الأدهم

فى

الجبر وحساب المثلثات

الصف الأول الثانوى

عام وأزهر

٢٠٢٠

هدية مجانية

إعداد أ/ محمد أدهم

ت / ٠١٠٠٠٧٤٥١٩٥٧

الدرس الأول : حل معدلات الدرجة الثانية فى متغير واحد

هنتعلم أية ؟ الدرس ده ؟؟

هنتعلم حل المعادلات بطريقتين

(أ) الطريقة الجبرية

* بالتحليل * بالقانون العام

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$

(ب) الطريقة البيانية

هنرسم منحنى الدالة التربيعية ونحدد نقط التقاطع مع محور السينات

مثال ١ أوجد فى ح مجموعة حل المعادلات التالية

(١) $س^2 - ٥ س + ٦ = ٠$

٦×١
٣×٢

الحل

$(س - ٢)(س - ٣) = ٠$

إما $س - ٢ = ٠$ ومنها $س = ٢$ | أو $س - ٣ = ٠$ ومنها $س = ٣$

$\therefore م.ح = \{٢ ، ٣\}$

(٢) $س^3 - ٢٧ = ٠$

الحل

$س^3 = ٢٧$ بأخذ $\sqrt[3]{}$

$\therefore س = \sqrt[3]{٢٧} = ٣$

$\therefore م.ح = \{٣\}$

(٣) $س^2 - ٢٥ = ٠$

الحل

$س^2 = ٢٥$ بأخذ $\sqrt{}$ للطرفين

متنساش $\sqrt{}$ بيكون معاه $\pm$

$\therefore س = \pm \sqrt{٢٥}$ $س = \pm ٥$

$\therefore م.ح = \{\pm ٥\}$

(٤) $س^2 + ٩ = ٠$

الحل

$س^2 = -٩$ بأخذ $\sqrt{}$ للطرفين

$س = \pm \sqrt{-٩}$ مرفوض

لأنه لا يوجد $\sqrt{}$ لعدد سالب

$\therefore م.ح = \emptyset$

(٥) $س + \frac{٥}{س} = ٤$

الحل

بالضرب $\times$ س

$س^2 + ٥ = ٤ س$

$س^2 - ٤ س + ٥ = ٠$

خلي بالك مفيش عددين حاصل ضربهما ٥ ومجموعهما ٤ لذلك دي هتتحل بالقانون العام "فاكرينه؟!"

$س^2 - 4س + 5 = 0$

$أ = 1$ ، $ب = -4$ ، $جـ = 5$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4أجـ}}{2أ}$$

$$\therefore س = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4\times1\times5}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

مفيش جذر تربيعي لعدد سالب

$\therefore \sqrt{-4} \notin ح$

$\therefore م.ح = \emptyset$

تدريب

حل المعادلات التالية في ح

1. $س^2 + 3س = 0$
2. $س^2 + 5س - 6 = 0$
3. $س^2 - 6س + 9 = 0$
4. $2س^2 + 3س - 4 = 0$
5. $5س^2 - 3س - 1 = 0$
6. $س - \frac{5}{س} = 3$ ، $س \ne 0$

من عجائب الرياضيات.

اضرب عمرك في

13837

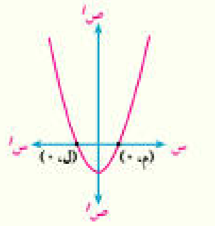
اضرب النتيجة في 73

ستدهش للنتيجة

ثانياً: الحل البياني

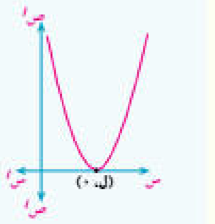
عندنا ٣ حالات

١- المنحنى يقطع محور السينات في نقطتين.



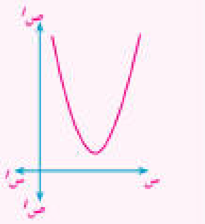
يوجد حلّان مختلفان للمعادلة في ح، مجموعة الحل = {ل، م}

٢- المنحنى يمس محور السينات في نقطة واحدة.



يوجد حلان متساويان للمعادلة في ح، مجموعة الحل = {ل}

٣- المنحنى لا يقطع محور السينات.



لايوجد حلٌ للمعادلة في ح، مجموعة الحل = ϕ

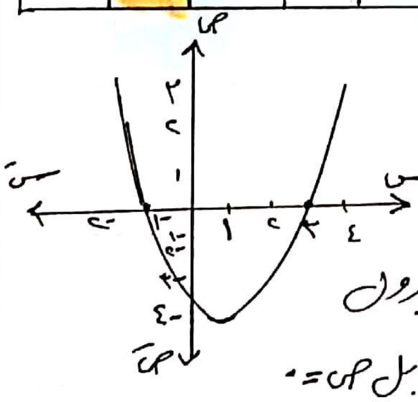
مثال ٢

أوجد في ح مجموعة حل المعادلات التالية بيانياً

(١) $س^2 - 2س - 3 = 0$ [-٢، ٤]

الحل

س	-٢	-١	٠	١	٢	٣	٤
ص	٥	٠	-٣	-٤	-٣	٠	٥



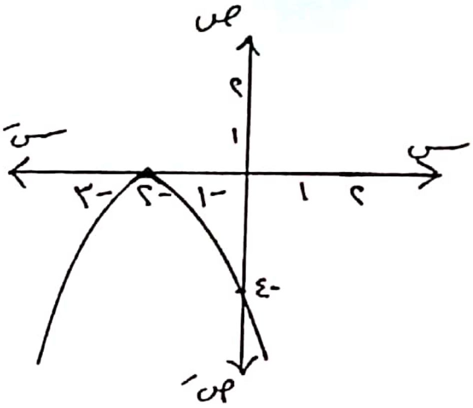
من الرسم م.ح = {-١، ٣}

أو عايز تجيبها من الجدول هي قيم س اللي تقابل ص = ٠

(٢) $س^2 - 4س - 4 = 0$ [-١، ٥]

الحل

س	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
ص	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9



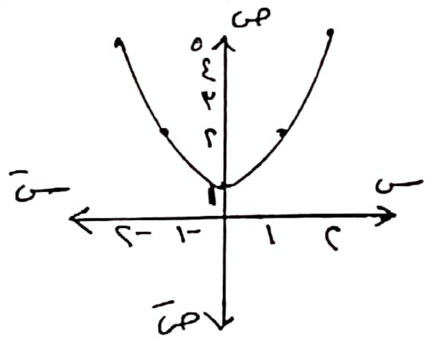
من الرسم

م.ح = $\{-2\}$

③ $س^2 + 1$ $[-2 ، 2]$

الحل

س	-2	-1	0	1	2
ص	5	2	1	2	5



من الرسم

∴ م.ح = Φ

ملحوظة

$أس^2 + ب س + حـ = 0$

إحداثيات رأس المنحنى

$$\left(\frac{-ب}{2أ} ، د\left(\frac{-ب}{2أ}\right) \right)$$

مثال ٢ عين احداثيات رأس المنحنيات التالية

$س^2 + 2س - 1 = 0$

الحل

$أ = 1$ $ب = 2$

$$\frac{-ب}{2أ} = \frac{-2}{2 \times 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$د(-1) = (-1)^2 + 2(-1) - 1 = -2$$

∴ رأس المنحنى $(-1 ، -2)$

سؤال رفيع

يعني أيه جذر للمعادلة

معناه أنى أعوض عن س بالرقم اللي قاله ويبقى قيمة المعادلة = صفر

لأن جذر المعادلة هو حل المعادلة يعني قيمة س عندما ص = صفر

مثال ٣ إذا كان س = ٣ أحد جذري المعادلة $س^2 + أس + 6 = 0$. فأوجد الجذر الآخر

الحل

بوضع س = ٣

$9 + 3أ + 6 = 0$ $3أ = -15$

∴ $أ = \frac{-15}{3} = -5$

١×٦
٢×٣

∴ المعادلة هي

س٢ − ٥س + ٦ = ٠

(س − ٢)(س − ٣) = ٠

س = ٢ أو س = ٣

∴ الجذر الآخر = ٢

مثال ٤

إذا كان ٥ ، −٣ هما جذرا المعادلة س٢ + أس + ب = ٠ فأوجد أ ، ب

الحل

بوضع س = ٥

∴ ٢٥ + ٥أ + ب = ٠ ← (١)

بوضع س = −٣

٩ − ٣أ + ب = ٠ ← (٢)

٥أ + ~~ب~~ = −٢٥ بالطرح

−٣أ + ~~ب~~ = −٩

٨أ = −١٦ ∴ أ = $\frac{-١٦}{٨}$ = −٢

بالتعويض في (١)

٢٥ − ١٠ + ب = ٠

ب + ١٥ = ٠

∴ ب = −١٥

∴ أ = −٢ ، ب = −١٥

أي خدمة

مثال ٥ أكمل

(١) المعادلة (س − ٣)(س + ٤) = ٠ من الدرجة ...... الثانية

(٢) مجموعة حل المعادلة س٢ − ٢س = ٠ هي ...... س(س − ٢) = ٠

م.ح = {٠ ، ٢}

(٣) مجموعة حل المعادلة س٢ + ١٠٠ = ٠ في ح

س٢ = −١٠٠ س = $\sqrt{-١٠٠}$ مرفوض

م.ح = ϕ

(٤) مجموعة حل المعادلة س٢ − ٥ = ٠ في ح

س٢ = ٥ س = ±$\sqrt{٥}$

∴ م.ح = {±$\sqrt{٥}$}

(٥) إذا كان منحنى الدالة التربيعية يقطع محور السينات في (٣ ، ٠) ، (−٤ ، ٠) فإن م.ح = ...

{−٤ ، ٣} ← لازم تكون مجموعة

(٦) إذا كان منحنى الدالة التربيعية يمر بالنقط {(−١ ، ٠) ، (٠ ، −٣) ، (١ ، −٤) ، (٣ ، ٠)}

فإن م.ح = {−١ ، ٣}

قيم س عندما ص = ٠

مثال ٦ اختر الاجابة الصحيحة

(١) الشرط الذى يجعل المعادلة أ س² + ب س + جـ = ٠ تربيعية هو ....

(أ) أ > ٠ (ب) أ < ٠

(جـ) أ ≠ ٠ (د) أ ≠ ٠ ، ب ≠ ٠

---

(٢) إذا كان (ص − ٤)² = ٣٦ ، ص < ٠

فإن ص + ٤ = ...

(أ) −٢ (ب) ٢

(جـ) ١٠ (د) ١٤

الحل ← ص − ٤ = ± ٦

ص − ٤ = ٦ ، ص − ٤ = −٦

ص = ٦ + ٤ ، ص = −٦ + ٤

ص = ١٠ مرفوض ، $\boxed{ص = −٢}$ < ٠

∴ ص + ٤ = −٢ + ٤ = ٢

---

(٣) إذا كانت س = ٤ أحد جذرى المعادلة س² + م س = ٤ فإن ...

(أ) م = −٣ (ب) م عدد زوجى

(جـ) (١ − م) مربع كامل (د) (أ) ، (جـ) صحيحان

بالتجريب م = −٣ تحقق ∴ أ صحيحة

١ − (−٣) = ٤ مربع كامل ∴ جـ صحيحة

---

(٤) الجذر المشترك للمعادلتين التربيعيتين

س² − ٣ س + ٢ = ٠ ، ٢ س² − ٥ س + ٢ = صفر

(أ) س = ٢ (ب) س = ١

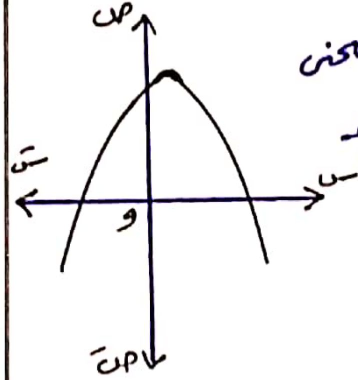
(جـ) س = −٢ (د) س = $\frac{1}{2}$

بالتعويض نستطيع أو حل كل معادلة .

---

(٥) الشكل المقابل يمثل المنحنى

ص = أ س² + ب س + جـ



(أ) أ > ٠ ، جـ > ٠

(ب) أ > ٠ ، جـ < ٠

(جـ) أ < ٠ ، جـ > ٠

(د) أ < ٠ ، جـ < ٠

لأن المنحنى مفتوح لأسفل والجذران مختلفان فى الإشارة فلابد أن يكون حاصل ضربهما سالب

لهما مختلفين بالقدر

$\frac{جـ}{أ}$ سالب ∴ جـ > ٠

---

(٦) قطعة أرض على شكل مستطيل بعداه ٦ ، ٩ م يراد مضاعفة هذه المساحة وذلك بزيادة كل من بعديها بنفس المسافة فإن المسافة ...

(أ) ٣ (ب) ٥

(جـ) ٧ (د) ٩

٦ × ٩ = ٥٤ بالمضاعفة يبقى ١٠٨

(٦ + س) (٩ + س) = ١٠٨

نكون أو نحل نستطيع س = ٣

الدرس الثاني
مقدمة عن الأعداد المركبة

هنتعلم أيه الدرس ده

١- يعني أيه عدد تخيلي

٢- ازاى أضع العدد التخيلي في أبسط صورة

٣- مجموعة الأعداد المركبة

٤- نعيش شوية مع الأعداد المركبة

هيا نبدأ وتوكلنا على الله

العدد التخيلي

هو العدد الذي مربعه = -١

$\therefore$ $ت^{٢} = -١$

$ت = \sqrt{-١}$

ومن ذلك

$\sqrt{-٢} = \sqrt{٢}\,ت$

$\sqrt{-٥} = \sqrt{٥}\,ت$

$\sqrt{-٣} = \sqrt{٣}\,ت$

ملحوظة

$\sqrt{٢} \times \sqrt{٣} = \sqrt{٦}$ وكلت أشيه

$\sqrt{-١} \times \sqrt{-١} \neq \sqrt{-١ \times -١}$

$ت \times ت = ت^{٢} = -١$

لذلك نعمم القاعدة

إذا كان أ ، ب عددان حقيقيان سالبان

فإن $\sqrt{أ} \times \sqrt{ب} \neq \sqrt{أب}$

أمثلة

(١) $\sqrt{-٣} \times \sqrt{-٥} = \sqrt{٣}\,ت \times \sqrt{٥}\,ت$

$= \sqrt{١٥}\,ت^{٢} = -١ \times \sqrt{١٥} = -\sqrt{١٥}$

(٢) $\sqrt{-٢} \times \sqrt{-٧} = \sqrt{٢}\,ت \times \sqrt{٧}\,ت$

$= \sqrt{١٤} \times ت^{٢} = -\sqrt{١٤}$

ت في أبسط صورة

$ت = ت$

$ت^{٢} = -١$

$ت^{٣} = -ت$

$ت^{٤} = ١$

دي دورة تتكرر كل ٤

سؤال مهم ازاى اجيب ت في أبسط صورة

إذا كان الأس موجب هنطرح أول عدد تحته مباشرة يقبل القسمة على ٤

وإذا كان الأس سالب هجمع عليه
أول عدد موجب يقبل القسمة على ٤
وتعالوا نحل و هنفهم إن شاء الله

مثال ١ أوجد فى أبسط صورة

١) $ت^{٨} = ١$ لأنه ٨ تقبل على ٤ بدون باقى

٢) $ت^{-١٦} = ١$ لأنه -١٦ // // بدون باقى

٣) $ت^{٤ن} = ١$ لأنه ٤ن // // // //

٤) $ت^{-٤٠م} = ١$ لأنه ٤٠م تقبل // بدون //

٥) $ت^{٥} = ت^{٥-٤} = ت^{١} = ت$

٦) $ت^{١٣} = ت^{١٣-١٢} = ت^{١} = ت$

٧) $ت^{٩١} =$ ....

٨) $ت^{١٨} = ت^{١٨-١٦} = ت^{٢} = -١$

٩) $ت^{٢٢} = ت^{٢٢-٢٠} = ت^{٢} = -١$

١٠) $ت^{٣٤} =$ ------

١١) $ت^{١١} = ت^{١١-٨} = ت^{٣} = -ت$

١٢) $ت^{١٥} = ت^{١٥-١٢} = ت^{٣} = -ت$

١٣) $ت^{٢١} =$ ------

١٤) $ت^{٤ن+١} = ت^{١} = ت$

١٥) $ت^{٨ن+٢} = ت^{٢} = -١$

١٦) $ت^{٢٠ن+٧} = ت^{٧} = ت^{٧-٤} = ت^{٣} = -ت$

النوع ده كده اتفهم كويس ؟

مثال ٢ أوجد فى أبسط صورة

١) $ت^{-٤} = ١$ لأنه -٤ تقبل على ٤ بدون باقى

٢) $ت^{-٨} = ١$ -- -- // // //

٣) $ت^{-١٢ن} = ١$

٤) $ت^{-٣} = ت^{-٣+٤} = ت^{١} = ت$

٥) $ت^{-٥} = ت^{-٥+٨} = ت^{٣} = -ت$

٦) $ت^{-٧} = ت^{-٧+٨} = ت^{١} = ت$

٧) $ت^{-١١} = ت^{-١١+١٢} = ت^{١} = ت$

٨) $ت^{-١٤} = ت^{-١٤+١٦} = ت^{٢} = -١$

٩) $ت^{-٢٢} = ت^{-٢٢+٢٤} = ت^{٢} = -١$

١٠) $ت^{٤ن-٩} = ت^{-٩+١٢} = ت^{٣} = -ت$

١١) $ت^{١٠٠ن-١٥} = ت^{-١٥} = ت^{-١٥+١٦} = ت$

مجموعة الأعداد المركبة

العدد المركب $أ + ب ت$

الجزء الحقيقى — الجزء التخيلى

لاحظ أن

١) إذا كان $أ = ٠$ يبقى العدد تخيلى

٢) إذا كان $ب = ٠$ يبقى العدد حقيقى

النهاردة إن شاء الله هنضيف مجموعة جديدة للأعداد وهي مجموعة الأعداد المركبة

$ك = \{أ + ب ت : أ \in ح ، ب \in ح ، ت^{٢} = -١\}$

$\therefore ع \subset ط \subset ص \subset ن \subset ح \subset ك$

مثال ٣ أوجد مج ح لكل مما يلي

١) $س^{٢} + ٢٥ = ٠$

الحل

$س^{٢} = -٢٥$

$س = \pm \sqrt{-٢٥} = \pm \sqrt{٢٥ ت^{٢}}$

$= \pm ٥ ت$

$\therefore م.ح = \{\pm ٥ ت\}$

٢) $٢س^{٢} + ١٨ = ٠$

الحل

$٢س^{٢} = -١٨ \quad \div ٢$

$س^{٢} = -٩ \quad$ بأخذ $\sqrt{\ }$

$س = \pm \sqrt{-٩} = \pm \sqrt{٩ ت^{٢}}$

$= \pm ٣ ت$

$\therefore م.ح = \{٣ت ، -٣ت\}$

سؤال رفيع

متى يتساوى العددان المركبان

ج: عندما يتساوى الجزء الحقيقي مع الحقيقي و يتساوى الجزء التخيلي مع التخيلي

مثال ٤ أوجد قيم س ، ص

١) $س + ص ت = ٤ - ٣ت$

$س = ٤ \qquad ص = -٣$

٢) $س - ٥ت = ٤ - ص ت$

$س = ٤ \qquad ص = ٥$

٣) $س + ص ت = (٣ + ٢ت) + (٢ - ت)$

$س + ص ت = ٥ + ت$

$س = ٥ \qquad ص = ١$

أيه رأيكم ناخد تمرين شامل كل العمليات على الأعداد المركبة

مثال ٥ أوجد في أبسط صورة يا حج

١) $(٣ + ٥ت) + (٤ - ٢ت)$

$= ٧ + (٥ - ٢)ت$

$= ٧ + ٣ت$

٢) $(٢ - ت) - (٥ + ت)$

الحل

$٢ - ت - ٥ - ت$

$= (٢ - ٥) + (-١ - ١)ت$

$= -٣ - ٢ت$

---

٣) $(٤ + ٢ت)(٣ - ٥ت)$

الحل

$١٢ - ٢٠ت + ٦ت - ١٠ت^{٢}$

$١٢ - ١٤ت - (١٠ \times -١)$

$٢٢ - ١٤ت$

---

٤) $(٣ + ٢ت)^{٢}$

الحل

$(٣ + ٢ت)(٣ + ٢ت)$

$٩ + ٦ت + ٦ت + ٤ت^{٢}$

$٩ + ١٢ت + (٤ \times -١)$

$٥ + ١٢ت$

ويمكنك تحل مربع كامل

$(أ \pm ب)^{٢} = أ^{٢} \pm ٢أب + ب^{٢}$

---

٥) $(١ - ت)^{٤}$

الحل

$((١ - ت)^{٢})^{٢}$

$(١ - ٢ت + ت^{٢})^{٢}$

$(١ - ٢ت - ١)^{٢}$

$(-٢ت)^{٢} = ٤ت^{٢} = -٤$

---

٦) $ت(٥ - ٣ت)$

الحل

$٥ت - ٣ت^{٢} = ٥ت + ٣$

$= ٣ + ٥ت$

---

٧) $(٢ - ت)(٢ + ت)$

الحل

فرق بين مربعين $(أ - ب)(أ + ب)$

$= أ^{٢} - ب^{٢}$

$٤ - ت^{٢} = ٤ - (-١) = ٥$

---

٨) $(٣ - ت)(٣ + ت)$

الحل

$٩ - ت^{٢} = ٩ - (-١) = ١٠$


إِنَّ ٱللَّهَ وَمَلَٰٓئِكَتَهُۥ يُصَلُّونَ عَلَى ٱلنَّبِيِّۚ يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ صَلُّواْ عَلَيۡهِ وَسَلِّمُواْ تَسۡلِيمًا

العددان المترافقان

لايجاد المرافق نغير اشارة الجزء التخيلي

أ + ب ت $\xLeftarrow{\text{مرافقه}}$ أ - ب ت

لاحظ

	العدد	المرافق
١	٥+٢ت	٥-٢ت
٢	٤ - ت	٤ + ت
٣	ت - ٢	← أصلها -٢+ت $\xLeftarrow{\text{المرافق}}$ -٢-ت
٤	٣ت+٥	أصلها ٥+٣ت $\xLeftarrow{\text{المرافق}}$ ٥-٣ت
٥	٢ت	أصلها ٠ +٢ت $\xLeftarrow{\text{المرافق}}$ -٢ت
٦	-٤ت	$\xLeftarrow{\text{المرافق}}$ ٤ت
٧	٥	أصلها ٥+صفرت $\xLeftarrow{\text{المرافق}}$ ٥
٨	٧	$\xLeftarrow{\text{المرافق}}$ ٧

ملحوظة

١) مجموع العددين المترافقين (عدد حقيقي) = ضعف الجزء الأول (الحقيقي)

٢) حاصل ضرب العددين المترافقين (عدد حقيقي) = مربع الحقيقي - مربع التخيلي

تناقش ت^{٢} = -١

مثال ٦

العدد ٥ - ٤ت اكتب مرافقه ثم أوجد مجموع العدد ومرافقه وحاصل ضربهما

الحل

* العدد ٥-٤ت المرافق = ٥+٤ت
* ٥-٤ت + ٥+٤ت = ١٠
* (٥-٤ت)(٥+٤ت)

= ٢٥ - ١٦ت^{٢} = ٢٥ - ١٦×(-١)

= ٢٥+١٦ = ٤١

مثال ٧

العدد ٣-٢ت أوجد مرافقه ثم أوجد مجموع وحاصل ضرب العدد ومرافقه

الحل

* العدد ٣-٢ت مرافقه = ٣+٢ت
* (٣-٢ت) + (٣+٢ت) = ٦
* (٣-٢ت)(٣+٢ت) = ٩ - ٤ت^{٢}

= ٩ - (٤×-١) = ٩+٤ = ١٣

ملحوظة

لكتابة العدد المركب فى ابسط صورة إذا كان له مقام نضرب البسط والمقام فى مرافق المقام.

