# الأدهم

فى

# الهندسة

## الصف الأول الثانوى

الترم الاول

هدية
مجانية

اعداد أ/ محمد أدهم
ت / ٠١٠٠٧٤٥١٩٥٧

# الدرس الأول : تشابه المضلعات

علاقة التشابه ∽
علاقة التطابق ≡

## يتشابه المضلعان إذا

١) تتساوى قياسات زواياهما المتناظرة
٢) تتناسب أطوال أضلاعهم المتناظرة

ولابد من تحقق الشرطين معاً

## ملاحظات

١) تكتب المضلعات المتشابهة بنفس ترتيب الرؤوس المتناظرة

**مثلاً** إذا كان $ا ب ج د ∽ س ص ع ل$

فإن $ق(\hat{ا}) = ق(\hat{س})$

، $ق(\hat{ج}) = ق(\hat{ع})$

، $\frac{ا ب}{س ص} = \frac{ب ج}{ص ع} = \frac{ج د}{ع ل} = \frac{د ا}{ل س} = ك$

٢) يسمى معامل التشابه ك

إذا كان ك > ١

فإن المضلع الأول يكبر للثاني
أو الثاني تصغير للأول

٣) وإذا كان ٠ < ك < ١

فإن الأول تصغير للثاني
أو الثاني تكبير للأول

٤) وإذا كان ك = ١

فإن المضلعات متطابقات

٥) المضلعات المتطابقات هما مضلعات متشابهات ومعامل التشابه = ١

٦) كل مضلعين متطابقين فهما متشابهين وليس كل مضلعين متشابهين يكونان متطابقان

٧) المضلعات المتشابهات لثالث متشابهات

٨) كل المضلعات المنتظمة التي لها نفس العدد من الأضلاع تكون متشابهة

**مثلاً**

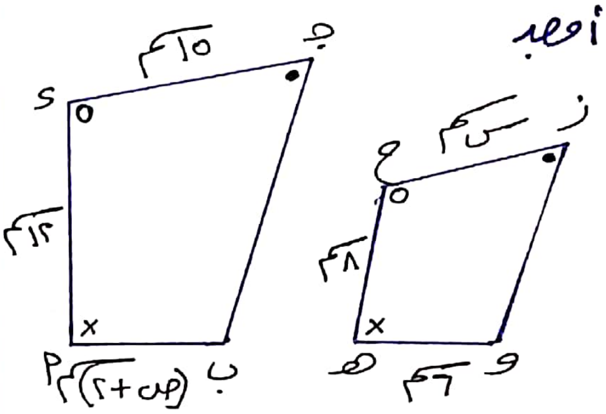
كل المربعات متشابهة
كل المثلثات متساوية الأضلاع متشابهة
كل الخماسي المنتظم متشابه
وهكذا

**٩** إذا كان معامل التشابه (١) فإن المضلعان يكونان متطابقان

**١٠** النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين = النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيهما

**مثال ١** المضلع أ ب جـ د ~ المضلع هـ و ز ح

أوجد



**١** معامل تشابه أ ب جـ د للمضلع هـ و ز ح

**٢** قيمة كلاً من س، ص

**الحل**

أ ب جـ د ~ هـ و ز ح

$$\frac{أب}{هـو} = \frac{ب جـ}{وز} = \frac{جـ د}{ز ح} = \frac{أ د}{هـ ح}$$

$$\frac{ص+٢}{٦} = \frac{ب جـ}{وز} = \frac{١٥}{س} = \frac{١٢}{٨} = ك$$

$$\therefore ك = \frac{١٢}{٨} = \boxed{\frac{٣}{٢}}$$

$$\therefore \frac{١٥}{س} = \frac{١٢}{٨}$$

$$\therefore س = \frac{١٥ \times ٨}{١٢} = \boxed{١٠ \text{ سم}}$$

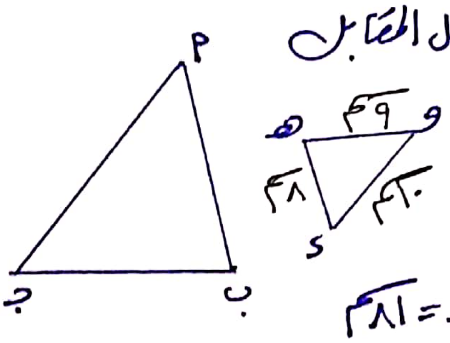
$$، \therefore \frac{ص+٢}{٦} = \frac{١٢}{٨}$$

$$\therefore (ص+٢) = \frac{١٢ \times ٦}{٨}$$

$$ص+٢ = ٩ \quad \therefore ص = ٩-٢$$

$$\therefore ص = \boxed{٧ \text{ سم}}$$

**مثال ٢** في الشكل المقابل



Δ أ ب جـ ~ Δ د هـ و

محيط المثلث أ ب جـ = ٨١ سم

أوجد أطوال أضلاع Δ أ ب جـ

**الحل**

∴ محيط Δ أ ب جـ = ٨١ سم

، محيط Δ (د هـ و) = (٨ + ٩ + ١٠) = ٢٧ سم

$$\frac{\text{محيط أ ب جـ}}{\text{محيط د هـ و}} = \frac{٨١}{٢٧} = ٣$$

$$\therefore \frac{أ ب}{د هـ} = \frac{ب جـ}{هـ و} = \frac{أ جـ}{د و} = ٣$$

$$\frac{أ ب}{٨} = \frac{ب جـ}{٩} = \frac{أ جـ}{١٠} = ٣$$

$$\therefore أ ب = ٣ \times ٨ = \boxed{٢٤ \text{ سم}}$$

بـ جـ = ٣ × ٩ = **٢٧ سم**

أ جـ = ٣ × ١٠ = **٣٠ سم**

## مثال ٣

المضلع أ ب جـ د ~ المضلع س ص ع ل
فإذا كان أ ب = ٣٢ سم
، ب جـ = ٤٠ سم ، س ص = ٣م − ١
، ص ع = ٣م + ١ فأوجد قيمة م العددية

### الحل

∵ أ ب جـ د ~ س ص ع ل

أ ب / س ص = ب جـ / ص ع

٣٢ / (٣م − ١) = ٤٠ / (٣م + ١)

٣٢ (٣م + ١) = ٤٠ (٣م − ١)

٩٦م + ٣٢ = ١٢٠م − ٤٠

٩٦م − ١٢٠م = − ٤٠ − ٣٢

− ٢٤م = − ٧٢

∴ م = −٧٢ / −٢٤ = **٣**

## مثال ٤

مستطيل بعداه ١٠ سم ، ٦ سم
أوجد محيط ومساحة مستطيل
آخر إذا كان معامل التشابه = ٣

### الحل

∵ معامل التشابه = ٣ > ١

∴ المستطيل المطلوب تكبير للمعطى

∵ طول الأول / ١٠ = عرض الأول / ٦ = ٣

∴ طول المستطيل = ٣ × ١٠ = **٣٠ سم**

وعرض المستطيل = ٣ × ٦ = **١٨ سم**

محيط المستطيل = (الطول + العرض) × ٢

= ٢ × (٣٠ + ١٨) = **٩٦ سم**

مساحة المستطيل = الطول × العرض

= ٣٠ × ١٨ = **٥٤٠ سم²**

## مثال ٥

أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ٤ سم
، ب جـ = ٥ سم ، أ جـ = ٨ سم
أوجد أطوال أضلاع مثلث آخر مشابه له
إذا كان معامل التشابه = ٠,٧

### الحل

∵ معامل التشابه ك = ٠,٧ < ١

∴ المثلث المطلوب تصغير للمثلث أ ب جـ

نفرض أنه △ س ص ع ~ △ أ ب جـ

∴ س ص / أ ب = ص ع / ب جـ = س ع / أ جـ = ٠,٧

∵ $\frac{س ص}{٤} = \frac{ص ع}{٥} = \frac{س ع}{٨} = ٠,٧$

∴ س ص = ٤ × ٠,٧ = $\boxed{٢,٨ \text{ سم}}$

، ص ع = ٥ × ٠,٧ = $\boxed{٣,٥ \text{ سم}}$

، س ع = ٨ × ٠,٧ = $\boxed{٥,٦ \text{ سم}}$

## اختر

**١** لكي يتشابه المضلعان م١ ، م٢ يكون كافياً الحصول على ----

(أ) زواياهما المتناظرة متساوية في القياس فقط.

(ب) أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة فقط.

(ج) (أ) ، (ب) معاً.

(د) مفيش حاجة من اللي فات

**٢** لكي يتشابه المعينان أ ب جـ د ، س ص ع ل يكون كافياً الحصول على ----

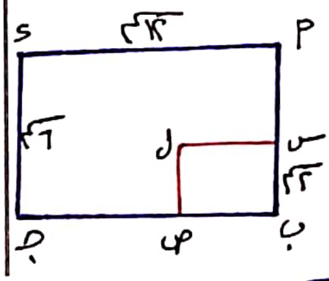
(أ) ق(∠أ) = ٦٠° ، ق(∠ص) = ١٢٠° فقط

(ب) محيط المعين أ ب جـ د = ٢ محيط المعين س ص ع ل

(ج) (أ) ، (ب) معاً

(د) الإجابة تونسي

**٣** في الشكل المقابل




المستطيل أ ب جـ د ~ س ب ص ل

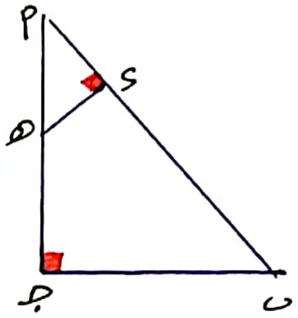
فإن طول ص جـ = ---- سم

(أ) ٦ (ب) ٨ (ج) ١٠ (د) ١١

∵ $\frac{س ب}{د جـ} = \frac{ب ص}{أ د}$ ، $\frac{٢}{٦} = \frac{ب ص}{١٢}$

∴ ب ص = $\frac{٢ \times ١٢}{٦}$ = ٤ سم ∴ ص جـ = ٨ سم

**٤** في الشكل المقابل




∆ أ ب جـ ~ ∆ أ هـ د

وكان ق(∠ب) = ٣س + ١٠°

، ق(∠أهـد) = س + ٣٠°

فإن ق(∠أ) = ----°

(أ) ٥٠° (ب) ٤٠° (ج) ٣٠° (د) ٦٠°

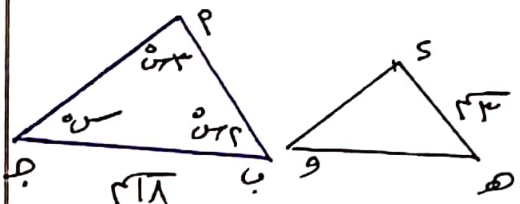
من تعريف التشابه ق(∠ب) = ق(∠أهـد)

∴ ٣س + ١٠ = س + ٣٠

∴ ٢س = ٢٠ ∴ س = ١٠°

∴ ق(∠ب) = ٤٠° ∴ ق(∠أ) = ٥٠°

**٥**




إذا كان ∆ أ ب جـ ~ ∆ د هـ و

فإن طول و هـ = ---- سم

(أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٦ (د) ٨

فيه أكثر من حل

∆ أ ب جـ قياسات زواياه تدل أنه قائم في أ

وفيه ق(∠جـ) = ٣٠° ∴ الضلع المقابل لها نصف الوتر

وفي ∆ د هـ و ∴ د هـ = $\frac{١}{٢}$ هـ و

∴ هـ و = ٦ سم

# الواجب

## ١ أكمل

١) يتشابه المضلعان إذا ........ ، ........

٢) كل المضلعات المتطابقة تكون ........

٣) المضلعان المشابهان لثالث ........

٤) إذا كان معامل التشابه ١ كان المضلعان ........

٥) مضلعان متشابهان النسبة بين ضلعين ٣ : ٥ فإن النسبة بين محيطيهما

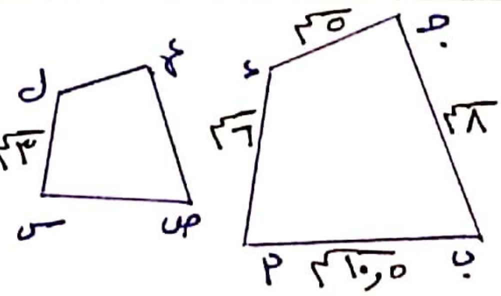
٦) كل المربعات تكون ........

٧) المضلعات المنتظمة التي لها نفس العدد من الأضلاع تكون ........

٨) النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين = النسبة بين ........

## ٢

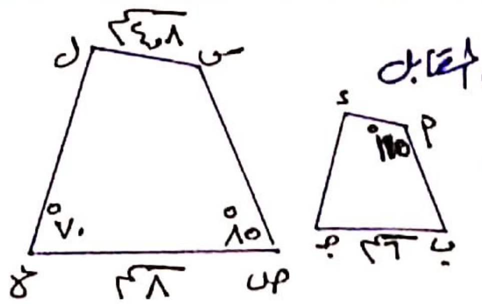
أب جـ د ~ س ص ع ل




باستخدام الأطوال المبينة على الرسم أوجد طول $\overline{س ص}$ ، $\overline{ص ع}$ ، $\overline{ع ل}$

## ٣

من الشكل المقابل ق(∠أ) = ١١٥°




احسب ق(∠س ل ع) وطول $\overline{أد}$

وإذا كان محيط المضلع أب جـ د = ١٩٫٥ سم

احسب محيط المضلع س ص ع ل

## ٤

△ أب جـ فيه أب = ٥ سم ، ب جـ = ٦ سم ، أ جـ = ٩ سم أوجد أطوال أضلاع مثلث مشابه له إذا كان معامل التشابه = ٢

## ٥

مستطيلان متشابهان بعدا الأول ٨ سم ، ١٢ سم ومحيط الثاني = ٣٠ سم أوجد بعدا المستطيل الثاني ومساحته

## ٦

إذا كان أب جـ د ~ س ص ع ل

أكمل

١) $\frac{أب}{ب جـ} = \frac{....}{ص ع}$

٢) أب × ع ل = س ص × ....

٣) ق(∠ب) = ق(∠...)

٤) $\frac{محيط ...}{محيط ...} = \frac{س ص}{أب}$

واحد ومراته مابيتكلموش

مراته جابت ورقه وكتبتله : انا عايزه اروح عند أهلي

كتبلها : مفيش مرواح

راحت جابت ورقه كبيره وكتبتله : انا بقولك عايزه اروح عند أهلي

كتبلها : مفيش مرواح وماتعليش صوتك عليا تاني :D

# الدرس الثانى : تشابه المثلثات

فى الدرس ده هندرس حالة واحدة فقط

## الحالة الأولى

زاويتان

يتشابه المثلثان إذا تطابقت زاويتان من أحدهما مع نظائرهما فى المثلث الآخر

## ملاحظات

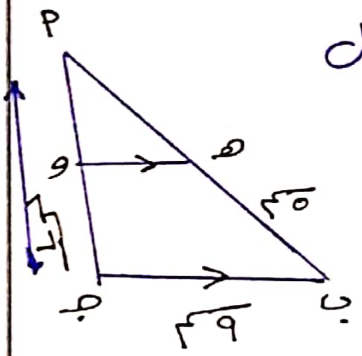
١ فى المثلث القائم
محتاجين زاوية حادة

٢ فى المثلث المتساوى الساقين
محتاجين زاوية حادة مع زاوية قاعدة
أو زاوية الرأس مع زاوية الرأس

٣ فى المثلث المتساوى الأضلاع
محتاجين ولا حاجة بس
لأنهم متشابهان فاكر ملاحظات الدرس اللى فات

## مسائل الفكرة الأولى

**مثال ١** فى الشكل المقابل




△ أ ب جـ فيه
أجـ = $\frac{1}{2}$ أب = ٦ سم
، ب جـ = ٩ سم
، هـ ب = ٥ سم
، $\overline{هـو} \parallel \overline{بجـ}$

١ أثبت أن △ أهـو ~ △ أ ب جـ

٢ أوجد طول $\overline{هـو}$ ، $\overline{جـو}$

### الحل

△△ أهـو ، أ ب جـ فيهما

ق($\hat{أهـو}$) = ق($\hat{ب}$) بالتناظر

ق($\hat{أوهـ}$) = ق($\hat{جـ}$) بالتناظر

ق($\hat{أ}$) مشتركة

∴ △ أهـو ~ △ أ ب جـ # أولاً

∵ أجـ = ٦ سم ، $\frac{1}{2}$ أب = ٦ سم

∴ أب = ١٢ سم ، ∵ ب هـ = ٥ سم

∴ أهـ = ٧ سم

من التشابه $\frac{أهـ}{أب} = \frac{هـو}{بجـ} = \frac{أو}{أجـ}$

$\frac{أو}{٦} = \frac{هـو}{٩} = \frac{٧}{١٢}$

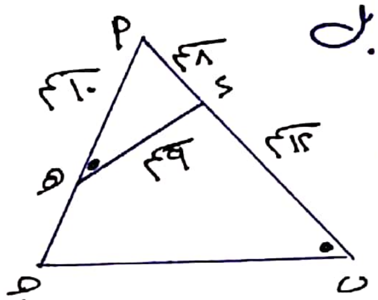
∴ هـ و = $\frac{٩ \times ٧}{١٢}$ = ٥,٢٥ سم

، أ و = $\frac{٧ \times ٦}{١٢}$ = ٣,٥ سم

، ∵ أ هـ = ٦ سم ، أ و = ٣,٥ سم

∴ هـ و = ٦ − ٣,٥ = ٢,٥ سم

**مثال ٢** في الشكل المقابل




ق(∠أ هـ ء) = ق(∠أ ب جـ)

١) اثبت أن △ أ ب جـ ~ △ أ هـ ء

٢) أوجد طول $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{هـ جـ}$

**الحل**

△△ أ ب جـ ، أ هـ ء فيهما

ق(∠أ ب جـ) = ق(∠أ هـ ء)

(∠أ) زاوية مشتركة

∴ △ أ ب جـ ~ △ أ هـ ء

∴ $\frac{أ ب}{أ هـ} = \frac{ب جـ}{هـ ء} = \frac{أ جـ}{أ ء}$

$\frac{٢٠}{١٠} = \frac{ب جـ}{٩} = \frac{أ جـ}{٨}$

∴ ب جـ = $\frac{٢٠ \times ٩}{١٠}$ = ١٨ سم

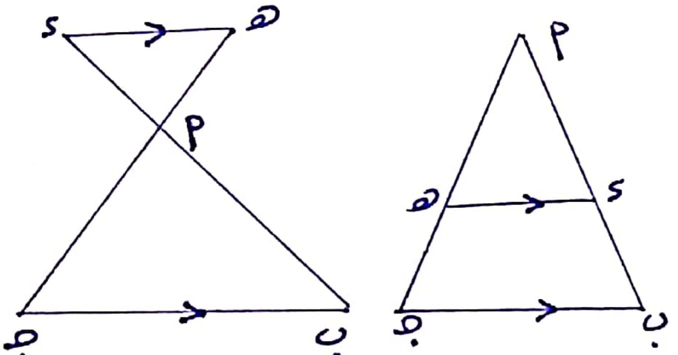
، أ جـ = $\frac{٢٠ \times ٨}{١٠}$ = ١٦ سم

∴ جـ هـ = ١٦ − ١٠ = ٦ سم

## الفكرة الثانية

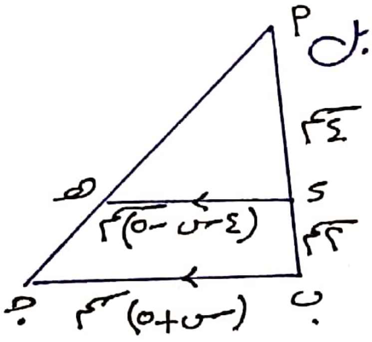
### نتيجة (١)

إذا رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين أو المستقيمين الحاملين لهما فإن المثلث الناتج يشابه المثلث الأصلي.




△ أ ء هـ ~ △ أ ب جـ

**مثال ٣** في الشكل المقابل




اثبت أن △ أ ب جـ ~ △ أ ء هـ

ثم أوجد قيمة س

**الحل**

△△ أ ء هـ ، أ ب جـ فيهما

ق(∠أ ء هـ) = ق(∠ب) بالتناظر

ق(∠أ هـ ء) = ق(∠جـ) بالتناظر

(∠أ) مشتركة

∴ Δ أءهـ ∼ Δ أبجـ

∴ $\frac{\text{أء}}{\text{أب}} = \frac{\text{ءهـ}}{\text{بجـ}}$

∴ $\frac{٤}{٦} = \frac{٤\text{س} - ٥}{\text{س} + ٥}$

٤(س + ٥) = ٦(٤س − ٥)

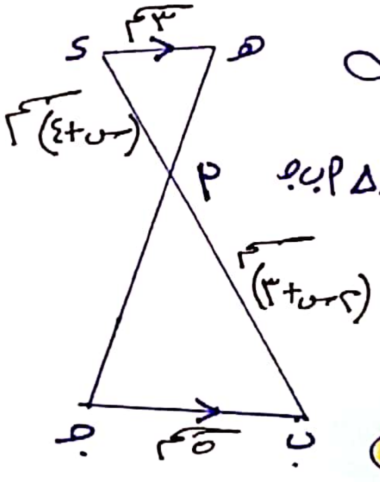
٤س + ٢٠ = ٢٤س − ٣٠

٤س − ٢٤س = −٣٠ − ٢٠

−٢٠س = −٥٠

∴ س = $\frac{-٥٠}{-٢٠}$ = ٢,٥

**مثال ٤** في الشكل المقابل




اثبت أن Δ أءهـ ∼ Δ أبجـ

ثم اوجد قيمة س

**الحل**

Δ Δ أءهـ ، أبجـ فيهما

ق(ءˆ) = ق(بˆ) بالتبادل

ق(هـˆ) = ق(جـˆ) بالتبادل

∴ Δ أءهـ ∼ Δ أبجـ

$\frac{\text{أء}}{\text{أب}} = \frac{\text{ءهـ}}{\text{بجـ}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{أجـ}}$

$\frac{\text{س} + ٤}{٢\text{س} + ٣} = \frac{٣}{٥}$

٥(س + ٤) = ٣(٢س + ٣)

٥س + ٢٠ = ٦س + ٩

٥س − ٦س = ٩ − ٢٠

−س = −١١

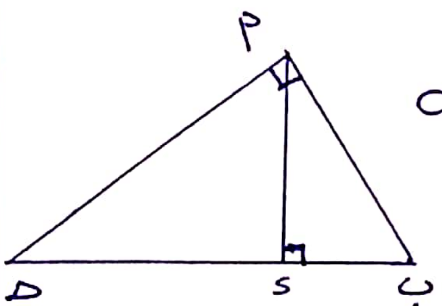
∴ س = ١١

## الفكرة الثالثة

**نتيجة (٢)** فاكرين إقليدس

إذا رسم من رأس المثلث القائم عمود على الوتر انقسم المثلث إلى مثلثين متشابهين وكلاهما يشابه المثلث الأصلي.

