Math

Math

ملزمة شرح

الهندسة ١

الصف الأول الثانوى

الفصل الدراسى الأول

منتدى توجيه الرياضيات أ / عادل إدوار

أ / إبراهيم ميكائيل

الأول

الهندسة المستوية

للصف الأول الثانوي

الفصل الدراسي الأول

إعداد أ / إبراهيم ميكائيل
٠١٠٢٠٦١٢٠٠٢
٠١١٥٥٧٢٢١٦٩

الوحدة الثالثة : التشابه

دروس الوحدة

الدرس الأول : تشابه المضلعات

الدرس الثاني : تشابه المثلثات

الدرس الثالث : العلاقة بين مساحتي سطحي مضلعين متشابهين

الدرس الرابع : تطبيقات التشابه في الدائرة

الدرس الأول
تشابه المضلعات

درسنا فيما سبق أنه :

تعريف (١):

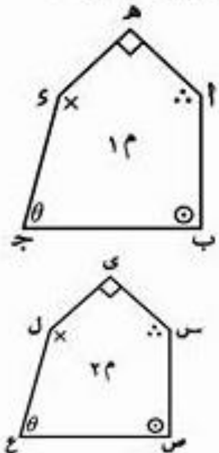
يقال لمضلعين (لهما نفس العدد من الأضلاع) إنهما متشابهان إذا تحقق الشرطان الآتيان معاً

(أولاً) قياسات زواياهما المتناظرة متساوية .

(ثانياً) أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة .

ونعبر عن ذلك : المضلع م١ ~ المضلع م٢

فالمضلعان أ ب جـ ء هـ ، س ص ع ل ى يكونان متشابهين إذا كان



(١) ق(∠أ) = ق(∠س) ، ق(∠ب) = ق(∠ص) ، ق(∠جـ) = ق(∠ع) ، ق(∠ء) = ق(∠ل) ، ق(∠هـ) = ق(∠ى)

(٢) أب / س ص = ب جـ / ص ع = جـ ء / ع ل = ء هـ / ل ى = هـ أ / ى س

وفي هذه الحالة تكتب المضلع :

أ ب جـ ء هـ ~ س ص ع ل ى أو م١ ~ م٢

معامل التشابه لمضلعين :

ليكن ك معامل تشابه المضلع م١ للمضلع م٢

إذا كان :

ك > ١ فإن : المضلع م١ هو تكبير للمضلع م٢

٠ < ك < ١ فإن : المضلع م١ هو تصغير للمضلع م٢

ك = ١ فإن : المضلع م١ يطابق المضلع م٢

وبصفة عامة : يمكن استخدام معامل التشابه في حساب أبعاد الأشكال الهندسية .

ملاحظات هامة :

(١) نكتب المضلعين المتشابهين بترتيب الرؤوس المتناظرة .

(٢) إذا تشابه مضلعان فإننا نستنتج أن الشرطان السابقان محققان .

(٣) لكي يتشابه مضلعان يجب توفر الشرطين معاً ولا يكفي أحدهما دون الآخر .

(٤) المضلعان المتطابقان يكونان متشابهين .

(٥) المضلعان المشابهان لثالث متشابهان .

(٦) أي مضلعين منتظمين لهما نفس عدد الأضلاع يكونان متشابهين .

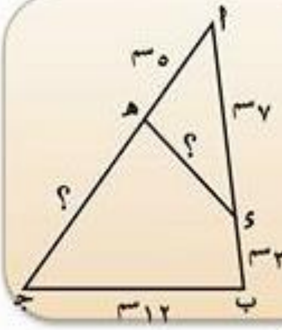
مثال ١ : في الشكل المقابل :

Δ أ ب جـ ~ Δ أ ء هـ

والأطوال كما بالرسم

أوجد طول كل من :

هـ ء ، هـ جـ



الحـل

∵ Δ أ ب جـ ~ Δ أ ء هـ

∴ أب / أهـ = ب جـ / ء هـ = أجـ / أء

∴ ١٠ / ٥ = ١٢ / ء هـ = أجـ / ٧

∴ هـ د = ٦ سم ، جـ أ = ١٤ سم

∴ هـ جـ = ١٤ − ٥ = ٩ سم

المستطيل الذهبي :

هو مستطيل يمكن تقسيمه إلى مربع ومستطيل آخر مشابه للمستطيل الأصلي ، بشرط أن يكون طوله أصغر من ضعف عرضه ، وتسمى النسبة بين طول المستطيل الذهبي إلى عرضه بالنسبة الذهبية .

والنسبة الذهبية = $\frac{\text{طول المستطيل الذهبي}}{\text{عرض المستطيل الذهبي}}$

والنسبة الذهبية هي ١.٦١٨ : ١ تقريبا

ملحوظة : جميع المستطيلات الذهبية متشابهة .

مثال ٢ : **ما** طول مستطيل ذهبي عرضه يساوي ٥ سم لأقرب سنتيمتر ؟

الحل

∵ $\frac{\text{الطول}}{\text{العرض}} = \frac{١٫٦١٨}{١}$

∴ الطول = $\frac{٥ \times ١٫٦١٨}{١} \simeq ٨$ سم

مثال ٣ : مستطيل ذهبي طوله ١٤ سم **أوجد** عرضه لأقرب سنتيمتر .

الحل

∵ $\frac{\text{الطول}}{\text{العرض}} = \frac{١٫٦١٨}{١}$ ∴ العرض = $\frac{١٤ \times ١}{١٫٦١٨} \simeq ٩$ سم

مثال ٤ : إذا كان بعدا مستطيل ٧.٤٢ سم ، ١٢ سم **فهل** هذا المستطيل يقترب من المستطيل الذهبي ؟

الحل

∵ النسبة بين طول هذا المستطيل وعرضه =

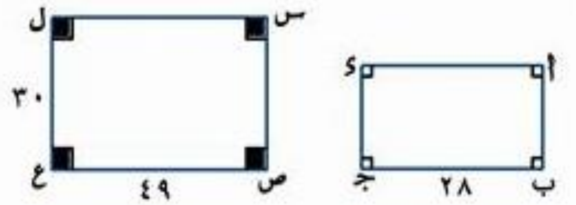
١٢ : ٧.٤٢ ≃ ١.٦١٧ : ١

∴ هذا المستطيل يقترب من المستطيل الذهبي

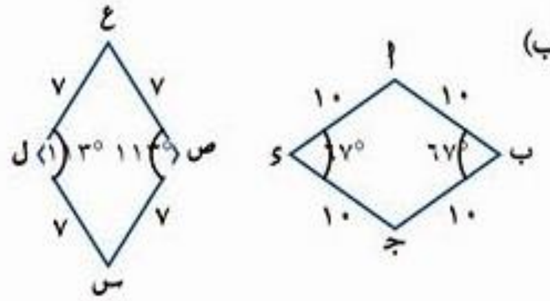
تمارين (١)

(١) **بين** أيا من أزواج المضلعات التالية تكون متشابهة ، واكتب المضلعات المتشابهة بترتيب الرؤوس المتناظرة ، وحدد معامل التشابه (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)

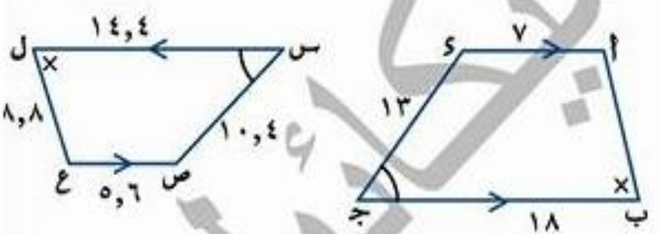
(أ)



(ب)



(جـ)



---

(٢) علبة على شكل مستطيل ذهبي طوله ١٦.٢ سم . **احسب** طوله لأقرب سنتيمتر .

---

(٣) إذا كان المضلع أ ب جـ د ∼ المضلع س ص ع ل . **أكمل** :

(أ) $\frac{\text{أب}}{\text{بجـ}} = \frac{.........}{\text{صع}}$ (ب) أ ب × ع ل = س ص × ...

(جـ) $\frac{\text{ب جـ + ص ع}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{.........+ ل س}}{\text{ل س}}$

(ء) $\frac{\text{محيط المضلع ....}}{\text{محيط المضلع ....}} = \frac{\text{س ص}}{\text{أ ب}}$

---

(٤) المضلع أ ب جـ ء ~ المضلع س ص ع ل . فإذا كان أ ب = ٣٢ سم ، ب جـ = ٤٠ سم ، س ص = ٣م − ١ ، ص ع = ٣م + ١ **أوجد** قيمة م العددية .

---

(٥) مستطيل بعداه ١٠ سم ، ٦ سم . **أوجد** محيط ومساحة مستطيل آخر مشابه له إذا كان :

(أ) معامل التشابه ٣ (ب) معامل التشابه ٠,٤

---

(٦) مستطيلان متشابهان بُعدا الأول ٨ سم ، ١٢ سم ، ومحيط الثاني ٢٠٠ سم . **أوجد** طول المستطيل الثاني ومساحته .

---

(٧) **في الشكل المقابل:**

△ أ ء هـ ~ △ أ ب جـ

أثبت أن :

$\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ،

ومن الأطوال المبينة على الشكل

أوجد طول $\overline{\text{ب ء}}$ ،

وطول $\overline{\text{جـ هـ}}$

---

(٨) **في الشكل المقابل:**

المضلع أ ب جـ ء ~ المضلع س ع ص ل

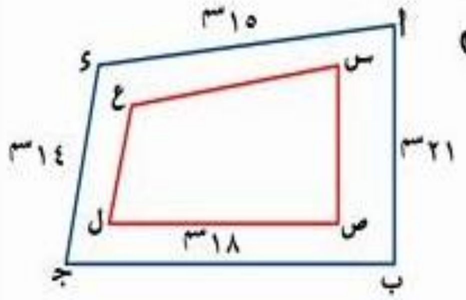
باستخدام الأطوال المبينة على الرسم

أوجد :

طول $\overline{\text{س ص}}$ ،

طول $\overline{\text{ع ل}}$ ،

طول $\overline{\text{س ل}}$



---

(٩) **في الشكل المقابل:**

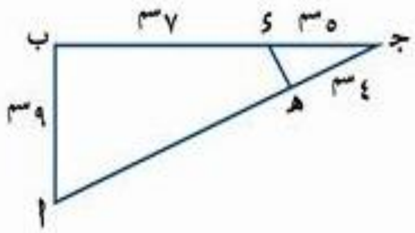
إذا كان △ جـ ب أ ~ △ جـ هـ ء

وباستخدام الأطوال المبينة على الرسم

أوجد :

طول $\overline{\text{هـ ء}}$

طول $\overline{\text{أ هـ}}$



---

(١٠) مثلثان متشابهان محيط أحدهما ٧٤سم وأطوال أضلاع الآخر ٤,٥ سم ، ٦ سم ، ٨ سم **أوجد** طول أكبر ضلع في المثلث .

---

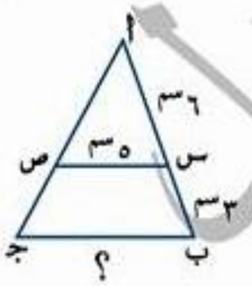
(١١) **في الشكل المقابل:**

△ أ ب جـ ~ △ أ س ص

أثبت أن : $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

ومن الأطوال المبينة على الرسم

أوجد طول $\overline{\text{ب جـ}}$



(١٢) في الشكل المقابل :

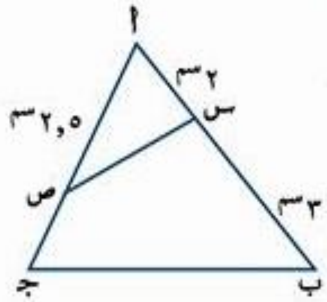
Δ أ ب جـ ~ Δ أ ص س

والأطوال على الرسم

أثبت أن الشكل

ب جـ ص س رباعي دائري

وأوجد طول ص جـ



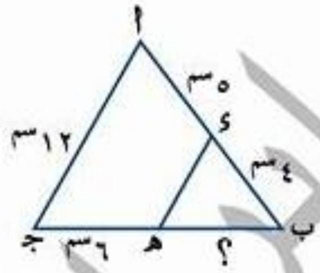
(١٣) في الشكل المقابل :

Δ ب ء هـ ~ Δ ب أ جـ

أثبت أن : ء هـ // أ جـ

ومن الأطوال الموضحه على الرسم أوجد طول كل من :

ب هـ ، ء هـ

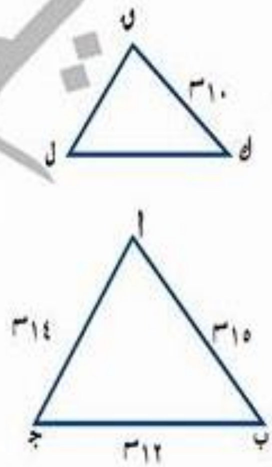


(١٤) في الشكل المقابل :

إذا كان : Δ أ ب جـ ~ Δ ن ك ل

وأطوال الأضلاع مبينة على الشكل

فأوجد : س ، ص



(١٥) مضلعان متشابهان أحدهما أطوال أضلاعه

٤ ، ٥ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢سم

والآخر محيطه ٩٧٫٥سم أوجد أطوال أضلاع المضلع الثاني

(١٦) في الشكل المقابل :

المضلع أ ب جـ ء ~ المضلع س ص ع ل

(١) احسب :

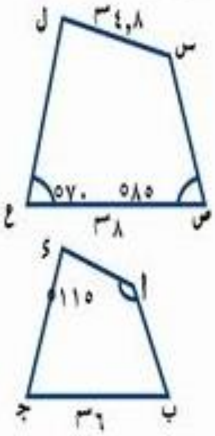
ق(∠ س ع ل) ، طول أ ء

(٢) إذا كان محيط المضلع

أ ب جـ ء = ١٩٫٥سم

أوجد :

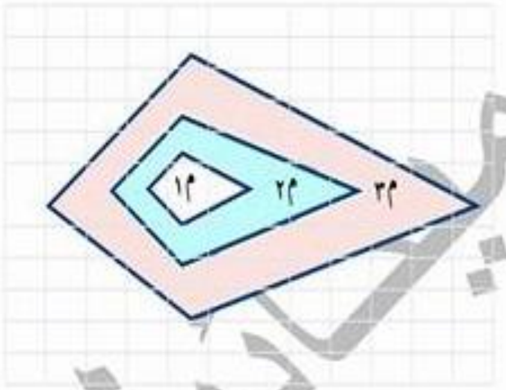
محيط المضلع س ص ع ل

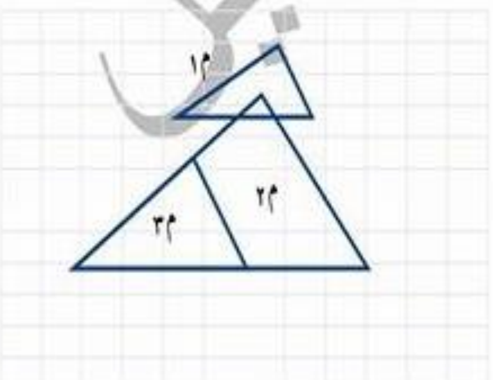


(١٧) في كل من الشكلين التاليين :

المضلع م١ ~ المضلع م٢ ~ المضلع م٣

أوجد معامل تشابه كل من المضلع م١ والمضلع م٢ للمضلع م٣





الدرس الثاني
تشابه المثلثات

الحالة الأولى :

إذا ساوت قياسات أحد المثلثين قياسات نظائرها في المثلث الآخر كان المثلثان متشابهين .

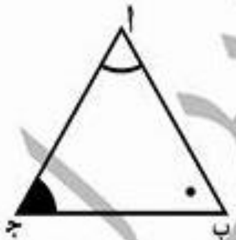
في المثلثين أ ب جـ ، ء هـ و

إذا كان :

ق(∠أ) = ق(∠ء) ،

ق(∠ب) = ق(∠هـ) ،

ق(∠جـ) = ق(∠و)



فإن : Δ أ ب جـ ∼ Δ ء هـ و

ويكون : $\frac{\text{أب}}{\text{ءهـ}} = \frac{\text{بجـ}}{\text{هـو}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{ءو}}$

مسلمة :

يتشابه المثلثان إذا ساوى قياسا زاويتين من أحدهما قياسي زاويتين من الآخر .

حالات خاصة :

(١) المثلثان المتساويا الأضلاع متشابهان .

(٢) يتشابه المثلثان المتساويا الساقين إذا ساوى قياس إحدى زاويتي القاعدة في أحدهما قياس إحدى زاويتي القاعدة في المثلث الآخر .

(٣) يتشابه المثلثان القائما الزاوية إذا ساوى قياس إحدى الزاويتين الحادتين في أحدهما قياس إحدى الزاويتين الحادتين في الآخر .

تذكر العلاقات الآتية في الدائرة لأهميتها :

(١) الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة قياسها ٩٠°

(٢) الزاوية المحيطية التي تحصر نفس القوس أو تحصر أقواساً متساوية في القياس تكون متساوية في القياس .

(٣) في الشكل الرباعي الدائري كل زاويتين متقابلتين متكاملتان .

(٤) في الشكل الرباعي الدائري قياس الزاوية الخارجة عند رأس تساوي قياس الزاوية الداخلة المقابلة لهذا الرأس .

(٥) قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطية المرسومة على وتر التماس من الجهة الأخرى .

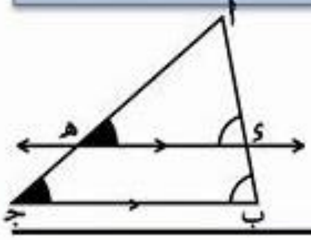
نتيجة (١) :

إذا رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين أو امتدادهما فإن المثلث الناتج يكون مشابهاً للمثلث الأصلي .

إذا كان : $\overleftrightarrow{\text{ءهـ}}$ // $\overline{\text{بجـ}}$

يكون :

Δ أ ء هـ ∼ Δ أ ب جـ



مثال ١ : في الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث فيه :

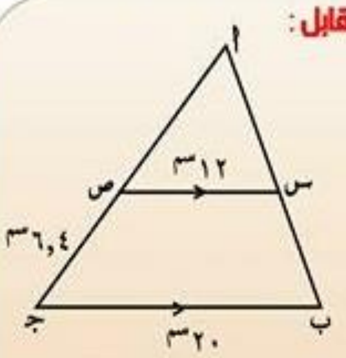
ب جـ = ٢٠ سم ،

ص ∈ $\overline{\text{أجـ}}$

بحيث جـ ص = ٦,٤ سم

، $\overline{\text{ص س}}$ // $\overline{\text{جـ ب}}$

فإذا كان : ص س = ١٢ سم **فاحسب** طول $\overline{\text{أجـ}}$



الحــل

∵ $\overline{\text{ص س}}$ // $\overline{\text{جـ ب}}$

∴ ق(∠س) = ق(∠ب) بالتناظر

، ∠أ مشتركة .