مثال 8 اكتب كلاً من الأعداد التالية في أبسط صورة.

(1) $\frac{10}{2+\text{ت}}$

الحل

بالضرب $\times$ $(2-\text{ت})$ بسطاً ومقاماً

$$\text{المقدار} = \frac{10}{2+\text{ت}} \times \frac{(2-\text{ت})}{(2-\text{ت})} = \frac{10(2-\text{ت})}{4-\text{ت}^2}$$

$$= \frac{10(2-\text{ت})}{4+1} = \frac{10(2-\text{ت})}{5} = 4-2\text{ت}$$

(2) $\frac{3+2\text{ت}}{2-5\text{ت}}$

الحل

بالضرب $\times$ $(2+5\text{ت})$ بسطاً ومقاماً

$$= \frac{3+2\text{ت}}{2-5\text{ت}} \times \frac{2+5\text{ت}}{2+5\text{ت}}$$

$$= \frac{6+15\text{ت}+4\text{ت}+10\text{ت}^2}{4-25\text{ت}^2}$$

$$= \frac{6+19\text{ت}-10}{4+25} = \frac{-4+19\text{ت}}{29}$$

$$= \frac{-4}{29} + \frac{19}{29}\text{ت}$$

مثال 9 إذا كان $\frac{(2+\text{ت})(2-\text{ت})}{3+4\text{ت}} = \text{س} + \text{ت ص}$ فأوجد قيمة س، ص

$$= \frac{4-\text{ت}^2}{3+4\text{ت}} = \frac{4+1}{3+4\text{ت}} = \frac{5}{3+4\text{ت}}$$

بالضرب $\times$ $(3-4\text{ت})$ بسطاً ومقاماً

$$= \frac{5}{3+4\text{ت}} \times \frac{3-4\text{ت}}{3-4\text{ت}}$$

$$= \frac{5(3-4\text{ت})}{9-16\text{ت}^2} = \frac{5(3-4\text{ت})}{9+16}$$

$$= \frac{5(3-4\text{ت})}{25} = \frac{1}{5}(3-4\text{ت})$$

$$= \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}\text{ت}\right)$$

$\therefore$ $\text{س} = \frac{3}{5}$ ، $\text{ص} = \frac{-4}{5}$

مثال 10 إذا كان $\text{س} = \frac{13}{5-\text{ت}}$ ، $\text{ص} = \frac{3+2\text{ت}}{1+\text{ت}}$ اثبت أن س ، ص مترافقان.

الحل

$$\text{س} = \frac{13}{5-\text{ت}} \times \frac{5+\text{ت}}{5+\text{ت}} = \frac{13(5+\text{ت})}{25-\text{ت}^2}$$

$$= \frac{13(5+\text{ت})}{26} = \frac{5+\text{ت}}{2} = \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\text{ت}\right)$$

$$\text{ص} = \frac{3+2\text{ت}}{1+\text{ت}} \times \frac{1-\text{ت}}{1-\text{ت}} = \frac{3-3\text{ت}+2\text{ت}-2\text{ت}^2}{1-\text{ت}^2}$$

$$= \frac{3-\text{ت}+2}{1+1} = \frac{5-\text{ت}}{2} = \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\text{ت}\right)$$

$\therefore$ س ، ص عددان مترافقان

لاختلاف إشارة الجزء التخيلي فيهما

اختر الاجابة

(١) مرافق العدد (٣ت − ٤) هو ....

أ) ٣ت + ٤ ب) −٣ت − ٤
ج) −٣ت + ٤ د) ٣ت − ٤

تغيير اشارة التخيلي

(٢) المعكوس الجمعي للعدد المركب (٤ − ٧ت) هو ....

أ) ٤ + ٧ت ب) −٤ + ٧ت
ج) −٤ − ٧ت د) ٤ − ٧ت

هنغير الاشارتين

(٣) $ت + ت^{٢} + ت^{٣} + ت^{٤} =$ ....

أ) ت ب) $ت^{٢}$
ج) ١ د) صفر

ت − ١ − ت + ١ = ٠

(٤) إذا كانت أ ، ب ، جـ ، هـ أربعة أعداد صحيحة موجبة متتالية فإن

$ت^{أ} + ت^{ب} + ت^{جـ} + ت^{هـ} =$ ....

أ) صفر ب) −١
ج) ١ د) ت

(٥) $ت + ت^{٢} + ت^{٣} + ت^{٤} + ... + ت^{١٠٠} =$ ...

أ) ت ب) −١
ج) صفر د) ١

كل ٤ أعداد متتالية = ٠
٠ × ٢٥ = صفر

(٦) إذا كان $(٣ - ٥ت)^{١٠٠} (٣ + ٥ت)^{١٠٠} = س + ص ت$

فإن ص = ...

أ) ٩ ب) ٢٥
ج) صفر د) غير ذلك

الفكرة حاصل ضرب العددين المترافقين = عدد حقيقي
∴ الجزء التخيلي = صفر

(٧) إذا كان $(٥ + ت)^{١٠} (٥ - ت)^{١٠} = س + ت ص$

فإن ص = ...

أ) ١ ب) −١
ج) ٥ د) صفر

(٨) أي مما يلي يكون عدداً تخيلياً ....

أ) $\sqrt{-٣}$ ب) π
ج) −٤ د) $ت^{٢}$

(٩) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة التربيعية

$س^{٢} + ١ = ٠$ فإن $ل^{٢٠١٨} + م^{٢٠١٨} =$ ....

أ) −٢ت ب) ٢ت
ج) −٢ د) ٢٠١٨

$س^{٢} = -١$ ، $س = \pm\sqrt{-١}$ ، س = ± ت

$(ت)^{٢٠١٨} + (-ت)^{٢٠١٨} = -١ - ١ = -٢$

(١٠) أصغر عدد صحيح موجب (ن) يجعل $\left(\frac{١+ت}{١-ت}\right)^{ن} = ١$

أ) ٢ ب) ٤
ج) ٨ د) ١٢

الواجب

١ ضع فى أبسط صورة

١) $\text{ت}^{٨}$ ٢) $\text{ت}^{-١٢}$

٣) $\text{ت}^{١١}$ ٤) $\text{ت}^{-٣}$

٥) $\text{ت}^{٢٥}$ ٦) $\text{ت}^{-٩}$

٧) $\text{ت}^{١٠٤}$ ٨) $\text{ت}^{-١٠}$

٩) $\text{ت}^{٤\text{ن}+١}$ ١٠) $\text{ت}^{٨\text{ن}-١}$

١١) $\text{ت}^{٤\text{ن}+٢}$ ١٢) $\text{ت}^{١٢\text{ن}-١٥}$

١٣) $\frac{١}{\text{ت}^{-٢}}$ ١٤) $\frac{١}{\text{ت}^{٥}}$

٢ أوجد ناتج

١) $(٤+\text{ت}) + (٥+٣\text{ت})$

٢) $(٢-\text{ت}) + (٢+\text{ت})$

٣) $(٤-٣\text{ت}) - (٥-٢\text{ت})$

٤) $(٢+٣\text{ت})(٢-٣\text{ت})$

٥) $(١-\text{ت})^{١٠}$

٦) $(٢-٤\text{ت})(٣+\text{ت})$

٣ ضع على صورة أ + ب ت

١) $\frac{٤+\text{ت}}{\text{ت}}$

٢) $\frac{٣-\text{ت}}{٢-\text{ت}}$

٣) $\frac{٤-٥\text{ت}}{٧\text{ت}}$

٤) $\frac{٣+٤\text{ت}}{٥-٢\text{ت}}$

٤ حل المعادلات التالية فى مجموعة الأعداد المركبة

١) $\text{س}^{٢}+٩=٠$

٢) $\text{س}^{٢}+٢٥=٠$

٣) $٤\text{س}^{٢}+١٠٠=٧٥$

٤) $\text{س}^{٢}-٤\text{س}+٥=٠$

٥ أوجد قيمتى س، ص التى تحقق أن

١) $\text{س}+٤\text{ت} = ٥-\text{ص ت}$

٢) $(٢\text{س}+١) + ٤\text{ص ت} = ٥-١٢\text{ت}$

٣) $(٢\text{س}-\text{ص}) + (\text{س}-٢\text{ص})\text{ت} = ٥+\text{ت}$

٤) $\frac{١٠}{٢+\text{ت}} = \text{س}+\text{ص ت}$

٥) $\frac{٦-٤\text{ت}}{١-\text{ت}} = \text{س}+\text{ص ت}$

٦) $\frac{(٣-\text{ت})(٣+\text{ت})}{٢+\text{ت}} = \text{س}+\text{ص ت}$

٦

إذا كان $\text{س} = \frac{١-٢\text{ت}}{١-٣\text{ت}}$ ، $\text{ص} = \frac{٢-\text{ت}}{٣-\text{ت}}$

فأثبت أن س، ص مترافقان

٨ اختر العدد ت ، -ت كل منهما

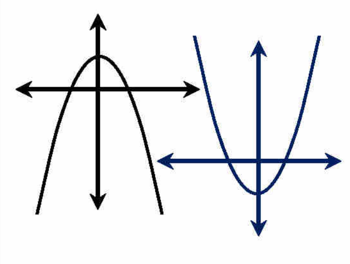
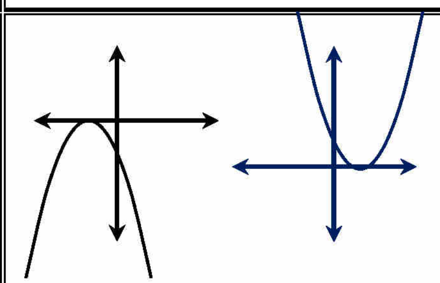
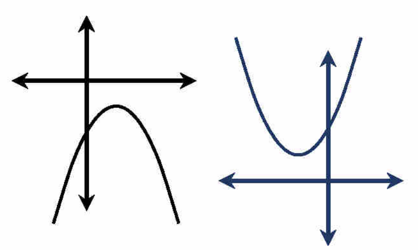
أ) مترافقان جمعياً   ب) مترافقان ضربياً

ج) مترافقان جمعياً وضربياً   د) غير ذلك

على فكرة كل منهما مترافق جمعى وضربى ومن المقرر [illegible]

الدرس الثالث تحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية

فى المعادلة أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠

المميز	ب^{٢}-٤أجـ > ٠ المميز موجب	ب^{٢}-٤أجـ = ٠ المميز = صفر	ب^{٢}-٤أجـ < ٠ المميز سالب
نوع الجذرين	حقيقيان مختلفان	حقيقيان متساويان	مركبان مترافقان وغير حقيقيين
الرســـم			

مثال : حدد نوع جذرى المعادلة دون حلها	تدريب : حدد نوع جذرى المعادلة دون حلها
١) س^{٢} ــ ١٠ س + ١٠ = ٠ الحـــــل أ = ١ & ب = - ١٠ & جـ = ١٠ المميز ب^{٢}-٤أجـ = (-١٠)^{٢} ــ ٤×١×١٠ = ٦٠ (يعنى موجب) ∴ الجذران حقيقيان مختلفان .	١) س^{٢} ــ ٣ س + ٥ = ٠ الحـــــل أ = & ب = & جـ = المميز ب^{٢}-٤أجـ =
٢) س^{٢} ــ ٦ س + ٩ = ٠ الحـــــل أ = ١ & ب = - ٦ & جـ = ٩ المميز ب^{٢}-٤أجـ = (-٦)^{٢} ــ ٤×١×٩ = ٠ ∴ الجذران حقيقيان متساويان .	١) س^{٢} + ١٠ س + ٢٥ = ٠ الحـــــل أ = & ب = & جـ = المميز ب^{٢}-٤أجـ =

③ $س^٢ - ٣ س + ٥ = ٠$

الحـــــل

$ا = ١$ & ب = -٣ & جـ = ٥

المميز $ب^٢ - ٤ ا جـ$ =

$(-٣)^٢ - ٤ × ١ × ٥ = - ١١$ (يعنى سالب)

∴ الجذران مركبان وغير حقيقيين .

③ $س^٢ - ٣ س + ٤ = ٠$

الحـــــل

ا = & ب = & جـ =

المميز $ب^٢ - ٤ ا جـ$ =

④ (س – ١١) – س (س – ٦) = ٠

الحـــــل

هنفك الاقواس ونعدلها الاول تمام ؟

$س - ١١ - س^٢ + ٦ س = ٠$

$- س^٢ + ٧ س - ١١ = ٠$ كدة جاهزة

ا = - ١ & ب = ٧ & جـ = - ١١

المميز $ب^٢ - ٤ ا جـ$ =

$(٧)^٢ - ٤ × (-١) × (-١١) = ٥$

∴ الجذران حقيقيان مختلفان .

④ $٦ س^٢ = ١٩ س - ١٥$

الحـــــل

هنعديهم فى طرف واحد ونخليها معادلة صفرية

$٦ س^٢ - ١٩ س + ١٥ = ٠$ كدة جاهزة

ا = & ب = & جـ =

المميز $ب^٢ - ٤ ا جـ$ =

أثبت أن جذرى المعادلة

① $٧ س^٢ - ١١ س + ٥ = ٠$

مركبان وغير حقيقيين ثم أوجد الجذرين بإستخدام القانون العام

الحـــــل

ا = ٧ & ب = - ١١ & جـ = ٥

المميز $ب^٢ - ٤ ا جـ$ =

$(-١١)^٢ - ٤ × ٧ × ٥ = - ١٩$ (كمية سالبة)

∴ الجذران مركبان وغير حقيقيين .

أثبت أن جذرى المعادلة

① $٢ س^٢ - ٣ س + ٢ = ٠$ مركبان وغير حقيقيين ثم أوجد الجذرين بإستخدام القانون العام

الحـــــل

ا = & ب = & جـ =

المميز $ب^٢ - ٤ ا جـ$ =

لايجاد الجذرين باستخدام القانون العام

لايجاد الجذرين باستخدام القانون العام $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ ج}}{٢أ} = \frac{١١ \pm \sqrt{-١٩}}{١٤}$ $\frac{١١ \pm \sqrt{١٩}ت}{١٤}$ ∴ الجذران هما $\frac{١١ + \sqrt{١٩}ت}{١٤}$ ، $\frac{١١ - \sqrt{١٩}ت}{١٤}$	$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ ج}}{٢أ} =$ ∴ الجذران هما ،

سؤال بسيط أمتى الجذران يكونوا متساويان ؟ طبعاً لما المميز = صفر مظبوط ؟ تعالوا نشوف الفكرة دى كمان

مثال : أوجد قيمة ك التى تجعل الجذران متساويان	تدريب: أوجد قيمة ك التى تجعل الجذران متساويان
١) $٣ س^٢ - ٦ س + ك = ٠$ **الحـــــــل** أ = ٣ & ب = - ٦ & ج = ك ∵ الجذران متساويان ∴ المميز $ب^٢ - ٤ أ ج = ٠$ $(-٦)^٢ - ٤ × ٣ × ك = ٠$ $٣٦ - ١٢ ك = ٠$ $- ١٢ ك = - ٣٦ \Leftarrow ك = \frac{-٣٦}{-١٢} = ٣$	١) $٢ س^٢ + ك س + ٥ = ٠$ **الحـــــــل** أ = & ب = & ج = المميز $ب^٢ - ٤ أ ج = ٠$

مثال : أوجد قيمة ك التى تجعل الجذران متساويان :

$س^٢ + ٢ (ك - ١) س + (٢ ك + ١) = ٠$ **ثم أوجد الجذرين**

الحـــــــل

أ = ١ & ب = ٢ (ك - ١) & ج = (٢ ك + ١) ∵ الجذران متساويان

∴ المميز $ب^٢ - ٤ أ ج = ٠$ $[٢ (ك - ١)]^٢ - [٤ × ١ × (٢ ك + ١)] = ٠$

$[(٢ك - ٢)]^٢ - [٤(٢ك + ١)] = ٤ك^٢ - ٨ك + ٤ - ٨ك - ٤ = ٠$

$٤ك^٢ - ١٦ك = ٠ \Leftarrow ٤ك(ك - ٤) = ٠$

إما **ك = ٠** وتكون المعادلة

$س^٢ - ٢س + ١ = ٠$

$(س - ١)(س - ١) = ٠$

الجذران هما **١ ، ١**

و إما **ك = ٤** وتكون المعادلة

$س^٢ + ٦س + ٩ = ٠$

$(س + ٣)(س + ٣) = ٠$

الجذران هما **-٣ ، -٣**

٣ مثال: أوجد قيمة ك التى تجعل جذرى المعادلة

$س^٢ + ٤س + ك = ٠$ حقيقيان مختلفان

الحـــــــل

$ٱ = ١$ & $ب = ٤$ & $جـ = ك$

∵ الجذران حقيقيان مختلفان ∴ المميز > ٠

$ب^٢ - ٤ٱجـ > ٠ \Leftarrow (٤)^٢ - ٤ \times ١ \times ك > ٠$

$١٦ - ٤ك > ٠ \Leftarrow -٤ك > -١٦$

$ك < \frac{-١٦}{-٤}$ ، ك < ٤ ∴ ك ∈] -∞ ، ٤ [

٣ تدريب: أوجد قيمة ك التى تجعل المعادلة

$ك س^٢ - ٨س + ١٦ = ٠$ ليس لها حل فى ح

يعنى الجذران مركبان وغير حقيقين

الحـــــــل

ٱ = & ب = & جـ =

المميز $ب^٢ - ٤ٱجـ < ٠$

ملحوظة هامة إذا كانت المعاملات ٱ ، ب ، جـ أعداد نسبية والمميز مربع كامل فإن الجذران حقيقيان نسبيان

مثال : إذا كان ل ، م عددين نسبيين فاثبت أن

جذرى المعادلة $ل س^٢ + (ل - م) س - م = ٠$

عددان نسبيان الحـــــــل

$ٱ = ل$ & $ب = ل - م$ & $جـ = -م$

$ب^٢ - ٤ٱجـ = (ل - م)^٢ - ٤ \times ل \times (-م)$

$= ل^٢ - ٢ل م + م^٢ + ٤ل م = ل^٢ + ٢ل م + م^٢$

$(ل + م)^٢ \Leftarrow$ مربع كامل ∴ الجذران نسبيان

تدريب: إذا كان ل ، م عددين نسبيين فاثبت أن

جذرى المعادلة $ل س^٢ + م س + م - ل = ٠$

عددان نسبيان الحـــــــل

مثال / اختر

١ إذا كان أ س² + ب س + جـ = ٠ وكان المميز ب² - ٤ أ جـ > ٠ فإن الجذران

(أ) حقيقيان مختلفان (ب) مركبان وغير حقيقيين
(جـ) حقيقيان متساويان (د) غير ذلك

---

٢ إذا كان ب² - ٤ أ جـ = ٠ فإن الجذران

(أ) حقيقيان متساويان (ب) حقيقيان مختلفان
(جـ) مركبان غير حقيقيين (د) غير ذلك

---

٣ إذا كان ب² - ٤ أ جـ < ٠

(أ) مركبان مترافقان (ب) حقيقيان متساويان
(جـ) حقيقيان مختلفان (د) غير ذلك

---

٤ إذا كان المميز ب² - ٤ أ جـ غير سالب فإن الجذران

(أ) حقيقيان متساويان (ب) حقيقيان مختلفان
(جـ) حقيقيان (د) مركبان وغير حقيقيين

غير سالب يعني موجب أو صفر
حقيقيان مختلفان أو متساويان

---

٥ جذري المعادلة س² - ٢√٥ س + ١ = ٠

(أ) حقيقيان نسبيان (ب) غير حقيقيين
(جـ) حقيقيان متساويان (د) حقيقيان غير نسبيين

بالآلة

الواجب

١ حدد نوع جذري كل من المعادلات التالية

١ س² + ٧ س - ١٠ = ٠
٢ س² - ٦ س + ٩ = ٠
٣ س² + ٣ س + ٥ =
٤ - س² + ٥ س - ٣٠ = ٠
٥ ٣ س² + ١٠ س - ٤ = ٠
٦ س² - ١١ س + ١٠ = ٠
٧ ٤ - ٢ س = ٥ س²
٨ س (س - ٢) = ٥
٩ (س - ١١) - س (س - ٦) = ٠

---

٢ أوجد قيم ك التي تجعل للمعادلة
٥ س² + ٤ س + ك = ٠

١ جذرين حقيقيين متساويين.
٢ جذرين حقيقيين مختلفين
٣ جذرين مركبين وغير حقيقيين

---

٣ اثبت أن جذري المعادلة
٧ س² - ١١ س + ٥ = ٠ مركبان وغير حقيقيين ثم باستخدام الآلة

الدرس الرابع
العلاقة بين جذري المعادلة التربيعية ومعاملات حدودها

أ س² + ب س + جـ = ٠

(١) مجموع الجذرين = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^2} = \frac{-ب}{أ}$

(٢) حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^2} = \frac{جـ}{أ}$

الفكرة الأولى
مباشرة

مثال ١ دون حل المعادلات التالية أوجد مجموع وحاصل ضرب الجذرين.