في الشكل المقابل




Δ ءبأ ∼ Δ ءأجـ ∼ Δ أبجـ

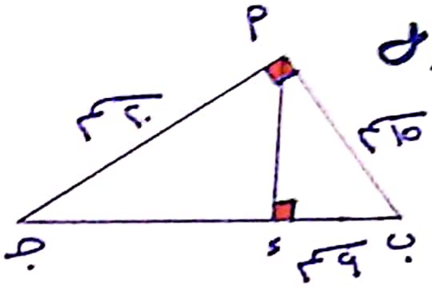
ويكون

* (أب)$^2$ = بء × بجـ   * (أجـ)$^2$ = جـء × جـب

* (أء)$^2$ = ءب × ءجـ   * أء × جـب = أب × أجـ

## مثال ٥

في الشكل المقابل




أوجد طول $\overline{أء}$ ، $\overline{ءجـ}$

### الحل

∵ △ أ ب جـ قائم الزاوية في أ
وفيه $\overline{أء} \perp \overline{بجـ}$

∴ △ ء ب أ ~ △ ء أ جـ

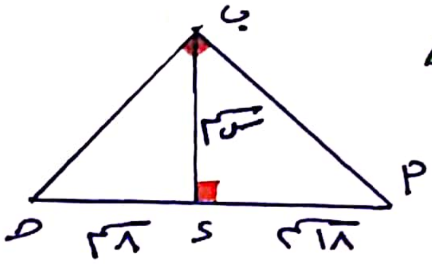
∴ $\frac{بء}{أء} = \frac{أب}{أجـ} = \frac{أء}{ءجـ}$

$\frac{٩}{أء} = \frac{١٥}{٢٠} = \frac{أء}{ءجـ}$

∴ أء = $\frac{٩ \times ٢٠}{١٥}$ = ١٢ سم

ءجـ = $\frac{١٢ \times ٢٠}{١٥}$ = ١٦ سم

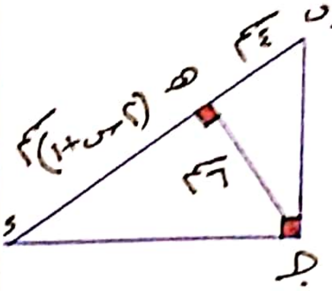
## تدريب




أوجد قيمة س العددية

## مثال ٦

أوجد قيمة س




### الحل

∵ △ جـ ء ب قائم الزاوية في جـ وفيه جـهـ ⊥ بء

∴ △ هـ ء جـ ~ △ هـ جـ ب

∴ $\frac{هـء}{هـجـ} = \frac{هـجـ}{هـب}$ ∴ $(هـجـ)^٢$ = هـء × هـب

∴ $(٦)^٢$ = ٤ × (٢س + ١)

٣٦ = ٨س + ٤

∴ ٨س = ٣٢ ∴ س = ٤

## مثال ٧

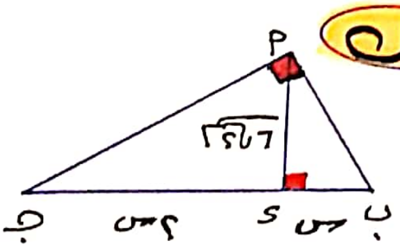
△ أ ب جـ قائم الزاوية في أ ، رسم $\overrightarrow{أء} \perp \overline{بجـ}$ يقطعه في ء

وإذا كان $\frac{بء}{ءجـ} = \frac{١}{٢}$

، أء = ٦$\sqrt{٢}$ سم

فأوجد طول $\overline{بء}$ ، $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$

### الحل




∵ $\frac{بء}{ءجـ} = \frac{١}{٢}$

نفرض أن بء = س سم ، ءجـ = ٢س سم

∵ △ أ ب جـ قائم الزاوية في أ وفيه أء ⊥ بجـ ∴ △ ء ب أ ~ △ ء أ جـ

∴ $(أء)^٢$ = بء × ءجـ

∴ $(٦\sqrt{٢})^٢$ = س × ٢س

∴ ٢$س^٢$ = ٧٢

∴ $س^٢$ = $\frac{٧٢}{٢}$ = ٣٦

∴ س = ٣٦√ = ٦√٣

∴ ب د = ٦√٣ ، د جـ = ١٢√٣

∴ ب جـ = ١٨√٣

∴ (أب)² = ب د × ب جـ = ٦ × ١٨

∴ أب = ٦√٣

∴ (أجـ)² = جـ د × جـ ب = ١٢ × ١٨

∴ أجـ = ٦√٦

## تذكر أن

١ الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة تكون قائمة

٢ قياس الزاوية المحيطية = ½ قياس المركزية

٣ قياس الزاوية المماسية = قياس المحيطية المرسومة معها على نفس القوس

٤ المماس للدائرة يكون عمودي على نصف القطر من نقطة التماس

٥ الزوايا المحيطية التي تحصر نفس القوس أو أقواس متساوية تكون متساوية في القياس

٦ في الشكل الرباعي الدائري

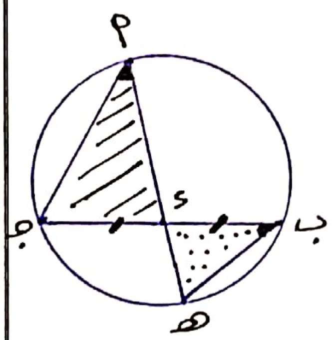
* كل زاويتين متقابلتين متكاملتين
* قياس الزاوية الخارجية عند أي رأس = قياس الزاوية الداخلة المقابلة لهذا الرأس.

---

**مثال ٨**

أهـ ، ب جـ وتران في دائرة متقاطعان في د حيث د منتصف ب جـ أثبت أن (ب د)² = أد × د هـ

**الحل**




العمل نرسم أجـ ، ب هـ

البرهان

△△ أ د جـ ، ب د هـ

فيهما { ق(أ^) = ق(ب^) محيطيتان على نفس القوس ، ق(أ د^ جـ) = ق(ب د^ هـ) بالتقابل بالرأس

∴ △ أ د جـ ~ △ ب د هـ

وينتج أن أد / د ب = د جـ / د هـ

∴ ب د × د جـ = أد × د هـ

∴ ، ب د = د جـ

∴ ب د × ب د = أد × د هـ

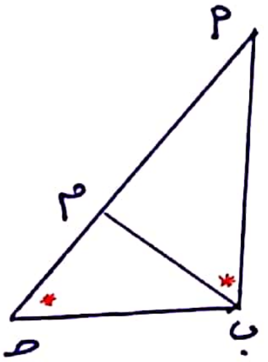
(ب د)² = أد × د هـ #

## مثال (٩)

في Δ أ ب جـ : أ جـ > أ ب ، م ∈ أ جـ

حيث ق(∠أ ب م) = ق(∠جـ)

اثبت أن $(أ ب)^2$ = أ م × أ جـ




### الحل

ΔΔ أ ب م ، أ جـ ب

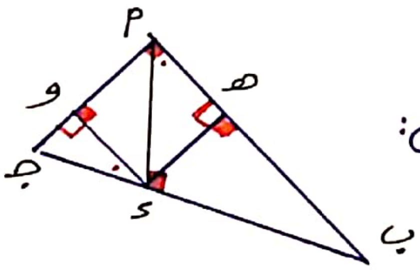
فيهما { (∠أ) مشتركة.
ق(∠أ ب م) = ق(∠جـ)

∴ Δ أ ب م ~ Δ أ جـ ب

∴ $\frac{أ ب}{أ جـ} = \frac{ب م}{جـ ب} = \frac{أ م}{أ ب}$

∴ $(أ ب)^2$ = أ م × أ جـ #

## مثال (١٠)




في الشكل المقابل:

Δ أ ب جـ قائم الزاوية في أ

، أ د ⊥ ب جـ ، د هـ ⊥ أ ب

، د و ⊥ أ جـ

اثبت أن

(أ) Δ أ د هـ ~ Δ جـ د و

(ب) مساحة المستطيل

أ هـ د و = $\sqrt{أ هـ × هـ ب × أ و × و جـ}$

### الحل

∵ (∠جـ) تتمم (∠د أ جـ) في Δ أ د جـ

، (∠هـ أ د) تتمم (∠د أ جـ) لأنها قائمة

∴ ق(∠جـ) = ق(∠هـ أ د) ← (١)

، ق(∠أ هـ د) = ق(∠د و جـ) = ٩٠° ← (٢)

من (١) ، (٢)

∴ Δ أ هـ د ~ Δ د و جـ # أولاً

∵ $(د هـ)^2$ = أ هـ × هـ ب

∴ د هـ = $\sqrt{أ هـ × هـ ب}$

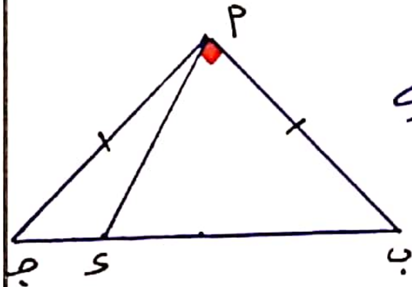
، ∵ $(د و)^2$ = أ و × و جـ

∴ د و = $\sqrt{أ و × و جـ}$

∴ مساحة المستطيل أ هـ د و = د هـ × د و

= $\sqrt{أ هـ × هـ ب × أ و × و جـ}$ # ثانياً

## مثال (١١)




Δ أ ب جـ منفرج الزاوية

في أ ، أ ب = أ جـ

، رسم أ د ⊥ أ ب

وتقطع ب جـ في د

اثبت أن ٢$(أ ب)^2$ = ب د × ب جـ

### الحل

العمل: نرسم أ هـ ⊥ ب جـ

البرهان: ∵ أ ب = أ جـ ، أ هـ ⊥ ب جـ

∴ ب هـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ ← (٢)

، ∵ $(أب)^2$ = ب هـ × ب ء ← (٢)

∴ من (١) ، (٢)

∴ $(أب)^2$ = $\frac{1}{2}$ ب جـ × ب ء

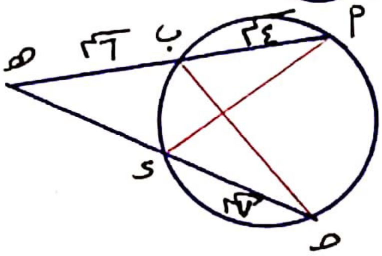
∴ ٢$(أب)^2$ = ب جـ × ب ء # .

## مثال (١٢)

$\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{ءهـ}$ وتران فى دائرة ، $\overleftrightarrow{أب}$ ∩ $\overleftrightarrow{ءهـ}$ = {هـ}
حيث هـ خارج الدائرة ، أب = ٤ سم
، ء جـ = ٧ سم ، ب هـ = ٦ سم

اثبت أن △ أ ء هـ ~ △ جـ ب هـ
ثم أوجد طول جـ هـ

الحل




∵ (أ̂) ، (جـ̂) تحصران نفس القوس (ب ء)

∴ ق(أ̂) = ق(جـ̂)

، ∵ (هـ̂) مشتركة

∴ △ أ ء هـ ~ △ جـ ب هـ # أولاً .

∵ $\frac{ءهـ}{بهـ} = \frac{أهـ}{جـهـ}$ ∴ $\frac{ءهـ}{٦} = \frac{١٠}{٧ + ءهـ}$

∴ ٧ ء هـ + $(ءهـ)^2$ = ٦٠

$(ءهـ)^2$ + ٧ ء هـ − ٦٠ = ٠

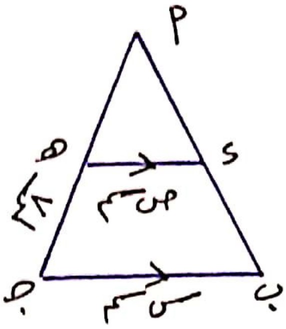
(ء هـ + ١٢)(ء هـ − ٥) = ٠

ء هـ = −١٢ مرفوض ∴ ء هـ = ٥ سم

∴ جـ هـ = ١٢ سم # ثانياً .

---

**١٣** فى الشكل المقابل




إذا كانت $\frac{س - ص}{س + ص} = \frac{٢}{٧}$

فإن أهـ = ....... سم

(أ) ١٦ (ب) ١٥ (جـ) ١٢ (ء) ١٠

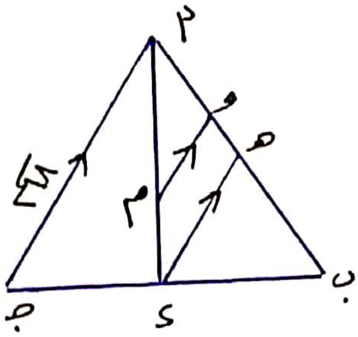
∵ $\frac{س}{ص} = \frac{أجـ}{أهـ}$ ∴ س = ك (أهـ + ٨)
ص = ك أهـ

∴ $\frac{ك(أهـ+٨) - ك أهـ}{ك(أهـ+٨) + ك أهـ} = \frac{٢}{٧}$ ∴ $\frac{٨}{٢أهـ+٨} = \frac{٢}{٧}$

٤ أهـ + ١٦ = ٥٦ ، ٤ أهـ = ٤٠ ، أهـ = ١٠ سم

---

**١٤**




فى الشكل المقابل
إذا كانت أجـ = ١٨ سم
م نقطة تلاقى
المتوسطات △ أ ب جـ
فإن طول وم = ....... سم

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (ء) ٨

∵ ء هـ = $\frac{1}{2}$ أجـ = ٩ سم (قطعة مرسومة بين منتصفى ضلعين)

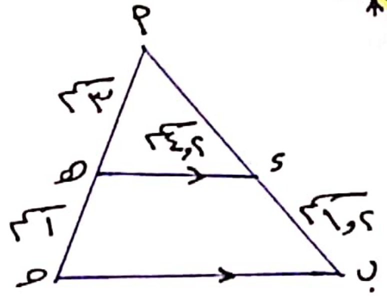
∵ م نقطة تلاقى المتوسطات

∴ $\frac{أم}{أء} = \frac{٢}{٣}$ ∴ $\frac{وم}{هـء} = \frac{٢}{٣}$

$\frac{وم}{٩} = \frac{٢}{٣}$ ∴ وم = ٦ سم

## الواجب

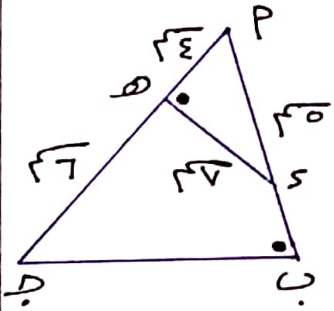
**١**




(أ) اثبت أن △ أ د هـ ~ △ أ ب جـ

(ب) أوجد طول $\overline{أد}$ ، $\overline{بد}$

**٢**

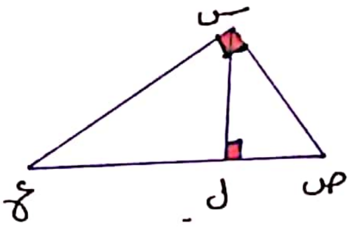



اثبت أن

(أ) △ أ د هـ ~ △ أ جـ ب

(ب) أوجد طول $\overline{دب}$ ، $\overline{بجـ}$

**٣** أكمل




△ ل ص س ~ △ ... ~ △ ...

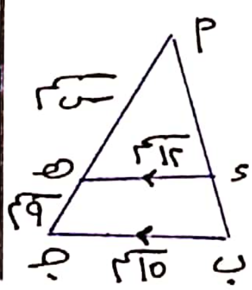
(س ص)$^2$ = ... × ...

(س ع)$^2$ = ... × ...

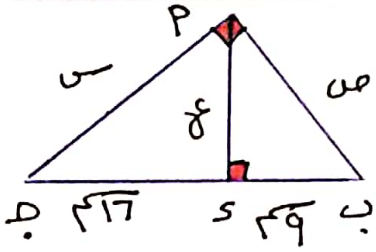
(س ل)$^2$ = ... × ...

س ل × ص ع = ... × ...

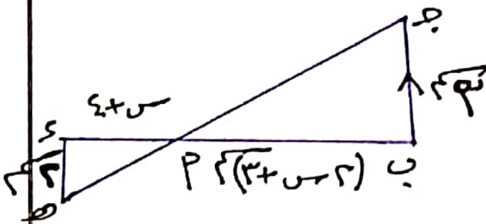
**٤** أوجد قيمة س




**٥** أوجد قيمة س ، ص ، ع




**٦** اثبت أن △ أ ب جـ ~ △ أ د هـ ثم أوجد قيمة س



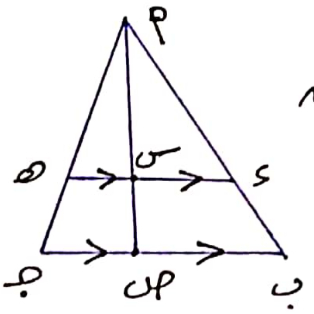

**٧** $\overline{أب}$ ، $\overline{دجـ}$ وتران في دائرة ، $\overleftrightarrow{أب} \cap \overleftrightarrow{دجـ} = \{هـ\}$ حيث هـ خارج الدائرة ، أب = ٤ سم ، د جـ = ٧ سم
ب هـ = ٦ سم
اثبت أن △ أ د هـ ~ △ جـ ب هـ ثم أوجد طول $\overline{جـ هـ}$

**٨** أ ب جـ د مستطيل رسم $\overleftrightarrow{دو} \perp \overline{أجـ}$
فقطعه في هـ ، $\overline{بجـ}$ في و
اثبت أن مساحة المستطيل أ ب جـ د = $\sqrt{أهـ \times أجـ \times دهـ \times دو}$

**٩**

(أ) اذكر ثلاث أزواج من المثلثات المتشابهة

(ب) اثبت أن




$$\frac{د س}{ب ص} = \frac{س هـ}{ص جـ} = \frac{د هـ}{ب جـ}$$

# الدرس الثالث : تابع تشابه المثلثات

هندرس الحالتين الباقيين

## الحالة الثانية

تناسب الأضلاع الثلاثة

يتشابه المثلثان إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة منهما

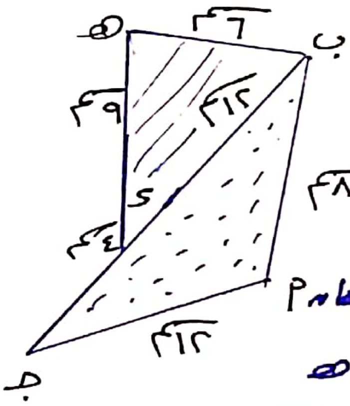
### مهم

إزاى أعرف أكتب المثلثين المتشابهين

امشي من الضلع الأصغر للأوسط للأكبر في المثلث الأول والثاني بنفس ترتيب الحروف.

### مثال 1

في الشكل المقابل اثبت أن




المثلثين المظللين متشابهان

$\overrightarrow{بد}$ ينصف $\hat{أبهـ}$

**الحل**

رتب أضلاع المثلثات تصاعدياً وانت ترتاح

$\frac{أب}{بهـ} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ ، $\frac{أد}{هـد} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

$\frac{بجـ}{بد} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$

$\therefore \frac{أب}{بهـ} = \frac{بجـ}{بد} = \frac{أجـ}{دهـ}$

$\therefore \triangle$ أبجـ $\sim \triangle$ دبهـ # أولاً

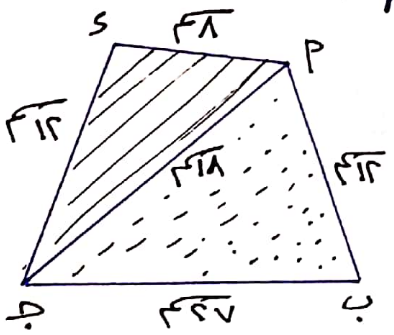
وينتج من التشابه أن

ق$(\hat{أبجـ})$ = ق$(\hat{هـبد})$

$\therefore \overrightarrow{بد}$ ينصف $(\hat{أبهـ})$ # ثانياً.

### مثال 2

في الشكل المقابل اثبت أن




(1) المثلثين متشابهان

(2) $\overrightarrow{جـأ}$ ينصف $(\hat{بجـد})$

**الحل**

$\frac{أب}{أد} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ ، $\frac{أجـ}{دجـ} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$

$\frac{بجـ}{أجـ} = \frac{27}{18} = \frac{3}{2}$

$\therefore \frac{بأ}{أد} = \frac{أجـ}{دجـ} = \frac{جـب}{جـأ} = \frac{3}{2}$

$\therefore \triangle$ بأجـ $\sim \triangle$ أدجـ # أولاً

وينتج أن ق$(\hat{أجـب})$ = ق$(\hat{دجـأ})$

$\therefore \overrightarrow{جـأ}$ ينصف $(\hat{بجـد})$ # ثانياً

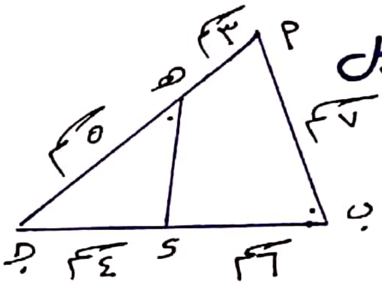
## الحالة الثالثة

زاويه وضلعيه بتوعها

يتشابه المثلثان إذا طابقت زاوية نظيرتها فى المثلث الآخر، وتناسبت أطوال الأضلاع التى تحتويها هاتان الزاويتان

### مثال ٣

فى الشكل المقابل




١ أثبت أن △ أب جـ ~ △ د هـ جـ

٢ أوجد طول د هـ

٣ أثبت أن الشكل أ ب د هـ رباعى دائرى

**الحل**

∵ جـ ب / جـ هـ = ١٠ / ٥ = ٢ ، جـ أ / جـ د = ٨ / ٤ = ٢

∴ △△ أ ب جـ ، د هـ جـ فيهما:
- (جـ^) مشتركة
- جـ ب / جـ هـ = جـ أ / جـ د = ٢

∴ △ أ ب جـ ~ △ د هـ جـ #

وينتج أن أب / د هـ = ب جـ / هـ جـ

٧ / د هـ = ١٠ / ٥

∴ د هـ = ٧×٥ / ١٠ = ٣,٥ سم ثانياً

∵ △ أ ب جـ ~ △ د هـ جـ

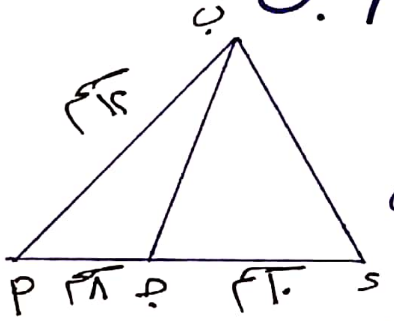
∴ ق(جـ هـ^ د) = ق(ب^)

، ∵ (جـ هـ^ د) خارجة عن الشكل الرباعى = الداخلة المقابلة للمجاورة لها

∴ الشكل أ ب د هـ رباعى دائرى.

