ملزمة شرح

١ الجبر وحساب المثلثات

الصف الأول الثانوى

الفصل الدراسى الأول

منتدى توجيه الرياضيات أ/ عادل إدوار

موقع مذكرات جاهزة للطباعة

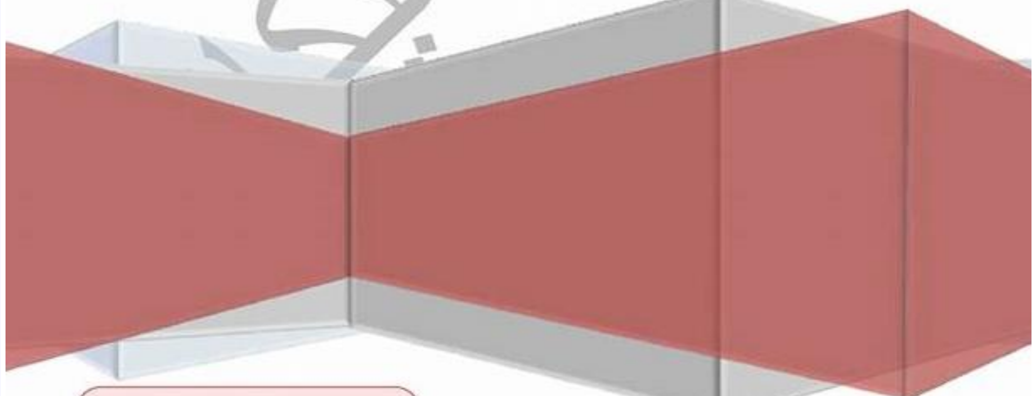
الأول

الجبر وحساب المثلثات

الصف الأول الثانوي

الفصل الدراسي الأول

إعداد أ / إبراهيم ميكائيل



٠١٠٢٠٦١٢٠٠٢
٠١١٥٥٧٢٢١٦٩

بنترى توجيه الرياضيات ---- أ / عادل إدوار

الدرس الأول
حل معادلة الدرجة الثانية في مجهول واحد

المعادلة التي على الصورة :

$\text{أ}\text{س}^{٢} + \text{ب}\,\text{س} + \text{ج} = \text{صفر}$ تسمى معادلة من الدرجة الثانية لأن (أعلى أس فيها هو ٢) وفى مجهول واحد لأنها لا تحتوى إلا على متغير (حرف) واحد هو س

ولحل هذه المعادلة هناك طريقتان جبرياً أو بيانياً

أولاً: الحل الجبري :

تحل معادلة الدرجة الثانية في مجهول واحد جبرياً غالباً باستخدام التحليل كلنا عارفين من قبل كده أنواع التحليل اللي درسناهم فى اعدادي أما لو تعذر استخدام التحليل (يعنى ما ينفعش تتحلل) نلجأ هنا للقانون العام فاااااكرينه طبعاً!!!!

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أ}\text{ج}}}{٢\text{أ}}$$

لكى نستخدم القانون العام يجب أن تكون المعادلة صفرية يعنى نخلى الحدود الثلاثة فى طرف والصفر فى طرف تانى ولازم تكون مرتبة تصاعدياً يعنى تكون على الصورة :

$\text{أ}\text{س}^{٢} + \text{ب}\,\text{س} + \text{ج} = \text{صفر}$

بعد كده هنجيب قيمة أ(معامل $\text{س}^{٢}$) ونجيب قيمة ب (معامل س) ، و ج الحد المطلق (اللى مفهوش حروف)

نطلع بعد كده المميز : $\text{ب}^{٢} - ٤\,\text{أ}\,\text{ج}$

امثلة على ما سبق :

مثال ١ : حل المعادلة : $\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦ = \text{صفر}$

الحـــل

المقدار : $\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦$ قابل للتحليل

$(\text{س} - ٢)(\text{س} - ٣) = \text{صفر}$

$\text{س} - ٢ = \text{صفر}$ | $\text{س} - ٣ = \text{صفر}$

$\therefore \text{س} = ٢$ | $\text{س} = ٣$

$\therefore \text{م.ح} = \{٢ ، ٣\}$

مثال ٢ : حل المعادلة : $٢\text{س}^{٢} + ٧\text{س} - ١٥ = ٠$

الحـــل

بتحليل الطرف الأيمن $\therefore (٢\text{س} - ٣)(\text{س} + ٥) = ٠$

$٢\text{س} - ٣ = ٠$ | $\text{س} + ٥ = ٠$

$\therefore \text{س} = \frac{٣}{٢}$ | $\text{س} = -٥$

$\therefore$ جذرا المعادلة هما $\frac{٣}{٢}$ ، -٥

$\therefore \text{م.ح} = \{\frac{٣}{٢} ، -٥\}$

مثال ٣ : أوجد مجموعة الحل للمعادلة : $٥\text{س}^{٢} - ٧\text{س} + ١ = ٠$ **باستخدام القانون العام علماً بأن :** $\sqrt{٢٩} \simeq ٥,٤$

الحـــل

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أ}\text{ج}}}{٢\text{أ}} = \frac{٧ \pm \sqrt{٤٩ - ٤ \times ٥ \times ١}}{٢ \times ٥}$$

$$\text{س} = \frac{٧ \pm \sqrt{٢٩}}{١٠} = \frac{٧ \pm ٥,٤}{١٠}$$

$\text{س} = \frac{٧ + ٥,٤}{١٠} = \frac{١٢,٤}{١٠}$ | $\text{س} = \frac{٧ - ٥,٤}{١٠} = \frac{١,٦}{١٠}$

$\therefore \text{س} = ١,٢٤$ | $\therefore \text{س} = ٠,١٦$

$\therefore \text{م.ح} = \{١,٢٤ ، ٠,١٦\}$

أ/ إبراهيم ميخائيل

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

قاعدة هاااامة : لازززمممم تفتكرهاااا

إذا كان م أحد جذري المعادلة :

$أس^{٢} + ب س + ج = صفر$ فإن :

أولاً : $أم^{٢} + ب م + ج = صفر$

يعني (نعوض مكان ال س بـ م)

ثانياً : (س − م) عامل للمقدار :

$أس^{٢} + ب س + ج = صفر$

يعني : نحلل المعادلة وأحد قوسي التحليل هيكون : س − م

مثال ٤ : إذا كانت س = ٥ أحد جذرى المعادلة $س^{٢} + أس - ١٥ = ٠$ فأوجد قيمة أ ثم أوجد الجذر الآخر .

الحل

∵ س = ٥ أحد جذرى المعادلة

∴ يحققها أى أن : د(٥) = ٠

∴ $(٥)^{٢} + ٥أ - ١٥ = ٠$

∴ ٢٥ + ٥أ − ١٥ = ٠

∴ ٥أ + ١٠ = ٠

∴ ٥أ = −١٠ ∴ أ = −٢

∴ المعادلة هى : $س^{٢} - ٢س - ١٥ = ٠$

بالتحليل ∴ (س − ٥)(س + ٣) = ٠

∴ س − ٥ = ٠ س + ٣ = ٠

∴ س = ٥ س = −٣

، ∵ الجذر المعلوم هو ٥ ∴ الجذر الآخر هو −٣

مثال ٥ : إذا كان العدد ٣ هو أحد جذري المعادلة $أ س^{٢} + (أ - ٧)س - ١٥ = ٠$ أوجد قيمة أ وعين الجذر الآخر

الحل

∵ ٣ هو أحد جذرى المعادلة

∴ يحققها أى أن : د(٣) = ٠

$أ(٣)^{٢} + (أ - ٧) × ٣ - ١٥ = ٠$

∴ ٩أ + ٣أ − ٢١ − ١٥ = ٠

∴ ١٢أ − ٣٦ = ٠ ∴ أ = ٣

∴ المعادلة هى : $٣س^{٢} - ٤س - ١٥ = ٠$

∴ (٣س + ٥)(س − ٣) = ٠

∴ $س = \frac{-٥}{٣}$ أو س = ٣

∵ الجذر المعلوم ٣ ∴ الجذر الآخر هو $\frac{-٥}{٣}$

مثال ٦ : أوجد قيمة كل من أ ، ب إذا علم أن : −١ ، ٥ هما جذرا المعادلة : $أس^{٢} + ب س - ٥ = ٠$

الحل

نطبق القاعدة (س − م) أحد عوامل المقدار

$أ س^{٢} + ب س + ج = صفر$

∴ (س + ١)(س − ٥) = $أس^{٢} + ب س - ٥$

∴ $س^{٢} - ٥س + س - ٥ = أس^{٢} + ب س - ٥$

$س^{٢} - ٤س - ٥ = أس^{٢} + ب س - ٥$

وبمقارنة المعاملات ∴ أ = ١ ، ب = −٤

مثال ٧ : أوجد أ ، ب إذا علم أن : $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{-٣}{٢}$ هما جذرا المعادلة $أس^{٢} + ب س - ٩ = ٠$

الحل

∵ $\frac{٣}{٢}$ جذر للمعادلة ∴ $(س - \frac{٣}{٢})(س + \frac{٣}{٢}) = أس^{٢} + ب س - ٩$

$س^{٢} + \frac{٣}{٢}س - \frac{٣}{٢}س - \frac{٩}{٤} = أس^{٢} + ب س - ٩$

$س^{٢} - \frac{٩}{٤} = أس^{٢} + ب س - ٩$

بضرب الطرف الأيمن × ٤

∴ $٤س^{٢} - ٩ = أس^{٢} + ب س - ٩$

وبالمقارنة ∴ أ = ٤ ، ب = ٠

بنتري توجيه الرياضيات

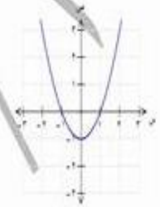
أ / عادل إدوار

ثانياً: الحل البيانى :

سبق وأن درست الحل البياني في المرحلة الاعدادية وفيها نعين الإحداثيات السينية لنقط تقاطع منحنى الدالة مع محور السينات فتكون هى مجموعة حل المعادلة .

ويوجد ثلاث حالات لحل معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد .

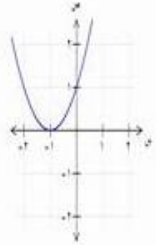
١) المنحنى يقطع محور السينات في نقطتين



يوجد حلان مختلفان للمعادلة في ح

م.ح = {١ ، −١}

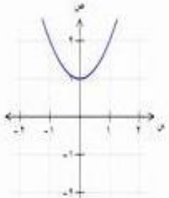
٢) المنحنى يقطع محور السينات فى نقطة واحدة



يوجد حلان متساويان للمعادلة

م.ح = {−١}

٣) المنحنى لا يقطع محور السينات



لا يوجد حل في ح

م.ح = ∅

مثال ٨ : ارسم الشكل البيانى للدالة : $د(س) = س^{٢} + س - ٦$ متخذاً س ∈ [−٤ ، ٣] ومن الرسم أوجد : مجموعة حل المعادلة ، $س^{٢} + س - ٦ = ٠$

الحل

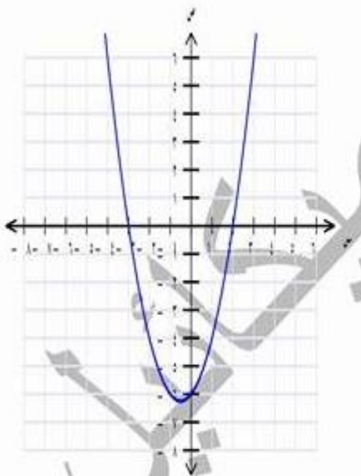
كما تعلمت سابقاً ننشئ جدولاً لبعض قيم س ثم نوجد قيم ص المناظرة

س	−٤	−٣	−٢	−١	٠	١	٢	٣
ص	٦	٠	−٤	−٦	−٦	−٤	٠	٦

من الرسم نجد أن : نقطة تقاطع المنحنى مع محور السينات هى س = −٣ ، س = ٢

وبذلك تكون مجموعة حل المعادلة

$س^{٢} + س - ٦ = ٠$ هى {−٣ ، ٢}



www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

تمارين (١)

(١) **اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :**

(١) المعادلة (س − ١)(س + ٢) = ٠ من الدرجة ......

(الأولى ، الثانية ، الثالثة ، الرابعة)

(٢) مجموعة حل المعادلة س^{٢} = س فى ح هى ....

({٠} ، {١} ، {−١ ، ١} ، {٠ ، ١})

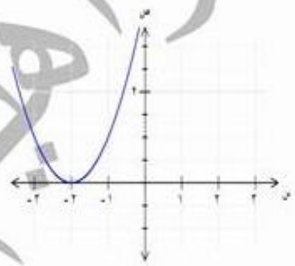
(٣) مجموعة حل المعادلة س^{٢} + ٣ = ٠ فى ح هى ....

({−٣} ، {− $\sqrt{٣}$} ، $\sqrt{٣}$ ، ∅)

(٤) مجموعة حل المعادلة : س^{٢} − ٢س = −١ فى ح هى .....

({−١} ، ∅ ، {−١ ، ١} ، {١})

(٥) يمثل الشكل المقابل المنحنى البيانى لدالة تربيعية،



مجموعة حل المعادلة د(س) = ٠ فى ح هى .....

({−٢} ، {٤} ، ∅ ، {−٢ ، ٤})

(٢) **أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية فى ح :**

(أ) س^{٢} − ١ = ٠

(ب) س^{٢} + ٣س = ٠

(ج) س^{٢} + ٩ = ٠

(د) (س − ٤)^{٢} = ٠

(هـ) ٤س^{٢} − ٩ = ٠

(٣) **حل المعادلات الآتية فى ح باستخدام القانون العام مقرباً الناتج لرقمين عشريين :**

(أ) س^{٢} − ٦س + ٤ = ٠

(ب) س^{٢} − ٣س − ٧ = ٠

(٤) **أوجد مجموعة الحل للمعادلة**

س^{٢} = ٣س + ٤٠ **وحقق الناتج بيانياً**

(٥) **حل كلاً من المعادلات الآتية جبرياً باستخدام التحليل**

(أ) س^{٢} + ٣س − ٤ = ٠

(ب) س^{٢} − ٦س = ٧

(ج) $\frac{س}{٣}$ + $\frac{٣}{س}$ = ٢

(د) ١٥ + س − ٢س^{٢} = ٠

(هـ) ٧س (س − ١) = ١٤

(و) س (س + ١)(س − ١) = ٠

(٦) **حل المعادلات الآتية فى ح باستخدام القانون العام مقرباً الناتج لرقم عشرى واحد :**

(أ) س^{٢} − ٤س + ٢ = ٠

(ب) س^{٢} − ٥س + ٣ = ٠

(ج) ٢س^{٢} = ١١س − ٣ = ٠

(د) س + $\frac{٣}{٢س}$ = ٣

(هـ) $\frac{س^{٢} + ٧}{٤س + ١}$ = $\frac{٣}{٢}$

(و) $\frac{٥}{س − ٢}$ + $\frac{٣}{س}$ = ٢

(ز) $\frac{س}{س + ١}$ + $\frac{٢}{س − ١}$ = ٣

منتدى توجيه الرياضيات أ / عادل إدوار

(٧) **أوجد قيمة أ والجذر الآخر إذا علم أن :**

(١) س = −١ أحد جذري المعادلة :

س^{٢} + أس − ٢ = ٠

(٢) س = ٣ أحد جذري المعادلة :

س^{٢} + أس + ٦ = ٠

(٣) س = ٤ أحد جذري المعادلة :

أس^{٢} − ٥س − ١٢ = ٠

(٨) **إذا كانت** س = $\frac{٥}{٣}$ **أحد جذري المعادلة :**

٩س^{٢} − ٩س + أ = ٠ **فأوجد الجذر الأخر .**

(٩) **إذا كانت** س = ٣ − $\sqrt{٢}$ **أحد جذري المعادلة** : س^{٢} − ٦س + جـ = ٠

فأوجد قيمة جـ .

(١٠) **أوجد : أ ، ب إذا علم أن :**

(١) $\frac{٤}{٣}$ ، −$\frac{٥}{٢}$ هما جذرا المعادلة :

٦س^{٢} + ب س + أ = ٠

(٢) ٢ ، ٣ هما جذرا المعادلة :

أس^{٢} + ب (س + ١) + ١ = ٠

(٣) ٣ ، −١٠ هما جذرا المعادلة :

س^{٢} + أس + ب = ٠

(٤) $\frac{١}{٢}$ ، ١ هما جذرا المعادلة :

أس^{٢} + ب س + ١ = ٠

(٥) $\sqrt{٣}$ ، −$\sqrt{٣}$ هما جذرا المعادلة :

أس^{٢} + أس + ب = ٠

(٦) ٥ + $\sqrt{٢}$ ، ٥ − $\sqrt{٢}$ هما جذرا المعادلة :

أس^{٢} + ب س − ب + ١ = ٠

(١١) **إذا كان مجموع الأعداد الصحيحة المتتالية** (١ + ٢ + ٣ + ... + ن) **يعطى بالعلاقة**

جـ = $\frac{ن}{٢}$(١ + ن) **فكم عدداً صحيحاً متتالياً بدءاً من العدد ١ يكون مجموعها مساوياً :**

(١) ٧٨ (٢) ١٧

(٣) ٢٥٣ (٤) ٤٦٥

(١٢) **أوجد في ح مجموعة حل المعادلة :**

(س − ٣)^{٢} = (س − ٣)

إجابة زياد

∵ (س − ٣)^{٢} = (س − ٣)

بقسمة الطرفين على (س − ٣)

حيث س ≠ ٣

∴ س − ٣ = ١ وبالتبسيط

∴ س = ٤ ∴ م . ح = {٤}

إجابة كريم

∵ (س − ٣)^{٢} = (س − ٣)

∴ (س − ٣)^{٢} − (س − ٣) = ٠

∴ (س − ٣) [(س − ٣) −١] = ٠

بالتبسيط : س − ٣ = ٠ أو س − ٤ = ٠

∴ م . ح = {٣ ، ٤}

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

الدرس الثانى
مقدمة عن الأعداد المركبة

فى مجموعة الأعداد الحقيقية ح لايكمن إيجاد الجذر التربيعى لعدد سالب .

مثلاً : $\sqrt{-١}$ ، $\sqrt{-٤}$ ، $\sqrt{-٩}$ ، $\sqrt{-١٦}$ هذه الأعداد ليس لها جذر تربيعى فى ح

ولكن يمكن إيجاد الجذر التربيعى لعدد سالب فى مجموعة الأعداد التخيلية (ت)

فمثلاً : $\sqrt{-١} = ت$

$\sqrt{-٤} = \sqrt{٤} \times \sqrt{-١} = ٢ت$

، $\sqrt{-٩} = \sqrt{٩} \times \sqrt{-١} = ٣ت$ ... وهكذا هذه الاعداد تسمى تخيلية

العدد التخيلى

العدد التخيلى : هو العدد الذى مربعه يساوى (-١) ويرمز له بالرمز ت

أى أن: $ت^{٢} = -١$ إذن $\sqrt{-أ} = ت \sqrt{أ}$ لكل أ ∈ ح.

خد بالك: $ت = \sqrt{-١}$ ، $ت^{٢} = ت \times ت =$ $\sqrt{-١} \times \sqrt{-١}$ إذن $ت^{٢} = -١$

قوى ت الصحيحة :

طبعاً لسه فاكرر :

$ت = \sqrt{-١}$ ، $ت^{٢} = ت \times ت = -١$ ،

$ت^{٣} = ت^{٢} \times ت = -١ \times ت = -ت$ ،

$ت^{٤} = ت^{٢} \times ت^{٢} = -١ \times -١ = ١$

، $ت^{٥} = ت^{٤} \times ت = ١ \times ت = ت$

وبوجه عام فإن :

$ت^{٤ن} = ١$

، $ت^{٤ن+١} = ت^{٤ن} \times ت = ١ \times ت = ت$

$ت^{٤ن+٢} = ت^{٤ن} \times ت^{٢} = ١ \times -١ = -١$

$ت^{٤ن+٣} = ت^{٤ن} \times ت^{٣} = ١ \times -ت = -ت$

يعنى أيه الكلاااام داا

(١) لو كان الأس عدد يقبل القسمة على ٤ سواء كان موجباً أو سالباً الناتج يساوى ١

مثلاً: $ت^{١٦} = ١$ ، $ت^{-٤٠} = ١$

(٢) أما لو كان الأس عدد موجب لا يقبل القسمة على ٤ نطرح منه أكبر عدد يقبل القسمة على ٤ بس يكون أقل من الأس

مثلاً: $ت^{٢٦} = ت^{٢٦-٢٤} = ت^{٢} = -١$

، $ت^{٣٩} = ت^{٣٩-٣٦} = ت^{٣} = -ت$

(٣) أما لو كان الأس عدد سالب نجمع عليه أصغر عدد يقبل القسمة على ٤ بس يكون أكبر من الأس .

مثلاً: $ت^{-٣٣} = ت^{-٣٣+٣٦} = ت^{٣} = -ت$

خدت بالك أن اللى ميفضل من الجمع والطرح هو ت = ت نفسها أو $ت^{٢} = -١$ ، $ت^{٣} = -ت$

ملحوظة مهمة قوى هتنفعك وتسهل عليك

(١) $ت^{٢}$ تغير أشارة المعامل بتاعها وتطير هيه ذى $٧ت^{٢} = -٧$ (اتحذفت الـ ت)

(٢) $ت^{٣}$ تغير أشارة العدد لكن تفضل ت ذى $٩ت^{٣} = -٩ت$

(٣) $ت^{٤}$ متغيرش أشارة المعامل وكمان مش بتتكتب جنب العدد عشان $ت^{٤} = ١$

ذى $٧ت^{٤} = ٧ \times ١ = ٧$

مثال ١ : أوجد كلاً مما يأتى فى أبسط صورة :

(أ) $ت^{٢٤}$ (ب) $ت^{٣٧}$

(جـ) $ت^{-٤٣}$ (ى) $ت^{-٥١}$

(هـ) $ت^{٤ن+٢٩}$ (و) $ت^{٤ن+٤٢}$

الحــــل

(أ) $ت^{٢٤} = ١$ لأن الأس يقبل القسمة على ٤

(ب) $ت^{٣٧} = ت^{٣٧-٣٦} = ت$

(جـ) $ت^{-٤٣} = ت^{-٤٣+٤٤} = ت$

(ى) $ت^{-٥١} = ت^{-٥١+٥٢} = ت$

(هـ) $ت^{٤ن+٢٩} = ت^{٤ن} \times ت^{٢٩-٢٨} =$ $١ \times ت = ت$

(و) $ت^{٤ن+٤٢} = ت^{٤ن} \times ت^{٤٢-٤٠} = ١ \times ت^{٢} =$ $١ \times -١ = -١$

العدد المركب

هو العدد الذى يمكن كتابته على الصورة أ + ب ت حيث أ ، ب عددان حقيقيان

بمعنى أنه العدد الذى يتكون من جزئين أحدهما حقيقى والآخر تخيلى ويسمى أ بالجزء الحقيقى ، ب بالجزء التخيلى .

إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين فإن العدد ع حيث ع = أ + ب ت يسمى عدداً مركباً . ويسمى أ بالجزء الحقيقى للعدد ع ، ب بالجزء التخيلى للعدد المركب ع

ملحوظة هاامة :

- إذا كانت ب = ٠ فإن العدد ع = ١ يكون حقيقياً فقط
- وإذا كانت أ = ٠ فإن العدد ع = ب ت يكون تخيلياً فقط

أمثلة للأعداد المركبة :

ع = ٧ − ٣ت ، ع = ٥ + ٢ت ، ع = ٩ ، ع = ٢ت وهكذاااا ....