---

(١) س² + ٥ س + ٤ = ٠

الحل

أ = ١ ب = ٥ جـ = ٤

مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ} = \frac{-٥}{١} = -٥$

حاصل ضرب الجذرين = $\frac{جـ}{أ} = \frac{٤}{١} = ٤$

(٢) ٢ س² + ٥ س - ١٢ = ٠

الحل

أ = ٢ ب = ٥ جـ = -١٢

مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ} = \frac{-٥}{٢}$

حاصل ضرب الجذرين = $\frac{جـ}{أ} = \frac{-١٢}{٢} = -٦$

---

(٣) ٣ س² = ٢٣ س - ٣٠

الحل

هنضبط المعادلة

٣ س² - ٢٣ س + ٣٠ = ٠

أ = ٣ ب = -٢٣ جـ = ٣٠

مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ} = \frac{٢٣}{٣}$

حاصل ضرب الجذرين = $\frac{جـ}{أ} = \frac{٣٠}{٣} = ١٠$

الفكرة الثانية

مثال إذا كان مجموع جذري المعادلة ٢ س² + ب س - ٥ = ٠ هو $\frac{-٣}{٢}$ فأوجد قيمة ب ثم حل المعادلة في ح

الحل

أ = ٢ ب = ب جـ = -٥

∴ مجموع الجذرين = $\frac{-٣}{٢} = \frac{-ب}{أ} = \frac{-ب}{٢}$

∴ -ب = -٣

∴ $\boxed{ب = ٣}$

∴ المعادلة هي $٢س^٢ + ٣س - ٥ = ٠$

$أ = ٢$ ، $ب = ٣$ ، $جـ = -٥$

∴ باستخدام القانون العام $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$

$$= \frac{-٣ \pm \sqrt{٩ + ٤٠}}{٤} = \frac{-٣ \pm ٧}{٤}$$

$$\left\{\frac{-٣+٧}{٤} ، \frac{-٣-٧}{٤}\right\} = \left\{١ ، \frac{-٥}{٢}\right\}$$

كان من الممكن ان نحلها بالمقص

أو بالطريقة اللى بنتغلب بيها على المقص

هشرحهالك علشان تفهمها بس للخطوات

$٢س^٢ + ٣س - ٥ = ٠$

$س^٢ + ٣س - ١٠ = ٠$

$(س - \frac{٢}{٢})(س + \frac{٥}{٢}) = ٠$

$س = ١$ أو $س = \frac{-٥}{٢}$

مثال ٣ إذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة $٢س^٢ - ٤س + ك = ٠$ هو $\frac{٩}{٢}$ أوجد قيمة ك ثم حل في مجموعة الأعداد المركبة

الحل

∴ حاصل ضرب الجذرين $= \frac{٩}{٢} = \frac{ك}{٢}$

∴ $\boxed{ك = ٩}$

∴ المعادلة هي $٢س^٢ - ٤س + ٩ = ٠$

$أ = ٢$ ، $ب = -٤$ ، $جـ = ٩$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$$

$$= \frac{٤ \pm \sqrt{(-٤)^٢ - ٤ \times ٢ \times ٩}}{٢ \times ٢} = \frac{٤ \pm \sqrt{-٥٦}}{٤}$$

$$= \frac{٤ \pm \sqrt{٥٦}\,ت}{٤} = \left\{١ + \frac{\sqrt{١٤}}{٢}ت ، ١ - \frac{\sqrt{١٤}}{٢}ت\right\}$$

مثال ٤ إذا كان $س = -١$ أحد جذري المعادلة $س^٢ - ٢س + أ = ٠$ فأوجد قيمة أ والجذر الآخر.

الحل

بالتعويض عن $س = -١$

$(-١)^٢ - ٢(-١) + أ = ٠$

$١ + ٢ + أ = ٠$ ∴ $أ + ٣ = ٠$

∴ $\boxed{أ = -٣}$

∴ المعادلة $س^٢ - ٢س - ٣ = ٠$

$(س + ١)(س - ٣) = ٠$

$س = -١$ ، $س = ٣$

∴ الجذر الآخر $= ٣$

مثال ٥ إذا كان ٢ ، ٥ جذري المعادلة $س^٢ + أس + ب = ٠$ فاوجد قيمة أ ، ب

الحل

مجموع الجذرين $= ٧$ ∴ $\frac{-أ}{١} = ٧$

∴ $-أ = ٧$ ∴ $\boxed{أ = -٧}$

∴ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{جـ}{أ}$ = ب = ١٠

∴ $\boxed{ب = ١٠}$

مثال ٦ إذا كان $\sqrt{٣}$ ت ، $-\sqrt{٣}$ ت جذري المعادلة س^{٢} + أ س + ب = ٠ فأوجد قيمتي أ ، ب

الحل

مجموع الجذرين = $\sqrt{٣}$ ت + ($-\sqrt{٣}$ ت) = صفر

حاصل ضرب الجذرين = $\sqrt{٣}$ ت × $-\sqrt{٣}$ ت = −٣ ت^{٢}

= −٣ × (−١) = ٣

∴ $\frac{-أ}{١}$ = صفر ∴ أ = صفر

$\frac{ب}{١}$ = ٣ ∴ ب = ٣

الفكرة الثالثة

سؤال بسيط

* متى يكون مجموع عددين = صفر

جـ / إذا كان كل منهما معكوس جمعي للآخر. في المعادلة معناها أن معامل س = صفر

* ومتى يكون حاصل ضرب عددين = ١

جـ / إذا كان كل منهما معكوس ضربي للآخر في المعادلة معناها أن الحد المطلق = معامل س^{٢}

جـ = أ

مثال ٧ أوجد قيمة ل إذا كان أحد الجذرين معكوس جمعي للآخر

أ) س^{٢} + (ل − ٥) س + ٣ = ٠

ل − ٥ = ٠ ∴ ل = ٥

ب) س^{٢} + (٤ + ل) س − ٢ = ٠

٤ + ل = ٠ ∴ ل = −٤

جـ) س^{٢} + ل س − ١ = ٠

ل = ٠

مثال ٨ أوجد قيمة ل التي تجعل أحد الجذرين معكوس ضربي للآخر

أ) ٢س^{٢} − ٥س + ل = ٠

ل = ٢

ب) ٤ل س^{٢} + ٧س + ل^{٢} + ٤ = ٠

ل^{٢} + ٤ = ٤ل

ل^{٢} − ٤ل + ٤ = ٠ ⟸ (ل − ٢)^{٢} = ٠

∴ ل − ٢ = ٠ ∴ ل = ٢

جـ) (ل − ٤) س^{٢} − ٥س − ٣ = ٠

ل − ٤ = −٣

ل = −٣ + ٤ = ١

∴ ل = ١

اختر

١) إذا كان أحد جذرى المعادلة أ س^{2} - ب س + ٧ = ٠ معكوساً جمعياً للآخر فإن ب = ...

(أ) ٢ (ب) -٢ (ج) $\frac{7}{2}$ (د) صفر

٢) إذا كان أحد جذرى المعادلة أ س^{2} - ٣ س + ٢ = ٠ معكوساً ضربياً للآخر فإن أ = ...

(أ) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (ج) ٢ (د) ٣

٣) إذا كان س^{2} + (ك - ٥) س - ٤ = ٠ أحد جذريها معكوساً جمعياً للآخر فإن ك = ...

(أ) ١ (ب) -٥ (ج) ٥ (د) -٤

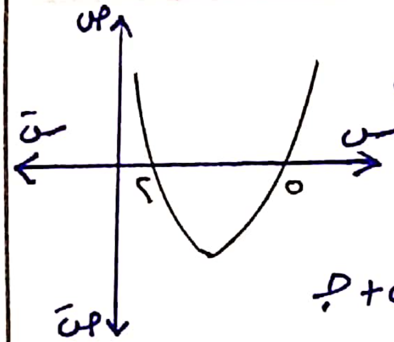
٤) لإيجاد قيم ب ، جـ الحقيقية فى المعادلة س^{2} + ب س + جـ = ٠ يكون كافياً الحصول على ....

(أ) مجموع الجذرين = ٦ فقط (ب) أحد الجذرين (٣+ت) فقط

(ج) (أ) ، (ب) معاً (د) ولا حاجة من اللى فات

ليه ← إذا كان أحد الجذرين مركب فإن الآخر هو المرافق له وكده هنجيب مجموعهم وحاصل ضربهم وكل حاجة.

٥) إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة



د(س) = أ س^{2} + ب س + جـ

فإن $\frac{ب + جـ}{أ}$ = ...

(أ) ٣ (ب) ٥ (ج) ٧ (د) ١٠

من الشكل الجذران هما ٥ ، ٢ مجموعهما ٧ وحاصل ضربهما ١٠

$\frac{-ب}{أ} = 7$ ∴ $\frac{ب}{أ} = -7$ ، $\frac{جـ}{أ} = 10$

$\frac{ب+جـ}{أ} = \frac{ب}{أ} + \frac{جـ}{أ} = -7 + 10 = 3$

أبو أدهم

٦) حاصل ضرب جذور المعادلات

أ س^{2} + ب س + جـ = ٠

ب س^{2} + جـ س + أ = ٠

جـ س^{2} + أ س + ب = ٠ يساوى

(أ) أ ب جـ (ب) -١ (ج) ١ (د) صفر

$\frac{جـ}{أ} \times \frac{أ}{ب} \times \frac{ب}{جـ} = 1$

٧) فى المعادلة أ س^{2} + ب س + جـ = ٠

إذا كان مجموع جذريها = حاصل ضربهما فإن ب = ...

(أ) أ (ب) -أ (ج) جـ (د) -جـ

$\frac{-ب}{أ} = \frac{جـ}{أ}$ ∴ -ب = جـ

∴ ب = -جـ

ملحوظة

إذا كان أحد جذري المعادلة هو عدد مركب فإن الجذر الآخر يكون مرافقه

مثال ٩ إذا كان $(١+\sqrt{٢}\,ت)$ أحد جذري المعادلة $س^٢ - ٢س + جـ = ٠$ فأوجد قيمة

١) الجذر الآخر
٢) قيمة جـ

الحل

١) ∵ الجذر الأول $(١+\sqrt{٢}\,ت)$
∴ الجذر الآخر $= (١-\sqrt{٢}\,ت)$

٢) ∵ حاصل ضرب الجذرين $= \frac{جـ}{١} = جـ$

$(١+\sqrt{٢}\,ت)(١-\sqrt{٢}\,ت)$
$= ١ - ٢ت^٢ = ١ - ٢(-١) = ١+٢ = ٣$

∴ $جـ = ٣$

الواجب

١) دون حل المعادلة أوجد مجموع وحاصل ضرب الجذرين.

١) $س^٢ - ٥س + ٧ = ٠$

٢) $٢س^٢ - ٣س + ١٤ = ٠$

٣) $٥س^٢ = ٢٠س - ٧$

٤) $(٣س - ٢)(س + ١) = ٠$

٢) إذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة $٣س^٢ + ١٠س - جـ = ٠$ هو $\frac{-٨}{٣}$ فأوجد قيمة جـ ثم حل في الأعداد المركبة.

٣) أوجد قيمة م إذا كان وأوجد الجذر الآخر

١) $س = ٣$ أحد جذري المعادلة $س^٢ - ٥س + م = ٠$

٢) $(١+ت)$ أحد جذري المعادلة $س^٢ - ٢س + م = ٠$

٤) أوجد قيمة ك إذا كان أحد الجذرين معكوس جمعي للآخر

١) $س^٢ - (ك-٣)س + ٧ = ٠$

٢) $٣س^٢ + (ك-١)س + ٤ = ٠$

٥) أوجد قيمة ك إذا كان الجذران متعاكسان ضربياً

١) $٣س^٢ - ٥س + ك = ٠$

٢) $٢س^٢ - ٤س + (ك-٣) = ٠$

٣) $(ك+١)س^٢ - ٣س + (٢ك-٣) = ٠$

الدرس الخامس
تكوين المعادلة إذا علم جذراها

إذا كان ل ، م هما جذري المعادلة

∴ مجموع الجذرين = ل + م

حاصل ضرب الجذرين = ل م

و المعادلة هي

س^{٢} - (مجموع الجذرين) س + حاصل ضرب الجذرين = ٠

الفكرة الأولى
مباشرة

مثال ١ كون المعادلات التي جذراها.

١ ٢ ، ٣

الحل

مجموع الجذرين = ٢ + ٣ = ٥

حاصل ضرب // = ٢ × ٣ = ٦

∴ المعادلة هي س^{٢} - ٥س + ٦ = ٠

---

٢ ٢ ، -٥

الحل

مجموع الجذرين = ٢ + (-٥) = -٣

حاصل ضرب // = ٢ × -٥ = -١٠

∴ المعادلة س^{٢} + ٣س - ١٠ = ٠

---

٣ ٥ + √٢ ، ٥ - √٢

الحل

مجموع الجذرين = ٥ + ~~√٢~~ + ٥ - ~~√٢~~ = ١٠

حاصل ضرب الجذرين = (٥ + √٢) (٥ - √٢)

= ٢٥ - ٢ = ٢٣

∴ المعادلة هي س^{٢} - ١٠س + ٢٣ = ٠

---

٤ ٣ + ت ، ٣ - ت

الحل

مجموع الجذرين = ٣ + ~~ت~~ + ٣ - ~~ت~~ = ٦

حاصل ضربهما = (٣ + ت) (٣ - ت) = ٩ - ت^{٢}

= ٩ - (-١) = ٩ + ١ = ١٠

∴ المعادلة هي س^{٢} - ٦س + ١٠ = ٠

الفكرة الثانية
تكوين معادلة من معادلة أخرى معلومة

الخطوات

١ من المعادلة المعلومة هنجيب ل+م ، ل م

٢ والجديدة نعوض بيهم فى جذور المعادلة المطلوب

٣ وبعد كده نكون المعادلة بدلالة الجذور الجديدة

وانتوا عاملين أيه ؟

مثال ٢ إذا علمت أن ل ، م هما جذرا المعادلة $س^{٢}$ - ٥س - ٦ = ٠ فكون المعادلة التي جذراها ل+٢ ، م+٢

الحل

* في المعادلة المعلومة
ل+م = ٥ ، ل م = -٦

* في المعادلة المطلوب

● مجموع الجذرين = ل+٢+م+٢ = ل+م+٤
= ٥+٤ = ٩

● حاصل ضرب الجذرين = (ل+٢)(م+٢)
= ل م + ٢ل + ٢م + ٤
= ل م + ٢(ل+م) + ٤
= -٦ + (٢×٥) + ٤ = ٨

* ∴ المعادلة المطلوبة هي
$س^{٢}$ - ٩س + ٨ = ٠

مثال ٣ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة $س^{٢}$ - ٥س + ٣ = ٠ فأوجد المعادلة التي جذورها ٢ل ، ٢م

الحل

* في المعادلة المعلومة
ل+م = ٥ ، ل م = ٣

* المعادلة المطلوبة

● مجموع الجذرين = ٢ل + ٢م = ٢(ل+م)
= ٢×٥ = ١٠

● وحاصل ضرب الجذرين = ٢ل × ٢م = ٤ ل م
= ٤ × ٣ = ١٢

* المعادلة هي $س^{٢}$ - ١٠س + ١٢ = ٠

مثال ٤ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة $س^{٢}$ - ٣س + ١ = ٠ فكون المعادلة التي جذراها ل+م ، ل م

الحل

* من المعادلة المعلومة
ل+م = ٣ ، ل م = ١

لاحظ جيداً
أن الجذور المطلوبة هي ل+م ، ل م
∴ جذور المعادلة المطلوبة = ٣ ، ١

● مجموع الجذرين = ٣+١ = ٤

● حاصل ضرب الجذرين = ٣×١ = ٣

∴ المعادلة هي $س^{٢}$ - ٤س + ٣ = ٠

مثال ٥ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة $س^{٢}$ - ٧س + ٤ = ٠ فكون المعادلة التي جذراها ل+١ ، م+١

الحل

حل انت يا شاطر

الفكرة الثالثة
مسائل اللف والدوران

احفظ شوية المتطابقات دي علشان هتنحل مسائل كتير.

1. $ل^{٢} + م^{٢} = (ل + م)^{٢} - ٢ ل م$
2. $ل^{٣} + م^{٣} = (ل + م) \left[(ل + م)^{٢} - ٣ ل م \right]$
3. $ل^{٣} - م^{٣} = (ل - م) \left[(ل + م)^{٢} - ل م \right]$
4. $\frac{١}{ل} + \frac{١}{م} = \frac{م + ل}{ل م} = \frac{ل + م}{ل م}$
5. $\frac{ل}{م} + \frac{م}{ل} = \frac{ل^{٢} + م^{٢}}{ل م} = \frac{(ل + م)^{٢} - ٢ ل م}{ل م}$

مثال ٦

إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة $س^{٢} + ٣ س - ٥ = ٠$ تكون المعادلة التي جذراها $ل^{٢}$ ، $م^{٢}$

الحل

* من المعادلة المعلومة

$ل + م = -٣$ ، $ل م = -٥$

* المعادلة المطلوب

● مجموع الجذرين $= ل^{٢} + م^{٢} = (ل + م)^{٢} - ٢ ل م$

$= (-٣)^{٢} - ٢ \times (-٥)$

$= ٩ + ١٠ = ١٩$

● حاصل ضرب الجذرين $= ل^{٢} م^{٢} = (ل م)^{٢}$

$= (-٥)^{٢} = ٢٥$

* ∴ المعادلة هي $س^{٢} - ١٩ س + ٢٥ = ٠$

مثال ٧

إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة $س^{٢} - ٥ س + ١ = ٠$ تكون المعادلة التي جذراها $ل^{٢}$ ، $م^{٢}$

الحل

* من المعادلة المعلومة

$ل + م = ٥$ ، $ل م = ١$

* المعادلة المطلوب $ل^{٢}$ ، $م^{٢}$

● مجموع الجذرين $= ل^{٢} + م^{٢} = (ل + م)^{٢} - ٢ ل م$

$= (٥)^{٢} - ٢ \times ١ = ٢٥ - ٢ = ٢٣$

● حاصل ضرب الجذرين $= ل^{٢} \times م^{٢} = (ل م)^{٢}$

$= (١)^{٢} = ١$

∴ المعادلة هي $س^{٢} - ٢٣ س + ١ = ٠$

مثال ٨

كوّن المعادلة التربيعية التي كل من جذريها = مربع نظيره من جذري المعادلة $س^{٢} + ٣ س + ٥ = ٠$

الحل

المعلوم $ل + م = -٣$ ، $ل م = ٥$

المطلوب $ل^{٢}$ ، $م^{٢}$ [مربع نظيره]

مجموع الجذرين $= ل^{٢} + م^{٢} = (ل + م)^{٢} - ٢ ل م = -١$

حاصل ضرب الجذرين $= ل^{٢} م^{٢} = (ل م)^{٢} = ٢٥$

∴ المعادلة هي $س^{٢} + س + ٢٥ = ٠$

ملاحظات لحل المسائل اللفظية

إذا كان الجذران ل ، م

فكون المعادلة التي جذراها

١. مربع نظيره: $ل^{٢}$ ، $م^{٢}$
٢. مكعب نظيره: $ل^{٣}$ ، $م^{٣}$
٣. ضعف نظيره: ٢ل ، ٢م
٤. نصف نظيره: $\frac{ل}{٢}$ ، $\frac{م}{٢}$
٥. يزيد عن نظيره بمقدار ١: ل+١ ، م+١
٦. ينقص عن نظيره بمقدار ٢: ل-٢ ، م-٢
٧. ثلاثة أمثال نظيره: ٣ل ، ٣م

مثال ٩

كون المعادلة التي كل من جذريها يزيد بمقدار ١ عن كل من جذري المعادلة $س^{٢} - ٧س - ٩ = ٠$

الحل

نفرض أن جذري المعادلة المعلومة هما ل ، م

∴ ل+م = ٧ ، ل م = -٩

∴ جذري المعادلة المطلوبة هي ل+١ ، م+١

● مجموع الجذرين = ل+١+م+١ = ل+م+٢

= (ل+م) + ٢ = ٧ + ٢ = ٩

● حاصل ضرب الجذرين = (ل+١) × (م+١)

= ل م + ل + م + ١

= (ل م) + (ل+م) + ١

= -٩ + ٧ + ١ = -٩ + ٨ = -١

∴ المعادلة هي $س^{٢} - ٩س - ١ = ٠$

مثال ١٠

إذا كان ل ، م جذري المعادلة $س^{٢} - ٣س + ٢ = ٠$ فكون المعادلة التي جذراها $ل^{٣}$ ، $م^{٣}$

الحل

* من المعادلة المعطاة

ل+م = ٣ ، ل م = ٢

* المعادلة المراد تكوينها $ل^{٣}$ ، $م^{٣}$

● مجموع الجذرين = $ل^{٣} + م^{٣}$

= $(ل+م)[(ل+م)^{٢} - (٣ل م)]$

= ٣[٩ - ٣×٢] = ٣[٩ - ٦]

= ٣ × ٣ = ٩

● حاصل ضرب الجذرين = $ل^{٣} م^{٣} = (ل م)^{٣}$

= $(٢)^{٣} = ٨$

* ∴ المعادلة هي $س^{٢} - ٩س + ٨ = ٠$

مثال ١١

إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة $٢س^{٢} - ٣س - ١ = ٠$

فكون المعادلة التي جذراها

١. $\frac{١}{ل}$ ، $\frac{١}{م}$
٢. $\frac{ل}{م}$ ، $\frac{م}{ل}$
٣. ل+م ، ل م

جذور المعادلة المعطاة ل ، م

$\text{ل}+\text{م}=\frac{٣}{٢}$ ، $\text{ل}\,\text{م}=\frac{-١}{٢}$

(١) $\frac{١}{\text{ل}}$ ، $\frac{١}{\text{م}}$

مجموع الجذرين $=\frac{\text{ل}+\text{م}}{\text{ل}\,\text{م}}=\frac{٣}{٢}\div\frac{-١}{٢}$

$=\frac{٣}{٢}\times\frac{-٢}{١}=-٣$

حاصل ضرب الجذرين $=\frac{١}{\text{ل}}\times\frac{١}{\text{م}}=\frac{١}{\text{ل}\,\text{م}}$

$=١\div\left(\frac{-١}{٢}\right)=-٢$

∴ المعادلة هي $\text{س}^٢+٣\text{س}-٢=٠$

(٢) $\frac{\text{ل}}{\text{م}}$ ، $\frac{\text{م}}{\text{ل}}$

مجموع الجذرين $=\frac{\text{ل}}{\text{م}}+\frac{\text{م}}{\text{ل}}=\frac{\text{ل}^٢+\text{م}^٢}{\text{ل}\,\text{م}}$

$=\frac{(\text{ل}+\text{م})^٢-٢\text{ل}\,\text{م}}{\text{ل}\,\text{م}}=\frac{\left(\frac{٣}{٢}\right)^٢-٢\times\left(\frac{-١}{٢}\right)}{\left(\frac{-١}{٢}\right)}$

$=\frac{-١٣}{٢}$

حاصل ضرب الجذرين $=\frac{\text{ل}}{\text{م}}\times\frac{\text{م}}{\text{ل}}=١$

∴ المعادلة هي $\text{س}^٢+\frac{١٣}{٢}\text{س}+١=٠$

بالضرب × ٢

$٢\text{س}^٢+١٣\text{س}+٢=٠$

(٣) $(\text{ل}+\text{م})$ ، $(\text{ل}\,\text{م})$

يعني $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{-١}{٢}$

مجموع الجذرين $=\frac{٣}{٢}+\left(\frac{-١}{٢}\right)=١$

حاصل ضرب الجذرين $=\frac{٣}{٢}\times\frac{-١}{٢}=\frac{-٣}{٤}$

∴ المعادلة $\text{س}^٢-\text{س}-\frac{٣}{٤}=٠$ ×٤

$٤\text{س}^٢-٤\text{س}-٣=٠$

مثال ١٢

إذا كان ل+١ ، م+١ هما جذرا المعادلة $\text{س}^٢+٥\text{س}+٢=٠$ فكون المعادلة التي جذراها ل ، م

الحل

المعادلة المعطاة $(\text{ل}+١)$ ، $(\text{م}+١)$

مجموع الجذرين $=\text{ل}+١+\text{م}+١=\text{ل}+\text{م}+٢$

∴ $\text{ل}+\text{م}+٢=-٥$ ∴ $\boxed{\text{ل}+\text{م}=-٧}$

حاصل ضربهما $=(\text{ل}+١)(\text{م}+١)$

$=\text{ل}\,\text{م}+\text{ل}+\text{م}+١=\text{ل}\,\text{م}-٧+١=٢$

$\text{ل}\,\text{م}-٦=٢$ $\boxed{\text{ل}\,\text{م}=٨}$

المعادلة المطلوبة جذراها ل ، م

مجموعهما $\text{ل}+\text{م}=-٧$

وحاصل ضربهما $=\text{ل}\,\text{م}=٨$

∴ المعادلة هي $\text{س}^٢+٧\text{س}+٨=٠$

ان لم تتألم لن تتعلم

اختر

١) المعادلة التربيعية التي مجموع جذريها -١ وحاصل ضربهما -٣ هي ....