### مثال ٤

فى الشكل المقابل




أثبت أن

١ △ أ ب جـ ~ △ أ د ب

٢ أب مماس للدائرة المارة بالنقط ب، جـ، د

**الحل**

△△ أ ب جـ ، أ د ب فيهما:
- (أ^) مشتركة ← ①
- أب / أد = ١٢ / ١٨ = ٢ / ٣
- أجـ / أب = ٨ / ١٢ = ٢ / ٣ ← ②

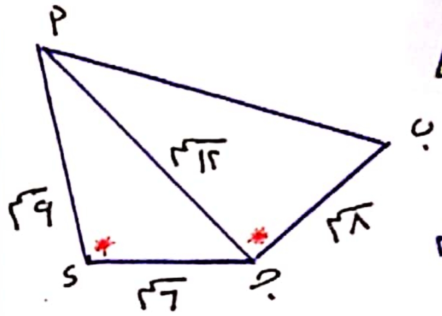
∴ △ أ ب جـ ~ △ أ د ب # أولاً

ومن التشابه ينتج أن ق(أ ب^ جـ) = ق(د^)

∴ أب مماس للدائرة المارة بالنقط ب، جـ، د # ثانياً.

## اختر

**(١)**




أب = .... سم

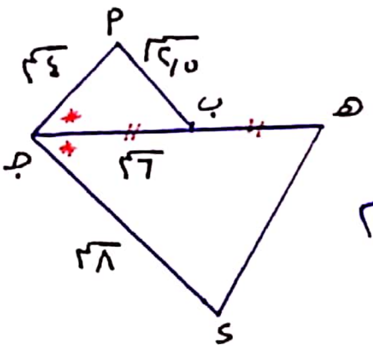
(أ) ١٢ (ب) ١٦ (جـ) ١٨ (د) ٢٠

تشابه زاوية وضلعين

$\frac{بجـ}{جد} = \frac{أب}{أجـ}$ ∴ $\frac{أب}{١٢} = \frac{٨}{٦}$ ∴ أب = ١٦

---

**(٢)** في الشكل المقابل ب منتصف جـهـ فإن دهـ = .... سم




(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

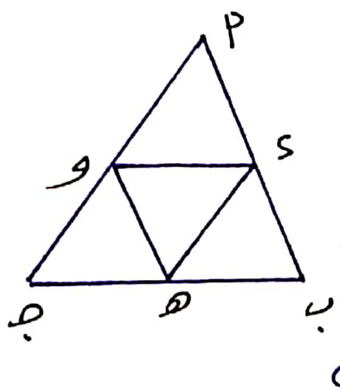
جـهـ = ١٢ سم

$\frac{جـهـ}{جـب} = \frac{جـد}{جـأ} = \frac{٢}{١} = \frac{هـد}{٢,٥}$

∴ هـد = ٥ سم

---

**(٣)** في الشكل المقابل لإثبات أن △أبجـ ~ △هـود يكون كافياً الحصول على




(أ) دو // بجـ فقط.

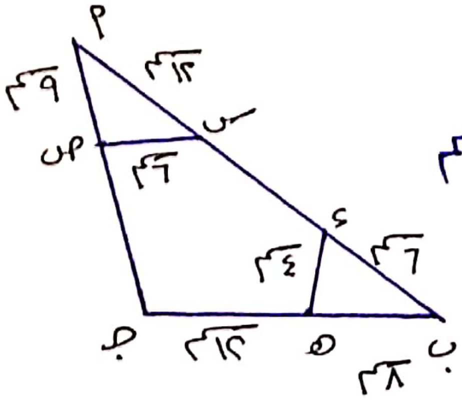
(ب) د، هـ، و منتصفات أب، بجـ، أجـ على الترتيب فقط.

(جـ) أ، ب معاً.

(د) ولا واحد مما سبق

---

**(٤)**




صجـ = .... سم

(أ) ٩ (ب) ١٠ (جـ) ١١ (د) ١٢

نلاحظ أن أضلاع △هـدب تتناسب مع أضلاع △سصأ

∴ △هـدب ~ △سصأ

∴ ق($\hat{أ}$) = ق($\hat{ب}$)

في △أبجـ الذي يكون متساوي الساقين

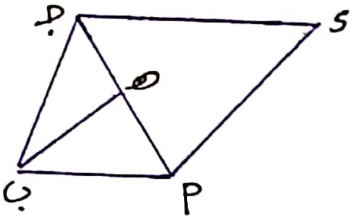
∴ أجـ = بجـ = ٢٠ سم

∴ صجـ = ٢٠ − ٩ = ١١ سم

**مثال ٥**

أ ب جـ د شكل رباعي ، هـ ∈ $\overline{\text{أ جـ}}$

بحيث $\frac{\text{أ جـ}}{\text{أ د}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{ب هـ}}$ ، $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{جـ د}}{\text{أ جـ}}$



أثبت أن

(١) $\overline{\text{جـ د}} \parallel \overline{\text{ب أ}}$

(٢) $\overline{\text{أ د}} \parallel \overline{\text{ب هـ}}$

**الحل**

(١) ∵ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{أ د}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{ب هـ}}$ ∴ $\boxed{\frac{\text{أ جـ}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{أ د}}{\text{ب هـ}}}$

انت فاكر إن من خواص التناسب

إن مقدم على مقدم = تالي على تالي صح؟

(٢) ، ∵ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{جـ د}}{\text{أ جـ}}$ ∴ $\boxed{\frac{\text{أ جـ}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{جـ د}}{\text{أ ب}}}$

من (١) ، (٢) ينتج أن

$\frac{\text{أ جـ}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{أ د}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{جـ د}}{\text{أ ب}}$

∴ Δ د جـ أ ~ Δ ب أ هـ

وينتج أن ق($\widehat{\text{أ جـ د}}$) = ق($\widehat{\text{هـ أ ب}}$) وهما

في وضع تبادل ∴ $\overline{\text{جـ د}} \parallel \overline{\text{ب أ}}$ # أولاً

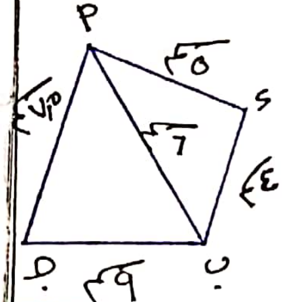
، ق($\widehat{\text{جـ أ د}}$) = ق($\widehat{\text{أ هـ ب}}$) وهما متبادلتان

∴ $\overline{\text{أ د}} \parallel \overline{\text{ب هـ}}$ # ثانياً

---

**الواجب**

**١** في الشكل المقابل

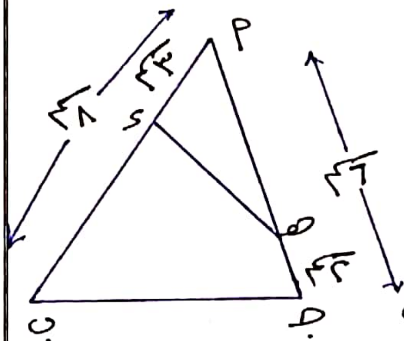


أثبت أن

(أ) Δ أ ب جـ ~ Δ د ب أ

(ب) $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ ينصف ($\widehat{\text{د ب جـ}}$)

**٢**

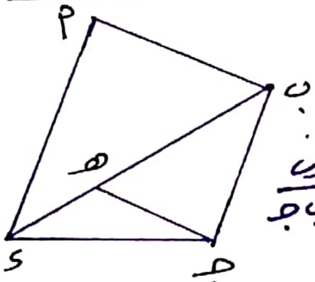


أثبت أن

(أ) Δ أ د هـ ~ Δ أ جـ ب

(ب) الشكل د هـ جـ ب رباعي دائري

**٣** إذا كان



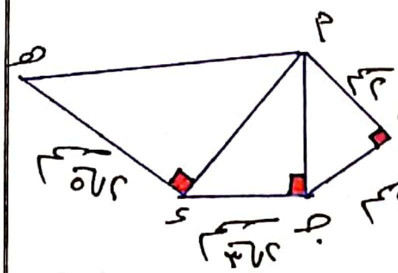
$\frac{\text{أ ب}}{\text{د أ}} = \frac{\text{جـ هـ}}{\text{ب هـ}}$ ، $\frac{\text{ب د}}{\text{أ د}} = \frac{\text{هـ ب}}{\text{ب جـ}}$

أثبت أن

(أ) $\overline{\text{أ د}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$

(ب) $\overline{\text{أ ب}} \parallel \overline{\text{جـ هـ}}$

**٤**



Δ أ ب جـ ~ Δ ...... ب

ومعامل التشابه = ......

**استراحة**

سؤال

البنص فيه كام نص ؟

الربع فيه كام ربع ؟

# الدرس الرابع : العلاقة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين

## نظرية (٣)

النسبة بين مساحتي مثلثين متشابهين تساوي مربع النسبة بين طولي أي ضلعين متناظرين فيهما.

## ملاحظات

١ النسبة بين محيطي مثلثين متشابهين = النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيهما

٢ النسبة بين مساحتي مثلثين متشابهين تساوي مربع النسبة بين طولي متوسطين متناظرين فيهما.

٣ النسبة بين مساحتي مثلثين مشتركين في القاعدة = النسبة بين ارتفاعيهما

٤ النسبة بين مساحتي مثلثين مشتركين في الارتفاع تساوي النسبة بين طولي قاعدتيهما

٥ النسبة بين مساحتي مضلعين متشابهين = مربع النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيهما

الضلعين — المحيط — المساحة

نفس النسبة

مربع النسبة

## الفكرة الأولى

تمرين أكمل

١ إذا كانت النسبة بين طولي ضلعين متناظرين في مضلعين متشابهين = ٢ : ٣ فإن النسبة بين محيطيهما = ٢ : ٣ والنسبة بين مساحتيهما = ٤ : ٩

٢ إذا كانت النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين ٣ : ٤ فإن النسبة بين مساحتيهما ٩ : ١٦

٣ إذا كانت النسبة بين مساحتي مضلعين متشابهين ٤ : ٢٥ فإن النسبة بين محيطيهما = ٢ : ٥

٤ إذا كانت النسبة بين مساحتي مضلعين متشابهين ٣ : ٤ فإن النسبة بين محيطيهما = $\sqrt{٣}$ : ٢

**مثال ٢**

إذا كان المضلع أ ب جـ د ~ المضلع أَ بَ جَ دَ ، $\frac{أب}{أَبَ} = \frac{١}{٣}$

فإن $\frac{م(\text{المضلع أ ب جـ د})}{م(\text{المضلع أَ بَ جَ دَ})} = (\frac{١}{٣})^٢ = \frac{١}{٩}$

$\frac{\text{محيط المضلع أ ب جـ د}}{\text{محيط المضلع أَ بَ جَ دَ}} = \frac{١}{٣}$

**مثال ٣**

إذا كان طولا ضلعين متناظرين في مضلعين متشابهين هما ١٢ سم ، ١٦ سم وكانت مساحة المضلع الأصغر = ١٣٥ سم² فأوجد مساحة المضلع الأكبر

**الحل**

$\because \frac{م(\text{المضلع الأصغر})}{م(\text{المضلع الأكبر})} = (\frac{١٢}{١٦})^٢ = \frac{٩}{١٦}$

$\because \frac{١٣٥}{م(\text{الأكبر})} = \frac{٩}{١٦}$

$\therefore$ مساحة المضلع الأكبر = ٢٤٠ سم²

**تدريب**

إذا كان طولا ضلعين متناظرين في مضلعين متشابهين ٢ : ٣ وكانت مساحة الأكبر ٩٠ سم² فأوجد مساحة الأصغر.

**مثال ٤**

مضلعان متشابهان مساحتاهما ١٠٠ سم² ، ٦٤ سم² فإذا كان محيط الأول = ٦٠ سم فأوجد محيط الثاني

**الحل**

$\because \frac{\text{مساحة المضلع الأول}}{\text{مساحة المضلع الثاني}} = \frac{١٠٠}{٦٤}$

$\therefore \frac{\text{محيط الأول}}{\text{محيط الثاني}} = \frac{١٠}{٨}$

$\therefore \frac{٦٠}{\text{محيط الثاني}} = \frac{١٠}{٨}$

$\therefore$ محيط المضلع الثاني = $\frac{٦٠ \times ٨}{١٠}$ = ٤٨ سم

**مثال ٥**

مضلعان متشابهان النسبة بين محيطيهما ٣ : ٢ ومجموع مساحتيهما ١٣٠ سم² أوجد مساحة كل منهما

**الحل**

$\because \frac{\text{مساحة الأول}}{\text{مساحة الثاني}} = (\frac{٣}{٢})^٢ = \frac{٩}{٤}$

وبفرض أن مساحة الأول ٩ س والثاني ٤ س

$\therefore$ مجموع مساحتيهما ١٣ س = ١٣٠

$\therefore$ س = ١٠

$\therefore$ مساحة المضلع الأول = ٩ × ١٠ = ٩٠ سم²

، مساحة المضلع الثاني = ٤ × ١٠ = ٤٠ سم²

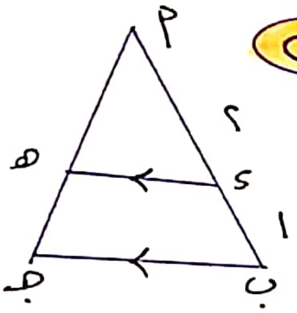
**تدريب** مضلعان متشابهان النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيهما ١ : ٣ فإذا كان الفرق بين مساحتيهما ٨٠ سم² فأوجد مساحة كل منهما

**الحل**

## الفكرة الثانية

**مثال ٦** أ ب جـ مثلث فيه د ∈ $\overline{أب}$ بحيث أد = ٢ ب د ، هـ ∈ $\overline{أجـ}$ حيث $\overline{ده}$ // $\overline{ب جـ}$ إذا كانت مساحة Δ أ د هـ = ٦٠ سم² أوجد مساحة شبه المنحرف د ب جـ هـ

**الحل**




∵ $\overline{ده}$ // $\overline{ب جـ}$

∴ Δ أ د هـ ~ Δ أ ب جـ

∵ النسبة بين أد : أب = ٢ : ٣

∴ النسبة بين مساحة Δ أ د هـ : مساحة Δ أ ب جـ

= ٤ : ٩

نفرض أن مساحة Δ أ د هـ = ٤ س

، مساحة Δ أ ب جـ = ٩ س

∵ ٤ س = ٦٠ ∴ س = ١٥

∴ مساحة Δ أ ب جـ = ١٥ × ٩ = ١٣٥ سم²

∵ م Δ أ د هـ = ٦٠ سم²

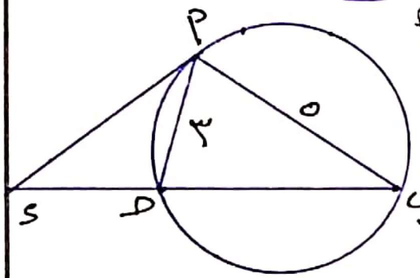
∴ مساحة شبه المنحرف (د ب جـ هـ)

= ١٣٥ − ٦٠ = ٧٥ سم²

**مثال ٧** أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة بحيث $\frac{أب}{أجـ} = \frac{٥}{٣}$ ، $\overleftrightarrow{أد}$ مماساً للدائرة عند أ قطع $\overrightarrow{ب جـ}$ في د

أوجد م(Δ أ د جـ) : م(Δ أ ب جـ)

**الحل**




Δ Δ أ د جـ ، ب د أ

فيهما: د̂ مشتركة

ق(د أ̂ جـ) = ق(ب̂) [مماسية ومحيطية مشتركتان في أجـ]

∴ Δ أ د جـ ~ Δ ب د أ

∴ $\frac{م(Δ أ د جـ)}{م(Δ ب د أ)} = \left(\frac{أجـ}{أب}\right)^2 = \frac{٩}{٢٥}$

∴ $\frac{م(Δ أ د جـ)}{م(Δ أ ب جـ) + م(Δ أ د جـ)} = \frac{٩}{٢٥}$

∴ ٢٥ م(Δ أ د جـ) = ٩ م(Δ أ ب جـ) + ٩ م(Δ أ د جـ)

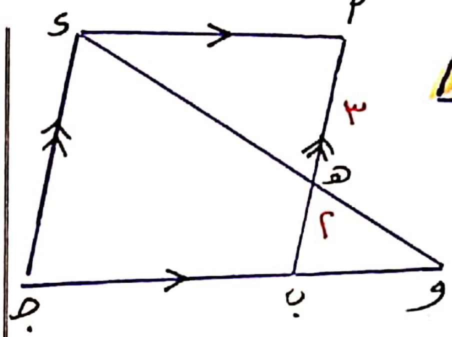
٢٥ م(Δ أ د جـ) − ٩ م(Δ أ د جـ) = ٩ م(Δ أ ب جـ)

١٦ م(Δ أ د جـ) = ٩ م(Δ أ ب جـ)

∴ $\frac{م(Δ أ د جـ)}{م(Δ أ ب جـ)} = \frac{٩}{١٦}$

## مثال ٨

فى الشكل المقابل




أ ب جـ د متوازى أضلاع ، هـ ∈ $\overline{\text{أب}}$

حيث $\frac{\text{أهـ}}{\text{هـب}} = \frac{٣}{٢}$ ، $\overleftrightarrow{\text{دهـ}} \cap \overrightarrow{\text{جـب}} = \{\text{و}\}$

(١) اثبت أن △ د جـ و ∼ △ هـ أ د

(٢) أوجد $\frac{\text{م}(\triangle \text{ د جـ و})}{\text{م}(\triangle \text{ هـ أ د})}$

الحل

∵ $\overline{\text{جـو}}$ // $\overline{\text{أد}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{دو}}$ قاطع لهما

∴ ق(∠و) = ق(∠أ د هـ)   (بالتبادل)

، ∵ ق(∠جـ) = ق(∠أ) من خواص متوازى الأضلاع

∴ △ د جـ و ∼ △ هـ أ د   أولاً #

∴ $\frac{\text{م}(\triangle \text{ د جـ و})}{\text{م}(\triangle \text{ هـ أ د})} = \left(\frac{\text{د جـ}}{\text{هـ أ}}\right)^2 = \left(\frac{\text{أب}}{\text{أهـ}}\right)^2$

$= \left(\frac{٥}{٣}\right)^2 = \frac{٢٥}{٩}$

## مثال ٩

أ ب جـ د متوازى أضلاع

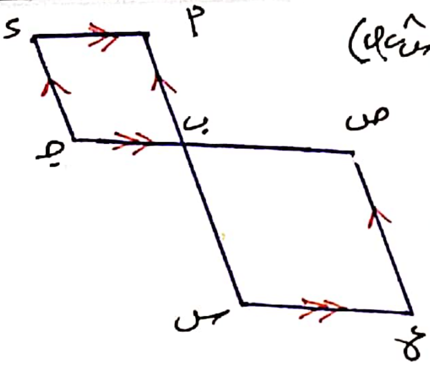
س ∈ $\overrightarrow{\text{أب}}$ ، س ∉ $\overline{\text{أب}}$ حيث ب س = ٢ أب

، ص ∈ $\overrightarrow{\text{جـب}}$ ، ص ∉ $\overline{\text{جـب}}$ حيث ب ص = ٢ ب جـ ،

رسم متوازى الأضلاع ب س ع ص

اثبت أن $\frac{\text{م}(\text{▱ أ ب جـ د})}{\text{م}(\text{▱ س ب ص ع})} = \frac{١}{٤}$

الحل




∵ ق(∠أ ب جـ) = ق(∠س ب ص) بالتقابل بالرأس

∴ ق(∠أ) = ق(∠س)

، ق(∠جـ) = ق(∠ص)

، ق(∠د) = ق(∠ع)

، ∵ $\frac{\text{أب}}{\text{س ب}} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{\text{ب جـ}}{\text{ب ص}} = \frac{١}{٢}$

∴ $\frac{\text{جـ د}}{\text{ص ع}} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{\text{أ د}}{\text{س ع}} = \frac{١}{٢}$

∴ ▱ أ ب جـ د ∼ ▱ س ب ص ع

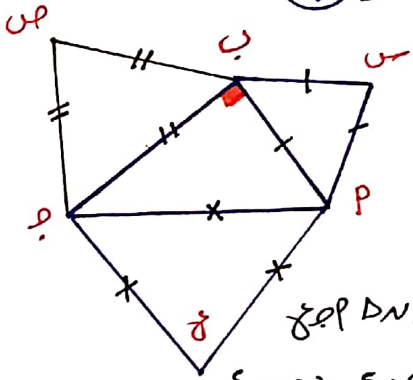
∴ $\frac{\text{م}(\text{▱ أ ب جـ د})}{\text{م}(\text{▱ س ب ص ع})} = \left(\frac{١}{٢}\right)^2 = \frac{١}{٤}$ #

## مثال ١٠

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب ، رسمت المثلثات المتساوية الأضلاع أ ب س ، ب جـ ص ، أ جـ ع  اثبت أن

م(△ أ جـ ع) = م(△ ب جـ ص) + م(△ أ ب س)

الحل




∵ △△△ أ ب س ، ب جـ ص ، أ جـ ع متساويات الأضلاع

∴ △ أ ب س ∼ △ ب جـ ص ∼ △ أ جـ ع

∴ $\frac{\text{م}(\triangle \text{ أ ب س})}{\text{م}(\triangle \text{ أ جـ ع})} = \left(\frac{\text{أب}}{\text{أجـ}}\right)^2 = \frac{(\text{أب})^2}{(\text{أجـ})^2}$ ← (١)