مثال٢ : حل كلاً من المعادلات الآتية :

(أ) $٣س^{٢} + ٢٧ = ٠$

(ب) $٤س^{٢} + ١٠٠ = ٧٥$

الحــــل

(أ) ∵ $٣س^{٢} = -٢٧$ بالقسمة ÷ ٣

∴ $س^{٢} = -٩$ ∴ $س^{٢} = ٩ \times -١$

∴ $س^{٢} = ٩ت^{٢}$ وبأخذ الجذر التربيعي للطرفين

∴ $س = \pm ٣ت$

∴ م . ح = {٣ت ، −٣ت}

(ب) ∵ $٤س^{٢} = ٧٥ - ١٠٠$

∴ $٤س^{٢} = -٢٥$

∴ $س^{٢} = -\frac{٢٥}{٤}$ ∴ $س^{٢} = \frac{٢٥}{٤} \times -١$

∴ $س^{٢} = \frac{٢٥}{٤} ت^{٢}$ وبأخذ الجذر التربيعي للطرفين

∴ $س = \pm \frac{٥}{٢} ت$

∴ م . ح = $\{\frac{٥}{٢}ت ، -\frac{٥}{٢}ت\}$

تساوى عددين مركبين :

يتساوى العددان المركبان إذا وفقط إذا تساوى الجزءان الحقيقيان وتساوى الجزءان التخيليان

يعنى: حقيقى = حقيقى ، تخيلى = تخيلى

مثلاً : إذا كان : س + ص ت = ٥ − ٣ت ، فإن :

س = ٥ ، ص = −٣

مثال ٣ : أوجد قيمتى س ، ص اللتين تحققان كل من المعادلات الآتية :

(أ) (٢س + ١) + ٤ص ت = ٥ − ١٢ت

(ب) ٢س − ٣ + (٣ص + ١) ت = ٧ + ١٠ت

(جـ) ٢س − ص + (س − ٢ص) ت = ٥ + ت

الحــــل

منتدى توجيه الرياضيات

أ / علاء زوزو

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

(أ) (٢س + ١) + ٤ص ت = ٥ − ١٢ت

∵ ٢س + ١ = ٥ ، ٤ص = −١٢

∴ ٢س = ٥ − ١ ، ص = $\frac{-١٢}{٤}$

∴ ٢س = ٤ ، ص = −٣

∴ س = ٢

(ب) ٢س − ٣ + (٣ص + ١) ت = ٧ + ١٠ت

∵ ٢س − ٣ = ٧ ، ٣ص + ١ = ١٠

∴ ٢س = ١٠ ، ٣ص = ٩

∴ س = ٥ ، ص = ٣

(جـ) ٢س − ص + (س − ٢ص) ت = ٥ + ت

∵ ٢س − ص = ٥ ، س − ٢ص = ١

بضرب المعادلة الأولى × −٢ وجمع المعادلتين

−٤س + ٢ص = −١٠

س − ٢ص = ١

−٣س = −٩

∴ س = ٣

بالتعويض عن قيمة س في المعادلة الأولي

∴ −١٢ + ٢ص = −١٠

∴ ٢ص = ٢ ∴ ص = ١

معلووومة مهمة جداً :

لو ساوى العدد المركب صفراً فإن :

الجزء الحقيقى = صفر ، والتخيلي = صفر

مثلاً : س + ص ت = ٠ إذن س = ٠ ، ص = ٠

العمليات على الأعداد المركبة :

إذا كان ع١ = س١ + ص١ ت ، ع٢ = س٢ + ص٢ ت فإن :

(١) ع١ + ع٢ =
(س١ + س٢) + (ص١ + ص٢) ت

(٢) ع١ − ع٢ =
(س١ − س٢) + (ص١ − ص٢) ت

(٣) ع١ × ع٢ =
س١ (س٢ + ص٢ ت) + ص١ ت (س٢ + ص٢ ت)

(٤) $\frac{ع١}{ع٢} = \frac{س١ + ت ص١}{س٢ + ت ص٢}$

لا يمكن أن يكون فى المقام عدد تخيلى لذلك نضرب كلاً من البسط والمقام فى نفس المقام .

مثال ٤ : أوجد ناتج ما يلى :

(أ) (−٤ + ٥ت) + (٣ − ت)

(ب) (١ − ٣ت) − (−٢ + ت)

(جـ) ٢ت (٣ + ت)

(د) (٢ + ت)(٥ + ت)

(هـ) $\frac{٣}{ت}$

الحـــل

(أ) (−٤ + ٥ت) + (٣ − ت)
(−٤ + ٣) + (٥ت − ت) = −١ + ٤ت

(ب) (١ − ٣ت) − (−٢ + ت)
(١ − ٣ت) + (٢ − ت) =
(١ + ٢) + (−٣ت − ت) = ٣ − ٤ت

(جـ) ٢ت (٣ + ت)
٦ت + ٢ت^٢ = ٦ت + ٢ × −١ = ٦ت − ٢

(د) (٢ + ت)(٥ + ت)
٢(٥ + ت) + ت(٥ + ت) =
١٠ + ٢ت + ٥ت + ت^٢
= ١٠ + ٧ت + (−١) = ٩ + ٧ت

(هـ) $\frac{٣}{ت} = \frac{٣}{ت} \times \frac{ت}{ت} = \frac{٣ت}{ت^٢} = -٣ت$

العددان المترافقان

أ + ب ت ، أ − ب ت يسميان عددان مترافقان

يعنى مرافق العدد نغير الجزء التخيلى فقط مثلاً ٢ + ت مرافقه ٢ − ت

(ذى بعض فى كل حاجة إلا إشارة الجزء التخيلى)

منتدى توجيه الرياضيات
أ / عادل إدوار

٣ معلومات مهمين جداً :

(١) عند جمع عددين مترافقين فإن الناتج يكون عدد حقيقى .

مثلاً : (٣ + ت) + (٣ − ت) = ٦

(٢) عند طرح عددين حقيقين فإن الناتج يكون عدد تخيلى .

مثلاً : (٣ + ت) − (٣ − ت) = ٢ت

(٣) عند ضرب عددين مترافقين فإن الناتج يكون عدد حقيقى

(٣ + ت) + (٣ − ت) = ٩ − ت^٢ =
٩ −(−١) = ٩ + ١ = ١٠

مثال ٥ : اكتب الأعداد التالية على صورة

أ + ب ت

(أ) $\frac{٣ - ت}{٢ - ت}$ (ب) $\frac{٢٦}{٣ - ٢ت}$

(جـ) $\frac{٣ + ٤ت}{٥ - ٢ت}$ (د) $\frac{٤ - ٦ت}{٢ت}$

الحـــل

(أ) $\frac{٣ - ت}{٢ - ت} = \frac{٣ - ت}{٢ - ت} \times \frac{٢ + ت}{٢ + ت}$

$= \frac{٦ + ٣ت - ٢ت - ت^٢}{٤ - ت^٢} =$

$= \frac{٦ + ت - (-١)}{٤ - (-١)}$

$\frac{٦ + ت + ١}{٥} = \frac{٧ + ت}{٥} = \frac{٧}{٥} + \frac{١}{٥}ت$

(ب) $\frac{٢٦}{٣ - ٢ت} =$

$\frac{٢٦}{٣ - ٢ت} \times \frac{٣ + ٢ت}{٣ + ٢ت} = \frac{٧٨ + ٥٢ت}{٩ - ٤ت^٢} =$

$\frac{٧٨ + ٥٢ت}{٩ - ٤ \times (-١)} = \frac{٧٨ + ٥٢ت}{٩ + ٤} =$

$\frac{٧٨ + ٥٢ت}{١٣} = \frac{٧٨}{١٣} + \frac{٥٢}{١٣}ت = ٦ + ٤ت$

(جـ) $\frac{٣ + ٤ت}{٥ - ٢ت} = \frac{٣ + ٤ت}{٥ - ٢ت} \times \frac{٥ + ٢ت}{٥ + ٢ت} =$

$\frac{١٥ + ٦ت + ٢٠ت + ٨ت^٢}{٢٥ - ٤ت^٢} =$

$\frac{١٥ + ٢٦ت + ٨ \times (-١)}{٢٥ - ٤ \times (-١)} =$

$\frac{١٥ - ٨ + ٢٦ت}{٢٥ + ٤} = \frac{٧ + ٢٦ت}{٢٩} =$

$\frac{٧}{٢٩} + \frac{٢٦}{٢٩}ت$

(د) $\frac{٤ - ٦ت}{٢ت} = \frac{٤ - ٦ت}{٢ت} \times \frac{ت}{ت} =$

$\frac{٤ت - ٦ت^٢}{٢ت^٢} = \frac{٤ت - ٦ \times (-١)}{٢ \times (-١)} =$

$\frac{٤ت + ٦}{-٢} = \frac{٤ت}{-٢} + \frac{٦}{-٢} = -٢ت - ٣$

مثال ٦ : إذا كانت س = $\frac{٧ - ت}{٢ - ت}$ ، ص = $\frac{١٣ - ت}{٤ + ت}$ **فاثبت أن :** س ، ص **مترافقان**

الحـــل

∵ س = $\frac{٧ - ت}{٢ - ت} = \frac{(٧ - ت)(٢ + ت)}{(٢ - ت)(٢ + ت)} =$

$\frac{١٤ + ٧ت - ٢ت - ت^٢}{٤ - ت^٢} = \frac{١٤ + ٥ت + ١}{٤ + ١} =$

$\frac{١٥ + ٥ت}{٥} = ٣ + ت$

ص = $\frac{١٣ - ت}{٤ + ت} = \frac{(١٣ - ت)(٤ - ت)}{(٤ + ت)(٤ - ت)} =$

$\frac{٥٢ - ١٣ت - ٤ت + ت^٢}{١٦ - ت^٢} = \frac{٥٢ - ١٧ت - ١}{١٦ + ١} =$

$\frac{٥١ - ١٧ت}{١٧} = ٣ + ت$ ∴ س ، ص مترافقان

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

تمارين (٢)

(١) ضع كلاً مما يأتى فى أبسط صورة :

(أ) ت^{١٦} (ب) ت$^{-٤٥}$
(جـ) ت^{٢٤} (ى) ت^{٤٣}
(هـ) ت^{٦٦} (و) ت$^{-٤٣}$

---

(٢) إذا كان ن عدداً صحيحاً فاكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة :

(أ) ت$^{٤ن+٢}$ (ب) ت$^{٤ن-١}$
(جـ) ت$^{٤ن+١٩}$ (ى) ت$^{٤ن+٤٢}$

---

(٣) بسط كلاً مما يأتى :

(أ) $\sqrt{-١٨} \times \sqrt{-١٢}$
(ب) ٣ت(−٢ت)
(جـ) (−٤ت)(−٦ت)
(ى) (−٢ت)^{٢}(−٣ت)^{٢}

---

(٤) أوجد ناتج كل مما يأتى فى أبسط صورة :

(أ) (٣ + ٢ت) + (٢ − ٥ت)
(ب) (٢٦ − ٤ت) − (٩ − ٢٠ت)
(جـ) (٧ − ٤ت) + (٢ + ت)
(ى) (١٢ − ٥ت) − (٧ − ٩ت)
(هـ) (٢ + ٣ت) (٣ − ٤ت)
(ز) (٤ − ٣ت) (٤ + ٣ت)
(ح) (٥ − ٦ت) (٣ + ٢ت)
)) (١ − ت)^{١٠}

---

(٥) ضع كلاً مما يأتى على صورة أ + ب ت:

(أ) (٢ + ٣ت) − (١ − ٢ت)
(ب) (١ + ٢ت^{٣})(٢ + ٣ت^{٥} + ٤ت^{٦})

(٦) ضع كلاً مما يأتى على صورة أ + ب ت:

(أ) $\frac{٢}{١ + ت}$ (ب) $\frac{٤ + ت}{ت}$
(جـ) $\frac{٢ - ٣ت}{٣ + ت}$ (ى) $\frac{(٣ + ت)(٣ - ت)}{٣ - ٤ت}$
(هـ) $\frac{٣ + ٤ت}{٥ - ٢ت}$ (و) $\frac{٢٦}{٣ - ٢ت}$

---

(٧) حل كل من المعادلات الآتية :

(أ) ٣س^{٢} + ١٢ = ٠
(ب) ٤ص^{٢} + ٢٠ = ٠
(جـ) $\frac{٣}{٥}$ ص^{٢} + ١٥ = ٠
(ى) س^{٢} − ٤س + ٥ = ٠
(هـ) ٢س^{٢} + ٦س + ٥ = ٠
(و) ٣س^{٢} − ٧س + ٦ = ٠

---

(٨) أوجد قيمتي س ، ص التي تحققان كلاً من المعادلات الآتية :

(أ) (٢س + ١) + ٤صت = ٥ − ١٢ت
(ب) (٢س − ٣) + (٣ص + ١) ت = ٧ + ١٠ت
(جـ) (٢س − ص) + (س − ٢ص) ت = ٥ + ت
(ى) ٣س − ٢صت = (٥ − ٢ت)^{٢}
(هـ) س^{٢} − ص^{٢} + (س + ص) ت = ٣ (١ + ت)

---

(٩) أوجد قيمتي س ، ص اللتين تحققان المعادلة

$\frac{(٢ + ت)(٢ - ت)}{٣ + ٤ت}$ = س + ت ص

بنترى توجيه الرياضيات / أ / عادل إدوار

الدرس الثالث
تحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية

في المعادلة : أس^{٢} + ب س + جـ = ٠

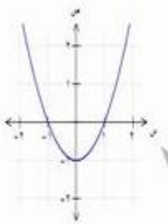
يوجد ثلاث حالات للمميز : ب^{٢} − ٤أجـ

الحالة الأولى : المميز موجب

ب^{٢} − ٤أجـ > ٠

يكون للمعادلة التربيعية

جذران (حلان) حقيقيان مختلفان

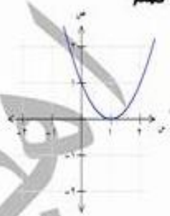


الحالة الثانية : المميز يساوى صفر

ب^{٢} − ٤أجـ = ٠

يكون للمعادلة التربيعية

جذران (حلان) حقيقيان متساويان



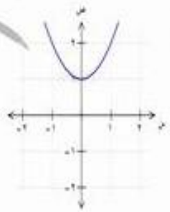
الحالة الثالثة : المميز سالب

ب^{٢} − ٤أجـ < ٠

يوجد للمعادلة التربيعية

جذران (حلان) مركبان مترافقان

وغير حقيقيان



مثال١ : عين نوع جذرى كل معادلة من المعادلات التربيعية الآتية :

(أ) س^{٢} = ٤س − ٢
(ب) ٤س^{٢} − ١٢س + ٩ = ٠
(جـ) س (س + ٥) = ٢ (س − ٧)

الحل

قبل البدء في الحل يجب أن تكون المعادلة على الصورة العامة •
أس^{٢} + ب س + جـ =
وعشان كده هنعدل شكل المعادلة قبل ما نحلها مفهوووم كده

(أ) س^{٢} = ٤س − ٢

المعادلة على الصورة العامة تكون :

س^{٢} − ٤س + ٢ = ٠

أ = ٦ ، ب = −١٩ ، جـ = ١٥

المميز : ب^{٢} − ٤أجـ = (−٤)^{٢} − ٤ × ١ × ٢

= ١٦ − ٨ = ٨ المميز موجب

∴ للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان

(ب) ٤س^{٢} − ١٢س + ٩ = ٠

المعادلة على الصورة العامة :

∴ أ = ٤ ، ب = −١٢ ، جـ = ٩

المميز : ب^{٢} − ٤أجـ = (−١٢)^{٢} − ٤ × ٤ × ٩

= ١٤٤ − ١٤٤ = صفر ∴ المميز = صفر

∴ للمعادلة جذران حقيقيان متساويان

(جـ) س (س + ٥) = ٢ (س − ٧)

نضع المعادلة على الصورة العامة :

∴ س^{٢} + ٥س = ٢س − ١٤
∴ س^{٢} + ٥س − ٢س + ١٤ = ٠
∴ س^{٢} + ٣س + ١٤ = ٠
∴ أ = ١ ، ب = ٣ ، جـ = ١٤

المميز : ب^{٢} − ٤أجـ = (٣)^{٢} − ٤ × ١ × ١٤

٩ − ٥٦ = −٤٧ المميز سالب

∴ المعادلة لها جذران مركبان مترافقان

مثال ٢ : أثبت أن جذرى المعادلة :
٧س^{٢} − ١١س + ٥ = ٠ مركبان ، ثم استخدم القانون العام لإيجاد هذين الجذرين

الحل

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

∵ ٧س^{٢} – ١١س + ٥ = ٠

∴ أ = ٧ ، ب = –١١ ، جـ = ٥

المميز : ب^{٢} – ٤أجـ = (–١١)^{٢} – ٤ × ٧ × ٥ =

١٢١ – ١٤٠ = –١٩

∵ المميز سالب ∴ يوجد للمعادلة جذران مركبان غير حقيقيان

القانون العام : $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$

∴ $س = \frac{١١ \pm \sqrt{-١٩}}{٢ \times ٧} = \frac{١١ \pm \sqrt{١٩ \times -١}}{١٤}$

$= \frac{١١ \pm \sqrt{١٩ت^{٢}}}{١٤} = \frac{١١ \pm \sqrt{١٩}ت}{١٤}$

∴ جذرا المعادلة هما $\frac{١١}{١٤} + \frac{\sqrt{١٩}}{١٤}$ت ،

$\frac{١١}{١٤} - \frac{\sqrt{١٩}}{١٤}$ت

مثال ٣ : إذا كان جذرا المعادلة :

٢س^{٢} + ٥س + ٤ن = ٠ متساويان أوجد قيمة ن

الحـل

∵ ٢س^{٢} + ٥س + ٤ن = ٠

∴ أ = ٢ ، ب = ٥ ، جـ = ٤ن

∵ المميز = ٠ ∴ ب^{٢} – ٤أجـ = ٠

∴ (٥)^{٢} – ٤ × ٢ × ٤ن = ٠

∴ ٢٥ – ٣٢ن = ٠ ∴ –٣٢ن = –٢٥

∴ ن = $\frac{٢٥}{٣٢}$

مثال ٤ : إذا كان جذرا المعادلة :

س^{٢} + ٢(ك–١)س + ٩ = ٠ متساويين ، فأوجد قيم ك الحقيقية ، ثم تحقق من صحة الناتج .

الحـل

∵ س^{٢} + ٢ (ك – ١) س + ٩ = ٠

∴ أ = ١ ، ب = ٢ (ك – ١) ، جـ = ٩

∵ المميز = ٠ ∴ ب^{٢} – ٤أجـ = صفر

∴ (٢ (ك – ١))^{٢} – ٤ × ١ × ٩ = ٠

∴ ٤ (ك – ١)^{٢} – ٣٦ = ٠

٤ (ك^{٢} – ٢ك + ١) – ٣٦ = ٠

٤ك^{٢} – ٨ك + ٤ – ٣٦ = ٠

∴ ٤ك^{٢} – ٨ك – ٣٢ = ٠ بالقسمة على ٤

∴ ك^{٢} – ٢ك – ٨ = ٠

∴ (ك – ٤) (ك + ٢) = ٠

∴ ك = ٤ أو ك = –٢

التحقق : عندما ك = ٤

∴ بالتعويض عن قيمة ك في المعادلة

س^{٢} + ٢ (٤ – ١) س + ٩ = ٠

∴ المعادلة = س^{٢} + ٦س + ٩ = ٠ وبالتحليل

∴ (س + ٣)^{٢} = ٠

ومنها يكون لمعادلة جذران متساويان هما : –٣ ، –٣

التحقق : عندما ك = –٢

وبالتعويض : س^{٢} + ٢ (–٢ – ١) س + ٩ = ٠

∴ المعادلة = س^{٢} – ٦س + ٩ = ٠ وبالتحليل

∴ (س – ٣)^{٢} = ٠

ومنها يكون لمعادلة جذران متساويان هما : ٣ ، ٣

مثال ٥ : اوجد قيمة ك إذا كان جذرا المعادلة

س^{٢} + ٤س + ك = ٠ حقيقيين مختلفين

الحـل

∵ س^{٢} + ٤س + ك = ٠

∴ أ = ١ ، ب = ٤ ، جـ = ك

المعادلة لها جذران حقيقيان مختلفان

∴ المميز موجب ∴ ب^{٢} – ٤أجـ > ٠

∴ (٤)^{٢} – ٤ × ١ × ك > ٠

∴ ١٦ – ٤ك > ٠

ومنها –٤ك > –١٦ (÷ –٤)

∴ ك < ٤ ∴ ك ∈]–∞ ، ٤[

بنترى توجيه الرياضيات ---- أ / عادل إدوار

تمارين (٣)

(١) اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

(أ) يكون جذرا المعادلة س^{٢} – ٤س + ك = ٠ متساويين إذا كانت ......

(ك = ١ ، ك = ٤ ، ك = ٨ ، ك = ١٦)

(ب) يكون جذرا المعادلة س^{٢} – ٢س + م = ٠ حقيين مختلفين إذا كانت ....

(م = ١ ، م < ١ ، م > ١ ، م = ٤)

(جـ) يكون جذرا المعادلة ل س^{٢} – ١٢س + ٩ = ٠ مركبين غير حقيقيين إذا كانت : ....

(ل < ٤ ، ل > ٤ ، ل = ٤ ، ل = ١)

---

(٢) حدد عدد الجذور وأنواعها لكل معادلة من المعادلات التربيعية الآتية :

(أ) س^{٢} – ٢س + ٥ = ٠

(ب) ٣س^{٢} + ١٠س – ٤ = ٠

(جـ) س^{٢} – ١٠س + ٢٥ = ٠

(د) ٦س^{٢} – ١٩س + ٣٥ = ٠

(هـ) (س – ١١) – س (س – ٦) = ٠

(و) س (س – ٢) = ٥

(ز) ٦س^{٢} = ١٩س – ١٥

(ح) (س – ١) (س – ٧) = ٢ (س – ٣) (س – ٤)

---

(٣) أوجد حل كلاً من المعادلات الآتية فى مجموعة الأعداد المركبة باستخدام القانون العام :

(أ) س^{٢} – ٤س + ٥ = ٠

(ب) ٢س^{٢} + ٦س + ٥ = ٠

(جـ) ٣س^{٢} – ٧س + ٦ = ٠

(د) ٣س^{٢} + ٥س + ٦ = ٠

(هـ) ٣س^{٢} + ٧س + ٥ = ٠

---

(٤) أوجد قيمة ك فى كل من الحالات الآتية :

(أ) إذا كان جذرا المعادلة :

س^{٢} – ٣س + ٢ + $\frac{١}{ك}$ = ٠ متساويين

(ب) إذا كان جذرا المعادلة :

ك س^{٢} – ٨س + ١٦ = ٠ مركبين غير حقيقيين

---

(٥) إذا كان جذرا كل من المعادلات الآتية متساويين فأوجد قيم ك في كل حالة :

(أ) س^{٢} + ٢ (ك – ١) س + (٢ك + ١) = ٠

ثم أوجد الجذرين .

(ب) س^{٢} – ٢ك س + ٧ك – ٦س + ٩ = ٠

ثم أوجد الجذرين .

---

(٦) أوجد قيمة ك في الحالات الآتية :

(أ) إذا كان جذرا المعادلة : س^{٢} + ٤س + ك = ٠

حقيقيين مختلفين .

(ب) إذا كان جذرا المعادلة :

ك س٢ – ٨س + ١٦ = ٠ مركبين وغير حقيقيين

(جـ) إذا كان جذرا المعادلة :

متساويين ، ثم أوجد الجذرين .

---

(٧) إذا كان : ل ، م عددين نسبيين فأثبت أن جذري المعادلة :

ل س^{٢} + (ل – م) س – م = ٠

---

(٨) أثبت أن جذرى المعادلة :

٢س^{٢} – ٣س + ٢ = ٠

مركبان وغير حقيقيين ، ثم استخدم القانون العام لإيجاد هذين الجذرين .

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

الدرس الرابع
العلاقة بين جذرى معادلة الدرجة الثانية ومعاملات حدودها

أولاً : مجموع الجذرين وحاصل ضربهما :

نفرض أن : ل ، م جذران للمعادلة

$\text{أ}\text{س}^{٢} + \text{ب}\text{س} + \text{جـ} = ٠$ فإن :

مجموع الجذرين $= \dfrac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^{٢}}$

أى أن : $\boxed{\text{ل} + \text{م} = \dfrac{-\text{ب}}{\text{أ}}}$

حاصل ضرب الجذرين $= \dfrac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^{٢}}$

أى أن : $\boxed{\text{ل}\,\text{م} = \dfrac{\text{جـ}}{\text{أ}}}$

ملاحظات هامة جداً :

فى المعادلة التربيعية : $\text{أ}\text{س}^{٢} + \text{ب}\text{س} + \text{جـ} = ٠$

(أ) إذا كان معامل $\text{س}^{٢} = ١$ أى $\text{أ} = ١$ تصبح المعادلة

$\text{س}^{٢} + \text{ب}\text{س} + \text{جـ} = ٠$

ويكون : $\text{ل} + \text{م} = -\text{ب}$ ، $\text{ل}\,\text{م} = \text{جـ}$

(ب) إذا كان معامل $\text{س} = ٠$ أى $\text{ب} = ٠$ تصبح المعادلة

$\text{أ}\text{س}^{٢} + \text{جـ} = ٠$

ويكون : $\text{ل} + \text{م} = ٠$ أى : $\text{ل} = -\text{م}$ ، $\text{م} = -\text{ل}$

أى أن : جذرى المعادلة فى هذه الحالة يكون كل منهما معكوس جمعى للآخر .

(جـ) إذا كان معامل $\text{س}^{٢}$ = الحد المطلق

أى أن : $\text{أ} = \text{جـ}$ تصبح المعادلة :

$\text{أ}\text{س}^{٢} + \text{ب}\text{س} + \text{أ} = ٠$

ويكون $\text{ل}\,\text{م} = ١$ ، $\text{ل} = \dfrac{١}{\text{م}}$ ، $\text{م} = \dfrac{١}{\text{ل}}$

أى أن : جذرى المعادلة فى هذه الحالة يكون كل منهما معكوس ضربى للآخر .