(أ) س² - س - ٣ = ٠   (ب) س² + س + ٣ = ٠

(جـ) س² - س + ٣ = ٠   (د) س² + س - ٣ = ٠

---

٢) المعادلة التربيعية التي جذراها ٣، -٥ هي...

(أ) س² + ٢س - ١٥ = ٠   (ب) س² - ٢س - ١٥ = ٠

(جـ) س² - ٢س + ١٥ = ٠   (د) س² + ٢س + ١٥ = ٠

---

٣) إذا كان ل، ل² هما جذرا المعادلة ٢س² + ب س + ٥٤ = ٠ فإن ب = ...

(أ) -١٢   (ب) -٢٤   (جـ) ٢٧   (د) ٣٦

حاصل ضربهما ل³ = ٥٤/٢ = ٢٧   ل = ٣

مجموعهما ٣ + ٩ = ١٢   -ب/٢ = ١٢   ∴ ب = -٢٤

---

٤) إذا كان م، ٢/م هما جذرا المعادلة أس² + ب س + ١٢ = ٠ فإن أ = ...

(أ) ٣   (ب) ٥   (جـ) ٦   (د) ٩

حاصل ضربهما م × ٢/م = ٢   ١٢/أ = ٢   أ = ٦

---

٥) إذا كان ل، م هما جذرا المعادلة س² - ٥س + ٦ = ٠ فإن ل² - ٥ل = ...

(أ) ٢   (ب) ٣   (جـ) ٦   (د) -٦

∵ ل جذر للمعادلة ∴ بوضع ل بدلاً من س

ل² - ٥ل + ٦ = ٠   ∴ ل² - ٥ل = -٦

---

٦) إذا كان ل، م هما جذرا المعادلة س² - ٩س + ١ = ٠ فإن ل² - ٩ل + ٥ = ...

(أ) ٤   (ب) ١   (جـ) -١   (د) ٩

بوضع ل بدلاً من س ∴ ل² - ٩ل + ١ = ٠

∴ ل² - ٩ل = -١   المقدار المطلوب ل² - ٩ل + ٥

= -١ + ٥ = ٤

---

٧) إذا كان ل، م هما جذرا المعادلة س² - (ظا θ) س - ١ = ٠ وكان ل² + م² = ٣ حيث ٠ < θ < ٩٠° فإن θ = ...

(أ) $\frac{\pi}{12}$ (ب) $\frac{\pi}{6}$ (جـ) $\frac{\pi}{4}$ (د) $\frac{\pi}{3}$

(ل + م)² - ٢ل م = ٣   (ل + م)² + ٢ = ٣

(ل + م)² = ١   ل + م = ±١

ظا θ = ١   ∴ θ = ٤٥°   السالب مرفوض لأن θ حادة

---

٨) لتكوين المعادلة التربيعية التي جذراها ل، م حيث ل، م أعداد حقيقية يكون كافياً الحصول على

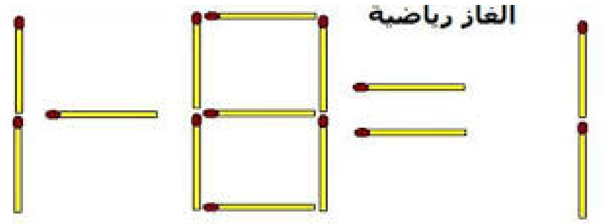
(أ) ل + م = ٥ فقط

(ب) (ل + م + ٤)² + (ل م - ٣)² = ٠ فقط

(جـ) أ، ب معاً

(د) ولا واحدة خالص

الغاز رياضية



حرك عود ثقاب واحد لتصبح المعادلة صحيحة

الواجب

(١) كون المعادلة التى جذراها

١) ١ ، ٣

٢) -٥ ، ٤

٣) ٢ ، -٧

٤) $\frac{3}{2}$ ، $\frac{1}{2}$

٥) ١-٣ت ، ١+٣ت

٦) ١+$\sqrt{2}$ ، ١-$\sqrt{2}$

٧) -٥ت ، ٥ت

(٢) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة س٢ - ٧س + ١٢ = ٠ . كون المعادلة التى جذراها

١) ل+١ ، م+١

٢) ل-٢ ، م-٢

٣) ٢ل ، ٢م

٤) ل٢ ، م٢

٥) ل٣ ، م٣

٦) $\frac{1}{ل}$ ، $\frac{1}{م}$

(٣) من المعادلة س٢ - ٧س - ٩ = ٠ . كون المعادلة التى جذراها

١) ضعف نظيرها من المعادلة المعطاة

٢) يزيد عن نظيره بمقدار ١

٣) ينقص عن نظيره بمقدار ٣

٤) مربع نظيره

٥) مكعب نظيره

٦) المعكوس الجمعي لنظيره

٧) المعكوس الضربي لنظيره

(٤) إذا كان ل ، م جذرى المعادلة س٢ - ٧س + ٣ = ٠ فأوجد المعادلة التى جذراها

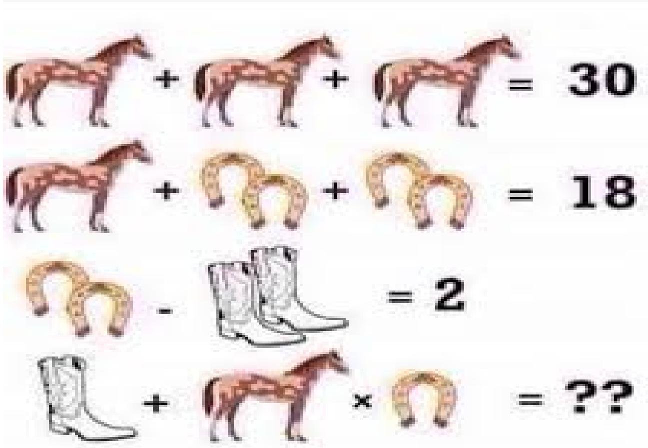
١) ٢ل ، ٢م

٢) ل+٢ ، م+٢

٣) $\frac{2}{ل}$ ، $\frac{2}{م}$

٤) ل+م ، ل م

٥) ل٢ ، م٢



الدرس السادس
بحث اشارة الدالة

أولاً الدالة الثابتة

د: د(س) = جـ ، جـ ∈ ح * هي نفس إشارة جـ

يعني اذا كان الثابت موجب تكون موجبة.

وإذا كان سالب تكون سالبة.

مثال ١ عين اشارة الدوال الثابتة

1) د(س) = ٥ ← موجبة دائماً
2) د(س) = -٢ ← سالبة دائماً
3) د(س) = ١/٤ ← موجبة دائماً
4) د(س) = -√٣ ← سالبة دائماً

ثانياً الدالة الخطية

هنحل المعادلة ونحدد قيمة س

وعلى اليمين مثل والشمال عكس

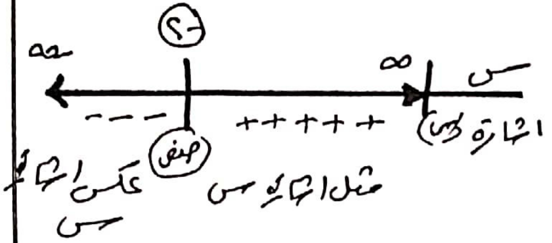
مثال عين اشارة كلاً مما يلي

1) د(س) = ٣س + ٦

الحل

بوضع ٣س + ٦ = ٠ ، ٣س = -٦

س = -٦/٣ = -٢



الدالة تكون

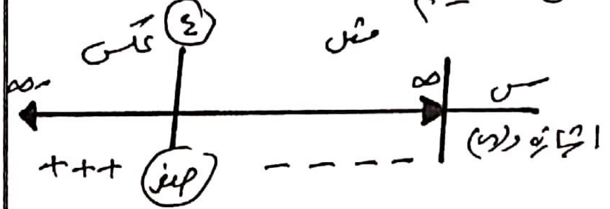
* موجبة عندما س > -٢ أو]-٢، ∞[
* سالبة عندما س < -٢ أو]-∞، -٢[
* د(س) = صفر عندما س = -٢

2) د(س) = -٢س + ٨

الحل

بوضع -٢س + ٨ = ٠ ، -٢س = -٨

س = -٨/-٢ = ٤



الدالة موجبة س < ٤ أو]-∞، ٤[

سالبة س > ٤ أو]٤، ∞[

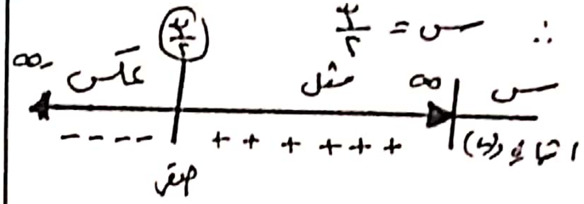
د(س) = صفر عندما س = ٤

٣ د(س) = ٢س − ٣

الحل

بوضع ٢س − ٣ = ٠   ٢س = ٣

∴ س = ٣/٢



موجبة عندما س ∈]٣/٢ ، ∞[

سالبة عندما س ∈]−∞ ، ٣/٢[

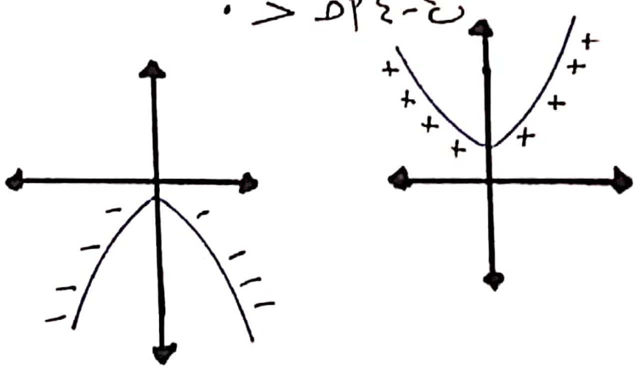
صفر عندما س ∈ {٣/٢}

ثالثاً الدالة التربيعية

هنشوف المميز

الحالة الأولى   المميز سالب

ب² − ٤ أ جـ < ٠



موجب دائماً   سالب دائماً

حسب إشارة معامل س²

مثال ٣ عين إشارة كلاً من الدوال التالية

١ د(س) = س² + ٢س + ٥

الحل

أ = ١   ب = ٢   جـ = ٥

ب² − ٤ أ جـ = (٢)² − ٤(١×٥) = ٤ − ٢٠

= −١٦   المميز سالب

∴ إشارة الدالة موجبة [مثل س²]

لجميع قيم س ∈ ح

٢ د(س) = −س² + ٢س − ٦

الحل

أ = −١   ب = ٢   جـ = −٦

ب² − ٤ أ جـ = (٢)² − ٤ × (−١)(−٦)

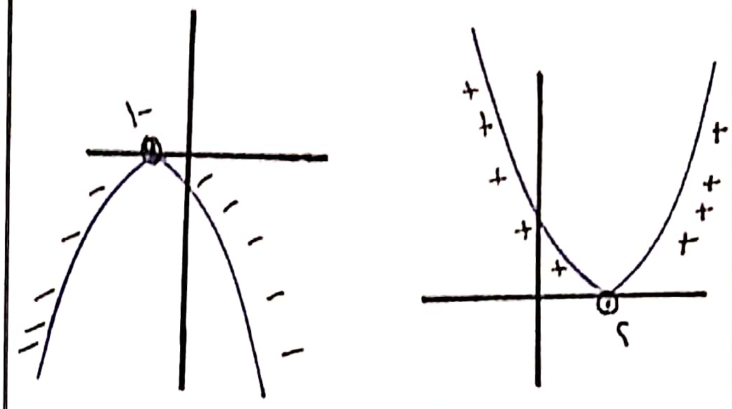
= ٤ − ٢٤ = −٢٠ "سالب"

∴ اشارة د(س) سالبة لجميع قيم

س ∈ ح

معلش هي أول 80 سنة من
حياة الإنسان بتبقى صعبة شوية
بس بعدها بيرتاح خالص

الحالة الثانية : المميز = صفر



موجبة س ∈ ح - {٢}   سالبة س ∈ ح - {-١}

مثال ٤: ابحث اشارة كلاً من الدوال التالية

١) د(س) = س^2 - ٦س + ٩

الحل

أ = ١   ب = -٦   جـ = ٩

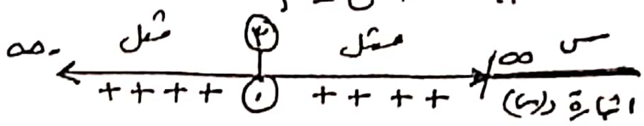
ب^2 - ٤أجـ = (-٦)^2 - ٤ × ١ × ٩

= ٣٦ - ٣٦ = صفر

∴ بحل المعادلة س^2 - ٦س + ٩ = ٠

(س - ٣)(س - ٣) = ٠

∴ س = ٣



الدالة موجبة فى ح - {٣}

د(س) = صفر عندما س ∈ {٣}

٢) د(س) = -س^2 + ٤س - ٤

الحل

أ = -١   ب = ٤   جـ = -٤

ب^2 - ٤أجـ = (٤)^2 - ٤(-١)(-٤)

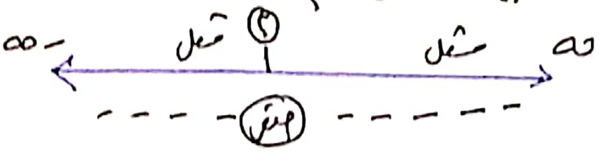
= ١٦ - ١٦ = صفر

بحل المعادلة -س^2 + ٤س - ٤ = ٠

س^2 - ٤س + ٤ = ٠

(س - ٢)(س - ٢) = ٠

∴ س = ٢



الدالة سالبة عندما س ∈ ح - {٢}

د(س) = صفر عندما س = ٢

٣) د(س) = (٢س - ٣)^2

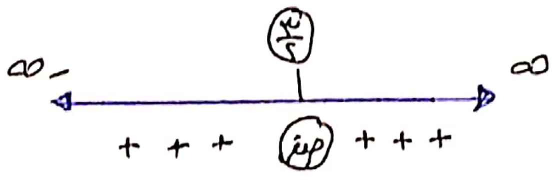
الحل

بوضع (٢س - ٣)^2 = ٠

∴ ٢س - ٣ = ٠   ٢س = ٣

∴ س = $\frac{٣}{٢}$

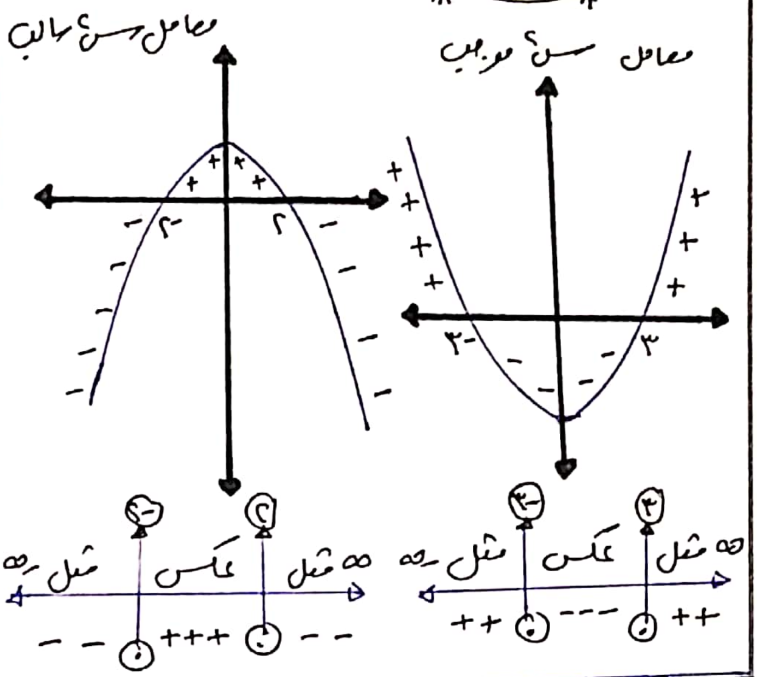
والجذران حقيقيان متساويان



د(س) موجبة عندما س ∈ ح - {$\frac{٣}{٢}$}

د(س) = صفر عندما س = $\frac{٣}{٢}$

الحالة الثالثة المميز موجب



مثال ٥ إبحث إشارة الدوال التالية .

(١) د(س) = س² − ٥س + ٦

الحل

أ = ١ ب = −٥ جـ = ٦

ع = ب² − ٤ أ جـ = (−٥)² − ٤ × ١ × ٦ = ١ موجب

* بوضع س² − ٥س + ٦ = ٠

(س − ٢)(س − ٣) = ٠

س = ٢ س = ٣

∞ مثل (٣) عكس (٢) مثل −∞

+ + + صفر − − − − صفر + + +

موجبة]−∞، ٢[∪]٣، ∞[

أو ح − [٢، ٣]

سالبة عندما س ∈]٢، ٣[

د(س) = صفر عندما س ∈ {٢، ٣}

(٢) د(س) = −س² + ٤س − ٣

الحل

أ = −١ ب = ٤ جـ = −٣

ع = ب² − ٤ أ جـ = (٤)² − [٤ × −١ × −٣] = ٤ موجب

* بوضع −س² + ٤س − ٣ = ٠

س² − ٤س + ٣ = ٠

(س − ١)(س − ٣) = ٠

س = ١ س = ٣

∞ مثل (٣) عكس (١) مثل −∞

− − − صفر + + + صفر − −

موجبة س ∈]١، ٣[

سالبة س ∈]−∞، ١[∪]٣، ∞[

أو ح − [١، ٣]

د(س) = صفر عندما س ∈ {١، ٣}

(٣) د(س) = (س − ٢)(س + ٣)

الحل

بوضع (س − ٢)(س + ٣) = ٠

س = ٢ أو س = −٣

∞ مثل (٢) عكس (−٣) مثل −∞

+ + صفر − − − صفر + +

موجبة]−∞، −٣[∪]٢، ∞[

أو ح − [−٣، ٢]

سالبة فى]−٣، ٢[

د(س) = صفر عندما س = {−٣، ٢}

اختبر

تذكر أن ح =]-∞ ، ∞[

١ د(س) = -٤ تكون سالبة فى الفترة ...

(أ)]-∞ ، ٤]   (ب)]-٤ ، ٤[
(جـ)]-∞ ، ∞[(د)]-٢ ، ٢[

٢ إذا كانت د(س) = ٣س فإن إشارة د تكون سالبة فى ...

(أ)]-∞ ، ٣[(ب)]٣ ، ∞[
(جـ)]-٣ ، ∞[(د)]-∞ ، ٠[

٣ د(س) = س² - ٩ تكون سالبة ∀ س ∈ ....

(أ) ح - [-٣ ، ٣]   (ب)]-٣ ، ٣[
(جـ)]-∞ ، ٠[(د)]-٣ ، ∞[

٤ د(س) = س² + ١ تكون موجبة فى الفترة ....

(أ)]٠ ، ∞[(ب)]١ ، ∞[
(جـ)]-∞ ، ١[(د) ح

٥ د(س) = أس² + ب س + جـ يكون لها إشارة واحدة فى ح عندما

(أ) ب² - ٤ أ جـ > ٠   (ب) ب² - ٤ أ جـ < ٠
(جـ) ب² - ٤ أ جـ = ٠   (د) ب² - ٤ أ جـ ≥ ٠

٦ لبحث إشارة د يكون كافياً معرفة أنه ....

(أ) منحنى الدالة د يوازى محور السينات .
(ب) " " د يقع بأكمله فوق محور السينات .
(جـ) (أ) ، (ب) معاً
(د) ولا واحدة من السابقات

٧ إذا كان د(س) = أس + ب وكان س = ل جذر للمعادلة د(س) = ٠ فإن د(ل+١) × د(ل-١) ∈ ....