∴ Δ أ س ص ∼ Δ أ ب جـ

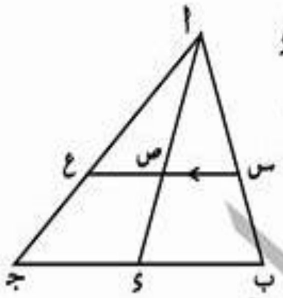
∴ $\frac{\text{س ص}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{أص}}{\text{أجـ}}$

∴ $\frac{١٢}{٢٠} = \frac{\text{أجـ} - ٦,٤}{\text{أجـ}}$ ∴ ٥ أ جـ − ٣٢ = ٣ أ جـ

∴ ٢ أ جـ = ٣٢ ∴ أ جـ = ١٦ سم

مثال ٢ : أ ب جـ مثلث ، ء ∈ $\overline{\text{بجـ}}$ ، س ∈ $\overline{\text{أب}}$ ،
رسم $\overline{\text{سص}}$ // $\overline{\text{بجـ}}$ فقطع $\overline{\text{أء}}$ في ع **أثبت** أن :
$\frac{\text{سص}}{\text{صع}} = \frac{\text{بء}}{\text{ءجـ}}$

الحل



∵ $\overline{\text{سص}}$ // $\overline{\text{بء}}$

∴ Δ أسص ~ Δ أبء

∴ $\frac{\text{سص}}{\text{بء}} = \frac{\text{أص}}{\text{أء}}$ ⟸ (١)

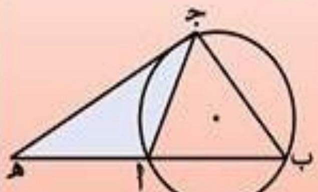
∵ $\overline{\text{صع}}$ // $\overline{\text{ءجـ}}$

∴ $\frac{\text{أص}}{\text{أء}} = \frac{\text{صع}}{\text{ءجـ}}$ ⟸ (٢)

من (١) ، (٢) ∴ $\frac{\text{سص}}{\text{بء}} = \frac{\text{صع}}{\text{ءجـ}}$

∴ $\frac{\text{سص}}{\text{صع}} = \frac{\text{بء}}{\text{ءجـ}}$

مثال ٣ : في الشكل المقابل :



هـ نقطة خارج الدائرة ،
$\overline{\text{هـجـ}}$ مماسة للدائرة ،
$\overline{\text{هـب}}$ تقطع الدائرة في أ
أثبت أن :
أولاً : Δ هـ أ جـ ~ Δ هـ جـ ب
ثانياً : $(\text{هـجـ})^2$ = هـ أ × هـ ب
ثالثاً : إذا كان هـ جـ = ١٠ سم ، أ ب = ١٥ سم
فأوجد : طول $\overline{\text{أهـ}}$

الحل

ΔΔ هـ أ جـ ، هـ جـ ب
فيهما ق(∠أجـهـ) المماسية = ق(∠ب) المحيطية
∠هـ مشتركة
∴ Δ هـ أ جـ ~ Δ هـ جـ ب ⟸ أولاً

ومن التشابه ينتج أن : $\frac{\text{هـأ}}{\text{هـجـ}} = \frac{\text{هـجـ}}{\text{هـب}}$

∴ $(\text{هـجـ})^2$ = هـ أ × هـ ب ⟸ ثانياً

∴ $(١٠)^2$ = هـ أ (هـ أ + ١٥)

∴ ١٠٠ = $(\text{هـأ})^2$ + ١٥ هـ أ

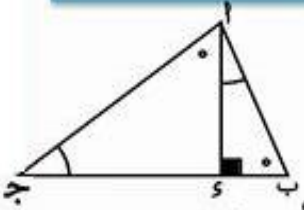
∴ $(\text{هـأ})^2$ + ١٥ هـ أ − ١٠٠ = ٠

∴ (هـ أ + ٢٠)(هـ أ − ٥) = ٠

∴ هـ أ = ٥ سم ⟸ ثالثاً

نتيجة (٢) :

إذا رسم من رأس القائمة في المثلث القائم الزاوية عمود على الوتر انقسم المثلث إلى مثلثين متشابهين وكلاهما يشابه المثلث الأصلي .



إذا كان :
Δ أ ب جـ قائم الزاوية في أ
، $\overline{\text{أء}}$ ⊥ $\overline{\text{بجـ}}$ فإن :
Δ ء ب أ ~ Δ ء أ جـ ~ Δ أ ب جـ
ومن التشابه نستنتج أن :

(١) $(\text{أب})^2$ = ب جـ × ب ء
أي أن : أ ب وسط متناسب بين ب جـ ، ب ء

(٢) $(\text{أجـ})^2$ = جـ ب × جـ ء
أي أن : أ جـ وسط متناسب بين جـ ب ، جـ ء

(٣) $(\text{أء})^2$ = ء ب × ء جـ
أي أن : أ ء وسط متناسب بين ء ب ، ء جـ

(٤) أ ء = $\frac{\text{أب} \times \text{أجـ}}{\text{بجـ}}$

أي أن : الارتفاع على الوتر = $\frac{\text{حاصل ضرب طولا ضلعي القائمة}}{\text{طول الوتر}}$

مثال ٤ : في الشكل المقابل :

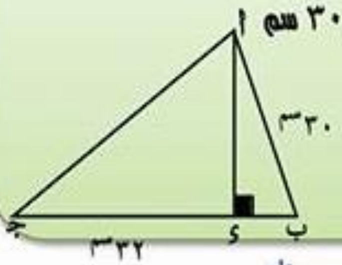
أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ

، $\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ ، أ ب = ٣٠ سم

، ء جـ = ٣٢ سم

احسب طول كل من :

$\overline{\text{ب ء}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{أ ء}}$



الحـــل

∵ Δ أ ب جـ قائم الزاوية في أ ، $\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$

∴ (أ ب)^{٢} = ب ء × ب جـ (نتيجة)

∴ (٣٠)^{٢} = ب ء (ب ء + ٣٢)

∴ ٩٠٠ = (ب ء)^{٢} + ٣٢ ب ء

∴ (ب ء)^{٢} + ٣٢ ب ء − ٩٠٠ = ٠

∴ (ب ء − ١٨)(ب ء + ٥٠) = ٠

∴ ب ء = ١٨ سم ⟸ أولاً

∵ (أ جـ)^{٢} = جـ ب × جـ ء

∴ (أ جـ)^{٢} = ٥٠ × ٣٢

∴ (أ جـ)^{٢} = ١٦٠٠

∴ أ جـ = ٤٠ سم ⟸ ثانياً

∵ أ ء = (أب × أجـ) / (ب جـ) ∴ أ ء = (٣٠ × ٤٠) / ٥٠

∴ أ ء = ٢٤ سم ⟸ ثالثاً

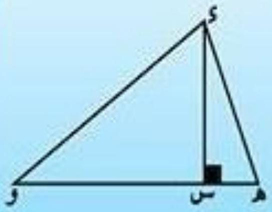
مثال ٥ : في الشكل المقابل :

Δ ء هـ و قائم الزاوية في ء

، $\overline{\text{ء س}} \perp \overline{\text{هـ و}}$ يقطعه في س

أثبت أن :

(ء هـ)^{٢} : (ء و)^{٢} = هـ س : س و



الحـــل

∵ Δ ء هـ و قائم الزاوية في ء ، $\overline{\text{ء س}} \perp \overline{\text{هـ و}}$

∴ (ء هـ)^{٢} = هـ س × هـ و (نتيجة) ⟸ (١)

، (ء و)^{٢} = و س × و هـ (نتيجة) ⟸ (٢)

من (١) على (٢) ∴ (ءهـ)^{٢} / (ءو)^{٢} = هـس / وس #

مثال ٦ : في الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ

، أ ب = ٢٠ سم

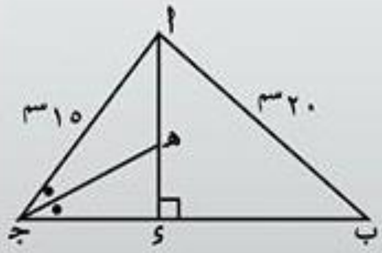
، أ جـ = ١٥ سم

، $\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$

، $\overrightarrow{\text{جـ هـ}}$ ينصف ∠ أ جـ ء

أوجد طول كل من :

$\overline{\text{أ هـ}}$ ، $\overline{\text{هـ ء}}$



الحـــل

∵ (ب جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (أ جـ)^{٢}

= (٢٠)^{٢} + (١٥)^{٢} = ٦٢٥

∴ ب جـ = √٦٢٥ = ٢٥ سم

∵ $\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ ∴ (جـ أ)^{٢} = جـ ب × جـ ء

∴ (١٥)^{٢} = ٢٥ جـ ء ∴ جـ ء = ٢٢٥ / ٢٥ = ٩ سم

، أ ء = (أب × أجـ) / (ب جـ) ∴ أ ء = (٢٠ × ١٥) / ٢٥ = ١٢ سم

في Δ جـ أ ء ∵ $\overrightarrow{\text{جـ هـ}}$ ينصف ∠ أ جـ ء

∴ أهـ / هـء = جـأ / جـء ∴ أهـ / هـء = ١٥ / ٩ = ٥ / ٣

∴ (أهـ + هـء) / هـء = (١٥ + ٩) / ٩ ∴ أء / هـء = ٨ / ٣

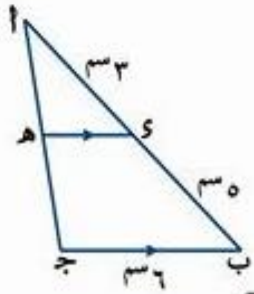
∴ ١٢ / هـء = ٨ / ٣ ∴ هـ ء = (١٢ × ٣) / ٨

∴ هـ ء = ٤,٥ سم

، أ هـ = ١٢ − ٤,٥ = ٧,٥ سم

تمارين (١ – ٢) الحالة الأولى

(١) في الشكل المقابل :



Δ أ ب جـ فيه :

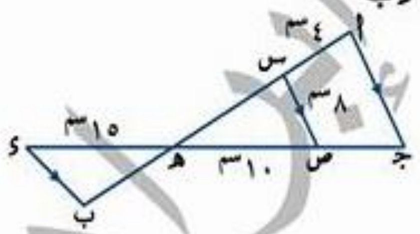
ءهـ // ب جـ

، أء = ٣سم

، ء ب = ٥سم ،

ب جـ = ٦سم **احسب** طول ءهـ

(٢) في الشكل المقابل :



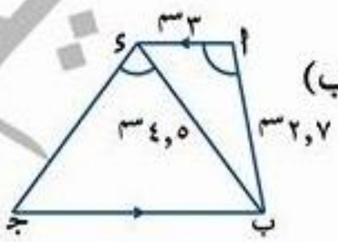
أجـ // س ص // ء ب

أوجد طول كل من :

هـ ب ، ء ب

، أ جـ ، جـ ص

(٣) في الشكل المقابل :



أء // ب جـ

، ق(∠أ) = ق(∠جـ ء ب)

أوجد طول كل من :

ب جـ ، جـ ء

(٤) أ جـ ب ء شبه منحرف فيه أء // ب جـ ، أء = ٤سم

، ب جـ = ١٢سم رسم قطراه متقاطعان في هـ فإذا كان :

أهـ = ٣سم ، ءهـ = ٣سم **فأوجد** طول كل من القطرين .

(٥) أ ب جـ ء شكل رباعي دائري فإذا كان :

أب ∩ جـ ء = {هـ}

أثبت أن :

أولاً : Δ هـ أء ∼ Δ هـ جـ ب

ثانياً : هـ أ . هـ ب = هـ ء . هـ جـ

(٦) أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة نصف ∠ب أ جـ

بمنصف قطع ب جـ في ء ، قطع الدائرة في هـ . **برهن أن**

أ ب . أ جـ = أء . أ هـ

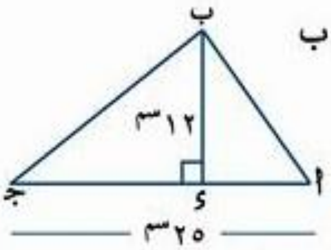
(٧) أ ب جـ ء مربع ، رسم على ء جـ خارج المربع هـ ء جـ

القائم الزاوية في هـ والمتساوي الساقين . **أثبت أن** :

أولاً : Δ أ ب جـ ∼ Δ ء هـ جـ

ثانياً : $(أب)^2$ = ء هـ . أ جـ

(٨) في الشكل المقابل :



أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب

، ب ء ⊥ أ جـ

، ب ء = ١٢سم

، أ جـ = ٢٥سم

أوجد طول كل من : أ ب ، ب جـ

(٩) أ ب قطر في دائرة ، جـ ∋ للدائرة ، المماس المرسوم

لهذه الدائرة عند ب يقطع أ جـ في س .

أثبت أن : $(ب جـ)^2$ = أ جـ × جـ س

(١٠) أ ب قطر في دائرة ، ء ∋ للدائرة ، رسم

ء هـ ⊥ أ ب ليقطعه في هـ . **أثبت أن** :

ء هـ وسط متناسب بين أ هـ ، هـ ب

(١١) س ص ع مثلث قائم الزاوية في س ،

س ل ⊥ ص ع يقطعه في ل **أثبت أن** :

$\frac{(س ص)^2}{(س ع)^2} = \frac{ص ل}{ل ع}$ وإذا كان : س ص = ٦سم ،

س ع = ٨سم **فاحسب** طول كل من : ص ل ، س ل

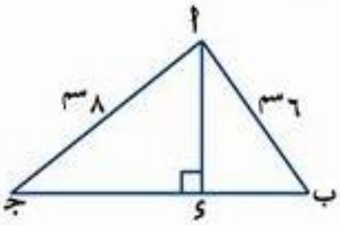
(١٢) **في الشكل المقابل :**

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ

أ ء ⊥ ب جـ

، أ ب = ٦ سم

، أ جـ = ٨ سم



احسب طول كل من :

ب ء ، ء جـ ، أ ء

---

(١٣) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ ، ء ∈ ب جـ بحيث

أ ء = أ ب **أثبت أن** : ٢(أ ب)^2 = ب ء . ب جـ

---

(١٤) ك ل ى مثلث فيه : ى ك = ل ك ، هـ ∈ ل ى ،

هـ م ⊥ ل ك ، هـ ن ⊥ ى ك **أثبت أن** :

ى ن × هـ م = هـ ن × ل م

---

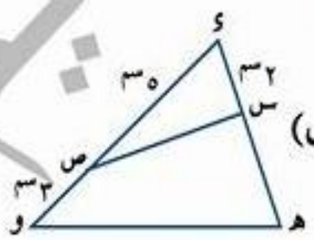
(١٥) **في الشكل المقابل :**

ء هـ و مثلث ،

ق(∠و) = ق(∠ء س ص)

، ء س = ص و = ٣ سم

، ء ص = ٥ سم



أوجد طول س هـ

---

(١٦) (ى) ، (ى) دائرتان متقاطعتان في أ ، ب ، المماس

للدائرة (ى) عند ب ويقطع (ى) في هـ ، والمماس للدائرة

(ى) عند ب يقطع الدائرة (ى) في جـ **أثبت أن** :

(١) Δ أ ب جـ ∼ Δ أ هـ ب

(٢) (أ ب)^2 = أ جـ × أ هـ

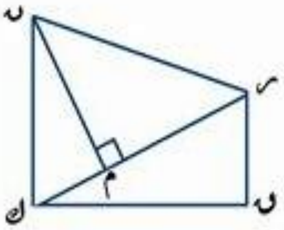
---

(١٧) **في الشكل المقابل :**

س ق ⊥ ق ك

، ق ك ⊥ ن ك

ن م ⊥ ك س



أثبت أن :

م ق × س ق = م ك × ق ك

---

(١٨) أ ب جـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة ،

أ جـ ∩ ب ء = {هـ} ، أ ب ∩ جـ ء = {و}

أثبت أن :

(١) Δ أ ب هـ ∼ Δ ء جـ هـ

واستنتج أن : أ هـ × هـ جـ = ب هـ × هـ ء

(٢) Δ و ء ب ∼ Δ و أ جـ

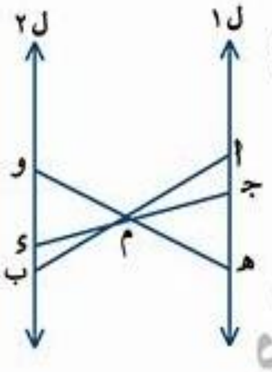
واستنتج أن : و أ × و ب = و ء × و جـ

---

(١٩) **في الشكل المقابل :**

ل$_1$ // ل$_2$ ،

أ ب ∩ جـ ء ∩ هـ و = {م}



اذكر ثلاثة أنواع من المثلثات

المتشابهة

أثبت أن :

$\frac{\text{أ جـ}}{\text{ب ء}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{ب و}} = \frac{\text{جـ هـ}}{\text{ء و}}$

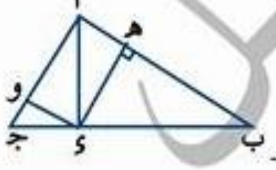
---

(٢٠) **في الشكل المقابل :**

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ

أ ء ⊥ ب جـ ،

ء هـ ⊥ أ ب ، ء و ⊥ أ جـ



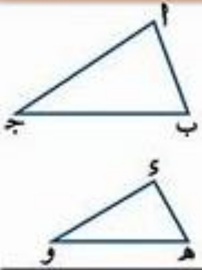
أثبت أن : (١) Δ أ ء هـ ∼ Δ جـ ء و

(٢) مساحة المستطيل أ هـ ء و =

$\sqrt{\text{أ هـ} \times \text{هـ ب} \times \text{أ و} \times \text{و جـ}}$

الحالة الثانية :

إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة في مثلثين فإنهما يتشابهان .

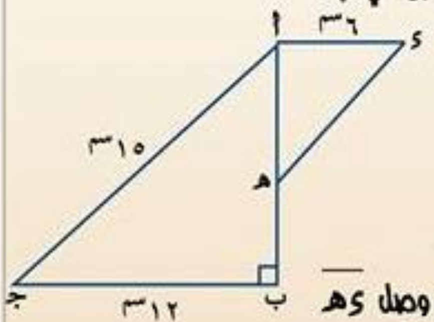


في ΔΔ أب جـ ، ءهـو

إذا كان : $\frac{\text{أب}}{\text{ءهـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{هـو}} = \frac{\text{جـأ}}{\text{وء}}$

فإن : Δ أب جـ ~ Δ ءهـو

مثال ١ : في الشكل المقابل :



أب جـ مثلث قائم الزاوية في ب

، أجـ = ١٥سم

، ب جـ = ١٢سم

، هـ منتصف $\overline{\text{أب}}$

، نرسم $\overline{\text{أء}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

بحيث أء = ٦سم ثم وصل $\overline{\text{ءهـ}}$

أولاً : **أوجد** طول ءهـ

ثانياً : **أثبت أن** : Δ أب جـ ~ Δ هـ أء **واستنتج**

أن : $\overline{\text{ءهـ}}$ // $\overline{\text{أجـ}}$

الحل

∵ Δ أب جـ قائم الزاوية في ب (من فيثاغورث)

(أب)² = ٢٢٥ − ١٤٤ = ٨١ ∴ أب = ٩سم

∴ أهـ = ٤,٥سم

، ∵ Δ ءأهـ قائم الزاوية في أ (من فيثاغورث)

∴ (ءهـ)² = ٣٦ + ٢٠,٢٥ = ٥٦,٢٥

∴ ءهـ = ٧,٥سم ⟸ أولاً

، ∵ $\frac{\text{أب}}{\text{هـأ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أء}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{ءهـ}} = \frac{٢}{١}$

∴ Δ أب جـ ~ Δ هـ أء

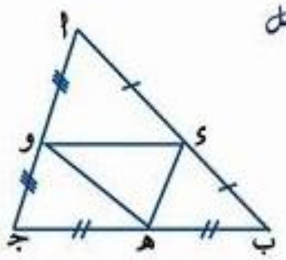
وينتج من التشابه أن : ق(∠ب أجـ) = ق(∠أ ءهـ)

وهما في وضع تبادل ∴ $\overline{\text{ءهـ}}$ // $\overline{\text{أجـ}}$ ⟸ ثانياً

مثال ٢ : أب جـ مثلث نصفت أضلاعه : $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{جـأ}}$ في ء ، هـ ، و على الترتيب **أثبت أن** :

Δ أب جـ ~ Δ هـو ء

الحل



كل من : $\overline{\text{ءو}}$ ، $\overline{\text{هـو}}$ ، $\overline{\text{ءهـ}}$

قطع مستقيمة مرسومة بين

منتصفي ضلعين في Δ أب جـ

∴ طول كل منها = $\frac{١}{٢}$ طول الضلع الثالث

∴ $\frac{\text{هـو}}{\text{أب}} = \frac{\text{وء}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{هـء}}{\text{جـأ}}$

∴ Δ هـو ء ~ Δ أب جـ

مثال ٣ : أب جـ مثلث ، ء ∈ $\overline{\text{أجـ}}$ بحيث $\frac{\text{بء}}{\text{ءجـ}} = \frac{\text{أب}}{\text{ب جـ}}$

، ب جـ × أب = ب ء × أجـ **أثبت أن** :

$\overline{\text{ب جـ}}$ مماس للدائرة المارة برؤوس Δ أب ء

الحل

∵ $\frac{\text{أب}}{\text{بء}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ءجـ}}$

، ∵ $\frac{\text{أب}}{\text{بء}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{ب جـ}}$

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{بء}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ءجـ}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{جـب}}$

∴ Δ أب جـ ~ Δ ب ء جـ وينتج من التشابه أن :

ق(∠١) = ق(∠٢)

∴ ب جـ مماس للدائرة المارة برؤوس Δ أب ء

مثال ٤ : أب جـ مثلث ، ء ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ بحيث :

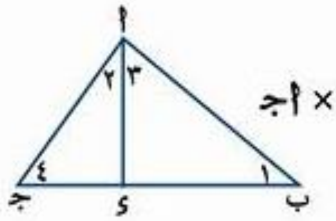
(أء)² = ب ء × ءجـ ، أب × أء = ب ء × أجـ

أثبت أن : Δ أب جـ قائم الزاوية في أ .

الحل

∵ أد × أد = ب د × د جـ

∴ $\frac{\text{ب د}}{\text{أ د}} = \frac{\text{أ د}}{\text{د جـ}}$



، ∵ أ ب × أ د = ب د × أ جـ

∴ $\frac{\text{ب د}}{\text{أ د}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$

∴ $\frac{\text{ب د}}{\text{أ د}} = \frac{\text{أ د}}{\text{د جـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$

∴ △ ب د أ ~ △ أ د جـ وينتج من التشابه أن :

ق(∠١) = ق(∠٢) ، ق(∠٣) = ق(∠٤)

بالجمع : ق(∠١) + ق(∠٤) =

ق(∠٢) = ق(∠٣) = ٩٠°

أي أن : △ أ ب جـ قائم الزاوية في أ .

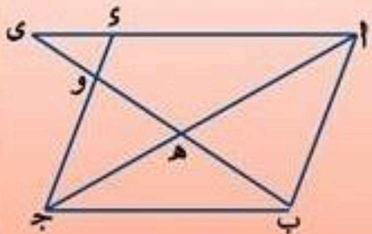
مثال ٥ : في الشكل المقابل :

أ ب جـ د متوازي أضلاع

، و ∈ $\overline{\text{ب و}}$ فقطع

$\overline{\text{أ جـ}}$ في هـ وقطع

$\overrightarrow{\text{أ د}}$ في ى



أثبت أن :

أولاً : △ أ هـ ى ~ △ جـ هـ ب

ثانياً : (هـ ب)^{٢} = هـ و × هـ ى

الحـــل

∵ $\overline{\text{أ ى}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ∴ △ أ هـ ى △ جـ هـ ب ⟸ أولاً

وينتج من التشابه أن : $\frac{\text{أ هـ}}{\text{جـ هـ}} = \frac{\text{هـ ى}}{\text{هـ ب}}$ ← (١)

، ∵ $\overline{\text{و جـ}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ △ أ هـ ب △ جـ هـ و

وينتج من التشابه أن : $\frac{\text{أ هـ}}{\text{جـ هـ}} = \frac{\text{هـ ب}}{\text{هـ و}}$ ← (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : $\frac{\text{هـ ى}}{\text{هـ ب}} = \frac{\text{هـ ب}}{\text{هـ و}}$

∴ (هـ ب)^{٢} = هـ و × هـ ى ⟸ ثانياً

تمارين (٢ – ٢) الحالة الثانية

(١) أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ٤سم ، ب جـ = ٥سم ، أ جـ = ٦سم ، د هـ و مثلث فيه د هـ = ٨سم ، هـ و = ١٠سم ، و د = ١٢سم

أثبت أن : △ أ ب جـ ~ △ د هـ و

---

(٢) مثلثان متساويا الساقين طول قاعدة الأول ١٠سم ، طول ارتفاعه ١٢سم ، أطوال أضلاع الثاني ٥,٢ ، ٥,٢ ، ٤سم

أثبت أن : المثلثان متشابهان .

---

(٣) △ أ ب جـ أطوال أضلاعه $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ على الترتيب هي ٦ ، ٩ ، ٧,٥سم ، هـ ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ بحيث : ب هـ = ٦سم ، رسم △ د ب هـ خارج △ أ ب د بحيث كان ب د = ٤سم ، د هـ = ٥سم **أثبت أن :** $\overrightarrow{\text{ب هـ}}$ ينصف ∠أ ب د .

---

(٤) أ ب جـ ، د هـ و مثلثان فيهما أ ب = أ جـ ، د هـ = د و فإذا كان : $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{د هـ}}{\text{هـ و}}$

فأثبت أن : المثلثان متشابهان .

---

(٥) أ ب جـ د شكل رباعي فيه : $\frac{\text{أ ب}}{\text{د ب}} = \frac{\text{ب د}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{د أ}}{\text{جـ د}}$

أثبت أن : $\overrightarrow{\text{ب د}}$ ينصف ∠أ ب جـ

---

(٦) أ ب جـ مثلث ، د ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ فإذا كان : (أ د)^{٢} = ب د × د جـ ، أ ب × د جـ = أ جـ × أ د

فأثبت أن :

أولاً : △ أ ب د ~ △ جـ أ د

ثانياً : $\overline{\text{أ د}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

ثالثاً : ق(∠ب أ جـ) = ٩٠°

(٧) في الشكل المقابل :

أ ب جـ ء شكل رباعي فيه ،

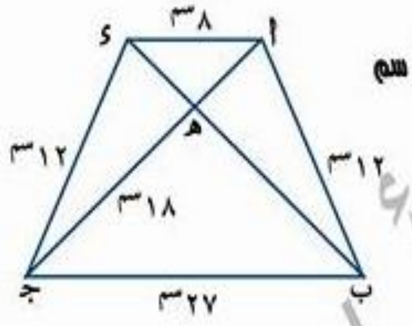
ب جـ = ٢٧ ،

ب أ = جـ ء = ١٢ سم

، أ ء = ٨ سم

، ب جـ = ٢٧ سم

، جـ هـ = ١٨ سم



أثبت أن :

أولاً : Δ ب أ جـ ~ Δ أ ء جـ

ثانياً : $\overrightarrow{جـ أ}$ ينصف ∠ ب جـ ء

ثالثاً : إذا كان : $\overline{ب ء} \cap \overline{أ جـ} = \{هـ\}$

فاحسب قيمة $\frac{ب هـ}{هـ ء}$

---

(٨) أ ب جـ مثلث فيه ∠ ب حادة ، ء ∈ $\overleftrightarrow{ب جـ}$ حيث :

ء ∉ $\overline{ب جـ}$ فإذا كان ء أ وسط متناسب بين ء جـ ، ء ب

وكان $\frac{أ جـ}{أ ء} = \frac{أ ب}{ب ء}$ **فأثبت أن** : $\overleftrightarrow{أ ء}$ مماسة للدائرة المارة

برؤوس Δ أ ب جـ .

---

(٩) ل م ن مثلث مرسوم داخل دائرة ، س ∈ $\overline{م ن}$ بحيث :

$(ل س)^2$ = م س × س ن ،

م ل × ل س = م س × ل ن **أثبت أن** :

$\overline{م ن}$ قطر في الدائرة .

---

(١٠) أ ب جـ ، جـ ء أ مثلثان مرسومان على القاعدة $\overline{أ جـ}$ ،

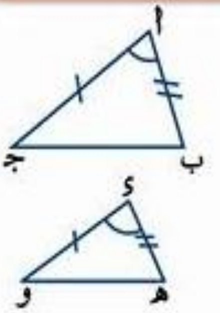
في جهتين مختلفتين منها بحيث كان

أ ب : ب جـ : جـ أ = جـ أ : أ ء : ء جـ

أثبت أن : $\overline{ء جـ} \parallel \overline{أ ب}$

الحالة الثالثة :

إذا ساوى قياس زاوية من مثلث قياس زاوية من مثلث آخر وتناسبت أطوال الأضلاع التي تحتويها هاتان الزاويتان فإن المثلثان يتشابهان .



في ΔΔ أ ب جـ ، ء هـ و

إذا كان : ق(∠ أ) = ق(∠ ء)

، $\frac{أ ب}{ء هـ} = \frac{أ جـ}{ء و}$ يكون :

Δ أ ب جـ ~ Δ ء هـ و

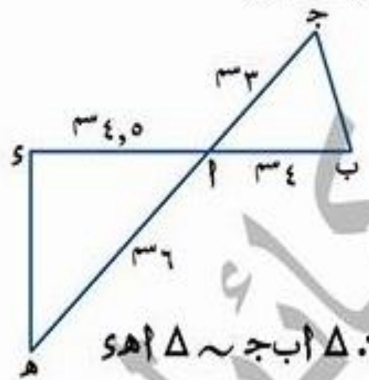
مثال ١ : أ ب جـ مثلث فيه : أ ب = ٤ سم ،
أ جـ = ٣ سم ، ء ∈ $\overrightarrow{ب أ}$ خارج المثلث بحيث
أ ء = ٤,٥ سم ، هـ ∈ $\overrightarrow{جـ أ}$ خارج المثلث بحيث
أ هـ = ٦ سم . **أثبت أن** : الشكل ب جـ ء هـ رباعي دائري

الحـــل

في ΔΔ أ ب جـ ، أ هـ ء

ق(∠ ب أ جـ) = ق(∠ هـ أ ء)

بالتقابل بالرأس



، $\frac{أ ب}{أ هـ} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

، $\frac{أ جـ}{أ ء} = \frac{٣}{٤,٥} = \frac{٢}{٣}$

∴ $\frac{أ ب}{أ هـ} = \frac{أ جـ}{أ ء}$ ∴ Δ أ ب جـ ~ Δ أ هـ ء

وينتج من التشابه أن : ق(∠ جـ) = ق(∠ ء) وهما

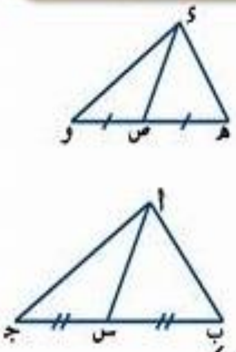
مرسومتان على $\overline{ب هـ}$ وفي جهة واحدة منها

∴ الشكل ب جـ ء هـ رباعي دائري .

مثال ٢ : أ ب جـ ، ء هـ و مثلثان متشابهان ، س منتصف $\overline{\text{بجـ}}$ ، ص منتصف $\overline{\text{هـو}}$

أثبت أن : ق(∠ب أ س) = ق(∠هـ ء ص)

الحل



∵ Δ أ ب جـ ~ Δ ء هـ و

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{ءهـ}} = \frac{\text{بجـ}}{\text{هـو}} = \frac{\text{بس}}{\text{هـص}}$

، ق(∠ب) = ق(∠هـ)

∴ Δ أ ب س ~ Δ ء هـ ص

∴ ق(∠ب أ س) = ق(∠هـ ء ص)

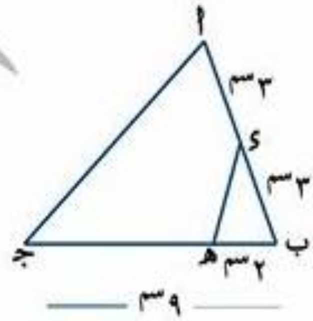
مثال ٣ : أ ب جـ مثلث فيه : أب = ٦سم ، بجـ = ٩ سم ، ء منتصف $\overline{\text{أب}}$ ، هـ ∈ $\overline{\text{بجـ}}$ بحيث بهـ = ٢سم **أثبت أن** :

(١) ΔΔ ء ب هـ ، جـ ب أ متشابهان

(٢) الشكل أ ء هـ جـ رباعي دائري .

الحل

∵ ΔΔ ء ب هـ ، جـ ب أ فيهما :



$\frac{\text{بهـ}}{\text{بأ}} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$ ،

$\frac{\text{بء}}{\text{بجـ}} = \frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣}$

∴ $\frac{\text{بهـ}}{\text{بأ}} = \frac{\text{بء}}{\text{بجـ}}$

، ∵ ∠ب مشتركة

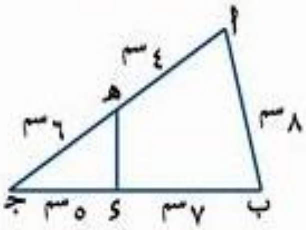
∴ Δ ء ب هـ ~ Δ جـ ب أ ⟸ أولا

وينتج أن : ق(∠ب هـ ء) = ق(∠أ) ، ∵ ∠ب هـ ء خارجه عن الشكل الرباعي أ ء هـ جـ

∴ الشكل أ ء هـ جـ رباعي دائري . ⟸ ثانيا

تمارين (٣ - ٢) الحالة الثالثة

(١) في الشكل المقابل :



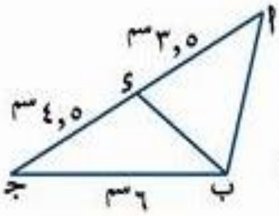
أثبت أن :

Δ أ ب جـ ~ Δ ء هـ جـ

ثم أوجد طول ء هـ

---

(٢) في الشكل المقابل :



أثبت أن :

أولا : Δ أ ب جـ ~ Δ ب ء جـ

ثانيا : $\overline{\text{جـب}}$ مماسة للدائرة المارة برؤوس Δ أ ب ء

---

(٣) أ ب جـ مثلث ، ء ∈ $\overline{\text{أب}}$ بحيث أء = $\frac{١}{٣}$ أجـ

، هـ ∈ $\overline{\text{أجـ}}$ بحيث أهـ = $\frac{١}{٣}$ أب **أثبت أن** :

أولا : Δ أ ء هـ ~ Δ أ جـ ب

ثانيا : الشكل ء ب جـ هـ رباعي دائري

---

(٤) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ ، ء ∈ $\overline{\text{بجـ}}$ بحيث :

$\frac{\text{بء}}{\text{أب}} = \frac{\text{بأ}}{\text{بجـ}}$ **أثبت أن** :

أولا : Δ أ ب جـ ~ Δ ء ب أ

ثانيا : $\overline{\text{أء}}$ ⊥ $\overline{\text{بجـ}}$

---

(٥) أ ب جـ ء شكل رباعي دائري بحيث $\frac{\text{أب}}{\text{جـء}} = \frac{\text{بء}}{\text{أجـ}}$

برهن أن : أجـ = بء

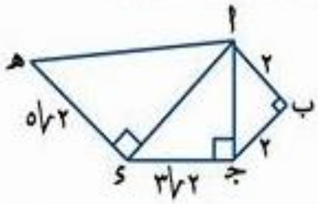
تمارين متنوعة على الحالة الثانية والثالثة

(١) من الشكل المقابل : الأطوال مقدرة بالسنتيمتر :

أكمل :

∆ أبجـ ~ ∆ ....

ومعامل التشابه ....



(٢) في الشكل المقابل :

أبجـ مثلث فيه :

أب = ٦سم ، بجـ = ٩سم

، أجـ = ٧.٥سم

، ء نقطة عن ∆ أبجـ

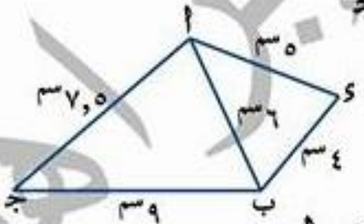
حيث : ءب = ٤سم

، ءأ = ٥سم

أثبت أن :

(١) ∆ أبجـ ~ ∆ ءبأ

(٢) بأ ينصف ∠ ءبجـ



(٣) في الشكل المقابل :

أبجـء شكل رباعي

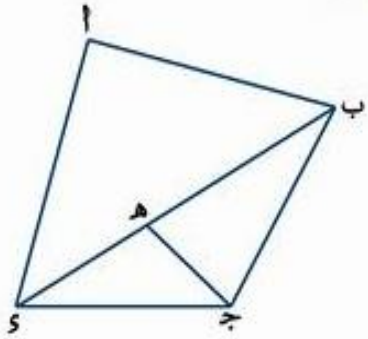
، هـ ∈ بء حيث :

أب/أء = جـهـ/بجـ ،

بء/أء = هـب/بجـ

أثبت أن :

(١) أء // بجـ (٢) أب // جـهـ



(٤) أبجـ ، س ص ع مثلثان متشابهان ، حيث :

أب > أجـ ، س ص > س ع

هـ ، ل منتصفي بجـ ، ص ع على الترتيب ،

رسم أو ⊥ بجـ ، س م ⊥ ص ع

أثبت أن : ∆ أهـو ~ ∆ س ل م

(٥) بجـ ∩ ءهـ = {أ} ، أب = ٢.٨سم ،

أء = ٢.١سم ، أجـ = ٧.٢سم ، أهـ = ٩.٦سم

، بء = ٣.٥سم

أثبت أن :

(١) ∆ أبء ~ ∆ أجـهـ ، واحسب طول جـهـ

(٢) إذا تقاطع جـء ، هـب في ك فأثبت أن :

∆ أءجـ ~ ∆ أبهـ ، واستنتج أن :

∆ ءكهـ ~ ∆ بكجـ

(٦) في الشكل المقابل :

أبجـ مثلث متساوي الساقين

مرسوم داخل دائرة مركزها (و)

وفيه : بجـ > أب

، أو تقطع بجـ في هـ

، بء قطر للدائرة

رسم أن ⊥ بء

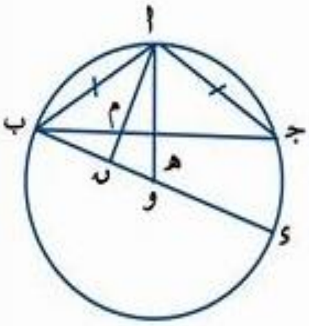
ويقطعها في ن ، ويقطع بجـ في م

أثبت أن :

(١) ∆ أبن ~ ∆ أبهـ

(٢) ∆ مبأ متساوي الساقين ويشابه ∆ أبجـ ثم

استنتج منها أن : (بأ)^2 = بجـ × بم



الدرس الثالث
العلاقة بين مساحتي سطحي مضلعين متشابهين

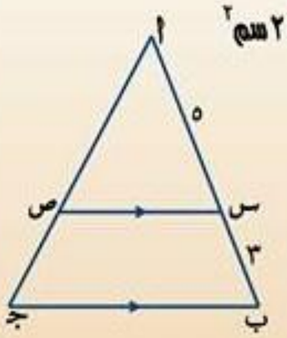
أولاً : النسبة بين مساحتي سطحي مثلثين متشابهين :

النسبة بين مساحتي مثلثين متشابهين تساوي مربع النسبة بين طولي أي ضلعين متناظرين فيهما .