مثال ١ : دون حل المعادلة أوجد مجموع وحاصل ضرب المعادلة : $٢\text{س}^{٢} - ٧\text{س} - ٦ = ٠$

الحل

$\because ٢\text{س}^{٢} - ٧\text{س} - ٦ = ٠$

$\therefore \text{أ} = ٢$ ، $\text{ب} = -٧$ ، $\text{جـ} = -٦$

$\therefore$ مجموع الجذرين $= \dfrac{-\text{ب}}{\text{أ}} = \dfrac{-(-٧)}{٢} = \dfrac{٧}{٢}$

حاصل ضرب الجذرين $= \dfrac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \dfrac{-٦}{٢} = -٣$

مثال ٢ : إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة : $٢\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + \text{ك} = ٠$ يساوى ١ فأوجد قيمة ك ، ثم حل المعادلة

الحل

$\because \text{أ} = ٢$ ، $\text{ب} = -٣$ ، $\text{جـ} = \text{ك}$

$\because \text{ل}\,\text{م} = ١$ $\therefore \text{جـ} = \text{أ}$ $\therefore \text{ك} = ٢$

ثم نعوض عن قيمة ك بـ ٢ ونحل المعادلة

القانون العام : $\text{س} = \dfrac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أ}\text{جـ}}}{٢\text{أ}} = \dfrac{٣ \pm \sqrt{٩ - ١٦}}{٤} = \dfrac{٣ \pm \sqrt{٧\text{ت}^{٢}}}{٤}$

$= \dfrac{٣ \pm \sqrt{٧}\,\text{ت}}{٤}$

$\text{م}.\text{ح} = \{ \dfrac{٣}{٤} + \dfrac{\sqrt{٧}}{٤}\text{ت} ، \dfrac{٣}{٤} - \dfrac{\sqrt{٧}}{٤}\text{ت} \}$

مثال ٣ : إذا كان حاصل ضرب المعادلة : $٣\text{س}^{٢} + ١٠\text{س} - \text{جـ} = ٠$ هو $\dfrac{-٨}{٣}$ فأوجد قيمة جـ ، ثم حل المعادلة .

الحل

$\because \text{أ} = ٣$ ، $\text{ب} = ١٠$ ، $\text{جـ} = -\text{جـ}$

، $\because \text{ل}\,\text{م} = \dfrac{-٨}{٣}$ $\therefore \dfrac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \dfrac{-٨}{٣}$

$\therefore \dfrac{-\text{جـ}}{٣} = \dfrac{-٨}{٣}$ $\therefore \text{جـ} = ٨$

ثم نعوض عن جـ بـ ٨ ونحل المعادلة باستخدام القانون العام (حل بنفسك)

مثال ٤ : إذا كان مجموع جذرى المعادلة : $٢\text{س}^{٢} + \text{ب}\text{س} - ٥ = ٠$ هو $-\dfrac{٣}{٢}$ فأوجد قيمة ب ، ثم حل المعادلة .

الحل

$\because \text{أ} = ٢$ ، $\text{ب} = \text{ب}$ ، $\text{جـ} = -٥$

$\because \text{ل} + \text{م} = \dfrac{-٣}{٢}$ $\therefore \dfrac{-\text{ب}}{\text{أ}} = \dfrac{-٣}{٢}$

$\therefore \dfrac{-\text{ب}}{٢} = \dfrac{-٣}{٢}$

$\therefore \text{ب} = ٣$

نعوض عن ب فى المعادلة بـ ٣

تصبح المعادلة : $٢\text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ٥ = ٠$

بالتحليل : $(٢\text{س} + ٥)(\text{س} - ١) = ٠$

$\therefore \text{س} = \dfrac{-٥}{٢}$ أو $\text{س} = ١$

$\text{م}.\text{ح} = \{ \dfrac{-٥}{٢} ، ١ \}$

مثال ٥ : إذا كان (١ + ت) هو أحد جذور المعادلة $\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + \text{أ} = ٠$ حيث $\text{أ} \in \text{ح}$ فأوجد :

(أ) الجذر الآخر (ب) قيمة أ

الحل

$\because \text{أ} = ١$ ، $\text{ب} = -٢$ ، $\text{جـ} = \text{أ}$

(أ) $\because$ ١ + ت هو أحد جذور المعادلة :

$\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + \text{أ} = ٠$ حيث $\text{أ} \in \text{ح}$

$\therefore$ الجذر الآخر = ١ − ت لأن الجذرين مركبين غير حقيقيين ومترافقين ومجموعهما = ٢

(ب) $\because$ حاصل ضرب الجذرين = أ

$\therefore \text{ل}\,\text{م} = \text{أ}$

$\therefore (١ + \text{ت})(١ - \text{ت}) = \text{أ}$

$\therefore ١ + ١ = \text{أ}$ $\therefore \text{أ} = ٢$

مثال ٦ : أوجد قيمة ك التى تجعل أحد جذرى المعادلة : $(\text{ك} - ٢)\text{س}^{٢} + (\text{ك} - ٢)\text{س} - ٤ = ٠$ معكوساً ضربياً للآخر .

الحل

$\because \text{أ} = (\text{ك} - ٢)$ ، $\text{ب} = (\text{ك} - ٢)$ ، $\text{جـ} = -٤$

، $\because$ أحد الجذرين معكوساً ضربياً للآخر

$\therefore$ معامل $\text{س}^{٢}$ = الحد المطلق

$\therefore \text{أ} = \text{جـ}$ $\therefore (\text{ك} - ٢) = -٤$

$\therefore \text{ك} = -٤ + ٢$ $\therefore \text{ك} = -٢$

مثال ٧ : أوجد قيمة ك التى تجعل أحد جذرى المعادلة : $\text{س}^{٢} + (\text{ك} - ١)\text{س} - ٣ = ٠$ هو المعكوس الجمعى للآخر .

الحل

$\because \text{أ} = ١$ ، $\text{ب} = (\text{ك} - ١)$ ، $\text{جـ} = -٣$

$\because$ أحد الجذرين معكوس جمعى للآخر

$\text{ل} + \text{م} = ٠$ ، $\because \text{أ} = ١$ $\therefore -\text{ب} = ٠$

$\therefore -(\text{ك} - ١) = ٠$ $\therefore -\text{ك} + ١ = ٠$

$\therefore -\text{ك} = -١$ $\therefore \text{ك} = ١$

مثال ٨ : أوجد قيمة م التى تجعل أحد جذرى المعادلة : $\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + \text{م} = ٠$ يزيد عن الجذر الآخر بمقدار ١

الحل

نفرض أن أحد الجذرين = ل $\therefore$ الجذر الآخر = ل + ١

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

$\because$ مجموع الجذرين $= \frac{-ب}{أ}$

$\therefore ل + ل + ١ = ٥$

$\therefore ٢ل = ٤$ $\therefore ل = ٢$

، $\because$ حاصل ضربهما $= \frac{جـ}{أ}$

$\therefore ل(ل + ١) = م$ بالتعويض عن ل

$\therefore ٢ \times ٣ = م$ $\therefore م = ٦$

تمارين (١ – ٤)

(١) **أكمل ما يأتى :**

(١) إذا كان : $س = ٣$ أحد جذرى المعادلة :

$س^{٢} + م س - ٢٧ = ٠$

فإن : م = ... ، الجذر الآخر = ...

(٢) إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة :

$٢س^{٢} + ٧س + ٣ك = ٠$ يساوى مجموع جذرى

المعادلة : $س^{٢} - (ك + ٤) س = ٠$

فإن : ك = ...

---

(٢) **اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :**

(١) إذا كان أحد جذرى المعادلة :

$س^{٢} - ٣س + جـ = ٠$ ضعف الآخر فإن : جـ = ...

(−٤ ، −٢ ، ٢ ، ٤)

(٢) إذا كان أحد جذرى المعادلة :

$أس^{٢} - ٣س + ٢ = ٠$ معكوسا جمعيا للآخر .

فإن : أ = ...

($\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، ٢ ، ٣)

(٣) إذا كان أحد جذرى المعادلة :

$س^{٢} - (ب - ٣)س + ٥ = ٠$

معكوسا جمعيا للآخر . فإن : ب تساوى ....

(−٥ ، −٣ ، ٣ ، ٥)

(٣) **أوجد مجموع وحاصل ضرب جذرى كل معادلة فيما يأتى :**

(أ) $٣س^{٢} + ١٩س - ١٤ = ٠$

(ب) $٤س^{٢} + ٤س - ٣٥ = ٠$

---

(٤) **دون حل المعادلة أوجد مجموع وحاصل ضرب جذرى كل من المعادلات الآتية :**

(أ) $٢س^{٢} + س - ٦ = ٠$

(ب) $٣س^{٢} = ٢٣س - ٣٠$

(جـ) $\frac{٣س + ٢}{س + ٢} = \frac{س + ١}{س - ١}$

(ى) $\frac{س + ٣}{س - ٣} = \frac{س - ٤}{س + ٤} = \frac{٣س + ٢}{س - ٣}$

(هـ) $(٤س + ١)(س + ٦) = (س - ٢)(٣س - ٤)$

---

(٥) **أوجد قيمة أ ثم أوجد الجذر الآخر للمعادلة فى كل مما يأتى :**

(أ) إذا كان : $س = -١$ أحد جذرى المعادلة :

$س^{٢} - ٢س + أ = ٠$

(ب) إذا كان : $س = ٢$ أحد جذرى المعادلة :

$أس^{٢} - ٥س + أ = ٠$

---

(٦) **أوجد قيمة جـ التي تجعل أحد جذري المعادلة :**

$٢س٢ - ٩س + جـ = ٠$ **ضعف الآخر**

---

(٧) **أوجد قيمة أ التي تجعل أحد جذري المعادلة**

$٢س^{٢} + (أ - ٢) س - ٧ = ٠$

هو المعكوس الجمعي للجذر الآخر .

---

(٨) **أوجد قيمة أ التي تجعل أحد جذري المعادلة**

$س^{٢} - أس + ٢أ - ٤ = ٠$

أربعة أمثال الآخر .

منتدى توجيه الرياضيات ----- أ / علاء زوار

(٩) **أوجد قيمة جـ التى تجعل جذرى المعادلة :**

$٣س^{٢} - ٥س + جـ = ٠$ **متساويين ثم أوجد الجذرين**

---

(١٠) **أوجد قيمة ك التى تجعل أحد جذرى المعادلة :** $٤كس^{٢} + ٧س + ك^{٢} + ٤ = ٠$

هو المعكوس الضربى للجذر الآخر .

---

(١١) **إذا كان** (٢ + ت) **هو أحد جذرى المعادلة :**

$س^{٢} - ٤س + ب = ٠$ **حيث** $ب \in ح$ **فأوجد :**

(أ) الجذر الآخر (ب) قيمة ب

---

(١٢) **أوجد قيمة أ التي تجعل أحد جذري المعادلة :**

$٢أس^{٢} + ٧س + أ^{٢} + ١ = ٠$ **هو المعكوس الضربي للجذر الآخر .**

---

(١٣) **أوجد قيمة أ التي تجعل أحد جذري المعادلة :** $س^{٢} - أس + ٢١ = ٠$

يزيد على ضعف الآخر بمقدار ١

---

(١٤) **أوجد قيمة أ التي تجعل مجموع جذري المعادلة :** $(أ - ٢) س٢ + (أ - ٣) س - ٤ = ٠$

يساوي ٣

---

(١٥) **أوجد قيمة أ التي تجعل أحد جذري المعادلة :**

$٤س^{٢} - أس - ٣ = ٠$ **يزيد على المعكوس الجمعي للآخر بمقدار ١ .**

ثانيا : تكوين المعادلة التربيعية متى علم جذراها

لتكوين معادلة جذراها ل ، م هناك صورتين لتكوين المعادلة :

الصورة الأولى :

$س^{٢}$ − (مجموع الجذرين) س + حاصل ضرب الجذرين = ٠

الصورة الثانية : $(س - ل)(س - م)$

مثال ١ : كون المعادلة التربيعية التى جذراها

٨ ، −١٣

الحـــل

مجموع الجذرين $= ٨ + (-١٣) = -٥$

، حاصل ضرب الجذرين $= ٨ \times (-١٣) = -١٠٤$

$\therefore$ المعادلة هى :

$س^{٢}$ − (مجموع الجذرين) س + حاصل ضرب الجذرين = ٠

$\therefore$ المعادلة هى :

$س^{٢} - (-٥)س + (-١٠٤) = ٠$

$\therefore س^{٢} + ٥س - ١٠٤ = ٠$

$ى^{٢} - (-٥)ى + (-١٠٤) = ٠$

أى ، $ى^{٢} + ٥ى - ١٠٤ = ٠$

حل آخر : $\Longleftarrow$ $(س - ل)(س - م)$

$\therefore (س - ٨)(س + ١٣) = ٠$

$\therefore س^{٢} + ١٣س - ٨س - ١٠٤ = ٠$

$\therefore س^{٢} + ٥س - ١٠٤ = ٠$

مثال ٢ : كون المعادلة التى جذراها

$٥ + \sqrt{٣}$ ، $٥ - \sqrt{٣}$

الحـــل

مجموع الجذرين $= ٥ + \sqrt{٣} + ٥ - \sqrt{٣} = ١٠$

حاصل ضرب الجذرين $= (٥ + \sqrt{٣})(٥ - \sqrt{٣})$

$= ٢٥ - ٣ = ٢٢$

$\therefore$ المعادلة هى : $س^{٢} - ١٠س + ٢٢ = ٠$

مثال ٣ : كون المعادلة التى جذراها : $\frac{-٢+٢ت}{١+ت}$ ، $\frac{-٢-٤ت}{٢-ت}$

الحل

أولاً : نضع كلاً من الجذرين فى أبسط صورة وذلك بالضرب × المرافق

$$\frac{-٢+٢ت}{١+ت} \times \frac{١-ت}{١-ت}$$

$$= \frac{٤ت}{٢} = ٢ت$$

$$\frac{-٢-٤ت}{٢-ت} = \frac{-٢-٤ت}{٢-ت} \times \frac{٢+ت}{٢+ت}$$

$$\frac{-١٠ت}{٥} = -٢ت$$

مجموع الجذرين $= ٢ت + (-٢ت) = ٠$

حاصل ضرب الجذرين $= ٢ت \times (-٢ت) = ٤$

$\therefore$ المعادلة هى : $س^٢ -$ صفر$س + ٤ = ٠$

$\therefore س^٢ + ٤ = ٠$

ثالثاً : تكوين معادلة تربيعية بمعلومية معادلة تربيعية أخرى :

المعادلة : $أس^٢ + بس + جـ = ٠$ جذراها ل ، م

ملاحظات هامة جداً :

(١) $ل^٢ + م^٢ = (ل + م)^٢ - ٢لم$

(٢) $(ل - م)^٢ = (ل + م)^٢ - ٤لم$

(٣) $ل^٣ + م^٣ = (ل + م)(ل^٢ + م^٢ - لم) = (ل + م)[(ل + م)^٢ - ٣لم]$

(٤) $\frac{١}{ل} + \frac{١}{م} = \frac{ل+م}{لم}$

(٥) $\frac{ل}{م} + \frac{م}{ل} = \frac{ل^٢+م^٢}{لم}$

(٦) $\frac{ل^٢}{م} + \frac{م^٢}{ل} = \frac{ل^٣+م^٣}{لم}$

(٧) $ل^٢م + م^٢ل = لم(ل + م)$

(٨) الفرق بين الجذرين $= ل - م = \frac{\sqrt{\text{المميز}}}{أ}$

(٩) $(ل - ١) + (م - ١) = ل + م - ٢$

(١٠) $(ل - ١)(م - ١) = لم - (ل + م) + ١$

مثال ٤ : إذا كان ل ، م جذرى المعادلة : $٣س^٢ + ٤س - ٥ = ٠$ **فأوجد المعادلة التى جذراها** $ل^٢$ ، $م^٢$

الحل

المعادلة المعلومة : جذراها ل ، م

$\therefore ل+م = \frac{-ب}{أ} = \frac{-٤}{٣}$ ، $لم = \frac{جـ}{أ} = \frac{-٥}{٣}$

المعادلة المطلوبة :

مجموع الجذرين : $= ل^٢ + م^٢ = (ل + م)^٢ - ٢لم$

$$= \left(\frac{-٤}{٣}\right)^٢ - ٢ \times \left(\frac{-٥}{٣}\right) = \frac{١٦}{٩} + \frac{١٠}{٣} = \frac{٤٦}{٩}$$

$\Leftarrow$ (١)

حاصل ضرب الجذرين $= ل^٢م^٢ = (لم)^٢$

$$= \left(\frac{-٥}{٣}\right)^٢ = \frac{٢٥}{٩} \Leftarrow (٢)$$

$\therefore$ المعادلة المطلوبة هى :

$س^٢ - \frac{٤٦}{٩}س + \frac{٢٥}{٩} = ٠$ بالضرب × ٩

$\therefore$ المعادلة هى : $٩س^٢ - ٤٦س + ٢٥ = ٠$

مثال ٥ : إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^٢ + ٢س - ٦ = ٠$ **فأوجد المعادلة التى جذراها :** ل − ١ ، م − ١

الحل

المعادلة المعلومة :

مجموع الجذرين $= ل + م = \frac{-ب}{أ} = -٢$

حاصل ضرب الجذرين $= ل م = \frac{جـ}{أ} = -٦$

المعادلة المطلوبة : مجموع الجذرين

$= (ل - ١) + (م - ١) = ل + م - ٢$

$= -٢ - ٢ = -٤$

حاصل ضرب الجذرين

$= (ل - ١)(م - ١) = لم - (ل + م) + ١$

$= -٦ - (-٢) + ١ = -٦ + ٢ + ١ = -٣$

$\therefore$ المعادلة هى : $س^٢ + ٤س - ٣ = ٠$

مثال ٦ : إذا كان $\frac{٢}{ل}$ ، $\frac{٢}{م}$ **هما جذرا المعادلة :** $٤س^٢ + ٣س - ٢ = ٠$ **فكون المعادلة التربيعية التى جذراها** ل ، م

الحل

المعادلة المعلومة :

مجموع الجذرين $= \frac{٢}{ل} + \frac{٢}{م} = \frac{٢م+٢ل}{لم} =$

$$\frac{٢(ل+م)}{لم} = \frac{-ب}{أ} = \frac{-٣}{٤}$$

، حاصل ضرب الجذرين $= \frac{٢}{ل} \times \frac{٢}{م} = \frac{٤}{لم}$

$\therefore \frac{٤}{لم} = \frac{-١}{٢}$ $\qquad \therefore لم = -٨$

بالتعويض فى المعادلة (١)

$\frac{٢(ل+م)}{-٨} = \frac{-٣}{٤}$ $\qquad \therefore \frac{ل+م}{-٤} = \frac{-٣}{٤}$

$\therefore ل + م = ٣$

$\therefore$ المعادلة هى : $س^٢ - ٣س - ٨ = ٠$

$ى^٢ - ٣ى - ٨ = ٠$

مثال ٧ : إذا كان جذرا المعادلة : $٢س^٢ + ١٥س - ١٠ = ٠$ **هما** $\frac{ل}{٢}$ ، $\frac{م}{٢}$ **كون المعادلة التى جذراها** $\frac{٢}{ل}$ ، $\frac{٢}{م}$

الحل

المعادلة المعلومة :

مجموع الجذرين $= \frac{ل}{٢} + \frac{م}{٢} = \frac{ل+م}{٢}$

$\because \frac{-ب}{أ} = \frac{-١٥}{٢}$ $\qquad \therefore \frac{ل+م}{٢} = \frac{-١٥}{٢}$

$\therefore ل + م = -١٥$

حاصل ضرب الجذرين $= \frac{ل}{٢} \times \frac{م}{٢} = \frac{لم}{٤}$

$\because \frac{جـ}{أ} = \frac{-١٠}{٢} = -٥$ $\qquad \therefore \frac{لم}{٤} = -٥$

$\therefore لم = -٢٠$

بنترى توجيه الرياضيات ------ أ / عادل إدوار

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

المعادلة المطلوبة :

مجموع الجذرين =

$$\frac{٢}{ل} + \frac{٢}{م} = \frac{٢م + ٢ل}{ل م} = \frac{٢(ل+م)}{ل م}$$

$$= \frac{٢ \times -١٥}{-٢٠} = \frac{٣}{٢}$$

حاصل ضرب الجذرين =

$$\frac{٢}{ل} \times \frac{٢}{م} = \frac{٤}{ل م} = \frac{٤}{-٢٠} = \frac{-١}{٥}$$

∴ المعادلة هى : $س^{٢} - \frac{٣}{٢}س - \frac{١}{٥} = ٠$

بالضرب × ١٠

∴ $١٠س^{٢} - ١٥س - ٢ = ٠$

مثال ٨ : أوجد المعادلة التربيعية التى كل من جذريها يساوى مربع نظيره من جذرى المعادلة : $س^{٢} + ٣س - ٥ = ٠$

الحل

المعادلة المعلومة :

نفرض أن الجذرين ل ، م

∴ $ل + م = -٣$ ، $ل م = -٥$

المعادلة المطلوبة :

جذرى المعادلة : $ل^{٢}$ ، $م^{٢}$

∴ $ل^{٢} + م^{٢} = (ل + م)^{٢} - ٢ل م$

$= (-٣)^{٢} - ٢ \times (-٥) = ١٩$

، $ل^{٢} م^{٢} = (ل م)^{٢} = (-٥)^{٢} = ٢٥$

∴ المعادلة هى : $س^{٢} - ١٩س + ٢٥ = ٠$

مثال ٩ : إذا كان ل ، م جذرى المعادلة : $س^{٢} + ب س + ٢ب^{٢} = ٠$ فأوجد المعادلة التى جذراها $\frac{ل}{م}$ ، $\frac{م}{ل}$

الحل

المعادلة المعلومة :

$ل + م = -ب$ ، $ل م = ٢ب^{٢}$

المعادلة المطلوبة :

مجموع جذريها =

$$\frac{ل}{م} + \frac{م}{ل} = \frac{ل^{٢} + م^{٢}}{ل م} = \frac{(ل+م)^{٢} - ٢ل م}{ل م}$$

$$= \frac{(-ب)^{٢} - ٤ب^{٢}}{٢ب^{٢}} = \frac{-٣ب^{٢}}{٢ب^{٢}} = \frac{-٣}{٢}$$

حاصل ضربهما : $\frac{ل}{م} \times \frac{م}{ل} = ١$

المعادلة : $س^{٢} + \frac{٣}{٢}س + ١ = ٠$

أى: $٢س^{٢} + ٣س + ٢ = ٠$

مثال ١٠ : إذا كان الفرق بين جذرى المعادلة : $٦س^{٢} - ٧س + ١ = ج$ هو $\frac{١١}{٦}$ أوجد قيمة : ج

الحل

$ل + م = \frac{١١}{٦}$

$ل م = \frac{١ - ج}{٦}$

$ل - م = \frac{١١}{٦}$

∵ $(ل - م)^{٢} = (ل + م)^{٢} - ٤ل م$

$$\left(\frac{١١}{٦}\right)^{٢} = \left(\frac{٧}{٦}\right)^{٢} - ٤\frac{(١ - ج)}{٦}$$

∴ $\frac{١٢١}{٣٦} - \frac{٤٩}{٣٦} = \frac{-٢(١ - ج)}{٣}$

$= \frac{٧٢}{٣٦} = \frac{-٢(١ - ج)}{٣}$ ∴ $\frac{٢}{١} = \frac{-٢(١ - ج)}{٣}$

∴ $-١ + ج = ٣$ ∴ $ج = ٤$

بنترى توجيه الرياضيات

أ / عادل إدوار

تمارين (٢ – ٤)

(١) أكمل ما يأتى :

(أ) المعادلة التربيعية التى كل من جذريها يزيد ١ عن كل من جذرى المعادلة : $س^{٢} - ٣س + ٢ = ٠$ هى ....

(ب) المعادلة التربيعية التى كل من جذريها ينقص ١ عن كل من جذرى المعادلة : $س^{٢} - ٥س + ٦ = ٠$ هى ....