(أ) ح⁺   (ب) ح⁻
(جـ) [-١ ، ١]   (د) [-٥ ، ٥]

د(ل) = ٠ ، د(ل+١) > ٠ ، د(ل-١) < ٠

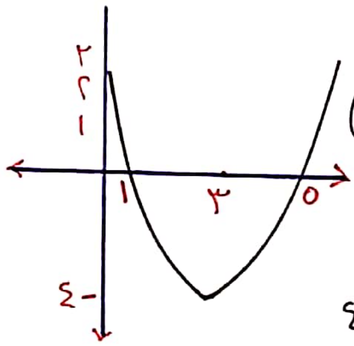
∴ حاصل ضربهما < ٠ ∈ ح⁻

٨ أى الدوال الآتية موجبة لجميع قيم س ∈ ح

(أ) د(س) = س² + ٤   (ب) د(س) = ٣
(جـ) د(س) = (س-١)² + ٩   (د) كل ما سبق

مثال

اكتب قاعدة كل من الدوال التالية



د(س) = أ(س-١)(س-٥)

منحنى الدالة يمر بالنقطة (٣ ، -٤)

أ(٣-١)(٣-٥) = -٤

أ × ٢ × -٢ = -٤

-٤أ = -٤ ∴ أ = ١ ∴ د(س) = (س-١)(س-٥)

∴ د(س) = س² - ٦س + ٥

الواجب

١ ابحث اشارة كلاً من الدوال التالية

١) $د(س) = ٥$
٢) $د(س) = -٩$
٣) $د(س) = س - ١$
٤) $د(س) = -٢س + ٤$
٥) $د(س) = -٣س - ٦$
٦) $د(س) = ٤س - ٥$
٧) $د(س) = ٢ - س$

٢ ابحث اشارة كلاً من الدوال التالية

١) $د(س) = س^{2} + ٣س + ٣$
٢) $د(س) = -س^{2} + ٥س - ٧$
٣) $د(س) = س^{2} - ٨س + ١٦$
٤) $د(س) = -س^{2} + ١٠س - ٢٥$
٥) $د(س) = (س - ٣)^{2}$
٦) $د(س) = س^{2} - ٧س + ١٢$
٧) $د(س) = س^{2} - ٢س - ١٥$
٨) $د(س) = (س - ٣)(س - ٥)$

٣ اكمل

١) $د(س) = ٢$ إشارتها ---- فى ----
٢) $د(س) = -٣س$ تكون سالبه عندما ----
٣) $د(س) = س - ٢$ موجبه فى الفترة ----
٤) $د(س) = ٧ - س$ سالبه فى الفترة ----
٥) $د(س) = س^{2}$ تكون سالبه عندما س ∈ ----
٦) $د(س) = س^{2} - ٦س + ٩$ موجبه فى الفترة ----
٧) $د(س) = -(س - ١)(س + ٢)$ موجبه فى الفترة ----

واحد بخيل بياكل فستق
مراته قالتله .. أكلني معاك .. اداها واحده
بعد شوية قالتله .. هات واحده كمان

قالها : والله العظيم كله نفس الطعم

الدرس السابع
متباينات الدرجة الثانية في مجهول واحد

خطوات الحل

1. نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة
2. ندرس إشارة الدالة التي كتبناها ← الدرس الماضي
3. نحدد الفترات التي تحقق المتباينة ← بعدما نعملها متباينة صفرية

مثال ١ أوجد في ح مجموعة حل المتباينة

$$س^2 - 5س + 6 < 0$$

الحل

$د(س) = س^2 - 5س + 6$

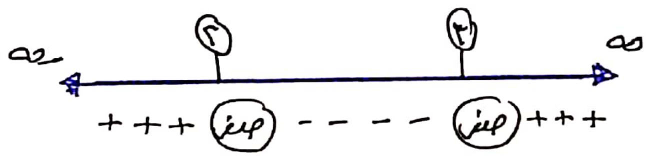
المميز $أ = 1 \quad ب = -5 \quad جـ = 6$

$ب^2 - 4أجـ = (-5)^2 - (4 \times 1 \times 6) = 1$ موجب

∴ جذران حقيقيان مختلفان

$(س - 2)(س - 3) = 0$

$س = 2$ أو $س = 3$



الحل بيعتمد على المتباينة
فعلا قيمها أصغر من صفر يعني هناخد الجزء السالب

∴ م.ح = $]2 , 3[$

مثال ٢

$$-س^2 + س - 1 > 0$$

الحل

الدالة التربيعية $د(س) = -س^2 + س - 1$

$أ = -1 \quad ب = 1 \quad جـ = -1$

المميز $ب^2 - 4أجـ = 1 - (4 \times -1 \times -1)$

$= -3$ (سالب)

ليس لها جذور حقيقية ∴ الإشارة مثل معامل $س^2$ سالبة دائماً

∴ م.ح = $\emptyset$

مثال ٣

$$س^2 - 6س + 9 \le 0$$

الحل

الدالة التربيعية $د(س) = س^2 - 6س + 9$

$أ = 1 \quad ب = -6 \quad جـ = 9$

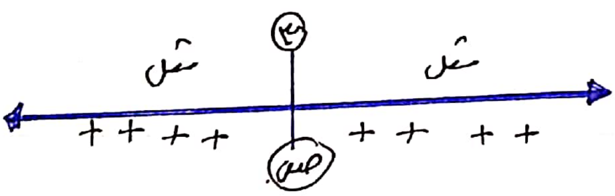
$ب^2 - 4أجـ = (-6)^2 - (4 \times 1 \times 9) = صفر$

جذران حقيقيان متساويان

$س^2 - 6س + 9 = 0$

$(س - 3)(س - 3) = 0$

∴ $س = 3$



عايزين الأصغر أو يساوي صفر
مفيش أصغر لكن قيمة = صفر

∴ م.ح = $\{3\}$

④ $س^٢ \geq ٤س - ٤$

الحل

هنقدلها

$س^٢ - ٤س + ٤ \geq ٠$

الدالة التربيعية

$د(س) = س^٢ - ٤س + ٤$

$أ = ١$ $ب = -٤$ $جـ = ٤$

المميز $ب^٢ - ٤أجـ = (-٤)^٢ - (٤ \times ١ \times ٤) = ٠$

بوضع $س^٢ - ٤س + ٤ = ٠$

$(س - ٢)(س - ٢) = ٠$

$\therefore س = ٢$

$-\infty$ شل ② شل ∞

$+ + + +$ صفر $+ + + + +$

عايزينه $\geq$ يعني الموجب والصفر

$\therefore م.ح = ح$

⑤ $٥ - ٢س \leq س^٢$

الحل

مش انت عارف إن $أ \leq ب$

$\therefore ب \geq أ$ صح ؟

$\therefore س^٢ \geq ٥ - ٢س$ كدة تمام ؟

$س^٢ + ٢س - ٥ \geq ٠$

الدالة التربيعية $د(س) = س^٢ + ٢س - ٥$

$أ = ١$ $ب = ٢$ $جـ = -٥$

المميز $ب^٢ - ٤أجـ = (٢)^٢ - (٤ \times ١ \times -٥)$

$= ٢٤$ موجب

جذران حقيقيان مختلفان

الحل بالقانون العام $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$

$= \frac{-٢ \pm \sqrt{٢٤}}{٢ \times ١} = \{-١ + \sqrt{٦}، -١ - \sqrt{٦}\}$

$= \{١,٤٥، -٣,٤٥\}$

-٣,٤٥ — ١,٤٥

$+ +$ صفر $- -$ صفر $+ +$

$\therefore م.ح = ح -]-٣,٤٥، ١,٤٥[$

اختر

① مجموعة حل المتباينة $(س - ٢)(س - ٥) < ٠$ في ح هي ....

(أ) $\{٢، ٥\}$ (ب) $]٢، ٥[$

(جـ) $[٢، ٥]$ (د) $ح - [٢، ٥]$

② مجموعة حل المتباينة $س(س - ١) \geq ٠$ في ح ...

(أ) $\{٠، ١\}$ (ب) $[٠، ١]$

(جـ) $ح -]٠، ١[$ (د) $]٠، ١[$

③ مجموعة حل المتباينة $-س(س + ٢) \geq ٠$ في ح هي ...

(أ) $\{٠، -٢\}$ (ب) $[-٢، ٠]$

(جـ) $]-٢، ٠[$ (د) $[-٢، ٢]$

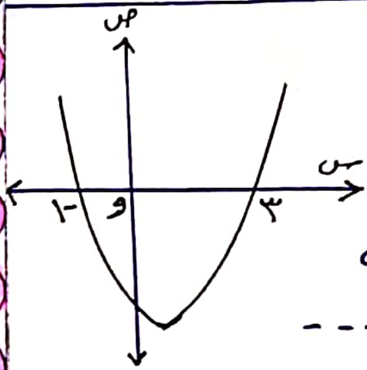
٤ مجموعة حل المتباينة $س^2 + ٩ > ٠$ في ح هي ...

(أ) ϕ (ب) ح (ج) $]-٣ ، ٣[$ (د) ح $- [-٣ ، ٣]$

٥ مجموعة حل المتباينة $س^2 + ١ \le ٠$ في ح ....

(أ) ϕ (ب) ح (ج) $[-١ ، ١]$ (د) ح $-]-١ ، ١[$

٦ في الشكل المقابل يمثل د(س) فإن مجموعة حل المتباينة د(س) ≥ ٠ هي ...



(أ) $]-١ ، ٣[$ (ب) $]-\infty ، ٢[$ (ج) $]٣ ، \infty[$ (د) $]-\infty ، -١] \cup [٣ ، \infty[$

٧ مجموع الأعداد الصحيحة التي تنتمي لمجموعة حل المتباينة $(س-٢)(٣س-١) \le ٠$

(أ) -١ (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

$[\frac{١}{٣} ، ٢]$ $١ + ٢ = ٣$

٨ إذا كان مميز المعادلة $أس^2 + ب س + جـ = ٠$ سالب فإن مجموعة حل المتباينة $أس^2 + ب س + جـ > ٠$ حيث $أ > ٠$ هي ...

(أ) ح (ب) ϕ (ج) $ح^+$ (د) $ح^-$

المنحنى بالكامل أسفل محور السينات

الواجب

١ أوجد في ح مجموعة حل المتباينات التالية

١) $س^2 + ٢س - ٨ > ٠$

٢) $س^2 - ١ \le ٠$

٣) $٢س - س^2 < ٠$

٤) $س^2 \le ٩$

٥) $س^2 \not< ٦س - ٩$

٦) $(س-٢)^2 \le -٥$

٧) $(س-٢)(س-٥) < ٠$

٨) $س(س-١) \not< ٠$

٩) $س^2 + ٩ > ٠$

الأدهم

فى

حساب المثلثات

الصف الأول الثانوى

عام وأزهر

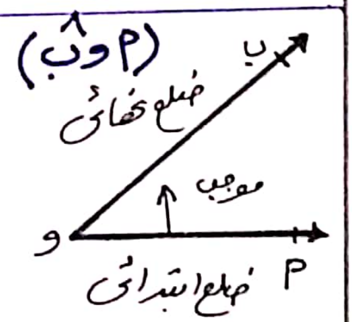
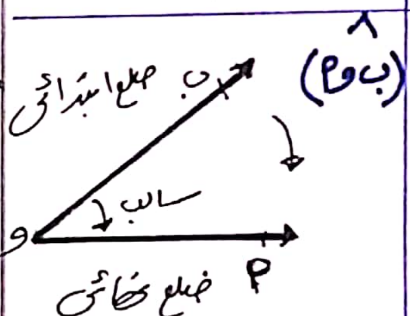
٢٠٢٠

هدية
مجانية

إعداد أ/ محمد أدهم
ت / ٠١٠٠٧٤٥١٩٥٧

الدرس الأول
الزاوية الموجهة

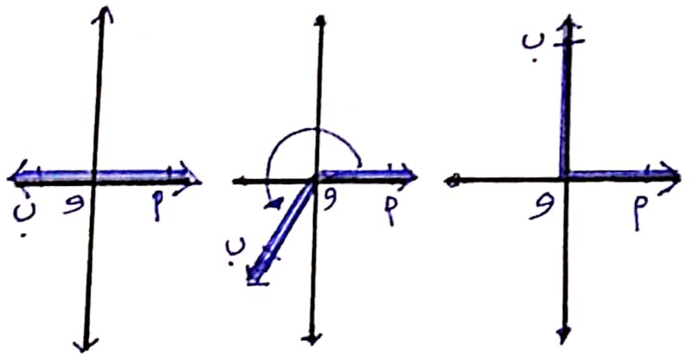
تعريف الزاوية الموجهة:
هو زوج مرتب من شعاعين هما ضلعا الزاوية ولهما نقطة بداية واحدة هى رأس الزاوية

قياس موجب	قياس سالب
	
عكس حركة عقارب الساعة	فى اتجاه حركة عقارب الساعة

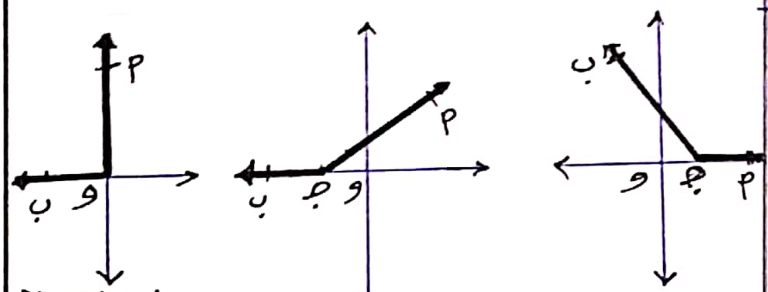
الوضع القياسى للزاوية الموجهة

١ رأسها نقطة الأصل.
٢ ضلعها الابتدائى على الجزء الموجب لمحور السينات

زوايا فى الوضع القياسى



زوايا ليست فى الوضع القياسى



رأسها لا تقع على نقطة الأصل

الضلع الابتدائى لا يقع على الجزء الموجب لمحور السينات

الزوايا المتكافئة

يقال لعدة زوايا موجهة فى الوضع القياسى أنها متكافئة إذا كان لها جميعاً نفس الضلع النهائى

لإيجاد زاوية مكافئة

١) إذا كانت الزاوية سالبة
هنزود ٣٦٠° حتى تصبح موجبة

٢) إذا كانت الزاوية موجبة
هنطرح ٣٦٠° حتى تصبح سالبة

مثال ١ عين أصغر قياس موجب

١) −١٢٠ ⇐ −١٢٠ + ٣٦٠ = ٢٤٠°

٢) −٤٥٠ ⇐ −١٢٠ + ٣٦٠ = −٩٠
−٩٠ + ٣٦٠ = ٢٧٠°

٣) −١٠٠٠ ⇐ + ٣٦٠ = −٦٤٠ + ٣٦٠
= −٢٨٠ + ٣٦٠ = ٨٠°

مثال ٢ عين قياس سالب لكل من

١) ٢٠٠ ⇐ ٢٠٠ − ٣٦٠ = −١٦٠°

٢) ٦٢٠ ⇐ ٦٢٠ − ٣٦٠ = ٢٦٠ − ٣٦٠
= −١٠٠°

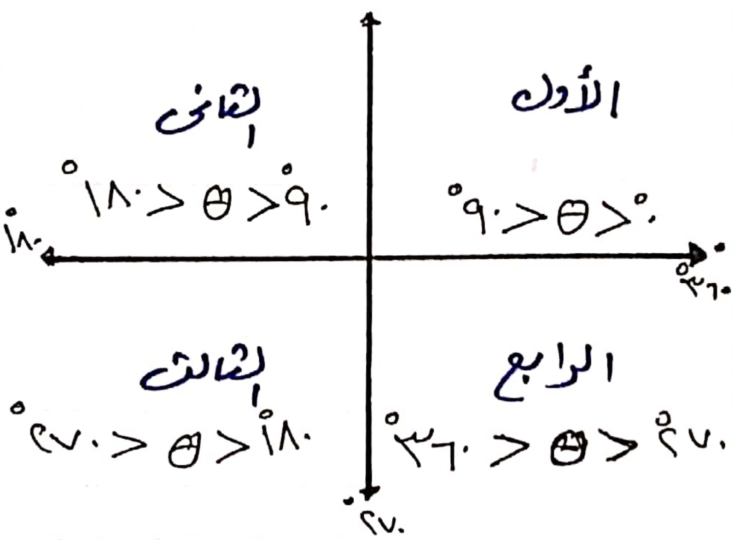
مثال ٣ أوجد زاويتين إحداهما قياس موجب والأخرى سالب مكافئتين للزوايا التالية .

١) ٤٠°
الموجب: ٤٠ + ٣٦٠ = ٤٠٠°
السالب: ٤٠ − ٣٦٠ = −٣٢٠°

٢) −١٢٥°
الموجب: −١٢٥ + ٣٦٠ = ٢٣٥°
السالب: −١٢٥ − ٣٦٠ = −٤٨٥°

٣) ٢٧٠°
الموجب: ٢٧٠ + ٣٦٠ = ٦٣٠°
السالب: ٢٧٠ − ٣٦٠ = −٩٠°

تحديد الربع الذي تقع فيه الزاوية



ملحوظة هامة

إذا وقع الضلع النهائي على أحد محاور الاحداثيات تسمى الزاوية بـ الزاوية الربعية

مثل ٠° ، ٩٠° ، ١٨٠° ، ٢٧٠° ، ٣٦٠°

مثال ٤

عين الربع الذى تقع فيه كل من الزوايا الموجهة التى قياساتها كالتالى :

١) ١٢٠°

٩٠° < ١٢٠° < ١٨٠° الربع الثانى

٢) ٣٠٠°

٢٧٠° < ٣٠٠° < ٣٦٠° الربع الرابع

٣) −١٠٠°

−١٠٠ + ٣٦٠° = ٢٦٠°

١٨٠° < ٢٦٠° < ٢٧٠° الربع الثالث

٤) ٧٢٠°

٧٢٠ − ٣٦٠° = ٣٦٠° زاوية ربعية

الواجب

١ أكمل

١) تكون الزاوية الموجهة فى الوضع القياسى إذا ...... ، ......

٢) إذا كانت عدة زوايا موجهة لها نفس الضلع النهائى فإنها تسمى ......

٣) إذا كان θ قياس زاوية موجهة فى الوضع القياسى فإن الزوايا التى قياساتها (θ ± ن × ٣٦٠°) تسمى ......

٤) إذا وقع الضلع النهائى للزاوية الموجهة على أحد محورى الاحداثيات تسمى الزاوية ......

٥) الزاوية التى قياسها −٨٥٠° تكافئ زاوية موجبة = ... وتقع فى الربع ......

٦) الزاوية التى قياسها ١٢٠٠ تقع فى الربع ...... وتكافئ زاوية سالبة = ...

٢ عين زاوية موجبة وأخرى سالبة وحدد الربع لكل من

١) ٧٠°

٢) −١٥٠°

٣) ٥٧٠°

٤) −٤٩٠°

اختبر على الدرس الأول

١) الزاوية التي قياسها ٦٠° في الوضع القياسي تكافئ الزاوية التي قياسها

(أ) ١٢٠° (ب) ٢٤٠° (ج) ٣٠٠° (د) ٤٢٠°

٢) الزاوية التي قياسها ٥٨٥° تكافئ ...

(أ) ٤٥° (ب) ١٣٥° (ج) ٢٢٥° (د) ٣١٥°

٣) الربع الذي تقع فيه الزاوية ١٦٧٠° هو...

(أ) الأول (ب) الثاني (ج) الثالث (د) الرابع

٤) الزاوية التي قياسها (-٨٥٠°) تقع في الربع...

(أ) الأول (ب) الثاني (ج) الثالث (د) الرابع

٥) الزاوية التي قياسها ٤٥° + (٤ن+١) × ٩٠° تقع في الربع ... حيث ن ∈ ص

(أ) الأول (ب) الثاني (ج) الثالث (د) الرابع

عند وضع ن = ٠ ∴ هـ = ٤٥ + ٩٠ = ١٣٥°

٦) إذا كان أ ، ب قياسا زاويتين متكافئتين فإن -أ ، -ب يكونان ...

(أ) متطابقتين (ب) متكافئتين

(ج) متتامتين (د) مجموعهما ٣٦٠°

٧) إذا كان أ ، -أ قياسا زاويتين متكافئتين فإن إحدى قيم أ هي ...

(أ) ١٥٠° (ب) ٩٠° (ج) ١٨٠° (د) ٢٧٠°

٨) إذا كان (٣س-٥) أصغر قياس موجب ، (٣ص-٥) أكبر قياس سالب لزاويتين متكافئتين فإن س-ص = ...

(أ) ٣٦٠° (ب) ١٨٠° (ج) ١٢٠° (د) ٩٠°

٣س - ٥ - (٣ص - ٥) = ٣٦٠

٣س - ٥ - ٣ص + ٥ = ٣٦٠

٣س - ٣ص = ٣٦٠ ∴ س - ص = ١٢٠°

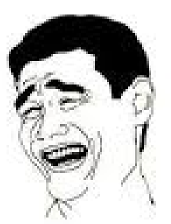
٩) إذا دار الضلع النهائي لزاوية قياسها ٦٠° من الوضع القياسي دورتين وربع في عكس اتجاه عقارب الساعة فإن الضلع النهائي يمثل...

(أ) ٦٠° (ب) ١٢٠° (ج) ١٥٠° (د) ٢٤٠°

احذف عدد الدورات الكاملة واحسب الربع فقط

∴ ٦٠° + ٩٠° = ١٥٠°

نفسي ارجع للزمن اللي كان



أصعب قرار بيواجهني هو

يا تري اشتري شيبسي بالطماطم

ولا بالشطه والليمون

الدرس الثانى
القياس الستينى والقياس الدائرى

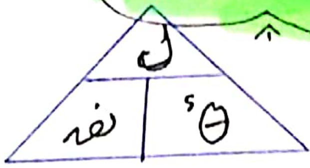
القياس الستينى (س°)

$1^\circ = 60'$

$1' = 60''$

$\therefore 1^\circ = 3600''$

القياس الدائرى $\theta^{د}$



$\theta^{د} = \frac{ل}{نق}$

$\theta^{د}$ ← الزاوية بالقياس الدائرى

ل ← طول القوس المقابل للزاوية المركزية

نق ← نصف قطر الدائرة.