إذا كان Δ أ ب جـ ~ Δ ء هـ و

فإن : $\frac{\text{م}(\Delta\,\text{أ ب جـ})}{\text{م}(\Delta\,\text{ء هـ و})} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{ء هـ}}\right)^2 = \left(\frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}}\right)^2 = \left(\frac{\text{أ جـ}}{\text{ء و}}\right)^2$

مثال ١ : في الشكل المقابل :



أ ب جـ مثلث مساحة سطحه ٢٥,٦ سم^2

، $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

فإذا كان : $\frac{\text{أ س}}{\text{س ب}} = \frac{٥}{٣}$

فأوجد مساحة سطح الشكل س ب جـ ص

الحل

∵ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ∴ Δ أ س ص ~ Δ أ ب جـ

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\,\text{أ س ص})}{\text{م}(\Delta\,\text{أ ب جـ})} = \left(\frac{\text{أ س}}{\text{أ ب}}\right)^2 = \left(\frac{٥}{٨}\right)^2 = \frac{٢٥}{٦٤}$

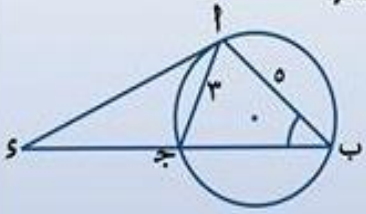
∴ م (Δ أ س ص) = ٢٥,٦ × $\frac{٢٥}{٦٤}$ = ١٠ سم^2

∴ مساحة سطح الشكل س ب جـ ص =

م(Δ أ ب جـ) − م(Δ أ س ص)

= ٢٥,٦ − ١٠ = ١٥,٦ سم^2

مثال ٢ : في الشكل المقابل :



أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة

بحيث $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} = \frac{٥}{٣}$

رسم $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ مماس للدائرة

عند أ قطع $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ في ء

برهن أن : $\frac{\text{م}(\text{أ ء جـ})}{\text{م}(\text{أ ب جـ})} = \frac{٩}{١٦}$

الحل

ΔΔ أ ء جـ ، ب ء أ فيهما

ق(∠جـ أ ء) المماسية = ق(∠ب) المحيطية ،

∠ء مشتركة

∴ Δ أ ء جـ ~ Δ ب ء أ (نظرية)

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\,\text{أ ء جـ})}{\text{م}(\Delta\,\text{ب ء أ})} = \left(\frac{\text{أ جـ}}{\text{أ ب}}\right)^2 = \left(\frac{٣}{٥}\right)^2 = \frac{٩}{٢٥}$

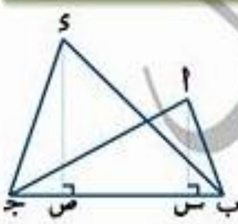
∴ $\frac{\text{م}(\Delta\,\text{أ ء جـ})}{\text{م}(\Delta\,\text{ب ء أ}) - \text{م}(\Delta\,\text{أ ء جـ})} = \frac{٩}{٢٥ - ٩}$

∴ $\frac{\text{م}(\text{أ ء جـ})}{\text{م}(\text{أ ب جـ})} = \frac{٩}{١٦}$

ملاحظات :

(١) النسبة بين مساحتي مثلثين مشتركين في قاعدة واحدة تساوي النسبة بين ارتفاعهما .

فمثلاً : في الشكل المقابل :



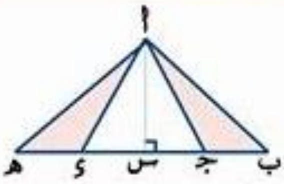
$\overline{\text{ب جـ}}$ قاعدة مشتركة

بين Δ أ ب جـ ، Δ ء ب جـ

∴ $\frac{\text{م}(\text{أ ب جـ})}{\text{م}(\text{أ ء هـ})} = \frac{\frac{١}{٢}\,\text{ب جـ} \times \text{أ س}}{\frac{١}{٢}\,\text{ء هـ} \times \text{ء ص}} = \frac{\text{أ س}}{\text{ء ص}}$

(٢) النسبة بين مساحتي مثلثين مشتركين في الارتفاع تساوي النسبة بين طولي قاعدتيهما .

في الشكل المقابل:



أس ارتفاع مشترك

بين Δ أبجـ ، Δ أءهـ

$$\therefore \frac{م(\Delta أبجـ)}{م(\Delta أءهـ)} = \frac{\frac{1}{2} بجـ \times أس}{\frac{1}{2} ءهـ \times أس} = \frac{بجـ}{ءهـ}$$

مع ملاحظة أنه لا يشترط أن يكون المثلثان متشابهان في الحالتين .

مثال ٣ : أبجـ مثلث مرسوم داخل دائرة بحيث :

أجـ > أب ، ء ∈ بجـ بحيث : أء = أب

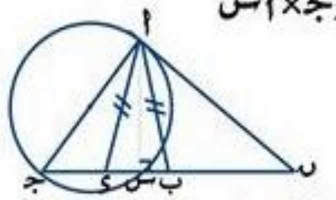
رسم أن يمس الدائرة عند أ ويقطع جب في ن

أثبت أن : بن : ءجـ = (أن)^2 : (أجـ)^2

الحل

$$\because \frac{م(\Delta أبن)}{م(\Delta جـءأ)} = \frac{\frac{1}{2} بن \times أس}{\frac{1}{2} ءجـ \times أس}$$

$$= \frac{بن}{ءجـ} \Longleftarrow (١)$$



، ∵ أب = أء

∴ ق(∠أبء) = ق(∠أءب)

∴ ق(∠أبن) = ق(∠أءجـ)

، ∵ أن مماس

∴ ق(∠بأن) = ق(∠جـ)

مشتركتان في ⌒أب

∴ Δ أبن ~ Δ جـءأ

$$\therefore \frac{م(أبن)}{م(جـءأ)} = \frac{(أن)^2}{(أجـ)^2} \Longleftarrow (٢)$$

من (١) ، (٢) ∴ بن : ءجـ = (أن)^2 : (أجـ)^2

تمارين (١ – ٣)

(١) أبجـ ، ءهـو مثلثان متشابهان فيهما الضلعان المتناظران بجـ ، هـو طولاهما ٢سم ، ٣سم على الترتيب فإذا كانت مساحة سطح Δ ءهـو = ٤٥سم^2 **فأوجد** مساحة سطح Δ أبجـ

---

(٢) أبجـ مثلث رسم ءهـ // بجـ ويقطع أب في ء ، أجـ في هـ فإذا كان أء : ءب = ٣ : ٢ ، م(Δأءهـ) = ٢٢,٥سم^2 **فأوجد** مساحة سطح المضلع بءهـجـ

---

(٣) أبجـ مثلث مساحة سطحه ٣٤,٣سم^2 رسم سص // بجـ ويقطع أب في س ، أجـ في ص فإذا كان : $\frac{أس}{سب} = \frac{٣}{٤}$ **فأوجد** مساحة سطح الشكل بسصجـ

---

(٤) أبجـ مثلث مرسوم داخل دائرة بحيث $\frac{أب}{أجـ} = \frac{٥}{٢}$ رسم مماس للدائرة عند أ فقطع بجـ في ء

برهن أن : $\frac{م(\Delta أجـء)}{م(\Delta أبجـ)} = \frac{٤}{٢١}$

---

(٥) أب ، جـء وتران غير متقاطعين في دائرة . فإذا كان : أب ∩ جـء = {هـ} ، أجـ = ٣بء

فأوجد : $\frac{م(\Delta هـبء)}{م(\Delta هـأجـ)}$

---

(٦) س ص ع مثلث فيه : $\frac{\text{س ص}}{\text{س ع}} = \frac{٩}{٧}$ رسمت الدائرة المارة برؤوسه ورسم من س المماس لهذه الدائرة فقطع $\overline{\text{ص ع}}$ في هـ أثبت أن : $\frac{\text{م}(\triangle \text{س ص ع})}{\text{م}(\triangle \text{س ص هـ})} = \frac{٣٢}{٨١}$

---

(٧) س ص ع مثلث ، $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ // $\overline{\text{ص ع}}$ ويقطع $\overline{\text{س ص}}$ في م ، $\overline{\text{س ع}}$ في ن فإذا كانت $\frac{\text{م}(\triangle \text{س م ن})}{\text{م}(\text{م ن ع ص})} = \frac{١٦}{٩}$

فأوجد النسبة : $\frac{\text{س ن}}{\text{ن ع}}$

---

(٨) أ ب جـ مثلث ، ء ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ بحيث أء : ء ب = ٢ : ٣ رسم $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ويقطع $\overline{\text{أ جـ}}$ في هـ ، $\overline{\text{جـ ء}} \cap \overline{\text{هـ ب}} = \{\text{م}\}$ ، **أثبت أن** :

$\text{م}(\triangle \text{ء م هـ}) = \frac{٤}{٢٥}\text{م}(\triangle \text{جـ م ب})$

---

(٩) $\overline{\text{ب جـ}}$ قطر في دائرة طوله ٥ سم ، نقطة أ ∈ للدائرة رسم مماس لها عند أ ليقطع $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$ في ء فإذا كان : أب = ٣سم **أثبت أن** :

$\text{م}(\triangle \text{ء أ ب}) = \frac{٩}{٧}\text{م}(\triangle \text{أ ب جـ})$

---

(١٠) مثلثان متشابهان النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيهما ٢ : ٥ فإذا كانت مساحة المثلث الأول ١٦ سم^٢ **فما** مساحة المثلث الثاني ؟

---

(١١) مثلثان متشابهان النسبة بين محيطيهما ٣ : ٢ ومجموع مساحتيهما ١٣٠ سم^٢ **أوجد** مساحة كل منهما .

ثانياً : النسبة بين مساحتي سطحي مضلعين متشابهين

حقيقة :

المضلعان المتشابهان يمكن أن ينقسما إلى نفس العدد من المثلثات التي يشابه كل منها نظيره .

ملحوظة : إذا تشابه مضلعان عدد أضلاع كل منهما ن فإنهما ينقسما إلى عدد = ن − ٢ من المثلثات المتشابهة .

نظرية :

النسبة بين مساحتي سطحي مضلعين متشابهين تساوي مربع النسبة بين طولي أي ضلعين متناظرين فيهما .

أي انه :

إذا كان المضلع أ ب جـ ء هـ ~ المضلع أَ بَ جَ ءَ هَ

فإن : $\frac{\text{م}(\text{المضلع أ ب جـ ء هـ})}{\text{م}(\text{المضلع أَ بَ جَ ءَ هَ})} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أَ بَ}}\right)^٢$

ومن خواص التناسب : فإن

$\frac{\text{محيط المضلع أ ب جـ ء هـ}}{\text{محيط المضلع أَ بَ جَ ءَ هَ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أَ بَ}}$

مثال ١ : إذا كان طولا ضلعين متناظرين في مضلعين متشابهين هما ١٢سم ، ١٦سم وكانت مساحة سطح المضلع الأصغر ٢٧٠سم^٢ **احسب** مساحة سطح المضلع الأكبر **وأوجد** كذلك النسبة بين محيطي المضلعين .

الحـــل

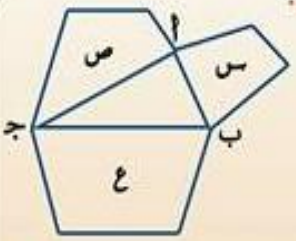
∵ المضلعان متشابهان ∴ $\frac{\text{م}(\text{المضلع الأصغر})}{\text{م}(\text{المضلع الأكبر})} = \left(\frac{١٢}{١٦}\right)^٢$

∴ $\frac{٢٧٠}{\text{م}(\text{المضلع الأكبر})} = \frac{١٤٤}{٢٥٦}$

∴ م (المضلع الأكبر) = $\frac{٢٧٠ \times ٢٥٦}{١٤٤}$ = ٤٨٠سم^٢

$\frac{\text{محيط المضلع الأصغر}}{\text{محيط المضلع الأكبر}} = \frac{١٢}{١٦} = \frac{٣}{٤}$

مثال ٢ : في الشكل المقابل :



Δ أ ب جـ قائم الزاوية في أ

حيث $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أجـ}}$ ، $\overline{\text{بجـ}}$

أضلاع متناظرة

أثبت أن :

م (المضلع س) + م (المضلع ص) = م (المضلع ع)

الحـــل

∵ المضلع س ∼ المضلع ع ∴ $\frac{\text{م(المضلع س)}}{\text{م(المضلع ع)}} = \left(\frac{\text{أب}}{\text{بجـ}}\right)^٢ = \frac{(\text{أب})^٢}{(\text{بجـ})^٢}$ ⟸ (١)

∵ المضلع ص ∼ المضلع ع ∴ $\frac{\text{م(المضلع ص)}}{\text{م(المضلع ع)}} = \left(\frac{\text{أجـ}}{\text{بجـ}}\right)^٢ = \frac{(\text{أجـ})^٢}{(\text{بجـ})^٢}$ ⟸ (٢)

من (١)، (٢) بالجمع

∴ $\frac{\text{م(المضلع س)}}{\text{م(المضلع ع)}} + \frac{\text{م(المضلع ص)}}{\text{م(المضلع ع)}} = \frac{(\text{أب})^٢}{(\text{بجـ})^٢} + \frac{(\text{أجـ})^٢}{(\text{بجـ})^٢}$

∴ $\frac{\text{م(المضلع س)} + \text{م(المضلع ص)}}{\text{م(المضلع ع)}} = \frac{(\text{أب})^٢ + (\text{أجـ})^٢}{(\text{بجـ})^٢}$

∵ (أب)^٢ + (أجـ)^٢ = (بجـ)^٢ (فيثاغورث)

∴ م (المضلع س) + م (المضلع ص) = م (المضلع ع)

مثال ٣ : مضلعان متشابهان النسبة بين محيطيهما ٣ : ٢ ومجموع مساحتيهما ١٩٥ سم^٢ **أوجد** مساحة كل منهما .

الحـــل

∵ النسبة بين محيطي المضلعين المتشابهين = ٣ : ٢

∴ النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيهما = ٣ : ٢

∴ النسبة بين مساحتيهما = ٩ : ٤

وبفرض مساحة المضلع الأول = ٩س

ومساحة المضلع الثاني = ٤س

∴ ٩س + ٤س = ١٩٥

∴ ١٣س = ١٩٥

∴ س = ١٥

∴ مساحة المضلع الأول = ١٥ × ٩ = ١٣٥سم^٢

مساحة المضلع الثاني = ١٥ × ٤ = ٦٠سم^٢

تمارين (٢ – ٣)

(١) إذا كانت النسبة بين مساحتي سطحي مضلعين متشابهين تساوي ٩ : ٢٥ **فما** هي النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيهما ؟ **وما** النسبة بين محيطيهما ؟

---

(٢) إذا كانت النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين ٢ : ٣ وكانت مساحة سطح المضلع الأول ١٢٠ سم^2 **فأوجد** مساحة سطح المضلع الثاني .

---

(٣) طولا ضلعين متناظرين في مضلعين متشابهين هما ٥ سم ، ٨ سم فإذا كان مجموع مساحتي سطحيهما ٥٣٤ سم^2 **أوجد** مساحة سطح كل منهما .

---

(٤) طولا ضلعين متناظرين في مضلعين متشابهين هما ٧ سم ، ١٢ سم فإذا كانت مساحة سطح المضلع الأول ٣٤٣ سم^2 **فأوجد** مساحة سطح المضلع الثاني .

---

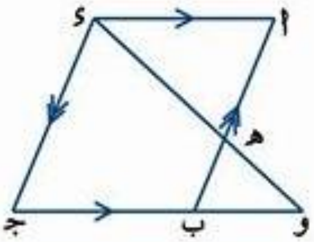
(٥) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، أ ب = ٥ سم ، ب جـ = ١٢ سم رسم على $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ المضلعان المتشابهان ل ، م بحيث كان $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ ضلعين متناظرين فيهما **برهن على أن** : النسبة بين مساحتي سطحي المضلعين م ، ل كنسبة $\frac{٢٥}{١٦٩}$

---

(٦) أ ب جـ مثلث فيه : $\overline{أب}$ ، $\overline{بجـ}$ ، $\overline{أجـ}$ أضلاع متناظرة لثلاثة مضلعات متشابهة مرسومة خارج المثلث ، وهي المضلعات س ، ص ، ع على الترتيب .
فإذا كانت مساحة المضلع س = ٤٠ سم^2 ، ومساحة المضلع ص = ٨٥ سم^2 ، ومساحة المضلع ع = ١٢٥ سم^2 **أثبت أن** : المثلث أ ب جـ قائم الزاوية .

---

(٧) في الشكل المقابل :



أ ب جـ ء متوازي أضلاع ، هـ ∈ $\overline{أب}$ ، حيث : $\frac{أهـ}{هـب} = \frac{٣}{٢}$ ،
$\overleftrightarrow{ءهـ} \cap \overleftrightarrow{جـب} = \{و\}$

(١) **أثبت أن** : Δ ء جـ و ~ Δ هـ أ ء

(٢) **أوجد** : $\frac{م(ءجـو)}{م(هـأء)}$

---

(٨) أ ب جـ ء متوازي أضلاع ، س ∈ $\overrightarrow{أب}$ ، س ∉ $\overline{أب}$ حيث : ب س = ٢ أ ب ، ص ∈ $\overrightarrow{جب}$ حيث ب ص = ٢ ب جـ ، رسم متوازي الأضلاع ب س ع ص
أثبت أن : م (متوازي الأضلاع أ ب جـ ء) : م (متوازي الأضلاع س ب ص ع) = ١ : ٤

---

(٩) أ ب جـ ء مربع ، قسمت $\overline{أب}$ ، $\overline{بجـ}$ ، $\overline{جـء}$ ، $\overline{ءأ}$ على الترتيب بنسبة ١ : ٣
أثبت أن :
(١) الشكل س ص ع ل مربع .
(٢) م (المربع س ص ع ل) : م (المربع أ ب جـ ء) = ٥ : ٨

---

(١٠) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، رسمت المثلثات المتساوية الأضلاع أ ب س ، ب جـ ص ، أ جـ ع
أثبت أن :
م (Δ أ ب س) + م (Δ ب جـ ص) = م (Δ أ جـ ع)

الدرس الرابع
تطبيقات التشابه في الدائرة

تمرين مشهور :

إذا تقاطع المستقيمان الحاويان للوترين أب ، جى

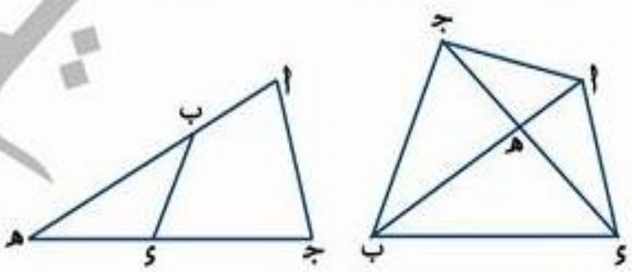
لدائرة في نقطة هـ فإن : هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ ى

Δ هـ أ ى ∼ Δ هـ جـ ب

∴ هـ أ / هـ جـ = هـ ى / هـ ب

⟸ هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ ى

عكس التمرين المشهور :



إذا كان : هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ ى

فإن النقط أ ، ب ، جـ ، ى تقع على دائرة واحدة .

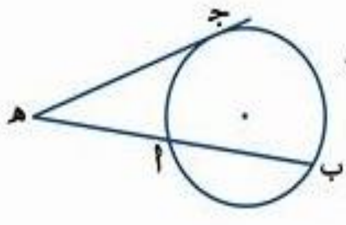
نتيجة هامة :

إذا كان هـ نقطة خارج دائرة ،

هـ جـ يمس الدائرة في جـ ،

هـ ب يقطعها في أ ، ب

فإن : $(\text{هـ جـ})^2$ = هـ أ × هـ ب

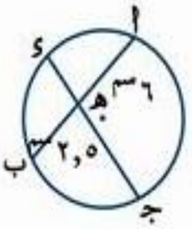


مثال ١ : أب ، جى وتران في دائرة متقاطعان في هـ

فإذا كان أ هـ = ٦سم ، هـ ب = ٢,٥سم ، جى = ٨سم

فأوجد طول كل من جـ هـ ، هـ ى

الحـــل



نفرض أن جـ هـ = س سم

∴ هـ ى = (٨ − س) سم

∵ أب ، جى وتران متقاطعان في هـ

∴ أ هـ × هـ ب = جـ هـ × هـ ى

∴ ٦ × ٢,٥ = س × (٨ − س)

∴ س^2 − ٨س + ١٥ = ٠

∴ (س − ٥)(س − ٣) = ٠

∴ س = ٥ أو س = ٣

∴ طولا جـ هـ ، هـ ى هما ٥ ، ٣ من السنتيمترات .

مثال ٢ : في الشكل المقابل :

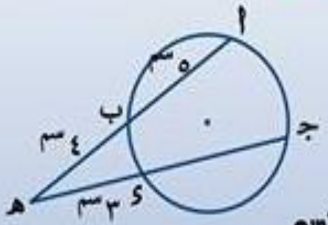
هـ أ ، هـ جـ قاطعتان

للدائرة في ب ، ى ،

أب = ٥سم ،

ب هـ = ٤سم ، ى هـ = ٣سم

احسب طول الوتر جى



الحـــل

∵ هـ أ ، هـ جـ قاطعتان للدائرة

∴ هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ ى

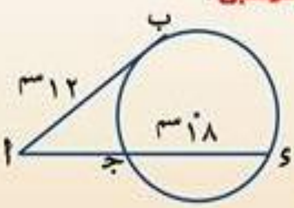
∴ (٥ + ٤) × ٤ = (جى + ٣) × ٣

∴ ٣٦ = (جى + ٣) × ٣

∴ ١٢ = جى + ٣

∴ جى = ٩سم

مثال ٣ : في الشكل المقابل :



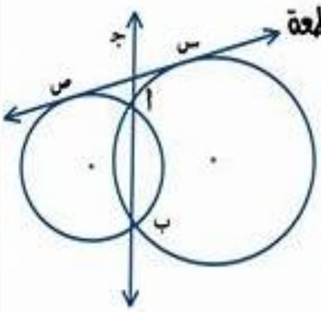
أ نقطة خارج دائرة ،
أب مماسة للدائرة ،
أ ء قاطعة لها في جـ
فإذا كان أب = ١٢ سم ،
جـ ء = ١٨ سم
فاحسب طول أجـ

الحـــل

نفرض أن : أجـ = س
∵ أب مماسة ، أ ء قاطعة للدائرة
∴ $(\text{أب})^2$ = أجـ × أ ء (نتيجة)
∴ $(١٢)^2$ = س (س + ١٨)
∴ س^2 + ١٨س − ١٤٤ = ٠
∴ (س + ٢٤)(س − ٦) = ٠
∴ س = ٦ أي أن : أجـ = ٦ سم

مثال ٤ : دائرتان متقاطعتان في أ ، ب رسم مماس مشترك يمسهما في س ، ص فإذا كان :
أب ∩ س ص = {جـ}
أثبت أن : جـ منتصف س ص

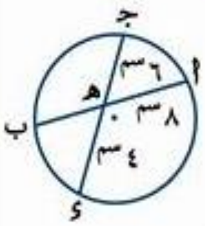
الحـــل



∵ جـ س مماسة ، جـ ب قاطعة
∴ $(\text{جـ س})^2$ = جـ أ × جـ ب
وبالمثل في الدائرة الثانية
∴ $(\text{جـ ص})^2$ = جـ أ × جـ ب
∴ $(\text{جـ س})^2 = (\text{جـ ص})^2$
∴ جـ س = جـ ص

تمارين (٤)

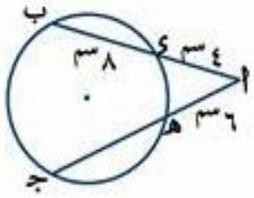
(١) في الشكل المقابل :



أب ، جـ ء وتران متقاطعان في هـ
، أهـ = ٨ سم ، هـ جـ = ٦ سم
، هـ ء = ٤ سم . **احسب** طول ب هـ

---

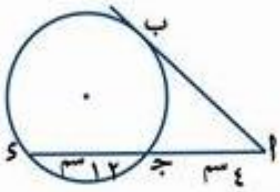
(٢) في الشكل المقابل :



أب ، أجـ قاطعتان للدائرة
، أ ء = ٤ سم ، ب ء = ٨ سم
، أهـ = ٦ سم
أوجد طول جـ هـ

---

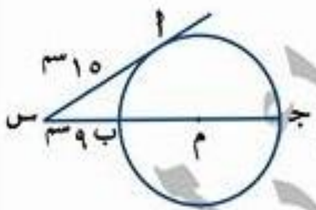
(٣) في الشكل المقابل :



أب مماسة للدائرة ،
أ ء قاطعة للدائرة
، أجـ = ٤ سم ، جـ ء = ١٢ سم
أوجد طول أب

---

(٤) في الشكل المقابل :



س نقطة خارج الدائرة م
، س أ مماسة للدائرة ،
س جـ قاطعة للدائرة في ب
فإذا كان : س أ = ١٥ سم ،
س ب = ٩ سم
فاحسب طول نصف قطر الدائرة .

---

(٥) أب ، جـ ء وتران متقاطعان في هـ فإذا كانت أطوال
أهـ ، ب هـ ، جـ ء هي على الترتيب ٥ ، ٦ ، ١١.٥ سم
فاحسب طول كل من : هـ جـ ، هـ ء

(٦) **في الشكل المقابل :**

أب قطر في دائرة م

رسم الوتر جـى الذي طوله

= ١٦سم عموديًا على القطر

أب فقطعه في هـ

فإذا كان : أهـ = ٤سم

احسب مساحة سطح الدائرة م

(٧) أ نقطة خارج دائرة مركزها م ، رسمت أب لتمس الدائرة عند ب ، رسم أم قاطعًا للدائرة في جـ ، ى فإذا كان : أب = ١٢سم ، أجـ = ٩سم .

احسب طول نصف قطر الدائرة .

(٨) أب وتر في دائرة ، جـ ∈ أب ، جـ ∉ أب بحيث : أب = ٣ب جـ ، جـى تمس الدائرة عند ى .

أثبت أن : ٢أب = ٣جـى

(٩) أب ∩ جـى = {هـ} ، أهـ = $\frac{٥}{١٢}$ ب هـ ، ى هـ = $\frac{٣}{٥}$ هـ جـ ، إذا كان : ب هـ = ٦سم ، جـ هـ = ٥سم .

أثبت أن : النقط أ ، ب ، جـ ، ى تقع على دائرة واحدة .

(١٠) أب جـى مستطيل فيه : أب = ٦سم ، ب جـ = ٨سم ، رسم ب هـ ⊥ أجـ فقطع أجـ في هـ ، أى في و .

(١) **أثبت أن** : $(أب)^٢$ = أو × أى

(٢) **أوجد** : طول أو

(١١) دائرتان متحدتا المركز م ، طولا نصفي قطريهما ١٢سم ، ٧سم ، رسم الوتر أى في الدائرة الكبرى ليقطع الدائرة الصغرى في ب ، جـ على الترتيب .

أثبت أن : أب × ب ى = ٩٥

(١٢) **في الشكل المقابل :**

الدائرتان م ، ن

متماستان عند هـ

، أجـ يمس الدائرة م عند ب

، ويمس الدائرة ن عندجـ

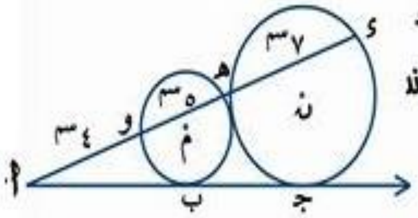
، أهـ يقطع الدائرتين عند

و ، ى على الترتيب

حيث أو = ٤سم ،

و هـ = ٥سم ، هـ ى = ٧سم

أثبت أن : ب منتصف أجـ



(١٣) أب جـ مثلث ، ى ∈ ب جـ حيث ى ب = ٥سم ، ى جـ = ٤ سم . إذا كان : أجـ = ٦سم .

أثبت أن :

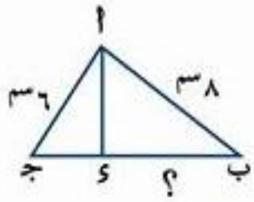
(١) أجـ مماسة للدائرة التي تمر بالنقط أ ، ب ، ى

(٢) Δ أجـ ى ~ Δ ب جـ أ

(٣) م (Δ أب ى) : م (Δ أب جـ) = ٥ : ٩

تمارين عامة على الوحدة الثالثة

(١) في الشكل المقابل :



$\triangle$ ء ب أ $\sim$ $\triangle$ أ ب ج

، ق ($\angle$ ب أ ج) = ٩٠°

أثبت أن : $\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب ج}}$

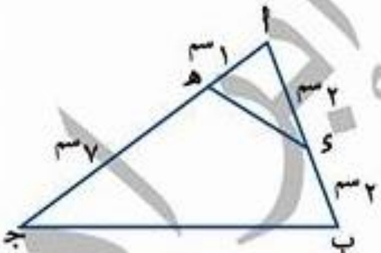
وإذا كان : أ ب = ٨سم ،

أ ج = ٦سم

أوجد : طول $\overline{\text{ب ء}}$

---

(٢) في الشكل المقابل :



أ ء = ء ب = ٢سم ،

أ هـ = ١سم

، هـ ج = ٧سم

أوجد :

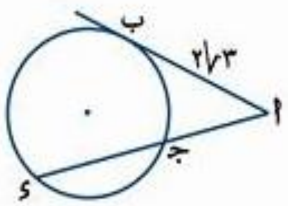
أولاً : $\dfrac{\text{م}(\triangle \text{أ ء هـ})}{\text{م}(\triangle \text{أ ج ب})}$

ثانياً : $\dfrac{\text{م}(\triangle \text{أ ء هـ})}{\text{م}(\text{ء ب ج هـ})}$

ثالثاً : **أثبت أن** : الشكل ء ب ج هـ رباعي دائري .

---

(٣) في الشكل المقابل :



$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة ،

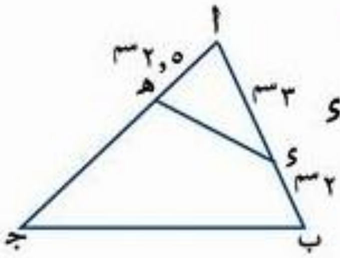
ج منتصف $\overline{\text{أ ء}}$ ،

أ ب = ٣ $\sqrt{2}$

أوجد : طول $\overline{\text{أ ج}}$

---

(٤) في الشكل المقابل :



$\triangle$ أ ب ج $\sim$ $\triangle$ أ هـ ء

أثبت أن : الشكل ب ج هـ ء

رباعي دائري وإذا كان :

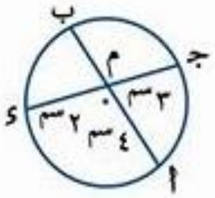
أ ء = ٣سم ،

ب ء = ٢سم ، أ هـ = ٢,٥سم .

أوجد : طول $\overline{\text{هـ ج}}$

---

(٥) في الشكل المقابل :



$\overline{\text{أ ب}} \cap \overline{\text{ج ء}} = \{\text{م}\}$

، م أ = ٤سم

، م ج = ٣سم ، م ء = ٢سم

أوجد : طول $\overline{\text{ب م}}$

---

(٦) إذا كانت النسبة بين مساحتي مضلعين متشابهين تساوي ١٦ : ٤٩ ، **فما** النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيهما ؟ **وما** النسبة بين محيطيهما ؟

---

(٧) دائرتان متقاطعتان في أ ، ب رسم مماس مشترك يمسانهما في س ، ص إذا كان

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \cap \overleftrightarrow{\text{س ص}} = \{\text{ج}\}$ **: أثبت أن**

ج منتصف $\overline{\text{س ص}}$

---

(٨) مثلثان متشابهان مساحتي سطحيهما ١٠٠سم^2 ، ٦٤سم^2 على الترتيب فإذا كان محيط الأول ٦٠سم .

أوجد محيط الثاني .

---

(٩) **أكمل ما يأتي :**

(١) النسبة بين سطحي مثلثين متشابهين كالنسبة بين ....

(٢) يتشابه المضلعان إذا كان .... ، ....

(٣) مضلعان متشابهان النسبة بين محيطيهما ٢ : ٣ ومساحة المضلع الأصغر تساوي ٤٠سم^2 ، فإن مساحة المضلع الأكبر تساوي ....

الوحدة الرابعة : نظريات التناسب في المثلث

دروس الوحدة

الدرس الأول : المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة

الدرس الثاني : منصفا الزاوية والأجزاء المتناسبة

الدرس الثالث : تطبيقات التناسب في الدائرة

الدرس الأول
المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة

نظرية (١) :

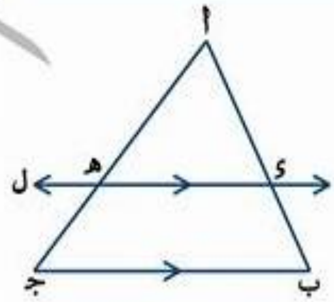
إذا رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين فإنه يقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة.

ففي Δ أ ب جـ إذا كان :

ل // $\overline{\text{ب جـ}}$

ويقطع $\overline{\text{أ ب}}$ في ء ،

$\overline{\text{أ جـ}}$ في هـ



فإن : $\frac{\text{أ ء}}{\text{ء ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ جـ}}$

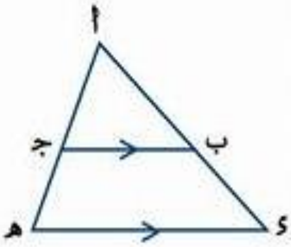
ومن خواص التناسب :

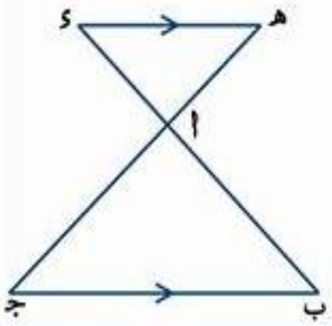
(١) $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ء}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{أ هـ}}$

(٢) $\frac{\text{أ ب}}{\text{ء ب}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{هـ جـ}}$

نتيجة :

إذا رسم مستقيم خارج مثلث أ ب جـ يوازي ضلعاً من أضلاع المثلث وليكن $\overline{\text{ب جـ}}$ ويقطع $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ في ء ، هـ على الترتيب كما في الشكل





فإن :

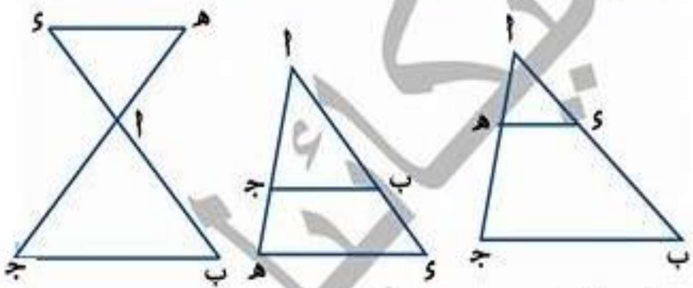
$\frac{\text{أ ب}}{\text{ب ء}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{جـ هـ}}$

ومن خواص التناسب

(١) $\frac{\text{أ ء}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{أ جـ}}$ (٢) $\frac{\text{أ ء}}{\text{ب ء}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{جـ أ}}$

عكس نظرية (١) :

إذا قطع مستقيم ضلعين من أضلاع مثلث وقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة فإنه يوازي الضلع الثالث.



ففي Δ أ ب جـ

إذا كان : $\overleftrightarrow{\text{ء هـ}}$ يقطع $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ في ء

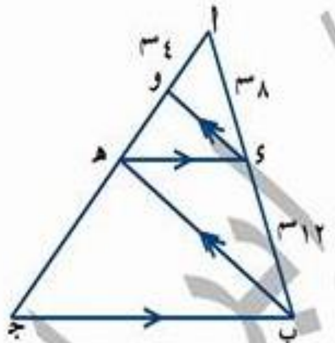
، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ في هـ

وكان : $\frac{\text{أ ء}}{\text{ء ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ جـ}}$

فإن : $\overleftrightarrow{\text{ء هـ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$

مثال ١ : أب جـ مثلث فيه : أب = ٢٠سم ، ء ∈ $\overline{\text{أب}}$ بحيث أء = ٨سم فإذا رسم $\overline{\text{ءهـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ويقطع $\overline{\text{أجـ}}$ في هـ ثم وصل ب هـ ورسم $\overline{\text{ءو}}$ // $\overline{\text{ب هـ}}$ ويقطع $\overline{\text{أهـ}}$ في و . فإذا كان أو = ٤سم **احسب** طول كل من وهـ ، هـ جـ .

الحل



في Δ أب هـ

∵ $\overline{\text{ءو}}$ // $\overline{\text{ب هـ}}$ ∴ $\frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أو}}{\text{وهـ}}$

∴ $\frac{٨}{١٢} = \frac{٤}{\text{وهـ}}$

∴ وهـ = $\frac{١٢ \times ٤}{٨}$ = ٦سم

في Δ أب جـ

∵ $\overline{\text{ءهـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ∴ $\frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـ جـ}}$

∴ $\frac{٨}{١٢} = \frac{١٠}{\text{هـ جـ}}$

∴ هـ جـ = $\frac{١٢ \times ١٠}{٨}$ = ١٥سم

مثال ٢ : في الشكل المقابل:

$\overleftrightarrow{\text{جـ هـ}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ = {أ} ،

س ∈ $\overline{\text{أء}}$ ،

ص ∈ $\overline{\text{أهـ}}$

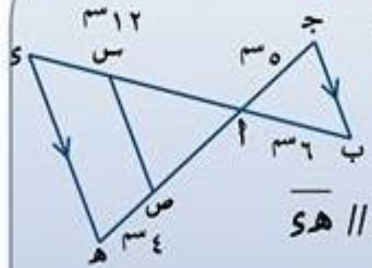
حيث: $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{ءهـ}}$

فإذا كان: أب = ٦سم ،

أجـ = ٥سم ، أء = ١٢سم

، هـ ص = ٤سم

أوجد طول كل من : أهـ ، ء س



الحل

∵ $\overline{\text{هـء}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ هـ}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ = {أ}

∴ $\frac{\text{أء}}{\text{أب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{أجـ}}$ ويكون : $\frac{١٢}{٦} = \frac{\text{أهـ}}{٥}$

∴ أهـ = ١٠سم

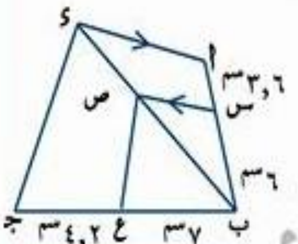
في Δ أهـء :

∵ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{هـء}}$ ∴ $\frac{\text{أهـ}}{\text{هـ ص}} = \frac{\text{أء}}{\text{ء س}}$

∴ $\frac{١٠}{٤} = \frac{١٢}{\text{ء س}}$ ∴ ء س = ٤.٨سم

مثال ٣ : أب جـ ء شكل رباعي رسم قطره $\overline{\text{ب ء}}$ فإذا كانت س ∈ $\overline{\text{أب}}$ بحيث أس = ٣.٦سم ، ب س = ٦سم ثم رسم $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{أء}}$ ويقطع $\overline{\text{ب ء}}$ في ص فإذا كانت ع ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ بحيث ب ع = ٧سم ، ع جـ = ٤.٢سم **أثبت أن** : $\overline{\text{ع ص}}$ // $\overline{\text{جـ ء}}$

الحل



في Δ ب أء

∵ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{أء}}$

∴ $\frac{\text{ب ص}}{\text{ص ء}} = \frac{\text{ب س}}{\text{س أ}} = \frac{٦}{٣.٦}$

∴ $\frac{\text{ب ص}}{\text{ص ء}} = \frac{٦}{٣.٦} = \frac{٦٠}{٣٦} = \frac{٥}{٣}$ ⟸ (١)

∵ $\frac{\text{ب ع}}{\text{ع جـ}} = \frac{٧}{٤.٢} = \frac{٧٠}{٤٢} = \frac{٥}{٣}$ ⟸ (٢)

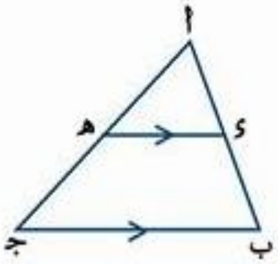
من (١) ، (٢)

∴ $\frac{\text{ب ص}}{\text{ص ء}} = \frac{\text{ب ع}}{\text{ع جـ}}$

∴ $\overline{\text{ع ص}}$ // $\overline{\text{جـ ء}}$

تمارين (١ – ١) النظرية وعكسها

(١) **في الشكل المقابل:**



أ ب جـ مثلث فيه :

ء هـ // ب جـ

أولاً : إذا كان : أ جـ = ١٢ سم

، أ هـ = ٤ سم ، أ ب = ٩ سم

أوجد : أ ء

ثانياً : إذا كان أ جـ = ١٥ ، هـ جـ = ٣ سم ، أ ء = ٥ سم

أوجد : ء ب

ثالثاً : إذا كان جـ هـ = ٦ سم ، أ هـ = ٤ سم ، أ ء = ٥ سم

أوجد : ء ب

رابعاً : إذا كان أ هـ = ٨ سم ، أ جـ = ١٨ سم

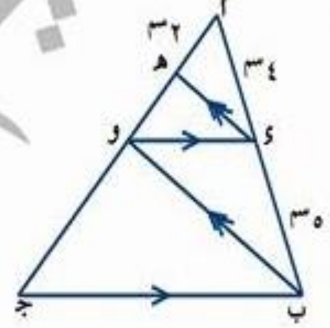
، ب ء = ٦ سم **أوجد** : أ ء

خامساً : إذا كان جـ هـ = أ ء ، أ هـ = ٤ سم ،

ء ب = ٩ سم **أوجد** : أ جـ .

---

(٢) **في الشكل المقابل:**



ء هـ // ب و ،

ء و // ب جـ ،

أ ء = ٤ سم ،

ء ب = ٥ سم ،

أ هـ = ٢ سم .

احسب طول كل من : هـ و ، و جـ

---

(٣) أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ٩ سم ، ب جـ = ١٢ سم ،

جـ أ = ١٥ سم ، ء $\in$ أ ب بحيث كان : أ ء = ٣ سم ، رسم

ء هـ // أ جـ ويقطع ب جـ في هـ ثم رسم

ء و // ب جـ ويقطع أ جـ في و **أوجد طول كل**

من : ء هـ ، ء و

---

(٤) أ ب جـ مثلث ، م نقطة داخلة ، وصلت

م أ ، م ب ، م جـ وكانت س $\in$ م أ ، ص $\in$ م ب ،

ع $\in$ م جـ بحيث س ص // أ ب ، س ع // أ جـ

أثبت أن : ص ع // ب جـ

---

(٥) أ ب جـ ء متوازي أضلاع ، هـ $\in$ ب جـ بحيث :

هـ $\notin$ ب جـ ، رسمت أ هـ فقطعت ب ء في س ،

جـ ء في ص .

أثبت أن : أ س وسط متناسب بين س ص ، س هـ

---

(٦) أ ب جـ مثلث ، ء منتصف أ ب رسم مستقيم يمر بنقطة

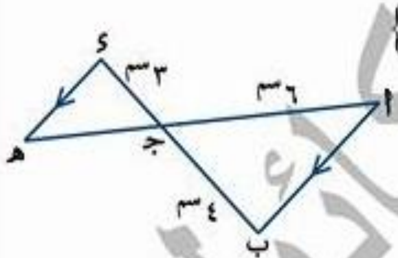
ء ويقطع أ جـ في هـ ويقطع ب جـ في و

أثبت أن : $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{\text{ب و}}{\text{و جـ}}$

(إرشاد : ارسم جـ س // و ء ويقطع أ ب في س)

---

(٧) **في الشكل المقابل:**



أ ب // ء هـ ،

أ هـ $\cap$ ب ء = {جـ}

، أ جـ = ٦ سم

، ب جـ = ٤ سم

، جـ ء = ٣ سم

أوجد : طول جـ هـ

---

(٨) س ص $\cap$ ع ل = {م} ، حيث س ع // ل ص

، فإذا كان : س م = ٩ سم ، ص م = ١٥ سم ،

ع ل = ٣٦ سم

أوجد : طول ع م

نظرية (٢) : تاليس العامة :

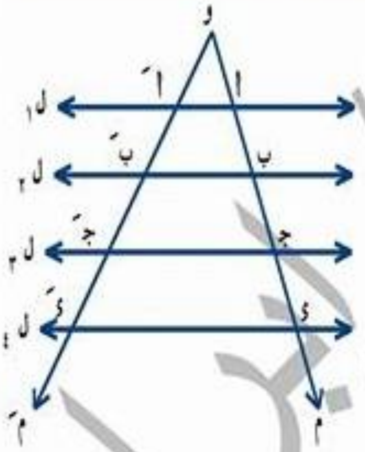
إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمات متوازية فإن أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر.

إذا كان :

$ل_1 // ل_2 // ل_3 // ل_4$

، م ، مَ قاطعان لهما

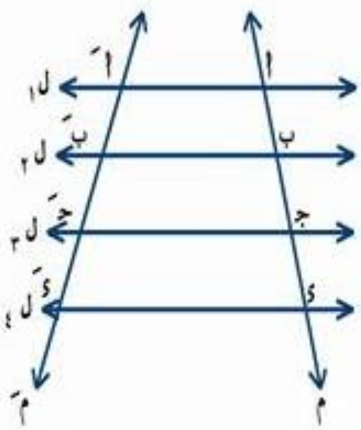
فإن :



$\frac{\text{أب}}{\text{أَبَ}} = \frac{\text{بج}}{\text{بَجَ}} = \frac{\text{أج}}{\text{أَجَ}} = \frac{\text{جء}}{\text{جَءَ}}$

حالة خاصة (١) : تاليس الخاصة :

في النظرية السابقة : إذا كانت أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين متساوية فإن أطوال القطع الناتجة على أي قاطع آخر تكون متساوية.



إذا كان : $ل_1 // ل_2 // ل_3 // ل_4$

، م ، مَ قاطعان لهما

وكان : أب = بج = جء فإن :

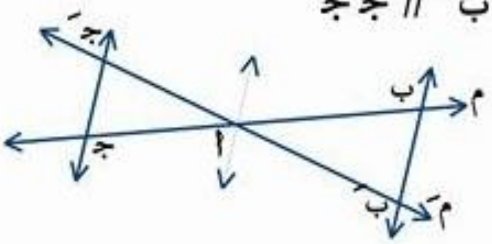
أَبَ = بَجَ = جَءَ

حالة خاصة (٢) :

إذا تقاطع م ، مَ في نقطة أ

وكان : ببَ // ججَ

فإن :



$\frac{\text{أب}}{\text{أج}} = \frac{\text{أبَ}}{\text{أجَ}} = \frac{\text{ببَ}}{\text{ججَ}}$

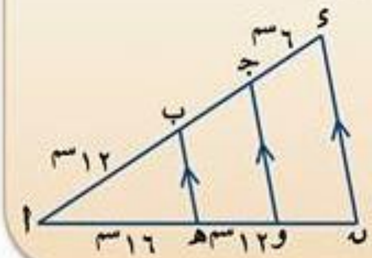
والعكس صحيح :

إذا كان : $\frac{\text{أب}}{\text{أج}} = \frac{\text{أبَ}}{\text{أجَ}} = \frac{\text{ببَ}}{\text{ججَ}}$

فإن : ببَ // ججَ

مثال ١ : في الشكل المقابل :

إذا كانت هب // وج // نء



فأوجد طول كل من : بج ، ون

الحل

∵ هب // وج // نء

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{أهـ}} = \frac{\text{بج}}{\text{هو}}$ ∴ $\frac{١٢}{١٦} = \frac{\text{بج}}{١٢}$

∴ ١٦ بج = ١٤٤ ∴ بج = ٩سم

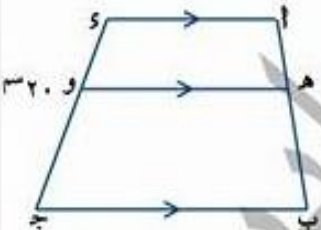
، $\frac{\text{أب}}{\text{أهـ}} = \frac{\text{جء}}{\text{ون}}$ ∴ $\frac{١٢}{١٦} = \frac{٦}{\text{ون}}$

∴ ١٢ ون = ١٦ × ٦

$\therefore$ و ب $= \frac{16 \times 6}{12} =$ ٨سم

مثال ٢ : أ ب جـ د شبه منحرف فيه $\overline{\text{أد}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$ ، جـ د = ٢٠سم ، هـ $\in \overline{\text{أب}}$ بحيث كان : أ هـ : هـ ب = ٢ : ٣ ثم رسم $\overline{\text{هـو}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$ فقطع $\overline{\text{دجـ}}$ في و . **أوجد** طول د و

الحل



$\because \overline{\text{أد}} \parallel \overline{\text{هـو}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$ ، $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{دجـ}}$ قاطعان لهما

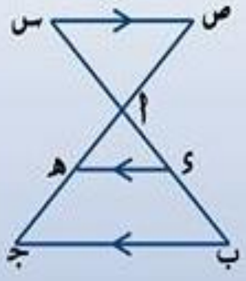
$\therefore \frac{\text{دو}}{\text{أهـ}} = \frac{\text{وجـ}}{\text{هـب}}$ (نظرية)

$\therefore \frac{\text{دو}}{\text{وجـ}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـب}} = \frac{2}{3}$

$\therefore \frac{\text{دو}}{\text{دو} + \text{وجـ}} = \frac{2}{2+3}$ $\therefore \frac{\text{دو}}{20} = \frac{2}{5}$

$\therefore$ دو $= \frac{2 \times 20}{5} =$ ٨سم

مثال ٣ : في الشكل المقابل :



$\overline{\text{دهـ}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$ ،
أد = ٣,٩سم ،
ب د = ٥,٢سم ،
جـ هـ = ٦سم ،
أس = ٢,٦سم ،
أص = ٣سم

أثبت أن : $\overline{\text{دهـ}} \parallel \overline{\text{سص}}$

الحل

$\because \overline{\text{دهـ}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$ $\therefore \frac{\text{أهـ}}{\text{هـجـ}} = \frac{\text{أد}}{\text{دب}}$

$\therefore \frac{\text{أهـ}}{6} = \frac{3.9}{5.2}$

$\therefore$ أهـ $= \frac{6 \times 39}{52} = \frac{9}{2} =$ ٤,٥سم

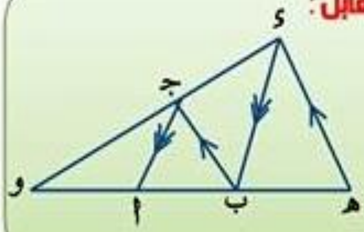
$\therefore \frac{\text{أهـ}}{\text{أص}} = \frac{4.5}{3} = \frac{3}{2} \Longleftarrow (1)$

$\therefore \frac{\text{أد}}{\text{أس}} = \frac{3.9}{2.6} = \frac{3}{2} \Longleftarrow (2)$

من (١) ، (٢)

$\therefore \frac{\text{أهـ}}{\text{أص}} = \frac{\text{أد}}{\text{أس}}$ $\therefore \overline{\text{دهـ}} \parallel \overline{\text{سص}}$

مثال ٤ : في الشكل المقابل :



$\overline{\text{هـد}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$ ،
$\overline{\text{بد}} \parallel \overline{\text{أجـ}}$

أثبت أن :

$(\text{وب})^2 = \text{وأ} \times \text{وهـ}$

الحل

$\because \overline{\text{هـد}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$

$\therefore \frac{\text{وب}}{\text{وهـ}} = \frac{\text{وجـ}}{\text{ود}} \Longleftarrow (1)$

$\because \overline{\text{بد}} \parallel \overline{\text{أجـ}}$

$\therefore \frac{\text{وأ}}{\text{وب}} = \frac{\text{وجـ}}{\text{ود}} \Longleftarrow (2)$

من (١)،(٢)

$\therefore \frac{\text{وب}}{\text{وهـ}} = \frac{\text{وأ}}{\text{وب}}$

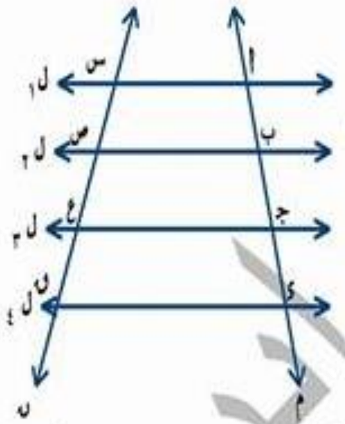
$\therefore (\text{وب})^2 = \text{وأ} \times \text{وهـ}$

تمارين (٢ – ١) على نظرية تاليس

(١) في الشكل المقابل :

ل١ // ل٢ // ل٣ // ل٤ ، م ، ن قاطعان لهما فإذا كان أب = ٤,٥ سم ، ب جـ = ٣سم ، ص ع = ٤ سم ، ع ق = ٦سم

فأوجد طول كل من : جـ ء ، س ص



(٢) في الشكل المقابل :

ء هـ // ب جـ // و ن

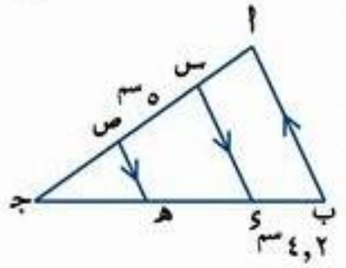
أوجد طول كل من : أو ، ب ء

(٣) في الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث ، أب // س ء // ص هـ ، ب ء : ء هـ : هـ جـ = ١ : ٢ : ٣

فإذا كان س ص = ٥سم ، ب ء = ٤,٢ سم

فأوجد طول كل من : أ س ، ص جـ ، ء هـ ، هـ جـ



(٤) أ ب جـ ء شبه منحرف فيه : أ ء // ب جـ ، جـ ء = ٢١سم ، هـ ∈ أب بحيث كان : أ هـ : هـ ب = ٣ : ٤ ثم رسم هـ و // ب جـ فقطع ء جـ في و ، أوجد طول جـ و .

(٥) أ ب جـ ء شبه منحرف فيه : أ ء // ب جـ ، جـ ء = ٢٠سم س ، ص ∈ أب بحيث : أ س : س ص : ص ب = ٣ : ٢ : ٥ ثم رسم س ل ، ص م يوازيان ب جـ ويقطعان جـ ء في ل ، م على الترتيب أوجد طول كل من : ء ل ، ل م ، ل جـ

(٦) أ ب جـ مثلث ، م ، ن ∈ أب بحيث : م ن : ن ب = ٢ : ٣ ، رسم م هـ ، ن و يوازيان ب جـ ويقطعان أ جـ في هـ ، و على الترتيب فإذا كان : أ هـ = ٤,٥سم ، هـ و = ١,٨سم .

احسب طول جـ و ثم أوجد النسبة أ م : م ن : ن ب

(٧) أب ∩ جـ ء = {هـ} ، س ∈ أب ، ص ∈ جـ ء ، وكان س ص // ب ء // أ جـ

أثبت أن : أ س × هـ ء = جـ ص × هـ ب

(٨) أ ب جـ ء شكل رباعي فيه : أب // جـ ء ، تقاطع قطراه في م ، نصفت ب جـ في هـ ، وسم هـ و // ب أ ويقطع ب ء في س ، أ جـ في ص ، أ ء في و

أثبت أن :

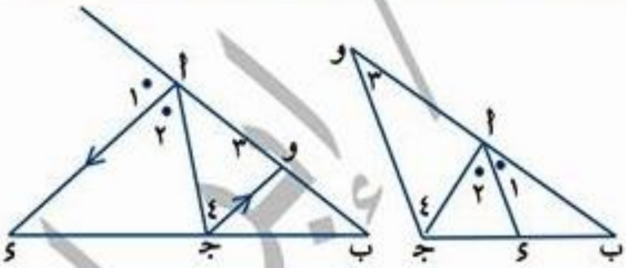
(١) هـ ص = $\frac{١}{٢}$ أب

(٢) $\frac{\text{أص}}{\text{جـ م}} = \frac{\text{ب س}}{\text{ء م}}$

الدرس الثاني
منصفا الزاوية والأجزاء المتناسبة

نظرية (٣):

إذا نصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس قسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو من الخارج إلى جزأين النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين للمثلث .



المعطيات: أ ب جـ مثلث ، $\overrightarrow{\text{أ ى}}$ ينصف ∠أ من الداخل ومن الخارج ، $\overrightarrow{\text{أ ى}}$ يقطع $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ في ى

المطلوب: أثبت أن $\frac{\text{ب ى}}{\text{ى جـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$

العمل: نرسم $\overline{\text{جـ و}}$ // $\overline{\text{ى أ}}$

البرهان: ∵ $\overline{\text{جـ و}}$ // $\overline{\text{ى أ}}$

∴ $\frac{\text{ب ى}}{\text{ى جـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ و}}$ ⟸ (١)

، ∵ ق(∠١) = ق(∠٣) بالتناظر ،

ق(∠٢) = ق(∠٤) بالتبادل

ولكن ق(∠١) = ق(∠٢) معطى

∴ ق(∠٣) = ق(∠٤)

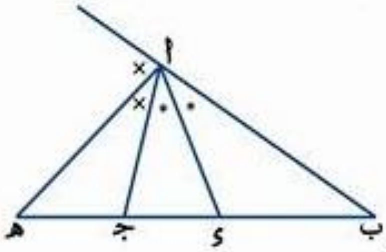
∴ أو = أجـ ⟸ (٢)

من (١) ، (٢)

∴ $\frac{\text{ب ى}}{\text{ى جـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$

ملاحظات هامة:

(١) في Δ أ ب جـ إذا كان $\overrightarrow{\text{أ ى}}$ ينصف (∠ب أ جـ) ، $\overrightarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف الزاوية الخارجة للمثلث عند أ



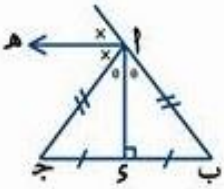
فإن : $\frac{\text{ب ى}}{\text{ى جـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$ ، $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$ ⟸ $\frac{\text{ب ى}}{\text{ى جـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}}$

، المنصفان $\overleftrightarrow{\text{أ ى}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ متعامدان .

(٢) في Δ أ ب جـ إذا كان أب > أجـ فإن بى > ى جـ

(٣) في Δ أ ب جـ إذا كان :

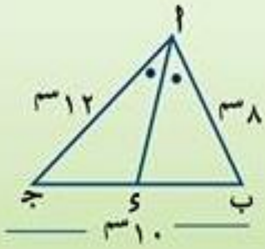
أب = أجـ فإن ى تكون منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ويكون $\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$



مثال ١ : في الشكل المقابل :

Δ أ ب جـ أطوال أضلاعه ٨ ، ١٢ ، ١٠ سم نصفت ∠أ بالمنصف $\overrightarrow{\text{أ ى}}$

أوجد طول كل من : ب ى ، ى جـ



الحل

∵ $\overrightarrow{\text{أ ى}}$ ينصف ∠أ ∴ $\frac{\text{ب ى}}{\text{ى جـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$ (نظرية)

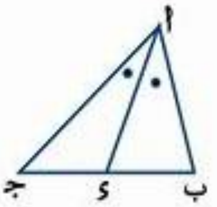
∴ $\frac{\text{ب ى}}{\text{ى جـ}} = \frac{٨}{١٢} = \frac{٢}{٣}$

∴ $\frac{\text{ب ى} + \text{ى جـ}}{\text{ى جـ}} = \frac{٢+٣}{٣}$ ∴ $\frac{١٠}{\text{ى جـ}} = \frac{٥}{٣}$

∴ ى جـ $= \frac{١٠ \times ٣}{٥} = ٦$ سم ∴ ب ى = ٤ سم

إيجاد طول المنصف الداخلي والمنصف الخارجي لزاوية رأس المثلث :

تمرين مشهور :



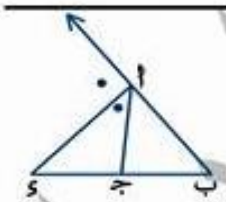
في Δ أ ب جـ إذا كان :

أ ء ينصف ∠ أ من الداخل

ويقطع ب جـ في ء

فإن :

أء = √(أب × أجـ − ب ء × ء جـ)



في Δ أ ب جـ إذا كان :

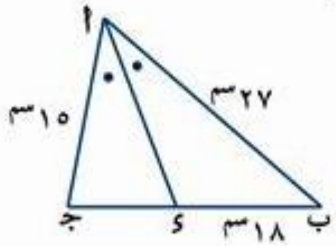
أ ء ينصف ∠ أ من الخارج

فإن :

أء = √(ء جـ × ء ب − أجـ × أب)

مثال ٦ : أ ب جـ مثلث فيه : أب = ٢٧ سم ، أجـ = ١٥ سم . رسم أ ء ينصف ∠ أ ويقطع ب جـ في ء ، إذا كان : ب ء = ١٨ سم . **احسب** طول أ ء

الحل



∵ أ ء ينصف ∠ ب أ جـ

∴ ب ء / ء جـ = أب / أجـ

∴ ١٨ / ء جـ = ٢٧ / ١٥

∴ ء جـ = ١٠ سم

∵ أء = √(أب × أجـ − ب ء × ء جـ)

∴ أء = √(٢٧×١٥ − ١٨×١٠) = √٢٢٥ = ١٥ سم

تمارين (١ – ٢) نظرية ٣

(١) أ ب جـ مثلث أطوال أضلاعه أب ، ب جـ ، جـ أ هي على الترتيب ٦ ، ٧ ، ٨ سم ، رسم أ ء ينصف ∠ أ ويقطع ب جـ في ء **أوجد** طول كل من : ب ء ، ء جـ

---

(٢) أ ب جـ مثلث أطوال أضلاعه أب ، ب جـ ، جـ أ هي على الترتيب ٨ ، ٥ ، ٩ سم نصفت الزاوية الخارجة عند جـ بمنصف قطع أ ب في ء **أوجد** طول كل من : أ ء ، ء ب

---

(٣) أ ب جـ مثلث فيه : أب = ٤ سم ، أجـ = ٥ سم ، ب جـ = ٦ سم نصفت ∠ أ والزاوية الخارجة للمثلث عند أ بمنصفين قطعا ب جـ في ء ، هـ على الترتيب . **احسب** طول كل من : ء ب ، هـ ب

---

(٤) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب فيه أب = ٣ سم ، ب جـ = ٤ سم نصفت ∠ أ جـ ب بمنصف قطع أب في ء **أوجد** طول جـ ء

---

(٥) أ ب جـ ء متوازي أضلاع تقاطع قطراه في م . نصفت ∠ أ م ء بمنصف قطع أ ء في س ، نصفت ∠ ء م جـ بمنصف قطع جـ ء في ص . **أثبت أن** : س ص // أ جـ

---

(٦) أ ب جـ ء شكل رباعي فيه أب = أ ء نصفت الزاويتان ∠ ب أ جـ ، ∠ ء أ جـ بمنصفين قطعا ب جـ ، ء جـ في هـ ، و على الترتيب . **برهن أن** : هـ و // ب ء

---

(٧) أ ب جـ ء متوازي أضلاع ، منصف ∠ ب أ ء يقطع ب ء في هـ ، منصف ∠ أ ب جـ يقطع أ جـ في و **أثبت أن** : هـ و // أ ب

(٨) أ ب جـ مثلث . فرضت نقطة م داخله ونصفت الزوايا
∠ ب م جـ ، ∠ جـ م أ ، ∠ أ م ب بمنصفات قطعت
ب جـ ، جـ أ ، أ ب في النقط ء ، هـ ، و على الترتيب

أثبت أن : $\frac{\text{بء}}{\text{ءجـ}} \times \frac{\text{جـهـ}}{\text{هـأ}} \times \frac{\text{أو}}{\text{وب}} = ١$

---

(٩) أ ب جـ مثلث ، نصفت ∠ أ بمنصف قطع ب جـ في ء
ثم رسم ء هـ // جـ أ فقطع أ ب في هـ

أثبت أن : $\text{هـء} = \frac{\text{أب} \times \text{أجـ}}{\text{أب} + \text{أجـ}}$

---

(١٠) أ ب جـ مثلث فيه : أ ب = ٨ سم ، أ جـ = ٤ سم ،
ب جـ = ٦ سم ، أ ء ينصف ∠ أ ويقطع ب جـ في ء ،
رسم أ هـ ينصف ∠ أ الخارجة ويقطع ب جـ في هـ

أوجد : طول كل من ء هـ ، أ ء ، أ هـ

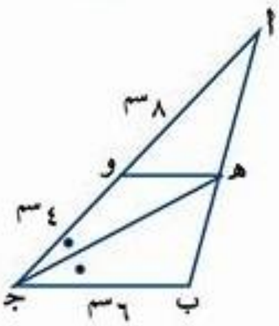
---

(١١) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، رسم أ ء ينصف
∠ أ ويقطع ب جـ في ء ، فإذا كان طول ب ء = ٢٤ سم
، ب أ : أ جـ = ٣ : ٥ **فأوجد** محيط Δ أ ب جـ .

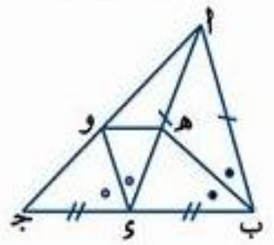
---

(١٢) في كل من الشكلين التاليين **أثبت أن** :
هـ و // ب جـ

(أ)

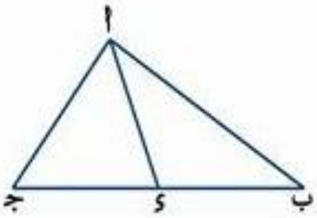


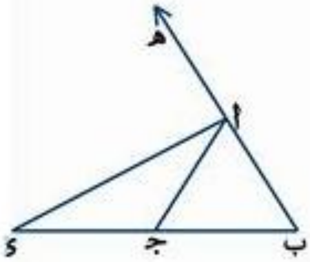
(ب)



عكس نظرية (٣) :

إذا قسمت نقطة أحد أضلاع مثلث من الداخل أو من الخارج إلى جزأين النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين كان الشعاع الذي مبدؤه الرأس المقابل لهذا الضلع ماراً بنقطة التقسيم هو المنصف للزاوية الداخلة أو الخارجة عند هذا الرأس حسب نوع التقسيم .





ففي Δ أ ب جـ :

إذا كانت ء تقسم ب جـ من الداخل بحيث $\frac{\text{بء}}{\text{ءجـ}} = \frac{\text{أب}}{\text{أجـ}}$

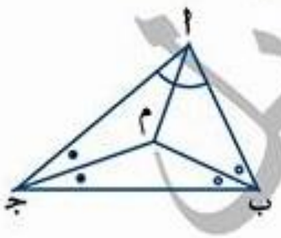
فإن : أ ء ينصف ∠ ب أ جـ

إذا كانت ء تقسم ب جـ من الخارج بحيث $\frac{\text{بء}}{\text{ءجـ}} = \frac{\text{أب}}{\text{أجـ}}$

فإن : أ ء ينصف ∠ جـ أ هـ

حقيقة :

منصفات زوايا المثلث تتقاطع في نقطة واحدة .

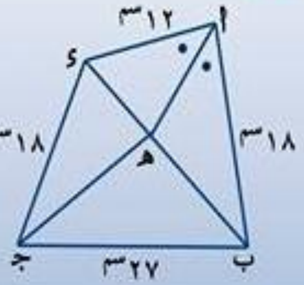


إذا كان : أ م ينصف ∠ أ ،
ب م ينصف ∠ ب ،
أ م ∩ ب م = {م}
فإن : جـ م ينصف ∠ جـ

مثال ١ : في الشكل المقابل :

أ ب جـ ء شكل رباعي ، $\overrightarrow{\text{أهـ}}$ ينصف ∠ ب أ ء ، ويقطع $\overline{\text{ب ء}}$ في هـ

أثبت أن : $\overrightarrow{\text{جـ هـ}}$ ينصف ∠ ب جـ ء



الحل

∵ في △ أ ب ء ∵ $\overrightarrow{\text{أهـ}}$ ينصف ∠ ب أ ء

∴ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ ء}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ء}}$

∴ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ ء}} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$ ⟸ (١)

، $\frac{\text{ب جـ}}{\text{جـ ء}} = \frac{27}{18} = \frac{3}{2}$ ⟸ (٢)

من (١)، (٢) ∴ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ ء}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{جـ ء}}$

∴ $\overrightarrow{\text{جـ هـ}}$ ينصف ∠ ب جـ ء

مثال ٢ : $\overline{\text{ء س}}$ متوسط في المثلث س ص ع . نصف ∠ س ء ص بمنصف قطع $\overline{\text{س ص}}$ في ل وسم $\overleftrightarrow{\text{ل م}}$ يوازي $\overline{\text{ص ع}}$ ويقطع $\overline{\text{س ع}}$ في م .

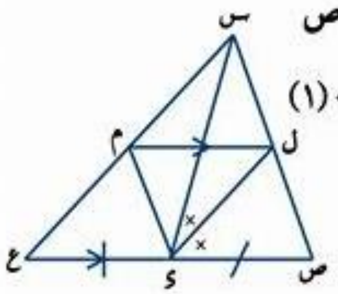
أثبت أن : $\overrightarrow{\text{ء م}}$ ينصف ∠ س ء ع

الحل

في △ ء س ص

∵ $\overrightarrow{\text{ء ل}}$ ينصف ∠ س ء ص

∴ $\frac{\text{س ل}}{\text{ل ص}} = \frac{\text{س ء}}{\text{ء ص}}$ ⟸ (١)



في △ س ص ع

، ∵ $\overline{\text{ل م}}$ // $\overline{\text{ص ع}}$

∴ $\frac{\text{س ل}}{\text{ل ص}} = \frac{\text{س م}}{\text{م ع}}$ ⟸ (٢)

من (١) ، (٢)

وملاحظة أن : ء ص = ء ع

∴ $\frac{\text{س م}}{\text{م ع}} = \frac{\text{س ء}}{\text{ء ع}}$

∴ $\overrightarrow{\text{ء م}}$ ينصف ∠ س ء ع

مثال ٣ : في الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث فيه ، أ ب = ٦سم ، أ جـ = ٩سم

، ب جـ = ١٠,٥سم

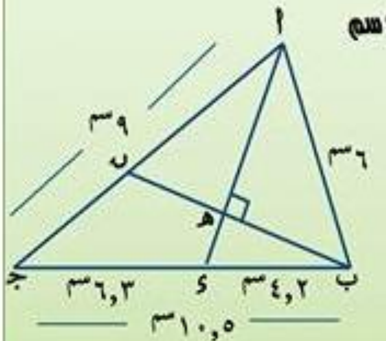
، ء ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ حيث

ب ء = ٤,٢سم

رسم $\overline{\text{ب هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ء}}$

ويقطع $\overline{\text{أ جـ}}$ في ن .

احسب طول ن جـ



الحل

ء جـ = ١٠,٥ − ٤,٢ = ٦,٣سم

$\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ ، $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء جـ}} = \frac{4.2}{6.3} = \frac{2}{3}$

في △ أ ب جـ ∵ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء جـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ ب أ جـ

في △ أ ب ن ∵ $\overline{\text{أ هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب ن}}$ ،

$\overrightarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف ∠ أ

∴ △ أ ب ن متساوي الساقين

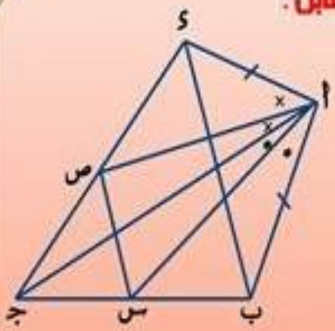
∴ أ ب = أ ن = ٦سم

∴ ن جـ = ٩ − ٦ = ٣سم

مثال ٤ : في الشكل المقابل :

أ ب جـ ى شكل رباعي فيه ،
أ ب = أ ى ،
$\overrightarrow{\text{أ س}}$ ينصف ∠ ب أ جـ
ويقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ في س ،
$\overrightarrow{\text{أ ص}}$ ينصف ∠ ى أ جـ
ويقطع $\overline{\text{ى جـ}}$ في ص

أثبت أن : $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب ى}}$



الحل

∵ $\overrightarrow{\text{أ س}}$ ينصف ∠ ب أ جـ

∴ $\frac{\text{ب س}}{\text{س جـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$ ⟸ (١)

، ∵ $\overrightarrow{\text{أ ص}}$ ينصف ∠ ى أ جـ

∴ $\frac{\text{ى ص}}{\text{ص جـ}} = \frac{\text{ى أ}}{\text{أ جـ}}$ ⟸ (٢)

من (١) ، (٢)

وملاحظة أن : أ ب = أ ى

∴ $\frac{\text{ب س}}{\text{س جـ}} = \frac{\text{ى ص}}{\text{ص جـ}}$

∴ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب ى}}$

تمارين (٢ – ٢) نظرية ٣ وعكسها

(١) أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ٣سم ، أ جـ = ٦سم ، ب جـ = ٧,٥سم ، ى ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ بحيث ب ى = ٢,٥سم

أثبت أن : $\overrightarrow{\text{أ ى}}$ ينصف ∠ ب أ جـ

---

(٢) أ ب جـ مثلث ، النقطتان ى ، هـ خارج المثلث حيث : ى ∈ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، هـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ ، نصفت الزاويتان ∠ جـ ب ى ، ∠ ب جـ هـ بمنصفين تقاطعا في و .

أثبت أن : $\overrightarrow{\text{أ و}}$ ينصف ∠ ب أ جـ

---

(٣) أ ب جـ ى شكل رباعي تقاطع قطراه في هـ فإذا كان :

$\frac{\text{ب هـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{هـ ى}}{\text{ى جـ}}$ **فأثبت أن :** أ ب = أ ى

---

(٤) أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ ، ى ∈ $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ بحيث جـ ى = ب جـ ، نصفت ∠ أ ب جـ بمنصف قطع $\overline{\text{أ جـ}}$ في س ثم رسم من س مستقيم يوازي $\overline{\text{جـ ى}}$ فقطع $\overline{\text{أ ى}}$ في ص . **أثبت أن :**

أولاً : $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{أ ص}}{\text{ص ى}}$

ثانياً : $\overrightarrow{\text{جـ ص}}$ ينصف ∠ أ جـ ى

---

(٥) أ ب جـ ى شكل رباعي فيه أ ب = ٩سم ، ب جـ = ١٠سم ، جـ ى = ٥سم ، س ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ بحيث أ س = ٣سم فإذا رسم $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{أ ى}}$ ويقطع $\overline{\text{ب ى}}$ في ص .

أثبت أن : $\overrightarrow{\text{جـ ص}}$ ينصف ∠ ب جـ ى

---

(٦) أ ب جـ مثلث ، ب ء ينصف ∠ أ ب جـ ويقطع أ جـ في ، رسم ء هـ // ب جـ ويقطع أ ب في هـ .

أثبت أن : $\frac{\text{أ هـ}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$

---

(٧) أ ب جـ ء شكل رباعي فيه : أ ب = ٦سم ، ب جـ = ٩سم ، جـ ء = ٦سم ، ء أ = ٤سم ، أ هـ ينصف ∠ أ ويقطع ب ء في هـ .

أولاً : **أوجد** قيمة $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ ء}}$

ثانياً : **أثبت أن** : جـ هـ ينصف ∠ ب جـ ء

---

(٨) أ ب جـ ء شكل رباعي ، نصفت ∠ ب أ ء بالمنصف أ هـ لاقى ب ء في هـ ، رسم هـ و // ب جـ فقطع جـ ء في و . **برهن** على أنه إذا كان جـ و = ٢ و ء فإن : أ ء = $\frac{١}{٢}$ أ ب

---

(٩) س ص ع ن شكل رباعي فيه : ص س = ص ع ، رسم ص هـ ينصف ∠ ع ص ن ويقطع ع ن في هـ ، رسم هـ ك // ع س ويقطع س ن في ك .

أثبت أن : ص ك ينصف ∠ س ص ن

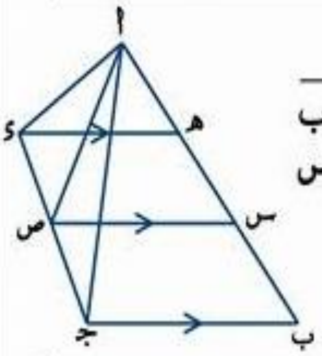
---

(١٠) **في الشكل المقابل** :

ء هـ // س ص // ب جـ أ ب ، أ ء × ب س = أ جـ × هـ س

أثبت أن :

أ ص ينصف ∠ م ن و



---

(١١) دائرتان م ، ن متماستان من الخارج في أ ، رسم مستقيم يوازي م ن فقطع الدائرة م في ب ، جـ ، والدائرة ن في ء ، هـ على الترتيب . فإذا تقاطع ب م ، هـ ن في النقطة و .

أثبت أن : و أ ينصف ∠ م و ن

---

(١٢) أ ب قطر في دائرة ، أ جـ وتر فيها ، رسم جـ ء مماساً للدائرة عند جـ فقطع أ ب في ء ، إذا كانت هـ ∈ أ ب بحيث $\frac{\text{ء ب}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{ء جـ}}{\text{جـ هـ}}$

أثبت أن :

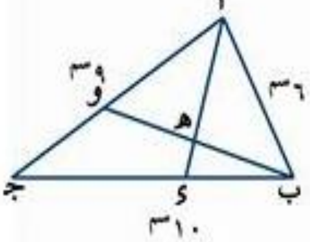
(١) جـ أ ينصف الزاوية الخارجة للمثلث جـ ء هـ عند جـ

(٢) $\frac{\text{ء أ}}{\text{ء ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{ب هـ}}$

---

(١٣) **في الشكل المقابل** :

أ ب جـ مثلث فيه ، أ ب = ٦سم ، أ جـ = ٩سم ، ب جـ = ١٠سم ، ء ∈ ب جـ بحيث ب ء = ٤سم ، رسم ب هـ ⊥ أ ء ، أ جـ في هـ ، و على الترتيب



(١) **أثبت أن** : أ ء ينصف ∠ أ

(٢) **أوجد** : م(Δ أ ب و) : م(Δ جـ ب و)

الدرس الثالث
تطبيقات التناسب في الدائرة

أولا : قوة نقطة بالنسبة لدائرة :

تعريف :

قوة النقطة أ بالنسبة للدائرة م التي طول نصف قطرها نق هو العدد الحقيقي ق م (أ) حيث : ق م (أ) = (أم)^{2} – نق^{2}

ملاحظات هامة :

ملاحظة (١) :

يمكن التنبؤ بموقع نقطة أ بالنسبة للدائرة م

فإذا كان :

ق م (أ) > ٠

فإن : أ تقع خارج الدائرة .

ق م (أ) = ٠

فإن : أ تقع على الدائرة .

ق م (أ) < ٠

فإن : أ تقع داخل الدائرة .

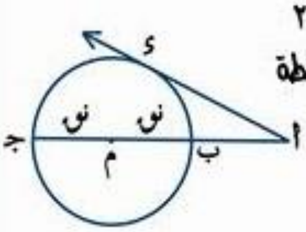
مثال ١ : **حدد** موقع كل من النقط أ ، ب ، جـ بالنسبة للدائرة م التي طول نصف قطرها ٥سم إذا كان :
ق م (أ) = ١١ ، ق م (ب) = صفر ،
ق م (جـ) = –١٦ ، ثم **احسب** بعد كل نقطة عن مركز الدائرة .

الحــل

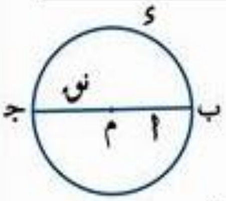
∵ ق م (أ) = ١١ > ٠ ∴ أ تقع خارج الدائرة .
∵ ق م (أ) = (أم)^{2} – نق^{2}
∴ ١١ = (أم)^{2} – ٢٥ ∴ أم = ٦سم
∵ ق م (ب) = صفر ∴ ب تقع على الدائرة .
∴ بم = ٥سم
∵ ق م (جـ) = –١٦ < ٠ ∴ جـ تقع داخل الدائرة
∵ ق م (أ) = (أم)^{2} – نق^{2}
∴ –١٦ = (جـم)^{2} – ٢٥ ∴ جـم = ٣سم

ملاحظة (٢) :

إذا وقعت النقطة أ خارج الدائرة فإن :
ق م (أ) = (أم)^{2} – نق^{2}
= (أم – نق)(أم + نق)
= أب × أجـ = (أء)^{2}
∴ طول المماس المرسوم من النقطة
أ للدائرة م = $\sqrt{\text{ق م (أ)}}$



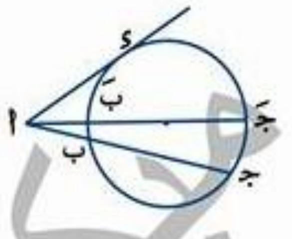
ملاحظة (٣) :

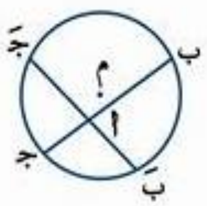


إذا وقعت النقطة أ داخل الدائرة م
فإن : ق م (أ) = (أم)^{2} – نق^{2}
= (أم – نق)(أم + نق)
= – (نق – أم)(أم + نق)
= –أب × أجـ

وبصفة عامة

أ خارج الدائرة م | أ داخل الدائرة م





ق م (أ) = أب × أجـ
= أبَ × أجـَ
= (أء)^{2}

ق م (أ) = أب × أجـ
= أبَ × أجـَ

ملاحظة (٤) :

تسمى مجموعة النقاط التي لها نفس القوة بالنسبة لدائرتين مختلفتين بالمحور الأساسي للدائرتين .

فإذا كان ق م (أ) = ق ن (أ) فإن أ تقع على المحور الأساسي للدائرتين م ، ن

مثال ٢ : الدائرة م طول نصف قطرها ٣١سم . النقطة أ تبعد عن مركزها ٢٣سم ، رسم الوتر $\overline{\text{ب ج}}$ حيث أ ∈ $\overline{\text{ب ج}}$ ، أب = ٣ أج **احسب** :

(أ) طول الوتر $\overline{\text{ب ج}}$

(ب) بعد الوتر $\overline{\text{ب ج}}$ عن مركز الدائرة .

الحل

في الدائرة م :

(أ) ∵ نق = ٣١ ، م أ = ٢٣سم ، أ ∈ $\overline{\text{ب ج}}$

∴ أ تقع داخل الدائرة ويكون :

ق م (أ) = $(\text{م أ})^{2}$ − نق^{2} = − أب × أج

$(٢٣)^{2} - (٣١)^{2}$ = −٣ أج × أج

∴ أج = ١٢سم

∴ طول الوتر ب ج = ٤أج = ١٢ × ٤ = ٤٨سم

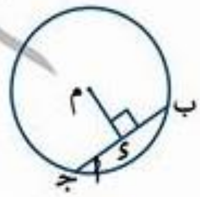
(ب) بفرض أن بعد الوتر عن مركز الدائرة = م ء حيث : $\overline{\text{م ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب ج}}$

∵ $\overline{\text{م ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب ج}}$ ∴ ء منتصف $\overline{\text{ب ج}}$ ويكون

ب ء = ٢٤سم

∴ $(\text{م ء})^{2} = (٣١)^{2} - (٢٤)^{2}$ = ٣٨٥

∴ م ء = $\sqrt{٣٨٥}$ ≃ ١٩.٦سم



مثال ٣ : دائرتان م ، ن متقاطعتان في أ ، ب ، ج ∈ $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ ، رسم $\overrightarrow{\text{ج ء}}$ فقطع الدائرة م في ء ، هـ حيث ج ء = ٩سم ، ء هـ = ٧سم ، ورسم $\overline{\text{ج و}}$ يمس الدائرة ن عند و .

(أ) **أثبت أن** : ق م (ج) = ق ن (ج)

(ب) إذا كان أب = ١٠سم . **أوجد** طول كل من $\overline{\text{أ ج}}$ ، $\overline{\text{ج و}}$

الحل

(أ) ∵ ج تقع خارج الدائرة م ، $\overrightarrow{\text{ج هـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ج ب}}$ قاطعان للدائرة م .

∴ ق م (ج) = جء × جهـ = جأ × جب ..... (١)

∵ ج تقع خارج الدائرة ن ،

$\overrightarrow{\text{ج ب}}$ قاطع ، $\overline{\text{ج و}}$ مماس لها .

∴ ق ن (ج) = جأ × جب = $(\text{ج و})^{2}$ ..... (٢)

من (١) ، (٢)

∴ ق م (ج) = ق ن (ج)

= ٩ × ١٦ = ١٤٤

(ب) ∵ أب = ١٠سم

∴ ق ن (ج) = جأ (جأ + ١٠)

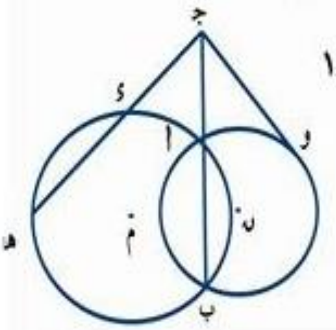
= $(\text{ج و})^{2}$ = ١٤٤

∵ $(\text{ج أ})^{2}$ + ١٠ جأ = ١٤٤

∴ جأ = ٨سم

∵ $(\text{ج و})^{2}$ = ١٤٤

∴ جو = ١٢سم



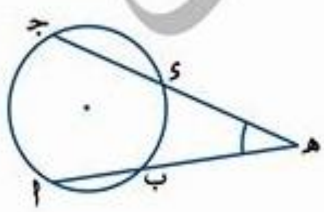
ثانيا : القاطع والمماس وقياسات الزوايا :

(١) قياس الزاوية الناتجة من تقاطع قاطعين :

(أ) داخل الدائرة

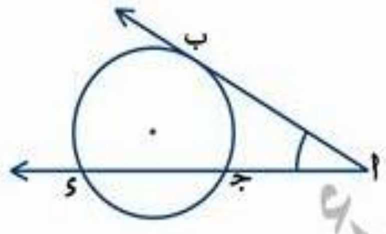
$$\text{ق}(\angle \text{أ هـ ج}) = \frac{1}{2}\left[\text{ق}(\overset{\frown}{\text{أ ج}}) + \text{ق}(\overset{\frown}{\text{ء ب}})\right]$$

(ب) خارج الدائرة



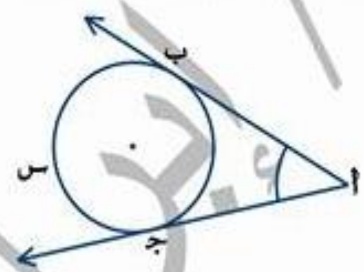
$$\text{ق}(\angle \text{أ هـ ج}) = \frac{1}{2}\left[\text{ق}(\overset{\frown}{\text{أ ج}}) - \text{ق}(\overset{\frown}{\text{ء ب}})\right]$$

(٢) قياس الزاوية الناتجة من تقاطع قاطع ومماس للدائرة



ق(∠أ) = $\frac{1}{2}$ [ق(⌒أجـ) − ق(⌒ءب)]

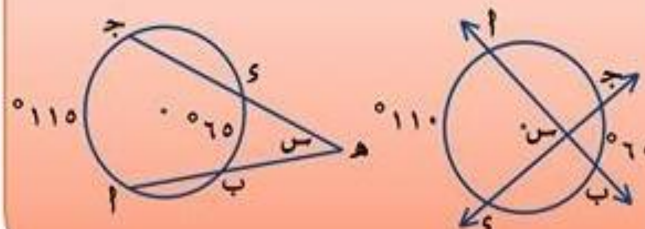
(٣) قياس الزاوية الناتجة من تقاطع مماسين لدائرة .



ق(∠أ) = $\frac{1}{2}$ [ق(ب س جـ) − ق(⌒بجـ)]

مثال ٤ : في كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة س

(أ) (ب)



الحـــل

(أ) س = $\frac{1}{2}$ × [٦٠° + ١١٠°] = $\frac{1}{2}$ × ١٧٠°

= ٨٥°

(ب) س = $\frac{1}{2}$ × [١١٥° − ٦٥°] = $\frac{1}{2}$ × ٥٠°

= ٢٥°

مثال ٥ : في الشكل المقابل :

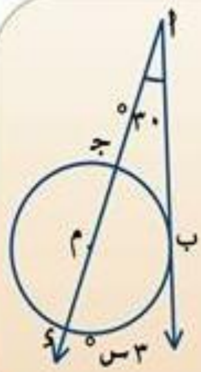
إذا كان $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م عند ب ،

ق(∠أ) = ٣٠° ،

$\overrightarrow{أم}$ يقطع الدائرة

في جـ ، ء ، ق(⌒بء) = ٣س°

أوجد قيمة : س



الحـــل

∵ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م ، $\overleftrightarrow{أء}$ قاطع لها

∴ ق(∠أ) = $\frac{1}{2}$ [ق(⌒بء) − ق(⌒بجـ)]

∴ $\frac{1}{2}$ [ق(⌒بء) − ق(⌒بجـ)] = ٣٠°

∴ ق(⌒بء) − ق(⌒بجـ) = ٦٠° ⟸ (١)

، ∵ $\overline{جـء}$ قطر في الدائرة م

∴ ق(⌒بء) + ق(⌒بجـ) = ١٨٠° ⟸ (٢)

بجمع (١) ، (٢) ∴ ٢ ق(⌒بء) = ٢٤٠°

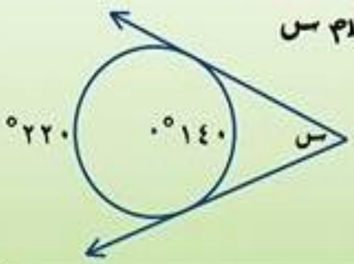
∴ ق(⌒بء) = ١٢٠°

، ∵ ق(⌒بء) = ٣س° ∴ ٣س° = ١٢٠°

∴ س = ٤٠°

مثال ٦ : في الشكل المقابل :

أوجد قيمة الرمز المستخدم س



الحـــل

س = $\frac{1}{2}$ × [٢٢٠° − ١٤٠°] = ٤٠°

تمارين (٣)

(١) **أوجد قوة النقطة المعطاه بالنسبة إلى الدائرة م ، والتي طول نصف قطرها نق :**

(١) النقطة أ حيث أم = ١٢سم ، نق = ٩سم

(٢) النقطة ب حيث ب م = ٨سم ، نق = ١٥سم

(٣) النقطة جـ حيث جـ م = ٧سم ، نق = ٧سم

(٤) النقطة ى حيث ى م = $\sqrt{١٧}$ سم ، نق = ٤سم

---

(٢) **حدد** موقع كل من النقط أ ، ب ، جـ بالنسبة إلى الدائرة م ، والتي طول نصف قطرها ١٠سم ، ثم **احسب** بُعد كل نقطة عن مركز الدائرة في كل من الحالات الآتية :

(١) قم (أ) = ١٥

(٢) قم (ب) = صفر

(جـ) قم (جـ) = −٤

---

(٣) إذا كان بُعد نقطة عن مركز دائرة يساوي ٢٥سم وقوة هذه النقطة بالنسبة إلى الدائرة تساوي ٤٠٠ **أوجد** طول نصف قطر هذه الدائرة

---

(٤) الدائرة م طول نصف قطرها ٨سم ، النقطة ب تبعد عن مركزها ١٢سم ، رسم مستقيم يمر بالنقطة ب ويقطع الدائرة في نقطتين جـ ، ى حيث : جـ ب = جـ ى **احسب** طول الوتر $\overline{\text{جـ ى}}$ وبعده عن النقطة ب .

---

(٥) الدائرتان م ، ن متماستان من الخارج في أ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس مشترك للدائرتين م ، ن ، $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ يقطع الدائرة م في جـ ، ى ، $\overrightarrow{\text{ب هـ}}$ يقطع الدائرة ن في هـ ، و على الترتيب .

(١) **أثبت أن** : $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ محور أساسي للدائرتين م ، ن

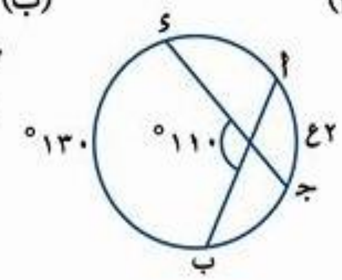
(٢) إذا كان قم (ب) = ٣٦ ، ب جـ = ٤سم ، هـ و = ٩سم

أوجد : طول كل من $\overline{\text{جـ ى}}$ ، $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب هـ}}$

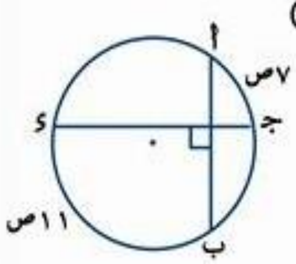
---

(٥) **مستعيناً بمعطيات الشكل أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس :**

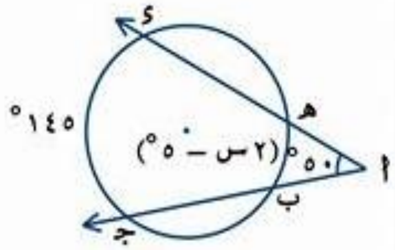
(أ)



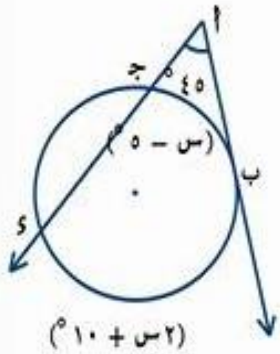
(ب)



(جـ)



(ى)



(هـ)