---

(٢) كون معادلة الدرجة الثانية التى جذراها كالآتى :

(أ) -٢ ، ٤

(ب) $-٥ت$ ، $٥ت$

(جـ) $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٣}{٢}$

(د) $١ - ٣ت$ ، $١ + ٣ت$

(هـ) $٣ - ٢\sqrt{٢}ت$ ، $٣ + ٢\sqrt{٢}ت$

(و) ٣ ، -٥

(ز) $-٩ت$ ، $٩ت$

(ح) $\frac{٣}{ت}$ ، $\frac{٣ + ٣ت}{١ - ت}$

---

(٣) أوجد المعادلة التربيعية التى جذراها ضعفا جذرى المعادلة : $٢س^{٢} - ٨س + ٥ = ٠$

---

(٤) أوجد المعادلة التربيعية التى يزيد بمقدار ١ عن كل من جذرى المعادلة :

$س^{٢} - ٧س - ٩ = ٠$

---

(٥) إذا كان ل ، م جذرى المعادلة : $س^{٢} - ٧س + ٣ = ٠$ **فأوجد المعادلة الثانية التى جذراها**

(أ) $٢ل$ ، $٢م$

(ب) $ل + ٢$ ، $م + ٢$

(جـ) $\frac{٢}{ل}$ ، $\frac{٢}{م}$

(د) $ل + م$ ، $ل م$

---

(٦) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $٢س^{٢} - ٣س - ١ = ٠$ **كون المعادلات التربيعية التى جذر كل منها كالآتى :**

(أ) $\frac{١}{ل}$ ، $\frac{١}{م}$

(ب) $\frac{ل}{م}$ ، $\frac{م}{ل}$

---

(٧) إذا كان $\frac{٢}{ل}$ ، $\frac{٢}{م}$ **هما جذرا المعادلة :**

$س^{٢} - ٦س + ٤ = ٠$

فكون المعادلة التربيعية التى جذراها ل ، م

---

(٨) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة :

$س^{٢} + ٣س = ٧$ **فأوجد المعادلة التي جذراها**

$١ - م$ ، $١ - ل$

---

(٩) إذا كان $ل + ٥$ ، $م + ٥$ **جذرا المعادلة :**

$س^{٢} - ٥س + ١١ = ٠$ **فأوجد المعادلة التي جذراها** ل ، م

---

(١٠) إذا كان ل ، م جذرا المعادلة :

$س^{٢} - ٢س + ٢ = ٠$ **فأوجد المعادلة التي جذراها :** $ل^{٢} - \frac{١}{م}$ ، $م^{٢} - \frac{١}{ل}$

الدرس الخامس
إشارة الدالة

لبحث إشارة المقدار الجبرى :

د(س) = أ س^٢ + ب س + جـ = ٠

توجد الحالات الآتية :

أولاً : أ = ب = ٠

أى إشارة المقدار د(س) = جـ (الدالة الثابتة)

ثانيًا : أ = ٠ ، ب ≠ ٠

أى إشارة المقدار د(س) = ب س + جـ (الدالة الخطية)

ثالثًا : أ ≠ ٠ ، ب ≠ ٠

أى أشارة المقدار د(س) = أ س^٢ + ب س + جـ (الدالة التربيعية)

ما المقصود ببحث أو تعيين إشارة الدالة ؟

لبحث إشارة الدالة ص = د(س) نتبع الخطوات الآتية

(١) نعين مجموعة أصفار الدالة أى قيم س التى عندها د(س) = ٠

(٢) نعين الفترات التى تكون فيها د(س) > ٠

(٣) نعين الفترات التى تكون فيها د(س) < ٠

أولا : اشارة الدالة الثابتة :

مثال ١ : ابحث إشارة كل من الدالتين :

(١) د(س) = ٣

(٢) د(س) = -٥/٢

الحل

(١) د(س) = ٣

دالة ثابتة ، د(س) = ٣ > ٠

∴ د(س) موجبة لجميع قيم س ∈ ح

(٢) د(س) = -٥/٢

دالة ثابتة ، د(س) = -٥/٢ < ٠

∴ د(س) سالبة لجميع قيم س ∈ ح

خدت بالك أن الحالتين اللى فاتوا ملهمش أصفار

حالة خاصة :

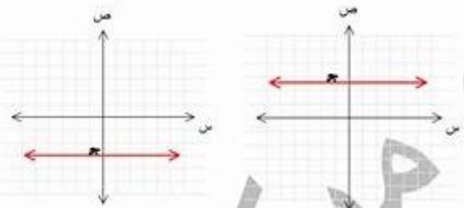
الدالة الثابتة د(س) = ٠ تسمى دالة صفرية ومن الواضح أنه لجميع قيم س ∈ ح تكون د(س) = ٠

∴ أصفار الدالة جميع الأعداد الحقيقية

قاعدة (١)

الدالة الثابتة د(س) = جـ ، جـ ≠ ٠ لها نفس إشارة جـ لجميع قيم س ∈ ح

والشكل التالى يوضح إشارة الدالة :



جـ > ٠
الدالة موجبة لكل س ∈ ح

جـ < ٠
الدالة سالبة لكل س ∈ ح

ثانيا : اشارة الدالة الخطية :

قاعدة (٢)

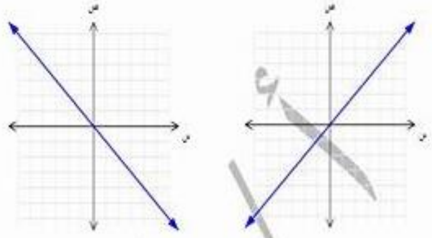
أشارة المقدار د(س) = ب س + جـ تكون

مثل إشارة ب عندما س > -جـ/ب

تخالف إشارة ب عندما س < -جـ/ب

د(س) = ٠ عندما س = -جـ/ب

والشكل التالى يوضح إشارة الدالة



مثال ٢ : ابحث إشارة كل من الدوال الآتية :

(١) د(س) = ٢س - ٦

(٢) د(س) = ٢٨ - ٧س

الحل

(١) د(س) = ٢س - ٦

∵ د(س) = ٠ ∴ ٢س - ٦ = ٠

∴ ٢س = ٦ ومنها س = ٣

∴ صفر الدالة هو العدد ٣

د(س) تكون موجبة عندما س > ٣

(مثل اشارة معامل س)

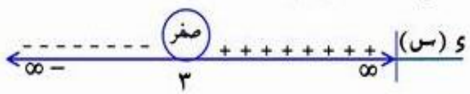
د(س) تكون سالبة عندما س < ٣

(مخالفة اشارة معامل س)

أى أن : إشارة د(س) تكون

موجبة عندما س > ٣ ، د(س) = ٠ عندما س = ٣

سالبة عندما س < ٣



(٢) د(س) = ٢٨ - ٧س

∵ د(س) = ٠ ∴ ٢٨ - ٧س = ٠

∴ -٧س = -٢٨ ∴ س = -٢٨/-٧ = ٤

∴ صفر الدالة هو العدد ٤

أى أن : إشارة د(س) تكون

سالبة عندما س > ٤

د(س) = ٠ عندما س = ٤

موجبة عندما س < ٤

ثالثا : اشارة الدالة التربيعية :

قاعدة (٣)

نحسب مميز المعادلة : أ س^٢ + ب س + جـ = ٠

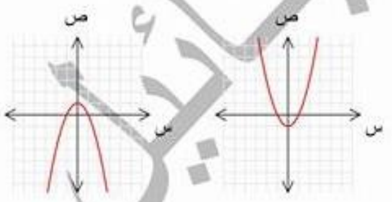
الحالة الأولى : المميز > صفر

المميز > صفر يوجد للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان هما ل ، م حيث ل < م

د(س) إشاراتها مثل أ عندما س ∈ ح - [ل ، م]

د(س) إشاراتها تخالف أ عندما س ∈]ل ، م[

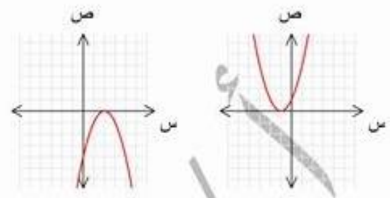
د(س) = ٠ عندما س ∈ {ل ، م}



منتدى توجيه الرياضيات
أ / عادل إدوار
أ / إبراهيم ميكائيل
www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

الحالة الثانية : **المميز = صفر**

يوجد للمعادلة جذران حقيقيان متساويان كل منها يساوى ل

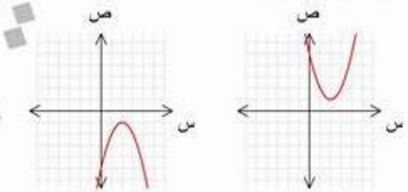


د(س) إشارتها مثل إشارة أ عندما س ≠ ل

د(س) = صفر عندما س = ل

الحالة الثالثة : **المميز < صفر**

لا يوجد للمعادلة جذور حقيقية



د(س) لها إشارة واحدة هى نفس إشارة أ لجميع قيم س ∈ ح

مثال ٣ : ابحث إشارة الدالة :
د(س) = س^{٢} − ٥س + ٦ **موضحاً ذلك على خط الأعداد**

الحـــل

المميز : ب^{٢} − ٤أجـ = ٢٥ − ٤ × ١ × ٦ = ١ > ٠

∴ المعادلة لها جذران حقيقيان مختلفان

بوضع د(س) = ٠ ∴ س^{٢} − ٥س + ٦ = ٠

∴ (س − ٢)(س − ٣) = ٠

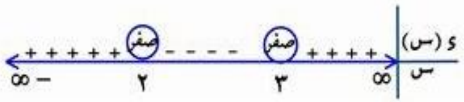
∴ س = ٢ أو س = ٣

∴ جذرا المعادلة هما ٢ ، ٣

د(س) موجبة عندما س ∈ ح − [٢ ، ٣]

د(س) سالبة عندما س ∈]٢ ، ٣[

د(س) = ٠ عندما س ∈ {٢ ، ٣}



مثال ٤ : ابحث إشارة الدالة
د(س) = − س^{٢} + ٧س − ١٠
موضحاً ذلك على خط الأعداد

الحـــل

المميز : ب^{٢} − ٤أجـ = ٤٩ − ٤ × (−١) × (−١٠)

٤٩ − ٤٠ = ٩ > ٠

∴ المعادلة لها جذران حقيقيان مختلفان

بوضع د(س) = صفر

∴ −س^{٢} + ٧س − ١٠ = ٠

أى : س^{٢} − ٧س + ١٠ = ٠

∴ (س − ٢)(س − ٥) = ٠

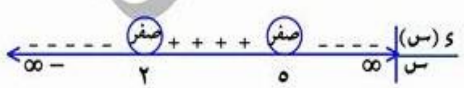
∴ س = ٢ أو س = ٥

∴ جذرا المعادلة هما ٢ ، ٥

د(س) سالبة عندما س ∈ ح − [٢ ، ٥]

د(س) موجبة عندما س ∈]٢ ، ٥[

د(س) = ٠ عندما س ∈ {٢ ، ٥}



مثال ٥ : ابحث إشارة الدالة
د(س) = ٤س^{٢} − ١٢س + ٩
موضحاً ذلك على خط الأعداد

الحـــل

المميز : ب^{٢} − ٤أجـ = ١٤٤ − ٤ × ٤ × ٩ = ٠

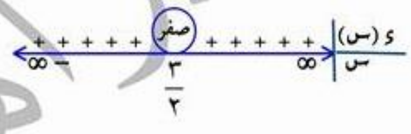
∴ المعادلة لها جذران حقيقيان متساويان

بوضع د(س) = ٠ ٤س^{٢} − ١٢س + ٩ = ٠

∴ (٢س − ٣)^{٢} = ٠ ∴ س = $\frac{٣}{٢}$ (صفر الدالة)

∴ د(س) موجبة لجميع قيم س ∈ ح − {$\frac{٣}{٢}$}

، د(س) = ٠ عند س = $\frac{٣}{٢}$



مثال ٦ : ابحث إشارة الدالة
د(س) = س^{٢} + س + ٢
موضحاً ذلك على خط الأعداد .

الحـــل

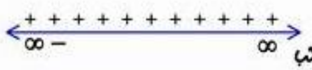
المميز : ب^{٢} − ٤أجـ =

١ − ٤ × ١ × ٢ = −٧ < ٠

∴ المعادلة د(س) = ٠ ليس لها جذور حقيقية

(ليس لها أصفار)

∵ معامل س^{٢} موجب



∴ د(س) موجبة لجميع قيم س ∈ ح

مثال ٧ : أثبت أنه لجميع قيم ك ∈ ح يكون جذرا المعادلة : ٢س^{٢} − ك س + ك − ٣ = ٠ **حقيقيين مختلفين .**

الحـــل

المميز : ب^{٢} − ٤أجـ = ٠

(− ك)^{٢} − ٤ × ٢ × ك − ٣ = ك^{٢} − ٨ك + ٢٤

نبحث إشارة المقدار : ص = ك^{٢} − ٨ك + ٢٤

مميز المعادلة : ك^{٢} − ٨ك + ٢٤ = ٠ هو

(−٨)^{٢} − ٤ × ١ × ٢٤ = ٦٤ − ٩٦ = −٣٢ < ٠

∴ المعادلة ليس لها جذور حقيقية

∴ إشارة المقدار : ص = ك^{٢} − ٨ك + ٢٤ موجبة لكل ك ∈ ح

∴ مميز المعادلة : ٢س^{٢} − ك س + ك − ٣ = ٠ موجب لكل ك ∈ ح

∴ جذرا المعادلة : ٢س^{٢} − ك س + ك − ٣ = ٠ حقيقيين مختلفين لكل ك ∈ ح

مثال ٨ : عين إشارة الدالة د(س) = س − ٢
حيث : س ∈ ح مع توضيح ذلك بيانياً

الحـــل

قاعدة الدالة : د(س) = س − ٢

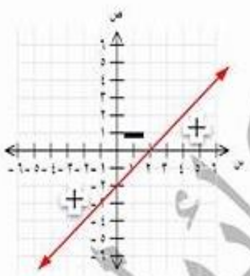
رسم الدالة :

عندما د(س) = ٠

فإن : س = ٢

عندما س = ٠

فإن : د(س) = −٢



من الرسم نجد أن :

الدالة موجبة عندما س > ٢

الدالة د(س) = ٠ عندما س = ٢

الدالة سالبة عندما س < ٢

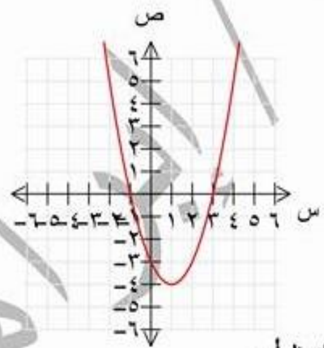
منتدى توجيه الرياضيات أ / عادل إدوار

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

مثال ٩ : ارسم منحنى الدالة
د(س) = س^{٢} − ٢س − ٣
فى الفترة [−٢ ، ٤] ومن الرسم عين إشارة الدالة د(س)

الحل

س	−٢	−١	٠	١	٢	٣	٤
د(س)	٥	٠	−٣	−٤	−٣	٠	٥

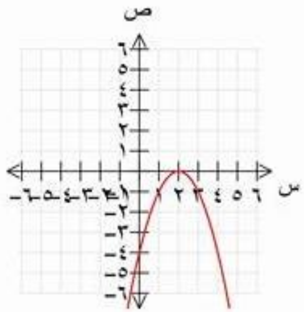


من الرسم نلاحظ أن :
د(س) موجبة عندما س ∈ ح − [−١ ، ٣]
د(س) سالبة عندما س ∈]−١ ، ٣[
د(س) = ٠ عندما س ∈ {−١ ، ٣}

مثال ١٠ : ارسم منحنى الدالة :
د(س) = − س^{٢} + ٤س − ٤
فى الفترة [٠ ، ٤] ومن الرسم عين إشارة د(س)

الحل

س	٠	١	٢	٣	٤
د(س)	−٤	−١	٠	−١	−٤

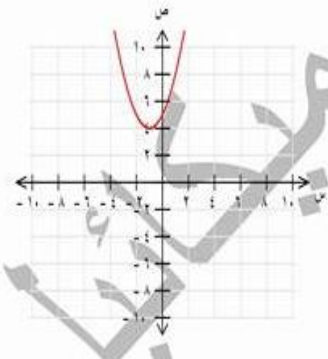


من الرسم نلاحظ أن :
د(س) سالبة عندما س ∈ ح − {٢}
د(س) = ٠ عندما س ∈ {٢}

مثال ١١ : ارسم منحنى الدالة :
د(س) = س^{٢} + ٢س + ٥
فى الفترة [−٤ ، ٢] ومن الرسم عين إشارة الدالة د(س)

الحل

س	−٤	−٣	−٢	−١	٠	١	٢
د(س)	١٣	٨	٥	٤	٥	٨	١٣



من الرسم نلاحظ أن : المنحنى يقع بأكمله أعلى محور السينات
∴ إشارة د(س) موجبة لجميع س ∈ ح
كما نلاحظ أن : المعادلة : س^{٢} + ٢س + ٥ = ٠ ليس لها جذور حقيقية

بنترى توجيه الرياضيات
أ / عادل إدوار

تمارين (٥)

(١) **أكمل ما يأتى :**

(١) الدالة د حيث د(س) = −٥ إشارتها .... فى الفترة ....

(٢) الدالة د حيث د(س) = س^{٢} + ١ إشارتها ....

(٣) الدالة د حيث د(س) = س^{٢} − ٦س + ٩ موجبة فى الفترة ....

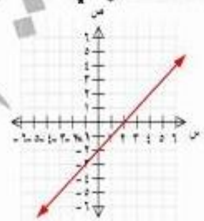
(٤) الدالة د حيث د(س) = س − ٢ موجبة فى الفترة ....

(٥) الدالة د حيث د(س) = ٣ − س سالبة فى الفترة ....

(٦) الدالة د حيث د(س) = −(س − ١)(س + ٢) موجبة فى الفترة ....

(٧) الدالة د حيث د(س) = س^{٢} + ٤س − ٥ سالبة فى الفترة ....

(٨) الشكل المرسوم يمثل دالة من الدرجة الأولى في س :



(أ) د(س) موجبة فى الفترة ....

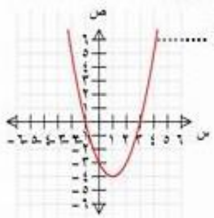
(ب) د(س) سالبة فى الفترة ....

(٩) الشكل المرسوم يمثل دالة من الدرجة الأولى فى س :

(أ) د(س) = ٠ عندما س ∈ ....

(ب) د(س) > ٠ عندما س ∈ ....

(ج) د(س) < ٠ عندما س ∈ ....



(٢) **عين إشارة كل دالة من الدوال الآتية :**

(أ) د(س) = ٢
(ب) د(س) = ٢س
(ج) د(س) = −٣س
(د) د(س) = ٢س + ٤
(هـ) د(س) = ٣ − ٢س
(و) د(س) = س^{٢} − ٤
(ز) د(س) = ١ − س٢
(ح) د(س) = (٢س − ٣)^{٢}
(ط) د(س) = س^{٢} − ٨س + ١٦
(ى) د(س) = −٤س^{٢} + ١٠س − ٢٥

(٣) **ابحث إشارة الدالة**
د(س) = س^{٢} − س + ٦ **موضحاً ذلك على خط الأعداد.**

(٥) **ارسم منحنى الدالة** د(س) = س^{٢} − ٩
فى الفترة [−٣ ، ٤] ومن الرسم عين إشارة د(س)

(٦) **ارسم منحنى الدالة**
د(س) = − س^{٢} + ٢س + ٤ **فى الفترة** [−٣ ، ٥] **ومن الرسم عين إشارة** د(س)

(٧) **إذا كانت** د(س) = س^{٢} − ٦س + ٥ ، ر(س) = س^{٢} − س − ٦ ، **ابحث إشارة كل من** د(س) ، ر(س) **ثم عين الفترات التي يكون فيها كل من** د(س) ، ر(س) **موجبتان معاً أو سالبتان معاً .**

(٨) **إذا كانت** د(س) = س^{٢} − ٤ ، ر(س) = ٣ + ٢س − س^{٢} **فابحث إشارة كل من** د ، ر **ثم بين متى تكون** د ، ر **موجبتان معاً ؟ ومتى تكون سالبتان معاً ؟**

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

الدرس السادس
متباينات الدرجة الثانية فى مجهول واحد

درسنا فى السابق متباينات الدرجة الأولى فى مجهول واحد وعلمت أن حل المتباينة معناه إيجاد جميع قيم المجهول التى تحقق هذه المتباينة وتكتب على صورة فترة

وفى هذا الدرس سنقوم بدراسة متباينات الدرجة الثانية فى مجهول

ولحل متباينات الدرجة الثانية نتبع الآتى :

الخطوة الأولى : نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة

الخطوة الثانية : ندرس إشارة الدالة التربيعية .

الخطوة الثالثة : نحدد الفترات التى تحقق المتباينة

مثال ١ : حل المتباينة : س^{٢} − ٥س − ٦ > ٠

الحـــل

الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة هى :

د (س) = س^{٢} − ٥س − ٦

ندرس إشارة الدالة

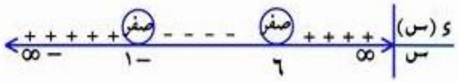
المميز : ب^{٢} − ٤أجـ = (−٥)^{٢} − ٤ × ١ × (−٦)

= ٢٥ + ٢٤ = ٤٩ > ٠

بوضع د (س) = ٠ ∴ س^{٢} − ٥س − ٦ = ٠

∴ (س − ٦)(س + ١) = ٠

∴ س = ٦ أو س = −١



نحدد الفترات التى تحقق المتباينة : س^{٢} − ٥س − ٦ > ٠

∴ مجموعة حل المتباينة هى :

]−∞ ، −١[∪]٦ ، ∞[

∴ م.ح = ح − [−١ ، ٦]

مثال ٢ : حل المتباينة : س^{٢} + ٢س − ٨ > ٠

الحـــل

الدالة المرتبطة : د (س) = س^{٢} + ٢س − ٨

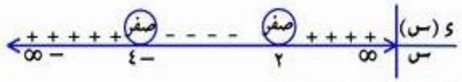
المميز : ب^{٢} − ٤أجـ = (٢)^{٢} − ٤ × ١ × (−٨)

= ٤ + ٣٢ = ٣٦ > ٠

بوضع د (س) = ٠ ∴ س^{٢} + ٢س − ٨ = ٠

∴ (س − ٢)(س + ٤) = ٠

∴ س = ٢ أو س = −٤



الفترات التى تحقق المتباينة :

∴ مجموعة حل المتباينة هى :

]−∞ ، −٤[∪]٢ ، ∞[

∴ م.ح = ح − [−٤ ، ٢]

مثال ٣ : حل المتباينة :
(س + ٣)^{٢} ≤ ١٠ − ٣(س + ٣)

الحـــل

∵ (س + ٣)^{٢} ≤ ١٠ − ٣(س + ٣)

∴ س^{٢} + ٦س + ٩ ≤ ١٠ − ٣س − ٩

∴ س^{٢} + ٩س + ٨ ≤ ٠

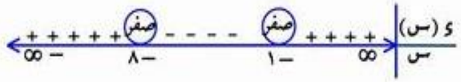
المعادلة المرتبطة : ∴ س^{٢} + ٩س + ٨ = ٠

∴ (س + ٨)(س + ١) = ٠

∴ س = −٨ أو س = −١

∴ م.ح =]−∞ ، −٨] ∪ [−١ ، ∞[

∴ م.ح = [−٨ ، −١]



بنترى توجيه الرياضيات / أ / عادل إدوار

تمارين (٦)

(١) **أوجد مجموعة الحل للمتباينات التربيعية الآتية :**

(١) س^{٢} ≤ ٩
(٢) س^{٢} − ١ ≤ ٠
(٣) ٢س − س^{٢} < ٠
(٤) س^{٢} + ٥ ≤ ١
(٥) (س − ٢)(س − ٥) < ٠
(٦) س (س + ٢) − ٣ ≤ ٠
(٧) (س − ٢)^{٢} ≤ −٥
(٨) ٥ − ٢س ≤ س^{٢}
(٩) س^{٢} − ٤س + ٤ ≥ ٠

---

(٢) **حل المتباينة :** س^{٢} + س + ١٢ > ٠

---

(٣) **حل المتباينة :**
(س + ٣)^{٢} + ٣(س + ٣) − ١٠ ≥ ٠

---

(٤) **أوجد في ح مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية :**

(١) ٣س^{٢} ≤ ١١س + ٤
(٢) ٥س^{٢} + ١٢س ≥ ٤٤
(٣) س^{٢} ≥ ٦س − ٩
(٤) (س + ٣)^{٢} < ١٠ − ٣(س + ٣)

تمارين عامة

(١) **أكمل ما يأتى :**

(١) إذا كان س = −١ هى أحد جذرى المعادلة س^{٢} − أس − ٢ = ٠ فإن : أ = ...

(٢) مجموعة حل المعادلة (س + ١)^{٢} = ٤ فى ح هى ....

(٣) أبسط صورة للعدد التخيلى ت^{٤٣} = ...

(٤) المقدار (−٤ت) (−٦ت) فى أبسط صورة يساوى ....

(٥) المقدار $\sqrt{-٨}$ × $\sqrt{-١٢}$ فى أبسط صورة يساوى ....

(٦) المقدار (١٣ − ٢ت) − (٣ − ١٠ت) فى صورة العدد أ + ب ت هو ....

(٧) أبسط صورة للمقدار (٦ + ت)(٤ − ٣ت) = ...

(٨) إذا كان جذرا المعادلة س^{٢} − ٦س + ل = ٠ حقيقيان ومتساويان فإن : ل = ...

(٩) إذا كان جذرا المعادلة س^{٢} − ٣س + ك = ٠ مركبان وغير حقيقيان فإن : ك = ...

