) = ٦ - س موجبة في ......

الحل

٦ - س = ٠   س = ٦



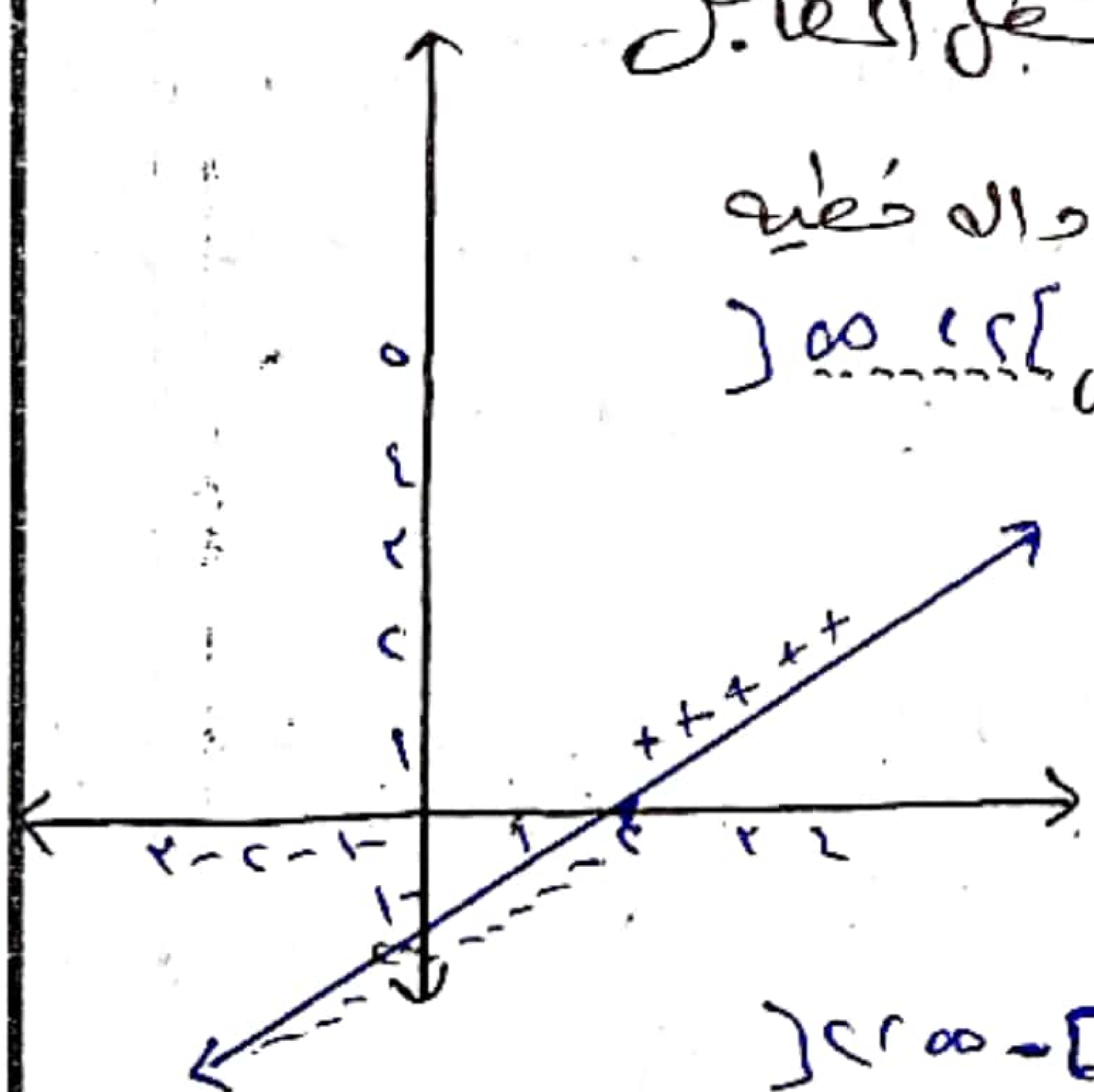
د(س) > ٠ في س < ٦

]-∞، ٦[

(٣) من الشكل المقابل

د(س) دالة خطية

موجبة في]٢، ∞[



سالبة في]-∞، ٢[

د(س) = ٠ عندما س = ٢

ثالثا: الدالة التربيعية

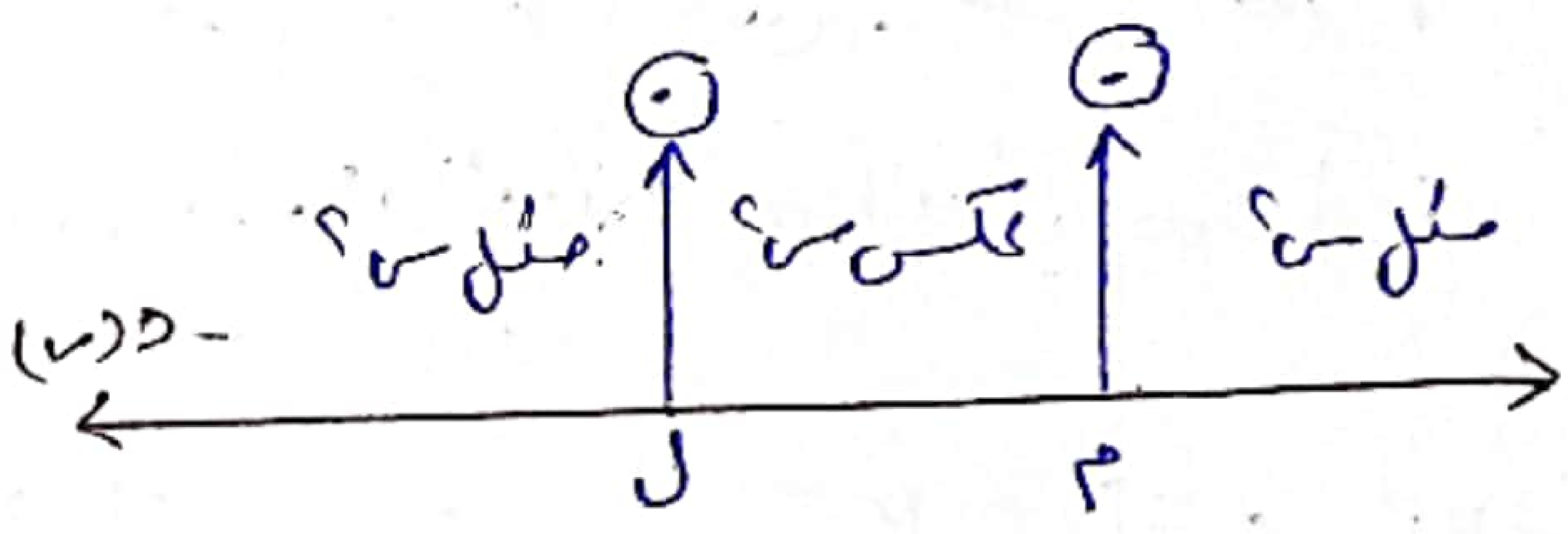
د(س) = أ س² + ب س + جـ

بوضع د(س) = ٠

أ س² + ب س + جـ = ٠

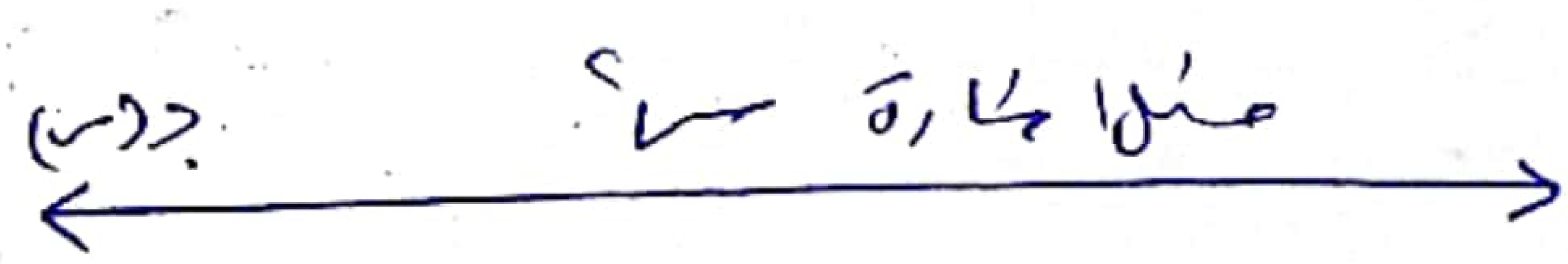
يوجد ثلاث حالات كما درسنا

① صفران مختلفان ل ، م



② صفران متساويان ل ، ل

③ مركبان غير حقيقيان ∉ ح



تذكر

بحث الإشارة بيانيا

- موجب: أعلى محور سينات
- = ٠: محور سينات تقاطع
- سالب: أسفل محور سينات

ابحث إشارة كل من الدوال الآتية

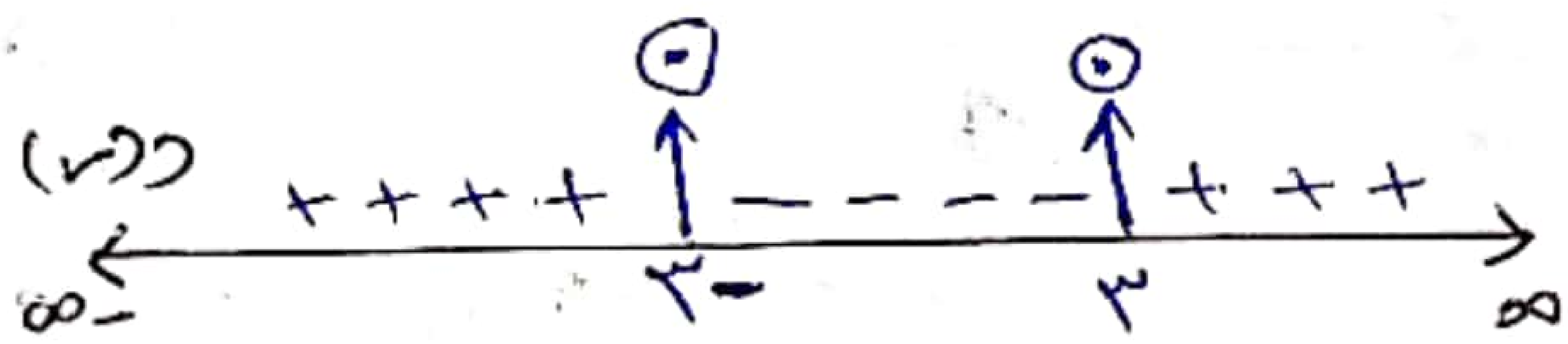
١) د(س) = س² − ٩

الحل

د(س) = ٠   س² − ٩ = ٠

(س − ٣)(س + ٣) = ٠

س = ٣   أو   س = −٣



د(س) > ٠ في ح − [−٣ ، ٣]

د(س) < ٠ في]−٣ ، ٣[

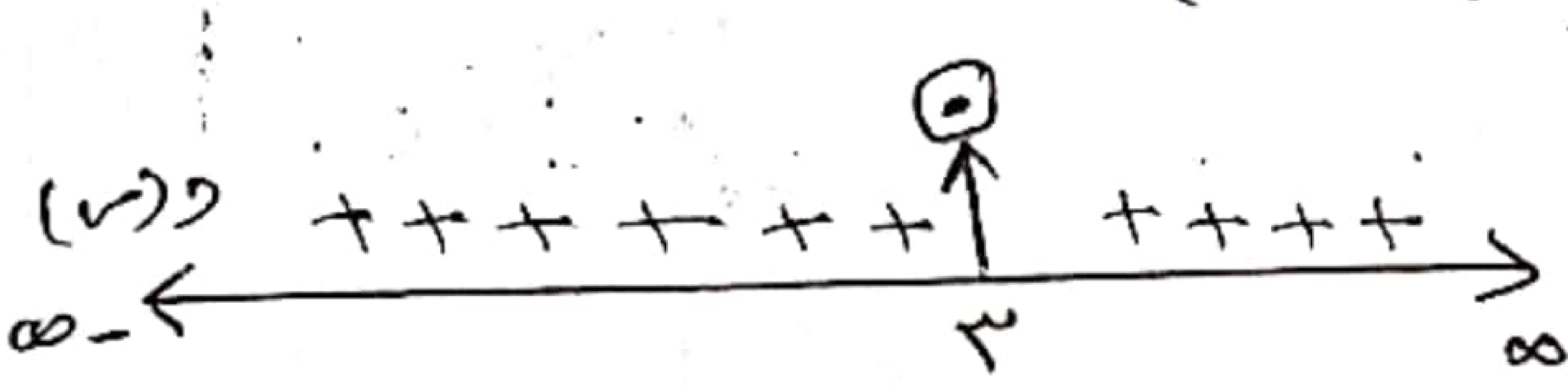
د(س) = ٠ في {−٣ ، ٣}

٢) د(س) = س² − ٦س + ٩

الحل

د(س) = ٠   س² − ٦س + ٩ = ٠

(س − ٣)² = ٠   حل وحيد



د(س) > ٠ في ح − {٣}

د(س) < ٠ في ∅

د(س) = ٠ في {٣}

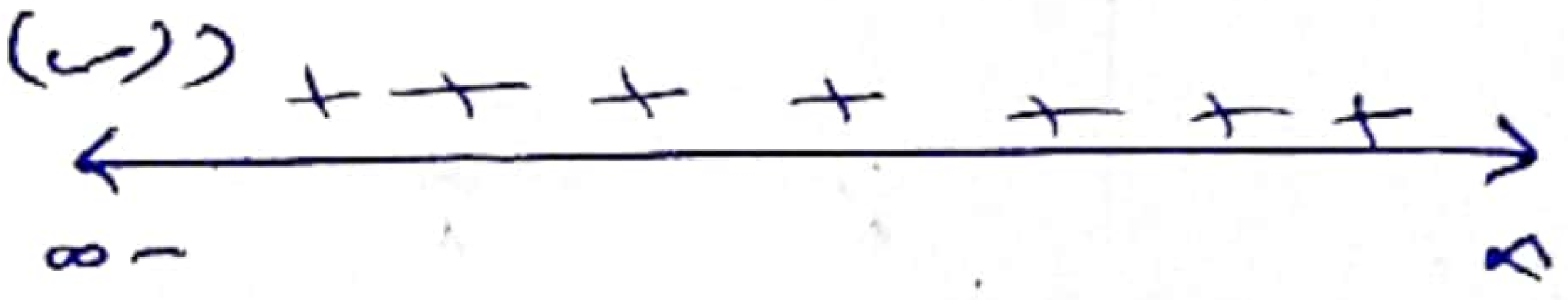
(٣) د(س) = ٢س² − ٣س + ٥

الحل

د(س) = ٠ ، ٢س² − ٣س + ٥ = ٠

المميز = ٩ − (٤×٢×٥) = −٣١ < ٠

لا توجد جذور حقيقية

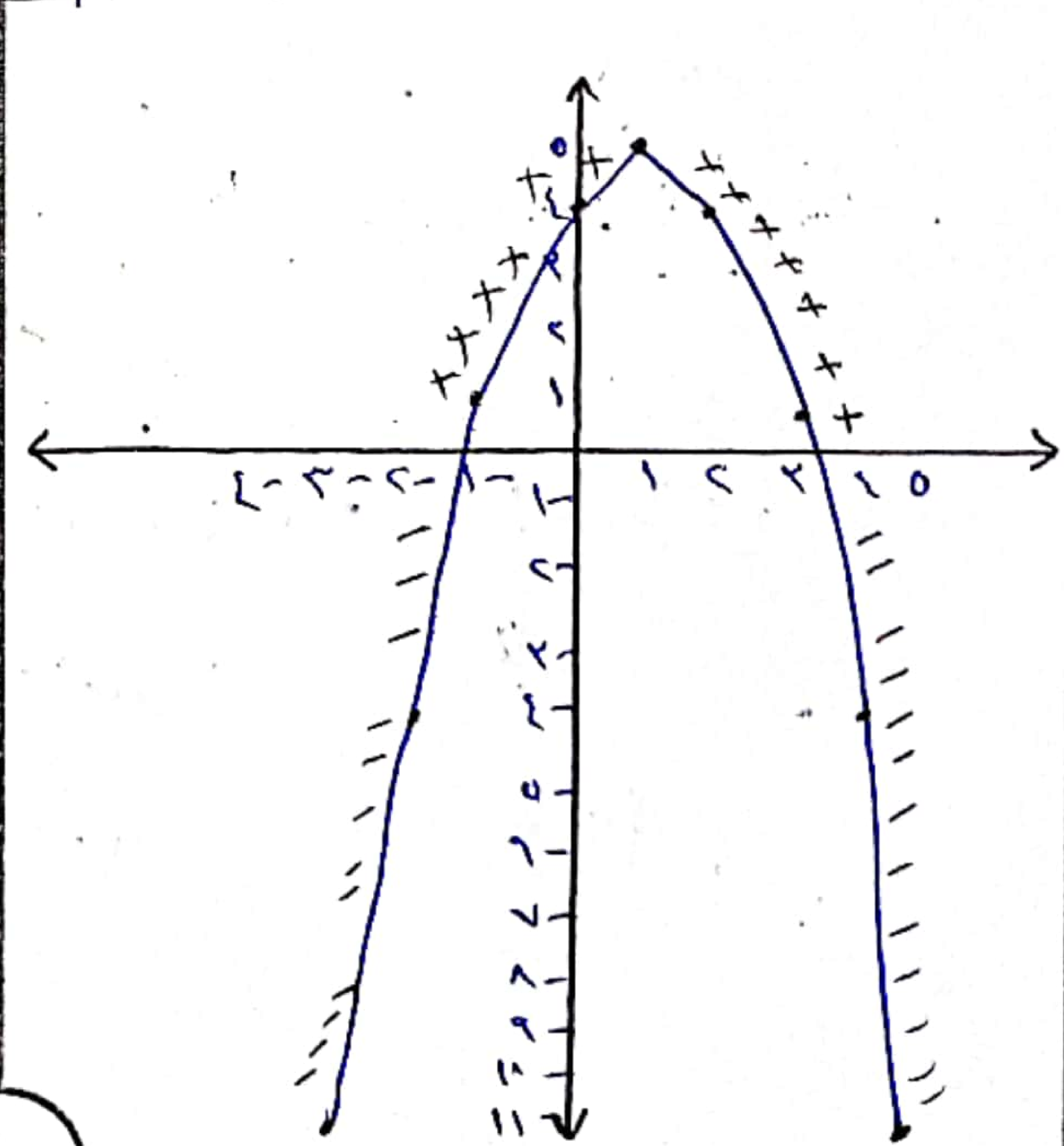


موجب لجميع قيم س ∈ ح

ارسم منحنى الدالة د(س) = −س² + ٢س + ٤ في [−٣، ٥] ومن الرسم عين إشارة الدالة في هذه الفترة

الحل

س	−٣	−٢	−١	٠	١	٢	٣	٤	٥
د(س)	−١١	−٤	١	٤	٥	٤	١	−٤	−١١



د(س) > ٠]−١,٢ ، ٣,٢[

د(س) < ٠ [−٣ ، −١,٢[∪]٣,٢ ، ٥]

د(س) = ٠ {−١,٢ ، ٣,٢}

حيث −١,٢ ، ٣,٢ قيم تقريبية للجذور

اذا كانت د١(س) = س − ٣ ، د٢(س) = ٥ + ٤س − س² بين متى تكون الدالتين سالبتين معًا.