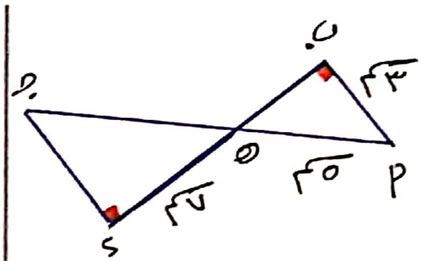
، $\frac{\text{م}(\triangle \text{ ب جـ ص})}{\text{م}(\triangle \text{ أ جـ ع})} = \left(\frac{\text{ب جـ}}{\text{أجـ}}\right)^2 = \frac{(\text{ب جـ})^2}{(\text{أجـ})^2}$ ← (٢)

بجمع ١ ، ٢ ∴ $\frac{\text{م}(\triangle \text{ أ ب س}) + \text{م}(\triangle \text{ ب جـ ص})}{\text{م}(\triangle \text{ أ جـ ع})} = \frac{(\text{أجـ})^2}{(\text{أجـ})^2}$

∴ م(△ أ ب س) + م(△ ب جـ ص) = م(△ أ جـ ع) #

# اختبر

**(١)**




فى الشكل المقابل

$\frac{\text{م}(\Delta\ \text{أ ب هـ})}{\text{م}(\Delta\ \text{ء جـ هـ})} = \dots\dots$

(أ) $\frac{٩}{٤٩}$  (ب) $\frac{٢٥}{٤٩}$  (جـ) $\frac{٩}{٢٥}$  (ء) $\frac{١٦}{٤٩}$

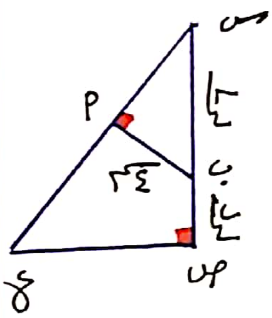
$= \left(\frac{\text{ب هـ}}{\text{ء هـ}}\right)^٢ = \frac{(\text{ب هـ})^٢}{٤٩}$  فى Δ أ ب هـ

$\text{ب هـ} = \sqrt{٢٥ - ٩} = ١٦$

$= \frac{١٦}{٤٩}$

**(٢)**

فى الشكل ده




$\frac{\text{م}(\Delta\ \text{س أ ب})}{\text{م}(\Delta\ \text{س ص ع})} = \dots\dots$

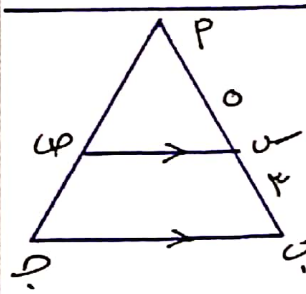
(أ) $\frac{٣}{٥}$  (ب) $\frac{٥}{١٦}$  (جـ) $\frac{٩}{٢٥}$  (ء) $\frac{٤}{٥}$

$\left(\frac{\text{س ب}}{\text{س ع}}\right)^٢ = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{ص ع}}\right)^٢ = \left(\frac{\text{س أ}}{\text{س ص}}\right)^٢$

$\text{س أ} = \sqrt{٣٦ - ١٦} = \sqrt{٢٠}$  $\text{س ص} = ٨$

$= \left(\frac{\sqrt{٢٠}}{٨}\right)^٢ = \frac{٢٠}{٦٤} = \frac{٥}{١٦}$

**(٣)**




أ س : س ب = ٥ : ٣

، م(Δ أ ب جـ) = ٢٥،٦ سم²

فإن م(Δ أ س ص) = ...... سم²

(أ) ١٠  (ب) ١٦  (جـ) ٤١  (ء) ٦٥،٥

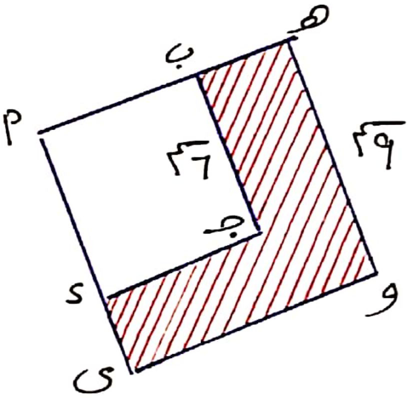
$\frac{\text{م}(\Delta\ \text{أ س ص})}{\text{م}(\Delta\ \text{أ ب جـ})} = \left(\frac{\text{أ س}}{\text{أ ب}}\right)^٢ = \left(\frac{٥}{٨}\right)^٢ = \frac{٢٥}{٦٤}$

$\therefore \frac{\text{م}(\Delta\ \text{أ س ص})}{٢٥،٦} = \frac{٢٥}{٦٤}$

$\therefore \text{م}(\Delta\ \text{أ س ص}) = \frac{٢٥ \times ٢٥،٦}{٦٤} = ١٠$

**(٤)**

فى الشكل ده




إذا كان

الشكل أ ب جـ ء ~ الشكل أ هـ و ى

وكانت مساحة الشكل (أ ب جـ ء) = ٣٢ سم²

فإن مساحة الجزء المظلل = ...... سم²

(أ) ٧٢  (ب) ٤٨  (جـ) ٤٠  (ء) ١٦

$\frac{\text{م}(\text{أ ب جـ ء})}{\text{م}(\text{أ هـ و ى})} = \left(\frac{٦}{٩}\right)^٢ = \frac{٤}{٩}$

$\frac{٣٢}{\text{م}(\text{أ هـ و ى})} = \frac{٤}{٩}$

$\therefore \text{م}(\text{أ هـ و ى}) = ٧٢$ سم²

$\therefore$ مساحة الجزء المظلل $= ٧٢ - ٣٢ = ٤٠$ سم²

# الواجب

١) مضلعان متشابهان النسبة بين محيطيهما ٤ : ٩ فإن النسبة بين مساحتيهما ....:....

٢) إذا كانت النسبة بين مساحتي مضلعين متشابهين ١ : ٩ فإن النسبة بين محيطيهما ....:....

٣) إذا كانت النسبة بين مساحتي مضلعين متشابهين ٩ : ١٦ ومحيط الأكبر = ٣٠ سم فإن محيط الأصغر = ....

٤) إذا كانت النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين ١ : ٤ ، ومساحة المضلع الأول ٢٥ سم² فأوجد مساحة المضلع الثاني.

٥) مضلعان متشابهان النسبة بين طولي ضلعين متناظرين ٥ : ٣ إذا كان الفرق بين مساحتيهما ٣٢ سم² فأوجد مساحة كل منهما.

٦) مضلعان متشابهان مساحتيهما ١٠٠ سم² ، ٦٤ سم² فإذا كان محيط الأول ٦٠ سم فأوجد محيط الثاني.

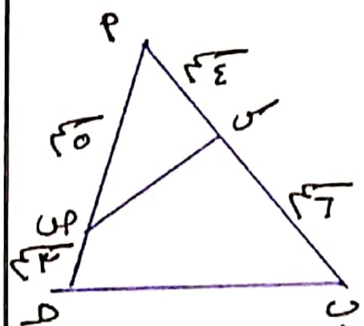
٧) أ ب جـ د ▱ ، س ∈ $\overrightarrow{د أ}$
حيث $\overleftrightarrow{س جـ}$ ∩ $\overline{أ ب}$ ، ب س = ٢ أ ص .
ص ∈ $\overrightarrow{جـ د}$ ، أ ص ∦ جـ ب أثبت أن
ب ص = ٢ ب جـ

٨) رسم متوازي أضلاع ب س ع ل
أثبت أن
$$\frac{م(\text{المتوازي أ ب جـ ع})}{م(\text{المتوازي س ب جـ ع ل})} = \frac{١}{٤}$$

٩) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب
رسمت المثلثات المتساوية الأضلاع
أ ب س ، ب جـ ص ، أ جـ ع
أثبت أن م(△ أ ب س) + م(ب جـ ص)
= م(△ أ جـ ع)

١٠) △ أ ب جـ فيه $\frac{أ جـ}{ب جـ} = \frac{٤}{٣}$ ،
رسمت الدائرة المارة برؤوسه ومن
نقطة ب رسم المماس لهذه الدائرة
فقطع $\overleftrightarrow{جـ أ}$ في هـ أثبت أن
$$\frac{م(△ أ ب جـ)}{م(△ أ ب هـ)} = \frac{٧}{١٦}$$

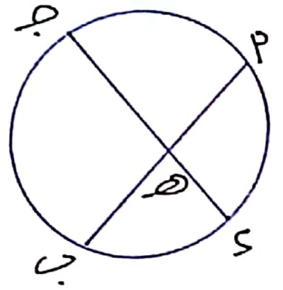
١١) في الشكل المقابل

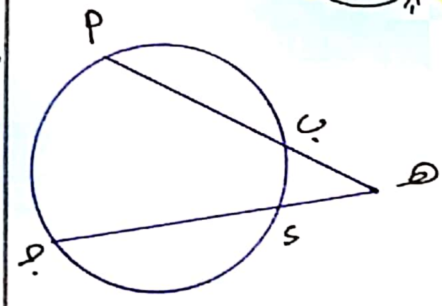



أوجد $\frac{م(△ أ س ص)}{م(△ أ جـ ب)}$

# الدرس الخامس : تطبيقات التشابة فى الدائرة

## تمرين مشهور





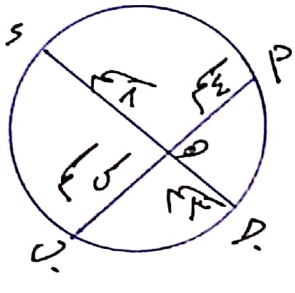
علشان متنساش ابدأ من نقطة التقاطع

هـ أ × هـ ب = هـ د × هـ جـ

## مثال ١

اوجد قيمة س

**١**



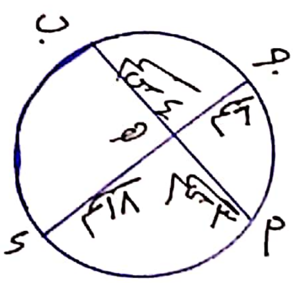
∴ هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ د

$4 \times$ س $= 3 \times 8$

∴ ٤ س = ٢٤

∴ س = $\frac{24}{4} = 6$ سم

**٢**



∴ هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ د

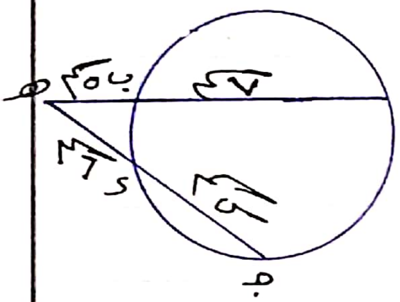
٣س × ٤س = ٦ × ١٨

∴ ١٢ س² = ١٠٨

∴ س² = $\frac{108}{12} = 9$

∴ س = $\sqrt{9} = 3$

**٣**



∴ هـ ب × هـ أ = هـ د × هـ جـ

$5 \times 12 = 6 \times$ هـ جـ

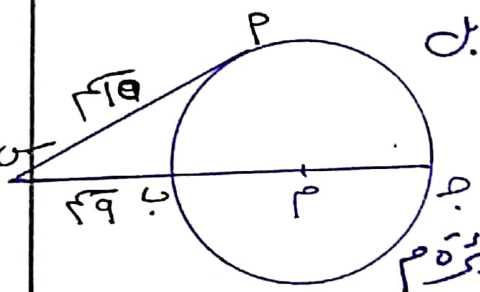
∴ هـ جـ = $\frac{5 \times 12}{6} = 10$

∴ د جـ = ١٠ − ٦ = ٤ سم

∴ س = ٤ سم

## مثال ٢

فى الشكل المقابل



س أ مماس للدائرة م عند أ ، احسب طول نصف قطر الدائرة.

### الحل

∴ س ب × س جـ = (س أ)²

٩ × س جـ = (١٥)²

∴ س جـ = $\frac{(15)^2}{9} = 25$

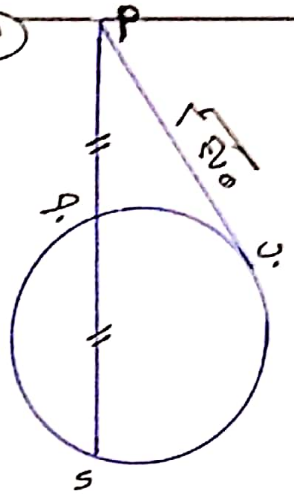
∴ ب جـ = ٢٥ − ٩ = ١٦ سم

∴ نق = $\frac{16}{2} = 8$ سم

## مثال ٣

في الشكل المقابل

أوجد طول $\overline{أد}$




### الحل

نفرض أن أجـ = س ∴ جـ د = س

∴ أد = ٢س

∵ أجـ × أد = $(أب)^2$

س × ٢س = $(٥\sqrt{٢})^2$

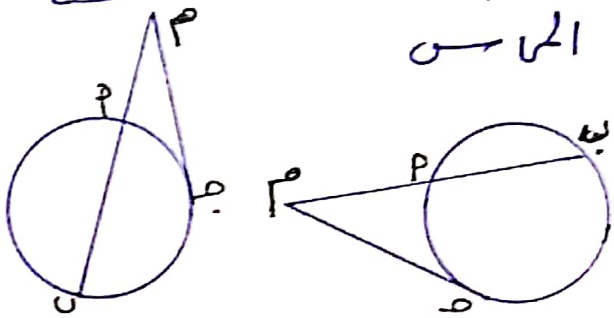
٢$س^2$ = ٥٠ ∴ $س^2 = \frac{٥٠}{٢}$

∴ $س^2$ = ٢٥ ∴ س = ٥

∴ أد = ٢ × ٥ = ١٠ سم

## نتيجة (١)

إذا رسم من نقطة خارج دائرة قاطع ومماس فإن حاصل ضرب طول القاطع في طول جزئه الخارجي = مربع طول المماس




م أ × م ب = $(م ج)^2$ م أ × م ب = $(م ج)^2$

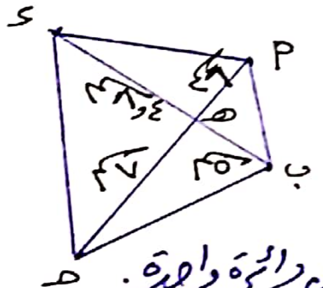
## عكس التمرين المشهور

إذا تقاطع المستقيمان الحاويان $\overline{أب}$، $\overline{جـ د}$ في نقطة م وكان م أ . م ب = م جـ . م د فإن النقط أ، ب، جـ، د تقع على دائرة واحدة

* وكذلك عكس النتيجة

إذا كان $(م ج)^2$ = م أ . م ب فإن $\overleftrightarrow{م ج}$ مماس للدائرة المارة بالمثلث أ ب جـ عند جـ

## مثال ٤




اثبت أن أ، ب، جـ، د تقع على دائرة واحدة.

### الحل

هـ أ × هـ جـ = ٦ × ٧ = ٤٢

هـ ب × هـ د = ٥ × ٨٫٤ = ٤٢

∵ $\overline{أجـ} \cap \overline{ب د}$ = {هـ}

، هـ أ × هـ جـ = هـ ب × هـ د

∴ النقط أ، ب، جـ، د تقع على دائرة واحدة

## مثال ٥

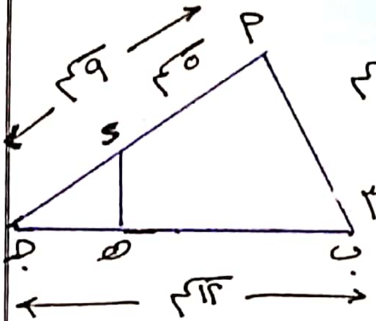
Δ أ ب جـ فيه أ جـ = ٩ سم، ب جـ = ١٢ سم

، فرضت د ∈ $\overline{أجـ}$ بحيث أد = ٥ سم

، فرضت هـ ∈ $\overline{بجـ}$ بحيث $\frac{ب هـ}{هـ جـ}$ = ٣

اثبت أن الشكل أ ب هـ د رباعي دائري

**الحل**




∵ جـد = ٩ − ٥ = ٤ سم

∴ جـد × جـأ = ٤ × ٩ = ٣٦

∵ ب هـ = ٣ جـ هـ ∴ ب جـ = ٤ جـ هـ

∴ جـ هـ = $\frac{١٢}{٤}$ = ٣ سم

∴ جـ هـ × جـ ب = ٣ × ١٢ = ٣٦

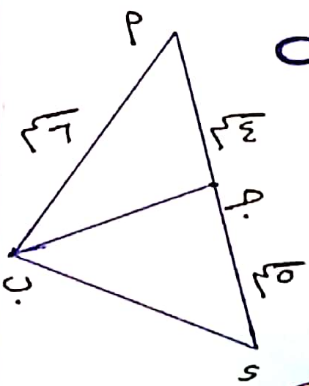
∴ جـد × جـأ = جـ هـ × جـ ب

∴ الشكل أ ب هـ د رباعي دائري

---

**مثال ٦**

في الشكل المقابل




اثبت أن أب مماس للدائرة المارة بـ ب ، جـ ، د

**الحل**

∵ $(أب)^2 = (٦)^2 = ٣٦$

، ∵ أجـ × أد = ٤ × ٩ = ٣٦

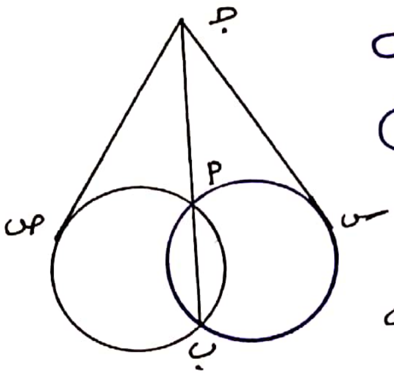
∴ $(أب)^2$ = أجـ × أد

∴ أب مماس للدائرة المارة بالنقط ب ، جـ ، د

---

**مثال (٧)**

دائرتان متقاطعتان في أ ، ب ، جـ ∈ $\overleftrightarrow{أب}$ ، جـ ∉ $\overline{أب}$ ، رسم من جـ القطعتان $\overline{جـس}$ ، $\overline{جـص}$ مماستين للدائرتين عند س ، ص اثبت أن جـس = جـص




**الحل**

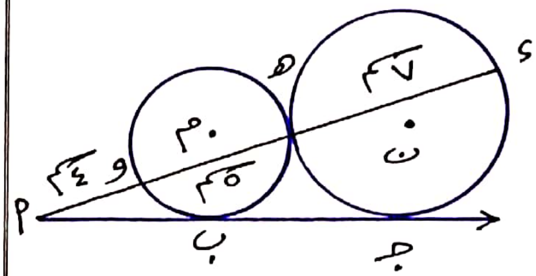
∵ $(جـس)^2$ = جـأ × جـب

، ∵ $(جـص)^2$ = جـأ × جـب

∴ جـس = جـص #.

---

**مثال (٨)**




من معطيات الشكل اثبت أن ب منتصف $\overline{أجـ}$

**الحل**

في الدائرة م : $(أب)^2$ = أو × أهـ = ٤ × ٩ = ٣٦

∴ أب = ٦ سم ← (١)

في الدائرة ن : $(أجـ)^2$ = أهـ × أد = ٩ × ١٦ = ١٤٤

∴ أجـ = ١٢ سم ← (٢)

من ① ، ② ∴ أب = $\frac{١}{٢}$ أجـ

∴ ب منتصف $\overline{أجـ}$ #.

**مثال ٩**

ا ب جـ مثلث فيه د ∈ ب جـ حيث د ب = ٥ سم ، د جـ = ٤ سم

إذا ا جـ = ٦ سم

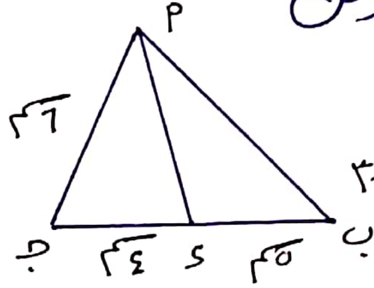
اثبت أنه

(١) ا جـ مماسة للدائرة التي تمر بالنقط ا ، ب ، د

(٢) △ ا جـ د ~ △ ب جـ ا

(٣) م(△ ا ب د) : م(△ ا ب جـ) = ٥ : ٩

**الحل**




(١) ∵ (ا جـ)² = ٣٦ ، جـ د × جـ ب = ٤ × ٩ = ٣٦

∴ (ا جـ)² = جـ د × جـ ب

∴ ا جـ مماسة للدائرة المارة بالنقط ا ، ب ، د # أولاً

(٢) ∵ △△ ا جـ د ، ب جـ ا فيهما { ( جـ ) مشتركة ، ق(د ا جـ) = ق(ب) محيطية ومماسية مشتركتان في ا د }

∴ △ ا جـ د ~ △ ب جـ ا # ثانياً

(٣) ∵ $\frac{م(△ ا جـ د)}{م(△ ب جـ ا)} = \left(\frac{جـ د}{جـ ا}\right)^2 = \left(\frac{٤}{٦}\right)^2 = \frac{٤}{٩}$

∴ م(△ ا جـ د) = ٤ س ، م(△ ا ب جـ) = ٩ س

∴ م(△ ا ب د) = ٥ س

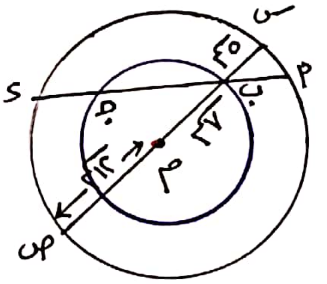
∴ $\frac{م(△ ا ب د)}{م(△ ا ب جـ)} = \frac{٥ س}{٩ س} = \frac{٥}{٩}$ # ثالثاً

**مثال ١٠**

دائرتان متحدتا المركز م طولا نصفي قطريهما ١٢ سم ، ٧ سم ، رسم الوتر ا د في الدائرة الكبرى ليقطع الدائرة الصغرى في ب ، جـ على الترتيب.

اثبت أنه ا ب × ب د = ٩٥

**الحل**




العمل: نرسم القطر س ص في الدائرة الكبرى يقطع الدائرة الصغرى في ب

البرهان

∵ ا د ∩ س ص = {ب}

∴ ا ب × ب د = س ب × ب ص = ٥ × ١٩ = ٩٥ #

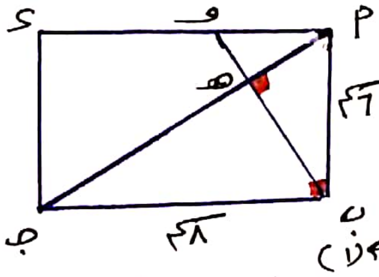
**مثال ١١**

ا ب جـ د مستطيل فيه ا ب = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم ، رسم ب هـ ⊥ ا جـ تقطع ا جـ في هـ ، ا د في و

(١) اثبت أنه (ا ب)² = ا و × ا د

(٢) اوجد طول ا و

**الحل**




∵ △ ا ب جـ قائم الزاوية في ب ، ب هـ ⊥ ا جـ

∴ (ا ب)² = ا هـ × ا جـ ← (١)

∵ الشكل و هـ جـ د رباعي دائري لأن فيه زاويتان متقابلتان متكاملتان.