(١٠) إذا كان جذرا المعادلة س^{٢} − ٢س + جـ = ٠ متساويان فإن : جـ = ...

(١١) إذا كان : ل ، م جذرى المعادلة : $\frac{١}{٣}$س^{٢} − ٤س − ٢ = ٠ فإن : ل + م = ... ، ل م = ...

(١٢) فى المعادلة : ٢س^{٢} − ٣س − ٥ = ٠ مجموع جذريها يساوى .... ، وحاصل ضربهما يساوى ....

(١٣) المعادلة التربيعية فى مجموعة الأعداد المركبة التى جذراها − ت ، ت هى ....

(١٤) المعادلة التربيعية التى جذراها ٣ + ت ، ٣ − ت هى ....

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

(١٥) المعادلة التربيعية التي جذراها ضعف جذرى المعادلة
٢س^{٢} − ٨س + ٥ = ٠ هى ......

(١٦) إشارة الدالة د حيث د(س) = س^{٢} + ٣ تكون
....

(١٧) الدالة د حيث د(س) = ٣ − ٢س تكون موجبة
عندما س ∈ ....

(١٨) الدالة د حيث : − (س − ١)(س + ٢) موجبة
فى الفترة ....

---

(٢) اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

(١) مجموعة حل المعادلة : ٢س^{٢} + ٨ = ٠ فى ح هى
.... ({−٢} ، {٢} ، {±٢} ، ∅)

(٢) مجموعة حل المعادلة : س^{٢} − ٦س + ٩ = ٠ فى
ح هى ....
({−٣} ، {٣} ، {±٣} ، ∅)

(٣) مجموعة حل المعادلة : س^{٢} − ٥س + ٦ = ٠
فى ح هى ....
({٠ ، ٦} ، {−٢ ، ٥} ، {−٣ ، −٢} ،
{٢ ، ٣})

(٤) أبسط صورة للعدد التخيلى ت^{٧٣} هو ......
(−١ ، ١ ، −ت ، ت)

(٥) المعادلة : س^{٢}(س − ١)(س + ١) = ٠ من
الدرجة ....
(الأولى ، الثانية ، الثالثة ، الرابعة)

(٦) إذا كان أحد جذرى المعادلة
٢س^{٢} − (م + ٢) س + ٣ = ٠
معكوساً جمعياً للآخر فإن : م = ...
(٣ ، ٢ ، −٢ ، −٣)

(٧) إذا كان أحد جذرى المعادلة
أس^{٢} + ٢س + ٥ = ٠ معكوساً ضربياً للآخر فإن أ
تساوى .....
(−٥ ، −٢ ، ٢ ، ٥)

(٨) إذا كان مجموع جذرى المعادلة
س^{٢} − أس + ٦ = ٠ يساوى ٥ فإن أ = ...
(−٦ ، −٥ ، ٥ ، ٦)

(٩) حاصل ضرب جذرى المعادلة س (٢س − ٣) = ٧
يساوى ....
($\frac{-٣}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{-٧}{٢}$ ، $\frac{٧}{٢}$)

(١٠) إذا كان : ل ، ٢ − ل هما جذرا المعادلة :
س^{٢} + كس + ٦ = ٠ فإن : ك = ...
(١ ، ٢ ، ٣ ، ٥)

(١١) المعادلة التربيعية التى جذراها ٢ − ٣ت ،
٢ + ٣ت هى ....
(س^{٢} + ٤س + ١٣ = ٠ ،
س^{٢} − ٤س + ١٣ = ٠ ،
س^{٢} + ٤س − ١٣ = ٠ ،
س^{٢} − ٤س − ١٣ = ٠)

---

(٣) أجب عما يأتى :

(١) **ضع** العدد المركب (٢٦ − ٤ت) − (٩ − ٢٠ت)
فى أبسط صورة مع توضيح ذلك على خط الأعداد .

---

(٢) **أثبت أن** جذرى المعادلة :
س^{٢} − ٥س + ٣ = ٠ حقيقيان مختلفان ، ثم **أوجد**
مجموعة الحل فى ح مقرباً الناتج لرقم عشرى واحد .

---

(٣) إذا كانت د : ح ⟵ ح حيث
د(س) = − س^{٢} + ٨س − ١٥
أولاً : **ارسم** منحنى الدالة فى الفترة [١ ، ٧]
ثانياً : **عين** من الرسم إشارة هذه الدالة .

---

(٤) إذا كان : س = ٣ + ٢ت ، ص = $\frac{٤ - ٢ت}{١ - ت}$
فأوجد س + ص فى صورة عدد مركب .

---

(٥) **أوجد** فى ح مجموعة حل المتباينة :
س (س + ١) − ٢ ⩽ ٠

---

(٦) إذا كان : $\frac{٢}{ل}$ ، $\frac{٢}{م}$ هما جذرا المعادلة
٤س^{٢} + ٣س − ٢ = ٠ **فكون** المعادلة التربيعية التى
جذراها ل ، م

---

(٧) قطعة أرض على شكل مستطيل بعداه ٦ ، ٩ من الأمتار ،
يراد مساحة هذه القطعة وذلك بزيادة طول كل بعد من أبعادها
بنفس المقدار . **أوجد** المقدار المضاف .

---

(٨) **أوجد** شدة التيار الكهربى المار فى مقاومتين متصلتين
على التوازى فى دائرة كهربائية مغلقة . إذا كانت شدة التيار فى
المقاومة الأولى (٤ − ٢ت) أمبير وفى المقاومة الثانية
$\frac{٦ + ٣ت}{٢ + ت}$ أمبير (علماً بأن شدة التيار الكلية تساوى
مجموع شدتى التيار المار فى المقاومتين)

---

(٩) فى الفترة من عام ١٩٩٠ إلى ٢٠١٠ كان أنتاج أحد
مناجم الذهب مقدراً بالألف أوقيه يتحدد بالدالة د :
د(ن) = ٢ن^{٢} − ٩٦ن + ٤٨٠ حيث ن عدد السنوات
، د(ن) إنتاج الذهب .

(١) **ابحث** إشارة دالة الإنتاج د
(٢) **اوجد** إنتاج منجم الذهب مقدراً بالألف أوقية فى كل من
العامين ١٩٩٠ ، ٢٠٠٥
(٣) **فى أى** عام كان إنتاج المنجم مساوياً ٢٠١٦ ألف
أوقية ؟

---

(١٠) يقدر عدد سكان جمهورية مصر العربية عام ٢٠١٣
بالعلاقة : ع = ن^{٢} + ١,٢ ن + ٩١ حيث ع عدد
السكان بالمليون ، ن عدد السنوات .
(أ) **كم** كان عدد السكان عام ٢٠١٣ ؟
(ب) **قدر** عدد السكان عام ٢٠٣٣
(جـ) **قدر** عدد السنوات التي يبلغ عدد السكان فيها ٢٠٣
ملايين .

---

(١١) إذا كانت شدة التيار الكهربي الكلية المار في مقاومتين
متصلتين على التوازي في دائرة كهربائية مغلقة ، تساوي شدة
(٦ + ٤ت) أمبير ، وكانت شدة التيار المار في إحداهما
$\frac{١٧}{٤ - ت}$ أمبير ، فأوجد شدة التيار المار في المقاومة الأخرى .

منتدى توجيه الرياضيات
أ / علاء إدوارد

الوحدة الثانية :

حساب المثلثات

الدرس الأول : الزاوية الموجهة

الدرس الثاني : القياس الستيني والقياس الدائري لزاوية

الدرس الثالث : الدوال المثلثية

الدرس الرابع : الزوايا المنتسبة

الدرس الخامس : التمثيل البياني للدوال المثلثية

الدرس السادس : إيجاد قياس زاوية بمعلومية إحدى نسبها المثلثية

الدرس الأول
الزاوية الموجهة

سبق لنا أثناء دراستنا في التعليم الأساسي تعريف الزاوية على أنها اتحاد شعاعين لهما نقطة بداية واحدة تسمى برأس الزاوية والشعاعان هما ضلعان الزاوية وذلك دون التعرض لاتجاه الزاوية أو قياسها من حيث كونها موجبة أو سالبة والآن نتعرض لاتجاه الزاوية وقياسها الموجب والسالب .

فإذا راعينا ترتيب الشعاعين المكونين للزاوية فإننا نحصل على الزوج المرتب (و→أ ، و→ب) حيث العنصر الأول و→أ الضلع الابتدائي والعنصر الثاني و→ب الضلع النهائي نقطة و رأس الزاوية

بينما الزوج المرتب (و→ب ، و→أ) حيث العنصر الأول و→ب الضلع الابتدائي والعنصر الثاني و→أ الضلع النهائي

ويلاحظ هنا أن : (و→أ ، و→ب) ≠ (و→ب ، و→أ)

وللتمييز بينهما فإن :

(و→أ ، و→ب) تسمى ∠أ و ب الموجهة .

(و→ب ، و→أ) تسمى ∠ب و أ الموجهة .

تعريف الزاوية الموجهة :

تعرف الزاوية الموجهة بأنها زوج مرتب من شعاعين هما ضلعا الزاوية لهما نقطة بداية واحدة هي رأس الزاوية .

القياس الموجب والقياس السالب للزاوية الموجهة :

(أ) القياس الموجب للزاوية الموجهة :

يكون لزاوية موجهة قياس موجب إذا كان الاتجاه من الضلع الابتدائي إلى الضلع النهائي عكس اتجاه حركة عقرب الساعة

فمثلاً : ق(∠أ و ب) = ٣٠°

، ق(∠أ و جـ) = ٩٠°

(ب) القياس السالب للزاوية الموجهة :

يكون لزاوية موجهة قياس سالب إذا كان الاتجاه من الضلع الابتدائي إلى الضلع النهائي مع اتجاه حركة عقرب الساعة

فمثلاً : ق(∠أ و د) = −٦٠°

ملاحظة :

لكل زاوية موجهة قياسان أحدهما موجب والآخر سالب .

بحيث يكون مجموع القيمتين المطلقتين للقياسين = ٣٦٠°

أي أن :

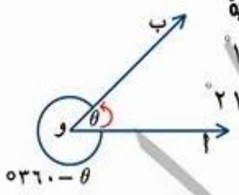
| القياس الموجب للزاوية الموجهة | + | القياس السالب للزاوية الموجهة | = ٣٦٠°

وبصفة عامة فإن :

(١) إذا كان القياس الموجب للزاوية الموجهة = θ

فإن القياس السالب لنفس الزاوية = θ − ٣٦٠°

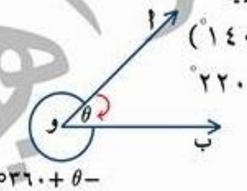
فمثلاً : القياس السالب للزاوية الموجهة التي قياسها ١٥٠° = ١٥٠° − ٣٦٠° = −٢١٠°



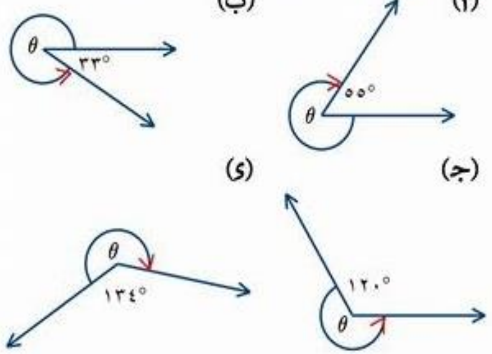
(٢) إذا كان القياس السالب للزاوية الموجهة = −θ

فإن القياس الموجب لنفس الزاوية = −θ + ٣٦٠°

فمثلاً : القياس الموجب للزاوية الموجهة التي قياسها (−١٤٠°) = −١٤٠° + ٣٦٠° = ٢٢٠°



مثال ١ : أوجد قياسات الزاوية الموجهة θ المشار إليها في كل شكل من الأشكال الآتية :



الحـــل

(أ) اتجاه السهم مع اتجاه حركة عقارب الساعة

∴ قياس الزاوية سالب

∴ θ = ٥٥° − ٣٦٠° = −٣٠٥°

(ب) ∵ اتجاه السهم عكس اتجاه حركة عقارب الساعة

∴ قياس الزاوية موجب

∴ θ = −٣٣° + ٣٦٠° = ٢٢٧°

(جـ) ∵ اتجاه السهم عكس اتجاه حركة عقارب الساعة

∴ قياس الزاوية موجب

∴ θ = −١٢٥° + ٣٦٠° = ٢٣٥°

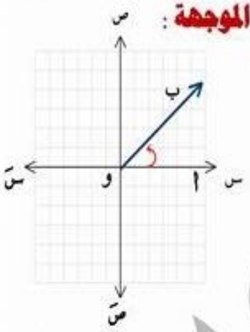
(د) ∵ اتجاه السهم مع اتجاه حركة عقارب الساعة

∴ قياس الزاوية سالب

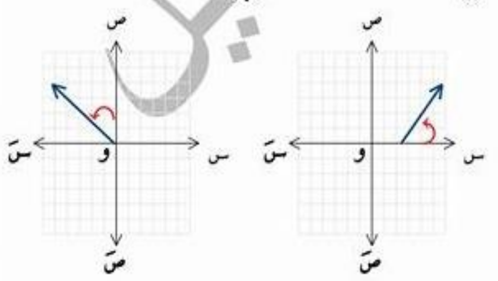
∴ θ = ١٣٤° − ٣٦٠° = −٢٢٦°

الوضع القياسي للزاوية الموجهة :

تكون الزاوية في وضعها القياسي إذا كان رأسها هو نقطة الأصل لنظام إحداثي متعامد وضلعها الابتدائي هو الجزء الموجب لمحور السينات .



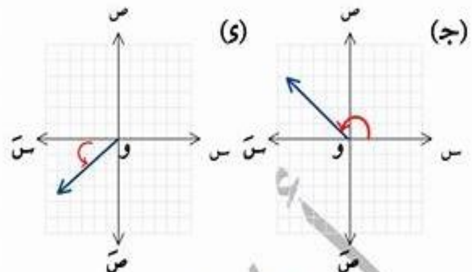
مثال ٢ : أي الزوايا الموجهة التالية في وضعها القياسي ؟ فسر إجابتك



بنترى توجيه الرياضيات ----- أ / عادل إدوار

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

(ج) (ء)

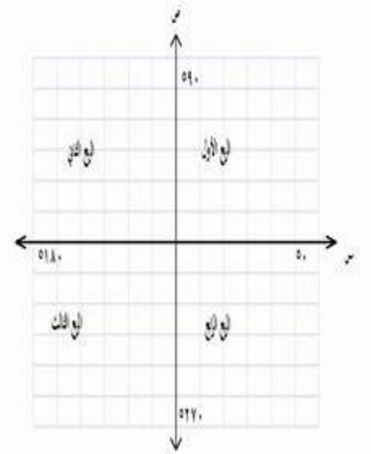


الحل

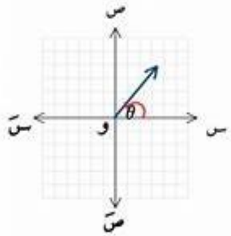
(أ) الزاوية الموجهة ليست في الوضع القياسي
لأن رأس الزاوية ليس نقطة الأصل
(ب) الزاوية الموجهة ليست في الوضع القياسي
لأن الضلع الابتدائي لا يقع على و س
(ج) الزاوية في الوضع القياسي لتحقق الشرطين السابقين .
(ء) الزاوية الموجهة ليست في الوضع القياسي
لأن الضلع الابتدائي لا يقع على و س

موقع الزاوية في المستوى الإحداثي المتعامد :

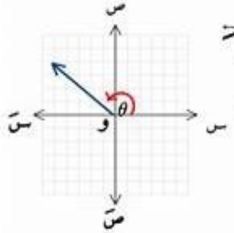
يقسم المستوى الإحداثي المتعامد إلى أربعة أرباع كما في الشكل التالي :



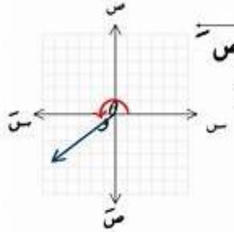
إذا كانت ∠ أ و ب الموجهة في الوضع القياسي والتي قياسها الموجب هو (θ) فإن ضلعها النهائي و ب يمكن أن يقع في أحد الأرباع :



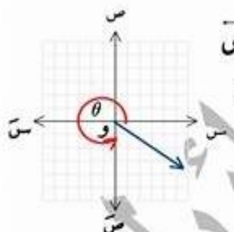
(أ) و ب بين و س و و ص
يقال أن الزاوية تقع في الربع الأول
صفر° < θ < ٩٠°



(ب) و ب بين و ص و و سَ
يقال أن الزاوية تقع في الربع الثاني
٩٠° < θ < ١٨٠°



(ج) و ب بين و سَ و و صَ
يقال أن الزاوية تقع في الربع الثالث
١٨٠° < θ < ٢٧٠°



(ء) و ب بين و صَ و و س
يقال أن الزاوية تقع في الربع الرابع
٢٧٠° < θ < ٣٦٠°

(هـ) إذا وقع الضلع النهائي و ب على أحد محوري الإحداثيات تسمى الزاوية في هذه الحالة بالزاوية الربعية فتكون الزوايا التي قياساتها :
صفر° ، ٩٠° ، ١٨٠° ، ٢٧٠° ، ٣٦٠°
هي زوايا ربعية

بنترى توجيه الرياضيات
أ / عادل إدوار

مثال ٣ : عين الربع الذي تقع فيه كل من الزوايا التي قياساتها كالآتي :
(أ) ٤٨° (ب) ٢١٧° (ج) ١٣٥°
(ء) ٢٩٥° (هـ) ٢٧٠°

الحل

(أ) صفر° < ٤٨° < ٩٠°
فهي تقع في الربع الأول
(ب) ١٨٠° < ٢١٧° < ٢٧٠°
فهي تقع في الربع الثالث
(ج) ٩٠° < ١٣٥° < ١٨٠°
فهي تقع في الربع الثاني
(ء) ٢٧٠° < ٢٩٥° < ٣٦٠°
فهي تقع في الربع الرابع
(هـ) ٢٧٠° زاوية ربعية

مثال ٤ : عين القياس السالب للزاوية ٢٧٥°

الحل

القياس السالب للزاوية ٢٧٥°
= ٢٧٥° – ٣٦٠° = –٨٥°

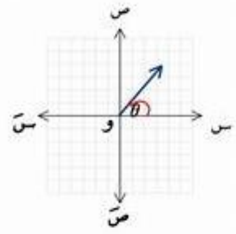
مثال ٥ : عين القياس الموجب للزاوية –٢٣٥°

الحل

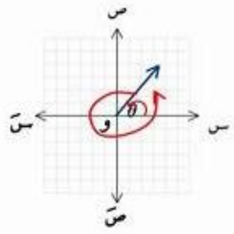
القياس الموجب للزاوية (–٢٣٥°)
= ٣٦٠° – ٢٣٥° = ١٢٥°

الزوايا المتكافئة :

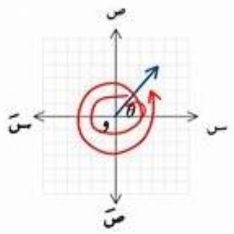
إذا تأملنا الزوايا الموجهة في الوضع القياسي في الأشكال الآتية



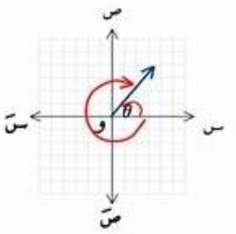
شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)



شكل (٤)

في الأشكال (٢) ، (٣) ، (٤) نلاحظ أن الزاوية (θ) والزاوية المرسومة معها لهما نفس الضلع النهائي

شكل (١) الزاوية التي قياسها θ في الوضع القياسي
شكل (٢) الزاويتان θ ، θ + ٣٦٠° متكافئتان .
شكل (٣) الزاويتان θ ، θ + ٢ × ٣٦٠° متكافئتان .
شكل (٤) الزاويتان θ ، –(٣٦٠° – θ) = θ – ٣٦٠° متكافئتان

مما سبق نستنتج أن :
عند رسم زاوية موجهة قياسها θ في الوضع القياسي فإن جميع الزوايا التي قياساتها :
θ ± ١ × ٣٦٠° أو θ ± ٢ × ٣٦٠°
أو θ ± ٣ × ٣٦٠° أو ....
أو θ ± ن × ٣٦٠°

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

حيث ن ∈ ص يكون لها نفس الضلع النهائي ، وتسمى زوايا متكافئة .

تعريف الزوايا المتكافئة :

يقال لعدة زوايا موجهة في الوضع القياسي إنها متكافئة إذا كان لها جميعاً نفس الضلع النهائي .

وعلى ذلك فإن : لمعرفة موقع الزاوية في المستوى الإحداثي يجب أن تنحصر بين صفر° ، ٣٦٠° فإذا كانت الزاوية أكبر من ٣٦٠° نطرح منها دورة أو دورتين أو أكثر

فعندما تكون الزاوية سالبة نضيف عدد أكبر منها

وعندما تكون الزاوية موجبة نطرح منها عدد أصغر منها

والدورة الواحدة = ٣٦٠°

والدورتان = ٧٢٠° وهكذا ....

مثال ٦ : أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب مشتركين في الضلع النهائي لكل من الزاويتين الآتيتين :

(أ) ١٢٠° (ب) –٢٣٠°

الحل

(أ) زاوية بقياس موجب : ١٢٠° + ٣٦٠° = ٤٨٠°

(بإضافة ٣٦٠°)

زاوية بقياس سالب : ١٢٠° – ٣٦٠° = –٢٤٠°

(بطرح ٣٦٠°)

(ب) زاوية بقياس موجب : –٢٣٠° + ٣٦٠° = ١٣٠°

(بإضافة ٣٦٠°)

زاوية بقياس سالب : –٢٣٠° – ٣٦٠° = –٥٩٠°

(بطرح ٣٦٠°)

مثال ٧ : عين الربع الذي تقع فيه كل زاوية من الزوايا التي قياساتها كالآتي :

(أ) ٥٦° (ب) ٣٢٥°

(ج) ٥٧٠° (ى) ٣٩٠°

الحل

(أ) ∵ صفر° < ٥٦° < ٩٠°

∴ ٥٦° تقع في الربع الأول

(ب) ∵ ٢٧٠° < ٣٢٥° < ٣٦٠°

∴ ٣٢٥° تقع في الربع الرابع

(ج) ∵ ٥٧٠° أكبر من ٣٦٠° ∴ نطرح منها عدد من الدورات الكاملة حتى نصل إلى أقل من ٣٦٠°

∴ ٥٧٠° – ٣٦٠° = ٢١٠°

∵ ١٨٠° < ٢١٠° < ٢٧٠°

∴ ٥٧٠° تقع في الربع الثالث

(ى) ∵ ٣٩٠° أكبر من ٣٦٠° ∴ نطرح منها دورة واحدة

∴ ٣٩٠° – ٣٦٠° = ٣٠°

∵ صفر° < ٣٠° < ٩٠°

∴ ٣٩٠° تقع في الربع الأول

مثال ٨ : عين أصغر قياس موجب لكل زاوية من الزوايا الآتية :

(أ) –٢١٥° (ب) ٤٩٥°

(ج) ٩٣٠° (ى) –١٠٧٠°

الحل

(أ) أصغر قياس موجب = –٢١٥° + ٣٦٠° = ١٣٥°

(ب) أصغر قياس موجب = ٤٩٥° – ٣٦٠° = ١٣٥°

(ج) أصغر قياس موجب =

٩٣٠° – ٢ × ٣٦٠° = ٢١٠°

(ى) أصغر قياس موجب =

–١٠٧٠° + ٣ × ٣٦٠° = ١٠°

بمنتدى توجيه الرياضيات / أ / عادل إدوار

تمارين (١)

(١) أكمل ما يأتي :

(١) تكون الزاوية الموجهة في وضع قياسي إذا كان ....

(٢) يقال للزوايا الموجهة في الوضع القياسي إنها متكافئة إذا كان ....

(٣) إذا وقع الضلع النهائي للزاوية الموجهة على أحد محوري الإحداثيات تسمى الزاوية ....

(٤) إذا كان θ قياس زاوية موجهة في الوضع القياسي ، ن ∈ ص فإن الزوايا التي قياساتها (θ ± ن × ٣٦٠°) تسمى بالزوايا ....

(٥) تكون الزاوية موجبة إذا كان دوران الزاوية .... وتكون سالبة إذا كان دوران الزاوية ....

(٦) أصغر قياس موجب للزاوية التي قياسها ٥٣٠° هو ......

(٧) الزاوية التي قياسها ٩٣٠° تقع في الربع ....

(٨) أصغر قياس موجب للزاوية التي قياسها –٦٩٠° هو ....

---

(٢) اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

(١) الزاوية التي قياسها ٦٠° في الوضع القياسي تكافئ الزاوية التي قياسها ....

(١٢٠° ، ٢٤٠° ، ٣٠٠° ، ٤٢٠°)

(٢) الزاوية التي قياسها ٥٨٥° تكافئ في الوضع القياسي الزاوية التي قياسها ....