ملحوظة

الزاوية النصف قطرية: هى زاوية مركزية تحصر قوساً (ل) طوله = نصف قطر الدائرة (نق)

$\theta^{د} = \frac{ل}{نق} = \frac{نق}{نق} = 1^{د}$

∴ الزاوية النصف قطرية $= 1^{د}$

مثال ١ أوجد القياس الدائرى لكل مما

(١) ل = ١٢ سم ، نق = ١٠ سم

الحل

$\theta^{د} = \frac{ل}{نق} = \frac{12}{10} = 1.2^{د}$

(٢) ل = ٧ سم ، طول القطر = ٢٠ سم

الحل

ل = ٧ سم   نق $= \frac{20}{2} = 10$ سم

$\theta^{د} = \frac{ل}{نق} = \frac{7}{10} = 0.7^{د}$

مثال ٢ أوجد نق لكل مما

$\theta^{د} = 1.5^{د}$ ل = ١١ سم

الحل

$\theta^{د} = \frac{ل}{نق}$

نق $= \frac{ل}{\theta^{د}} = \frac{11}{1.5} = 7.33$ سم

مثال ٣ أوجد طول القوس

نق = ١٢٫٥ سم ، $\theta^{د} = 1.6^{د}$

الحل

ل $= \theta^{د} \times$ نق

ل $= 1.6 \times 12.5 = 20$ سم

مهم جداً

العلاقة بين الدائرى "$\theta^{د}$" والستينى "$س^{\circ}$"

$$\boxed{\frac{س^{\circ}}{١٨٠^{\circ}} = \frac{\theta^{د}}{\pi}}$$

وتحول DMS: $\boxed{س^{\circ} = \theta^{د} \times \frac{١٨٠}{\pi}}$

وتحول D↔S: $\boxed{\theta^{د} = س^{\circ} \times \frac{\pi}{١٨٠}}$

علشان متنساش

١) الستينى اكبر لذلك يبقى $\times \frac{١٨٠}{\pi}$

٢) الدائرى أصغر لذلك يبقى $\times \frac{\pi}{١٨٠}$

ولو نسيت احفظ أول مربع هيجيلك القانونين

مثال ٤: حول إلى القياس الدائرى

١) $١٢٠^{\circ} \Leftarrow س^{\circ} = ١٢٠^{\circ}$

$\theta^{د} = س^{\circ} \times \frac{\pi}{١٨٠} = ١٢٠ \times \frac{\pi}{١٨٠} = ٢,٠٩^{د}$

٢) $٢٢' \; ١٠٥^{\circ}$

$\theta^{د} = س^{\circ} \times \frac{\pi}{١٨٠^{\circ}}$

$= ٢٢' \; ١٠٥^{\circ} \times \frac{\pi}{١٨٠}$

$= ١,٨٤^{د}$

---

٣) $٣٠'' \; ١٢' \; ٧٥^{\circ}$

$\theta^{د} = ٣٠'' \; ١٢' \; ٧٥^{\circ} \times \frac{\pi}{١٨٠^{\circ}}$

$\theta^{د} = ١,٣١^{د}$

مثال: حول إلى القياس الستينى

١) $١,٨^{د}$

$س^{\circ} = \theta^{د} \times \frac{١٨٠}{\pi} = ١,٨ \times \frac{١٨٠}{\pi}$

$= ٥٦'' \; ٧' \; ١٠٣^{\circ}$

---

٢) $\frac{١}{٤}\pi$

$س^{\circ} = \theta^{د} \times \frac{١٨٠}{\pi} = \frac{١}{٤}\pi \times \frac{١٨٠}{\pi} = ٤٥^{\circ}$

مثال: حدد الربع الذى تقع فيه

١) $٥,٧^{د}$

$س^{\circ} = ٥,٧ \times \frac{١٨٠}{\pi} = ٣٥' \; ٣٢٦^{\circ}$

فى الربع الرابع

الفكرة الثانية

مثال ٧ أوجد طول القوس الذى تحصره زاوية مركزية قياسها $110^\circ\ 12'\ 35''$ إذا كان نق = ٣٠ سم لأقرب سم

الحل

س° = $110^\circ\ 12'\ 35''$ نق = ٣٠ سم

الأول هنحول للدائرى

$\theta^{د} = س^\circ \times \frac{\pi}{180} = 110^\circ 12' 35'' \times \frac{\pi}{180}$

$= 1{,}92^{د}$

∵ ل = $\theta^{د}$ × نق

$= 1{,}92 \times 10 = 19{,}2 \simeq 19$ سم

مثال ٨ أوجد القياس الدائرى والقياس الستينى لزاوية محيطية = ٨٠°

الحل

طبعاً نحن نعمل بالزاوية المركزية وانتوا فاكرين إن المركزية ضعف المحيطية = $2 \times 80^\circ = 160^\circ$

∴ س° = ١٦٠°

$\theta^{د} = 160 \times \frac{\pi}{180} = 2{,}79^{د}$

المركزية = المحيطية × ٢

المحيطية = المركزية ÷ ٢

مثال ٩ أوجد محيط دائرة بها زاوية محيطية = ٣٠° يقابلها قوس = ٥ سم

الحل

∵ قياس المحيطية = ٣٠°

∴ قياس المركزية المشتركة معها فى القوس = ٦٠°

س° = ٦٠°

∵ $\theta^{د} = س^\circ \times \frac{\pi}{180} = 60^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$

نق = $\frac{ل}{\theta^{د}} = \frac{5}{(\frac{\pi}{3})}$

$= \frac{15}{\pi}$ سم

محيط الدائرة = ٢π نق = $2 \times \pi \times \frac{15}{\pi} = 30$ سم

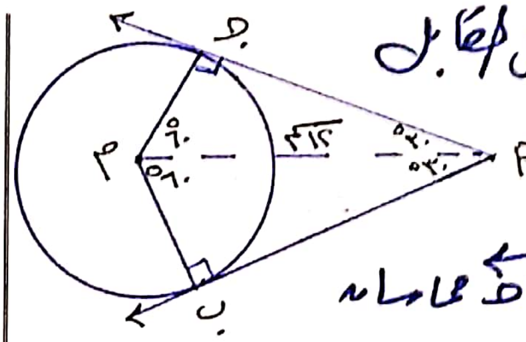
ملحوظة

فى مسائل محيط ومساحة الدائرة نفضل نجيب القياس الدائرى ونقعد بدلالة π

طبعاً انت فاكر إن

١. محيط الدائرة = ٢π نق
٢. مساحة الدائرة = π نق²

مثال ١٠ في الشكل المقابل



$\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أجـ}$ مماسان للدائرة م

، ق(جـ $\hat{م}$ ب) = ٦٠° ، أم = $١٢\sqrt{٣}$ سم

أوجد طول القوس الأكبر جـ ب لأقرب سم

الحل

من هندسة الشكل ق($\hat{أ}$) = ٦٠°

∵ $\overleftrightarrow{أجـ}$ ⊥ $\overline{م جـ}$ ، $\overleftrightarrow{أب}$ ⊥ $\overline{م ب}$

(لأن المماس ⊥ نصف القطر)

∴ ق(جـ $\hat{م}$ ب) = ٣٦٠° − [٩٠° + ٩٠° + ٦٠°]

= ١٢٠°

∴ ق(جـ $\hat{م}$ ب) المنعكسة = ٣٦٠° − ١٢٠°

= ٢٤٠°

∴ θ = ٢٤٠° × $\frac{\pi}{١٨٠}$ = $\frac{٤}{٣}\pi$

في △ أ ب م ∵ أم = $١٢\sqrt{٣}$

∴ ب م = $٦\sqrt{٣}$ لأن طول الضلع المقابل (٣٠°) في المثلث القائم = نصف طول الوتر

∴ نق = $٦\sqrt{٣}$

ل = θ × نق = $\frac{٤}{٣}\pi$ × $٦\sqrt{٣}$ = ٢٥ سم

مثال ١١ مثلث قياس إحدى زواياه ٦٠° وقياس زاوية أخرى $\frac{\pi}{٤}$ أوجد القياس الدائري والستيني للزاوية الثالثة.

الحل

قياس الأولى = ٦٠°

قياس الثانية = $\frac{\pi}{٤}$ × $\frac{١٨٠}{\pi}$ = ٤٥°

∴ قياس الثالثة = ١٨٠ − [٦٠ + ٤٥]

س° = ٧٥°

θ = س° × $\frac{\pi}{١٨٠}$ = ٧٥ × $\frac{\pi}{١٨٠}$ = ١,٣١ ^د

مثال ١٢ زاويتان متكاملتان الفرق بينهما = $\frac{\pi}{٣}$ أوجد قياسهما بالدائري والستيني

س° = $\frac{\pi}{٣}$ × $\frac{١٨٠}{\pi}$ = ٦٠°

الفرق بينهما = ٦٠°

الحل

س + ص = ١٨٠°

س − ص = ٦٠°

٢س = ٢٤٠ ∴ س = ١٢٠°

= ١٢٠ × $\frac{\pi}{١٨٠}$ = $\frac{٢}{٣}\pi$

١٢٠ + ص = ١٨٠°

∴ ص = ١٨٠ − ١٢٠ = ٦٠°

= ٦٠ × $\frac{\pi}{١٨٠}$ = $\frac{١}{٣}\pi$

اختبر فهمك للدرس؟

١) الزاوية التي قياسها $\frac{31\pi}{6}$ تقع في الربع ....

(أ) الأول (ب) الثاني (ج) الثالث (د) الرابع

٢) الزاوية التي قياسها $-\frac{9\pi}{4}$ تقع في الربع ....

(أ) الأول (ب) الثاني (ج) الثالث (د) الرابع

٣) مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = ...

(أ) 2π (ب) π (ج) $\frac{3\pi}{2}$ (د) 3π

٤) إذا كان مجموع قياسات زوايا أي مضلع منتظم = $180 \times (ن - 2)$ حيث ن عدد الأضلاع فإن قياس زاوية الخماسي المنتظم = ...

(أ) $\frac{\pi}{3}$ (ب) $\frac{7\pi}{2}$ (ج) $\frac{3\pi}{5}$ (د) $\frac{2\pi}{3}$

$\frac{180 \times (5-2)}{5} = \frac{540}{5} = 108$ ، $108° = \frac{3\pi}{5}$

٥) القوس الذي طوله 5π سم في دائرة طول نصف قطرها 15 سم يقابل زاوية مركزية قياسها = ...

(أ) $30°$ (ب) $60°$ (ج) $90°$ (د) $180°$

$\theta = \frac{ل}{نق} = \frac{5\pi}{15} = \frac{\pi}{3} = \frac{180}{3} = 60°$

$\pi = 180$

٦) بندول بسيط طول خيطه 14 سم يتذبذب بزاوية قياسها $\frac{1}{10}\pi$ فإن طول قوسه = ... سم

(أ) 4,6 (ب) 4,4 (ج) 4,2 (د) 4,8

نق = 14 ، ل = θ × نق = $14 \times \frac{1}{10}\pi = 4,4$

3,14

لاحظ أنه في الزوايا $\pi = 180°$
في الأطوال $\pi = \frac{22}{7}$ أو 3,14

٧) إذا كان طول قوس من الدائرة = $\frac{3}{8}$ محيطها فإن الزاوية المركزية المقابلة له هي ....

(أ) $30°$ (ب) $67° 30'$ (ج) $135°$ (د) $43°$

ل = θ × نق ∴ $\frac{3}{8} \times 2\pi$ ~~نق~~ = θ × ~~نق~~

∴ $\theta = \frac{3}{4}\pi = \frac{3}{4} \times 180° = 135°$

٨) في الدائرة التي طول نصف قطرها وحدة الأطوال قياس الزاوية المركزية بالتقدير الدائري = ...

(أ) $\frac{1}{4}$ طول القوس (ب) $\frac{1}{2}$ طول القوس (ج) طول القوس (د) ضعف طول القوس

ل = θ × نق ، عندما نق = 1 ∴ ل = θ

٩) إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا شكل رباعي كنسبة 5 : 4 : 9 : 6 فإن قياس أصغر زواياه = ...

(أ) $\frac{\pi}{12}$ (ب) $\frac{\pi}{3}$ (ج) $\frac{5\pi}{12}$ (د) $\frac{2\pi}{3}$

مجموع الأجزاء = 24 ، أصغر الزوايا هي = $\frac{360}{24} \times 4 = 60°$

ملحوظة

قياس الزاوية بين عقربي الساعات والدقائق = | عدد الساعات × 30 − عدد الدقائق × $\frac{11}{2}$ |

١٠) القياس الموجب بين عقربي الساعة عندما الساعة الثانية والنصف = ... ؟

$\boxed{2:30}$

$2 \times 30 - 30 \times \frac{11}{2} = -105 = 105° \div 180$

$= \frac{7\pi}{12}$

تذكر أن

١) مجموع قياس الزاويتين المتتامتين = ٩٠°

٢) " " " المتكاملتين = ١٨٠°

٣) فى المثلث القائم طول الضلع المقابل
- * للزاوية ٣٠° = $\frac{1}{2}$ × طول الوتر
- * للزاوية ٦٠° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ × طول الوتر

٤) مجموع زوايا المثلث = ١٨٠°

٥) قياس الدائرة = ٣٦٠°

٦) محيط الدائرة = ٢ط نق

٧) مساحة الدائرة = ط نق²

٥) مجموع قياسات زوايا المثلث بالدائرى
----

٦) مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعى بالتقدير الدائرى = ----

٧) القوس الذى طوله ٥سم فى دائرة طول قطرها ٣٠ سم يقابل زاوية مركزية = ----°

٨) الزاوية التى طول قوسها = نق تسمى زاوية ----

٩) الدائرة التى طول نصف قطرها = واحد الأطوال تسمى ----

الواجب

١) أكمل

١) الزاوية التى قياسها $\frac{31ط}{6}$ تقع فى الربع ----

٢) الزاوية التى قياسها $-\frac{9ط}{4}$ تقع فى الربع ----

٣) الزاوية التى قياسها $\frac{8ط}{3}$ فإن قياسها الدائرى = ----

٤) الزاوية التى قياسها ١٫٣ ء فإن قياسها الستينى = ----

٢) أوجد طول القوس الذى تحصره زاوية مركزية ٣٠° ١٠٢° فى دائرة نصف قطرها = ٦سم لأقرب ١سم

٣) أوجد بكلا من القياس الدائرى والستينى لزاوية مركزية تحصر قوساً طوله ٦٠سم فى دائرة طول نصف قطرها ٧١سم

٤) أوجد محيط الدائرة التى بها زاوية محيطية = ٥٧° تقابل قوس طوله ٣سم

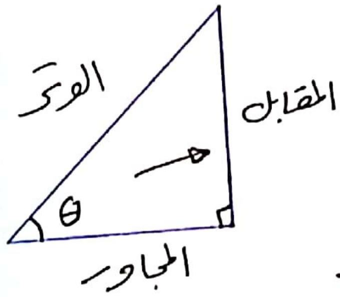
الدرس الثالث
الدوال المثلثية

تذكر أن

جا θ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

جتا θ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

ظا θ = $\frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$



الدوال المثلثية من دائرة الوحدة

ملاحظات

١ **دائرة الوحدة**: هي دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها وحدة الأطوال

٢ $س^2 + ص^2 = ١$

، س ∈ [-١ ، ١]

، ص ∈ [-١ ، ١]

٣ جا θ = ص — الاحداثي الصادي

٤ جتا θ = س — الاحداثي السيني

٥ ظا θ = $\frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta} = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$

المقلوبات

١ قا θ = $\frac{١}{\text{جتا}\,\theta}$

٢ قتا θ = $\frac{١}{\text{جا}\,\theta}$

٣ ظتا θ = $\frac{١}{\text{ظا}\,\theta}$

الفكرة الأولى مباشرة

مثال ١ أوجد جميع الدوال المثلثية لزاوية θ مرسومة في دائرة الوحدة إذا كان م إحداثيات ضلعها النهائي

١ $\left(\overset{\text{س}}{\frac{٣}{٥}} ، \overset{\text{ص}}{\frac{٤}{٥}}\right)$

الحل

جا θ = ص = $\frac{٤}{٥}$ ← قتا θ = $\frac{٥}{٤}$

جتا θ = س = $\frac{٣}{٥}$ ← قا θ = $\frac{٥}{٣}$

ظا θ = $\frac{\frac{٤}{٥}}{\frac{٣}{٥}} = \frac{٤}{٣}$ ← ظتا θ = $\frac{٣}{٤}$

٢ $(0 \,،\, 1)$ (س ، ص)

الحل

جا θ = ص = ١ ⟸ قتا θ = $\frac{1}{1}$ = ١

جتا θ = س = ٠ ⟸ قا θ = $\frac{1}{0}$ = غير معرف

ظا θ = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{1}{0}$ غير معرف ⟸ ظتا θ = $\frac{0}{1}$ = صفر

---

٣ $(-1 \,،\, 0)$

الحل

جا θ =   قتا θ =

جتا θ =   قا θ =

ظا θ =   ظتا θ =

---

٤ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \,،\, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

الحل

جا θ =   قتا θ =

جتا θ =   قا θ =

ظا θ =   ظتا θ =

الفكرة الثانية تحتاج معادلة

٥ أ$\left(\frac{-1}{2} \,،\, ص\right)$ حيث ص > ٠

الحل

∵ س² + ص² = ١

$\left(\frac{-1}{2}\right)^2$ + ص² = ١

$\frac{1}{4}$ + ص² = ١

ص² = ١ − $\frac{1}{4}$ = $\frac{3}{4}$

∴ ص = ± $\sqrt{\frac{3}{4}}$ = ± $\frac{\sqrt{3}}{2}$

∵ ص > ٠ ∴ ص = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

∴ أ$\left(\frac{-1}{2} \,،\, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

جا θ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ قتا θ = $\frac{2}{\sqrt{3}}$ = $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

جتا θ = $\frac{-1}{2}$ قا θ = $\frac{2}{-1}$ = −٢

ظا θ = $\frac{\sqrt{3}}{-1}$ = $-\sqrt{3}$ ظتا θ = $\frac{-1}{\sqrt{3}}$

---

٦ أ(−ص ، −ص) ، ص > ٠

الحل

(−ص)² + (−ص)² = ١

ص² + ص² = ١

٢ص² = ١ ⟸ ص² = $\frac{1}{2}$

∴ ص = ± $\sqrt{\frac{1}{2}}$ = ± $\frac{1}{\sqrt{2}}$

∵ ص > ٠ ∴ ص = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

∴ أ$\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \,،\, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

جا θ = $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ قتا θ = $\frac{\sqrt{2}}{-1}$ = $-\sqrt{2}$

جتا θ = $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ قا θ = $-\sqrt{2}$

ظا θ = ١   ظتا θ = ١

٧) أ(-س ، س) حيث س > ٠

الحل

$(-س)^2 + (س)^2 = 1$

$س^2 + س^2 = 1 \Leftarrow 2س^2 = 1$

$س^2 = \frac{1}{2}$ ∴ $س = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

∵ س > ٠ ∴ $س = \frac{1}{\sqrt{2}}$

∴ $أ(-\frac{1}{\sqrt{2}} ، \frac{1}{\sqrt{2}})$

$جا\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \leftarrow قتا\theta = \sqrt{2}$

$جتا\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} \leftarrow قا\theta = -\sqrt{2}$

$ظا\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \div \frac{-1}{\sqrt{2}} = -1 \leftarrow ظتا\theta = \frac{-1}{1} = -1$

اشارات الدوال المثلثية

جا ، قتا موجبتان والباقى سالب | كل الدوال موجبة

ظا وظتا موجبتان والباقى سالب | جتا ، قا موجبتان والباقى سالب

كل جبار ظالم جتا داهية تاخده

الفكرة الاولى مباشرة

مثال حدد اشارة كل من النسب المثلثية

١) جا ١٢٠°

١٢٠° ⟸ فى الربع الثانى [جا موجبة]

٢) جتا ٩٧٠°

$(970 - 360) = 610 - 360 = 250°$

٢٥٠° فى الربع الثالث جتا سالبة

٣) $قتا(\frac{-3}{5}\pi)$

$(\frac{-3}{5} \times 180) = -108 + 360 = 252°$

فى الربع الثالث ظا وظتا موجبتان

∴ الاشارة موجبة

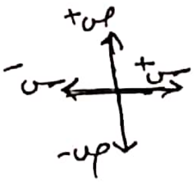
على فكرة

انت ممكن تكتبها على الآلة وتشوف الاشارة وتريح نفسك

ومتنساش (π) فى النسب = ١٨٠°

الفكرة الثامنة
غير مباشرة

(١) إذا كان ن (٠,٨ ، ص) نقطة تقع على الضلع النهائي لزاوية موجهة قياسها θ في وضعها القياسي مع دائرة الوحدة حيث ٢٧٠° < θ < ٣٦٠° فأوجد قيم جا θ ، ظتا θ ، قتا θ



الحل

∵ س² + ص² = ١

(٠,٨)² + ص² = ١

ص² = ١ - (٠,٨)² = ٠,٣٦

∴ ص = ± $\sqrt{٠,٣٦}$ = ± ٠,٦

∵ ٢٧٠° < θ < ٣٦٠° ، في الربع الرابع تكون س موجبة ، ص سالبة (جا)

∴ ص = -٠,٦

∴ (٠,٨ ، -٠,٦)

جا θ = -٠,٦

ظتا θ = $\frac{\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta}$ = $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ = $\frac{٠,٨}{-٠,٦}$ = $\frac{-٤}{٣}$

قا θ = $\frac{١}{\text{جتا}\,\theta}$ = $\frac{١}{\text{س}}$ = $\frac{١}{٠,٨}$ = $\frac{٥}{٤}$

(٢) أ (س ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) ، ٩٠° < θ < ١٨٠° أوجد قيمة جا θ ، قتا θ ، ظا θ

الحل

∵ س² + ص² = ١

س² + $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^2$ = ١

س² + $\frac{٣}{٤}$ = ١

س² = ١ - $\frac{٣}{٤}$ = $\frac{١}{٤}$

س = ± $\sqrt{\frac{١}{٤}}$ = ± $\frac{١}{٢}$

∵ ٩٠° < θ < ١٨٠° في الربع الثاني تكون (س) سالبة (جتا)

أ (- $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$)

جا θ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

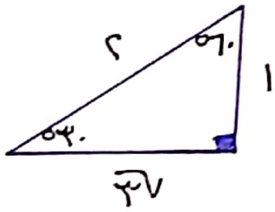
قا θ = $\frac{١}{\text{جتا}\,\theta}$ = $\frac{١}{(\frac{-١}{٢})}$ = $\frac{٢}{-١}$ = -٢

ظا θ = $\frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}$ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ÷ $\frac{-١}{٢}$

= -$\sqrt{٣}$

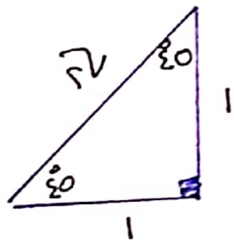
الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

* أولاً ٣٠° ، ٦٠°



٣٠°	٦٠°
جا ٣٠° = $\frac{1}{2}$	جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$
جتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$	جتا ٦٠° = $\frac{1}{2}$
ظا ٣٠° = $\frac{1}{\sqrt{3}}$	ظا ٦٠° = $\sqrt{3}$

* ثانياً ٤٥°

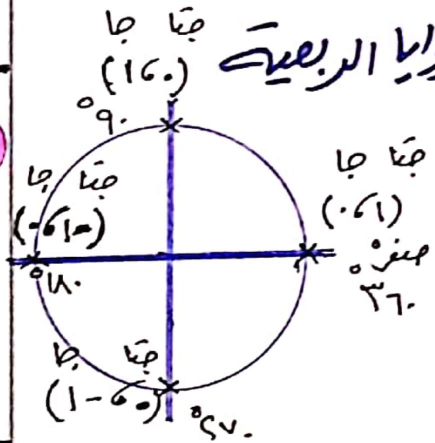


جا ٤٥ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

جتا ٤٥ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

ظا ٤٥ = ١

* ثالثاً الزوايا الربعية



لو فهمت أنا ازاى كتبت الإحداثيات بتاعت دائرة الوحدة وعرفت إن جتا = س ، جا = ص هتعرف تفهم كويس جداً الجدول اللى هكتبه

١ الزاوية ٠° أو ٣٦٠° (١،٠)

جا ٠° = ٠

جتا ٠° = ١

ظا ٠ = $\frac{\text{جا}}{\text{جتا}}$ = $\frac{0}{1}$ = صفر

٢ الزاوية ٩٠° (٠،١)