∴ ا و × ا د = ا هـ × ا جـ ← (٢)

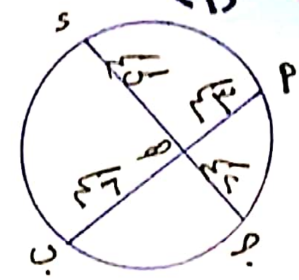
من (١) ، (٢) ∴ (ا ب)² = ا و × ا د # أولاً

٣٦ = ا و × ٨ ∴ ا و = ٤,٥ سم

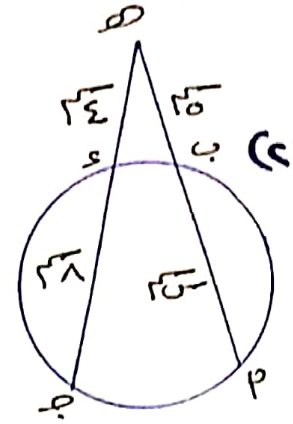
## الواجب

**١** أوجد قيمة س

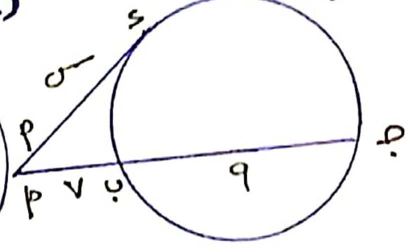
(١)



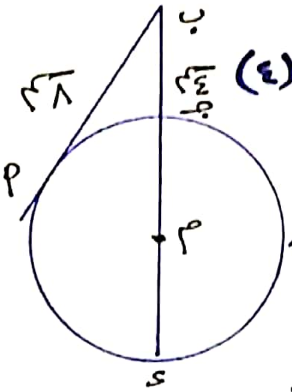
(٢)



(٣)



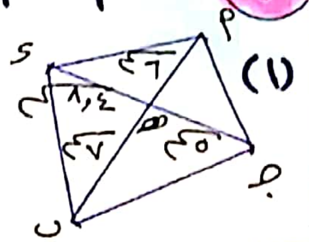
(٤)



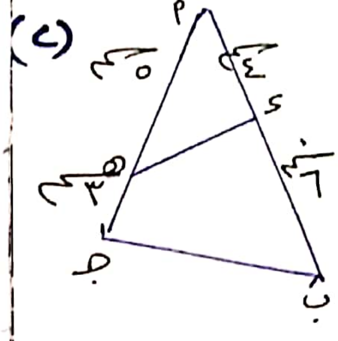
أوجد نق

**٢** أى من النقط التالية تقع على دائرة واحدة

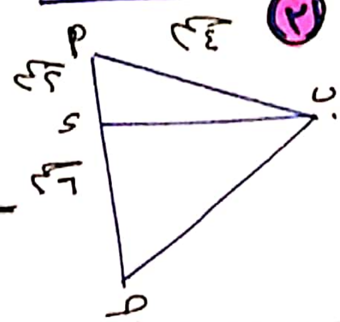
(١)



(٢)

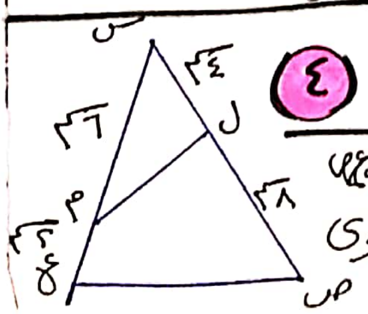


(٣)



هل أجـ مماس؟

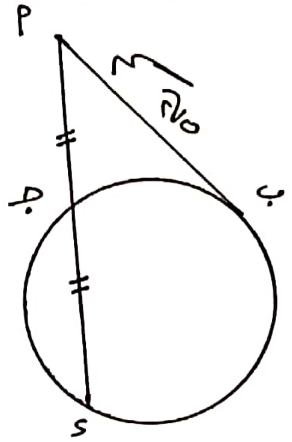
**٤**



اثبت أن Δ س ل م ∼ Δ س ع ص ثم اثبت أن الشكل ل م ع ص رباعي دائري بطريقتين مختلفتين

**٥** $\overleftrightarrow{أب} \cap \overleftrightarrow{جـ د}$ = {هـ} ، أهـ = $\frac{٥}{١٢}$ بهـ ، د هـ = $\frac{٣}{٥}$ هـ جـ ، إذا كان بهـ = ٣٦ سم ، جـ هـ = ٥ سم اثبت أن النقط أ ، ب ، جـ ، د تقع على دائرة واحدة.

**٦**



إذا كانت $\overline{أب}$ قطعة مماسة

أوجد طول $\overline{أد}$


واحد بخيل بياكل فستق
مراته قالتله .. أكلني معاك .. اداها واحده
بعد شوية قالتله .. هات واحده كمان

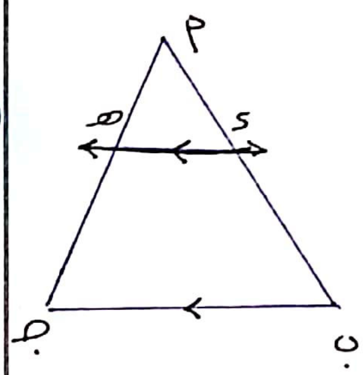
قالها : والله العظيم كله نفس الطعم

## الوحدة الثانية

# الدرس الأول : المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة

### نظرية (١)

إذا رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين فإنه يقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة.




$$\frac{أد}{أهـ} = \frac{دب}{هـج} = \frac{أب}{أج}$$

$$\frac{أد}{أب} = \frac{أهـ}{أج}$$

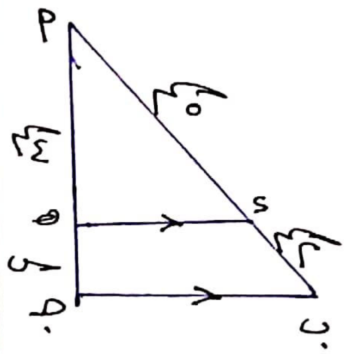
$$\frac{أد}{دب} = \frac{أهـ}{هـج}$$

$$\frac{أب}{دب} = \frac{أج}{هـج}$$

### مثال ١

في كل من الأشكال التالية دهـ // ب ج أوجد قيمة س العددية

**(١)**



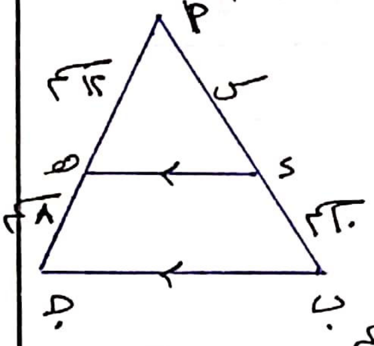

$$\frac{هـج}{دب} = \frac{أهـ}{أد}$$

$$\frac{س}{٢} = \frac{٤}{٥}$$

$$\therefore س = \frac{٢ \times ٤}{٥}$$

$$\therefore س = ١٫٦ \text{ سم}$$

**(٢)**

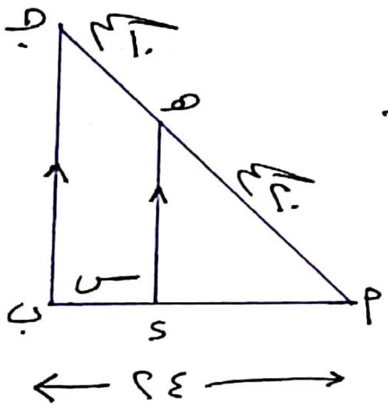



$$\frac{أد}{دب} = \frac{أهـ}{هـج}$$

$$\frac{س}{١٠} = \frac{١٢}{٨}$$

$$\therefore س = \frac{١٢ \times ١٠}{٨} = ١٥ \text{ سم}$$

**(٣)**



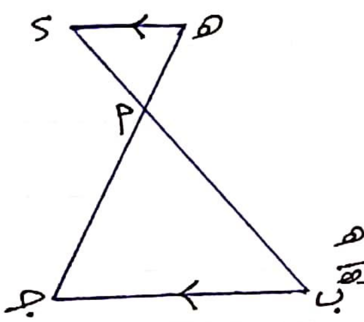

$$\frac{دب}{أب} = \frac{هـج}{أج}$$

$$\frac{س}{٢٤} = \frac{١٠}{٣٠}$$

$$\therefore س = \frac{٢٤ \times ١٠}{٣٠} = ٨ \text{ سم}$$

### نتيجة

إذا رسم مستقيم خارج مثلث أ ب ج يوازي ضلعاً من أضلاع المثلث ب ج ويقطع أب ، أج في د ، هـ فإنه



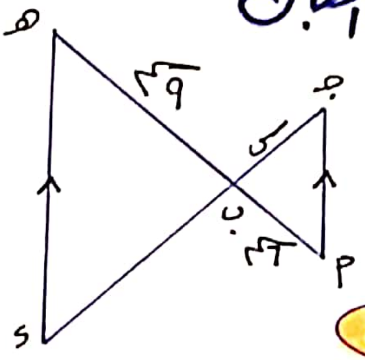

$$\frac{أد}{ب د} = \frac{أهـ}{هـج}$$

وكذلك

$$\frac{أد}{أب} = \frac{أهـ}{أج} \quad ، \quad \frac{أد}{دب} = \frac{أهـ}{هـج}$$

## مثال ٢

فى الشكل المقابل




جـ د = ١٨ سم

أوجد طول ب جـ

### الحل

∵ د هـ // أ جـ

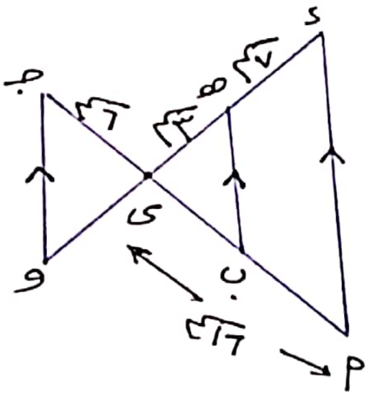
$$∴ \frac{ب جـ}{جـ د} = \frac{أ ب}{أ هـ}$$

$$\frac{ب جـ}{١٨} = \frac{٦}{١٥}$$

$$∴ ب جـ = \frac{٦ \times ١٨}{١٥} = ٧,٢ \text{ سم}$$

## مثال ٣

أوجد طول ى هـ ، ى ب




### الحل

∵ أ د // و جـ

$$∴ \frac{ى جـ}{د ى} = \frac{ى هـ}{أ د}$$

$$\frac{ى هـ}{١٠} = \frac{٦}{١٦} \quad ∴ ى هـ = \frac{١٠ \times ٦}{١٦}$$

∴ ى هـ = ٣,٧٥ سم

، ∵ ب هـ // أ د

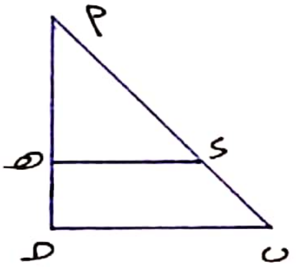
$$∴ \frac{ب ى}{أ د} = \frac{هـ ى}{د ى}$$

$$\frac{ب ى}{١٦} = \frac{٣}{١٠}$$

$$∴ ى ب = \frac{٣ \times ١٦}{١٠} = ٤,٨ \text{ سم}$$

## عكس النظرية

إذا قطع مستقيم ضلعين من أضلاع مثلث وقسمهما إلى قطع متناسبة فإنه يوازي الضلع الثالث



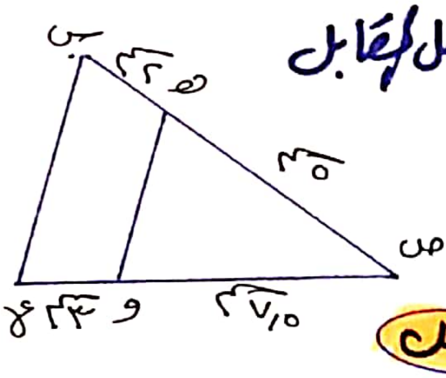

إذا كان

$$\frac{أ د}{د ب} = \frac{أ هـ}{هـ جـ}$$

فإن د هـ // ب جـ

## مثال ٤

فى الشكل المقابل




أثبت أن

هـ و // س ع

### الحل

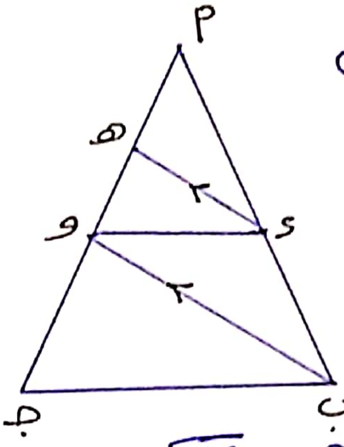
$$∵ \frac{ص هـ}{هـ س} = \frac{٥}{٢} \longrightarrow (١)$$

$$، \frac{ص و}{و ع} = \frac{٧,٥}{٣} = \frac{٥}{٢} \longrightarrow (٢)$$

$$\text{من } (١) ، (٢) \quad ∴ \frac{ص هـ}{هـ س} = \frac{ص و}{و ع} \quad ∴ هـ و // س ع$$

## مثال ٥

فى الشكل المقابل




إذا كان $\overline{\text{دهـ}}$ // $\overline{\text{بو}}$ ، أد = $\frac{٣}{٤}$ دب ، أهـ = ٤,٥ سم ، وجـ = ١٤ سم

فأثبت أن $\overline{\text{دو}}$ // $\overline{\text{بجـ}}$

**الحل**

∵ أد = $\frac{٣}{٤}$ دب

∴ $\frac{\text{أد}}{\text{بد}} = \frac{٣}{٤}$

، ∵ $\overline{\text{دهـ}}$ // $\overline{\text{بو}}$

∴ $\frac{\text{أد}}{\text{دب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـو}} = \frac{٣}{٤}$

∴ $\frac{٤,٥}{\text{هـو}} = \frac{٣}{٤}$

∴ هـو = $\frac{٤ \times ٤,٥}{٣}$ = ٦ سم

فى △ أبجـ

∵ $\frac{\text{أد}}{\text{دب}} = \frac{٣}{٤}$

، $\frac{\text{أو}}{\text{وجـ}} = \frac{٦+٤,٥}{١٤} = \frac{٣}{٤}$

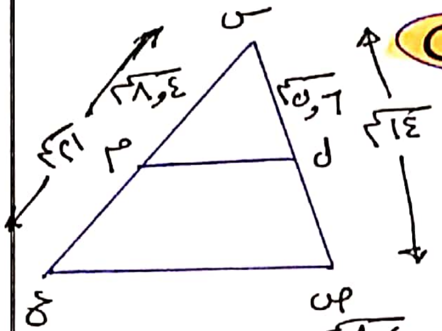
∴ $\frac{\text{أد}}{\text{دب}} = \frac{\text{أو}}{\text{وجـ}}$

∴ $\overline{\text{دو}}$ // $\overline{\text{بجـ}}$

## مثال ٦

س ص ع △ فيه س ص = ١٤ سم ، س ع = ٢١ سم ، ل ∈ $\overline{\text{سص}}$ ، م ∈ $\overline{\text{سع}}$ بحيث س ل = ٥,٦ سم ، س م = ٨,٤ سم أثبت أن $\overline{\text{لم}}$ // $\overline{\text{صع}}$

**الحل**




ل ص = ١٤ − ٥,٦ = ٨,٤ سم

م ع = ٢١ − ٨,٤ = ١٢,٦ سم

$\frac{\text{سل}}{\text{لص}} = \frac{٥,٦}{٨,٤} = \frac{٢}{٣}$

$\frac{\text{سم}}{\text{مع}} = \frac{٨,٤}{١٢,٦} = \frac{٢}{٣}$

∴ $\frac{\text{سل}}{\text{لص}} = \frac{\text{سم}}{\text{مع}}$

∴ $\overline{\text{لم}}$ // $\overline{\text{صع}}$

عندما كان عُمري ٤ سنوات،
كان عُمر أخي نصف عمري.
أنا الآن عمري ١٨ سنة،
فكم أصبح عُمر أخي؟

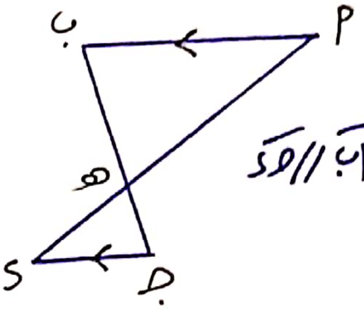
## اختر

**(١)** في الشكل المقابل $\overline{أب} // \overline{جـ د}$

، $2 أهـ = 3 هـ د$

، ب هـ - جـ هـ = ٤ سم

فإن ب جـ = ...... سم



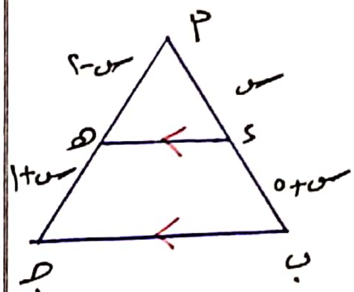

(أ) ١٨ (ب) ٢٠ (ج) ٢٤ (د) ٢٥

$\frac{أهـ}{هـ د} = \frac{ب هـ}{هـ جـ} = \frac{3ك}{2ك}$ ∴ ب هـ - جـ هـ = ك

∴ ك = ٤ ، ب جـ = ٥ك ∴ ب جـ = ٢٠ سم

**(٢)** في الشكل المقابل

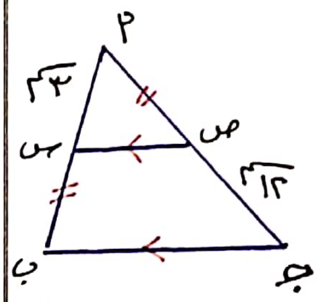
س = ...... سم




(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٥

**(٣)** في الشكل المقابل

أص = ...... سم



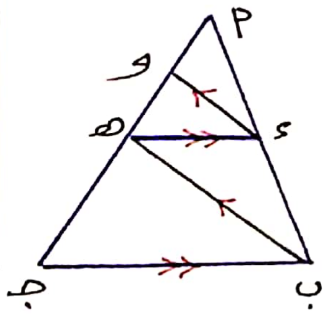

(أ) ١٠ (ب) ١٦ (ج) ١٨ (د) ٢٠

∵ أص = س ص = ك

∵ $\frac{ك}{12} = \frac{3}{ك}$ ∴ $ك^2 = 36$ ∴ ك = ٦

∴ أجـ = ٦ + ١٢ = ١٨ سم

**(٤)** أو × أجـ = ......




(أ) أهـ (ب) $(أهـ)^2$ (ج) $(أد)^2$ (د) وهـ × هـ جـ

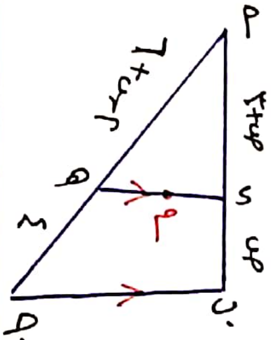
في Δ أب جـ يكون $\frac{أد}{أب} = \frac{أهـ}{أجـ}$ ← (١)

في Δ أب هـ يكون $\frac{أد}{أب} = \frac{أو}{أهـ}$ ← (٢)

من (١)، (٢) ∴ $\frac{أهـ}{أجـ} = \frac{أو}{أهـ}$ ∴ أو × أجـ = $(أهـ)^2$

**(٥)** إذا كانت م هي نقطة تلاقي متوسطات المثلث أب جـ

فإن ٢س + ص = ...... سم




(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٥

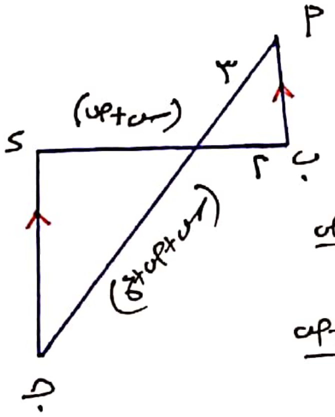
الحل: نرسم $\overline{أو}$ تمر بنقطة م وتقطع $\overline{ب جـ}$ في و

ويكون $\frac{أم}{م و} = \frac{2}{1} = \frac{ص+3}{ص}$ ∴ ص = ٣

، $\frac{2س+6}{4} = \frac{2}{1}$ س = ١

**(٦)** إذا كان $\overline{أب} // \overline{جـ د}$

فإن ع = ......




(أ) $\frac{س-ص}{2}$ (ب) $\frac{س+ص}{2}$ (ج) ٥س + ٥ص (د) $\frac{س+ص}{5}$

$\frac{س+ص}{س+ص+ع} = \frac{2}{3}$

بفرض أن س+ص = ٢ك ∴ س+ص+ع = ٣ك

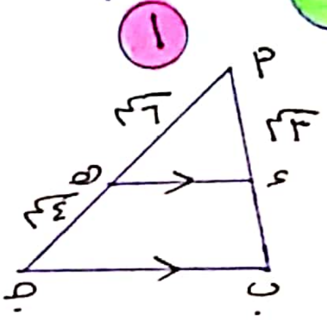
∴ ع = ك ويكون ك = $\frac{س+ص}{2}$

∴ ع = $\frac{س+ص}{2}$

## الواجب

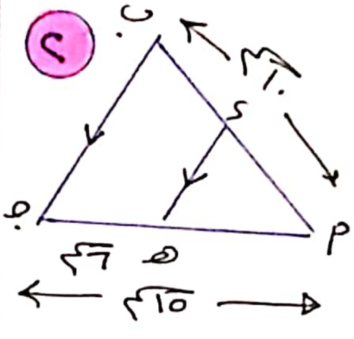
**(١)** فى كل من الأشكال التالية دهـ // ب جـ

(١)



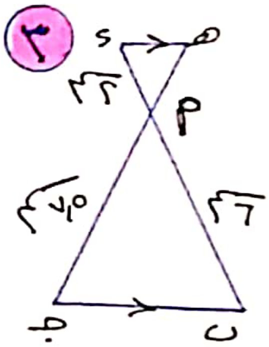
أوجد طول ب د

(٢)



أوجد طول د ب

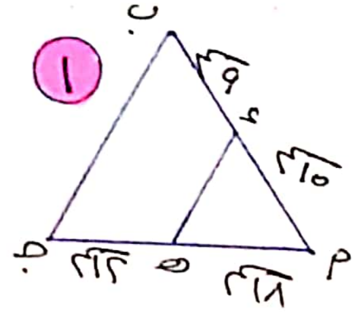
(٣)



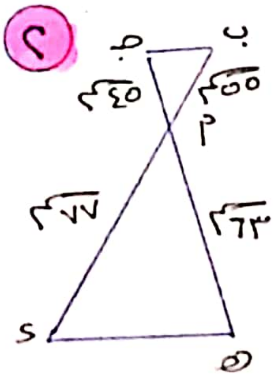
أوجد طول أهـ

**(٢)** فى كل من الأشكال التالية حدد إذا كان دهـ // ب جـ

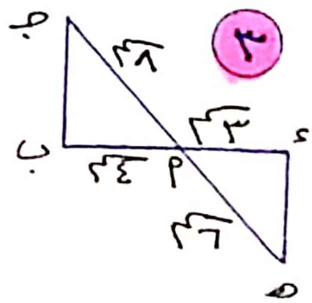
(١)



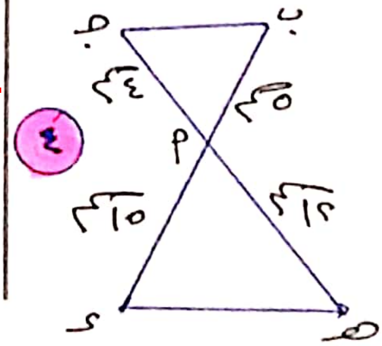
(٢)



(٣)



(٤)



**(٣)** △ أ ب جـ ، د ∈ أ ب ، هـ ∈ أ جـ

بحيث ٥ أهـ = ٤ هـ جـ

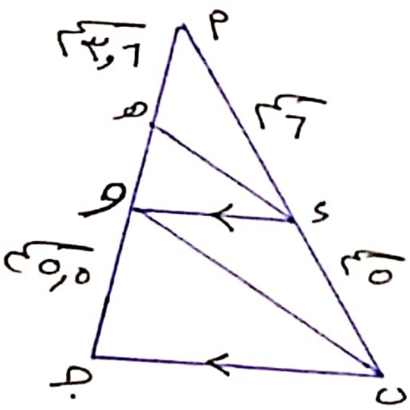
إذا كان أد = ١٠ سم ، د ب = ٨ سم

حدد ما إذا كان دهـ // ب جـ

**(٤)** أ ب جـ د شكل رباعي تقاطع قطراه في هـ فإذا كان أهـ = ٦ سم ، ب هـ = ١٣ سم ، هـ جـ = ١٠ سم ، هـ د = ٧,٨ سم

أثبت أن أ ب جـ د شبه منحرف

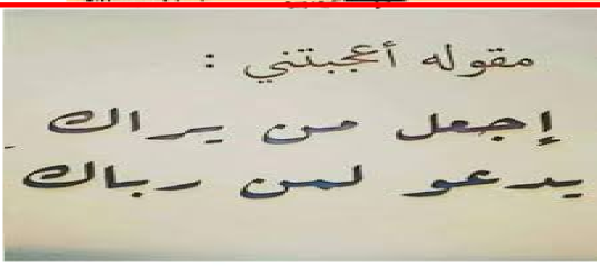
**(٥)**



أوجد طول هـ و

ثم أثبت أن

د هـ // ب و

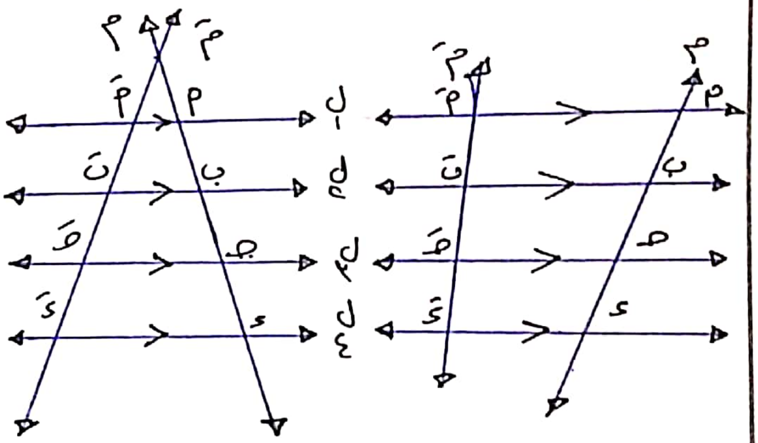



الوحدة الثانية

# الدرس الثانى : نظرية تاليس

## نظرية تاليس العامة

إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمات متوازية فإن أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر



$$\frac{\text{أب}}{\text{أَبَ}} = \frac{\text{بجـ}}{\text{بَجـَ}} = \frac{\text{جـد}}{\text{جـَدَ}} = \frac{\text{أد}}{\text{أَدَ}}$$

وكذلك نلاحظ أن

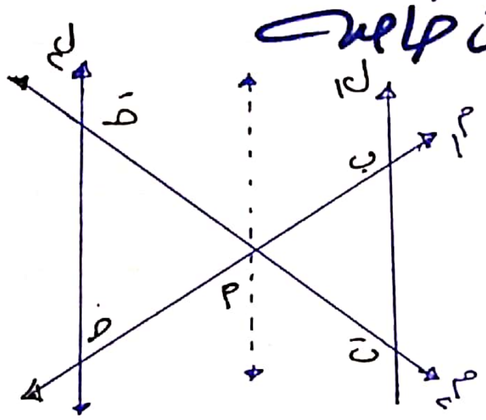
$$\frac{\text{أجـ}}{\text{جـد}} = \frac{\text{أَجـَ}}{\text{جـَدَ}}$$

$$\frac{\text{أجـ}}{\text{جـب}} = \frac{\text{أَجـَ}}{\text{جـَبَ}}$$

$$\frac{\text{بد}}{\text{دأ}} = \frac{\text{بَدَ}}{\text{دَأَ}}$$ وهكذا

## حالات خاصة

**(١)**



إذا كان ل١ // ل٢ ، م١ ، م٢ قاطعان لهما

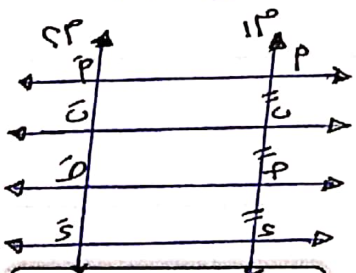
فإن $\frac{\text{أب}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{أبَ}}{\text{أجـَ}}$

والعكس صحيح

بمعنى إذا كان $\frac{\text{أب}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{أبَ}}{\text{أجـَ}}$ فإن $\overleftrightarrow{\text{ببَ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـجـَ}}$

## (٢) نظرية تاليس الخاصة

إذا كانت أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين متساوية فى الطول فإن أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر تكون متساوية أيضاً فى الطول



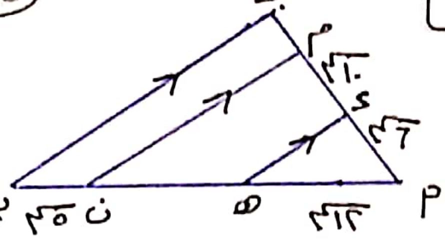
إذا كان

أب = بجـ = جـد

فإن

أَبَ = بَجـَ = جـَدَ

## مثال ١




أوجد طول $\overline{هن}$ ، $\overline{مجـ}$

### الحل

∵ $\overline{ءهـ} // \overline{من} // \overline{جـب}$

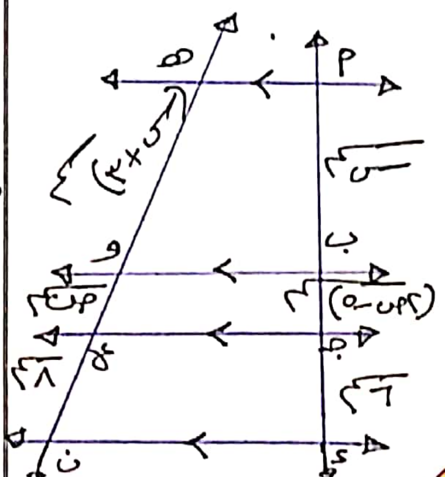
∴ $\frac{أء}{أهـ} = \frac{ءم}{هن} = \frac{مجـ}{نب}$

∴ $\frac{٦}{١٢} = \frac{١٠}{هن} = \frac{مجـ}{٥}$

∴ هن $= \frac{١٢ \times ١٠}{٦} = ٢٠$ سم

، مجـ $= \frac{٥ \times ٦}{١٢} = ٢,٥$ سم

## مثال ٢




أوجد قيمة س ، ص العددية

### الحل

∵ $\overleftrightarrow{أهـ} // \overleftrightarrow{بو} // \overleftrightarrow{جـل} // \overleftrightarrow{ءن}$

∴ $\frac{أب}{هو} = \frac{بجـ}{ول} = \frac{جـء}{لن}$

$\frac{س}{س+٣} = \frac{٢ص-٥}{ص} = \frac{٦}{٨}$

∴ $\frac{س}{س+٣} = \frac{٦}{٨}$

$٨س = ٦(س+٣)$

$٨س = ٦س + ١٨$

$٨س - ٦س = ١٨$ ∴ $٢س = ١٨$

$س = \frac{١٨}{٢} = ٩$

وكذلك $\frac{٢ص-٥}{ص} = \frac{٦}{٨}$

$٨(٢ص-٥) = ٦ص$

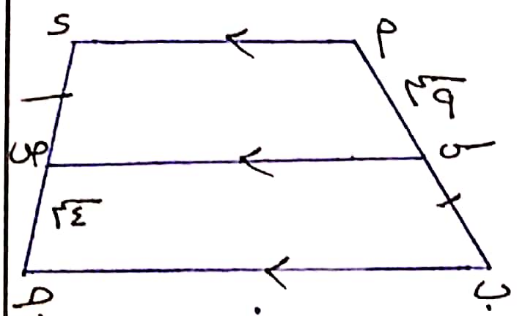
$١٦ص - ٤٠ = ٦ص$

$١٦ص - ٦ص = ٤٠$

∴ $١٠ص = ٤٠$

∴ $ص = ٤$

## مثال ٣




إذا كان بس = صء فأوجد طول ءص

### الحل

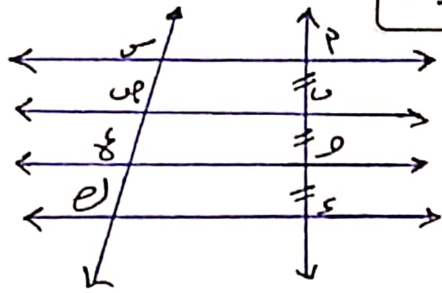
∵ $\overline{أء} // \overline{سص} // \overline{بجـ}$

∴ $\frac{أس}{سب} = \frac{ءص}{صجـ}$ ، ∵ سب = ءص

∴ $\frac{أس}{ءص} = \frac{ءص}{صجـ}$ $\frac{٩}{ءص} = \frac{ءص}{٤}$

∴ $(ءص)^٢ = ٣٦$ ∴ ءص $= ٦$ سم

## مثال ٤




إذا كان س ع = ١٠ سم

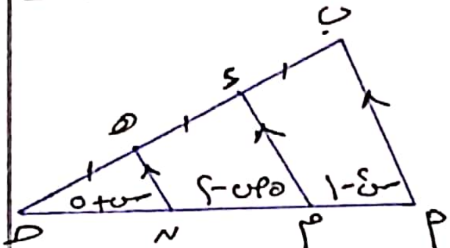
فإن ص ع = ..... سم

### الحل

∵ أب = ب و ∴ س ص = ص ع = ع ل

∴ ص ع = $\frac{١٠}{٢}$ = ٥ سم

## مثال ٥




أوجد قيمة س ، ص

### الحل

∵ أب // م ء // ن هـ

، ب ء = ء هـ = هـ جـ

∴ أم = م ن = ن جـ

∴ س² − ١ = س + ٥ ← (١)

س² − س − ١ − ٥ = ٠

س² − س − ٦ = ٠

(س + ٢)(س − ٣) = ٠

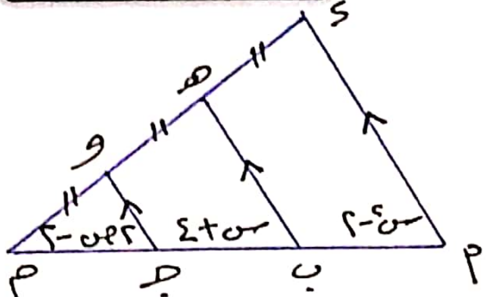
س = −٢ أو س = ٣

| | |
|---|---|
| ∴ أم = ٤ − ١ = ٣ | أم = ٩ − ١ = ٨ |
| ن جـ = −٢ + ٥ = ٣ | ن جـ = ٣ + ٥ = ٨ |

∴ م ن = ٣ أو م ن = ٨

| | |
|---|---|
| ٥ص − ٢ = ٣ | ٥ص − ٢ = ٨ |
| ٥ص = ٥ | ٥ص = ١٠ |
| ∴ ص = ١ | ص = ٢ |

## مثال ٦




أوجد قيمة س ، ص

### الحل

∵ أء // ب هـ // جـ و ، ء هـ = هـ و = و م

∴ أب = ب جـ = جـ م

∴ س² − ٢ = س + ٤ = ٢ص − ٢

س² − ٢ = س + ٤

س² − س − ٢ − ٤ = ٠

س² − س − ٦ = ٠

(س + ٢)(س − ٣) = ٠

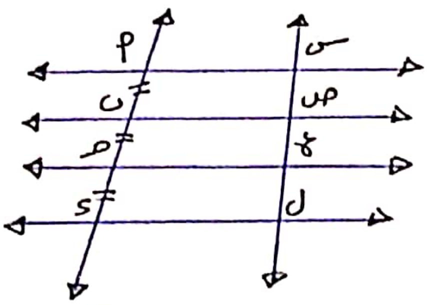
إما س = −٢ أو س = ٣

| | |
|---|---|
| أب = ٤ − ٢ = ٢ | أب = ٩ − ٢ = ٧ |
| ب جـ = −٢ + ٤ = ٢ | ب جـ = ٣ + ٤ = ٧ |
| ∴ ٢ص − ٢ = ٢ | ∴ ٢ص − ٢ = ٧ |
| ٢ص = ٢ + ٢ | ٢ص = ٧ + ٢ |
| ٢ص = ٤ | ٢ص = ٩ |
| ∴ ص = ٢ | ∴ ص = ٤,٥ |

## مثال ٧

إذا كان س ل = ١٢ سم

فإن س ع = ..... سم

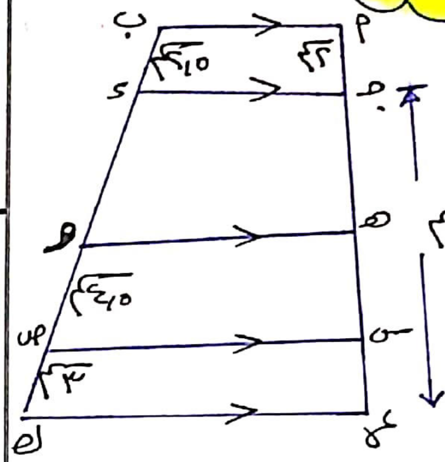



$\frac{١٢}{٣}$ = ٤ ∴ س ص = ص ع = ع ل = ٤ سم

∴ س ع = ٨ سم

## الواجب

**١**

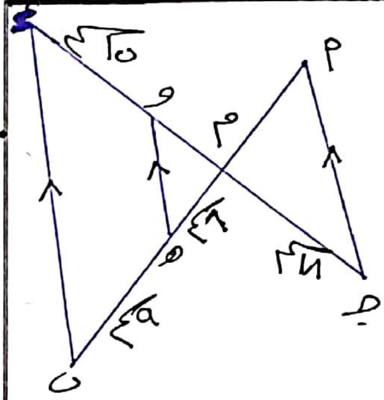


حـ ء = ١٢ سم

أوجد طول

$\overline{هـ س}$ ، $\overline{س ع}$ ، $\overline{حـ هـ}$ ، $\overline{ء و}$

**٢**



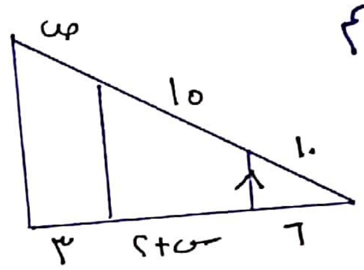
أوجد طول

$\overline{م و}$ ، $\overline{م م}$

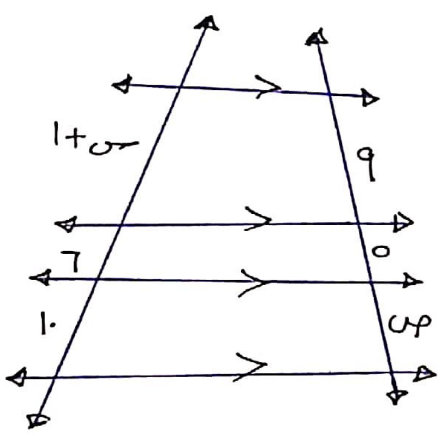
**٣**

الأطوال مقدرة بـ سم

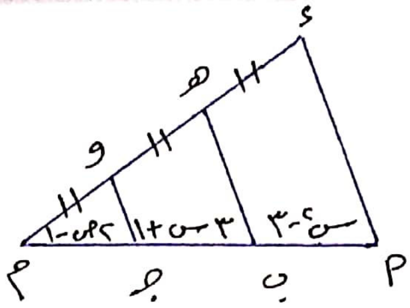
أوجد قيم س ، ص



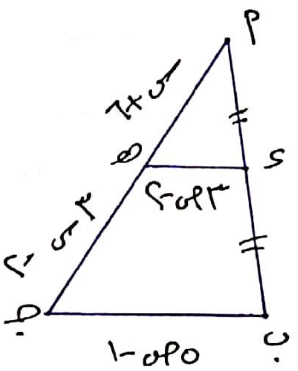

**٤**

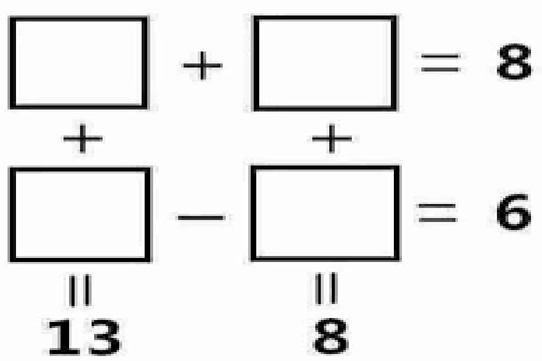



**٥**



**٦**



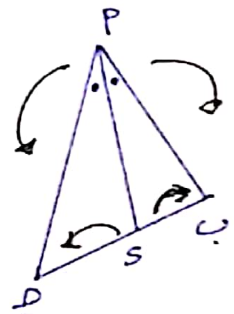



# الدرس الثالث : منصفا الزاوية

الوحدة الثانية

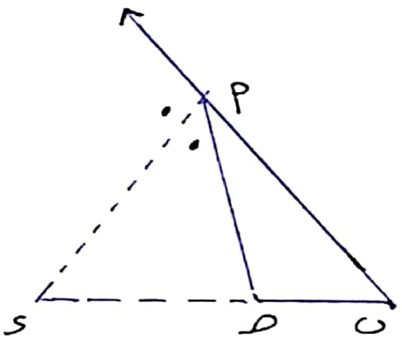
## نظرية (٣)

إذا نُصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس ، وقسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو الخارج إلى جزأين كانت النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين




أد منصف داخلي

$$\frac{أب}{أج} = \frac{دب}{دج}$$




أد منصف خارجي

$$\frac{أب}{أج} = \frac{دب}{دج}$$

### طول المنصف

$$أد = \sqrt{أب \times أج - ب د \times د ج}$$

من الداخل
الضلعين - الجزئين

$$أد = \sqrt{ب د \times د ج - أب \times أج}$$

من الخارج
الجزئين - الضلعين

## ملاحظات

١ المنصفان الداخلي والخارجي لنفس الزاوية من المثلث متعامدان

٢ قياس الزاوية بين المنصف الداخلي والخارجي = ٩٠° [قائمة]

٣ المنصف الخارجي لزاوية رأس المثلث المتساوي الساقين يوازي القاعدة.

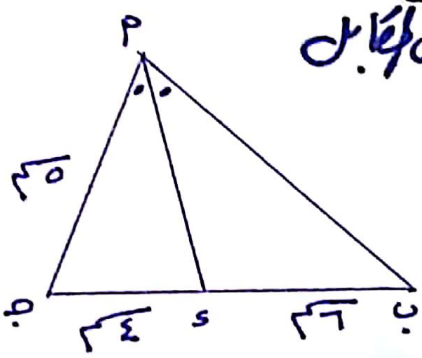
٤ منصفات زوايا المثلث الداخلة تتقاطع في نقطة واحدة هي مركز الدائرة الداخلة للمثلث.

إذا قابلنا الإساءة بالإساءة... فمتى تنتهي الإساءة ...