(١٣٠° ، –١٣٠° ، ٢٣٥° ، –٢٣٠°)

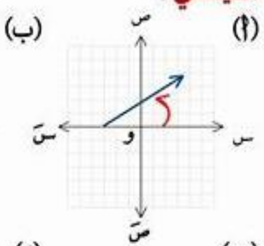
(٣) الزاوية التي قياسها (–٨٥٠°) تقع في الربع ....

(الأول ، الثاني ، الثالث ، الرابع)

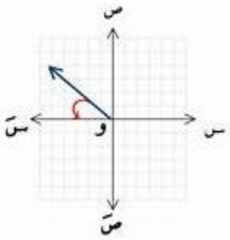
---

(٣) أي من الزوايا الموجهة الآتية في الوضع القياسي :

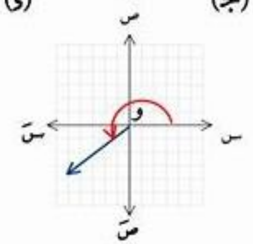
(أ)



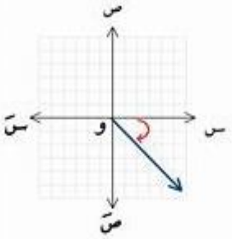
(ب)



(ج)

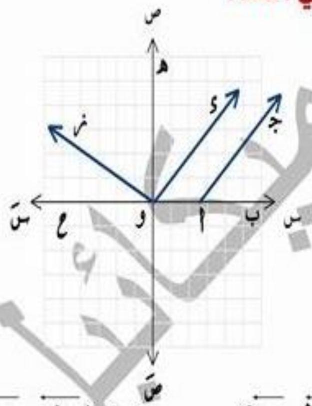


(ى)



---

(٤) في الشكل التالي : أيا من الأزواج المرتبة الآتية تعبر عن زاوية موجهة في وضعها القياسي ؟ لماذا ؟



(أ) ($\overrightarrow{\text{وأ}}$ ، $\overrightarrow{\text{وى}}$) (ب) ($\overrightarrow{\text{ون}}$ ، $\overrightarrow{\text{وج}}$)

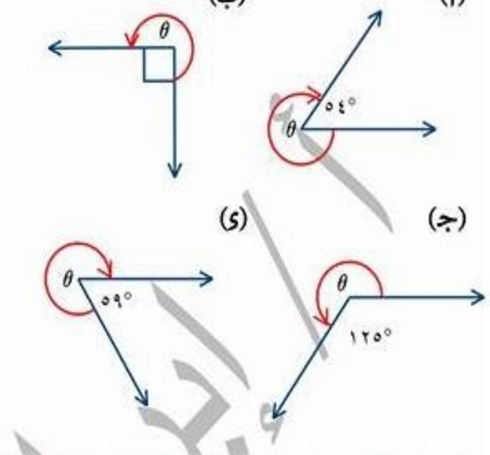
(ج) ($\overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{أج}}$) (ى) ($\overrightarrow{\text{وهـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{وى}}$)

(هـ) ($\overrightarrow{\text{وى}}$ ، $\overrightarrow{\text{ون}}$) (و) ($\overrightarrow{\text{وب}}$ ، $\overrightarrow{\text{ون}}$)

---

(٥) **أوجد قياس الزاوية الموجهة θ المشار إليها في كل شكل من الأشكال التالية :**

(أ) (ب) (ج) (د)



(٦) **عين الربع الذي تقع فيه كل من الزوايا التي قياساتها كالآتي :**

(أ) ٢٤° (ب) ٢١٥° (ج) −٤٠°
(د) −٢٢٠° (هـ) ٦٤٠° (و) ١٦٦٦°

(٧) **ضع كلاً من الزوايا الآتية في الوضع القياسي موضحاً ذلك بالرسم :**

(أ) ٣٢° (ب) ١٤٠° (ج) −٨٠°
(د) −١١٠° (هـ) −٣١٥°

(٨) **عين القياسات السالبة لكل زاوية من الزوايا الآتية :**

(أ) ٨٣° (ب) ١٣٦° (ج) ٩٠°
(د) ٢٦٤° (هـ) ٩٦٤° (و) ١٠٧٠°

(٩) **عين أصغر قياس موجب لكل زاوية من الزوايا الآتية :**

(أ) −١٨٣° (ب) −٢١٧°
(ج) −٣١٥° (د) −٥٧٠°

(١٠) **أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب مشتركتين في الضلع النهائي لكل من الزوايا التي قياساتها كالآتي:**

(أ) ٤٠° (ب) ١٥٠° (ج) −١٢٥°
(د) −٢٤٠° (هـ) −١٨٠°

(١١) **يدور أحد لاعبي الجمباز على جهاز الألعاب بزاوية قياسها ٢٠٠° ارسم هذه الزاوية في الوضع القياسي**

(١٢) **اكتشف الخطأ : اكتب قياس أصغر زاوية بقياس موجب وزاوية أخرى بقياس سالب تشتركان مع الضلع النهائي للزاوية (−١٣٥°)**

إجابة كريم

أصغر زاوية بقياس موجب =
−١٣٥° + ١٨٠° = ٤٥°
أصغر زاوية بقياس سالب =
−١٣٥° − ١٨٠° = −٣١٥°

إجابة زياد

أصغر زاوية بقياس موجب =
−١٣٥° + ٣٦٠° = ٢٢٥°
أصغر زاوية بقياس سالب =
−١٣٥° − ٣٦٠° = −٤٩٥°

أي الإجابتين صحيح ؟ فسر إجابتك .

بشرى توجيه الرياضيات
أ / عادل إدوار

الدرس الثاني
القياس الستيني والقياس الدائري لزاوية

لقياس أي زاوية ينبغي وجود زاوية أخرى ثابته ومتفق عليها تعتبر أساساً للقياس تسمى (وحدة قياس الزاوية) ويكون قياس الزاوية هو عدد مرات احتواء هذه الزاوية على وحدة القياس السابقة وسوف نتناول هنا نوعين من وحدات قياس الزوايا هما

اولا : القياس الستينى :

وهو القياس الذي سبق أن تعرفنا عليه في مرحلة التعليم الأساسي وذلك باستخدام المنقلة .

والأساس في هذا القياس هو أننا قسمنا الدائرة إلى ٣٦٠ قوساً متساوية في الطول وعليه تكون أي زاوية مركزية يمر ضلعاها بنهايتي قوس من هذه الأقواس يقال إن قياسها درجة واحدة يرمز لها بالرمز ١° .

كما علمنا أن للدرجة أجزاء أخرى هي الدقيقة ويرمز لها بالرمز ١َ وللدقيقة أجزاء أخرى هي الثانية ويرمز لها بالرمز ١″

ونعلم أن ١° = ٦٠َ = ٦٠″

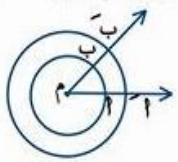
فالزاوية التي قياسها ٧٥ درجة و ١٩ دقيقة و ٣٥ ثانية تكتب بالصورة ٣٥″ ١٩َ ٧٥°

ثانيا : القياس الدائري :

يعتمد هذا القياس على طول القوس من الدائرة الذي تحصره الزاوية المركزية وعلى طول نصف قطر الدائرة .

حقيقة هندسية :

في الدوائر المتحدة المركز النسبة بين طول قوس أي زاوية مركزية وطول نصف قطر دائرتها المناظرة تساوي مقدار ثابت يتوقف على قياس الزاوية التي تحصر هذا القوس .



تعريف

القياس الدائري لزاوية مركزية في دائرة = $\frac{\text{طول القوس الذي تحصره هذه الزاوية}}{\text{طول نصف قطر هذه الدائرة}}$

ويرمز له بالرمز $\theta^{د}$

فإذا رمزنا لطول القوس بالرمز (ل) ولطول نصف القطر بالرمز (نق)

فإن : $\theta^{د} = \frac{ل}{نق}$ ومنها ل = $\theta^{د}$ نق

، نق = $\frac{ل}{\theta^{د}}$

ووحدة قياس الزوايا لهذا النوع من التقدير تسمى الزاوية النصف قطرية وتعرف كما يلي :

تعريف

الزاوية النصف قطرية هي الزاوية المركزية في الدائرة التي تحصر قوساً طوله يساوي طول نصف قطر هذه الدائرة .

وعلى هذا تكون الزاوية التي قياسها ٣^د هي الزاوية المركزية في الدائرة والتي تحصر قوساً من هذه الدائرة طوله يساوي ثلاثة أمثال طول نصف قطر هذه الدائرة .

مثال ١ : دائرة طول نصف قطرها ٨سم **أوجد** لأقرب رقمين عشريين طول القوس إذا كان قياس الزاوية المركزية التي تقابله تساوي $\frac{٥\pi}{١٢}$

الحل

∵ ل = $\theta^{د}$ × نق

∴ ل = $\frac{٥\pi}{١٢}$ × ٨ . ∴ ل ≃ ١٠,٤٧سم

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

مثال ٢ : **أوجد** القياس الدائري للزاوية المركزية التي تحصر قوسًا في دائرة طوله ١٥ سم إذا كان طول نصف قطر الدائرة ١٠ سم

الحل

$\because \theta^{ء} = \frac{\text{ل}}{\text{نق}}$ $\therefore \theta^{ء} = \frac{١٥}{١٠} = ١٫٥^{ء}$

مثال ٣ : **أوجد** طول نصف قطر الدائرة المرسوم بها زاوية مركزية قياسها $\frac{٩}{٨}\pi$ سم وتحصر قوسًا طوله ٢٢٫٥ سم

الحل

$\because \frac{٩}{٨}\pi = ٣٫٥٣٤^{ء}$

، $\text{نق} = \frac{\text{ل}}{\theta^{ء}}$ $\therefore \text{نق} = \frac{٢٢٫٥}{٣٫٥٣٤} = ٦٫٣٧$ سم

العلاقة بين القياس الستيني والقياس الدائري لزاوية :

إذا كان طول نصف قطر الدائرة يساوي الوحدة فإن :

(١) قياس الزاوية بالتقدير الدائري يساوي طول قوسها

(٢) الزاوية المركزية التي قياسها الستيني يساوي ٣٦٠° يكون طول قوسها ٢π أي قياسها الدائري يساوي $٢\pi^{ء}$

(٣) $٢\pi^{ء}$ (راديان) يكافئ ٣٦٠° ومنها $\pi^{ء}$ (راديان) يكافئ ١٨٠°

$١^{ء} = \frac{١٨٠^{\circ}}{\pi} \simeq ٥٧^{\circ}\ ١٦'\ ٢٠''$

إذا كانت لدينا زاوية قياسها بالتقدير الدائري $\theta^{ء}$ وقياسها بالتقدير الستيني س° فإن :

$\frac{\text{س}^{\circ}}{١٨٠^{\circ}} = \frac{\theta^{ء}}{\pi}$ ومنها $\Longleftarrow$

$\theta^{ء} = \text{س}^{\circ} \times \frac{\pi}{١٨٠^{\circ}}$ أو $\text{س}^{\circ} = \theta^{ء} \times \frac{١٨٠^{\circ}}{\pi}$

مثال ٤ : **حول** ٣٠° إلى قياس دائري بدلالة π .

الحل

$\because \theta^{ء} = \text{س}^{\circ} \times \frac{\pi}{١٨٠^{\circ}}$

$\therefore \theta^{ء} = \frac{٣٠^{\circ} \times \pi}{١٨٠^{\circ}} = \frac{\pi}{٦}$

مثال ٥ : **حول** قياس الزاوية $١٫٢^{ء}$ إلى قياس ستيني .

الحل

$\because \text{س}^{\circ} = \theta^{ء} \times \frac{١٨٠^{\circ}}{\pi}$

$\therefore \text{س}^{\circ} = \frac{١٫٢ \times ١٨٠^{\circ}}{\pi}$

$\therefore \text{س}^{\circ} = ٦٨٫٧٥٤٩٣٥٤٢ = ٦٨^{\circ}\ ٤٥'\ ١٨''$

مثال ٦ : **استخدم** حاسبة الجيب في حساب التقدير الستيني لزاوية قياسها $٢٫٥^{ء}$

الحل

$\because \text{س}^{\circ} = \theta^{ء} \times \frac{١٨٠^{\circ}}{\pi}$

$\therefore \text{س}^{\circ} = \frac{٢٫٥ \times ١٨٠^{\circ}}{\pi}$

بعد الضغط على مفتاح التشغيل نضغط على المفاتيح بالترتيب الآتي من جهة اليسار .

2	.	5	×	1	8	0	÷	π	=	̊ ̊ ̊

يظهر على الشاشة $١٤٣^{\circ}\ ١٨'$

$\therefore ٢٫٥^{ء} = ١٤٣^{\circ}\ ١٨'$

بنترى توجيه الرياضيات أ / عادل إدوار

مثال ٧ : دائرة طول نصف قطرها ١٠ سم . **أوجد** طول قوس الدائرة التي تحصره زاوية مركزية قياسها $٢٥^{\circ}\ ٤٦'\ ٥٩''$

الحل

$\because \theta^{ء} = \text{س}^{\circ} \times \frac{\pi}{١٨٠^{\circ}}$

$\therefore \theta^{ء} = ٢٥^{\circ}\ ٤٦'\ ٥٩'' \times \frac{\pi}{١٨٠^{\circ}} \simeq$

$٠٫٤٥^{ء}$

$\because \text{ل} = \theta^{ء} \times \text{نق}$

$\therefore \text{ل} = ٠٫٤٥ \times ١٠ = ٤٫٥$ سم

مثال ٨ : **أوجد** محيط الدائرة التي فيها قوس طوله ١٢ سم ويقابل زاوية محيطية قياسها ٤٥° .

الحل

$\because$ قياس الزاوية المحيطية $= ٤٥^{\circ}$

$\therefore$ قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في نفس القوس

$= ٢ \times ٤٥^{\circ} = ٩٠^{\circ}$

$\therefore \theta^{ء} = ٩٠^{\circ} \times \frac{\pi}{١٨٠^{\circ}} = \frac{\pi}{٢}$

مثال ٩ : زاويتان مجموع قياسهما ٧٠° والفرق بينهما $\frac{\pi}{٥}$ **أوجد** قياسيهما بالتقدير الدائري والستيني .

الحل

بفرض أن قياسي الزاويتين هما س ، ص

، $\text{س}^{\circ} > \text{ص}^{\circ}$

$\therefore \text{س}^{\circ} + \text{ص}^{\circ} = ٧٠^{\circ} \Longleftarrow (١)$

، $\text{س}^{\circ} - \text{ص}^{\circ} = \frac{١}{٥} \times ١٨٠^{\circ} = ٣٦^{\circ} \Longleftarrow (٢)$

بجمع (١) ، (٢)

$\therefore ٢\text{س} = ١٠٦^{\circ}$ $\therefore \text{س}^{\circ} = ٥٣^{\circ}$

$\therefore \text{س}^{ء} = ٥٣^{\circ} \times \frac{\pi}{١٨٠^{\circ}} = ٠٫٩٣^{ء}$

، $\text{ص}^{\circ} = ٧٠^{\circ} - ٥٣^{\circ} = ١٧^{\circ}$

$\therefore \text{ص}^{ء} = ١٧^{\circ} \times \frac{\pi}{١٨٠^{\circ}} = ٠٫٣^{ء}$

مثال ١٠ : **أوجد** القياس الستيني والدائري للزاوية المركزية التي تحصر قوسًا طوله ١٢ سم في دائرة طول نصف قطرها ١٠ سم

الحل

$\because \theta^{ء} = \frac{\text{ل}}{\text{نق}}$ $\therefore \theta^{ء} = \frac{١٢}{١٠} = ١٫٢^{ء}$

$\therefore \text{س}^{\circ} = \frac{١٫٢ \times ١٨٠^{\circ}}{\pi} = ٦٨^{\circ}\ ٤٥'\ ١٨''$

مثال ١١ : يدور أحد لاعبي الجمباز على جهاز الألعاب بزاوية قياسها ٢٠٠° . **ارسم** هذه الزاوية في الوضع القياسي **وأوجد** قياسها بالتقدير الدائري .

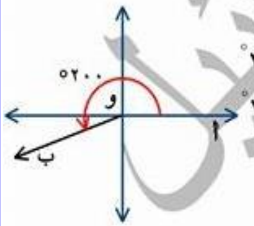
الحل

نفرض أن اللاعب يدور

بزاوية موجهة أ و ب حيث :

$\angle$ أ و ب = ($\overrightarrow{\text{و أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{و ب}}$)

فيكون ق($\angle$ أ و ب) $= ٢٠٠^{\circ}$



$\because ١٨٠^{\circ} < ٢٠٠^{\circ} < ٢٧٠^{\circ}$

$\therefore$ الضلع النهائي للزاوية يقع في الربع الثالث .

$\therefore \theta^{ء} = \frac{٢٠٠ \times \pi}{١٨٠^{\circ}} = ٣٫٤٩^{ء}$

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

مثال ١٢ : حدد الربع الذي تقع فيه الزاوية الموجهة لكل من الزوايا التي قياساتها كالآتي :

(أ) $١٫٢^{د}$ (ب) $\frac{٥\pi}{٨}$

الحل

لإيجاد الربع الذي تقع فيه الزاوية الموجهة نوجد قياسها بالتقدير الستيني .

(أ) ∵ $س^{\circ} = \frac{١٫٢ \times ١٨٠^{\circ}}{\pi} = ١٨'' \quad ٤٥' \quad ٦٨^{\circ}$

∴ الزاوية التي قياسها $١٫٢^{د} = ١٨'' \quad ٤٥' \quad ٦٨^{\circ}$

، الزاوية التي قياسها $١٨'' \quad ٤٥' \quad ٦٨^{\circ}$ تقع في الربع الأول

∴ الزاوية التي قياسها $١٫٢^{د}$ تقع في الربع الأول .

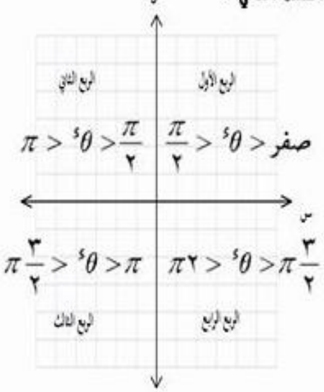
(ب) ∵ $\frac{٥\pi}{٨} = \frac{٥}{٨} \times ١٨٠^{\circ} = ١١٢٫٥^{\circ}$

∵ الزاوية $١١٢٫٥^{\circ}$ تقع في الربع الثاني

∴ الزاوية التي قياسها $\frac{٥\pi}{٨}$ تقع في الربع الثاني

ملاحظة هامة :

يمكن تحديد الربع الذي تقع فيه الزاوية الموجهة المعلوم قياسها الدائري بدلالة π دون التحويل إلى القياس الستيني بملاحظة الشكل التالي :



تمارين (٢)

(١) اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

(١) الزاوية التي قياسها ٦٠° في الوضع القياسي تكافئ الزاوية التي قياسها ....

(١٢٠° ، ٢٤٠° ، ٣٠٠° ، ٤٢٠°)

(٢) الزاوية التي قياسها $\frac{٣١\pi}{٦}$ تقع في الربع ....

(الأول ، الثاني ، الثالث ، الرابع)

(٣) الزاوية التي قياسها $\frac{-٩\pi}{٤}$ تقع في الربع ....

(الأول ، الثاني ، الثالث ، الرابع)

(٤) إذا كان مجموع قياسات زوايا أي مضلع منتظم تساوي ١٨٠° (ن − ٢) حيث ن عدد الأضلاع ، فإن قياس زاوية المخمس المنتظم بالقياس الدائري تساوي ....

($\frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{٧\pi}{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٥}$ ، $\frac{٢\pi}{٣}$)

(٥) الزاوية التي قياسها $\frac{٧\pi}{٣}$ قياسها الستيني يساوي ....

(١٠٥° ، ٢١٠° ، ٤٢٠° ، ٨٤٠°)

(٦) إذا كان القياس الستيني لزاوية هو $٤٨' \quad ٦٨^{\circ}$ فإن قياسها الدائري يساوي ....

($٠٫١٨^{د}$ ، $٠٫٣٦^{د}$ ، $٠٫١٨\pi$ ، $٠٫٣٦\pi$)

(٧) القوس الذي طوله ٥π سم في دائرة طول نصف قطرها ١٥ سم يقابل زاوية مركزية قياسها يساوي ....

(٣٠° ، ٦٠° ، ٩٠° ، ١٨٠°)

(٨) طول القوس في دائرة طول قطرها ٢٤ سم ويقابل زاوية مركزية قياسها ٣٠° يساوي ....

(٢π سم ، ٣π سم ، ٤π سم ، ٥π سم)

(٩) إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث ٧٥° وقياس زاوية أخرى فيه $\frac{\pi}{٤}$ فإن القياس الدائري للزاوية الثالثة يساوي ......

($\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{٥\pi}{١٢}$)

---

(٢) أوجد بدلالة π القياس الدائري للزوايا التي قياسها كالآتي

(أ) ٢٢٥° (ب) ٢٤٠° (جـ) -١٣٥°

(ى) ٣٠٠° (هـ) ٣٩٠° (و) ٧٨٠°

---

(٣) أوجد القياس الدائري للزوايا التي قياساتها كالآتي ، مقرباً الناتج لثلاثة أرقام عشرية :

(أ) $٥٦٫٥^{\circ}$ (ب) $١٨' \quad ٢٥^{\circ}$

(جـ) $٤٨'' \quad ٥٠' \quad ١٦٠^{\circ}$

---

(٤) أوجد القياس الستيني للزوايا التي قياساتها كالآتي ، مقرباً الناتج لأقرب ثانية :

(أ) $٠٫٤٩^{د}$ (ب) $٢٫٢٧^{د}$ (جـ) $٣\frac{١}{٢}^{د}$

---

(٥) إذا كان θ قياس زاوية مركزية في دائرة طول نصف قطرها نق وتحصر قوساً طوله ل :

(أ) إذا كان نق = ٢٠سم ، $\theta = ٢٠'' \quad ١٥' \quad ٧٨^{\circ}$

أوجد : ل (لأقرب جزء من عشرة)

(ب) إذا كان ل = ٢٧٫٣سم ، $\theta = ٢٤'' \quad ٠' \quad ٧٨^{\circ}$

أوجد : نق (لأقرب جزء من عشرة)

---

(٦) زاوية مركزية قياسها ١٥٠° وتحصر قوساً طوله ١١ سم **احسب** طول نصف قطر دائرتها (لأقرب جزء من عشرة)

---

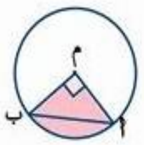
(٧) **أوجد** القياس الدائري والقياس الستيني للزاوية المركزية التي تقابل قوساً طوله ٨٫٧سم في دائرة طول نصف قطرها ٤ سم .

---

(٨) دائرة طول نصف قطرها ٤ سم ، رسمت ∠ أ ب جـ المحيطية التي قياسها ٣٠° **أوجد** طول القوس الأصغر $\overset{\frown}{\text{جـ أ}}$

---

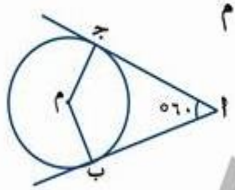
(٩) **في الشكل المقابل :**



إذا كان مساحة Δ م أ ب القائم الزاوية في م = ٣٢سم^{٢} **فأوجد** محيط الشكل المظلل مقرباً الناتج لأقرب رقمين عشريين .

---

(١٠) **في الشكل المقابل :**



$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ مماسان للدائرة م

ق(∠ جـ أ ب) = ٦٠°

، أ ب = ١٢ سم

أوجد لأقرب عدد صحيح طول القوس الأكبر $\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$

---

(١١) $\overline{\text{أ ب}}$ قطر في دائرة طوله ٢٤سم ، رسم الوتر $\overline{\text{أ جـ}}$ بحيث كان ق(∠ ب أ جـ) = ٥٠° **أوجد** طول القوس الأصغر $\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$ مقرباً الناتج لأقرب رقمين عشريين .

---

(١٢) مستقيم يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{٣}$ في الوضع القياسي لدائرة الوحدة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات . **أوجد** معادلة هذا المستقيم .

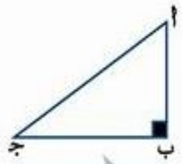
ينتشري توجيه الرياضيات / أ / عادل إدوار

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

الدرس الثالث
الدوال المثلثية

سبق أن درست النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة

وفي △ أ ب جـ القائم الزاوية في ب نجد :



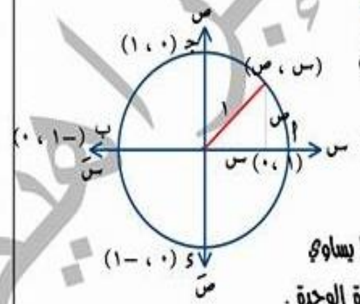
جا جـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$

جتا جـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$

ظا جـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$

دائرة الوحدة

في أي نظام إحداثي متعامد تسمى الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها يساوي وحدة الأطوال بدائرة الوحدة .