جا ٩٠° = ١

جتا ٩٠° = ٠

ظا ٩٠° = غير معرف

٣ الزاوية ١٨٠° (-١،٠)

جا ١٨٠° = ٠

جتا ١٨٠° = -١

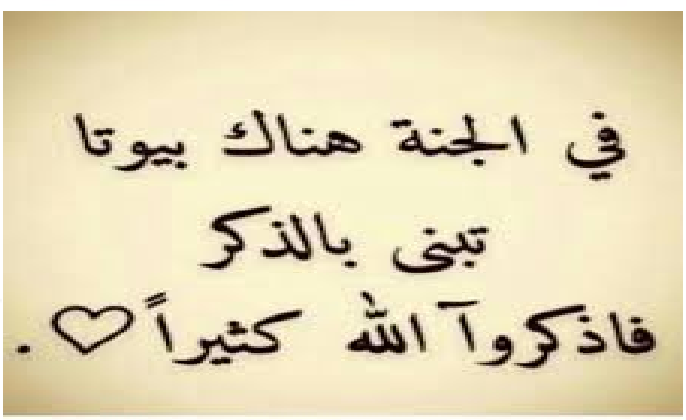
ظا ١٨٠° = صفر

٤ الزاوية ٢٧٠° (٠،-١)

جا ٢٧٠° = -١

جتا ٢٧٠° = ٠

ظا ٢٧٠° = غير معرف



مثال ٤ بدون استخدام الآلة أوجد قيمة كل مما

١) ٤ جا ٣٠° جا ٩٠° − جتا ٠° قا ٦٠° + ٥ ظا ٤٥°

الحل

$4 \times \frac{1}{2} \times 1 - 1 \times 2 + 5 \times 1$

$2 - 2 + 5 = 5$

٢) جتا ٩٠° قتا ٣٠° + قا² ٤٥° جا ٣٠° − جتا ٢٧٠° جا ١٨٠°

الحل

$0 \times 2 + (\sqrt{2})^2 \times \frac{1}{2} - 0 \times 0$

$0 + 2 \times \frac{1}{2} - 0 = 1$

٣) ٣ جا ٣٠° ظا ٤٥° − ٢ قا² ٤٥° − ظا² ٦٠° + جا ٦٠° ظا ٣٠°

الحل

$3 \times \frac{1}{2} \times 1 - 2 \times (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{3}{2} - 4 - 3 + \frac{1}{2} = -5$

٤) ٣ ظا² ٣٠° + $\frac{4}{3}$ جتا² ٣٠° − $\frac{1}{8}$ قا⁴ ٦٠°

الحل

$3 \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{4}{3} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1}{8} \times \left(\frac{2}{1}\right)^4$

$3 \times \frac{1}{3} + \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} - \frac{1}{8} \times 16$

$1 + 1 - 2 =$ صفر

٥) اثبت أن

جتا $\frac{\pi}{2}$ = جتا² $\frac{\pi}{4}$ − جا² $\frac{\pi}{4}$

الحل

الطرف الأيمن = جتا $(\frac{\pi}{2})$ = جتا $(\frac{180}{2})$ = جتا ٩٠°

جتا ٩٠° = ٠

الطرف الأيسر = جتا² $(\frac{180}{4})$ − جا² $(\frac{180}{4})$

= جتا² ٤٥ − جا² ٤٥

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 =$ صفر

∴ الطرفان متساويان

٦) أوجد قيمة س التى تحقق أن

س جا $\frac{\pi}{6}$ جتا² $\frac{\pi}{4}$ = جتا² ٣٠° جا $\frac{\pi}{2}$

الحل

∵ س جا ٣٠° جتا² ٤٥° = جتا² ٣٠° جا ٩٠°

∴ س × $\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times 1$

س × $\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

∴ س = $\frac{3}{4} \div \left(\frac{1}{4}\right)$

∴ س = ٣

* عندك طريقتين
* تقسم على المعامل
* أو تضرب فى المعكوس الضربى للمعامل

اختبر نفسك على الدرس ٣

(١) إذا كان جا θ = -١ ، جتا θ = ٠ فإن θ = ...

(أ) $\frac{\pi}{2}$ (ب) π (ج) $\frac{3\pi}{2}$ (د) 2π

(٢) إذا كانت قتا θ = ٢ حيث θ حادة فإن θ = ...

(أ) ١٥° (ب) ٣٠° (ج) ٤٥° (د) ٦٠°

جا θ = $\frac{1}{2}$

(٣) إذا كان ظا θ = ١ فإن θ = ...°

(أ) ٦٠° (ب) ٣٠° (ج) ٤٥° (د) ٩٠°

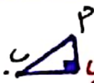
(٤) إذا كان جتا θ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ فإن جا θ = ...

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (ج) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (د) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

θ = ٣٠° ∴ جا ٣٠° = $\frac{1}{2}$

(٥) إذا كان جتا θ = $\frac{1}{2}$ ، جا θ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ فإن θ = ...

(أ) $\frac{\pi}{3}$ (ب) $\frac{5\pi}{6}$ (ج) $\frac{5\pi}{3}$ (د) $\frac{11\pi}{6}$

(٦) إذا كان  أ ب ج قائم في ب وكان ق(أ^) = ٢ ق(ج^) فإن قا أ + قتا ج = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (ج) ٦ (د) ٨

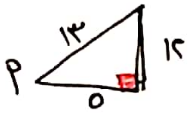
ق(أ^) = ٦٠° ، ق(ج^) = ٣٠°

قا ٦٠° = $\frac{1}{\text{جتا } 60°}$ = ٢ ، قتا ٣٠° = $\frac{1}{\text{جا } 30°}$ = ٢

٢ + ٢ = ٤

(٧) إذا كان أ هي أكبر زاوية حادة في مثلث أطوال أضلاعه ٥ ، ١٢ ، ١٣ سم فإن ظتا أ = ...

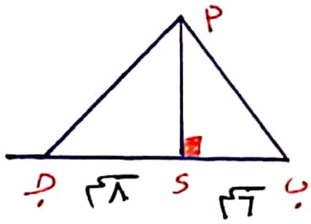
(أ) $\frac{12}{13}$ (ب) $\frac{5}{13}$ (ج) $\frac{5}{12}$ (د) $\frac{12}{5}$



دى زاوية حادة في مثلث قائم

ظتا أ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$ = $\frac{5}{12}$

(٨) في الشكل المقابل

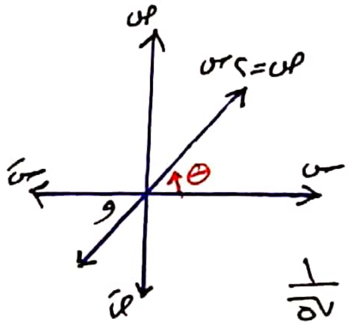


د ب جتا ب + د ج جتا ج = ...

(أ) ٦ (ب) ٨ (ج) ١٤ (د) ٤٨

$\frac{6}{\cancel{\text{أب}}} \times \cancel{\text{أب}} + \frac{8}{\cancel{\text{أج}}} \times \cancel{\text{أج}} = 6 + 8 = 14$

(٩) في الشكل المقابل



ص = ٢ س

فإن جا θ = ...

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (ج) ٠,٨٩ (د) $\frac{1}{3}$

الميل = ٢ ∴ ظا θ = ٢ ∴ θ = ظا$^{-1}$ ٢ = ☐

جا ☐ = ٠,٨٩

إذا خدعك شخص فهو حقير
وان خدعك مره اخرى فهو أحقر
وان خدعك مرة ثالثة

فـ أنت مسخره الصراحه

الواجب

١ ابحث إشارة

١) جا ٧٠°

٢) ظا ١٢٠°

٣) قتا ١٢٠٠°

٤) ظا ٤١٠°

٢ أوجد جميع النسب المثلثية

١) $\left(\frac{٢}{٣} ، \frac{\sqrt{٥}}{٣}\right)$

٢) (٠٫٦ ، -٠٫٨)

٣) (-١ ، ٠)

٣ أوجد النسب المثلثية إذا كانت

١) م (س ، $\frac{١}{٢}$) ، س > ٠

٢) م (٠٫٦ ، س) ، س < ٠

٣) م (س ، -س) ، س > ٠

٤) م (-س ، -س) ، س < ٠

٤ أوجد قيمة ما يلي

١) جا ٠° + جا ٢٧٠° + جا ٩٠° + جا ١٨٠°

٢) ظا² ٣٠° + ٢ جا² ٤٥° + جتا² ٩٠°

٣) جتا $\frac{\pi}{٢}$ جتا ٠ + جا $\frac{٣\pi}{٢}$ جا $\frac{\pi}{٢}$

٤) ٣ جا ٣٠° جا² ٦٠° - جتا ٠° قا ٦٠° + جا ٢٧٠° جتا² ٤٥°

٥ اثبت أن

١) جا ٦٠° جتا ٣٠° - جتا ٦٠° جا ٣٠° = جا² $\frac{\pi}{٤}$

٢) جتا $\frac{\pi}{٢}$ = جتا² $\frac{\pi}{٤}$ - جا² $\frac{\pi}{٤}$

٣) ٢ جا² ٩٠° = -٢ جتا ١٨٠°

٦ أوجد قيمة س إذا كان

١) س جا² $\frac{\pi}{٤}$ جتا π = ظا² $\frac{\pi}{٣}$ جا $\frac{٣\pi}{٢}$

٢) س جا $\frac{\pi}{٤}$ جتا $\frac{\pi}{٤}$ قتا $\frac{\pi}{٦}$ = ظا² $\frac{\pi}{٤}$ - جتا² $\frac{\pi}{٣}$

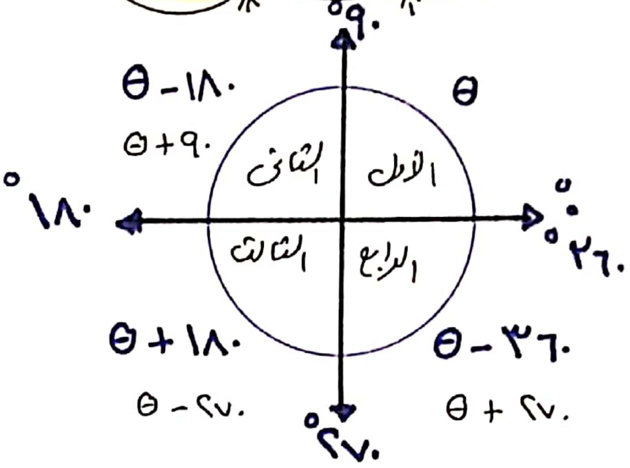
من قال سبحان الله وبحمده غرست له نخلات في الجنة

لا حول ولا قوة إلا بالله كنز من كنوز الجنة

أكثروا من ذكر الله حتى لا يشغلكم الشيطان ويضيع عليكم أوقات المذاكرة.

وفقكم الله

الدرس الرابع
الزوايا المنتسبة



لاحظ أن

لاحظ في الربع الثاني

١) جا(١٨٠ − θ) = جا θ

٢) جتا(١٨٠ − θ) = − جتا θ

٣) ظا(١٨٠ − θ) = − ظا θ

في الربع الثالث

١) جا(١٨٠ + θ) = − جا θ

٢) جتا(١٨٠ + θ) = − جتا θ

٣) ظا(١٨٠ + θ) = ظا θ

في الربع الرابع

١) جا(٣٦٠ − θ) = − جا θ

٢) جتا(٣٦٠ − θ) = جتا θ

٣) ظا(٣٦٠ − θ) = − ظا θ

الزاوية (−θ) تكافئ (٣٦٠ − θ)
يعني في الربع الرابع

١) جا(−θ) = − جا θ

٢) جتا(−θ) = جتا θ

٣) ظا(−θ) = − ظا θ

الزاويتين ٩٠° ± θ ، ٢٧٠° ± θ
بتعمل تغيير تاني

جا ← جتا ، جتا ← جا

في الربع الثاني

١) جا(٩٠ + θ) = جتا θ

٢) جتا(٩٠ + θ) = − جا θ

٣) ظا(٩٠ + θ) = − ظتا θ

في الربع الثالث

١) جا(٢٧٠ − θ) = − جتا θ

٢) جتا(٢٧٠ − θ) = − جا θ

٣) ظا(٢٧٠ − θ) = ظتا θ

في الربع الرابع

١) جا(٢٧٠ + θ) = − جتا θ

٢) جتا(٢٧٠ + θ) = جا θ

٣) ظا(٢٧٠ + θ) = − ظتا θ

ملحوظة هامة جداً

دة ملخص للزوايا اللى هتقابلك

$١٢٠° = (١٨٠° - ٦٠°)$

$١٣٥° = (١٨٠° - ٤٥°)$

$١٥٠° = (١٨٠ - ٣٠°)$

$٢١٠° = (١٨٠° + ٣٠°)$

$٢٢٥° = (١٨٠ + ٤٥°)$

$٢٤٠° = (١٨٠° + ٦٠°)$

$٣٠٠° = (٣٦٠° - ٦٠°) = -٦٠°$

$٣١٥° = (٣٦٠° - ٤٥°) = -٤٥°$

$٣٣٠° = (٣٦٠° - ٣٠°) = -٣٠°$

لاحظ

أنا عملتهم بدلالة ١٨٠° لانها أسهل مفيهاش تغيير شائى تكون أسهل من ٩٠° أو ٢٧٠°

وتحفظ الصفحة اللى فاتت واشارات الدوال وانت تبقى ممتاز إن شاء الله

الفكرة الأولى سهلة

مثال ١ أوجد قيمة كلاً من

١ جتا ٢٤٠°

الحل

جتا $(١٨٠ + ٦٠)°$ فى الربع الثالث

$=$ − جتا ٦٠ $= -\frac{١}{٢}$

٢ جا ٥٧٠°

الحل

جا $(٥٧٠° - ٣٦٠°)$ = جا $(٢١٠°)$

= جا $(١٨٠° + ٣٠°)$ فى الربع الثالث

= − جا ٣٠ $= -\frac{١}{٢}$

٣ ظتا ١٣٥°

الحل

ظتا $(١٨٠° - ٤٥°)$ فى الربع الثانى

= − ظتا ٤٥ $= -١$

٤ ظا $(-١٥٠°)$

الحل

ظا $(-١٥٠ + ٣٦٠°)$ = ظا $(٢١٠°)$

= ظا $(١٨٠ + ٣٠)$ = ظا ٣٠ $= \frac{١}{\sqrt{٣}}$

الفكرة الثانية
طويلة لكن سهلة

بدون استخدام الآلة أوجد قيمة كلاً منه

مثال ٢

جتا (−١٥٠°) جا ٦٠٠° + جتا $\frac{٢ط}{٣}$ جا ٣٣٠° − قا (−$\frac{٥ط}{٤}$) ظا ٩٠٠°

الحل

هنحول السالب لقياس موجب + ٣٦٠°

والى اكبر من ٣٦٠° هنطرح منه ٣٦٠°

جتا (−١٥٠° + ٣٦٠°) جا (٦٠٠° − ٣٦٠°) + جتا $\frac{٢ \times ١٨٠}{٣}$ جا ٣٣٠° − قا $\frac{٥ \times ١٨٠}{٤}$ ظا (٩٠٠° − ٣٦٠° − ٣٦٠°)

جتا ٢١٠° جا ٢٤٠° + جتا ١٢٠° جا ٣٣٠° − قا ٢٢٥° ظا ١٨٠°

جتا (١٨٠° + ٣٠°) جا (١٨٠° + ٦٠°) + جتا (١٨٠° − ٦٠°) جا (٣٦٠° − ٣٠°) − قا ٢٢٥° × صفر

(− جتا ٣٠°) × (− جا ٦٠°) + (− جتا ٦٠°) × (− جا ٣٠°) − صفر

[−$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × −$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$] + [−$\frac{١}{٢}$ × −$\frac{١}{٢}$] − صفر = $\frac{٣}{٤}$ + $\frac{١}{٤}$ = ١

مثال ٣

جا ١٥٠° جتا (−٣٠٠°) + جتا ٩٣٠° ظتا ٢٤٠°

الحل

جا ١٥٠° جتا (−٣٠٠° + ٣٦٠°) + جتا (٩٣٠° − ٣٦٠° − ٣٦٠°) ظتا ٢٤٠°

جا (١٨٠° − ٣٠°) جتا (٦٠°) + جتا ٢١٠° ظتا (١٨٠° + ٦٠°)

جا ٣٠° جتا ٦٠° + (− جتا ٣٠°) (ظتا ٦٠°)

$\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$ − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ = $\frac{١}{٤}$ − $\frac{١}{٢}$ = −$\frac{١}{٤}$

جتا ٢١٠° = جتا (١٨٠° + ٣٠°)

ظا ٦٠° = $\sqrt{٣}$

ظتا ٦٠° = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

مثال ٤

جا ٦٠٠° جتا (−٣٠°) + جا ١٥٠° جتا (−٢٤٠°)

الحل

جتا (−θ) = جتا θ

جا (٦٠٠° − ٣٦٠°) جتا ٣٠° + جا ١٥٠° جتا (−٢٤٠° + ٣٦٠°)

جا ٢٤٠° جتا ٣٠° + جا ١٥٠° جتا ١٢٠°

جا (١٨٠° + ٦٠°) جتا ٣٠° + جا (١٨٠° − ٣٠°) جتا (١٨٠° − ٦٠°)

− جا ٦٠° جتا ٣٠° + جا ٣٠° (− جتا ٦٠°)

[−$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$] + [$\frac{١}{٢}$ × −$\frac{١}{٢}$] = −$\frac{٣}{٤}$ − $\frac{١}{٤}$ = −١

الحل العام للمعادلات المثلثية

١ إذا كان جا α = جتا β فإن $\alpha \pm \beta$ = ٩٠° + ٣٦٠° ن

٢ قتا α = قا β فإن $\alpha \pm \beta$ = ٩٠ + ٣٦٠° ن

٣ ظا α = ظتا β فإن $\alpha + \beta$ = ٩٠° + ١٨٠° ن

حيث ن = ٠ ، ١ ، ٢ ، ... ن ∈ ص

مثال ١ أوجد مجموعة حل المعادلة جا ٤ θ = جتا ٢ θ حيث θ ∈] ٠ ، $\frac{\pi}{2}$ [

$\frac{\pi}{2}$ = $\frac{١٨٠}{٢}$ = ٩٠°

الحل

∵ جا ٤ θ = جتا ٢ θ

∴ (٤ θ ± ٢ θ) = ٩٠ + ٣٦٠° ن

إما ٦ θ = ٩٠° + ٣٦٠° ن

عندما ن = ٠ ٦ θ = ٩٠° + ٣٦٠ × ٠

٦ θ = ٩٠ ∴ θ = $\frac{٩٠}{٦}$ = ١٥° تحقق

عندما ن = ١ ٦ θ = ٩٠ + ٣٦٠ × ١

٦ θ = ٤٥٠

θ = $\frac{٤٥٠}{٦}$ = ٧٥° تحقق

عندما ن = ٢

٦ θ = ٩٠ + ٣٦٠ × ٢ = ٨١٠°

θ = $\frac{٨١٠}{٦}$ = ١٣٥° مرفوض

أو ٢ θ = ٩٠° + ٣٦٠° ن

ن = ٠ ٢ θ = ٩٠° + ٠

٢ θ = ٩٠° θ = $\frac{٩٠}{٢}$ = ٤٥° تحقق

عندما ن = ١ ∴ ٢ θ = ٩٠ + ٣٦٠ × ١

٢ θ = ٤٥٠

θ = $\frac{٤٥٠}{٢}$ = ٢٢٥° مرفوض

∴ م.ح = { ١٥° ، ٤٥° ، ٧٥° }

٢ حل إذا كان جا (٣ θ + ٢٠°) = جتا (θ − ٣٠°) حيث θ ∈ [٠ ، ٩٠]

الحل

إما ٣ θ + ٢٠ + θ − ٣٠ = ٩٠° + ٣٦٠ ن

عندما ن = ٠ ٤ θ − ١٠° = ٩٠°

٤ θ = ١٠٠°

θ = ٢٥°

ولكن عند ن = ١ لا تحقق

أو ٣ θ + ٢٠° − (θ − ٣٠°) = ٩٠° + ٣٦٠ ن

عندما ن = ٠ ٢ θ + ٥٠° = ٩٠°

٢ θ = ٤٠° ∴ θ = ٢٠°

∴ قيم θ هي ٢٥° ، ٢٠°

مثال ٦ إذا كان ظا θ = ظتا ٢θ
أوجد قيم θ حيث θ ∈]٠، π[

الحل

θ + ٢θ = ٩٠ + ١٨٠ ن

٣θ = ٩٠ + ١٨٠ ن

عندما ن = ٠ ∴ ٣θ = ٩٠°

∴ θ = ٩٠/٣ = ٣٠° تحقق

عندما ن = ١ ∴ ٣θ = ٩٠° + ١٨٠°

٣θ = ٢٧٠° ∴ θ = ٩٠° تحقق

عندما ن = ٢ ∴ ٣θ = ٩٠ + ٣٦٠°

٣θ = ٤٥٠° ∴ θ = ١٥٠° تحقق

عندما ن = ٣ ∴ ٣θ = ٩٠° + ٥٤٠°

٣θ = ٦٣٠ ∴ θ = ٢١٠° مرفوض

∴ قيم θ هى = {٣٠°، ٩٠°، ١٥٠°}

مثال ٧ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية

(١) ٢ جا θ − ١ = ٠ ، θ ∈]٠، π/٢[

الحل

٢ جا θ = ١ ∴ جا θ = ١/٢

جا موجبة فى الأول والثانى

لكن θ ∈ للربع الأول

∴ θ = shift sin (1/2) = ٣٠°

م.ح = {٣٠°}

(٢) ٢ جتا θ − ١ = ٠ ، θ ∈]٠، ٢π[

الحل

٢ جتا θ = ١ ، جتا θ = ١/٢

جتا موجبة فى الأول أو الرابع

الأول: ٦٠°
الرابع: ٣٦٠° − ٦٠° = ٣٠٠°

∴ م.ح = {٦٠°، ٣٠٠°}

(٣) ٢ جتا (π/٢ − θ) = ١ ← تغيير تابع

٢ جا θ = ١

جا θ = ١/٢ فى الأول أو الثانى

الأول: ٣٠°
الثانى: ١٨٠° − ٣٠° = ١٥٠°

∴ م.ح = {٣٠°، ١٥٠°}

(٤) ٤ جتا² θ − ٣ = ٠ ، θ ∈]٠، ٢π[

الحل

٤ جتا² θ = ٣ ، جتا² θ = ٣/٤

جتا θ = ± √(٣/٤) = ± √٣/٢

يعنى موجبة (الأول والرابع)
سالبة (الثانى والثالث)

{٣٠، ١٨٠ − ٣٠، ١٨٠ + ٣٠، ٣٦٠ − ٣٠}

= {٣٠°، ١٥٠°، ٢١٠°، ٣٣٠°}

اختبر الدرس ٤

١ جتا θ + جتا(١٨٠ + θ) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢جتا θ (د) جتا θ

جتا θ - جتا θ = ٠

٢ إذا كان θ هى قياس الزاوية فى وضعها القياسى وكان ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى (س، -س) حيث س > ٠ فإن θ = ...