من أراد الدنيا فعليه بالقرآن
ومن أراد الآخرة فعليه بالقرآن
ومن أرادهما معاً فعليه بالقرآن

## مثال ١

في الشكل المقابل




أوجد طول $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أد}}$

**الحل**

∵ $\overline{\text{أد}}$ ينصف $\angle$ ب أ ج

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{أج}} = \frac{\text{ب د}}{\text{د ج}}$

∴ $\frac{\text{أب}}{5} = \frac{6}{4}$

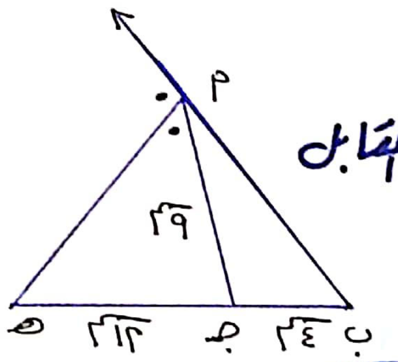
$\text{أب} = \frac{5\times 6}{4} = 7{,}5$ سم

$\text{أد} = \sqrt{\text{أب}\times\text{أج} - \text{ب د}\times\text{د ج}}$

$= \sqrt{7{,}5\times 5 - 4\times 6} \simeq 3{,}7$ سم

## مثال ٢

في الشكل المقابل




أوجد طول $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أهـ}}$

**الحل**

$\overline{\text{أهـ}}$ المنصف

$\frac{\text{أب}}{\text{أج}} = \frac{\text{هـب}}{\text{هـج}}$

$\frac{\text{أب}}{9} = \frac{16}{12}$

∴ $\text{أب} = \frac{9\times 16}{12} = 12$ سم

طول المنصف $\overline{\text{أهـ}}$

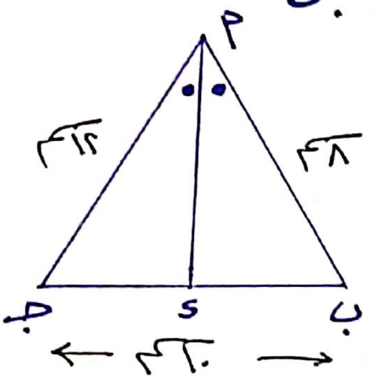
$\text{أهـ} = \sqrt{\text{هـج}\times\text{هـب} - \text{أج}\times\text{أب}}$

$= \sqrt{12\times 16 - 9\times 12}$

$\simeq 9{,}17$ سم

## مثال ٣

في الشكل المقابل




أوجد طول $\overline{\text{ب د}}$ ، $\overline{\text{أد}}$

**الحل**

∵ $\overrightarrow{\text{أد}}$ ينصف (ب أ ج)

∴ $\frac{\text{د ب}}{\text{د ج}} = \frac{\text{أب}}{\text{أج}}$

$\text{د ج} = 10 - \text{ب د}$

$\frac{\text{ب د}}{10 - \text{ب د}} = \frac{8}{12}$

$12\,\text{ب د} = 8\,(10 - \text{ب د})$

$12\,\text{ب د} = 80 - 8\,\text{ب د}$

$12\,\text{ب د} + 8\,\text{ب د} = 80$

$20\,\text{ب د} = 80$

$\text{ب د} = \frac{80}{20} = 4$ سم

∴ $\text{د ج} = 10 - 4 = 6$ سم

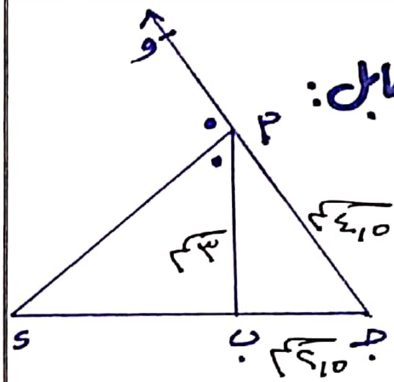
طول المنصف أد

$$\text{أد} = \sqrt{\text{أب} \times \text{أجـ} - \text{ب د} \times \text{د جـ}}$$

$$= \sqrt{8 \times 12 - 4 \times 6} \simeq 8{,}49 \text{ سم}$$

## مثال ٤

في الشكل المقابل: أوجد طول بد ، أد




### الحل

∵ أد ينصف (ب̂أو)

$$\therefore \frac{\text{أب}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{د ب}}{\text{د جـ}}$$

$$\frac{3}{4{,}5} = \frac{\text{ب د}}{\text{ب د} + 2{,}5}$$

$$4{,}5 \text{ ب د} = 3(\text{ب د} + 2{,}5)$$

$$4{,}5 \text{ ب د} = 3 \text{ ب د} + 7{,}5$$

$$4{,}5 \text{ ب د} - 3 \text{ ب د} = 7{,}5$$

$$1{,}5 \text{ ب د} = 7{,}5$$

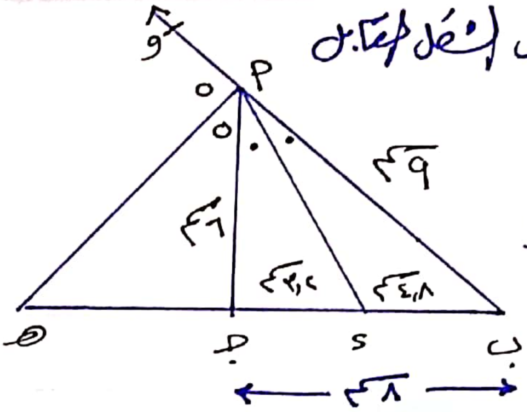
$$\therefore \text{ب د} = \frac{7{,}5}{1{,}5} = 5 \text{ سم}$$

$$\text{أد} = \sqrt{\text{د ب} \times \text{د جـ} - \text{أب} \times \text{أجـ}}$$

$$= \sqrt{5 \times 7{,}5 - 3 \times 4{,}5} \simeq 4{,}9 \text{ سم}$$

## مثال ٥

في الشكل المقابل أوجد طول جـ د ، جـ هـ




### الحل

∵ أد ينصف ب̂أجـ من الداخل

$$\therefore \frac{\text{أب}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{ب د}}{\text{د جـ}}$$

$$\frac{9}{6} = \frac{8 - \text{د جـ}}{\text{د جـ}}$$

$$9 \text{ د جـ} = 6(8 - \text{د جـ})$$

$$9 \text{ د جـ} = 48 - 6 \text{ د جـ}$$

$$9 \text{ د جـ} + 6 \text{ د جـ} = 48$$

$$15 \text{ د جـ} = 48$$

$$\text{د جـ} = \frac{48}{15} = 3{,}2$$

في △ أبهـ

، ∵ أهـ ينصف (هـ̂أو) من الخارج

$$\therefore \frac{\text{أب}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}} \quad \therefore \frac{9}{6} = \frac{\text{هـ جـ} + 8}{\text{هـ جـ}}$$

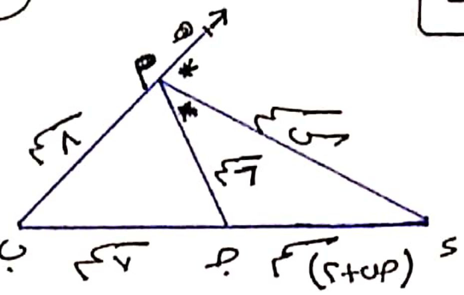
$$9 \text{ هـ جـ} = 6(\text{هـ جـ} + 8)$$

$$9 \text{ هـ جـ} = 6 \text{ هـ جـ} + 48$$

$$9 \text{ هـ جـ} - 6 \text{ هـ جـ} = 48$$

$$3 \text{ هـ جـ} = 48 \quad \therefore \text{هـ جـ} = \frac{48}{3} = 16 \text{ سم}$$

## مثال ٦




أوجد قيمة س ، ص

**الحل**

∵ $\overrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ($\hat{\text{أ}}$) الخارجة

∴ $\frac{\text{ءجـ}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{أب}} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$

∴ $\frac{\text{ص}+٢}{\text{ص}+٢+٧} = \frac{٣}{٤}$

$٤(\text{ص}+٢) = ٣(\text{ص}+٩)$

$٤\text{ص}+٨ = ٣\text{ص}+٢٧$

$٤\text{ص} - ٣\text{ص} = ٢٧ - ٨$

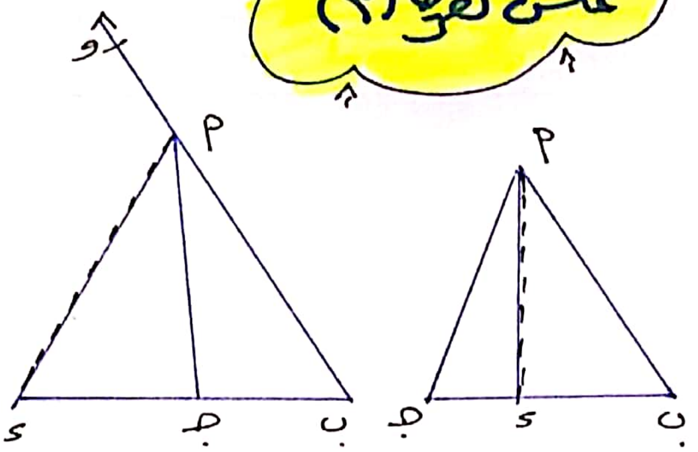
$\text{ص} = ١٩$

∴ $\text{ءجـ} = \text{ص}+٢ = ١٩+٢ = ٢١$ سم

∴ $\text{أء} = \sqrt{\text{ءجـ} \times \text{ءب} - \text{أجـ} \times \text{أب}}$

$= \sqrt{٢١ \times ٢٨ - ٦ \times ٨} \simeq ٢٣{,}٢٣$ سم

## عكس نظرية (٣)



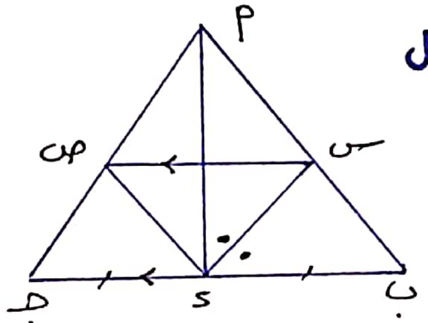

إذا كان

$\frac{\text{بء}}{\text{ءجـ}} = \frac{\text{أب}}{\text{أجـ}}$

فإن $\overrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ($\text{ب}\hat{\text{أ}}\text{جـ}$) الداخلة أو الخارجة

## مثال ٧

في الشكل المقابل




اثبت أن

$\overrightarrow{\text{ءص}}$ ينصف ($\text{أ}\hat{\text{ء}}\text{جـ}$)

**الحل**

في △ أءب ∵ $\overrightarrow{\text{ءس}}$ ينصف ($\text{أ}\hat{\text{ء}}\text{ب}$)

∴ $\frac{\text{سأ}}{\text{سب}} = \frac{\text{ءأ}}{\text{ءب}}$ ← (١)

في △ أب جـ ∵ $\overline{\text{سص}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$

∴ $\frac{\text{سأ}}{\text{سب}} = \frac{\text{صأ}}{\text{صجـ}}$ ← (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن

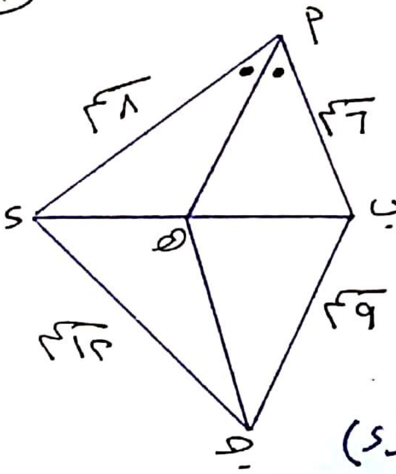
$\frac{\text{ءأ}}{\text{ءب}} = \frac{\text{صأ}}{\text{صجـ}}$ ، ∵ ءب = ءجـ

∴ $\frac{\text{ءأ}}{\text{ءجـ}} = \frac{\text{صأ}}{\text{صجـ}}$ ∴ $\overrightarrow{\text{ءص}}$ ينصف ($\text{أ}\hat{\text{ء}}\text{جـ}$)

## استراحة

عشرة وعشرتين وقلوهم مرتين
وخمسة وثلاثة واثنين يبقوا
كام ؟

**مثال ٨** في الشكل المقابل




اثبت أن

$\overrightarrow{جـ هـ}$ ينصف (ب $\hat{جـ}$ د)

**الحل**

في △ م ب د فيه $\overrightarrow{م هـ}$ ينصف (ب $\hat{م}$ د)

∴ $\frac{هـ ب}{هـ د} = \frac{م ب}{م د} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$ ← (١)

في △ ب جـ د

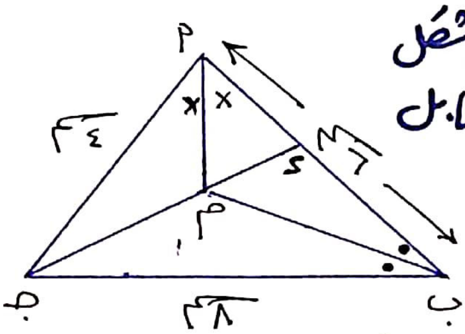
∴ $\frac{جـ ب}{جـ د} = \frac{٩}{١٢} = \frac{٣}{٤}$ ← (٢)

∴ من (١)، (٢)

$\frac{جـ ب}{جـ د} = \frac{هـ ب}{هـ د}$

∴ $\overrightarrow{جـ هـ}$ ينصف (ب $\hat{جـ}$ د) #

**مثال ٩** في الشكل المقابل




أوجد طول م د

**الحل**

تذكر أن منصفات زوايا المثلث الداخلة تتلاقى في نقطة واحدة.

∵ $\overrightarrow{م م}$ ينصف (ب $\hat{م}$ جـ) ، ب م ينصف (م $\hat{ب}$ جـ)

∴ م هي نقطة تلاقي منصفات زوايا △ م ب جـ

∴ $\overrightarrow{جـ م}$ ينصف (م $\hat{جـ}$ ب)

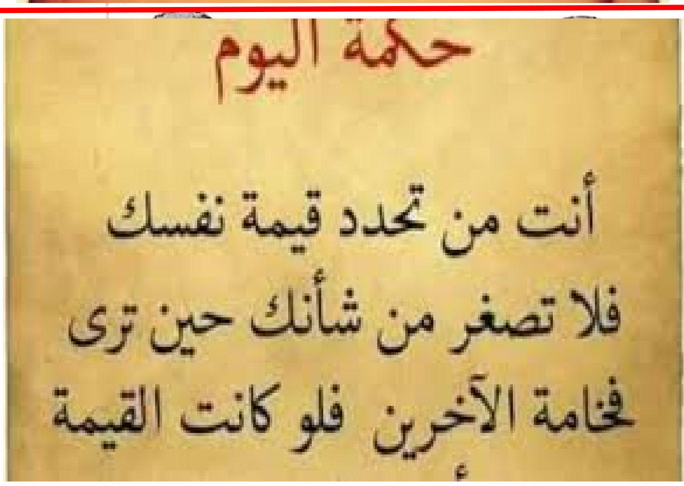
∵ في △ م ب جـ ∴ $\frac{د م}{د ب} = \frac{جـ م}{جـ ب} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

$\frac{م د}{٦ - م د} = \frac{١}{٢}$

٢ م د = ٦ − م د

٢ م د + م د = ٦

٣ م د = ٦ ∴ م د = $\frac{٦}{٣}$ = ٢ سم

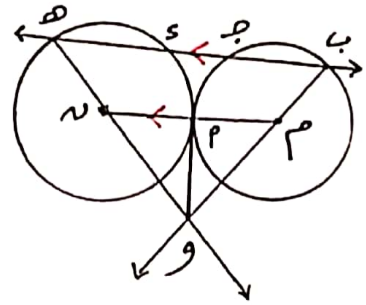



**مثال ١٠**

دائرتان م ، ن متماستان من الخارج فى أ رسم مستقيم يوازى $\overleftrightarrow{م ن}$ فقطع الدائرة م فى ب ، جـ والدائرة ن فى د ، هـ على الترتيب . فإذا تقاطع $\overrightarrow{ب م}$ ، $\overrightarrow{هـ ن}$ فى و

أثبت أن $\overrightarrow{و أ}$ ينصف (م و̂ ن)

**الحل**




فى Δ ب و هـ

∵ $\overleftrightarrow{م ن}$ // ب هـ

∴ $\frac{ب م}{و م} = \frac{هـ ن}{و ن}$

، ∵ ب م = م أ

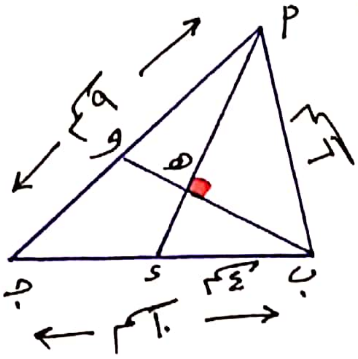
، هـ ن = أ ن

∴ $\frac{م أ}{م و} = \frac{أ ن}{و ن}$ ∴ $\frac{و م}{و ن} = \frac{م أ}{أ ن}$

∴ $\overrightarrow{و أ}$ ينصف (م و̂ ن) #

**مثال ١١**

فى الشكل المقابل




من معطيات الشكل

(١) أثبت أن $\overrightarrow{أ د}$ ينصف (أ̂)

(٢) أوجد: م(Δ أ ب و) : م(Δ د ب و)

**الحل**

(١) فى Δ أ ب جـ ∵ د جـ = ١٠ - ٤ = ٦ سم

∴ $\frac{ب د}{د جـ} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

، $\frac{أ ب}{أ جـ} = \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$

∴ $\frac{د ب}{د جـ} = \frac{أ ب}{أ جـ}$

∴ $\overrightarrow{أ د}$ ينصف (أ̂) # أولاً

(٢) فى Δ أ ب و : ∵ $\overrightarrow{أ د}$ ينصف (أ̂) ، أ هـ ⊥ ب و

من تطابق ΔΔ أ هـ ب ، أ هـ و

∴ Δ أ ب و متساوى الساقين

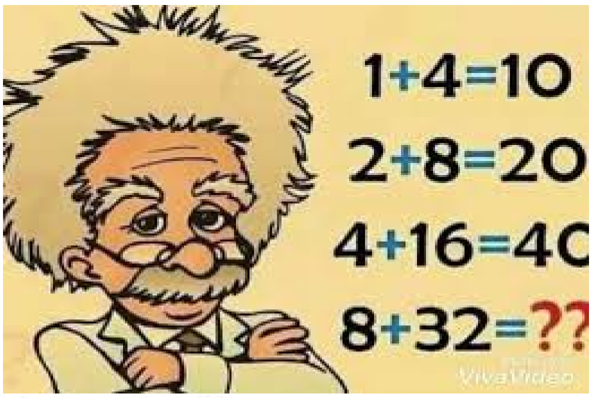
∴ أ ب = أ و = ٦ سم

∴ جـ و = ٩ - ٦ = ٣ سم

∵ ΔΔ ب أ و ، ب جـ و مشتركان فى الرأس ب ، و جـ $\overleftrightarrow{أ و}$

∴ $\frac{م(Δ أ ب و)}{م(Δ جـ ب و)} = \frac{أ و}{و جـ} = \frac{٦}{٣} = ٢$

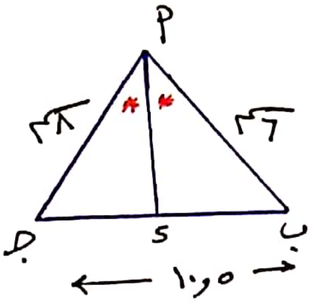
تذكر أن النسبة بين مساحتى مثلثين مرسومين على قاعدة واحدة ومشتركان فى الرأس تساوى النسبة بين طولى قاعدتيهما .

## اختبر

**١** في الشكل المقابل

بد = ....... سم




(أ) ٤ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (ج) ٤٫٥ (د) ٤٥

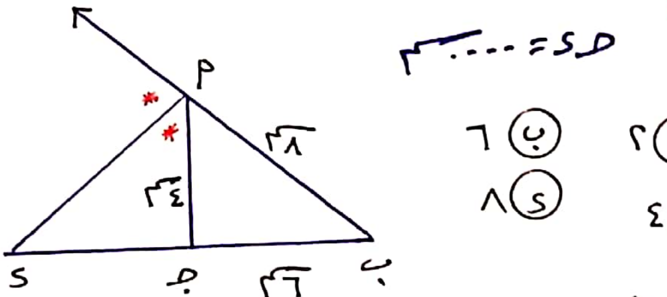
$\frac{بد}{دج} = \frac{أب}{أج} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$

بفرض أن بد = ٣ل ، دج = ٤ل

∴ بج = ٧ل

بد = $\frac{٣}{٧}$ × ١٠٫٥ = ٤٥

**٢** جد = ....... سم




(أ) ٢ (ب) ٦ (ج) ٤ (د) ٨

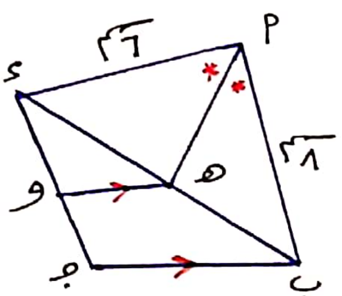
أد منصف خارجي للزاوية (أ)

∴ $\frac{دج}{دب} = \frac{أج}{أب} = \frac{١}{٢}$

$\frac{دج}{دج+٦} = \frac{١}{٢}$ ، ٢دج = دج + ٦

∴ دج = ٦ سم

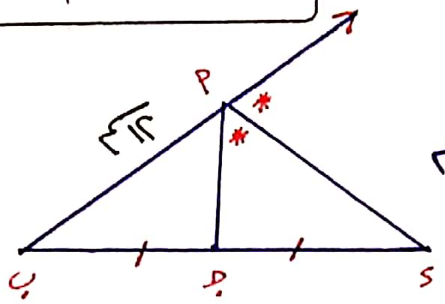
**٣** $\frac{دو}{وج} = \frac{.....}{.....}$




(أ) $\frac{٤}{٣}$ (ب) $\frac{٨}{٧}$ (ج) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

$\frac{دو}{وج} = \frac{ده}{هب} = \frac{دأ}{أب} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$

**٤** أج = ....... سم




(أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٦ (د) ٨

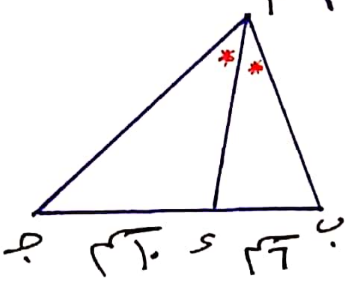
أد منصف خارجي للزاوية (أ)

$\frac{دج}{دب} = \frac{أج}{أب}$ ∴ $\frac{دج}{دب} = \frac{١}{٢}$

∴ $\frac{أج}{١٢} = \frac{١}{٢}$ ∴ أج = ٦ سم

**٥** إذا كان أج − أب = ٦ سم

فإن أج = ....... سم



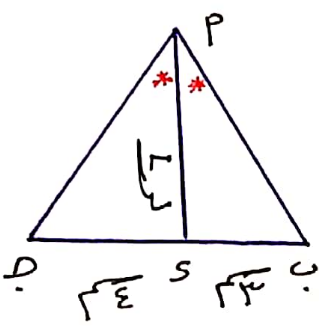

(أ) ١٣ (ب) ١٤ (ج) ١٥ (د) ١٦

∵ أج − أب = ٦ ∴ $\boxed{أج - ٦ = أب}$

∵ أد منصف داخلي ∴ $\frac{أب}{أج} = \frac{بد}{دج} = \frac{٦}{١٠}$

$\frac{أج-٦}{أج} = \frac{٦}{١٠}$ مقص ∴ أج = ١٥ سم

**٦** أج = ....... سم




(أ) ١٢ (ب) ١٠ (ج) ٩ (د) ٨

أب = ٣ل ، أج = ٤ل

$\sqrt{٣ل \times ٤ل - ١٢} = ٦$ بتربيع الطرفين

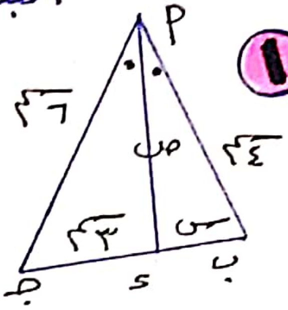
١٢ل² − ١٢ = ٣٦ ∴ ١٢ل² = ٤٨ ، ل² = ٤

∴ ل = ٢ ∴ أج = ٤ × ٢ = ٨ سم

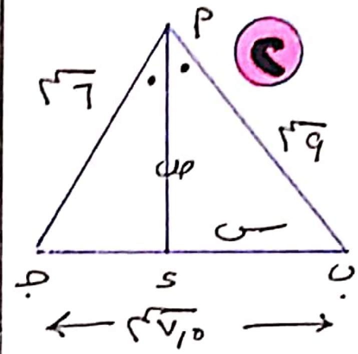
# الواجب

أوجد قيمة س ، ص

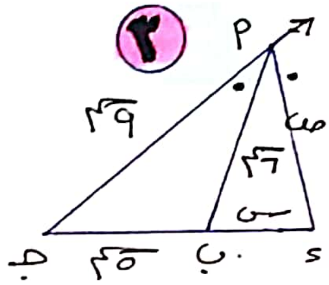
(١)



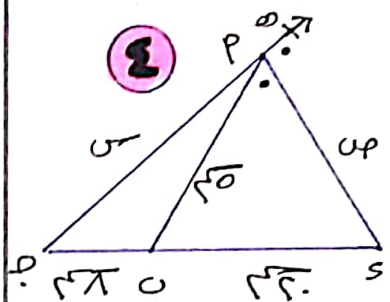
(٢)



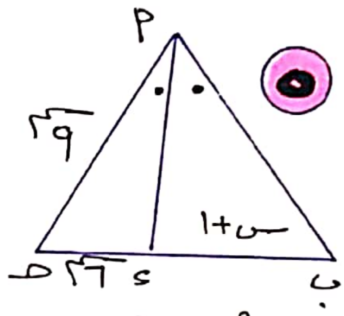
(٣)



(٤)

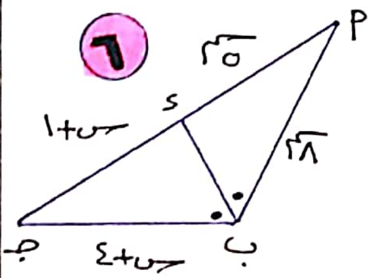


(٥)



ثم أوجد م ء

(٦)

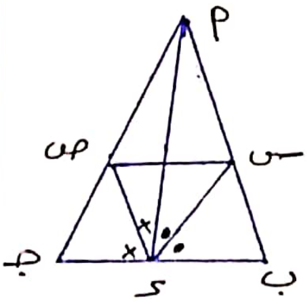


ثم أوجد ب ء

(٧) △ م ب جـ فيه م ب = ٣٠ سم ، م جـ = ٣٦ سم ، ب جـ = ١٢ سم نصفت ($\hat{م}$) بمنصف قطع $\overline{ب جـ}$ في هـ أوجد طول $\overline{هـ جـ}$

(٨) في الشكل المقابل

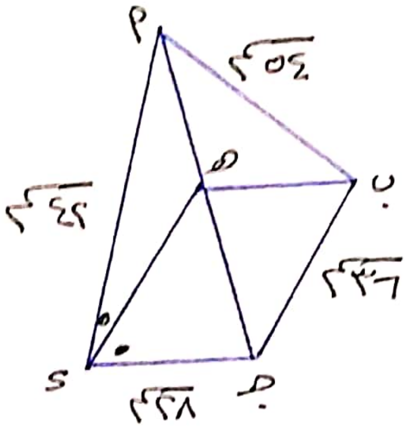
اثبت أن $\overline{س ص}$ // $\overline{ب جـ}$



(٩) اثبت أن

$\overrightarrow{ب هـ}$ ينصف

(م $\hat{ب}$ جـ)



(١٠) م ب جـ مثلث ، ء ∈ $\overrightarrow{ب جـ}$ ، ء ∉ $\overline{ب جـ}$

حيث جـ ء = م ب ورسم

$\overrightarrow{جـ هـ}$ // $\overrightarrow{ء م}$ ويقطع $\overrightarrow{ب م}$ في هـ

ورسم $\overrightarrow{هـ و}$ // $\overrightarrow{ب جـ}$ ويقطع $\overrightarrow{م جـ}$

في و .

اثبت أن $\overrightarrow{ب و}$ ينصف (م $\hat{ب}$ جـ)

من أجمل المعاكسات اللي سمعتها

- اسم القمر ايه ؟؟

- نايل سات يا خفيف

- طيب ممكن التردد D:

الوحدة الثانية

# الدرس الرابع : تطبيقات التناسب فى الدائرة

## قوة نقطة بالنسبة للدائرة

ق$_م$(أ) = (م أ)$^٢$ − نق$^٢$

قوة النقطة أ بالنسبة للدائرة م = (البعد بين النقطة والمركز)$^٢$ − نق$^٢$

إذا كانت ق$_م$(أ) > ٠ موجبة
∴ م أ > نق وتكون النقطة خارج الدائرة

إذا كانت ق$_م$(أ) = ٠
∴ م أ = نق وتكون النقطة تقع على الدائرة.

إذا كانت ق$_م$(أ) < ٠ سالبة
∴ م أ < نق وتكون النقطة داخل الدائرة.

**مثال ١**
إذا كانت م دائرة نصف قطرها نق فأوجد قوة النقطة أ فى الحالات التالية

(١) م أ = ١٢ سم ، نق = ٩ سم

**الحل**
ق$_م$(أ) = (م أ)$^٢$ − (نق)$^٢$
= (١٢)$^٢$ − (٩)$^٢$ = ٦٣
∴ النقطة تقع خارج الدائرة

(٢) م أ = ٧ سم ، نق = ٧ سم

**الحل**
ق$_م$(أ) = (م أ)$^٢$ − نق$^٢$
= ٧$^٢$ − ٧$^٢$ = صفر
∴ أ تقع على محيط الدائرة.

(٣) م أ = ٦ سم ، نق = ٧ سم

**الحل**
ق$_م$(أ) = (م أ)$^٢$ − نق$^٢$
= (٦)$^٢$ − (٧)$^٢$ = −١٣
∴ أ داخل الدائرة

**مثال ٢**
إذا كان نق = ٣ سم حدد موقع النقط التالية والبعد إذا كان

(١) ق$_م$(أ) = ١٦

**الحل**
ق$_م$(أ) > ٠ موجب
∴ أ خارج الدائرة
ق$_م$(أ) = (م أ)$^٢$ − نق$^٢$
١٦ = (م أ)$^٢$ − ٣$^٢$
(م أ)$^٢$ = ١٦ + ٩ = ٢٥
∴ م أ = √٢٥ = ٥ سم

② ق_م(ب) = صفر

**الحل**

∵ ق_م(ب) = صفر ∴ ب تقع على الدائرة

∴ م ب = نق = ٣√٢

③ ق_م(جـ) = −٥

**الحل**

∵ ق_م(جـ) = −٥ < ٠ سالب يعني

∴ جـ تقع داخل الدائرة

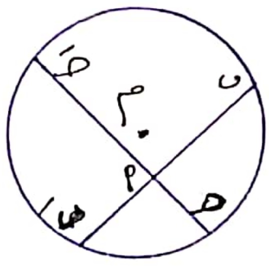
∵ ق_م(جـ) = (م جـ)² − نق²

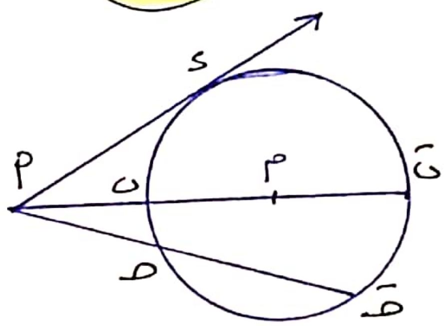
(م جـ)² − ٣² = −٥

(م جـ)² = −٥ + ٩ = ٤

∴ م جـ = √٤ = ٢

## ملاحظات





ق_م(أ) = أب × أبَ

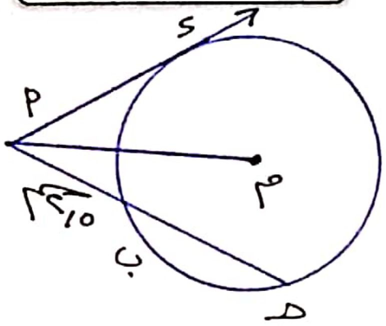
= أجـ × أجـَ

= (أد)²

ق_م(أ) = −أب × أبَ

= −أجـ × أجـَ

## مثال ٣



نق = ٣√٢

أم = ٥√٢

أب = ٢٫٥√٢

أوجد طول كلاً من بجـ ، أد

**الحل**

∵ ق_م(أ) = (أم)² − نق² = (٥)² − (٣)² = ١٦

، ∵ ق_م(أ) = أب × أجـ = (أد)² = ١٦

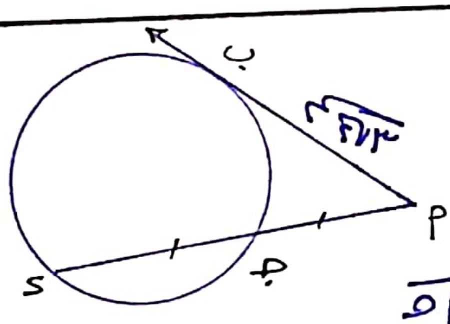
∴ أب × أجـ = ١٦

١٦ = أجـ × ٢٫٥ ∴ أجـ = ١٦ / ٢٫٥

∵ أجـ = ٦٫٤√٢ ∴ بجـ = ٦٫٤ − ٢٫٥ = ٣٫٩√٢

، ∵ (أد)² = ١٦ ∴ أد = √١٦ = ٤√٢

## مثال ٤



أوجد طول أجـ

**الحل**

∵ أجـ × أد = (أب)²

∴ أجـ × ٢أجـ = (٣√٢)²

٢(أجـ)² = ١٨

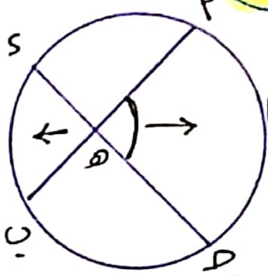
∴ (أجـ)² = ١٨ / ٢ = ٩

∴ أجـ = √٩ = ٣√٢

**ملاحظة:** إذا كان ق_م(أ) = نق فإن أ ∈ الدائرة تعرف ليه ؟؟

## زاوية تقاطع وترين

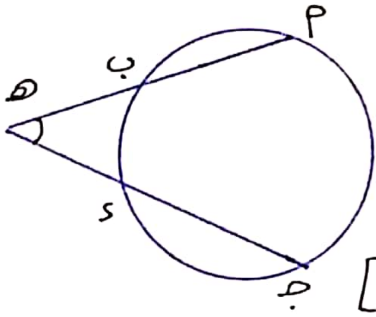
### داخل الدائرة



ق(∠أهـجـ) = $\frac{1}{2}$ [ق(أجـ) + ق(ب د)]

= $\frac{1}{2}$ مجموع القوسين المقابلين لها

### خارج الدائرة



ق(∠هـ)

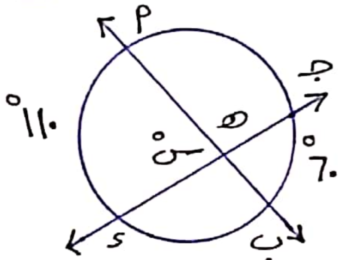
= $\frac{1}{2}$ [ق(أجـ) − ق(ب د)]

= $\frac{1}{2}$ [قياس القوس الأكبر − قياس القوس الأصغر]

## أوجد قيمة س في كل مما يلي

مثال ٥

**١**



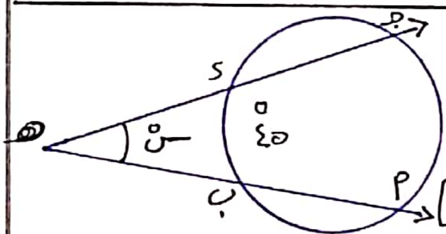
س = $\frac{1}{2}$ [ق(أد) + ق(ب جـ)]

س = $\frac{1}{2}$ [١١٠ + ٦٠]

= $\frac{1}{2}$ × (١٧٠)

= ٨٥°

**٢**

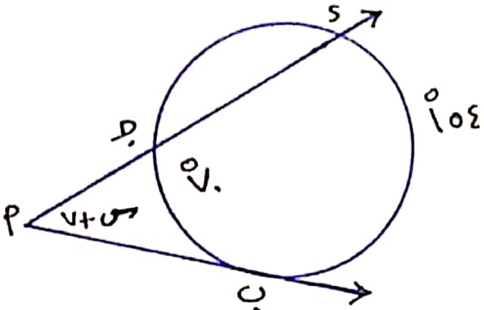


س = $\frac{1}{2}$ [ق(أجـ) − ق(ب د)]

س = $\frac{1}{2}$ [١١٥° − ٤٥°]

= $\frac{1}{2}$ [٧٠] = ٣٥°

**٣**



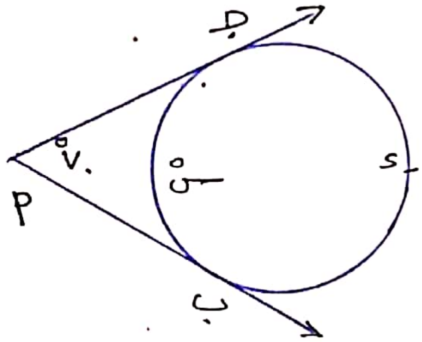
(س + ٧) = $\frac{1}{2}$ [ق(أب) − ق(ب جـ)]

= $\frac{1}{2}$ [١٥٤ − ٧٠] = $\frac{1}{2}$ × ٨٤ = ٤٢°

س + ٧ = ٤٢ س = ٤٢ − ٧

∴ س = ٣٥

**٤**



∵ قياس الدائرة = ٣٦٠°، ق(ب جـ) = س

∴ ق(ب د جـ) = ٣٦٠ − س°

∴ ٧٠ = $\frac{1}{2}$ [ق(ب د جـ) − ق(ب جـ)]

$\frac{1}{2}$ [٣٦٠ − س − س] = ٧٠

(×٢) $\frac{1}{2}$ [٣٦٠ − ٢س] = ٧٠

٣٦٠ − ٢س = ١٤٠

−٢س = ١٤٠ − ٣٦٠

−٢س = −٢٢٠

∴ س = $\frac{-٢٢٠}{-٢}$ = ١١٠°

## ملحوظة

إذا كانت $ق_م(أ) = ق_ن(أ)$ فإن أ تقع على المحور الأساسي للدائرتين م ، ن

وإذا كانت $ق_م(أ) = ق_ن(أ)$
، $ق_م(ب) = ق_ن(ب)$
فإن $\overleftrightarrow{أب}$ محور أساسي للدائرتين م ، ن

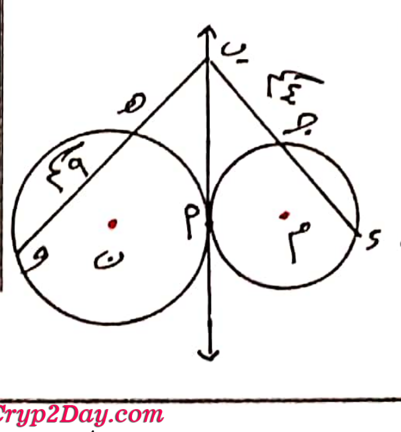
## مثال ٦

دائرتان م ، ن متماستان من الخارج في أ ، $\overleftrightarrow{أب}$ مماس مشترك للدائرتين م ، ن ، $\overrightarrow{بجـ}$ يقطع الدائرة م في جـ ، د ، $\overrightarrow{بهـ}$ يقطع الدائرة ن في هـ ، و على الترتيب

المطلوب

1. اثبت أن $\overleftrightarrow{أب}$ محور أساسي للدائرتين م ، ن
2. إذا كانت $ق_م(ب) = ٣٦$ ، بجـ = ٤ سم ، هـو = ٩ سم أوجد طول كلاً من $\overline{جـد}$ ، $\overline{أب}$ ، $\overline{بهـ}$

الحل




∵ أ تقع على الدائرة م
، أ تقع على الدائرة ن
∴ $ق_م(أ) = ق_ن(أ) = ٠$

، ∵ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م عند أ
∴ $\boxed{ق_م(ب) = (أب)^2}$
، ∵ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة ن عند أ
∴ $ق_ن(ب) = (أب)^2$
∴ $\boxed{ق_ن(ب) = (بأ)^2}$
∴ $ق_م(ب) = ق_ن(ب)$
∴ $\overleftrightarrow{أب}$ محور أساسي للدائرتين م ، ن # أولاً

∵ $ق_م(ب) = بجـ \times بد$
∴ $٣٦ = ٤ \times بد$
∴ بد = ٩ سم ∴ جـد = ٥ سم

∵ $(أب)^2 = بجـ \times بد$
$= ٤ \times ٩ = ٣٦$
∴ أب = ٦ سم

، ∵ $(أب)^2 = بهـ \times بو$
$٣٦ = (بهـ)(بهـ + ٩)$
$(بهـ)^2 + ٩(بهـ) - ٣٦ = ٠$
$(بهـ + ١٢)(بهـ - ٣) = ٠$
∴ بهـ = ٣ سم

# الواجب

## ١ أوجد قوة النقطة المعطاة بالنسبة لـ م

(١) م أ = ٧ سم ، نق = ٦ سم

(٢) م أ = ١٠ سم ، نق = ١٠ سم

(٣) م أ = ٨ سم ، نق = ٩ سم

## ٢ حدد موضع كل من أ ، ب ، جـ إذا كان طول نصف قطر الدائرة = ١٠ سم

(١) ق$_{م}$(أ) = ٩٦

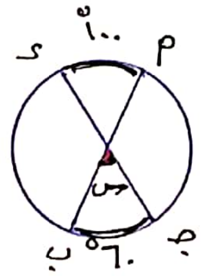
(٢) ق$_{م}$(أ) = صفر

(٣) ق$_{م}$(أ) = -٣٦

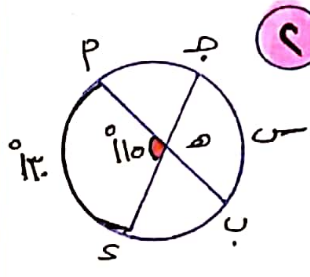
## ٣ إذا كان بعد نقطة عن مركز دائرة = ٢٥ سم وقوة هذه النقطة بالنسبة إلى الدائرة = ٤٠٠ فأوجد طول نصف قطر الدائرة.

## ٤ أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس

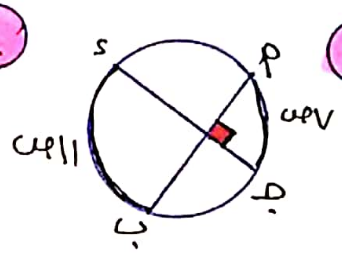
(١)



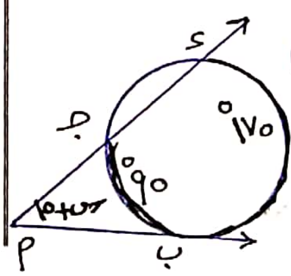

(٢)



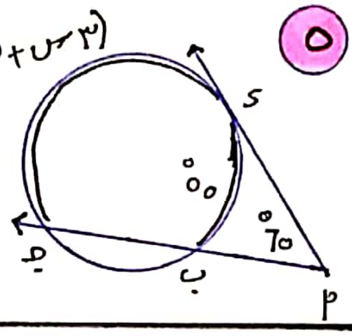

(٣)



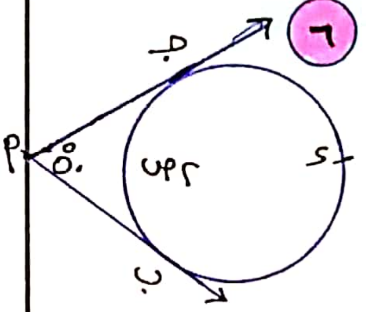

(٤)



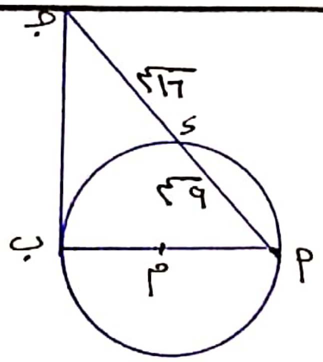

(٥)




(٦)



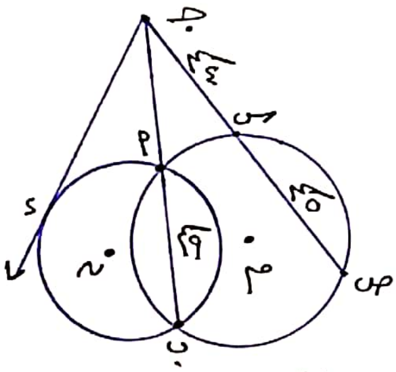

## ٥ ب جـ مماس أوجد




(١) طول نصف قطر الدائرة

(٢) مساحة المثلث أ ب جـ

## ٦ في الشكل المقابل




(١) أوجد طول جـ ء ، جـ ص

(٢) أثبت أن $\overleftrightarrow{أب}$ محور أساسي للدائرتين.

الفكرة : تثبت أن ق$_{م}$(أ) = ق$_{ن}$(أ) = صفر

، ق$_{م}$(ب) = ق$_{ن}$(ب) = صفر

انتهى بفضل الله وتوفيقه منهج الفصل الدراسي الأول

مع أطيب وأرق تمنياتي القلبية بالنجاح والتفوق

محمد أدهم