- دائرة الوحدة تقطع محور السينات في النقطتين أ (١ ، ٠) ، ب (−١ ، ٠) وتقطع محور الصادات في النقطتين جـ (٠ ، ١) ، د (٠ ، −١) .
- إذا كان (س ، ص) هما إحداثيا أي نقطة على دائرة الوحدة فإن :

س ∈ [−١ ، ١] ، ص ∈ [−١ ، ١]

حيث : س² + ص² = ١

الدوال المثلثية الأساسية للزاوية :

قاعدة

لأي زاوية موجهة في الوضع القياسي وضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة ب (س ، ص) إذا كان قياس الزاوية θ فإن :

- جيب الزاوية θ = الإحداثي الصادي للنقطة ب

أي أن : جا θ = ص

- جيب تمام الزاوية θ = الإحداثي السيني للنقطة ب

أي أن : جتا θ = س

- ظل الزاوية θ = $\frac{\text{الإحداثي الصادي للنقطة ب}}{\text{الإحداثي السيني للنقطة ب}}$

أي أن : ظا θ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$

مقلوبات الدوال الأساسية :

قاعدة

لأي زاوية موجهة في الوضع القياسي وضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة ب (س ، ص) إذا كان قياس الزاوية θ فإن :

(١) قاطع الزاوية θ = قا θ = $\frac{١}{\text{س}}$ = $\frac{١}{\text{جتا } \theta}$

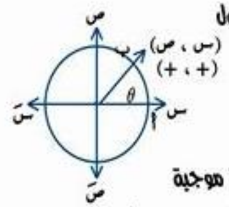
(٢) قاطع تمام الزاوية θ = قتا θ = $\frac{١}{\text{ص}}$ = $\frac{١}{\text{جا } \theta}$

(٣) ظل تمام الزاوية θ = ظتا θ = $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ = $\frac{١}{\text{ظا } \theta}$

بنترى توجيه الرياضيات ---- أ / عادل إدوار

إشارات الدوال المثلثية :

(١) إذا وقع و ب في الربع الأول

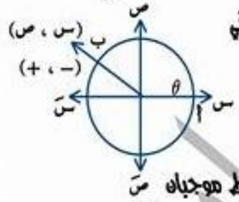


فإن : هـ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

وتكون س > ٠ ، ص > ٠

وعلى ذلك تكون كل الدوال المثلثية موجبة

(٢) إذا وقع و ب في الربع الثاني



فإن : هـ ∈]$\frac{\pi}{٢}$ ، π[

وتكون س < ٠ ، ص > ٠

وعلى ذلك يكون الجيب ومقلوبه فقط موجبان

(٣) إذا وقع و ب في الربع الثالث

فإن : هـ ∈]π ، $\frac{٣\pi}{٢}$[

وتكون س < ٠ ، ص < ٠

وعلى ذلك يكون الظل ومقلوبه فقط موجبان

(٤) إذا وقع و ب في الربع الرابع

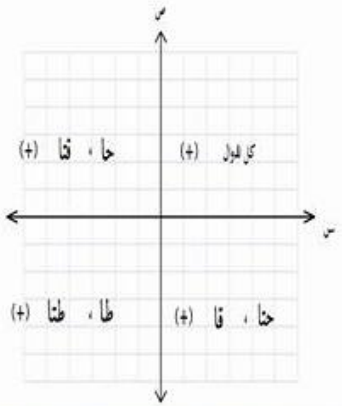
فإن : هـ ∈]$\frac{٣\pi}{٢}$ ، ٢π[

وتكون س > ٠ ، ص < ٠

وعلى ذلك يكون جيب التمام ومقلوبه فقط موجبان .

ويمكن تلخيص إشارات الدوال المثلثية جميعها في الجدول التالي

الربع الذي يقع فيه الضلع النهائي للزاوية	الفترة التي يقع فيها قياس الزاوية	إشارات الدوال المثلثية: جا ، قتا	جتا ، قا	ظا ، ظتا
الأول	]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[	+	+	+
الثاني	]$\frac{\pi}{٢}$ ، π[	+	−	−
الثالث	]π ، $\frac{٣\pi}{٢}$[	−	−	+
الرابع	]$\frac{٣\pi}{٢}$ ، ٢π[	−	+	−



مثال ١ : عين إشارة كل من النسب المثلثية الآتية :

(أ) جا ١٣٠° (ب) ظا ٣١٥°

(جـ) جتا ٦٥٠° (ى) قا (−٣٠°)

الحل

(أ) الزاوية التي قياسها ١٣٠° تقع في الربع الثاني

∴ جا ١٣٠° موجبة

(ب) الزاوية التي قياسها ٣١٥° تقع في الربع الرابع

∴ ظا ٣١٥° سالبة

(جـ) الزاوية التي قياسها ٦٥٠° = ٦٥٠° − ٣٦٠° = ٢٩٠°

∴ الزاوية التي قياسها ٦٥٠° تقع في الربع الرابع

∴ جتا ٦٥٠° موجبة

(ى) الزاوية التي قياسها (−٣٠°) = −٣٠° + ٣٦٠° = ٣٣٠°

∴ الزاوية التي قياسها (−٣٠°) تقع في الربع الرابع

∴ قا (−٣٠°) موجبة

مثال ٢ : إذا كانت ∠ أ و ب في وضعها القياسي وضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة ب وقياسها θ **أوجد** النسب المثلثية الأساسية للزاوية أ و ب إذا كان إحداثيا النقطة ب هي :

(أ) (٠ ، −١) (ب) $\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\text{ ، ص}\right)$ (جـ) (−س ، س)

حيث س > ٠ ، ص > ٠

الحل

(أ) حتا θ = ٠ ، حا θ = −١ ،

ظا $\theta = \frac{-١}{٠}$ (غير معرف)

(ب) ∵ س² + ص² = ١ دائرة الوحدة

بالتعويض عن س = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

∴ $\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢}$ + ص² = ١ فيكون

ص² = ١ − $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$

∴ ص = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ > ٠ أو ص = −$\frac{١}{\sqrt{٢}}$ < ٠ مرفوض

∴ حتا $\theta = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، حا $\theta = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ظا θ = ١

(جـ) (−س)² + (س)² = ١ ∴ ٢س² = ١

∴ س = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ لأن ، س > ٠

∴ حتا $\theta = -\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، حا $\theta = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ،

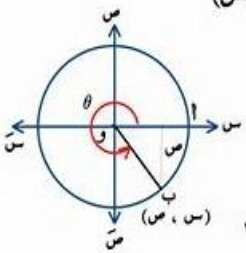
ظا θ = −١

مثال ٣ : إذا كانت ٢٧٠° < θ < ٣٦٠° وكان حا $\theta = \frac{-٥}{١٣}$ **أوجد** جميع النسب الأساسية للزاوية التي قياسها θ

الحل

نفرض أن ق(∠أ و ب) = θ حيث θ تقع في الربع الرابع

وأن إحداثيي النقطة ب (س ، ص)



∵ ص = حا $\theta = -\frac{٥}{١٣}$

، س = حتا θ

حيث حتا θ > ٠

∴ س² + ص² = ١

∴ حتا² θ + $\left(\frac{-٥}{١٣}\right)^{٢}$ = ١

∴ حتا² θ = ١ − $\frac{٢٥}{١٦٩}$

∴ حتا² $\theta = \frac{١٤٤}{١٦٩}$

حتا $\theta = \frac{١٢}{١٣}$ ، أو حتا $\theta = -\frac{١٢}{١٣}$

∴ حتا $\theta = \frac{١٢}{١٣}$ ، ظا $\theta = \frac{-١٢}{٥}$

مثال ٤ : إذا كانت الزاوية التي قياسها θ والمرسومة في الوضع القياسي ، وضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة ب $\left(-\frac{٣}{٥}\text{ ، }\frac{٤}{٥}\right)$ **فأوجد** جميع النسب المثلثية للزاوية θ .

الحل

حا $\theta = \frac{٤}{٥}$ حتا $\theta = -\frac{٣}{٥}$

ظا $\theta = -\frac{٤}{٣}$ قتا $\theta = \frac{٥}{٤}$

قا $\theta = -\frac{٥}{٣}$ ظتا $\theta = -\frac{٣}{٤}$

منتدى توجيه الرياضيات

أ / عادل إدوار

الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة :

أولاً : الجدول الآتي يبين بعض النسب المثلثية لبعض الزوايا السابق دراستها في مرحلة التعليم الأساسي

الزاوية / النسبة	٣٠°	٦٠°	٤٥°
حا	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$
حتا	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$
ظا	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	$\sqrt{٣}$	١

ثانياً : الجدول التالي يبين النسب المثلثية للزوايا الربعية :

الزاوية / النسبة	٠° أو ٣٦٠°	٩٠°	١٨٠°	٢٧٠°
حا	٠	١	٠	−١
حتا	١	٠	−١	٠
ظا	٠	غير معرف	٠	غير معرف
	(١ ، ٠)	(٠ ، ١)	(−١ ، ٠)	(٠ ، −١)

مثال ٥ : **أثبت بدون استخدام الآلة الحاسبة أن :**

حا ٦٠° حتا ٣٠° − حتا ٦٠° حا ٣٠° = حا² $\frac{\pi}{٤}$

الحل

الطرف الأيمن = $\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}$ =

$\frac{٣}{٤} - \frac{١}{٤} = \frac{١}{٢}$ ⟸ (١)

الطرف الأيسر = حا² $\frac{\pi}{٤}$ = حا² ٤٥° = $\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢}$ =

= $\frac{١}{٢}$ ⟸ (٢)

من (١) ، (٢) ∴ الطرفان متساويان

مثال ٦ : **أوجد قيمة** :

حا ٣٠° حتا ٦٠° + حا ٩٠° − ظا ٤٥°

الحل

المقدار = $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}$ + ١ − ١ = $\frac{١}{٤}$

مثال ٧ : إذا كان :

س قا ٦٠° = $\frac{\text{جا}^{٢}\,٦٠° + \text{جا}^{٢}\,٣٠° - \text{جتا}\,٢٧٠°}{\text{جا}\,٦٠°\ \text{ظا}\,٣٠° - \text{جتا}\,٠°}$

فما قيمة س .

الحل

س × ٢ = $\frac{\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} + \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢} - ٠}{\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \sqrt{٣} - ١}$ =

$\frac{\frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤}}{\frac{١}{٢} - ١}$ = ٢ ∴ س = ١

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

تمارين (٣)

(١) اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

(١) إذا كان θ قياس زاوية في الوضع القياسي وضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $(\frac{١}{٢} ، \frac{\sqrt{٣}}{٢})$ فإن : حا θ تساوي ....

($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$)

(٢) إذا كانت حا$\theta = \frac{١}{٢}$ حيث θ قياس زاوية حادة فإن θ تساوي ....

(٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠° ، ٩٠°)

(٣) إذا كانت حا θ = −١ ، حتا θ = ٠ فإن θ تساوي ....

($\frac{\pi}{٢}$ ، π ، $\frac{٣\pi}{٢}$ ، ٢π)

(٤) إذا كانت قتا θ = ٢ حيث θ قياس زاوية حادة فإن θ تساوي ....

(١٥° ، ٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠°)

(٥) إذا كانت جتا $\theta = \frac{١}{٢}$ ، جا $\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ فإن θ تساوي ....

($\frac{٢\pi}{٣}$ ، $\frac{٥\pi}{٦}$ ، $\frac{٥\pi}{٣}$ ، $\frac{١١\pi}{٦}$)

(٦) إذا كانت ظا θ = ١ حيث θ قياس زاوية حادة فإن θ تساوي ....

(١٠° ، ٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠°)

(٧) ظا ٤٥° + ظتا ٤٥° − قا ٦٠° تساوي ....

(صفر ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، ١)

(٨) إذا كانت جتا $\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ حيث θ قياس زاوية حادة فإن حا θ تساوي ....

($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$)

(٢) أوجد جميع الدوال المثلثية لزاوية قياسها θ المرسومة في الوضع القياسي ، وضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة :

(أ) $(\frac{٢}{٣} ، \frac{\sqrt{٥}}{٣})$

(ب) $(\frac{\sqrt{٢}}{٢} ، -\frac{\sqrt{٢}}{٢})$

(جـ) $(-\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{١}{٢})$

(د) $(-\frac{٣}{٥} ، -\frac{٤}{٥})$

(٣) اكتب إشارات النسب المثلثية الآتية :

(أ) حا ٢٤٠° (ب) ظا ٣٦٥°

(جـ) قتا ٤١٠° (د) ظتا $\frac{٩\pi}{٤}$

(هـ) قا $\frac{٩\pi}{٤}$ (و) ظا $\frac{-٢٠\pi}{٩}$

(٤) إذا كان θ هو قياس زاوية موجهة في الوضع القياسي ، وضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة المعطاه **فأوجد** جميع الدوال المثلثية لهذه الزاوية في الحالات الآتية :

(أ) (٣أ ، −٤أ) حيث أ > ٠

(ب) ($\frac{٣}{٢}$أ ، −٢أ) حيث $\frac{٣\pi}{٢} < \theta < ٢\pi$

---

(٥) أوجد قيمة ما يأتي :

(أ) حا $\frac{\pi}{٢}$ × جتا صفر + جا $\frac{٣\pi}{٢}$ × جا $\frac{\pi}{٢}$

(ب) ظا² ٣٠° + ٢ حا² ٤٥° + حتا² ٩٠°

(٦) أثبت صحة المتساويات الآتية :

(١) حتا ٦٠° = ٢ حتا² ٣٠° − ١

(٢) حا ٩٠° = ٢ حا ٤٥° حتا ٤٥°

(٣) حتا ٩٠° = حتا² ٤٥° − حا² ٤٥°

(٧) أوجد قيمة كل مما يأتي :

(١) ظا² ٣٠° + حا² ٤٥° + حتا² ٩٠°

(٢) قا $\frac{\pi}{٦}$ ظا $\frac{\pi}{٣}$ − ظتا $\frac{\pi}{٣}$ جتا $\frac{\pi}{٦}$

(٣) جا ٩٠° + ٢جتا ١٨٠° + ٣جتا ٢٧٠° − ٤جتا ٦٠°

(٨) إذا كانت θ زاوية في وضعها القياسي في دائرة الوحدة **أوجد** جميع الدوال المثلثية للزاوية أ و ب إذا كان إحداثي نقطة ب هي :

(أ) $(\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، ص)$

(ب) (س ، −٠,٦)

(حـ) (−س ، س)

(د) (−١ ، ٠)

حيث س ، ص ∈ ح+

(٩) إذا كانت θ قياس زاوية مرسومة في الوضع القياسي ، حيث ظتا θ = −١ ، قتا θ = $\sqrt{٢}$.

هل من الممكن أن يكون $\theta = \frac{٣\pi}{٤}$ ؟ فسر إجابتك .

(١٠) إذا كانت θ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[، حتا $\theta = \frac{٣}{٥}$

فأوجد قيمة : قتا θ حا θ − ظا θ قتا θ

(١١) اكتشف الخطأ :

طلب المعلم من طلاب الفصل إيجاد ناتج ٢ حا ٤٥°

إجابة كريم

٢ حا ٤٥° = حا ٢ × ٤٥°

= حا ٩٠° = ١

إجابة أحمد

٢ حا ٤٥° = ٢ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = $\frac{٢}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$ = $\sqrt{٢}$

(١٢) إذا كانت : θ ∈]$\frac{٣\pi}{٢}$ ، ٢π[،

حا $\theta = \frac{-٢٤}{٢٥}$ **فأوجد** :

(١) $\frac{\text{ظتا}\theta - \text{قتا}\theta}{\text{ظا}\theta - \text{قا}\theta}$

(٢) حتا θ − قتا θ ظا θ

بنتري توجيه الرياضيات
أ / عادل إدوار
أ/ إبراهيم ميكائيل

الدرس الرابع
الزوايا المنتسبة

تعريف

الزاويتين المنتسبتين : هما زاويتان الفرق بين قياسيهما أو مجموع قياسيهما يساوي عدداً صحيحاً من القوائم .

(١) الدوال المثلثية لأي زاويتين قياسيهما

θ ، $(١٨٠^\circ - \theta)$

جا $(١٨٠^\circ - \theta)$ = جا θ ،

قتا $(١٨٠^\circ - \theta)$ = قتا θ

جتا $(١٨٠^\circ - \theta)$ = − جتا θ

قا $(١٨٠^\circ - \theta)$ = − قا θ

ظا $(١٨٠^\circ - \theta)$ = − ظا θ

ظتا $(١٨٠^\circ - \theta)$ = − ظتا θ

(٢) الدوال المثلثية لأي زاويتين قياسيهما

θ ، $(١٨٠^\circ + \theta)$

جا $(١٨٠^\circ + \theta)$ = − جا θ

قتا $(١٨٠^\circ + \theta)$ = − قتا θ

جتا $(١٨٠^\circ + \theta)$ = − جتا θ

قا $(١٨٠^\circ + \theta)$ = − قا θ

ظا $(١٨٠^\circ + \theta)$ = ظا θ

ظتا $(١٨٠^\circ + \theta)$ = ظتا θ

(٣) الدوال المثلثية لأي زاويتين قياسيهما

θ ، $(٣٦٠^\circ - \theta)$

جا $(٣٦٠^\circ - \theta)$ = − جا θ

قتا $(٣٦٠^\circ - \theta)$ = − قتا θ

جتا $(٣٦٠^\circ - \theta)$ = جتا θ

قا $(٣٦٠^\circ - \theta)$ = قا θ

ظا $(٣٦٠^\circ - \theta)$ = − ظا θ

ظتا $(٣٦٠^\circ - \theta)$ = − ظتا θ

(٤) الدوال المثلثية لأي زاويتين قياسيهما

θ ، $(٩٠^\circ - \theta)$

جا $(٩٠^\circ - \theta)$ = جتا θ

قتا $(٩٠^\circ - \theta)$ = قا θ

جتا $(٩٠^\circ - \theta)$ = جا θ

قا $(٩٠^\circ - \theta)$ = قتا θ

ظا $(٩٠^\circ - \theta)$ = ظتا θ

ظتا $(٩٠^\circ - \theta)$ = ظا θ

(٥) الدوال المثلثية لأي زاويتين قياسيهما

θ ، $(٩٠^\circ + \theta)$

جا $(٩٠^\circ + \theta)$ = جتا θ ،

قتا $(٩٠^\circ + \theta)$ = قا θ

جتا $(٩٠^\circ + \theta)$ = − جا θ

قا $(٩٠^\circ + \theta)$ = − قتا θ

ظا $(٩٠^\circ + \theta)$ = − ظتا θ

ظتا $(٩٠^\circ + \theta)$ = − ظا θ

(٦) الدوال المثلثية لأي زاويتين قياسيهما

θ ، $(٢٧٠^\circ - \theta)$

جا $(٢٧٠^\circ - \theta)$ = − جتا θ ،

قتا $(٢٧٠^\circ - \theta)$ = − قا θ

جتا $(٢٧٠^\circ - \theta)$ = − جا θ

قا $(٢٧٠^\circ - \theta)$ = − قتا θ

ظا $(٢٧٠^\circ - \theta)$ = ظتا θ

ظتا $(٢٧٠^\circ - \theta)$ = ظا θ

(٧) الدوال المثلثية لأي زاويتين قياسيهما

θ ، $(٢٧٠^\circ + \theta)$

جا $(٢٧٠^\circ + \theta)$ = − جتا θ ،

قتا $(٢٧٠^\circ + \theta)$ = − قا θ

جتا $(٢٧٠^\circ + \theta)$ = جا θ

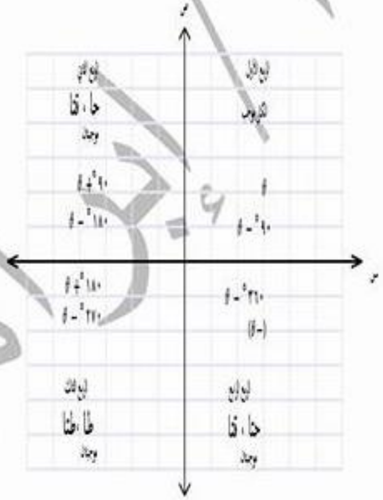
قا $(٢٧٠^\circ + \theta)$ = قتا θ

ظا $(٢٧٠^\circ + \theta)$ = − ظتا θ

ظتا $(٢٧٠^\circ + \theta)$ = − ظا θ

ملاحظات هامة :

(١) نحدد إشارة الدالة المثلثية حسب الربع الذي تقع فيه الزاوية المعطاه كما بالشكل التالي :



(٢) الزوايا التي قياسها θ ، $(١٨٠^\circ - \theta)$ ، $(١٨٠^\circ + \theta)$ ، $(٣٦٠^\circ - \theta)$ ، $(-\theta)$

تغير الإشارة فقط وتحتفظ بنفس القيمة العددية حسب الربع الذي تقع فيه

(٣) الزوايا التي قياسها $(٩٠^\circ - \theta)$ ، $(٩٠^\circ + \theta)$ ، $(٢٧٠^\circ - \theta)$ ، $(٢٧٠^\circ + \theta)$

يحدث فيها تغير ثاني

بمعني الزاوية التي قياسها θ نضع فيها فيها حرف التاء في الدالة التي ليس بها حرف التاء وحذفه من الدالة التي بها حرف التاء .

فمثلاً : جا ⟸ جتا ، ظتا ⟸ ظا .... وهكذا

(٤) لإيجاد دالة أي زاوية ومعرفة قيمتها لابد من تحديد الربع أولاً ثم اختيار زاوية مناسبة من الزوايا ٣٠°، ٤٥°، ٦٠°

وهذه أمثلة لبعض الزوايا التي ستواجهنا :

$١٢٠^\circ = (١٨٠^\circ - ٦٠^\circ)$ ، أو $= (٩٠^\circ + ٣٠^\circ)$

$١٣٥^\circ = (١٨٠^\circ - ٤٥^\circ)$ ، أو $= (٩٠^\circ + ٤٥^\circ)$

$١٥٠^\circ = (١٨٠^\circ - ٣٠^\circ)$ أو $= (٩٠^\circ + ٦٠^\circ)$

$٢١٠^\circ = (١٨٠^\circ + ٣٠^\circ)$ ....

$٢٢٥^\circ = (١٨٠^\circ + ٤٥^\circ)$ ....

$٢٤٠^\circ = (١٨٠^\circ + ٦٠^\circ)$ ....

$٣٠٠^\circ = (٣٦٠^\circ - ٦٠^\circ) = -٦٠^\circ$ ....

$٣١٥^\circ = (٣٦٠^\circ - ٤٥^\circ) = -٤٥^\circ$ ....

$٣٣٠^\circ = (٣٦٠^\circ - ٣٠^\circ) = -٣٠^\circ$ ....

(٥) إذا كانت α سالبة هناك طريقتان :

الطريقة الأولى : نطبق قاعدة الدوال المثلثية للزاوية السالبة جا $(-\theta)$ = − جا θ ، جتا $(-\theta)$ = جتا θ ، ظا $(-\theta)$ = − ظا θ وهكذا ....

الطريقة الثانية : نضيف إلي α أي عدد صحيح من الدورات الكاملة الموجبة حتي نحصل علي زاوية موجبة $\theta \in [٠ ، ٢\pi[$

مثال ١ : أوجد قيمة ما يأتي :

(أ) جتا ١٥٠° (ب) ظا ٢٢٥°

(ج) جا (-٣٠°) (د) ظتا (-١٢٠°)

(هـ) ظا (-٣٠٠°) (و) جا $\left(\frac{-٧\pi}{٤}\right)$

الحل

(أ) جتا ١٥٠ = جتا $(١٨٠^\circ - ٣٠^\circ)$ = − جتا ٣٠°

$= -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

منتدى توجيه الرياضيات ---- أ / عادل إدوار

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

حل آخر:

حتا ١٥٠ = حتا (٩٠° + ٦٠°) = − حا ٦٠° = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(ب) طا ٢٢٥° = طا (١٨٠° + ٤٥°) = طا ٤٥° = ١

حل آخر:

طا ٢٢٥° = طا (٢٧٠° − ٤٥°) = طتا ٤٥° = ١

(جـ) حا (−٣٠°) = − حا ٣٠° = $-\frac{١}{٢}$

(ى) طتا (−١٢٠°) = −طتا ١٢٠° =

−طتا (١٨٠° − ٦٠°) = −(−طتا ٦٠°) = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

حل أنت بطريقة أخرى:

....

....

(هـ) طا (−٣٠٠°) = −طا ٣٠٠° =

− طا (٣٦٠° − ٦٠°) = −(−طا ٦٠°) = $\sqrt{٣}$

حل أنت بطريقة أخرى:

....

....

(و) جا $\left(\frac{-٧\pi}{٤}\right)$ = −حا $\frac{٧\pi}{٤}$ = −حا ٣١٥° =

−حا (٣٦٠° − ٤٥°) = −(−حا ٤٥°) = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

حل أنت بطريقة أخرى:

....