الحل

د١(س) = ٠ ، س − ٣ = ٠ ، س = ٣

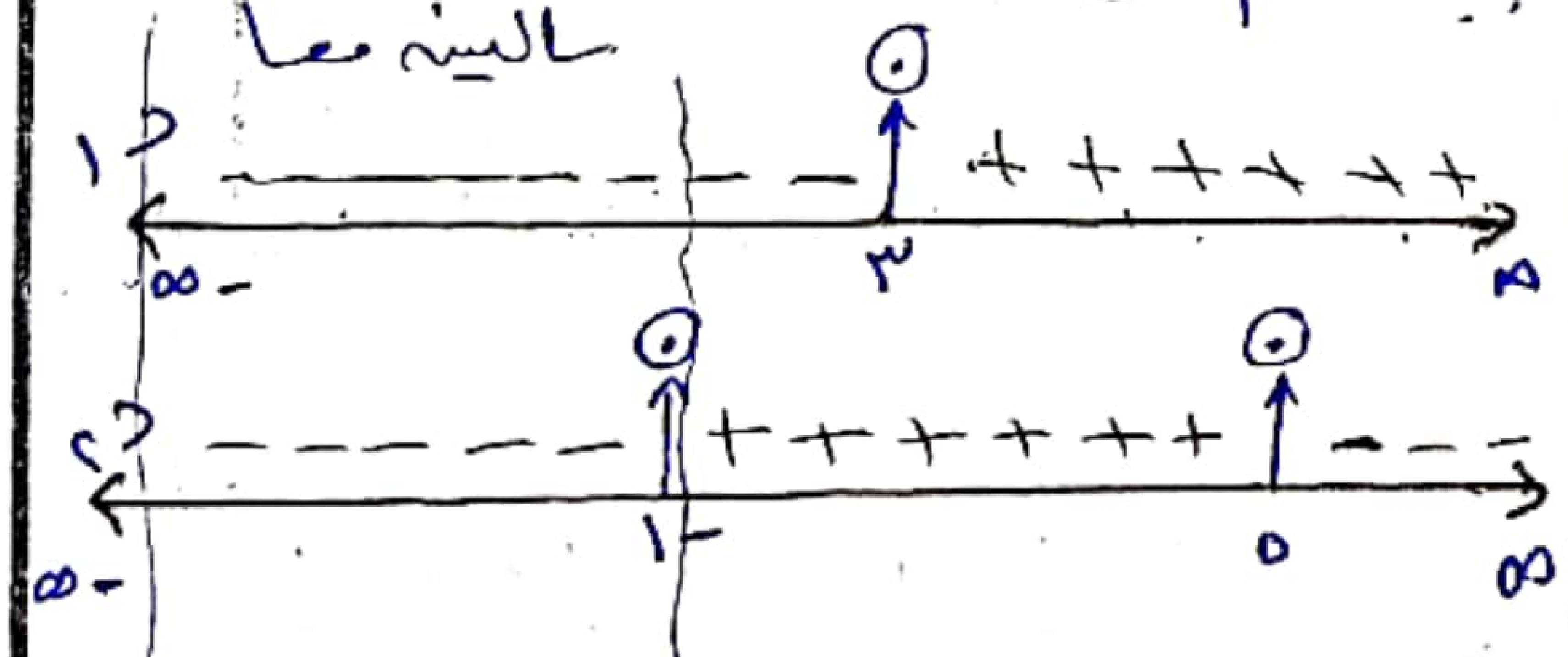
د٢(س) = ٠ ، ٥ + ٤س − س² = ٠

س² − ٤س − ٥ = ٠

(س − ٥)(س + ١) = ٠

س = ٥ ، س = −١

نبحث الإشارتين معًا



من الرسم الدالتين سالبتين معًا

في]−∞ ، −١[

الدرس السادس
متباينة الدرجة الثانية في مجهول واحد

خطوات الحل

① نكتب الدالة التربيعية المرتبطة

② ندرس إشارة الدالة التربيعية

③ نحدد الفترات التي تحقق المتباينة

المسائل

أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية

① س² + ٢س − ٨ > ٠

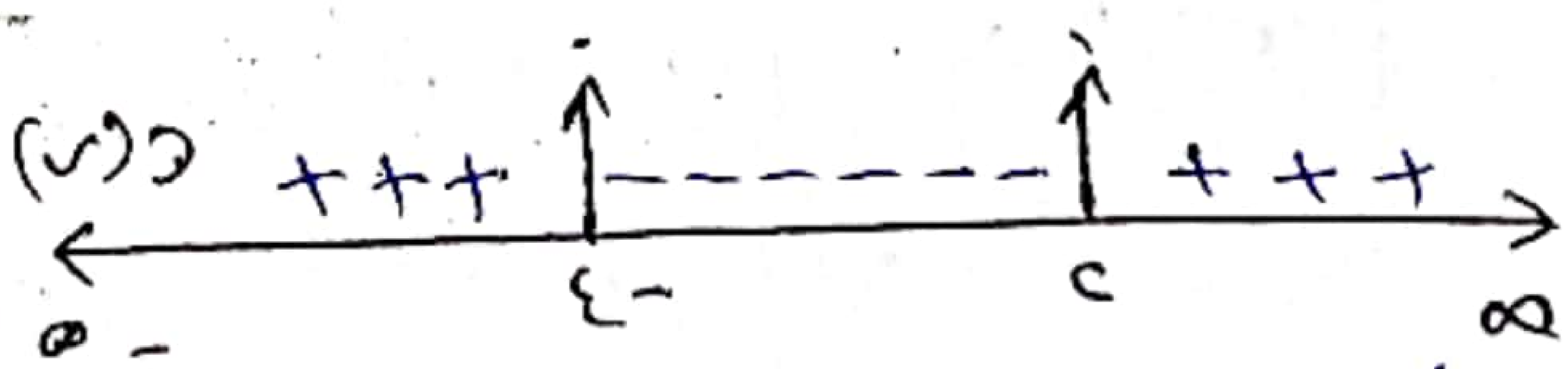
الحل

د(س) = س² + ٢س − ٨

د(س) = ٠   س² + ٢س − ٨ = ٠

(س − ٢)(س + ٤) = ٠

س = ٢   أو   س = −٤



المتباينة

د(س) > ٠   س ∈]−٤ ، ٢[

② س² ≥ ٩

الحل

س² − ٩ ≥ ٠

د(س) = س² − ٩

د(س) = ٠   س² − ٩ = ٠

(س − ٣)(س + ٣) = ٠

س = ٣   س = −٣

د(س) > ٠   ح − [−٣ ، ٣]

د(س) < ٠   ]−٣ ، ٣[✓

د(س) = ٠   {−٣ ، ٣} ✓

مجموعة حل المتباينة   د(س) ≥ ٠

ح −]−٣ ، ٣[∪ {−٣ ، ٣} = [−٣ ، ٣]

---

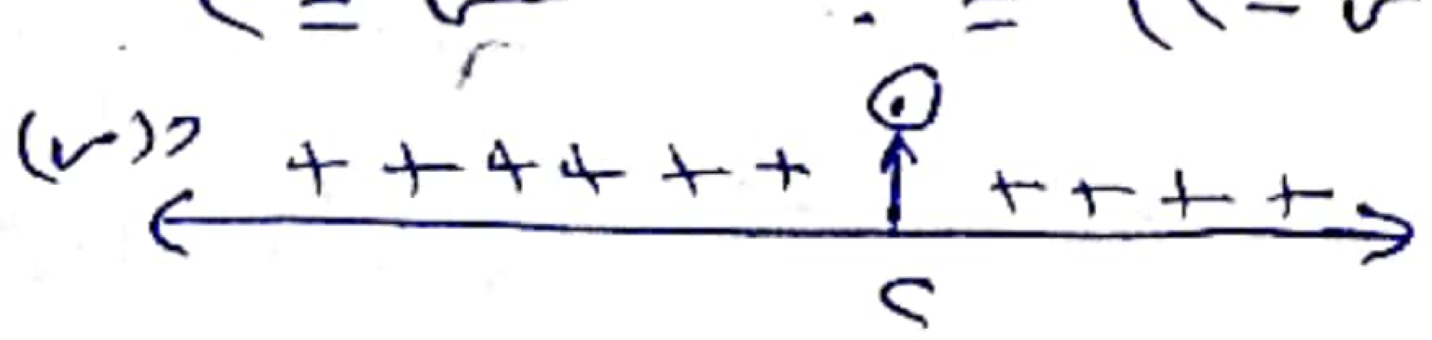
③ س² − ٤س + ٤ ≤ ٠

الحل

د(س) = س² − ٤س + ٤

د(س) = ٠   س² − ٤س + ٤ = ٠

(س − ٢)² = ٠   س = ٢



مجموعة حل المتباينة ح − {٢} ∪ {٢}

= ح

④ ٢س − س² < ٠

الحل

د(س) = ٢س − س²

د(س) = ٠ ∴ ٢س − س² = ٠ (×−١)

س² − ٢س = ٠ ∴ س(س − ٢) = ٠

س = ٠ أو س = ٢

د(س) − − − ٠ + + + ٢ − − −

مجموعة حل المتباينة د(س) < ٠

هي ح − [٠، ٢]

---

⑤ ٥ − ٢س ≥ س²

الحل

٥ − ٢س − س² ≥ ٠

د(س) = ٥ − ٢س − س²

د(س) = ٠ ∴ ٥ − ٢س − س² = ٠ (×−١)

س² + ٢س − ٥ = ٠

المميز = ٤ − ٤×١×−٥ = ٢٤ > ٠

الجذران هما {−١+√٦، −١−√٦}

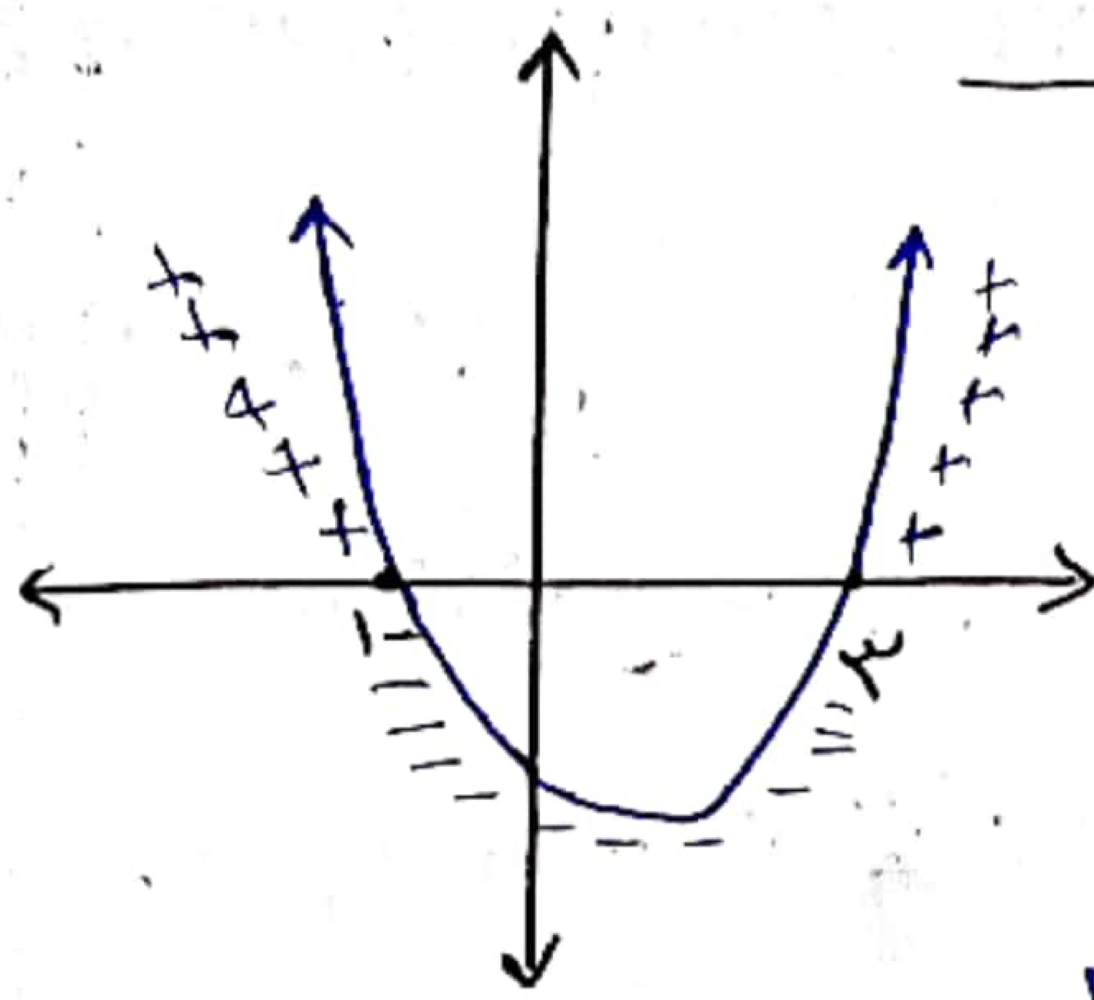
د(س) − − − − −١−√٦ + + + + + + + −١+√٦ − − − −

مجموعة حل المتباينة د(س) ≥ ٠

= ح −]−١−√٦، −١+√٦[

---

⑥ من الشكل المقابل د(س) منحنى دالة تربيعية فإن مجموعة حل المتباينة د(س) ≥ ٠ هي ـــــ



صفرا د: −١، ٣

د(س) > ٠ في ح − [−١، ٣]

د(س) = ٠ في {−١، ٣}

م.ح المتباينة ح −]−١، ٣[

أو]−∞، −١] ∪ [٣، ∞[

---

⑦ اذا كان مجموعة حل المتباينة التالية س² − ٤ ≥ س + ل هي [−٢، ٣] فإن ل = ــــ

الحل

المتباينة س² − س − ٤ − ل ≥ ٠

∵ مجموعة حل [−٢، ٣] ∴ {−٢، ٣} هما جذرا المعادلة المرتبطة

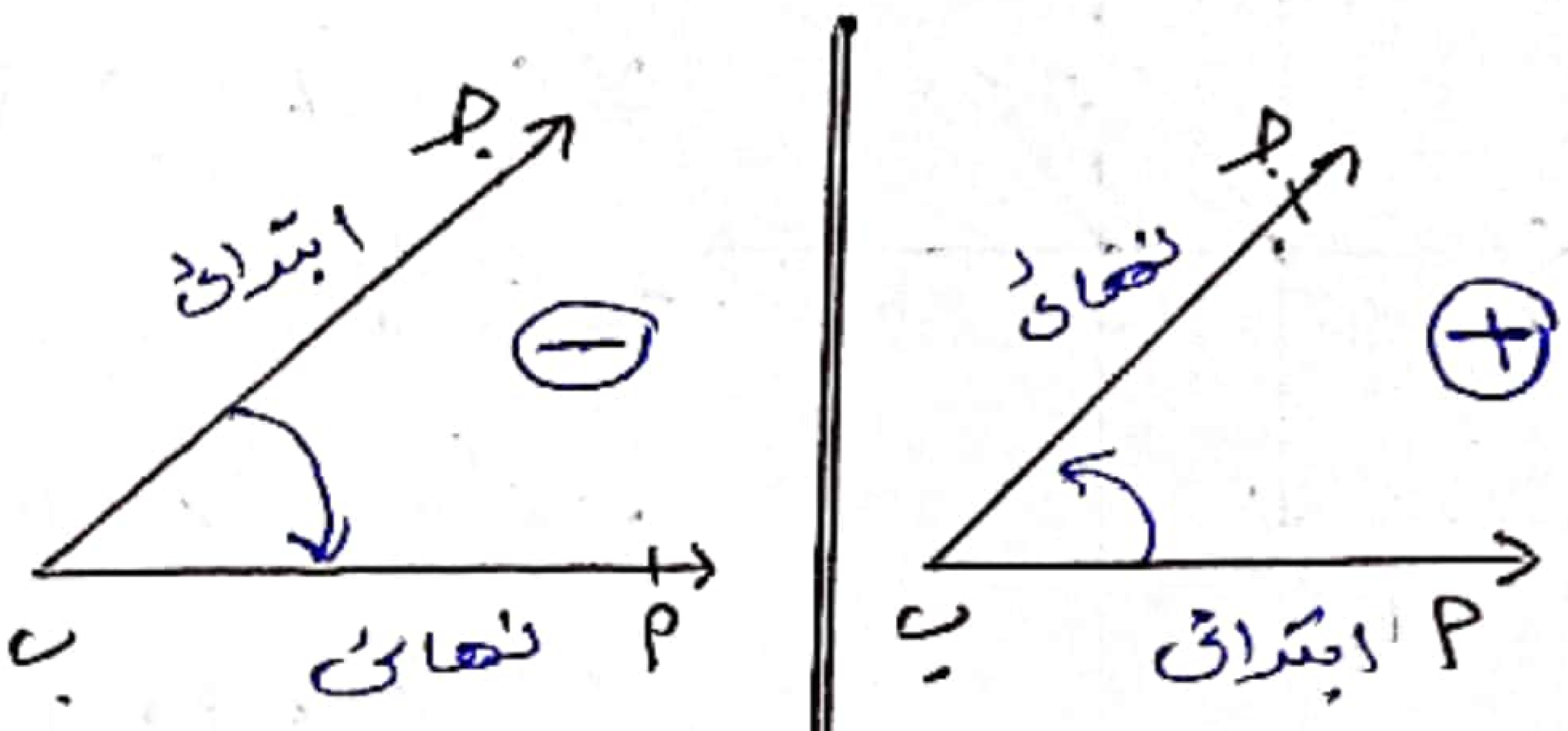
حاصل ضربهما = −٢×٣ = −٦ = (−٤ − ل)/١

∴ −٤ − ل = −٦ ⇐ ل = −٤ + ٦

ل = $\boxed{٢}$

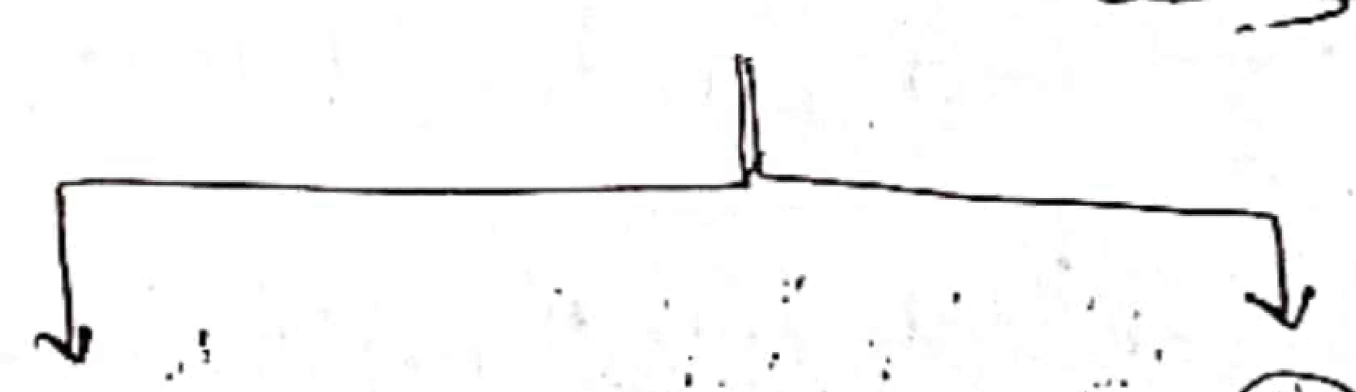
الدرس الأول
الزاوية الموجهة

زوج مرتب من شعاعين هما ضلعا الزاوية ولهما نقطة بداية واحدة هي رأس الزاوية.



$(\overrightarrow{بأ} ، \overrightarrow{بجـ})$ $(\overrightarrow{بجـ} ، \overrightarrow{بأ})$

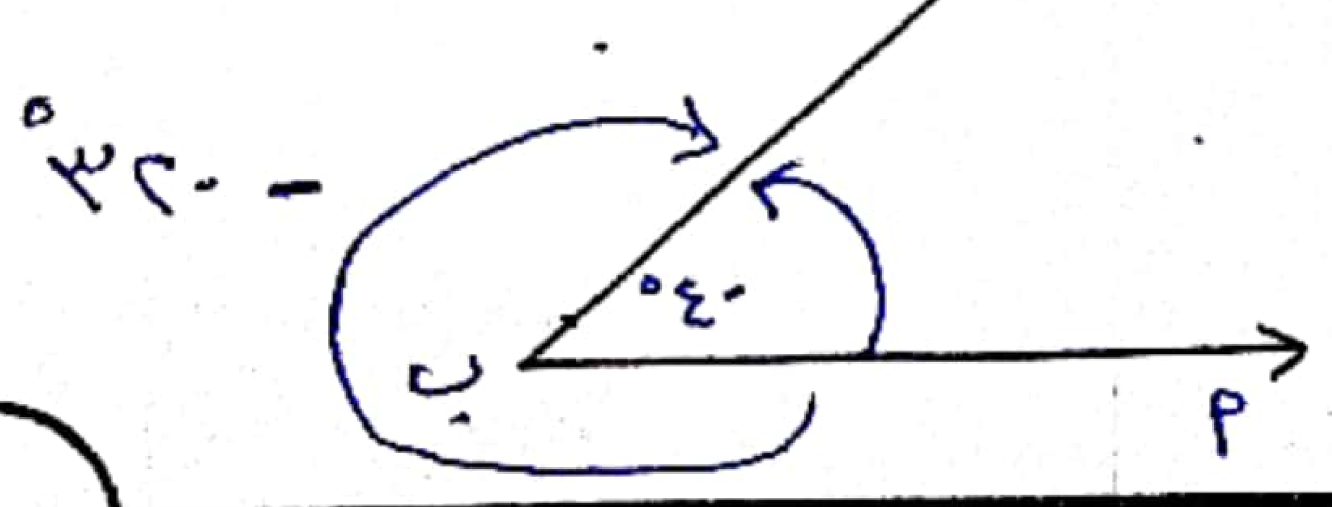
القياس الموجب والقياس السالب للزاوية الموجهة



+ عكس عقارب الساعة   − مع عقارب الساعة

لاحظ أن

لكل زاوية موجهة قياسان أحدهما موجب والآخر سالب



أي أن

القياس الموجب لزاوية موجهة سالبة = الزاوية + ٣٦٠°

القياس السالب لزاوية موجهة موجبة = الزاوية − ٣٦٠°

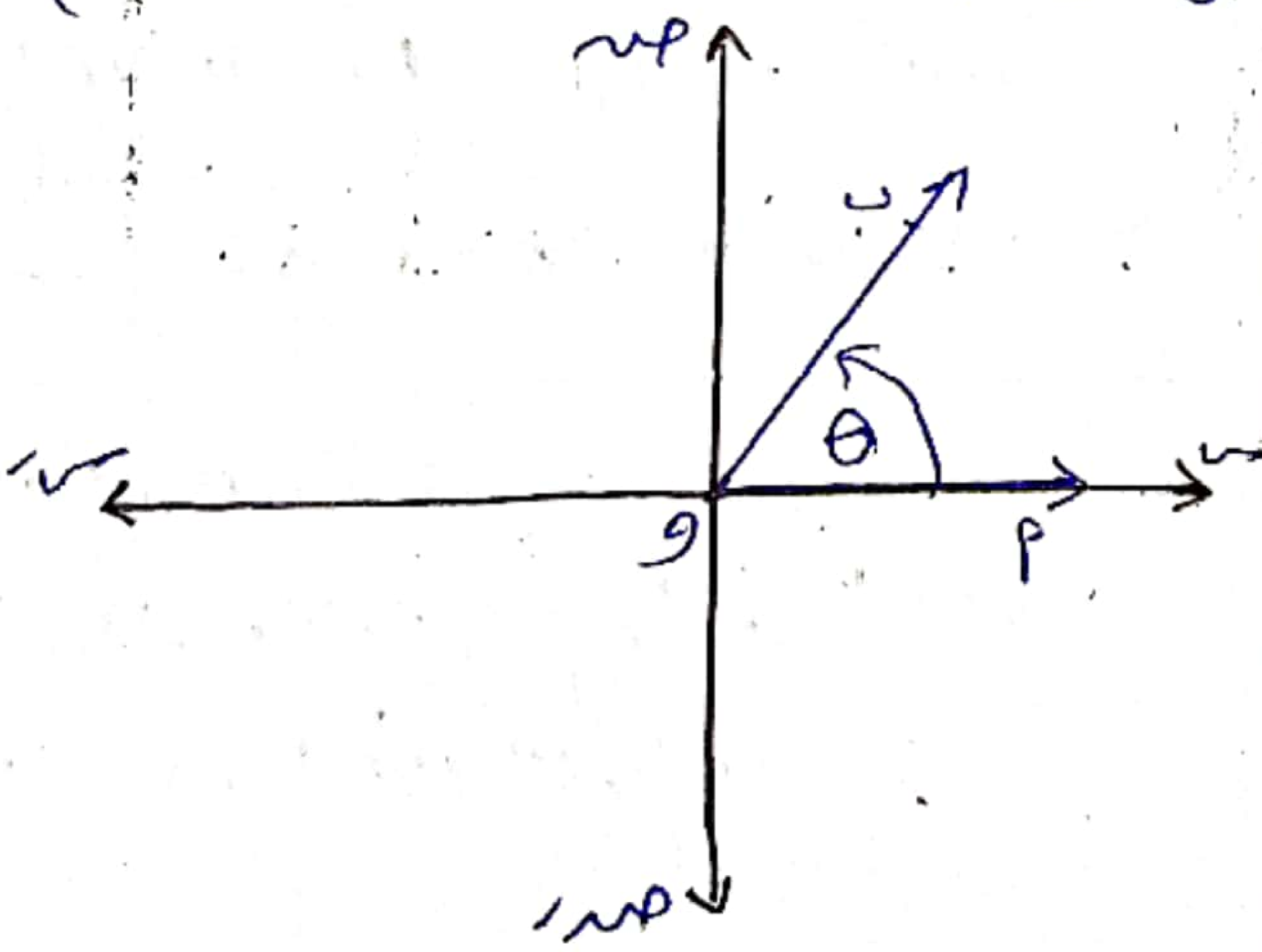
اكمل

① القياس السالب لزاوية موجهة قياسها ٥٠°
= ٥٠° − ٣٦٠° = −٣١٠°

② القياس الموجب لزاوية موجهة قياسها −٧٠
= −٧٠ + ٣٦٠ = ٢٩٠°

الوضع القياسي للزاوية الموجهة

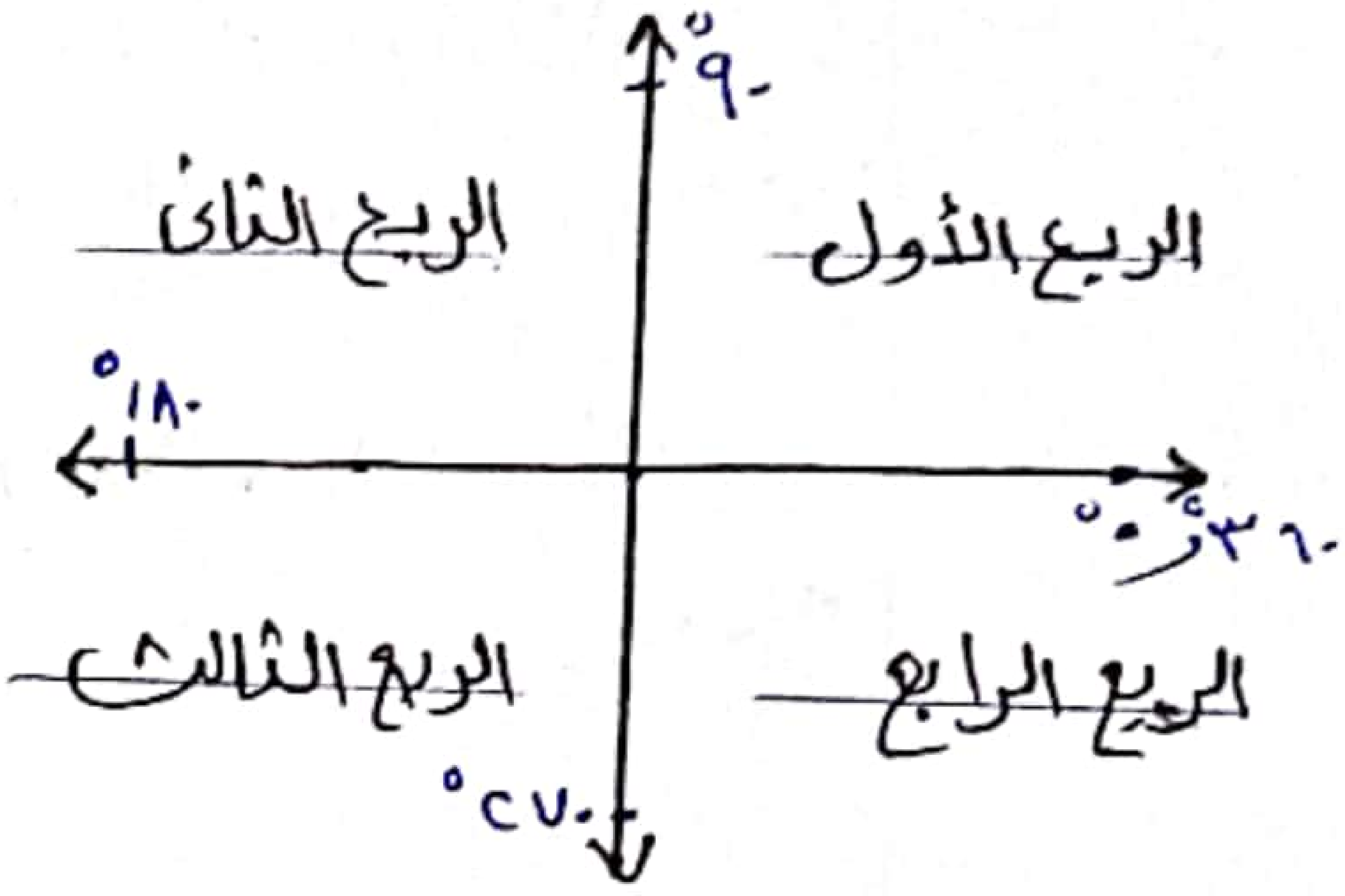
① ضلعها الابتدائي على الجزء الموجب لمحور س
② رأسها نقطة الأصل و (٠ ، ٠)



∠ أ و ب الموجهة تسمى θ (سيتا)

$(\overrightarrow{وأ} ، \overrightarrow{وب})$ في الوضع القياسي

موقع الزاوية الموجهة في الوضع القياسي

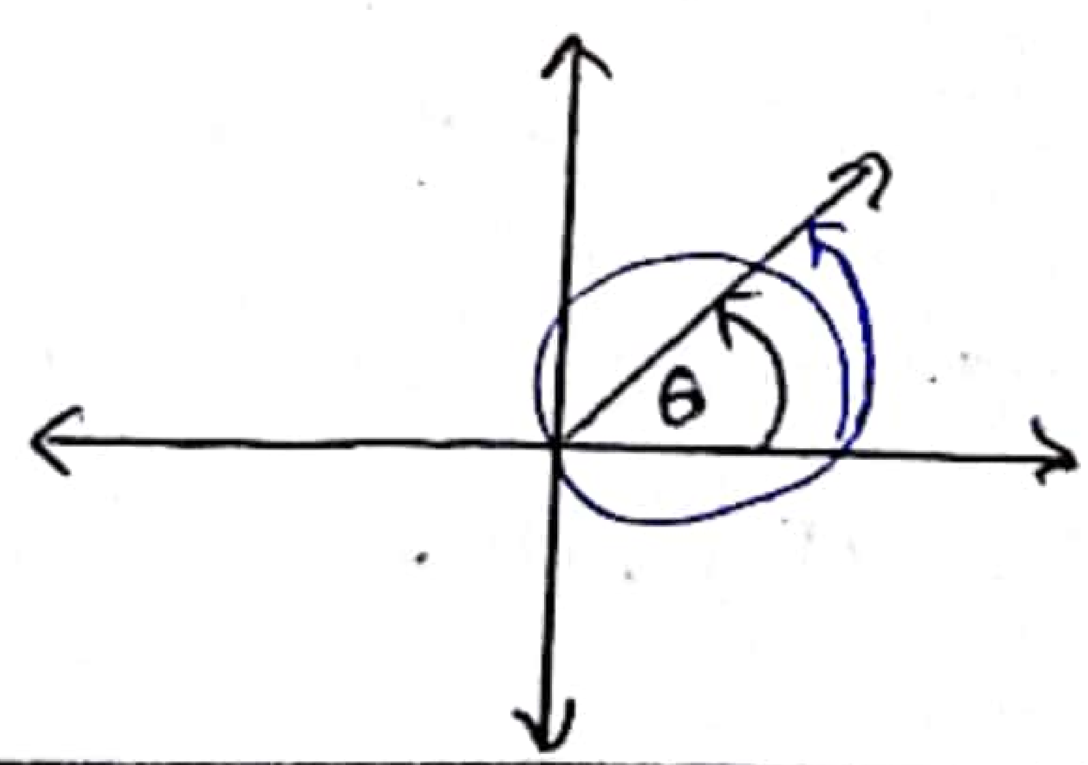


الربع	الزاوية
الأول	٠° < θ < ٩٠° أو]٠°، ٩٠°[
الثاني	٩٠° < θ < ١٨٠° أو]٩٠°، ١٨٠°[
الثالث	١٨٠° < θ < ٢٧٠° أو]١٨٠°، ٢٧٠°[
الرابع	٢٧٠° < θ < ٣٦٠° أو]٢٧٠°، ٣٦٠°[

الزاوية التي يقع ضلعها النهائي على محاور الإحداثيات تسمى زاوية ربعية
٠°، ٩٠°، ١٨٠°، ٢٧٠°، ٣٦٠°

الزوايا المتكافئة

هي الزوايا الموجهة في الوضع القياسي التي لها نفس الضلع النهائي.

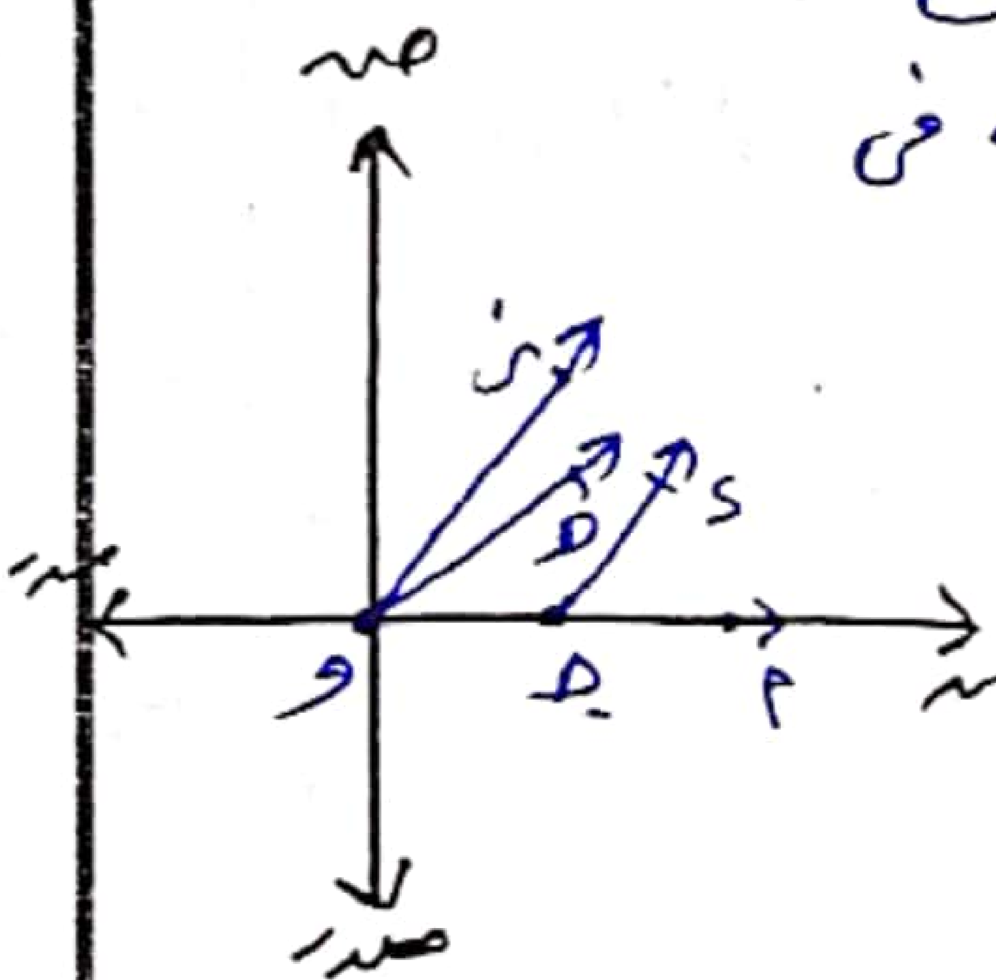


$$\boxed{\theta \equiv \theta \pm (ن \times ٣٦٠)}$$

حيث ن ∈ ص+

المسائل

(١) في الشكل المقابل:
أي الأزواج المرتبة في الوضع القياسي



(١) (جم، هد) ×
(٢) (وم، وهـ) ✓
(٣) (وهـ، هم) ×
(٤) (وم، وز) ✓

(٢) أكمل ما يأتي

(١) إذا كان θ أصغر قياس موجب للزاوية الموجهة فإن القياس السالب θ − ٣٦٠°

(٢) قياس الزاوية الربعية يكون أحد مضاعفات ٩٠°

(٣) الزاوية التي قياسها ٦٠° تكافئ في الوضع القياسي زاوية قياسها ٤٢٠°

٦٠ + ٣٦٠ = ٤٢٠°

③ الزاوية التي قياسها ٩٥٠° تقع في الربع الثالث

٩٥٠ − (٣٦٠ × ٢) = ٩٥٠ − ٧٢٠

= ٢٣٠ ⇐ الربع الثالث

---

④ الزاوية التي قياسها (−٨٥٠) تقع في الربع الثالث

−٨٥٠ + (٣٦٠ × ٣)

= −٨٥٠ + ١٠٨٠ = ٢٣٠ الثالث

---

⑤ اذا كان أ ، ٢أ − أ قياس زاويتين متكافئتين فإن إحدى قيم أ هي ١٨٠°

∵ أ ، ٢أ − أ متكافئتين

أ + ٢أ − أ = ٣٦٠°

٢أ = ٣٦٠ ⇐ أ = ١٨٠°

∴ أ = ١٨٠°

---

⑥ اذا كان الضلع النهائي لزاوية موجهة في وضعها القياسي يمر بالنقطة (−١ ، ٠) فإن قياسها تكون ________

زاوية ربعية

الدرس الثاني
القياس الستيني والقياس الدائري للزاوية

ⓐ القياس الستيني للزاوية (الدرجات)

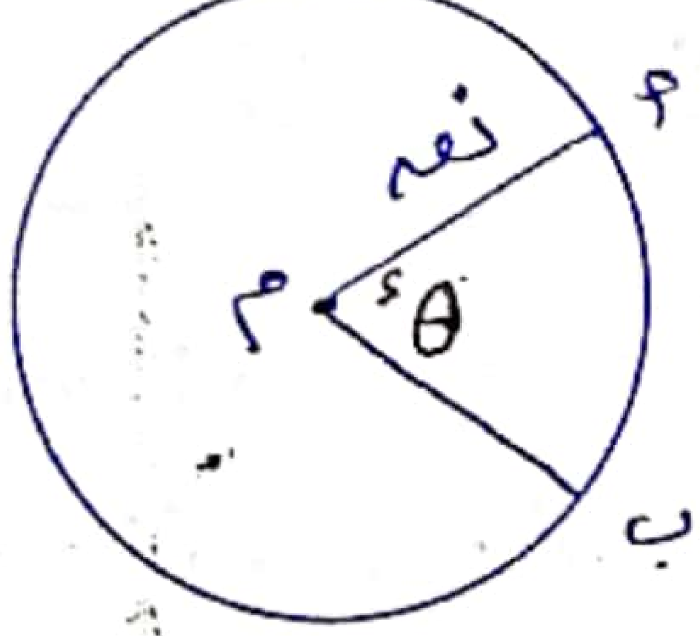
تقاس فيه الزاوية بالدرجات (س°)

١ درجة = ٦٠ دقيقة   ١° = ٦٠′

١ دقيقة = ٦٠ ثانية   ١′ = ٦٠″

ⓑ نستخدم مفتاح الدرجات $\boxed{\text{د د د ه}}$

القياس الدائري (الراديان)



$$\theta^{د} = \frac{ل}{نق}$$

هو خارج قسمة طول القوس ÷ نصف قطر الدائرة للزاوية المركزية.

$$\theta^{د} = \frac{ل}{نق}$$

$$ل = \theta^{د} \times نق$$

$$نق = \frac{ل}{\theta^{د}}$$

أوجد القياس الدائري لزاوية مركزية تحصر قوساً طوله ١٤ سم في دائرة طول نصف قطرها ٧ سم .

ل = ١٤ سم نق = ٧ سم

$\theta^{د} = \frac{ل}{نق} = \frac{١٤}{٧} = ٢^{د}$

أوجد طول نصف دائرة مرسوم بها زاوية مركزية قياسها ٠,٧٦٧ د وطول القوس المقابل لها ٣٨,٣٥ سم .

$\theta^{د} = ٠,٧٦٧^{د}$ ل = ٣٨,٣٥ سم

$نق = \frac{ل}{\theta^{د}} = \frac{٣٨,٣٥}{٠,٧٦٧} = ٥٠$ سم

أوجد لأقرب جزء من عشرة طول قوس من دائرة طول نق = ٢٠ سم ويقابل زاوية مركزية قياسها ٢,٤٣ د

الحل

نق = ٢٠ سم ، $\theta^{د} = ٢,٤٣^{د}$

ل = $\theta^{د}$ × نق

= ٢٠ × ٢,٤٣

= ٤٨,٦ سم .

العلاقة بين القياسين الستيني والدائري

س° الستيني $\theta^{د}$ الراديان

$$\boxed{\frac{س^{\circ}}{١٨٠^{\circ}} = \frac{\theta^{د}}{\pi}}$$

$$\theta^{د} = س^{\circ} \times \frac{\pi}{١٨٠}$$

$$س^{\circ} = \theta^{د} \times \frac{١٨٠}{\pi}$$

زاوية مركزية قياسها = ٦٠° أوجد قياسها الدائري بدلالة π .

$\theta^{د} = ٦٠^{\circ} \times \frac{\pi}{١٨٠} = \frac{\pi}{٣}^{د}$

زاوية مركزية قياسها ١٦″ ١٩′ ٣٠° أوجد لأقرب رقم عشري واحد قياسها بالراديان

$\theta^{د} = ٣٠^{\circ}\ ١٩'\ ١٦'' \times \frac{\pi}{١٨٠} \simeq ٠,١^{د}$

زاوية مركزية قياسها ٢٥′ ٨٠° أوجد قياسها بالراديان لأقرب ثلاثة أرقام

$\theta^{د} = ٢٥'\ ٨٠^{\circ} = ١,٤٠٤^{د}$

أوجد بالدرجات قياس زاوية مركزية قياسها بالراديان كالآتي

① $٣,٧^{ء}$

س° = ٣,٧ × $\frac{١٨٠}{ط}$ = ٢١١° ٥٩َ ٤٠ً

② $\frac{٣ط}{٤}^{ء}$

س° = $\frac{٣ط}{٤}$ × $\frac{١٨٠}{ط}$ = ١٣٥°

③ − ٣ $\frac{١}{٢}^{ء}$

س° = − ٣ $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١٨٠}{ط}$ = −(٢٠٠° ٣٢َ ٧ً)

أكمل ما يأتي :

① الزاوية التي قياسها $\frac{٣١ط}{٦}$ تقع في الربع الثالث

س° = $\frac{٣١ط}{٦}$ × $\frac{١٨٠}{ط}$ = ٩٣٠°

س° = ٩٣٠° − (٣٦٠×٢) = ٢١٠°

∴ س° في الربع الثالث

② الزاوية التي قياسها $\frac{-١٩ط}{٤}$ تقع في الربع الرابع

س° = $\frac{-١٩ط}{٤}$ × $\frac{١٨٠}{ط}$ = −٤٠٥°

س° = −٤٠٥° + (٣٦٠×٢)

= ٣١٥° الربع الرابع

⑤ طول القوس من دائرة طول قطرها ١٢ سم ويقابل زاوية مركزية قياسها ٦٠° = ... ط

الحل

$θ^{ء}$ = ٦٠ × $\frac{ط}{١٨٠}$ = $\frac{ط}{٣}^{ء}$

ل = $θ^{ء}$ × نق = ٦ × $\frac{ط}{٣}$ = ٢ط سم

④ إذا كانت إحدى زوايا مثلث ٧٥° والزاوية الثانية $\frac{ط}{٣}$ فإن الثالثة بالراديان = ...

الزاوية الثانية = $\frac{ط}{٣}$ × $\frac{١٨٠}{ط}$ = ٦٠°

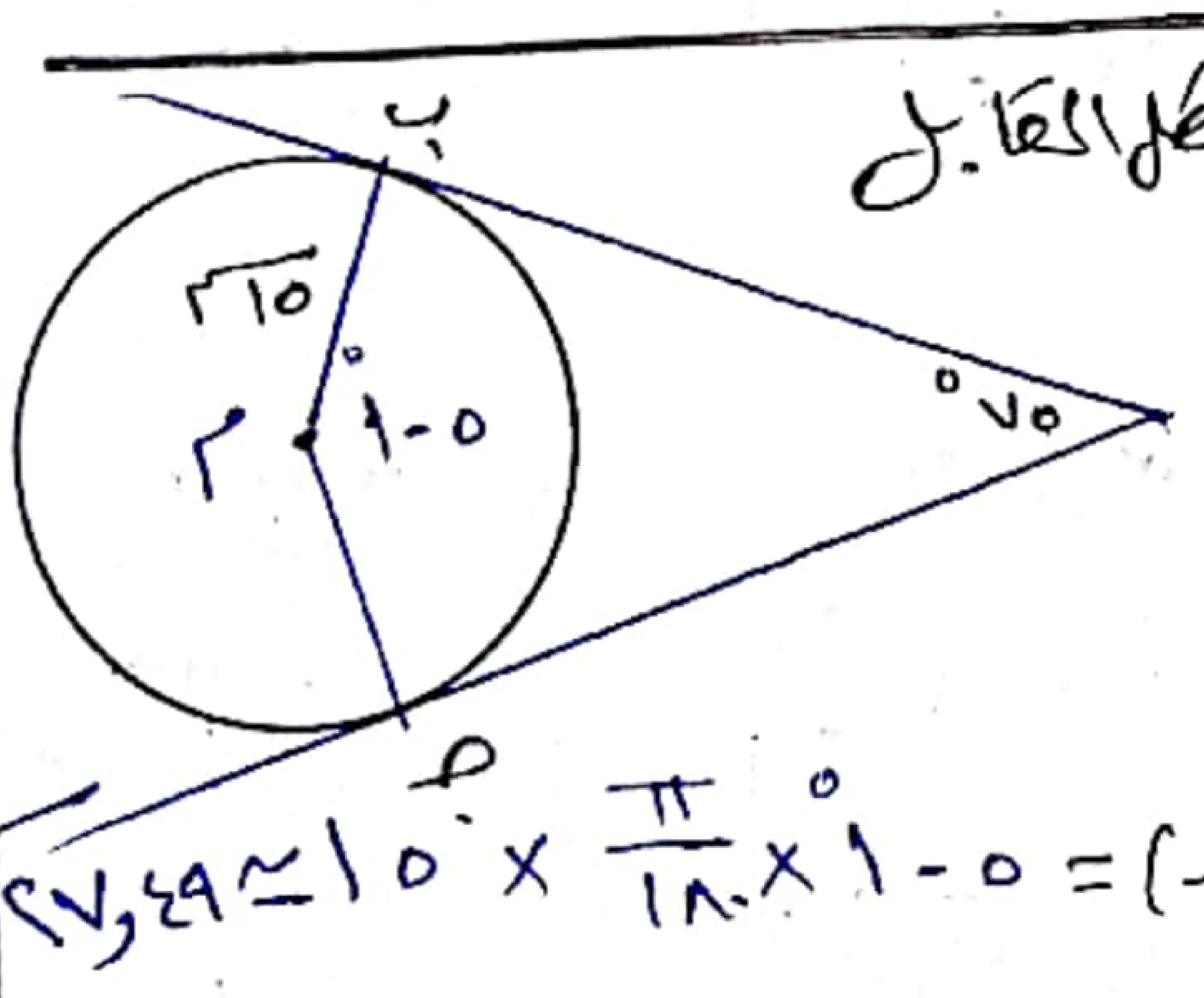
∴ الثالثة = ١٨٠ − (٧٥+٦٠) = ٤٥°

$θ^{ء}$ = ٤٥° × $\frac{ط}{١٨٠}$ = $\frac{ط}{٤}^{ء}$

⑤ في الدائرة التي طول نصف قطرها الوحدة يكون قياس الزاوية المركزية بالراديان = ...

$θ^{ء}$ = $\frac{ل}{نق}$ = ل = طول قوس

⑥ في الشكل المقابل



ق($\overset{\frown}{ب جـ}$) = ١٠٥° × $\frac{ط}{١٨٠}$ × ١٥ ≈ ٢٧,٤٩ سم

الزوايا الخاصة بالراديان

$60^\circ = 60^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}^{د}$

$30^\circ = 30^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6}^{د}$

$45^\circ = 45 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4}^{د}$

الزوايا الربعية بالراديان

$0^\circ = 0 \times \frac{\pi}{180} = 0^{د}$

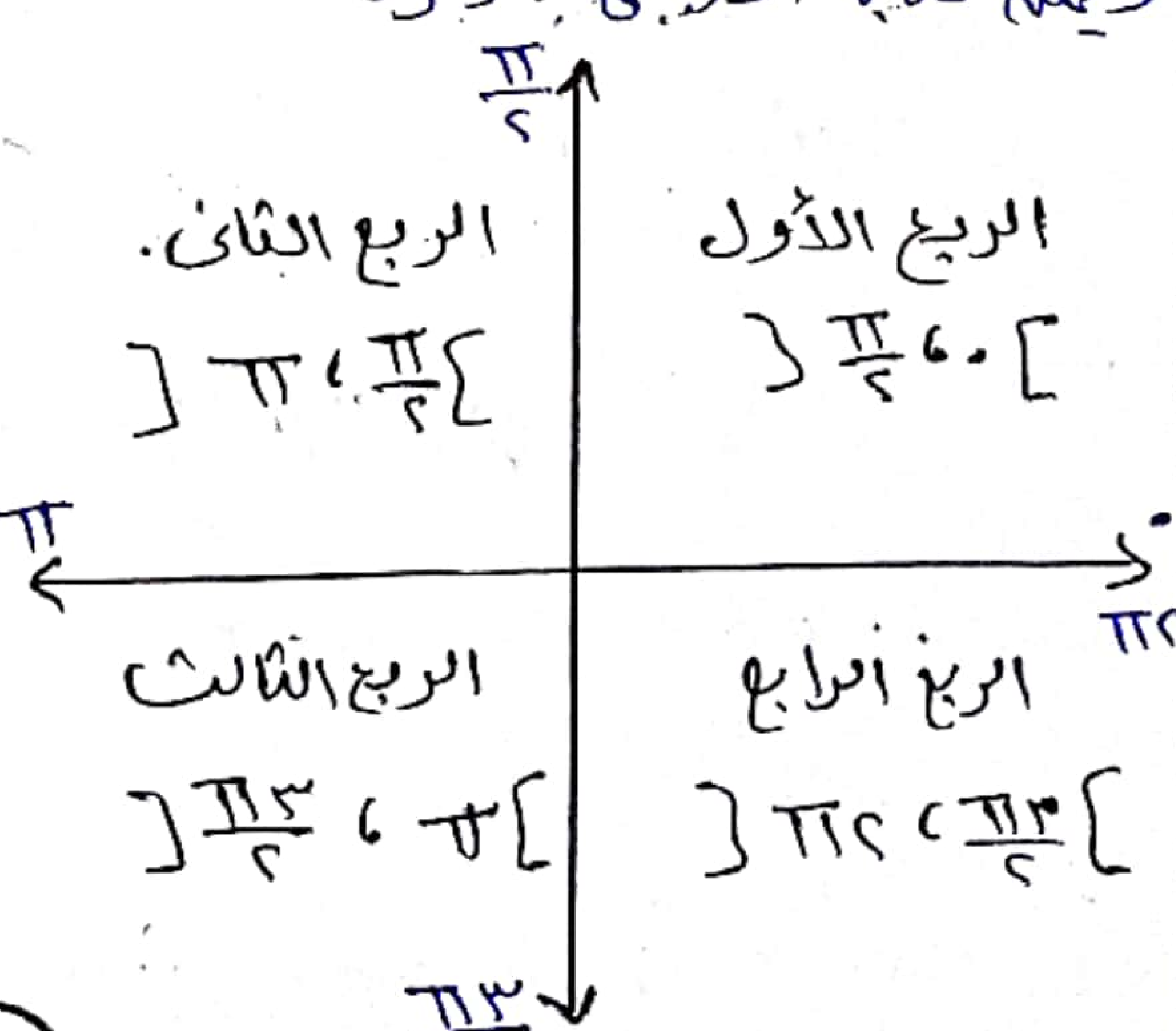
$90^\circ = 90 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{2}^{د}$

$180^\circ = 180^\circ \times \frac{\pi}{180} = \pi^{د}$

$270^\circ = 270^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{2}^{د}$

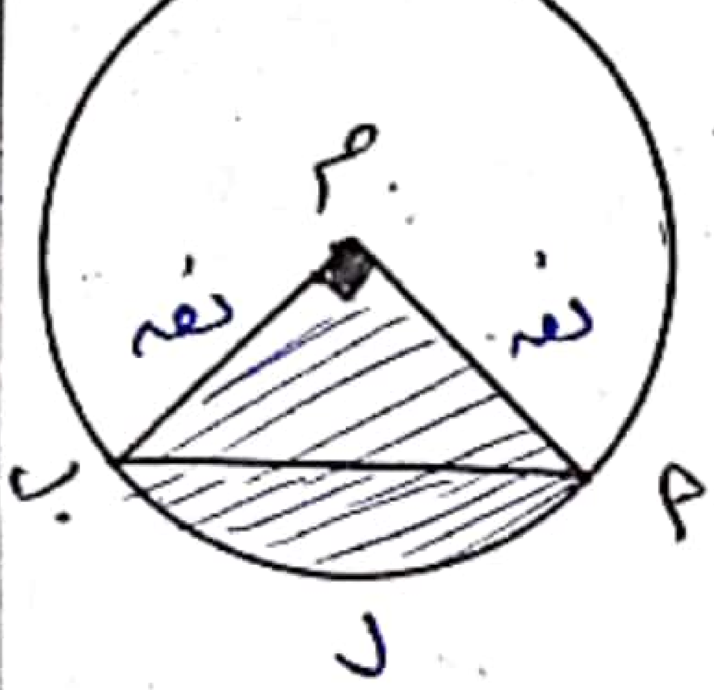
$360^\circ = 360 \times \frac{\pi}{180} = 2\pi^{د}$

ويمكن كتابة الأرباع بالدائري كالآتي



إذا كانت مساحة Δ م أ ب = ٣٢ سم²
أوجد محيط الشكل المظلل لأقرب رقمين

الحل



مساحة Δ م أ ب $= \frac{1}{2}$ نق × نق

$\frac{1}{2}$ نق² = ٣٢

نق² = ٦٤ ⟸ نق = ٨ سم

ق(∠م) $= 90^\circ = \frac{\pi}{2}^{د}$

ل = $\theta^{د}$ × نق = $\frac{\pi}{2} \times 8 = 4\pi$ سم

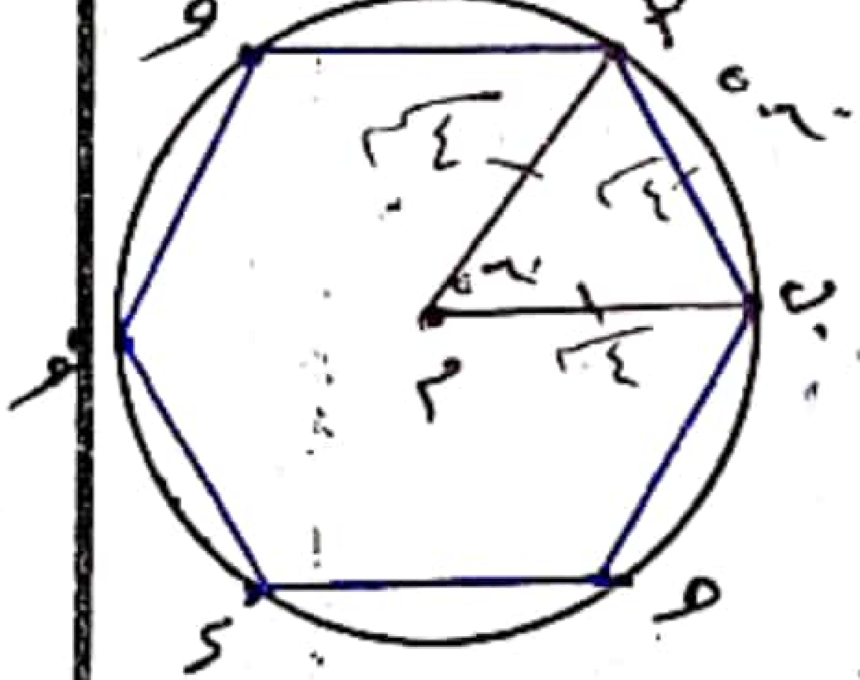
∴ المحيط = ٢ نق + ل

$= 16 + 4\pi \simeq 28,57$ سم

في الشكل المقابل

أ ب جـ د هـ و سداسي منتظم
طول ضلعه ٤ سم
مرسوم داخل دائرة
فإن طول $\overset{\frown}{أب}$ = ...

الحل



∵ الشكل منتظم ∴ ق($\overset{\frown}{أب}$) $= \frac{360}{6}$

$= 60^\circ$ ∴ ق(∠أ م ب) $= 60^\circ = \frac{\pi}{3}^{د}$

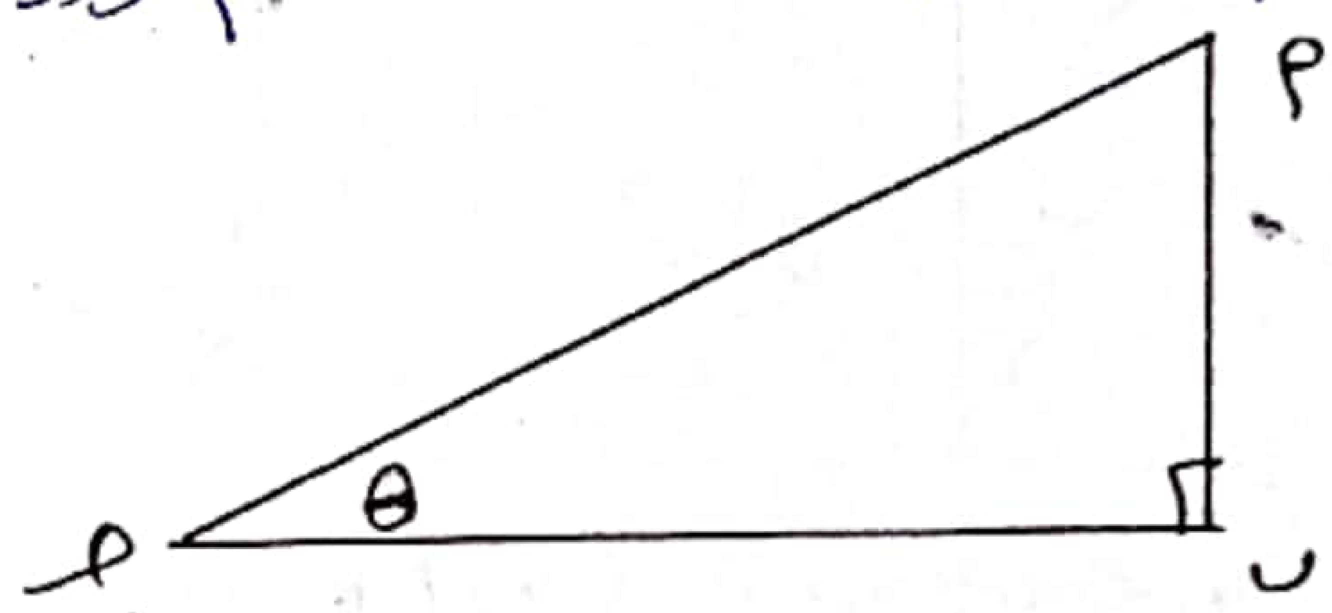
∵ Δ أ م ب متساوي الأضلاع ⟸ نق = ٤ سم

طول $\overset{\frown}{أب}$ = ل = $\theta^{د}$ × نق

$= \frac{\pi}{3} \times 4 = \frac{4\pi}{3}$ سم

الدرس الثالث
الدوال المثلثية

نعلم أنه في $\triangle$ أ ب جـ القائم الزاوية في ب



$$جا\,\theta = \frac{المقابل}{الوتر} = \frac{أ ب}{أ جـ}$$

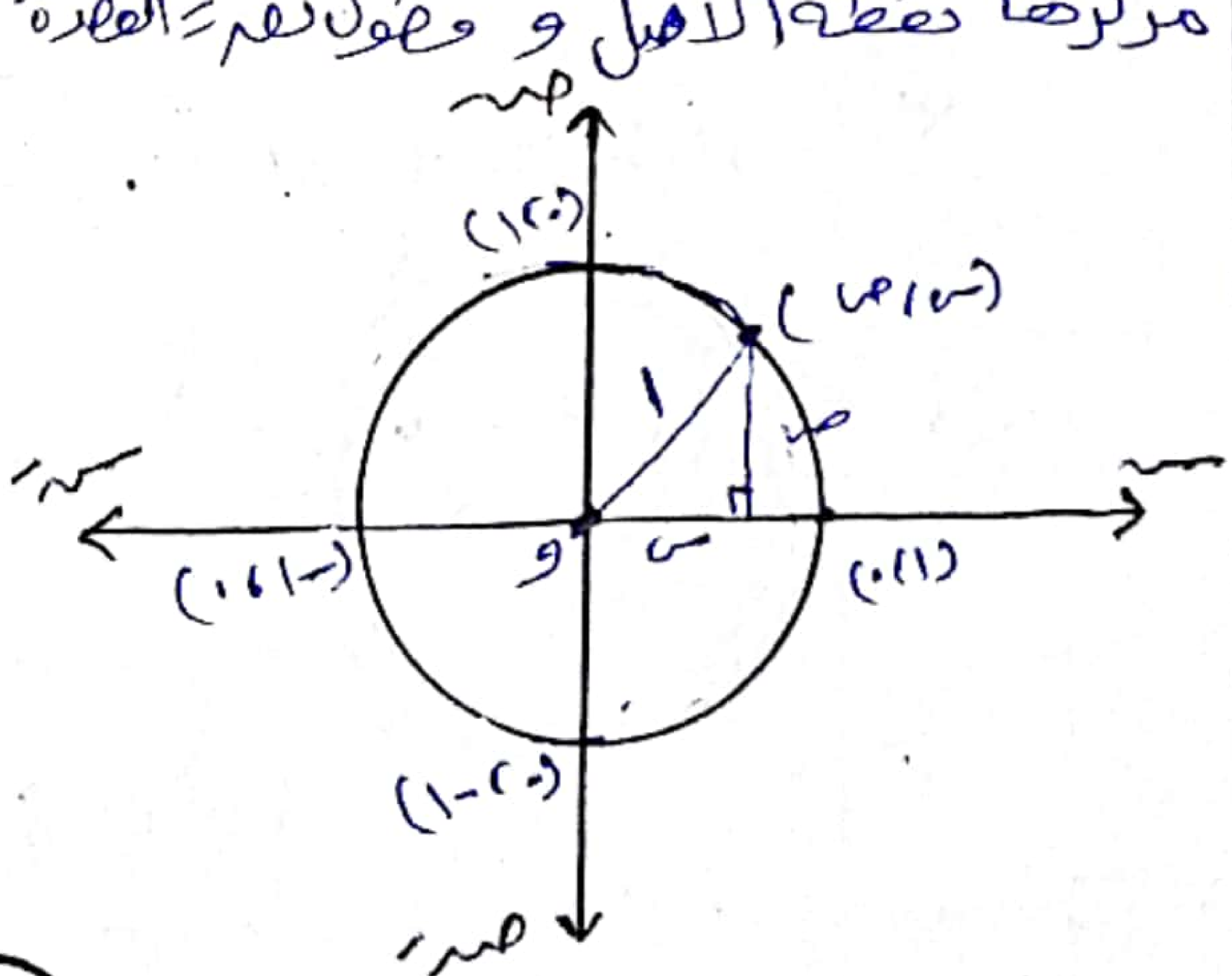
$$جتا\,\theta = \frac{المجاور}{الوتر} = \frac{ب جـ}{أ جـ}$$

$$ظا\,\theta = \frac{المقابل}{المجاور} = \frac{أ ب}{ب جـ}$$

تسمى هذه النسب بالدوال المثلثية

دائرة الوحدة

مركزها نقطة الأصل و طول نصف قطرها = الوحدة

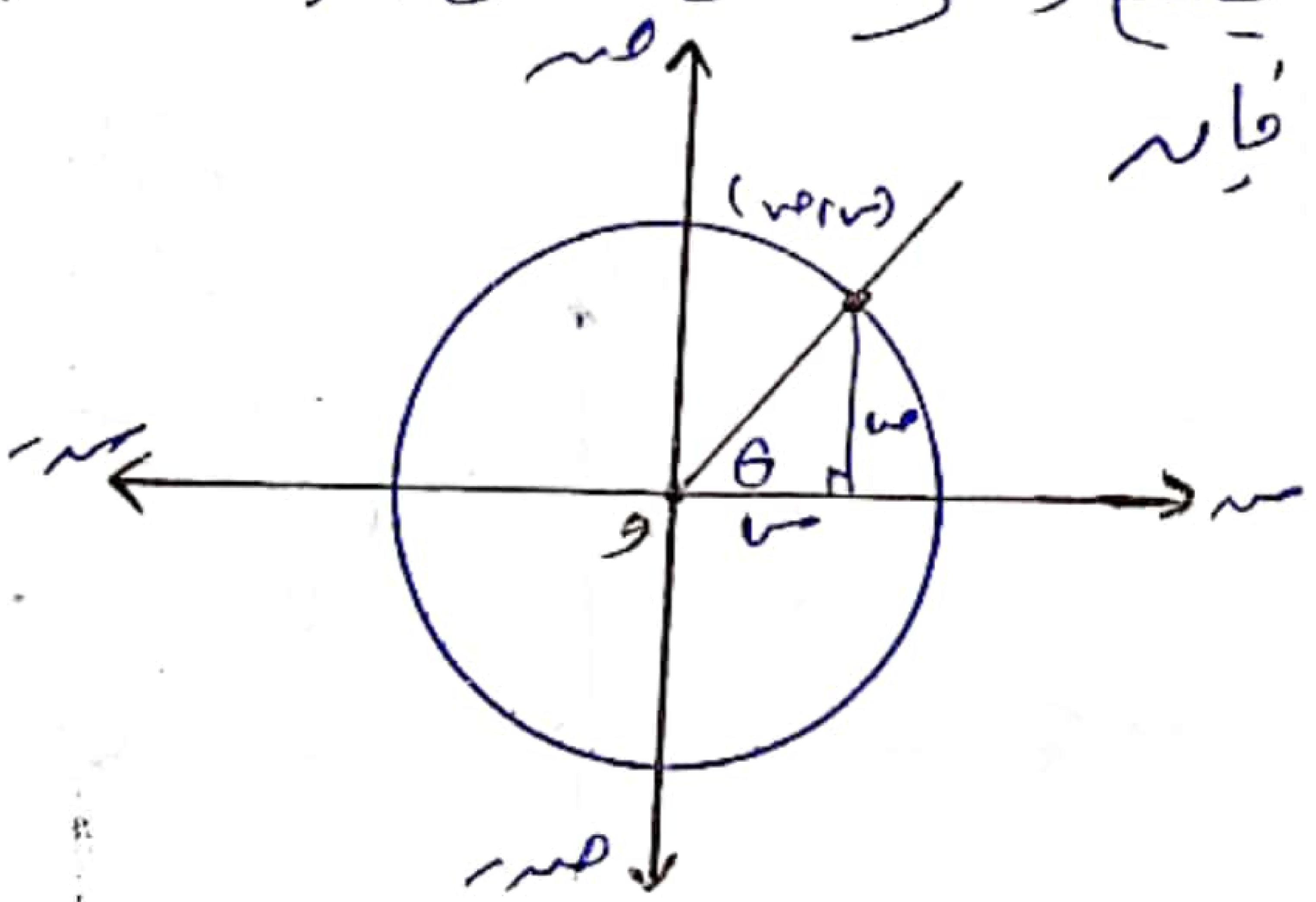


نلاحظ أي نقطة ∈ لدائرة الوحدة (س، ص) يكون

$$\boxed{س^2 + ص^2 = 1}$$ فيثاغورث

الدوال المثلثية الأساسية

اذا رسمت الزاوية الموجهة في وضعها القياسي θ وكان ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في أ (س، ص) فإنه

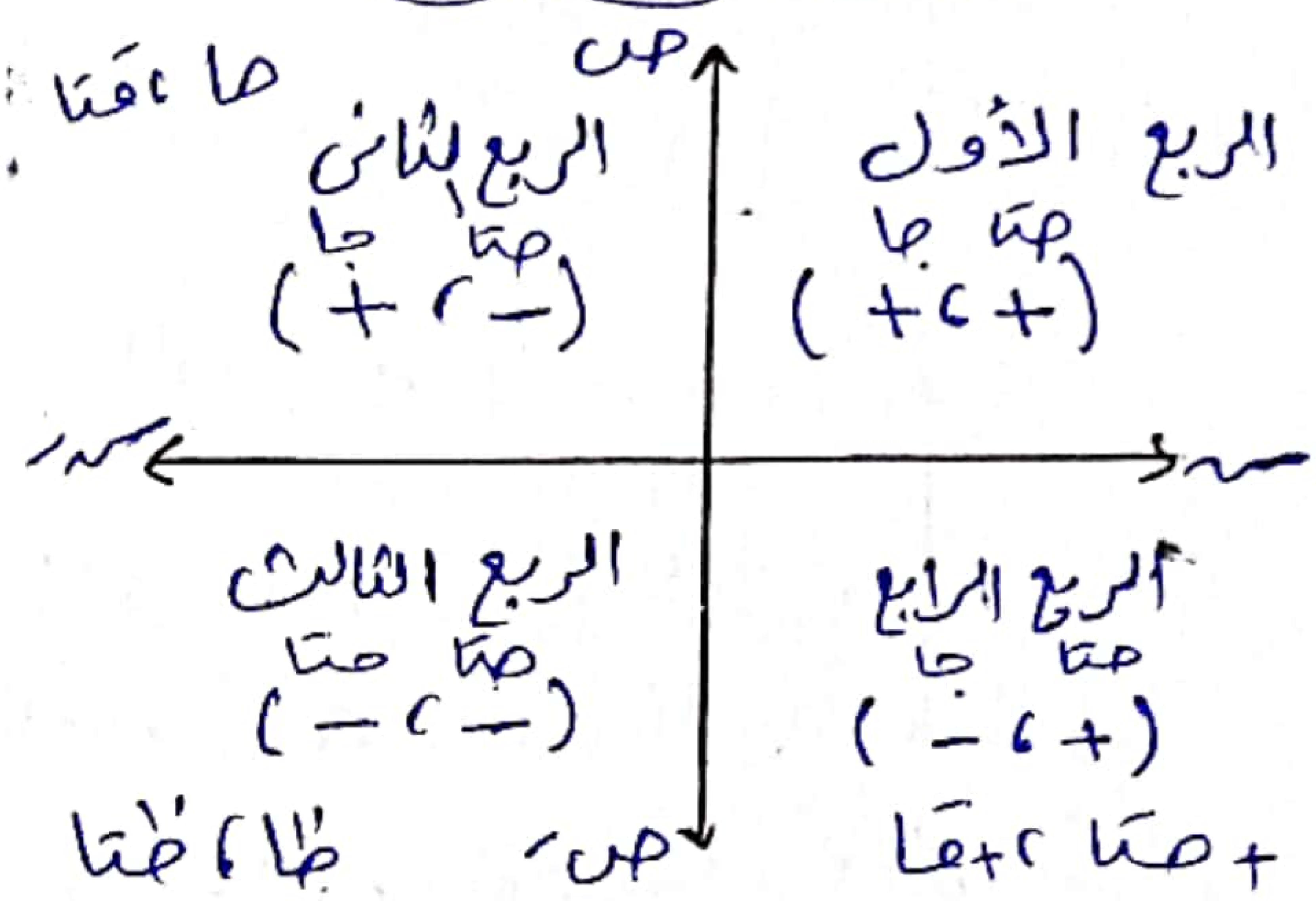


الدوال	المقلوبات
$جا\,\theta = ص$	$قتا\,\theta = \frac{1}{جا\,\theta} = \frac{1}{ص}$
$جتا\,\theta = س$	$قا\,\theta = \frac{1}{جتا\,\theta} = \frac{1}{س}$
$ظا\,\theta = \frac{ص}{س}$	$ظتا\,\theta = \frac{1}{ظا\,\theta} = \frac{س}{ص}$

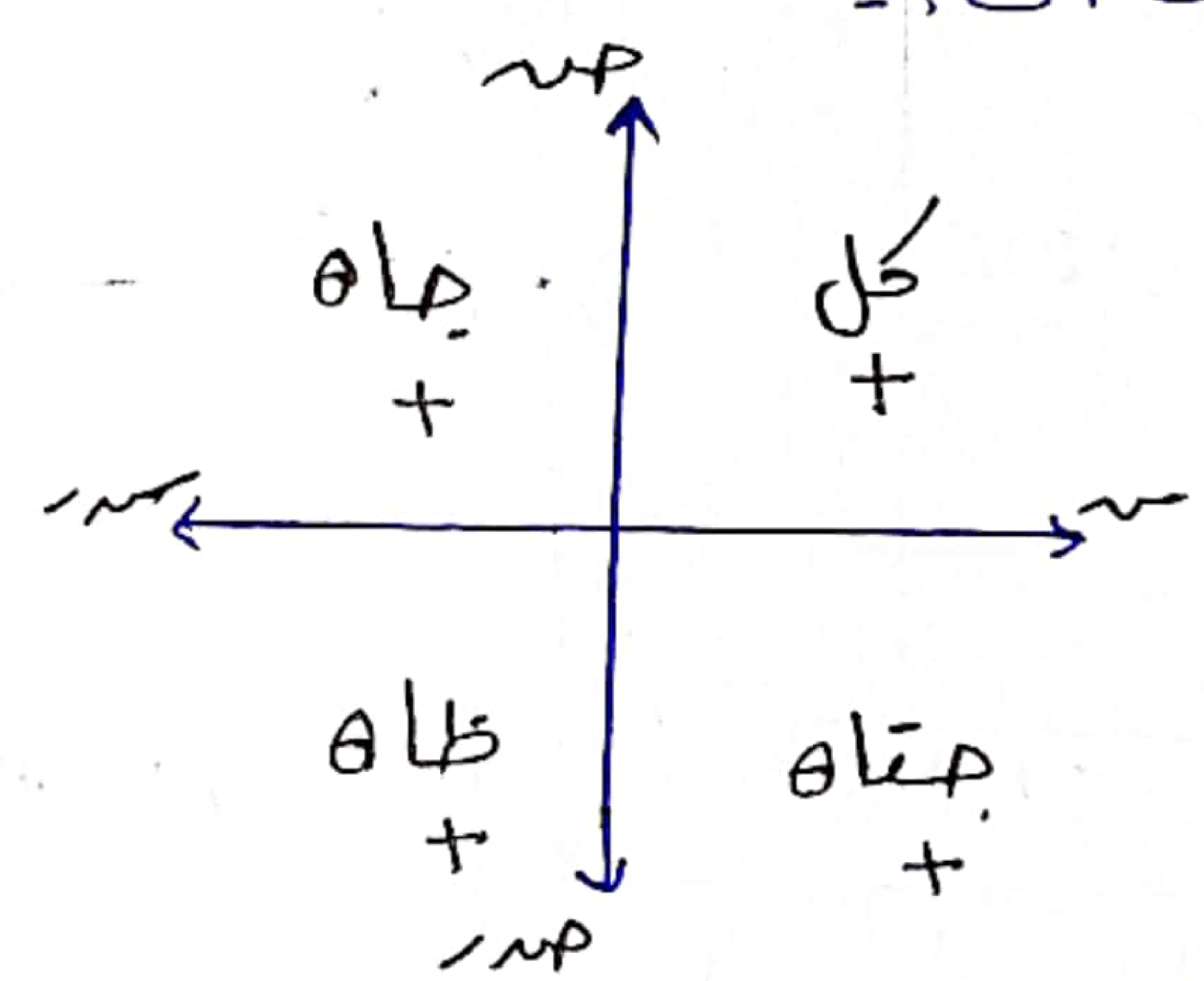
أي أنه

$$أ(س، ص) = (جتا\,\theta ، جا\,\theta)$$

إشارة الدوال المثلثية



أي أن:



كل جبار ظالم جتا داهية

اذا كان الضلع النهائي للزاوية موجبة θ في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة ب فاوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية θ اذا كانت

(١) ب $\left(\frac{٣}{٥} ، \frac{٤}{٥}\right)$

الحل

جتا θ ، جا θ

$\left(\frac{٣}{٥} ، \frac{٤}{٥}\right)$

جا θ = $\frac{٤}{٥}$ ، قتا θ = $\frac{٥}{٤}$

جتا θ = $\frac{٣}{٥}$ ، قا θ = $\frac{٥}{٣}$

ظا θ = $\frac{٤}{٣}$ ، ظتا θ = $\frac{٣}{٤}$

---

(٢) ب (س ، ٠٫٨) حيث س > ٠

الحل

∵ س² + ص² = ١

س² + (٠٫٨)² = ١

س² = ١ − ٠٫٦٤ = ٠٫٣٦

س = ± $\sqrt{٠٫٣٦}$ = ± ٠٫٦

∵ س > ٠ ∴ س = ٠٫٦

جتا θ ، جا θ

∴ ب (٠٫٦ ، ٠٫٨)

جا θ = ٠٫٨ ، قتا θ = $\frac{١٠}{٨}$ = $\frac{٥}{٤}$

جتا θ = ٠٫٦ ، قا θ = $\frac{١٠}{٦}$ = $\frac{٥}{٣}$

ظا θ = $\frac{٨}{٦}$ = $\frac{٤}{٣}$ ، ظتا θ = $\frac{٣}{٤}$

---

(٣) ب (س ، −س) س > ٠

الحل

س² + س² = ١

٢س² = ١ ، س² = $\frac{١}{٢}$

س = ± $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ∴ س = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

ب $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} ، -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (جتا θ ، جا θ)

جا θ = $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ قتا θ = $-\sqrt{2}$

جتا θ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ قا θ = $\sqrt{2}$

ظا θ = -1 ظتا θ = -1

④ $\left(\frac{3}{2}م ، -2م\right)$ ، θ ∈ $]\frac{3\pi}{2} ، 2\pi[$

الحل

$س^2 + ص^2 = 1$

$\left(\frac{3}{2}م\right)^2 + (-2م)^2 = 1$

$\frac{9}{4}م^2 + 4م^2 = 1$

$\frac{25}{4}م^2 = 1 \Leftarrow م^2 = \frac{4}{25}$

$م = \pm\frac{2}{5}$ ∵ θ تقع بالربع الرابع

∵ س > ٠ ، ص < ٠ ⇐ م > ٠

∴ $م = \frac{2}{5}$

∴ ب $\left(\frac{3}{2} \times \frac{2}{5} ، -2 \times \frac{2}{5}\right)$

ب $\left(\frac{3}{5} ، -\frac{4}{5}\right)$ (جتا θ ، جا θ)

جا θ = $-\frac{4}{5}$ قتا θ = $-\frac{5}{4}$

جتا θ = $\frac{3}{5}$ قا θ = $\frac{5}{3}$

ظا θ = $-\frac{4}{3}$ ظتا θ = $-\frac{3}{4}$

النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

① الزوايا الربعية

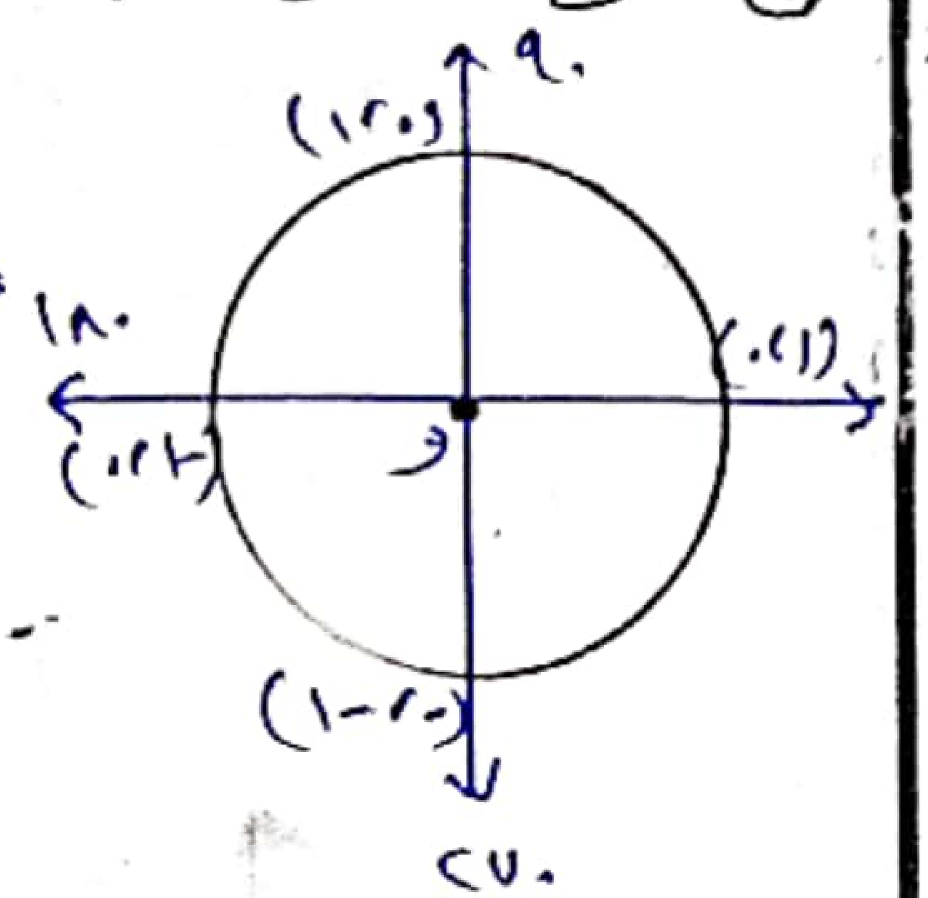
جتا θ ، جا θ

٠ (١ ، ٠)

٩٠ (٠ ، ١)

١٨٠ (-١ ، ٠)

٢٧٠ (٠ ، -١)



س	θ^د	جا	جتا	ظا	قتا	قا	ظتا
٠	٠	٠	١	٠	غير معرف	١	غير معرف
٩٠	$\frac{\pi}{2}$	١	٠	غير معرف	١	غير معرف	٠
١٨٠	π	٠	-١	٠	غير معرف	-١	غير معرف
٢٧٠	$\frac{3\pi}{2}$	-١	٠	غير معرف	-١	غير معرف	٠
٣٠°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	٢	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
٦٠°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	٢	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
٤٥	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	١	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	١

ملاحظة

الدوال المثلثية للزوايا المتكافئة لها نفس الإشارة.

أكمل ما يأتي

① إذا كان جا θ $= \frac{1}{\sqrt{2}}$ حيث θ زاوية حادة موجبة فإن θ = 45°

② إذا كان جا θ = −١ ، جتا θ = ٠ فإن θ = 270°

(جتا ، جا) = (٠ ، −١) ⟸ 270°

③ قتا θ = ٢ حيث θ زاوية حادة موجبة فإن θ = 30°

قتا θ = ٢ ⟸ جا θ = $\frac{1}{2}$ ⟸ θ = 30°

④ ظتا² ٣٠ − قا² ٦٠ + قتا² ٤٥ = ١

الحل

$= (\sqrt{3})^2 - (2)^2 + (\sqrt{2})^2$

$= 3 - 4 + 2 = 1$

⑤ ٣ جا ٣٠ جا² ٦٠ − جتا ٠ . قا ٦٠ + جا ٢٧٠ جتا² ٤٥

الحل

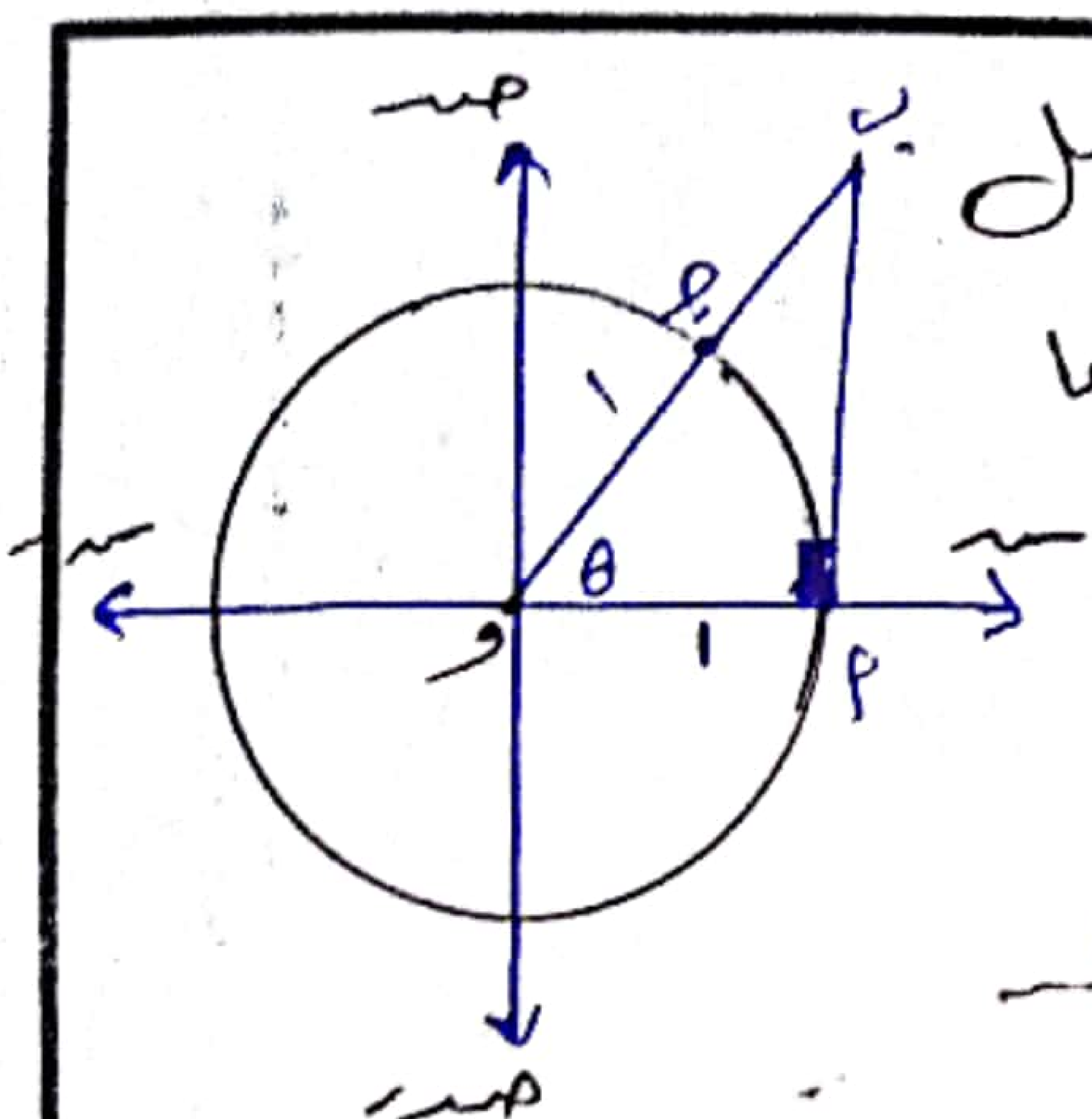
$= \left(3 \times \frac{1}{2} \times (\frac{\sqrt{3}}{2})^2\right) - (1 \times 2) + \left(-1 \times (\frac{1}{\sqrt{2}})^2\right)$

$= \frac{9}{8} - 2 - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{-11}{8}}$

في الشكل المقابل

دائرة وحدة مركزها و ، $\overleftrightarrow{أب}$ مماس

أوجد



① وب = قا θ

جتا θ $= \frac{1}{\text{وب}}$ ⟸ وب $= \frac{1}{\text{جتا } \theta}$ = قا θ

② ب جـ = (قا θ) − ١

ب جـ = ب و − و جـ = (قا θ) − ١

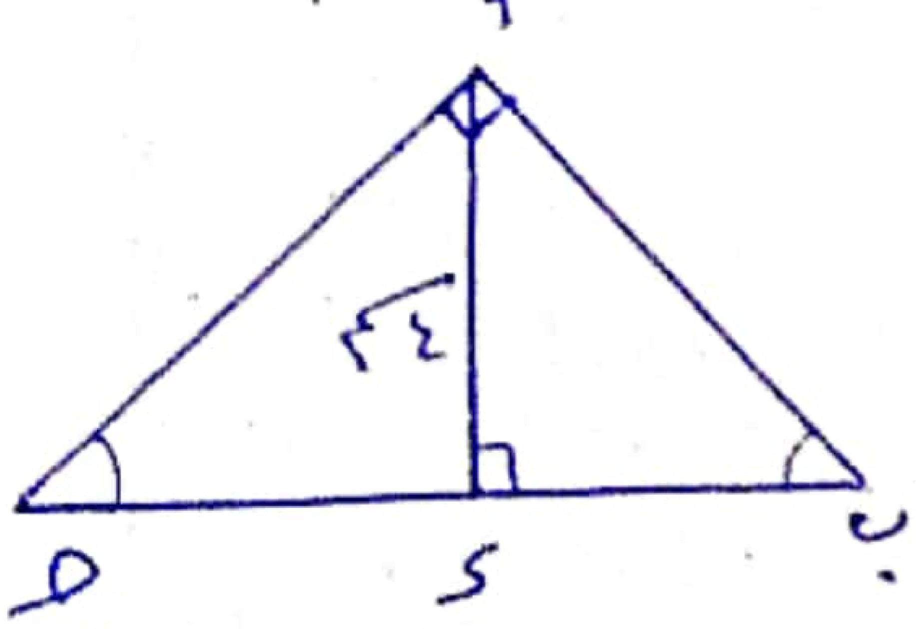
③ مساحة Δ أ ب و = $\frac{1}{2}$ ظا θ

ظا θ $= \frac{\text{أب}}{1}$ ⟸ أب = ظا θ

مساحة Δ أ ب و = $\frac{1}{2}$ × أو × أب

$= \frac{1}{2} \times 1 \times$ ظا θ $= \frac{1}{2}$ ظا θ

في الشكل المقابل



ظا ب + ظا جـ = $\frac{5}{2}$

فإن ب جـ = ...

الحل

∵ ظا ب $= \frac{4}{\text{ب د}}$ ، ظا جـ $= \frac{4}{\text{د جـ}}$

ظا ب + ظا جـ $= \frac{4}{\text{ب د}} + \frac{4}{\text{د جـ}} = \frac{5}{2}$

$\frac{4(\text{ب د} + \text{د جـ})}{\text{ب د} \times \text{د جـ}} = \frac{5}{2}$ ⟸ $\frac{4(\text{ب د} + \text{د جـ})}{4^2} = \frac{5}{2}$

∴ ب جـ $= 4 \times \frac{5}{2} = \boxed{10}$

الدرس الرابع
الزوايا المنتسبة

الزاويتان المنتسبتان:
هما اللتان مجموعهما أو الفرق بينهم
عدد من أعداد القوائم (٩٠، ١٨٠، ...)

[١] العلاقة بين الزاويتان θ ، ($١٨٠ - \theta$) الثاني

جا($١٨٠ - \theta$) = جا θ

جتا($١٨٠ - \theta$) = − جتا θ

ظا($١٨٠ - \theta$) = − ظا θ

بالمثل المقلوبات

مثال

جا ١٢٠ = جا(١٨٠ − ٦٠) = جا ٦٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

[٢] الزاويتان θ ، ($١٨٠ + \theta$) الثالث

جا($١٨٠ + \theta$) = − جا θ

جتا($١٨٠ + \theta$) = − جتا θ

ظا($١٨٠ + \theta$) = ظا θ

بالمثل المقلوبات

مثال

جتا ٢٢٥ = جتا(١٨٠ + ٤٥) = − جتا ٤٥ = − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

[٣] الزاويتان θ ، ($٣٦٠ - \theta$) الرابع

جا($٣٦٠ - \theta$) = − جا θ

جتا($٣٦٠ - \theta$) = جتا θ

ظا($٣٦٠ - \theta$) = − ظا θ

بالمثل المقلوبات

مثال

ظا ٣٠٠ = ظا(٣٦٠ − ٦٠) = − ظا ٦٠ = − $\sqrt{٣}$

[٤] الزاويتان θ ، ($٩٠ - \theta$) الأول

جا($٩٠ - \theta$) = جتا θ

جتا($٩٠ - \theta$) = جا θ

ظا($٩٠ - \theta$) = ظتا θ

بالمثل المقلوبات

مثال

جا ٣٠ = جتا ٦٠ = $\frac{١}{٢}$

[٥] الزاويتان θ ، ($٩٠ + \theta$) الثاني

جا($٩٠ + \theta$) = جتا θ

جتا($٩٠ + \theta$) = − جا θ

ظا($٩٠ + \theta$) = − ظتا θ

بالمثل المقلوبات

مثال

جا ١٢٠ = جا(٩٠ + ٣٠) = جتا ٣٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

٦ الزاويتان θ ، (٢٧٠ − θ) الثالث

جا(٢٧٠ − θ) = − جتا θ

جتا(٢٧٠ − θ) = − جا θ

ظا(٢٧٠ − θ) = ظتا θ

بالمثل المقلوبات

مثال

جا ٢١٠ = جا(٢٧٠ − ٦٠) = − جتا ٦٠ = $\frac{١}{٢}$

---

٧ الزاويتان θ ، (٢٧٠ + θ) الرابع

جا(٢٧٠ + θ) = − جتا θ

جتا(٢٧٠ + θ) = جا θ

ظا(٢٧٠ + θ) = − ظتا θ

بالمثل المقلوبات

ظا ٣٣٠ = ظا(٢٧٠ + ٦٠) = − ظتا ٦٠
= $-\frac{١}{\sqrt{٣}}$

جتا ٣١٥ = جتا(٢٧٠ + ٤٥)
= جا ٤٥ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

يمكن تلخيص العلاقات كالآتي

جا	كل
١٨٠ − θ	θ
١٨٠ + θ	٣٦٠ − θ
ظا	جتا

تغيير الإشارة فقط

جا	كل
٩٠ + θ	٩٠ − θ
٢٧٠ − θ	٢٧٠ + θ
ظا	جتا

تغيير حرف تا والإشارة

بدون الحاسبة أوجد

جا ١٥٠° = جا ٣٠ = $\frac{١}{٢}$

قا ٢١٠° = − قا ٣٠ = $-\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

ظتا ٧٨٠° = ظتا ٦٠ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

جتا(− ٩٠٠) = جتا(− ٩٠٠ + ٣ × ٣٦٠)
= جتا ١٨٠ = − ١

بدون الآلة الحاسبة أوجد قيمة

جا ١٥٠ جتا (−٣٠٠) + جتا ٩٣٠ ظتا ٢٤٠

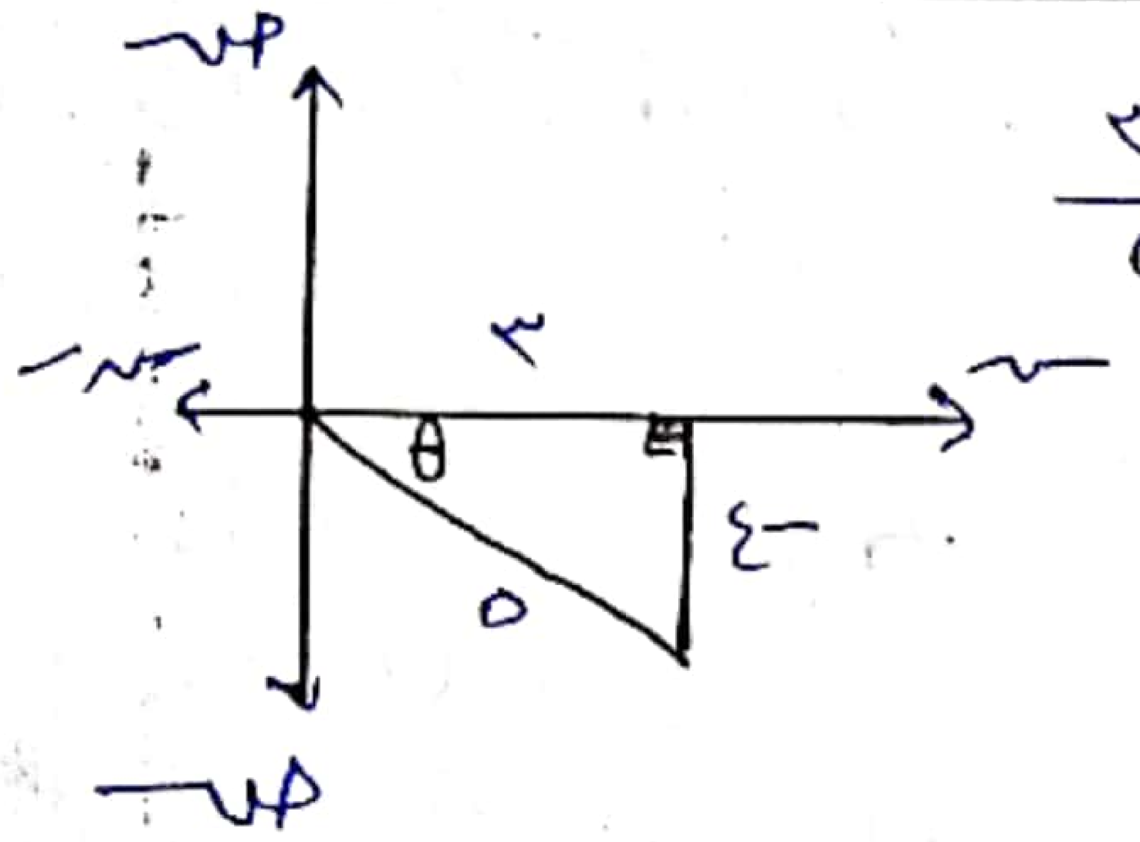
الحل

جا ١٥٠ جتا ٦٠ + جتا ٢١٠ ظتا ٢٤٠

جا ٣٠ جتا ٦٠ + (− جتا ٣٠ ظتا ٦٠)

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}}$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$



جتا θ $= \frac{3}{5}$

$= \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}$

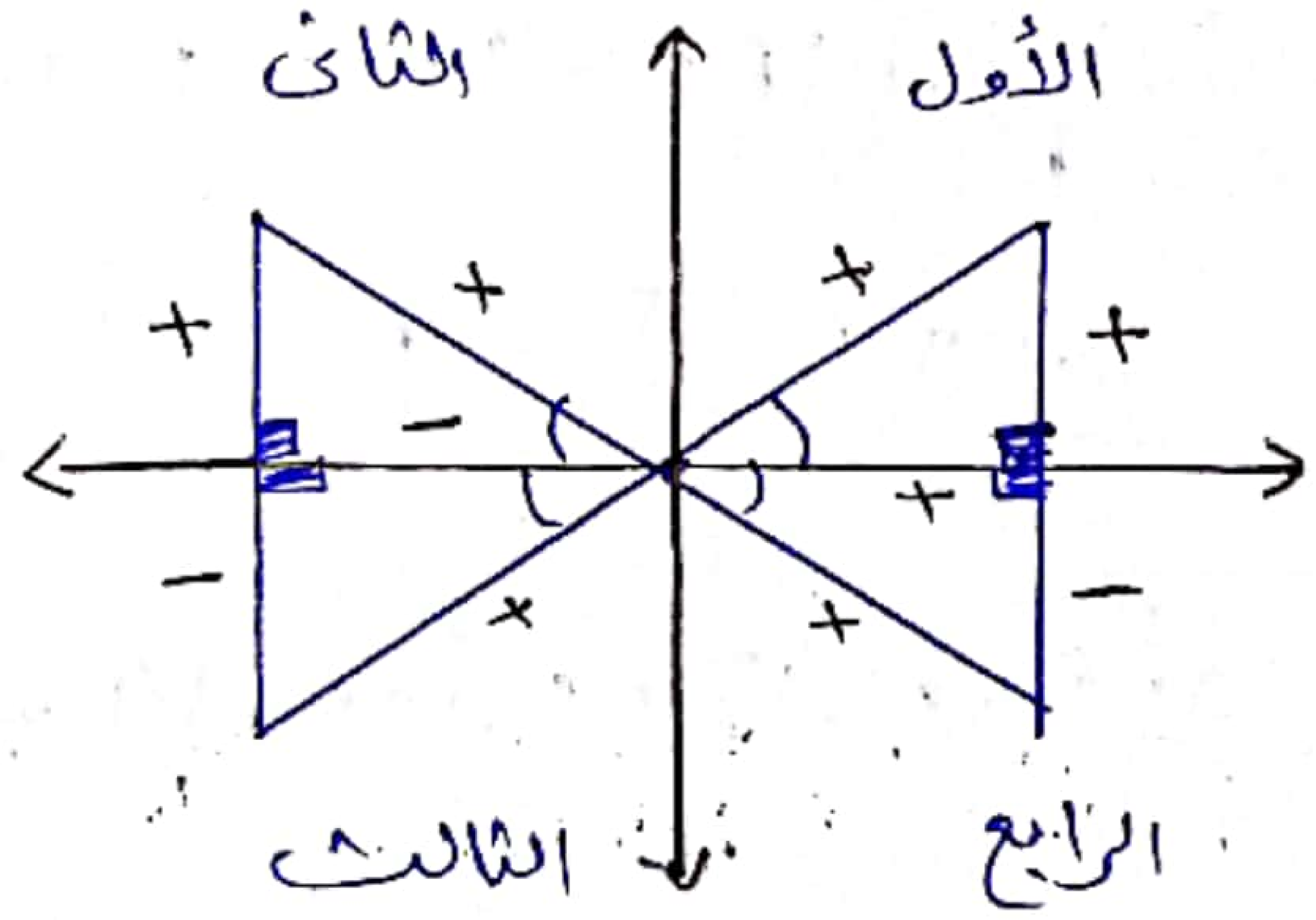
المقدار

= جا θ + $\cancel{\text{ظتا}}$ θ − $\cancel{\text{ظتا}}$ θ

= جا θ = $\boxed{\frac{-4}{5}}$

ملاحظة هامة

يمكن إيجاد إشارة الدوال المثلثية مباشرة عند رسم θ في الوضع القياسي كالآتي



مثال

إذا كانت جتا θ $= \frac{3}{5}$ ، θ ∈]٢٧٠، ٣٦٠[

فأوجد قيمة المقدار :-

جا(١٨٠ − θ) + ظا(٩٠ − θ) − ظا(٢٧٠ − θ)

الحل

θ تقع في الربع الرابع

لأي زاويتين α ، β حادتين موجبتين

إذا كان

جا α = جتا β

ظا α = ظتا β

قا α = قتا β

$\boxed{\alpha + \beta = 90^\circ}$

أكمل

① جا ٤٢ = ...جتا ٤٨...

② $\frac{\text{ظا }50}{\text{ظتا }40}$ = ...1...

③ قا ٦٨ − قتا ٢٢ = ...صفر...

④ جا α = جتا β فإن

ظا (α + β) = ظا ٩٠ = غير معرف

أوجد قيمة θ حيث $0^\circ \le \theta < 90^\circ$ التي تحقق

① $جا\ \theta = جتا\ 2\theta$

الحل

$\theta + 2\theta = 90 \Leftarrow 3\theta = 90$

$\theta = \frac{90}{3} = \boxed{30^\circ}$

② $قا(\theta + 25) = قتا(\theta + 15)$

الحل

$\theta + 25 + \theta + 15 = 90$

$2\theta + 40 = 90 \qquad 2\theta = 50$

$\theta = \frac{50}{2} = \boxed{25^\circ}$

③ $جتا\left(\frac{\theta + 20}{2}\right) = جا\left(\frac{\theta + 40}{2}\right)$

الحل

$\frac{\theta + 20}{2} + \frac{\theta + 40}{2} = 90$

$\frac{2\theta + 60}{2} = 90$

$\theta + 30 = 90$

$\theta = 90 - 30 = \boxed{60^\circ}$

الحل العام للمعادلات المثلثية

① $جا\ \alpha = جتا\ \beta$

$\boxed{\alpha \pm \beta = 90 + 360\,ن}$

أو $\alpha \pm \beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi\,ن$

② $قتا\ \alpha = قا\ \beta$

$\boxed{\alpha \pm \beta = 90^\circ + 360\,ن}$

أو $\alpha \pm \beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi\,ن$

③ $ظا\ \alpha = ظتا\ \beta$

$\boxed{\alpha + \beta = 90 + 180\,ن}$

أو $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + \pi\,ن$

أوجد الحل العام للمعادلات الآتية

① $جا\ 2\theta = جتا\ \theta$

الحل

$2\theta + \theta = 90 + 360\,ن$

$3\theta = 90 + 360\,ن$

$\boxed{\theta = 30 + 120\,ن}$

$2\theta - \theta = 90 + 360\,ن$

$\boxed{\theta = 90 + 360\,ن}$

② قا (θ − ٣٠) = قتا (٣θ + ٢٠)

ثم أوجد قيم θ ∈]٠ ، ٩٠[

الحل

بوضع قتا (٣θ + ٢٠) = قا (θ − ٣٠)

إما

٣θ + ٢٠ + θ − ٣٠ = ٩٠ + ٣٦٠ ن

٤θ − ١٠ = ٩٠ + ٣٦٠ ن

٤θ = ١٠٠ + ٣٦٠ ن

$\boxed{\theta = ٢٥ + ٩٠\ ن}$

أو

٣θ + ٢٠ − θ + ٣٠ = ٩٠ + ٣٦٠ ن

٢θ + ٥٠ = ٩٠ + ٣٦٠ ن

٢θ = ٤٠ + ٣٦٠ ن

$\boxed{\theta = ٢٠ + ١٨٠\ ن}$

بوضع ن = ٠ θ = ٢٥° أو ٢٠°

بوضع ن = ١ θ = ١١٥° مرفوض أو ٢٠٠° مرفوض

∴ قيم θ = {٢٥° ، ٢٠°}

③ ظا θ = ظتا ٢θ

ثم أوجد قيم θ حيث θ ∈]٠ ، π[١٨٠°

الحل

θ + ٢θ = ٩٠ + ١٨٠ ن

٣θ = ٩٠ + ١٨٠ ن

$\boxed{\theta = ٣٠ + ٦٠\ ن}$

بوضع ن = ٠ θ = ٣٠° تحقق

بوضع ن = ١ θ = ٩٠ تحقق

بوضع ن = ٢ θ = ١٥٠ تحقق

بوضع ن = ٣ θ = ٢١٠ مرفوض

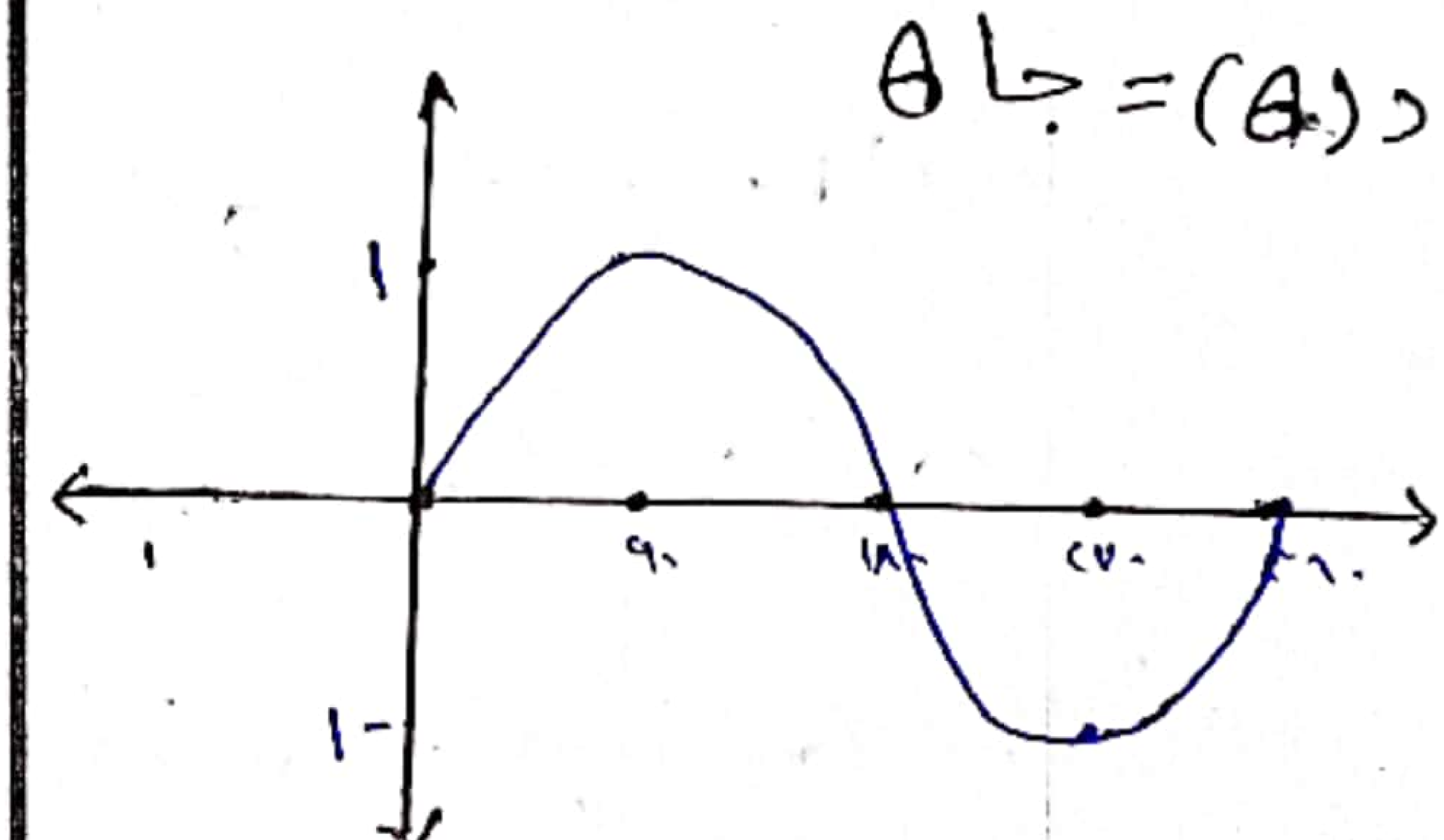
∴ قيم θ التي تحقق هي

{٣٠° ، ١٥٠° ، ٩٠°}

الدرس الخامس
التمثيل البياني للدوال المثلثية

داله الجيب

د(θ) = جا θ



مجال = ح

مدى = $[-١ ، ١]$

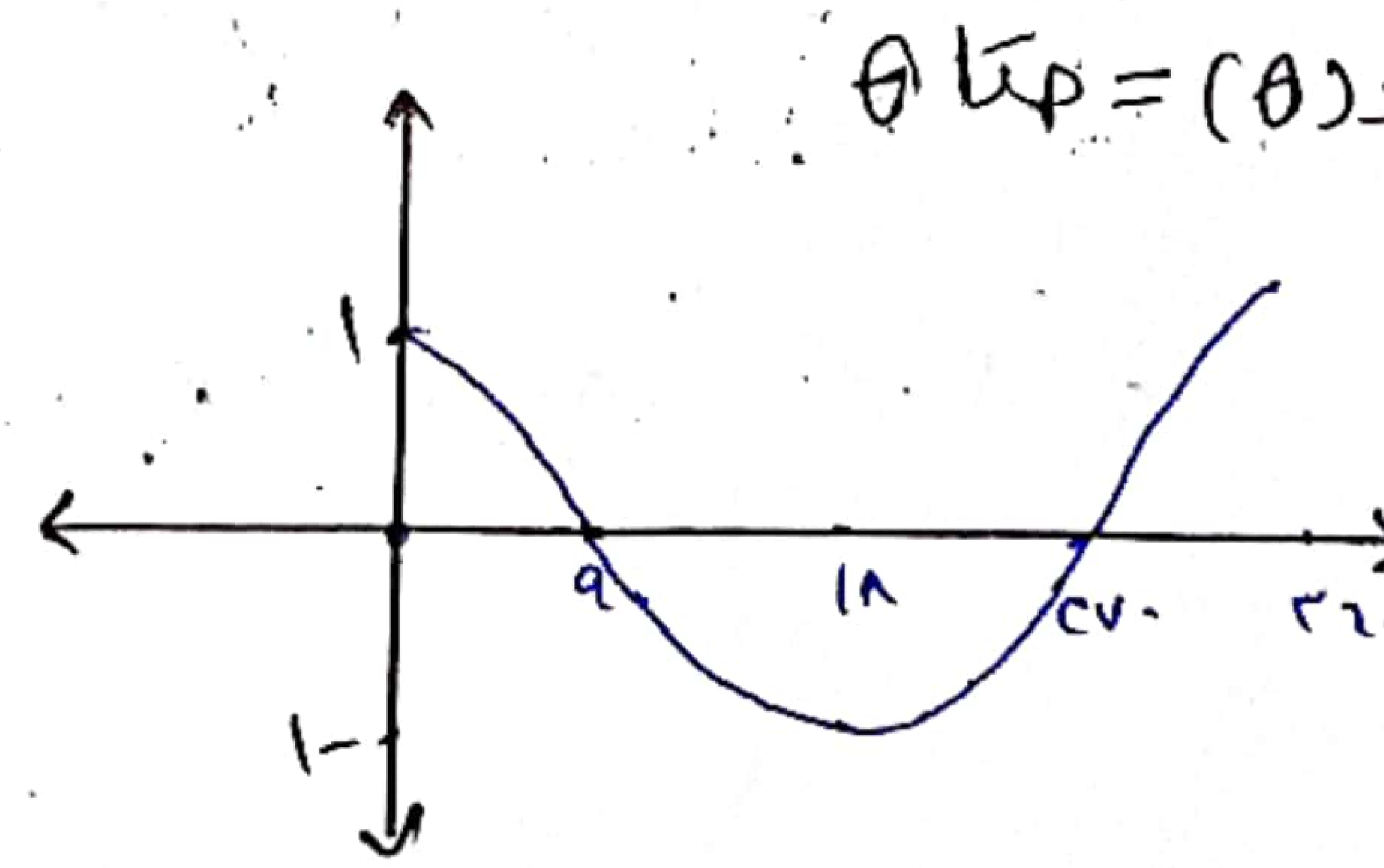
قيمه عظمى = ١

قيمه صغرى = -١

دورتها = ٢π

داله جيب التمام

د(θ) = جتا θ



مجال = ح

المدى = $[-١ ، ١]$

قيمه عظمى = ١

قيمه صغرى = -١

دورتها = ٢π

ملاحظات هامه

كل من الدالتين

د(θ) = أ جا ب θ ، د(θ) = أ جتا ب θ

① مداها $[-أ ، أ]$

صغرى ، عظمى

② دورتها = $\frac{٢\pi}{|ب|}$

③ منحنى جا يمر بنقطه الأصل و

منحنى جتا لا يمر بنقطه الأصل و

أكمل ما يلي

① مدى الداله د(θ) = جا θ .

$[-١ ، ١]$

② مدى الداله د(س) = جتا ٥ س

$[-١ ، ١]$

③ القيمه العظمى للداله د(ع) = ٤ جا ع

= ٤

④ د(θ) = ٢ جا ٤ θ

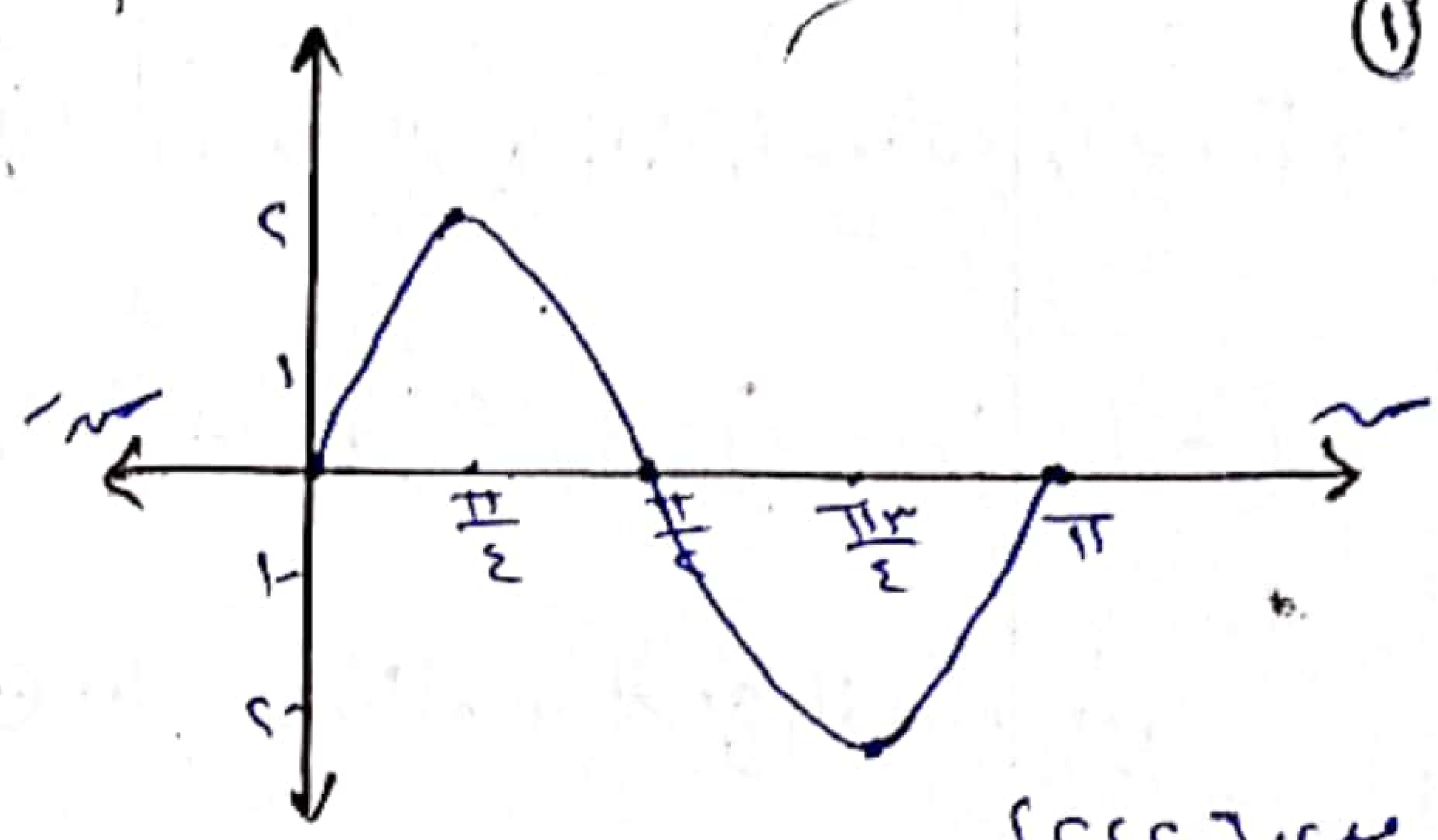
المدى = $[-٢ ، ٢]$

دورتها = $\frac{٢\pi}{|٤|}$ = $\frac{\pi}{٢}$

من الشكل المقابل

منحنى دالة مثلثية دورية أكتب قاعدة الدالة

(١)



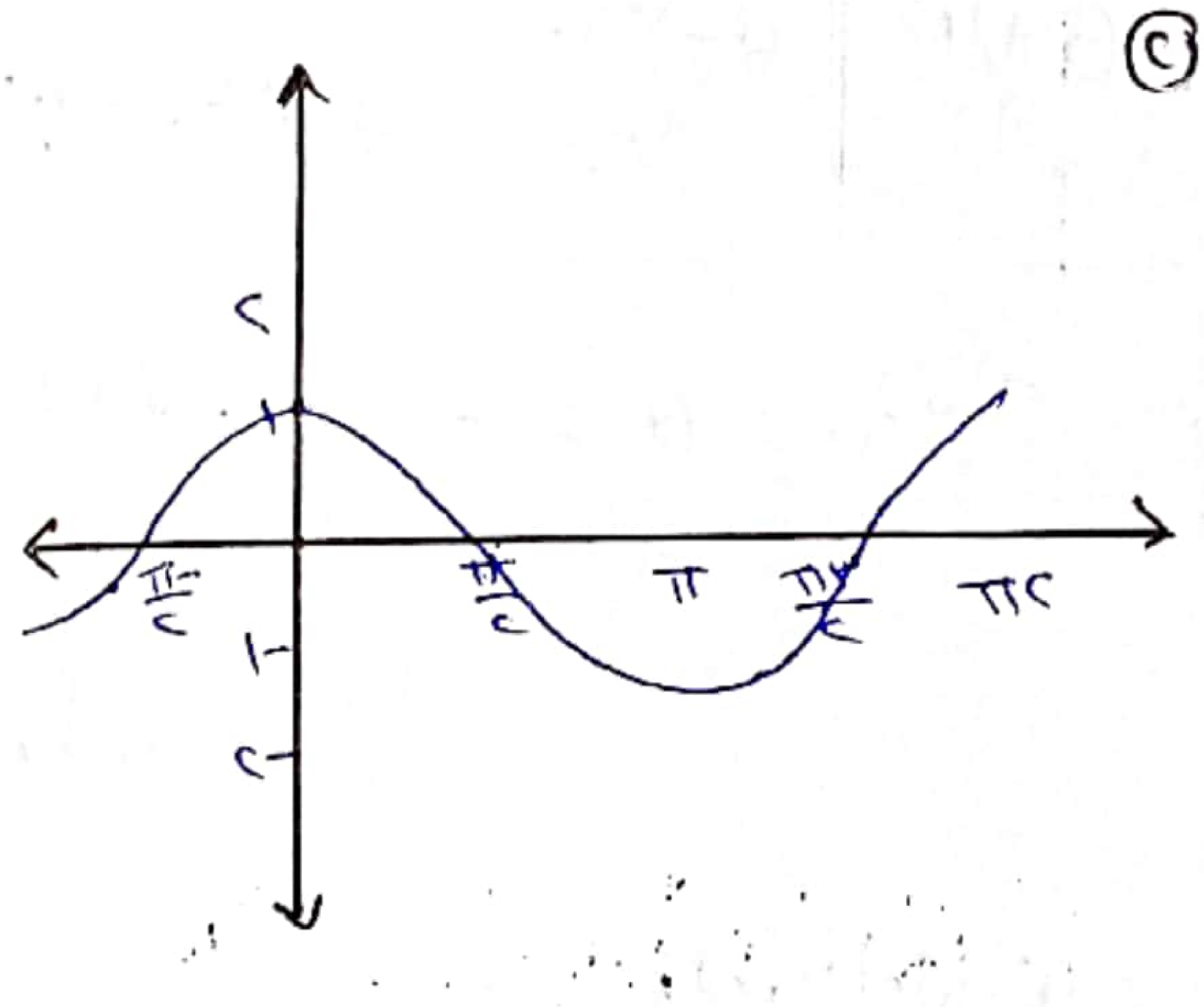
مدى [-٢، ٢]

دورتها = $\pi = \frac{2\pi}{|ب|}$ ⟸ ب = ٢

د(θ) = ٢ جا ٢θ

---

(٢)



د(θ) = جتا θ

مدى الدالة [-١، ١]

دورتها = $2\pi = \frac{2\pi}{|ب|}$ ب = ١

إذا كانت $\frac{\text{٢ - جا } \theta}{\text{٣}}$ = م

فإنه م ∈ ------

الحل

∵ جا θ ∈ [-١، ١]

∴ -١ ≤ جا θ ≤ ١   (×-١)

١ ≥ -جا θ ≥ -١   (+٢)

٣ ≥ ٢ - جا θ ≥ ١   (÷٣)

١ ≥ $\frac{\text{٢ - جا } \theta}{\text{٣}}$ ≥ $\frac{1}{3}$

∴ ١ ≥ م ≥ $\frac{1}{3}$

∴ $\frac{1}{3}$ ≤ م ≤ ١

∴ م ∈ [$\frac{1}{3}$، ١]

إذا كانت د(س) = أ جتا ب س حيث أ، ب ∈ ... والدورية ودورتها $\frac{\pi}{2}$ ومداها [-١، ١]

فإنه $\frac{أ}{ب}$ = ----

مداها [-١، ١]   أ = ١

دورتها = $\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{ب}$ ⟸ ب = ٤

∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{1}{4}$

الدرس السادس
إيجاد قياس زاوية بمعلومية إحدى نسبها المثلثية

اذا كانت

ص = جا $\theta \Leftarrow \theta =$ جا$^{-1}$ ص

تسمى جا$^{-1}$ الدالة العكسية للدالة ص

وتكتب بالآلة الحاسبة

$\boxed{\text{shift}} + \boxed{\text{sin}} = \sin^{-1}(\quad)$

أولاً اذا كانت θ زاوية حادة موجبة

أي $\theta \in]0 ، \frac{\pi}{2}[$

أوجد قيمة θ اذا كانت $\theta \in]0 ، \frac{\pi}{2}[$

① جا $\theta = \frac{1}{2}$

الحل

$\theta =$ جا$^{-1} \frac{1}{2} = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$

② ظا $\theta = \sqrt{3}$

الحل

$\theta =$ ظا$^{-1} \sqrt{3} = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$

③ جتا $\theta = 0.7865$

$\theta =$ جتا$^{-1}(0.7865) \simeq 38^\circ\ 8'\ 25''$

نستخدم الآلة الحاسبة العلمية

اذا كانت $\theta \in [0 ، 2\pi[$

نتبع الخطوات الآتية

① تحديد الربع الذي تقع فيه θ حسب الإشارة

② نوجد θ الحادة (بدون إشارة)

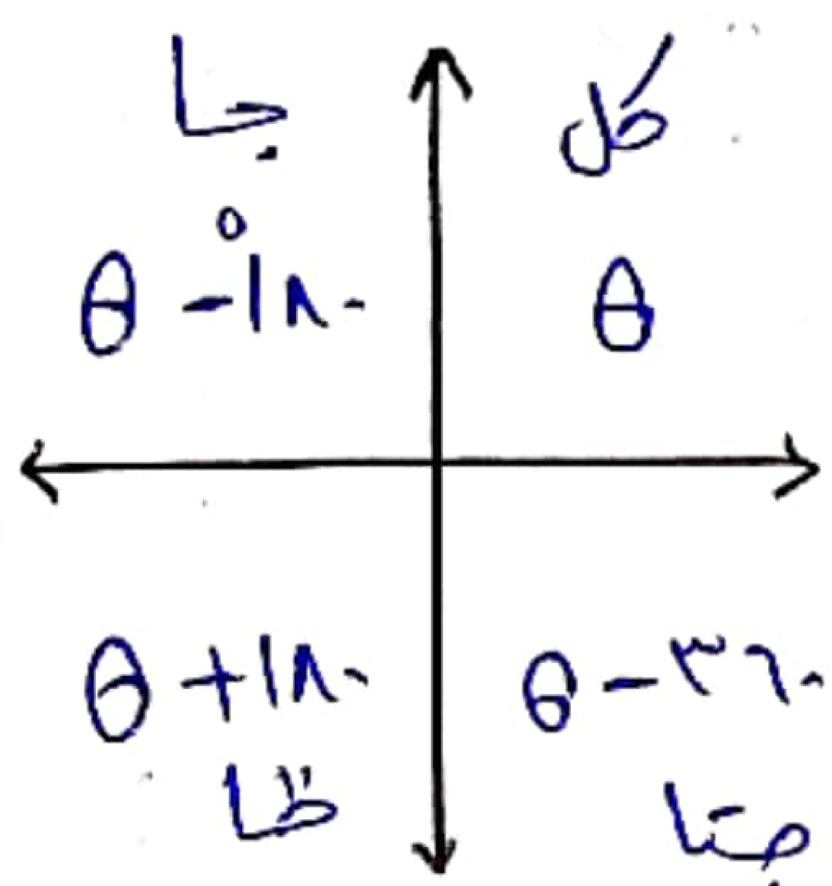
③ ننسب الزاوية للربع الذي تقع فيه

الأول = θ كما هي

الثاني = $180 - \theta$

الثالث = $180 + \theta$

الرابع = $360 - \theta$



اذا كانت $0 < \theta < 360^\circ$

فأوجد θ التي تحقق

جا $\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

الحل

جا θ موجبة ∴ تقع في الربع الأول أو الثاني

θ الحادة $= 60^\circ$

∴ الربع الأول $= 60^\circ$

∴ الثاني $= 180 - 60 = 120^\circ$

∴ $\theta \in \{60^\circ ، 120^\circ\}$

② جتا $\theta = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

الحل

جتا θ سالبة في الثاني أو الثالث

θ الحادة = ٤٥° (بدون إشارة)

الثاني: ١٨٠ − ٤٥ = ١٣٥°

الثالث: ١٨٠ + ٤٥ = ٢٢٥°

∴ θ = ١٣٥° أو ٢٢٥°

---

③ ظا $\theta = -\sqrt{٣}$

الحل

ظا θ سالبة تقع في الثاني أو الرابع

θ الحادة = ٦٠°

الثاني: ١٨٠ − ٦٠ = ١٢٠°

الرابع: ٣٦٠ − ٦٠ = ٣٠٠

∴ θ = ١٢٠° أو ٣٠٠°

---

④ جتا θ = −٠.٦٤٢

الحل

جتا θ سالبة θ في الثاني أو الثالث

θ الحادة ≃ ٥٠° ٣ʹ ٣١ʺ

الثاني = ١٨٠ − ٥٠° ٣ʹ ٣١ʺ = $\boxed{١٢٩° ٥٦ʹ ٢٩ʺ}$

الثالث = ١٨٠ + ٥٠° ٣ʹ ٣١ʺ = $\boxed{٢٣٠° ٣ʹ ٣١ʺ}$

إذا قطع الضلع النهائي لزاوية قياسها θ في الوضع القياسي دائرة الوحدة في ب $\left(-\frac{١}{\sqrt{٢}} ، \frac{١}{\sqrt{٢}}\right)$ فأوجد ق(θ) حيث ٠ < θ < ٣٦٠°

(جتا ، جا)

الحل

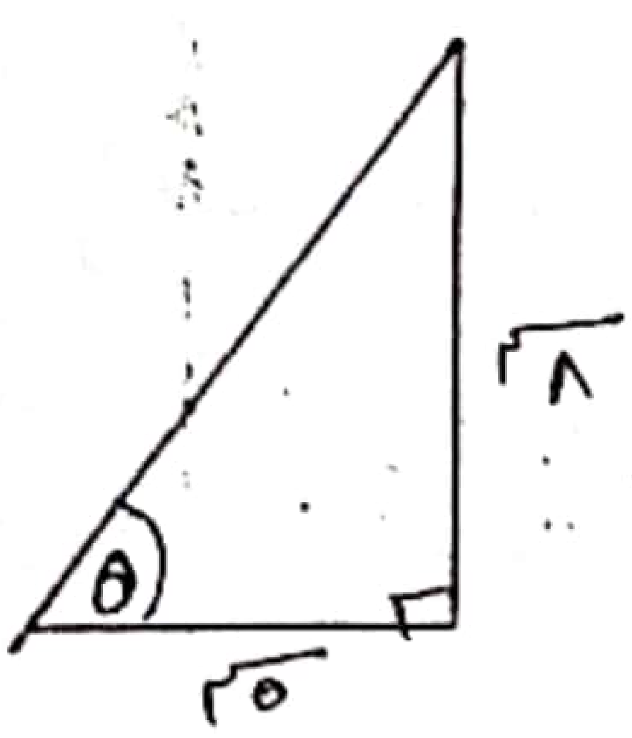
(− ، +) تقع في الربع الثاني

جا $\theta = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ⇐ θ الحادة = ٤٥°

الربع الثاني = ١٨٠ − ٤٥ = ١٣٥°

∴ θ = ١٣٥°

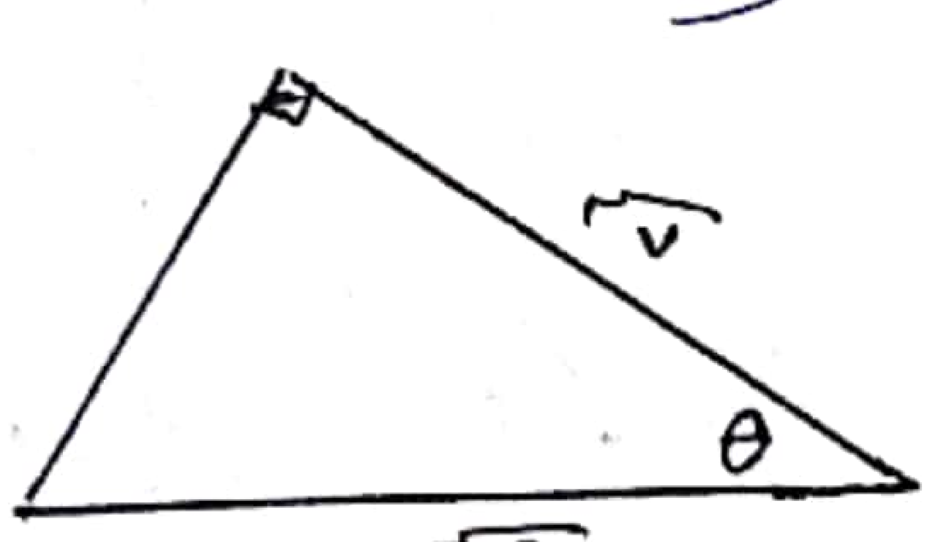
من الأشكال الآتية أوجد قياس θ بالستيني



ظا $\theta = \frac{٨}{٥} = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$

∴ θ حادة

∴ θ = ٥٧° ٥٩ʹ ٤٠ʺ



جتا $\theta = \frac{٧}{٩} = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}$

∴ θ حادة

∴ θ = ٣٨° ٥٦ʹ ٣٣ʺ

إذا كانت ظا θ = $\frac{٤}{٣}$ حيث θ أكبر زاوية موجبة ، θ ∈ [٠ ، ٣٦٠[فأوجد قيمة α لأقرب دقيقة إذا كان

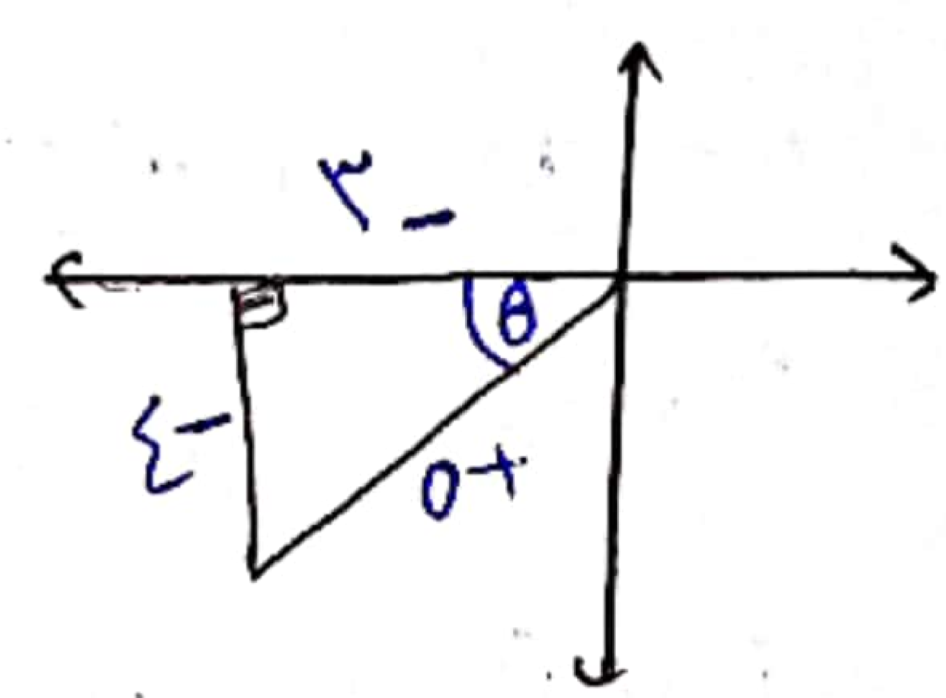
جا α = جا ١٥٠ جا $(-\theta)$ + $\frac{١}{٥}$ قتا $(١٨٠ + \theta)$ ظا ٢٢٥

الحل

ظا θ موجبة تقع الأول أو الثالث

أكبر زاوية موجبة ∴ θ ∈ الربع الثالث

ظا θ = $\frac{٤}{٣}$ $\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$



∴ جا α = جا ١٥٠ × -جا θ + $\frac{١}{٥}$ × -قتا θ × ظا ٢٢٥

∴ جا α = جا ٣٠ × -جا θ - $\frac{١}{٥}$ قتا θ × ظا ٤٥

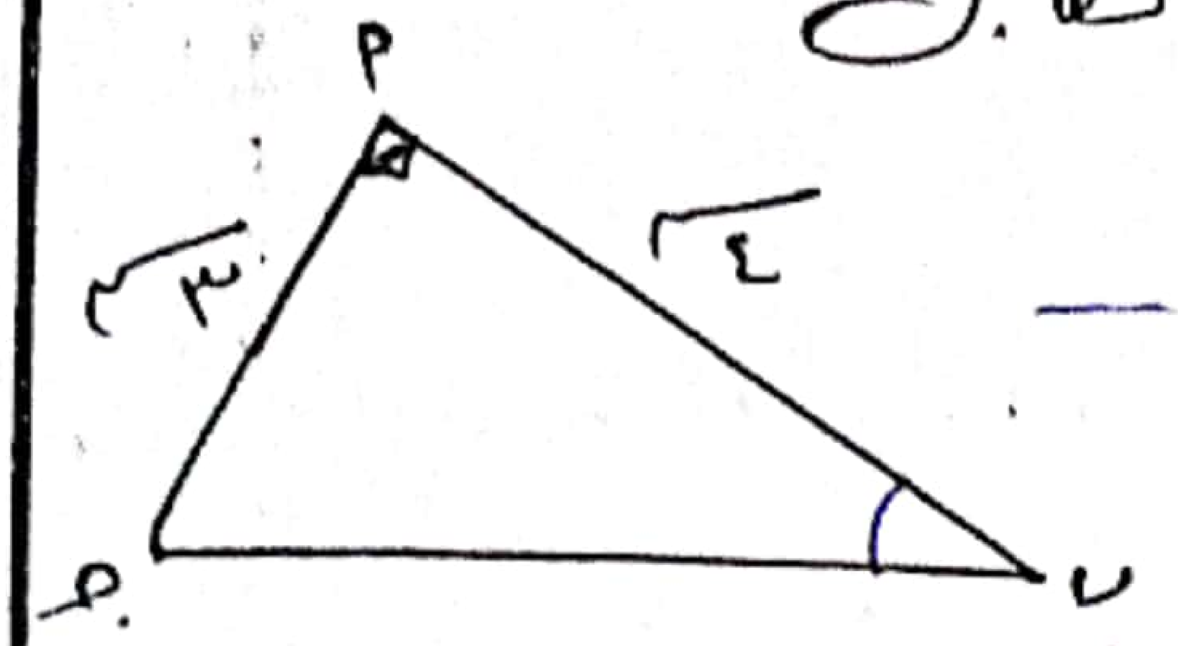
∴ جا α = $\frac{١}{٢}$ × - $\frac{-٤}{٥}$ - $\frac{١}{٥}$ × $\frac{-٥}{٤}$ × ١

جا α = $\frac{٢}{٥}$ + $\frac{١}{٤}$ = $\frac{١٣}{٢٠}$

α حادة = ٤٠° ٣٢′ الأول

الثاني = ١٨٠ − ٤٠° ٣٢′ = ١٣٩° ٢٨′

من الشكل المقابل



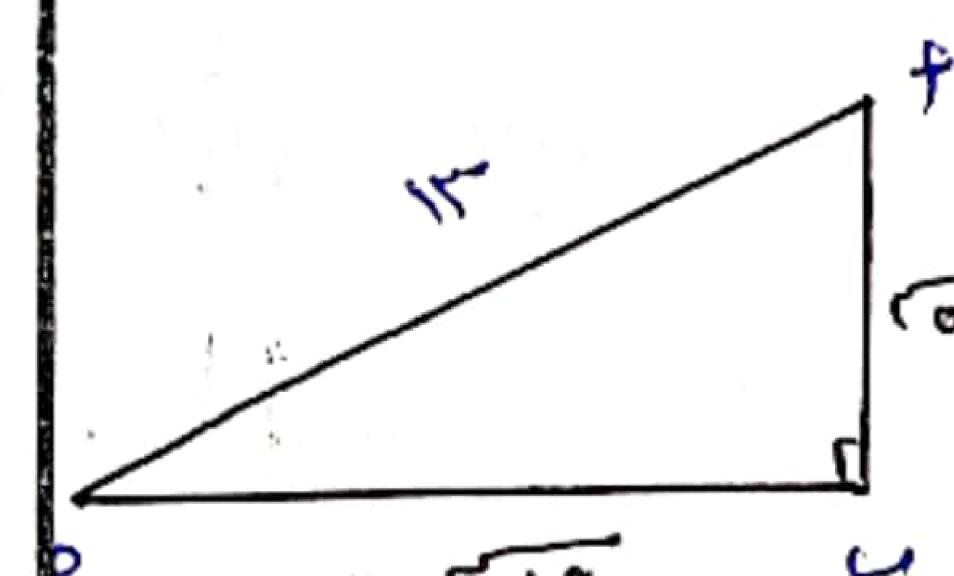
ق(بْ) = ----

ق(بْ) = ظا$^{-1}$ $(\frac{٣}{٤})$

جا (جتا$^{-1}$ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) = ---

جتا$^{-1}$ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٣٠° ∴ جا ٣٠ = $\frac{١}{٢}$

من الشكل المقابل



جا (ظا$^{-1}$ $\frac{٥}{١٢}$) =

ظا$^{-1}$ $\frac{٥}{١٢}$ = ق(ج)

جا ج = $\frac{٥}{١٣}$

ظا$^{-1}$ $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ + ظتا$^{-1}$ $\sqrt{٣}$ = ٣٠° + ٣٠° = ٦٠°

جتا$^{-1}$ س + جا$^{-1}$ س = $\frac{\pi}{٢}$

م/ محمد عبد الله

أ/ محمد عبد السلام