(أ) ٤٥° (ب) ١٣٥° (جـ) ٢٢٥° (د) ٣١٥°

(+، -) فى الربع الرابع

٣ إذا كان جا α = جتا β فإن ظا(α + β) = ...

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) غير معرف (د) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

α + β = ٩٠° ظا ٩٠° غير معرف

٤ إذا كان جا ٢θ = جتا ٤θ حيث θ زاوية حادة موجبة فإن ظا(٩٠° - ٣θ) = ...

(أ) -١ (ب) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (جـ) ١ (د) $\sqrt{3}$

٥ إذا كان أ ب جـ د شكل رباعى دائرى وكان جا أ = $\frac{٣}{٥}$ فإن جا جـ = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $-\frac{٣}{٥}$ (جـ) $\frac{٤}{٥}$ (د) $-\frac{٤}{٥}$

فى الرباعى الدائرى كل زاويتين متقابلتين مجموعهما ١٨٠

∴ جا جـ = جا(١٨٠ - أ) = جا أ = $\frac{٣}{٥}$

٦ إذا كان ٧س = $\frac{\pi}{2}$ فإن $\frac{\text{جا ٣س}}{\text{جتا ٤س}} + \frac{\text{ظا ٢س}}{\text{ظتا ٥س}}$ = ...

(أ) -٢ (ب) -١ (جـ) ١ (د) ٢

∵ ٧س = ٩٠° ∴ جا ٣س = جتا ٤س

، ظا ٢س = ظتا ٥س

∴ ١ + ١ = ٢

٧ جتا ٤٥° × جتا ٤٦° × جتا ٤٧° × ... × جتا ١٣٥° = ...

(أ) صفر (ب) -١ (جـ) ١ (د) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

لبعضها ضربها × جتا ٩٠° = ٠

٨ إذا كان جتا² θ = ١ فإن θ = ... حيث ن ∈ ص

(أ) ن π (ب) $\frac{ن}{٢}$ π (جـ) ٢ن π (د) (٢ن + ١)π

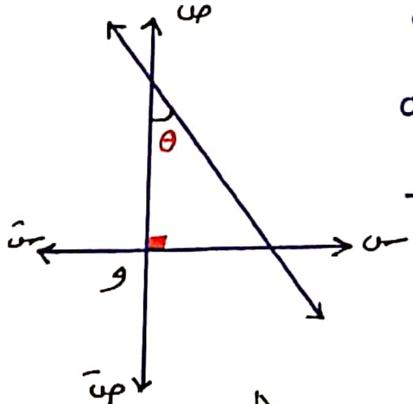
جتا θ = ±١ ، θ = ٠ أو ١٨٠ أو ٣٦٠ وهكذا

= ن π

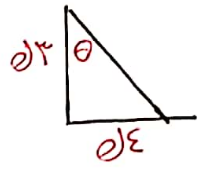
٩ فى الشكل المقابل

ص = $-\frac{٣}{٤}$ س + ٥

فإن ... = ...



الميل = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$



∴ ظا θ = $\frac{٤}{٣}$

الواجب

١ أوجد قيمة

١) جا ٢٤٠°
٢) ظا ١٣٥°
٣) قتا $\frac{١١ \pi}{٦}$
٤) جا (−٩٠٠°)
٥) ظا ٤٨٠°
٦) جتا (−٦٠°)

٢ أوجد قيمة

١) جا ١٥٠° ظا ٢٢٥° + جتا ٣١٥° قا (−٢١٠°) + جا (−١٣٥°) قتا (٢١٠°)

٢) جا ٦٠٠° جتا −٣٠° + جا ١٥٠° جتا (−٢٤٠°)

٣ أوجد إحدى قيم θ ∈]٠ ، ٩٠[

١) جا (٣θ + ١٥°) = جتا (٢θ − ٥°)
٢) ظا (θ + ٢٠°) = ظتا (٣θ + ٣٠°)
٣) جتا $\left(\frac{θ + ٢٠°}{٢}\right)$ = جا $\left(\frac{θ + ٤٠°}{٢}\right)$

٤ حل المعادلات التالية]٠ ، ٢π[

١) ٢ جتا θ + ١ = ٠
٢) ٢ جتا θ − $\sqrt{٣}$ = ٠
٣) $\sqrt{٣}$ قتا θ = −٢
٤) ٥ ظا θ − ٥ = ٠

٥ أكمل

١) جا ٣٥° = جتا ...
٢) ظا ٢٤° = ظتا ...
٣) قا ٣٠° = قتا ...
٤) قتا ١٢° = قا ...
٥) قتا (٣٦ − θ) =
٦) إذا كان جا θ = جتا θ حيث θ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[
فإن θ = ...
٧) إذا كان جتا θ = جا ٢θ حيث θ زاوية حادة موجبة فإن جا ٣θ = ...
٨) إذا كان ظتا ٢θ − ظا θ = ٠ حيث θ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[فإن θ = ...°
٩) إذا كان جا α = جتا β
فإن ظا (α + β) = ... غير معرف

احرص دائماً على رضا والديك
وعلى صلات الأرحام.

لا تنسونا من صالح الدعاء.

الدرس الخامس
التمثيل البيانى للدوال المثلثية

كل من الدالتين

د(θ) = ٢ جا ب θ ، د(θ) = ٢ جتا ب θ

* دورتها = $\frac{\pi ٢}{|ب|}$
* ومداها = [-٢ ، ٢]

والمجال دائماً]-∞ ، ∞[يعنى ح

أمثلة

١) د(θ) = ٢ جا θ

دورتها = ٢π

ومداها = [-٢ ، ٢]

القيمة العظمى = ٢ والقيمة الصغرى = -٢

٢) د(θ) = ٣ جتا ٢θ

دورتها = $\frac{\pi ٢}{٢}$ = π

ومداها = [-٣ ، ٣]

القيمة العظمى = ٣ القيمة الصغرى = -٣

٣) د(θ) = جا -٣θ

دورتها = $\frac{\pi ٢}{٣}$

مداها [-١ ، ١]

٤) د(θ) = ٧ جتا -٤θ

دورتها = $\frac{\pi ٢}{٤}$ = $\frac{\pi}{٢}$

ومداها = [-٧ ، ٧]

القيمة العظمى = ٧ القيمة الصغرى = -٧

٥) د(θ) = ٥ طا θ

دورتها =

مداها =

٦) د(θ) = ٣ جتا ٧θ

دورتها =

مداها =

القيمة العظمى = الصغرى =

المجال = - - - -

٧) د(θ) = ٣ جا(-٨θ)

دورتها =

مداها =

القيمة العظمى = - - - الصغرى = - - - -

المجال = - - -

د(θ) = طا θ

دورتها =

مداها =

د(θ) = جتا θ

دورتها =

مداها =

اختر

(١) مدى الدالة د: د(θ) = جا θ هو.....

(أ) {-١، ١} (ب) [-١، ١]
(ج)]-١، ١[(د)]-∞، ∞[

(٢) القيمة العظمى للدالة ع: ع(θ) = ٥ جتا ٥θ هي...

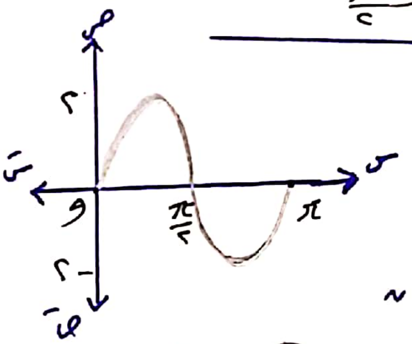
(أ) صفر (ب) ٥
(ج) ∞ (د) ١

(٣) الدالة د: د(θ) = ٢ جا ٤θ دورتها....

(أ) ٢π (ب) π
(ج) $\frac{\pi}{2}$ (د) $\frac{\pi}{4}$

$\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

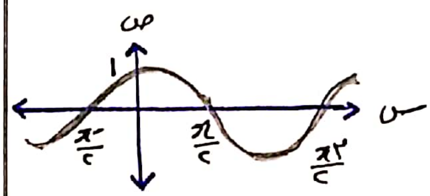
(٤) الشكل المقابل يمثل ص = د(س) فإن



(أ) ص = ٢ جا س (ب) ص = جا ٢س
(ج) ص = ٢ جا ٢س (د) ص = جا س

المنحنى يمر بنقطة الأصل جا(٠) = ٠
مداها [-٢، ٢] دورتها π $\frac{2\pi}{2} = \pi$

(٥) الشكل المقابل



(أ) ص = جا θ
(ب) ص = جتا θ
(ج) ص = ٢ جتا θ
(د) ص = ٢ جا θ

(٦) الدالة ص = جا($\frac{\pi}{4}$ + س) تبلغ أقصى قيمة لها عند س = ...

(أ) $\frac{\pi}{2}$ (ب) $-\frac{\pi}{2}$ (ج) $\frac{\pi}{4}$ (د) صفر

أقصى قيمة لـ جا ٩٠ = ١ ∴ س = ٤٥ = $\frac{\pi}{4}$

(٧) إذا كانت د(س) = أ جتا ب س حيث أ > ٠ دورتها $\frac{\pi}{2}$ ومداها [-١، ١] فإن $\frac{أ}{ب}$ = ...

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $-\frac{1}{4}$ (ج) $-\frac{1}{2}$ (د) $\frac{1}{4}$

أ = ١ $\frac{2\pi}{ب} = \frac{\pi}{2}$ ∴ ب = ٤ ∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{1}{4}$

(٨) عدد مرات تقاطع المنحنى ص = ٢ جا ٣س مع محور السينات في [٠، ٢π] يساوي....

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٧

دورتها = $\frac{2\pi}{3}$ = ١٢٠ يتقاطع فيها مرتين $\frac{360}{120}$ = ٣
٣ × ٢ = ٦ + ١ عند الصفر = ٧
وهما عند ٠، ٦٠، ١٢٠، ١٨٠، ٢٤٠، ٣٠٠، ٣٦٠

الدرس السادس

إيجاد قياس زاوية بمعلومية احدى نسبها المثلثية

الخطوات

١ تحديد الربع الذى تقع فيه θ حسب الإشارة.

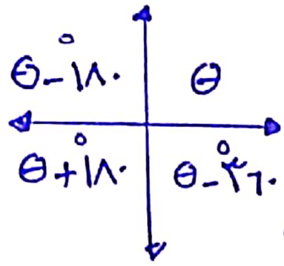
٢ نوجد قياس الزاوية الحادة

shift tan   shift cos   shift sin

بدون اشارة

٣ ننسب الزاوية للربع الذى تقع فيه

* الأول   كما هى
* الثانى $١٨٠ - \alpha$
* الثالث $١٨٠ + \alpha$
* الرابع $٣٦٠ - \alpha$



مثال ١
أوجد قيمة θ إذا كان

١ $جا\,\theta = \frac{1}{2}$

الحل

الاشارة موجبة ∴ الزاوية فى الربع الأول أو الثانى

نوجد الزاوية الحادة

$shift\ sin\ \frac{1}{2} = 30^\circ$

الأول ٣٠° الثانى $١٨٠^\circ - ٣٠^\circ = ١٥٠^\circ$

∴ $\theta = ٣٠^\circ$ أو ١٥٠°

---

٢ $جتا\,\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

الحل

جتا θ سالبه فى الثانى والثالث

$shift\ cos\ \frac{1}{\sqrt{2}} = ٤٥^\circ$

الثانى $١٨٠ - ٤٥ = ١٣٥^\circ$ الثالث $١٨٠ + ٤٥ = ٢٢٥^\circ$

∴ $\theta = ١٣٥^\circ$ أو ٢٢٥°

---

٣ $ظا\,\theta = -\sqrt{3}$

الحل

ظا θ سالبه فى الثانى والرابع

$shift\ tan\ \sqrt{3} = 60^\circ$

الثانى $١٨٠^\circ - ٦٠^\circ = ١٢٠^\circ$ الرابع $٣٦٠ - ٦٠ = ٣٠٠^\circ$

∴ $\theta = ١٢٠^\circ$ أو ٣٠٠°

---

٤ $جا\,\theta = \frac{-1}{2}$ حيث θ أصغر زاوية موجبة

الحل

جا θ سالبه فى الثالث والرابع

$١٨٠ + ٣٠ = ٢١٠^\circ$ أو $٣٦٠ - ٣٠ = ٣٣٠^\circ$

∴ θ أصغر زاوية موجبة ∴ $\theta = ٢١٠^\circ$

مثال ٢ أوجد θ حيث $0^\circ < \theta < 360^\circ$ والتي تحقق جا $\theta = 0.7421$

الحل

جا θ موجبة في الأول والثاني

$\theta = \text{shift sin } 0.7421 = 47^\circ\ 55'$

في الأول $= 47^\circ\ 55'$

في الثاني $= 180^\circ - 47^\circ\ 55' = 132^\circ\ 5'$

مثال ٣ إذا قطع الضلع النهائي لزاوية موجهة قياسها θ في وضعها القياسي دائرة الوحدة في النقطة ب $\left(\frac{-6}{10} ، \frac{8}{10}\right)$ فأوجد ق(θ) حيث $0^\circ < \theta < 360^\circ$

الحل

جا $\theta = \frac{8}{10}$ الأول الثاني

جتا $\theta = \frac{-6}{10}$ الثاني الثالث

∴ الزاوية تقع في الربع الثاني

$\text{Shift sin } \frac{8}{10} = 53^\circ\ 7'\ 48''$

∴ $\theta = 180^\circ - 53^\circ\ 7'\ 48'' = 126^\circ\ 52'\ 12''$

ثلاثيات فيثاغورث

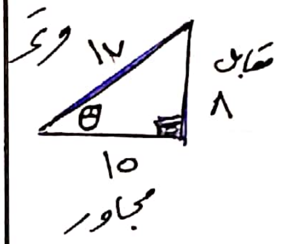
٣	٤	٥
٦	٨	١٠
٩	١٢	١٥
١٥	٢٠	٢٥
٥	١٢	١٣
٨	١٥	١٧

مثال ٤ أوجد الدوال المثلثية لكل مما يأتي

١) جا $\theta = \frac{-8}{17}$ حيث $270^\circ < \theta < 360^\circ$

الحل

خليك فاكر إنه إنت شغال في الربع الرابع يعني جتا موجبة ، (جا وظا) سالبين



من فيثاغورث ∴ المجاور $= \sqrt{(17)^2 - (8)^2} = 15$

جا $\theta = \frac{-8}{17}$

جتا $\theta = \frac{15}{17}$

ظا $\theta = \frac{-8}{15}$

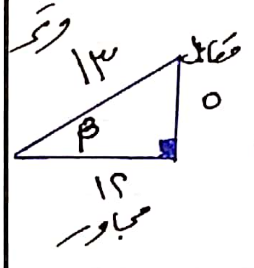
٢) ظا $\beta = \frac{5}{12}$ حيث β أكبر زاوية موجبة ، $0 < \beta < 360^\circ$

الحل

∵ ظا β موجبة ∴ تقع في الأول أو الثالث

∵ β أكبر زاوية موجبة

∴ β في الربع الثالث



من فيثاغورث ∴ الوتر $= \sqrt{(5)^2 + (12)^2} = 13$

∴ جا $\beta = \frac{-5}{13}$

جتا $\beta = \frac{-12}{13}$

ظا $\beta = \frac{5}{12}$

ونحط الإشارات الربع الثالث

اختر

(١) إذا كان ص = جتا θ فإن θ = ...

(أ) جا$^{-1}$ص (ب) جتا$^{-1}$ص

(جـ) ظا$^{-1}$ص (د) جتا$^{-1}$ θ

---

(٢) إذا كان θ = ظا$^{-1}$ $\left(\frac{-١}{\sqrt{٣}}\right)$ ، $٩٠° < \theta < ١٨٠°$

فإن θ = ...

(أ) $٣٠°$ (ب) $١٢٠°$ (جـ) $١٥٠°$ (د) $٢١٠°$

---

(٣) إذا كان θ = جا$^{-1}$ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ حيث θ أصغر

زاوية موجبة فإن θ = ...

(أ) $٦٠°$ (ب) $١٢٠°$ (جـ) $٢٤٠°$ (د) $٣٠٠°$

---

(٤) القياس الستيني لأصغر زاوية موجبة تحقق

جا$^{-1}$ (−٠٫٦) هو ....

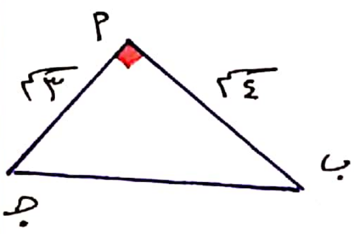
(أ) $٣٦°$ $٥٢'$ (ب) $١٤٣°$ $٨'$

(جـ) $٢١٦°$ $٥٢'$ (د) $٣٢٣°$ $٨'$

فى الربع الثالث ١٨٠ + جا$^{-1}$ ٠٫٦ =

---

(٥) فى الشكل المقابل



ق($\hat{ب}$ أجـ) = ...

(أ) جا$^{-1}$ $\left(\frac{٣}{٤}\right)$ (ب) جا$^{-1}$ $\left(\frac{٤}{٣}\right)$

(جـ) ظا$^{-1}$ $\left(\frac{٣}{٤}\right)$ (د) ظتا$^{-1}$ $\left(\frac{٣}{٤}\right)$

ظا ب = $\frac{٣}{٤}$ ∴ ب = ظا$^{-1}$ $\frac{٣}{٤}$

---

(٦) جا (جتا$^{-1}$ $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$) = ...

(أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $٣٠°$ (د) $٦٠°$

جتا$^{-1}$ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = $٣٠°$ ∴ جا $٣٠°$ = $\frac{١}{٢}$

---

(٧) قتا (جتا$^{-1}$ ٠) = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) $\frac{\pi}{٢}$ (د) صفر

جتا$^{-1}$ ٠ = $٩٠°$ قتا $٩٠°$ = $\frac{١}{جا ٩٠}$ = $\frac{١}{١}$ = ١

---

(٨) ظا$^{-1}$ $\left(\frac{١}{\sqrt{٣}}\right)$ + ظتا$^{-1}$ $\sqrt{٣}$ = ...

(أ) $\frac{\pi}{٣}$ (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) $\frac{٢\pi}{٣}$ (د) $\frac{\pi}{٦}$

ظا$^{-1}$ $\left(\frac{١}{\sqrt{٣}}\right)$ + ظا$^{-1}$ $\left(\frac{١}{\sqrt{٣}}\right)$ = $٣٠° + ٣٠° = ٦٠°$

---

(٩) جتا^{2} س + جا^{2} س = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{\pi}{٤}$ (جـ) $\frac{\pi}{٢}$ (د) π

ملحوظة هامة

الأس −١ ده معناه الدالة العكسية

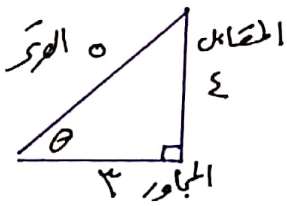
بدلاً من sin جا

تعمل shift sin جا$^{-1}$

مثال ٥ إذا كان جا θ = $\frac{٤}{٥}$ حيث $٩٠° < \theta < ١٨٠°$

فأوجد جا$(١٨٠° - \theta)$ + ظا$(٣٦٠° - \theta)$ + ٢جا$(٢٧٠° - \theta)$

الحل



$\because$ $٩٠° < \theta < ١٨٠°$

$\therefore$ جا θ = $\frac{٤}{٥}$

جتا θ = $\frac{-٣}{٥}$

ظا θ = $\frac{-٤}{٣}$

لأنها فى الربع الثانى

المقدار جا$(١٨٠ - \theta)$ = جا θ

ظا$(٣٦٠ - \theta)$ = − ظا θ

٢جا$(٢٧٠ - \theta)$ = − ٢ جتا θ

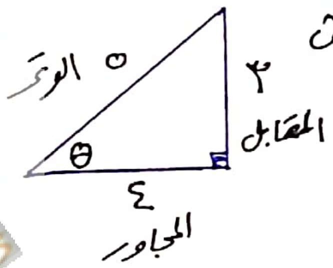
= جا θ − ظا θ − ٢ جتا θ

= $\frac{٤}{٥}$ − $(\frac{-٤}{٣})$ − $(٢ \times \frac{-٣}{٥})$ = $٣\frac{١}{٣}$

مثال ٦ إذا كان ظا θ = $\frac{٣}{٤}$ حيث $١٨٠° < \theta < ٢٧٠°$

فأوجد قيمة جتا$(٣٦٠° - \theta)$ − جتا$(٩٠° - \theta)$

الحل



جا θ = $\frac{-٣}{٥}$

جتا θ = $\frac{-٤}{٥}$ فى الربع الثالث

ظا θ = $\frac{٣}{٤}$

جتا$(٣٦٠ - \theta)$ = جتا θ

جتا$(٩٠ - \theta)$ = جا θ

= جتا θ − جا θ = $\frac{-٤}{٥}$ − $(\frac{-٣}{٥})$ = $\frac{-١}{٥}$

الواجب

١ أوجد قيمة θ حيث $\theta \in]٠ ، ٢\pi[$

(١) جا θ = $\frac{١}{٢}$ (٢) جتا θ = $\frac{-١}{٢}$

(٣) ظا θ = $-\sqrt{٣}$ (٤) ظتا θ = $\sqrt{٣}$

---

٢ أوجد قياس أصغر زاوية موجبة تحقق

(١) جتا θ = $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ (٢) ظا θ = ١

(٣) جا θ = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ (٤) جتا θ = ٠٫٧

---

٣ إذا قطع الضلع النهائى فأوجد قيمة $\theta \in]٠ ، ٢\pi[$

(١) $(\frac{١}{٢} ، \frac{\sqrt{٣}}{٢})$ (٢) $(\frac{١}{\sqrt{٢}} ، \frac{-١}{\sqrt{٢}})$

(٣) $(\frac{-٨}{١٠} ، \frac{٦}{١٠})$

---

٤ إذا كان ٧ قتا θ = ٢٥ ، فأوجد $\frac{\pi}{٢} < \theta < \pi$ فأوجد القيمة العددية للمقدار

ظا$(\pi + \theta)$ − ظتا$(\theta - \frac{\pi}{٢})$

$(٩٠ - \theta) = (\theta + ٢٧٠)$

انتهى الجبر وحساب المثلثات

مع أطيب تمنياتى الطيبة بالنجاح

والتفوق محمد أدهم