....

مثال ٢ : أوجد قيمة :

حا ١٢٠° حتا (−١٥٠°) + حتا ٦٠٠° حا ٣٣٠°

الحـــل

حا ١٢٠° = حا (١٨٠° − ٦٠°) = حا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

حتا (−١٥٠°) = حتا ١٥٠° =

حتا (١٨٠° − ٣٠°) = −حتا ٣٠° = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

حتا ٦٠٠° = حتا (٣٦٠° + ٢٤٠°) = حتا ٢٤٠°

= حتا (١٨٠° + ٦٠°) = −حتا ٦٠° = $-\frac{١}{٢}$

حا ٣٣٠° = حا (٣٦٠° − ٣٠°) = حا (−٣٠°)

= −حا ٣٠° = $-\frac{١}{٢}$

المقدار = $\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right) + \left(-\frac{١}{٢}\right) \times \left(-\frac{١}{٢}\right)$

= $\frac{-٣}{٤} + \frac{١}{٤} = -\frac{١}{٢}$

مثال ٣ : إذا كان ٢ حتا θ + ١ = ٠ ، أوجد قيمة θ

حيث ٠° < θ < ٣٦٠°

الحـــل

∴ ٢حتا θ + ١ = ٠ ∴ حتا θ = $-\frac{١}{٢}$

∴ θ تقع في الربع الثاني أو الثالث

∵ حتا (١٨٠° − ى) = −حتا ى

، حتا (١٨٠° + ى) = − حتا ى

∴ الزاوية الحادة (ى) التي جيب تمامها = $\frac{١}{٢}$ هي ٦٠°

∴ θ = ١٨٠° − ى = ١٨٠° − ٦٠° = ١٢٠°

أو θ = ١٨٠° + ى = ١٨٠° + ٦٠° = ٢٤٠°

مثال ٤ : إذا كان الضلع النهائي لزاوية قياسها θ في وضعها القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة ($\frac{-٣}{٥}$ ، $\frac{٤}{٥}$) فأوجد

(أ) حا (٩٠° − θ) (ب) حتا (١٨٠° + θ)

(جـ) قا (٩٠° + θ) (ى) قتا (٢٧٠° − θ)

الحـــل

∵ س^٢ + ص^٢ = $\left(\frac{-٣}{٥}\right)^٢ + \left(\frac{٤}{٥}\right)^٢$ =

$\frac{٩}{٢٥} + \frac{١٦}{٢٥}$ = ١

∴ النقطة ($\frac{-٣}{٥}$ ، $\frac{٤}{٥}$) ∈ لدائرة الوحدة .

(أ) حا (٩٠° − θ) = حتا θ = $\frac{-٣}{٥}$

(ب) حتا (١٨٠° + θ) = −حتا θ = $\frac{٣}{٥}$

(جـ) قا (٩٠° + θ) = −قتا θ = $\frac{-٥}{٤}$

(ى) قتا (٢٧٠° − θ) = −قا θ = $\frac{٥}{٣}$

الحل العام للمعادلات المثلثية التي على الصورة : (جا α = جتا β ، قا α = قتا β ، ظا α = ظتا β)

إذا كان : α ، β قياسا زاويتين متتامتين فإن :

(١) عندما جا α = جتا β فإن :

$\alpha \pm \beta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi$ ن

(٢) عندما قتا α = قا β فإن :

$\alpha \pm \beta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi$ ن

(٣) عندما ظا α = ظتا β فإن :

$\alpha + \beta = \frac{\pi}{٢} + \pi$ ن

حيث : (ن ∈ ص)

مثال ٥ : حل المعادلة : حا ٢θ = حتا θ

الحـــل

المعادلة : حا ٢θ = حتا θ

٢θ ± θ = $\frac{\pi}{٢} + ٢\pi$ ن (ن ∈ ص)

إما ٢θ + θ = $\frac{\pi}{٢} + ٢\pi$ ن

∴ ٣θ = $\frac{\pi}{٢} + ٢\pi$ ن بالقسمة ÷ ٣

∴ θ = $\frac{\pi}{٦} + \frac{٢}{٣}\pi$ ن

أو ٢θ − θ = $\frac{\pi}{٢} + ٢\pi$ ن

∴ θ = $\frac{\pi}{٢} + ٢\pi$ ن

∴ حل المعادلة هو

$\frac{\pi}{٦} + \frac{٢}{٣}\pi$ ن أو $\frac{\pi}{٢} + ٢\pi$ ن

مثال ٦ : أوجد جميع قيم θ حيث θ ∈] ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ [

والتي تحقق كل من المعادلات الآتية :

(أ) ٢حتا ($\frac{\pi}{٢}$ − θ) = ١

(ب) ٢جا ($\frac{\pi}{٢}$ − θ) = $\sqrt{٣}$

(جـ) قتا (θ − $\frac{\pi}{٦}$) = قا θ

الحـــل

(أ) ∵ ٢حتا ($\frac{\pi}{٢}$ − θ) = ١

∴ حتا (٩٠° − θ) = $\frac{١}{٢}$ ∴ حا θ = $\frac{١}{٢}$

، ∴ حا موجبة في الربع الأول والثاني

∴ θ = ٣٠° أو θ = ١٨٠° − ٣٠° = ١٥٠°

بنتري توجيه الرياضيات أ / عادل إدوار

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

$\because \theta \in]0 , \frac{\pi}{2}[$ $\therefore \theta = ٣٠°$

(ب) $\because$ ٢جا $(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sqrt{٣}$

$\therefore$ جا $(٩٠° - \theta) = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ $\therefore$ جتا $\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\because$ جتا موجبة في الربع الأول والرابع

$\therefore \theta = ٣٠°$ أو $\theta = ٣٦٠° - ٣٠° = ٣٣٠°$

$\because \theta \in]0 , \frac{\pi}{2}[$ $\therefore \theta = ٣٠°$

(حـ) $\because$ ظا $(\frac{\pi}{٦} - \theta) =$ ظتا θ

$\therefore (\frac{\pi}{٦} - \theta) \pm (\theta) = ٩٠° + ٣٦٠°$ ن

$\therefore ٢\theta - ٣٠° = ٩٠°$

$\therefore ٢\theta = ١٢٠°$ $\therefore \theta = ٦٠°$

مثال ٧ : أوجد مجموعة حل المعادلة :

٢جا $\theta - ١ = ٠$ حيث $\theta \in]0 , \frac{\pi}{2}[$

الحل

$\therefore$ ٢جا $- ١ = ٠$ $\therefore$ جا $\theta = \frac{١}{٢}$ (موجبة)

$\therefore \theta$ تقع في الربع الأول أو الثاني

$\because$ الزاوية التي جيبها $\frac{١}{٢}$ هي ٣٠°

$\therefore \theta = ٣٠°$ أو

$١٨٠° - ٣٠° = ١٥٠°$ مرفوضة لأن $\theta \in]0 , \frac{\pi}{2}[$

$\therefore$ م . ح = {٣٠°}

تمارين (٤)

(١) أكمل ما يأتي :

(١) جا $(١٨٠° + \theta) =$ ....

(٢) ظا $(١٨٠° - \theta) =$ ....

(٣) قتا $(٣٦٠° - \theta) =$ ....

(٤) جا $(٣٦٠° + \theta) =$ ....

(٥) جا $(٩٠° + \theta) =$ ....

(٦) ظا $(٩٠° - \theta) =$ ....

(٧) قا $(٢٧٠° + \theta) =$ ....

(٨) جتا $(٢٧٠° - \theta) =$ ....

(٢) أكمل كلاً مما يأتي بقياس زاوية حادة :

(١) جا ٢٥° = جتا ....°

(٢) جتا ٦٧° = جا ....°

(٣) ظا ٤٢° = ظتا ....°

(٤) قتا ١٣° = قا ....°

(٥) إذا كان ظتا ٢θ = ظا θ حيث : $٠° < \theta < ٩٠°$

فإن : ق$(\angle\theta) =$ ....

(٦) إذا كان جا ٥θ = جتا ٤θ حيث θ زاوية حادة موجبة

فإن : $\theta =$ ....°

(٧) إذا كان قا θ = قا $(٩٠° - \theta)$ فإن : ظتا $\theta =$ .....

(٨) إذا كان ظا ٢θ = ظتا ٣θ حيث $\theta \in]0 , \frac{\pi}{2}[$

فإن : ق$(\angle\theta) =$ ....ء

(٩) إذا كان جتا θ = جا ٢θ حيث θ زاوية حادة موجبة

فإن جا $٣\theta =$ ....

(٣) اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

(١) إذا كانت ظا $(١٨٠° + \theta) = ١$ حيث θ قياس أصغر زاوية موجبة فإن قياس θ يساوي ....

(٤٥° ، ٣٠° ، ٦٠° ، ١٣٥°)

(٢) إذا كانت جتا ٢θ = جا θ حيث $\theta \in]0 , \frac{\pi}{2}[$

فإن جتا ٢θ تساوي ....

($\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، ١)

(٣) إذا كان جا α = جتا β حيث α ، β زاويتان حادتان فإن $(\alpha + \beta)$ تساوي ....

($\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، ١ ، $\sqrt{٣}$ ، غير معروف)

(٤) إذا كان جا ٢θ = جتا ٤θ حيث θ زاوية حادة موجبة فإن : ظا $(٩٠° - ٣\theta)$ تساوي ....

(−١ ، $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، ١ ، $\sqrt{٣}$)

(٥) إذا كان جتا $(٩٠° + \theta) = \frac{١}{٢}$ حيث θ قياس أصغر زاوية موجبة فإن قياس θ يساوي ....

(١٥٠° ، ٢١٠° ، ٢٤٠° ، ٣٣٠°)

(٤) أوجد قيمة كل مما يأتي :

(أ) جا ١٥٠° (ب) قتا ٢٢٥°

(جـ) قا ٣٠٠° (د) ظا ٧٨٠°

(هـ) قتا $\frac{١١\pi}{٦}$ (و) جا $\frac{٧\pi}{٤}$

(ز) ظتا $\frac{-٢\pi}{٣}$ (ح) جتا $\frac{-٧\pi}{٤}$

(٥) إذا كان الضلع النهائي لزاوية قياسها θ والمرسومة في الوضع القياسي وضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $(\frac{-٣}{٥} ، \frac{٤}{٥})$ **فأوجد :**

(أ) جا $(١٨٠° + \theta)$ (ب) جتا $(\frac{\pi}{٢} - \theta)$

(جـ) ظا $(٣٦٠° - \theta)$ (د) قتا $(\frac{٣\pi}{٢} - \theta)$

(٦) **أوجد** إحدى قيم θ حيث $٠° \leqslant \theta < ٩٠°$ التي تحقق كلا من الآتي :

(أ) جا $(٣\theta + ١٥°)$ = جتا $(٢\theta - ٥°)$

(ب) قا $(\theta + ٢٥°)$ = قتا $(\theta + ١٥°)$

(حـ) ظا $(\theta + ٢٠°)$ = ظتا $(٣\theta + ٣٠°)$

(د) جتا $\frac{\theta + ٢٠°}{٢}$ = جا $\frac{\theta + ٤٠°}{٢}$

(٧) إذا كان θ قياس زاوية مرسومة في الوضع القياسي ، حيث ظا $\theta = -١$ ، قتا $\theta = \sqrt{٢}$ ، **فهل** يمكن أن يكون ق$(\angle\theta) = \frac{٣\pi}{٤}$ ؟ فسر إجابتك ؟

(٨) إذا كان جتا $(\frac{٣\pi}{٢} - \theta) = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ،

جا $(\frac{\pi}{٢} + \theta) = \frac{١}{٢}$ **فأوجد**

أصغر قياس موجب للزاوية θ

منتدى توجيه الرياضيات

أ / علاء زورار

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

الدرس الخامس
التمثيل البياني للدوال المثلثية

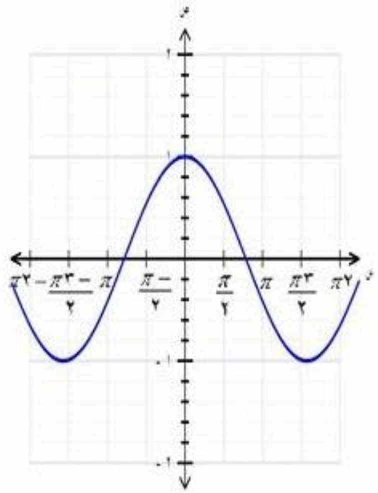
أولاً : دالة الجيب د : د (θ) حا θ بيانياً :

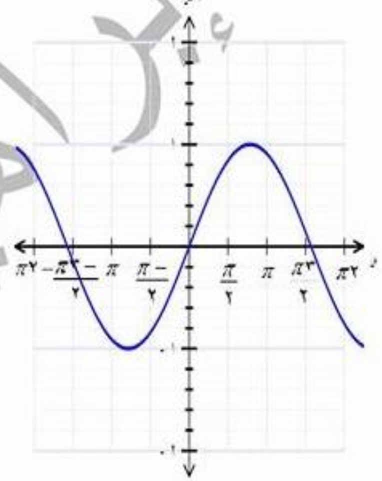
خواص دالة الجيب : د (θ) = أ حا بθ

(١) مجالها هو]$-\infty$ ، ∞[

(٢) مداها [$-$أ ، أ]

(٣) دورتها $\frac{2\pi}{|ب|}$





ثانياً : دالة جيب التمام د : د (θ) = حتا θ

خواص دالة جيب التمام د θ = أ حتا ب θ

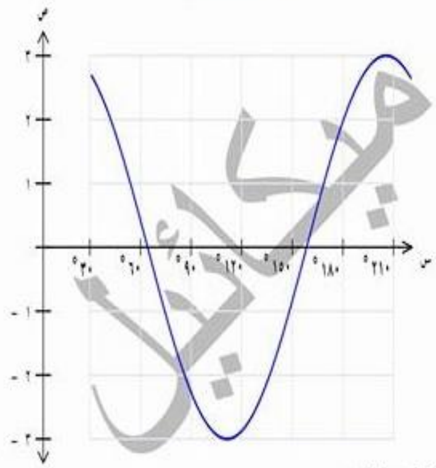
(١) مجالها هو]$-\infty$ ، ∞[

(٢) مداها [$-$أ ، أ]

(٣) دورتها $\frac{2\pi}{|ب|}$

مثال ١ : **ارسم** منحنى الدالة د : ص = ٣ حتا θ حيث $\theta \equiv$ [٠ ، 2π] ومن الرسم **أوجد** القيم العظمى والصغرى للدالة ومدى الدالة واذكر دورتها .

الحل



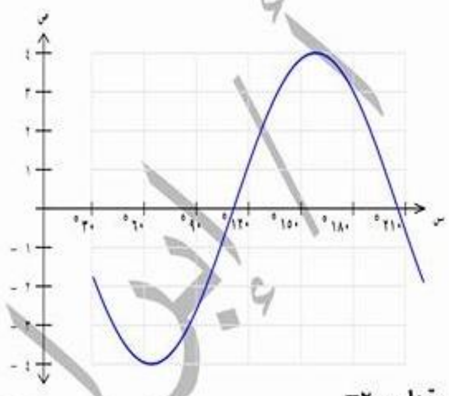
دورتها = 2π

مداها = [$-$٣ ، ٣]

القيم العظمى = ٣ ، القيم الصغرى = $-$٣

مثال ٢ : **ارسم** الشكل البياني للدالة ص = ٤ حتا θ ومن الرسم **أوجد** القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة واكتب مدى الدالة ودورتها .

الحل



دورتها = 2π

مداها = [$-$٤ ، ٤]

القيم العظمى = ٤ ، القيم الصغرى = $-$٤

تمارين (٥)

(١) أكمل ما يأتي :

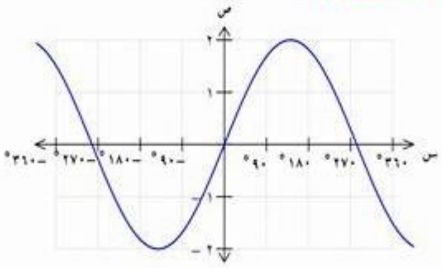
(١) مدى الدالة د حيث د (θ) = حا θ هو ....

(٢) مدى الدالة د حيث د (θ) = ٢ حا θ هو ....

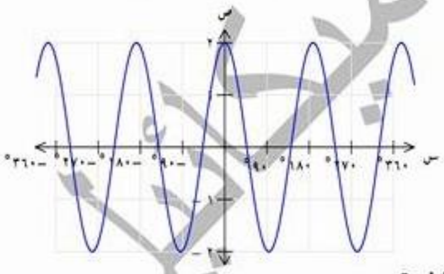
(٣) القيمة العظمى للدالة ع حيث ع (θ) = ٤ حا θ هو ....

(٤) القيمة العظمى للدالة هـ حيث هـ (θ) = ٣ حتا θ هي ....

(٢) اكتب قاعدة كل الدالة مثلثية بجوار الشكل المناظر لها :



القاعدة هي : ....



القاعدة هي : ....

(٣) أوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى ، ثم احسب المدى لكل دالة من الدوال الآتية

(أ) ص = حا θ (ب) ص = ٣حتا θ

(جـ) ص = $\frac{٣}{٢}$ حا θ

بنترى توجيه الرياضيات أ / عادل إدوار

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

الدرس السادس
إيجاد قياس زاوية بمعلومية إحدى نسبها المثلثية

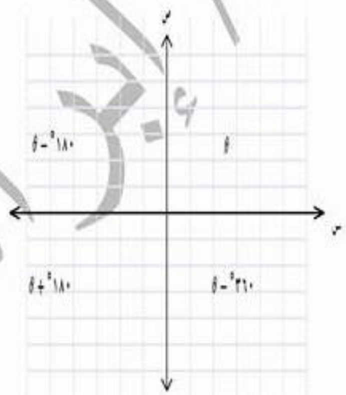
لحل المعادلات المثلثية نتبع الخطوات التالية :

(١) تحديد الربع الذي تقع فيه الزاوية على حسب إشارة الدالة

(٢) نحدد الزاوية الحادة التي تحقق المعادلة

(٣) نجد قيمة الزاوية حسب الربع الذي تقع فيه .

والشكل التالي يوضح ذلك :



مثال ١ : أوجد θ حيث $٠^\circ < \theta < ٣٦٠^\circ$ والتي تحقق كلاً مما يأتي :

(أ) $جا\, \theta = ٠,٦٣٢٥$

(ب) $ظتا\, \theta = (-١,٦٢٠٤)$

الحل

(أ) ∵ جيب الزاوية < ٠

∴ الزاوية تقع في الربع الأول أو الثاني

وباستخدام الآلة الحاسبة :

ابدأ → SHIFT $\sin^{-1}$ 0 . 6 3 2 5 = °'''

الربع الأول : $\theta = ٣٩^\circ\ ١٤'\ ٦''$

الربع الثاني : $\theta = ١٨٠^\circ - ٣٩^\circ\ ١٤'\ ٦'' = ١٤٠^\circ\ ٤٥'\ ٥٤''$

(ب) ∵ ظل تمام الزاوية > ٠

∴ الزاوية تقع في الربع الثاني أو الرابع

وباستخدام الآلة الحاسبة :

ابدأ → SHIFT $\tan^{-1}$ 1 . 6 2 0 4 x^{-1} = °'''

الربع الثاني : $\theta = ١٨٠^\circ - ٣١^\circ\ ٤٠'\ ٤٨''$

$= ١٤٨^\circ\ ١٩'\ ١٢''$

الربع الرابع : $\theta = ٣٦٠^\circ - ٣١^\circ\ ٤٠'\ ٤٨''$

$= ٣٢٨^\circ\ ١٩'\ ١٢''$

مثال ٢ : أوجد θ حيث $٠^\circ < \theta < ٣٦٠^\circ$ والتي تحقق أن : (أ) $\theta = جا^{-١}\, \frac{١}{٢}$ (ب) $\theta = ظتا^{-١}\, \frac{١}{\sqrt{٣}}$

الحل

(أ) ∵ $\theta = جا^{-١}\, \frac{١}{٢}$

∵ جيب الزاوية < ٠ (موجب)

∴ θ تقع في الربع الأول أو الثاني

∴ الربع الأول : $\theta = ٣٠^\circ$

، الربع الثاني : $\theta = ١٨٠^\circ - ٣٠^\circ = ١٥٠^\circ$

(ب) ∵ $\theta = ظتا^{-١}\, \frac{١}{\sqrt{٣}}$

∴ $\theta = ظا^{-١}\, \sqrt{٣}$

∵ ظل الزاوية < ٠ (موجب)

∴ θ تقع في الربع الأول أو الثالث

∴ الربع الأول : $\theta = ٦٠^\circ$

، الربع الثالث : $\theta = ١٨٠^\circ + ٦٠^\circ = ٢٤٠^\circ$

مثال ٣ : إذا قطع الضلع النهائي لزاوية موجبة قياسها θ في وضعها القياسي دائرة الوحدة في النقطة ب $\left(\frac{٦}{١٠} ، \frac{-٨}{١٠}\right)$ فأوجد : θ حيث $٠^\circ < \theta < ٣٦٠^\circ$

الحل

∵ النقطة ب $\left(\frac{٦}{١٠} ، \frac{-٨}{١٠}\right)$ تقع في الربع الرابع

∴ الزاوية الموجهة التي قياسها θ تقع في الربع الرابع

، ∵ $جتا\, \theta = س = \frac{٦}{١٠}$

∵ $جتا^{-١}\, \frac{٦}{١٠} = ٥٣^\circ\ ٧'\ ٤٨''$

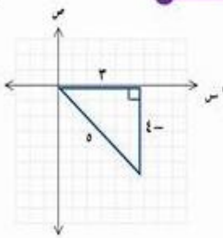
∴ $\theta = \theta = ٣٦٠^\circ - (٥٣^\circ\ ٧'\ ٤٨'') =$

$٣٠٦^\circ\ ٥٢'\ ١٢''$

مثال ٤ : إذا كان : $جتا\, \theta = \frac{٣}{٥}$ حيث : $٢٧٠^\circ < \theta < ٣٦٠^\circ$ فأوجد قيمة المقدار :

$جا\,(١٨٠^\circ - \theta) + ظا\,(٩٠^\circ - \theta) - ظا\,(٢٧٠^\circ - \theta)$

الحل



∵ $جتا\, \theta = \frac{٣}{٥}$

، ∵ $٢٧٠^\circ < \theta < ٣٦٠^\circ$

∴ θ تقع في الربع الرابع

∴

$جا\,(١٨٠^\circ - \theta) + ظا\,(٩٠^\circ - \theta) - ظا\,(٢٧٠^\circ - \theta)$

$= جا\, \theta + ظتا\, \theta - ظتا\, \theta = جا\, \theta = \frac{-٤}{٥}$

مثال ٥ : إذا كان : $جا\, \theta = \frac{٨}{١٧}$ حيث : $٩٠^\circ < \theta < ١٨٠^\circ$ فأوجد θ لأقرب ثانية ثم أوجد باقي الدوال المثلثية للزاوية التي قياسها θ .

الحل

∵ $جا\, \theta = \frac{٨}{١٧}$

∴ ∴ $\theta = جا^{-١}\, \frac{٨}{١٧} \simeq ٢٨^\circ\ ٤'\ ٢١''$

، ∵ $٩٠^\circ < \theta < ١٨٠^\circ$

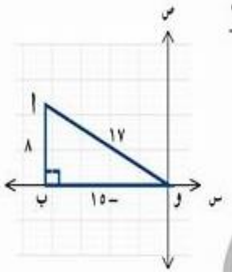
∴ θ تقع في الربع الثاني

∴ $\theta = ١٨٠^\circ - ٢٨^\circ\ ٤'\ ٢١''$

$= ١٥١^\circ\ ٥٥'\ ٣٩''$

من فيثاغورث

وأ = ١٧ وحدة طول



∴ $جتا\, \theta = \frac{وب}{وأ} = \frac{-١٥}{٧}$

، $ظا\, \theta = \frac{أب}{وب} = -\frac{٨}{١٥}$

، $قتا\, \theta = \frac{وأ}{أب} = \frac{١٧}{٨}$

، $قا\, \theta = \frac{وأ}{وب} = -\frac{١٧}{١٥}$

، $ظتا\, \theta = \frac{وب}{أب} = -\frac{١٥}{٨}$

مثال ٦ : إذا كان : $ظا\, \alpha = \frac{٣}{٤}$ حيث α أصغر زاوية موجبة ، $ظا\, \beta = \frac{٥}{١٢}$ حيث : $١٨٠^\circ < \beta < ٢٧٠^\circ$

أوجد الدوال المثلثية لكل من الزاويتين : α ، β

ثم أوجد قيمة : $جا\, \alpha\, جتا\, \beta - جتا\, \alpha\, جا\, \beta$

الحل

بنترى توجيه الرياضيات / أ / علاء عزوز

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة