الدرس الأول : متطلبات قبلية على الوحدة الأولى

مقدمة

• كل من المعادلات : س + ٥ = ٠ ، ٢ س − ٣ = ٥ ، $\frac{1}{2}$ س − $\sqrt{5}$ = ٠

تُسمى معادلة من الدرجة الأولى في متغير واحد هو س (لأن : أعلى أس للمتغير س هو ١)

والصورة العامة لمعادلة الدرجة الأولى في متغير واحد هي : أ س + ب = ٠ حيث أ ≠ ٠

• كل من المعادلات : س^{2} + ٤ س − ١٢ = ٠ ، ٣ س^{2} − ١٠ س − ٨ = ٠ ، س^{2} − ١٦ = ٠

تُسمى معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد هو س (لأن : أعلى أس للمتغير س هو ٢)

والصورة العامة لمعادلة الدرجة الثانية في متغير واحد هي :

أ س^{2} + ب س + جـ = ٠ حيث أ ≠ ٠

عمرو توفيق خضر م/ ٠١٠٠٥٢٧٠٧٤٤

• سبق لنا معرفة أن حل المعادلة في ح يعني إيجاد قيم المتغير التي تحقق المعادلة وتنتمي إلى ح ، وكل حل من هذه الحلول يسمى جذرًا للمعادلة.

ونعلم أن : معادلة الدرجة الأولى في متغير واحد لها حل وحيد في ح

كما أن : معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد لها حلان على الأكثر في ح

وفى هذا الدرس سوف نسترجع طرق حل معادلات الدرجة الثانية فى متغيرين وهى كما يلى:

أولاً : حل معادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد جبرياً باستخدام التحليل

يمكن حل المعادلة التربيعية أ س^{2} + ب س + هـ = ٠ وذلك بتحليل المقدار أ س^{2} + ب س + هـ " إن أمكن " بإحدى طرق التحليل التي درسناها

إذا كان : أ ، ب عددين حقيقيين وكان : أ × ب = صفر

فإنه : إما أ = صفر أو ب = صفر

الدرس الأول حل معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد

الترم الأول

ثانياً : حل معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد جبرياً باستخدام القانون العام

يستخدم القانون العام لحل المعادلة التربيعية $أس^{٢} + ب س + ح = ٠$ ، $أ \neq ٠$

فى حالة صعوبة حل المعادلة باستخدام التحليل

ويمكن استخدامه لحل جميع المعادلات التربيعية

وهو على الصورة $$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أح}}{٢أ}$$

حيث أ معامل $س^{٢}$ ، ب معامل س ، ح الحد المطلق

ثالثاً : حل معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد بيانياً

- نوجد الدالة المناظرة للمعادلة و تكون على الصورة $د(س) = أس^{٢} + ب س + ح$
- نعوض فى الدالة بالفترة المعطاه أو الأعداد التى نحددها لإيجاد نقط رسم المنحنى
- نرسم المنحنى و نعين نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات

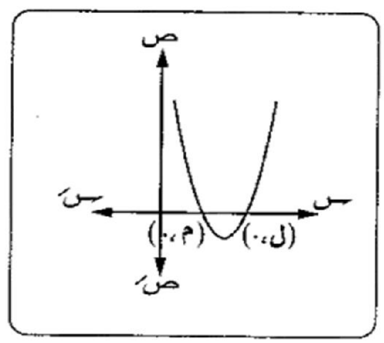
فتكون الإحداثيات السينية لها هى حل المعادلة $أس^{٢} + ب س + ح = ٠$

وكل إحداثى سينى يعتبر جذراً للمعادلة

فى حالة عدم إعطائك فترة للتمثيل البيانى فإنه يمكننا الحل بإيجاد نقطة رأس المنحنى وهى $\left(-\frac{ب}{٢أ} ، د\left(-\frac{ب}{٢أ}\right)\right)$ ثم نوجد عدة نقاط أخرى على يمينها ومثلهم على يسارها .

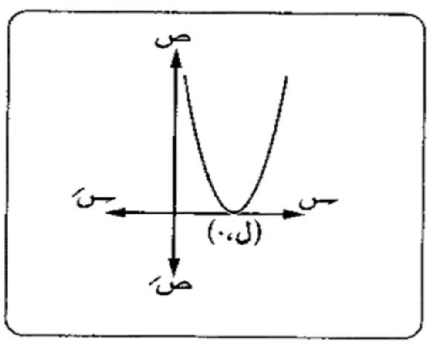
و تحتوى مجموعة الحل على

١ المنحنى يقطع محور السينات فى نقطتين



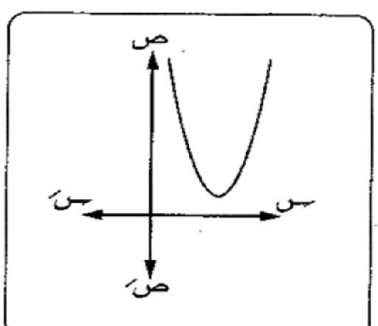
يوجد حلان للمعادلة فى ح ، م.ح = {ل ، م}

٢ المنحنى يمس محور السينات فى نقطة واحدة



يوجد حل وحيد للمعادلة فى ح ، م.ح = {ل}

٣ المنحنى لا يقطع محور السينات



لا يوجد حل للمعادلة فى ح ، م.ح = $\varnothing$

أولاً : أمثلة على الحل بالتحليل :-

① س² − ٥ س − ٦ = ٠

∴ (س − ٦) (س + ١) = ٠

[تحليل المقدار الثلاثى]

∴ س − ٦ = ٠ ومنها س = ٦

أ، س + ١ = ٠ ومنها س = −١

∴ مجموعة الحل = {٦ ، −١}

② س² − ٢ س = ٠

(بتحليل الطرف الأيمن بإخراج العامل المشترك)

∴ س (س − ٢) = ٠

∴ س = ٠ أو س − ٢ = ٠

∴ س = ٠ أو س = ٢

∴ جذرا المعادلة هما ٠ ، ٢

③ س² + ٤ = ٠

∴ س² = −٤

∴ س = ± $\sqrt{-٤}$

∵ $\sqrt{-٤}$ ∉ ح

∴ مجموعة حل المعادلة = ϕ

④ ٤ س² − ٩ = ٠

(بتحليل الطرف الأيمن كفرق بين مربعين)

∴ (٢ س − ٣) (٢ س + ٣) = ٠

∴ ٢ س − ٣ = ٠	٢ س + ٣ = ٠
٢ س = ٣	٢ س = −٣
س = $\frac{٣}{٢}$	س = $\frac{-٣}{٢}$

∴ مجموعة حل المعادلة = { $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{-٣}{٢}$ }

⑤ س (س − ٢) + ٣ (س − ٢) = ٠

بأخذ (س − ٢) عامل مشترك

∴ (س − ٢) (س + ٣) = ٠

س − ٢ = ٠	س + ٣ = ٠
س = ٢	∴ س = −٣

∴ م . ح فى ح = { ٢ ، −٣ }

ثانياً : أمثلة على الحل باستخدام القانون العام :-

١) س² + ٣ س + ١ = ٠

∵ أ = ١ ، ب = ٣ ، حـ = ٢

س = $\frac{-٣ \pm \sqrt{٩ - (٤ \times ١ \times ١)}}{٢}$ ∴ س = $\frac{-٣ \pm \sqrt{٥}}{٢}$

س = $\frac{-٣ + \sqrt{٥}}{٢}$	س = $\frac{-٣ - \sqrt{٥}}{٢}$
∴ س = −٠,٣٨١	∴ س = −٢,٦١٨
∴ س ≃ −٠,٤	∴ س ≃ −٢,٦

∴ م . ح فى ح = { −٠,٤ ، −٢,٦ }

٢) س² = ٥ س + ٢ ← س² − ٥ س − ٢ = ٠

أ = ١ ، ب = −٥ ، حـ = −٢

س = $\frac{٥ \pm \sqrt{٢٥ - (٤ \times ١ \times -٢)}}{٢}$ ∴ س = $\frac{٥ \pm \sqrt{٣٣}}{٢}$

س = $\frac{٥ + \sqrt{٣٣}}{٢}$	س = $\frac{٥ - \sqrt{٣٣}}{٢}$
∴ س = ٥,٤	∴ س = −٠,٤

∴ م . ح فى ح = { −٥,٤ ، −٠,٤ }

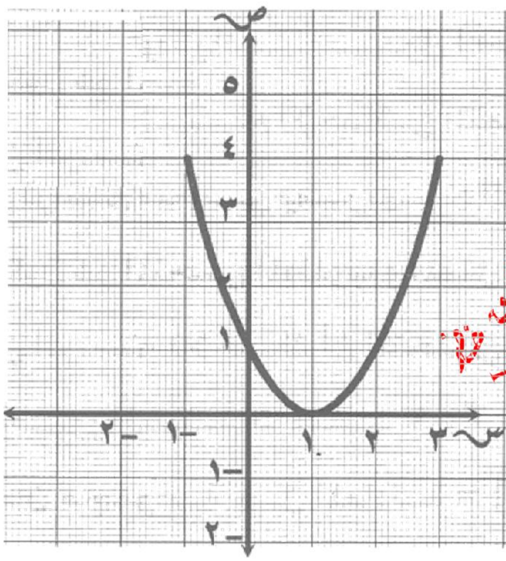
تدريب ١) أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية جبرياً :

(١) $\text{س}^{2} + ٦\text{س} + ٩ = ٠$ | (٢) $٤\text{س}^{2} = ٢٥$ | (٣) $(\text{س} - ٣)^{2} = (\text{س} - ٣)$

(٤) $\text{س} - \frac{١}{\text{س}} = -٢$ | (٥) $\text{س} + \frac{٥}{\text{س}} = ٤$ حيث $\text{س} \neq ٠$.

ثالثاً : أمثلة على الحل عن طريق الرسم البيانى :-

(١) ارسم منحنى الدالة $د(\text{س}) = \text{س}^{2} - ٢\text{س} + ١$ ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة $\text{س}^{2} - ٢\text{س} + ١ = ٠$



الحل

رأس المنحنى $= \left(\frac{-ب}{٢أ} ، د\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right) = (١ ، ٠)$

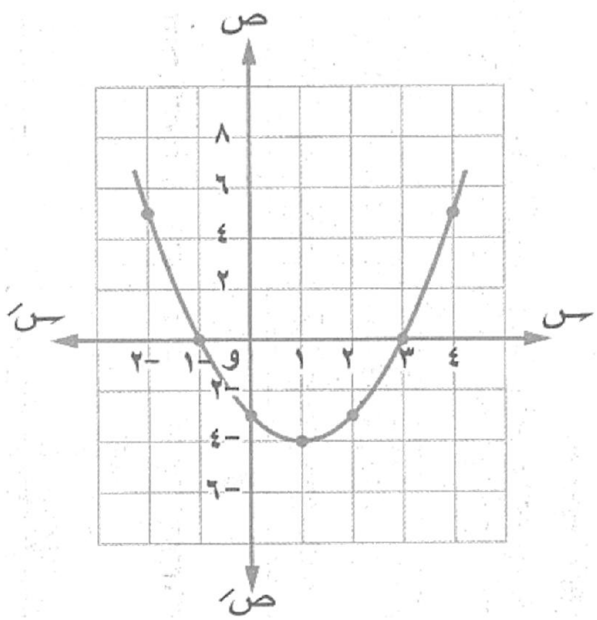
س	٣	٢	١	٠	-١
د(س)	٤	١	٠	١	٤

لاحظ أن منحنى الدالة يقطع محور السينات فى نقطة واحدة

∴ مجموعة حل المعادلة = {١}

(٢) أوجد بيانيًا فى ح مجموعة حل المعادلة : $\text{س}^{2} - ٢\text{س} - ٣ = ٠$.

مستعيناً بالفترة [-٢ ، ٤]



الحل

نفرض أن : $د(\text{س}) = \text{س}^{2} - ٢\text{س} - ٣$

س	-٢	-١	٠	١	٢	٣	٤
ص	٥	٠	-٣	-٤	-٣	٠	٥

من الرسم : مجموعة الحل = {٣ ، -١}

تدريب ٢) أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية بيانياً :

(١) $-\text{س}^{2} - ٤\text{س} - ٤ = ٠$ | (٢) $د(\text{س}) = \text{س}^{2} + ١$ | (٣) $\text{س}^{2} - ٤\text{س} + ٣ = ٠$

رابعاً : أمثلة على ايجاد معاملات حدود الدالة التربيعية :-

(١) إذا كان : س = −٣ أحد جذرى المعادلة : ٢ س^{٢} + أ س − ٣ = ٠

فأوجد قيمة أ ثم أوجد الجذر الآخر.

الحـــل

∵ س = −٣ أحد جذرى المعادلة : ٢ س^{٢} + أ س − ٣ = ٠

∴ د (−٣) = ٠ ∴ ٢ (−٣)^{٢} + أ (−٣) − ٣ = ٠

∴ ١٨ − ٣ أ − ٣ = ٠ ومنها $\boxed{\text{أ} = ٥}$ ∴ المعادلة هى : ٢ س^{٢} + ٥ س − ٣ = ٠

وبالتحليل : ∴ (٢ س − ١) (س + ٣) = ٠

∴ ٢ س − ١ = ٠ ومنها س = $\frac{١}{٢}$ أ، س + ٣ = ٠ ومنها س = −٣

∴ $\boxed{\text{الجذر الآخر هو } \frac{١}{٢}}$

(٢) إذا كان : −١ ، ٥ هما جذرا المعادلة : أ س^{٢} + ب س − ٥ = ٠

م/ عمرو توفيق خضر ت: ٠١٠٠٥٢٧٠٧٤٤

الحـــل

∵ −١ جذر للمعادلة ∴ أ (−١)^{٢} + ب (−١) − ٥ = ٠ $\boxed{∴ \text{أ} − \text{ب} − ٥ = ٠}$ (١)

، ∵ ٥ جذر للمعادلة ∴ أ (٥)^{٢} + ب (٥) − ٥ = ٠

∴ ٢٥ أ + ٥ ب − ٥ = ٠ وبالقسمة على ٥ $\boxed{∴ ٥ \text{أ} + \text{ب} − ١ = ٠}$ (٢)

وبجمع المعادلتين (١) ، (٢) : ∴ ٦ أ − ٦ = ٠ ∴ $\boxed{\text{أ} = ١}$

وبالتعويض فى (١) : ∴ ١ − ب − ٥ = ٠ ∴ $\boxed{\text{ب} = −٤}$

تدريب ٣) أوجد ما هو مطلوب فى كل مما يأتى :-

(١) إذا كان : س = ٣ أحد جذرى المعادلة : س^{٢} + أ س + ٦ = ٠

فأوجد قيمة أ ثم أوجد الجذر الآخر.

(٢) إذا كان : ٢ ، ٣ هما جذرا المعادلة : أ س^{٢} + ب س + ٦ = ٠

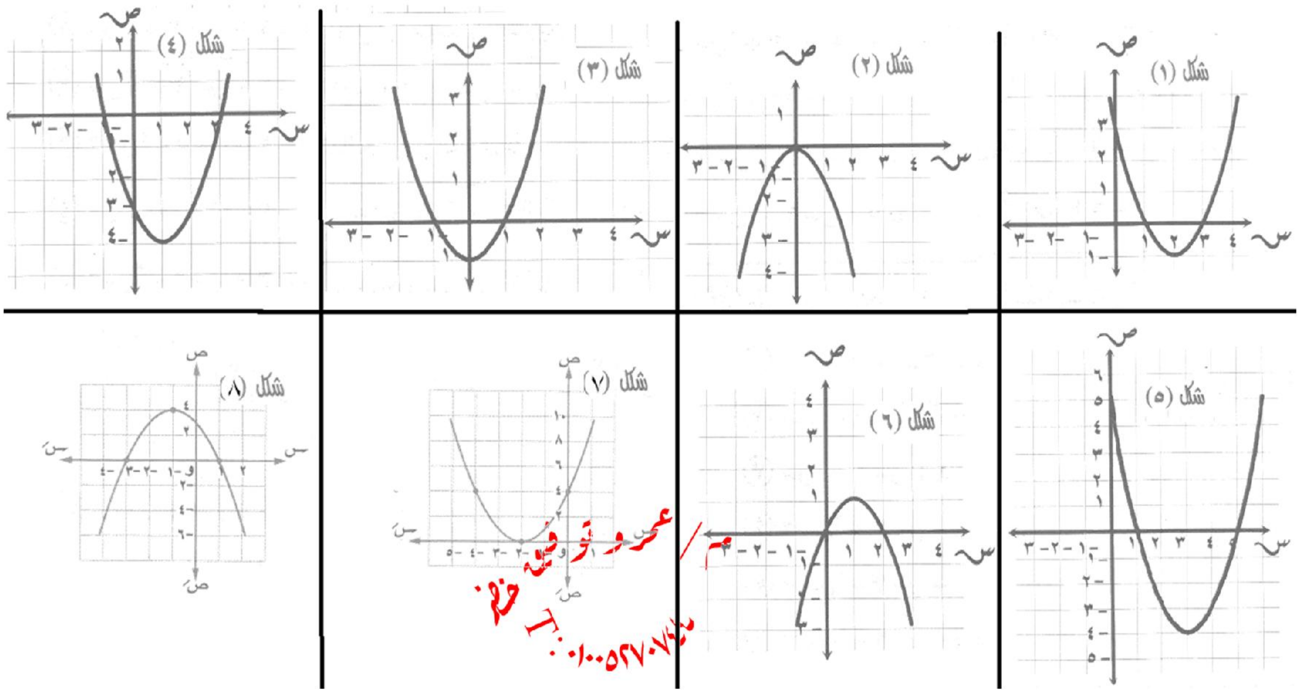
فأوجد قيمة كل من : أ ، ب

الدرس الأول حل معادلات الدرجة الثانية فى متغير واحد

الترم الاول

تمارين على الدرس الأول

السؤال الأول : يبين كل شكل من الأشكال الآتية الرسم البيانى لدالة من الدرجة الثانية أوجد مجموعة حل : د(س) = ٠ فى كل شكل .



السؤال الثانى : اختر الإجابة الصحيحة من بين القوسين :-

١) مجموعة حل المعادلة : س^{٢} = -٣س فى ح هى ......

① {-٣}　② {٠، ٣}　③ {٢ ، -٣}　④ ∅

٢) مجموعة حل المعادلة : (س + ١)^{٢} = ٤ فى ح هى ......

① {-٣}　② {-١}　③ {١ ، -٣}　④ ∅

٣) المعادلة : س^{٢} (س – ١)(س + ١) = ٠ من الدرجة ......

① الأولى　② الثانية　③ الثالثة　④ الرابعة

٤) المعادلة : (س – ١)(س + ١) = ٠ من الدرجة ......

① الأولى　② الثانية　③ الثالثة　④ الرابعة

٥) إذا كان : س = ٠,٥ أحد جذرى المعادلة : : ٩س^{٢} – ٥ س + ٢ = ٠ فإن : ٩ = ...

① -٢　② ١　③ ٢　④ ٣

٦) إذا كان منحنى الدالة التربيعية د يقطع محور السينات فى النقط (٢ ، ٠) ، (-٣ ، ٠) فإن مجموعة حل المعادلة د(س) = ٠ هى .....

① {-٣}　② {٠، ٣}　③ {٢ ، -٣}　④ ∅

٧) إذا كان : س = ٩ أحد جذرى المعادلة : س^{٢} – س – ٦ = ٠ فإن : ٩ = ...

① -٢ ، ٣　② -٢ ، ٣　③ ٢　④ ٣

٨) إذا كان – ٢ أحد جذرى المعادلة : س^{٢} + ٩ س – ١٠ = ٠ فإن ٩ = ...

① – ٣　② ٠　③ – ١　④ ٣

٩) مجموعة حل المعادلة س^{٢} + ٤ = ٠ فى ح هى ....

(١) {٢ ، -٢} (٢) $\emptyset$ (٣) {٢} (٤) {-٢}

١٠) مجموعة حل المعادلة (س – ٢) = (س – ٢)^{٢} فى ح هى ....

(١) {٢} (٢) {٣} (٣) {٢ ، ٣} (٤) {-٢ ، -٣}

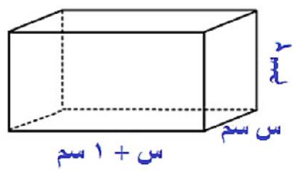
١١) فى الشكل المقابل :

إذا كانت مساحة المستطيل = ٤٠ سم^{٢}

فإن : محيط المستطيل = ... سم

(١) ١٤ (٢) ١٨ (٣) ٢٨ (٤) ٤٠

١٢) فى الشكل المقابل :



إذا كان حجم متوازى المستطيلات = ٢٤سم^{٣} ، فإن :

(أ) المساحة الجانبية لمتوازى المستطيلات = ... سم^{٢}

(١) ١٢ (٢) ١٤ (٣) ٢٨ (٤) ٥٢

(ب) طول قطر القاعدة العلوية = ... سم

(١) ٣ (٢) ٤ (٣) ٥ (٤) ٦

السؤال الثالث : أكمل ما يأتى :-

١) إذا كان س = ٣ أحد جذرى المعادلة س^{٢} + أ س + ٦ = ٠ فإن أ = ... والجذر الآخر .....

٢) إذا كان س = -١ أحد جذرى المعادلة س^{٢} + س – أ = ٠ فإن أ = ... والجذر الآخر .....

٣) المعادلة : س (س + ١) = ٢ من الدرجة ....

٤) مجموعة حل المعادلة : س (س + ١) = ٠ في ح هي ....

٥) مجموعة حل المعادلة : س^{٢} + ٥ س = ٠ في ح هي ....

٦) مجموعة حل المعادلة : (س + ١) (س – ٢) = ٠ في ح هي ....

٧) مجموعة حل المعادلة : (س – ٣)(س – ١) = -١ في ح هي ....

السؤال الرابع : أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية جبرياً :-

١) س^{٢} – ١ = ٠

٢) س^{٢} + ٣ س = ٠

٣) س^{٢} + ٩ = ٠

٤) س^{٢} + ٦ س + ٩ = ٠

٥) ٢ س^{٢} – ٧ س + ٦ = ٠

٦) (س + ١)^{٢} + ٢(س + ١) + ١ = ٠

٧) $\frac{س}{٢} + \frac{١}{س} = \frac{٣}{٢}$ حيث س ≠ صفر

٨) س – ٣ = $\frac{-٢}{س}$ حيث س ≠ صفر

٩) س(س+١) (س – ٣) = ٠

١٠) (س – ٢)^{٢} = ٠

السؤال الخامس : استخدم القانون العام لإيجاد مجموعة حل المعادلات التالية في ح :-

١) س^{٢} – ١ = ٠

٢) س^{٢} + ٢ س – ١ = ٠ (لأقرب رقمين عشريين)

٣) س^{٢} + ٣ س + ١ = ٠ (لأقرب رقمين عشريين)

٤) س – ٥ = $\frac{-٢}{س}$ حيث س ≠ صفر

٥) س^{٢} – ٦ س + ٧ = ٠

٦) ٣س^{٢} – ٦ س – ٤ = ٠

السؤال السادس: أوجد مجموعة الحل بيانياً فى ح وحقق الناتج جبرياً:

١) س^{٢} + ٣ = ٠ ارسم بيانيًا في الفترة [-٣ ، ٣]

٢) ٢س^{٢} + ٥ س = ٠ ارسم بيانيًا في الفترة [-٤ ، ٢]

٣) ٦ س^{٢} = ٦ – ٥ س

٤) ٠,٥ س^{٢} – ٠,٦ س = ١

٥) (س – ٣)^{٢} = ٥

السؤال السابع: إذا كان ٥ ، -٣ هما جذرا المعادلة س^{٢} + ﻡس + ب = ٠ فأوجد قيمة كل من ﻡ ، ب

السؤال الثامن: إذا كان مجموع الأعداد المتتالية (١ + ٢ + ٣ + ... + ن) يعطى بالعلاقة :

جـ = $\frac{ن}{٢}$ (١ + ن) فكم عددًا صحيحًا بدءًا من العدد ١ ليكون مجموعها مساويًا :

① ٧٨ ② ١٧١ ③ ٤٦٥

السؤال التاسع: ارسم منحنى الدالة د(س) = س^{٢} – ٤ ومن الرسم أوجد :

- أوجد مدى الدالة
- م . ح للمعادلة د(س) = ٠

الدرس الثانى : مقدمة عن الأعداد المركبة

الحاجة لمزيد من الأعداد

سبق أن درست توسيع النظام العددى من الأعداد الطبيعية (ط) إلى الأعداد الصحيحة (ص) إلى الأعداد النسبية (ن) وأخيرًا إلى الأعداد الحقيقية (ح). وأحد الدوافع الرئيسية إلى كل توسيع هو الرغبة فى حل أنواع مختلفة من المعادلات ، فعلى سبيل المثال :

المعادلة : س + ٨ = ٣ ليس لها حل فى ط لذلك كان الاتجاه نحو توسيع ط إلى ص

والمعادلة : ٢ س = ١ ليس لها حل فى ص لذلك كان الاتجاه نحو توسيع ص إلى ن

والمعادلة : س^{٢} = ٢ ليس لها حل فى ن لذلك كان الاتجاه نحو توسيع ن إلى ح

ورغم ذلك فما زالت هناك معادلات بسيطة ليس لها حل فى ح مثل المعادلة س^{٢} = −١ إذ لا يوجد عدد حقيقى مربعه يساوى سالب واحد ، لذلك كان التفكير فى إيجاد مجموعة جديدة من الأعداد نجد فيها حلًا لمثل هذه المعادلات وتكون فى نفس الوقت توسيعًا لمجموعة الأعداد الحقيقية ، هذه المجموعة الجديدة تسمى (مجموعة الأعداد المركبة) وهى موضوع دراستنا فى هذا الدرس.

العدد التخيلى ت	هو العدد الذى مربعه يساوى = -١ أى أن : $\boxed{ت^{٢} = -١}$

وبالتالى يمكننا حل المعادلة : س^{٢} = -١

∵ س^{٢} = −١ ∴ س^{٢} = ت^{٢}

∴ س = ± $\sqrt{ت^{٢}}$ ∴ س = ± ت

∴ مجموعة الحل = {ت ، − ت} وهذا الحل غير ممكن إلا فى مجموعة الأعداد التخيلية

قوى ت الصحيحة:

العدد ت يحقق قوانين الأسس التى سبق دراستها وذلك يمكننا من التعبير عن القوى المختلفة للعدد ت كما يلى:

$ت^{١} = ت$ $\qquad$ $ت^{٢} = -١$

$ت^{٣} = ت^{٢} \times ت = -ت$ $\qquad$ $ت^{٤} = ت^{٢} \times ت^{٢} = -١ \times -١ = ١$

$ت^{٥} = ت^{٤} \times ت = ١ \times ت = ت$ $\qquad$ $ت^{٦} = ت^{٤} \times ت^{٢} = ١ \times -١ = -١$

أوعى تنسى

$ت^{١} = ت$

$ت^{٢} = -١$

$ت^{٣} = -ت$

$ت^{٤} = ١$

$\frac{١}{ت^{٣}} = ت$

لكل $ن \in ص$

$ت^{٤ن+١} = ت$

$ت^{٤ن+٢} = -١$

$ت^{٤ن+٣} = -ت$

$ت^{٤ن+٤} = ١$

أمثلة على قوى ت الصحيحة:

أولاً

(١) $ت^{١٦}$
$\because ١٦ \div ٤ = ٤$ والباقى صفر
$\therefore ت^{١٦} = ١$

(٢) $ت^{٦٣}$
$\because ٦٣ \div ٤ = ١٥$ والباقى ٣
$\therefore ت^{٦٣} = ت^{٣} = -ت$

(٣) $ت^{٤٢}$
$\because ٤٢ \div ٤ = ١٠$ والباقى ٢
$\therefore ت^{٤٢} = ت^{٢} = -١$

(٤) $ت^{١٠١}$
$\because ١٠١ \div ٤ = ٢٥$ والباقى ١
$\therefore ت^{١٠١} = ت$

(٥) $ت^{٤ن+٢٣}$
$\because ت^{٤ن+٢٣} = ت^{٤ن} \times ت^{٢٣}$
$\because ت^{٤ن} = ١ ، ت^{٢٣} = ت^{٣}$
$\therefore ت^{٤ن+٢٣} = ١ \times ت^{٣} = -ت$

ثانياً

(١) $ت^{-١٩}$
$ت^{-١٩} = ت^{-١٩} \times ت^{٢٠} = ت$

(٢) $\frac{١}{ت^{٥}}$
$\frac{١}{ت^{٥}} = \frac{ت^{٨}}{ت^{٥}} = ت^{٣} = -ت$

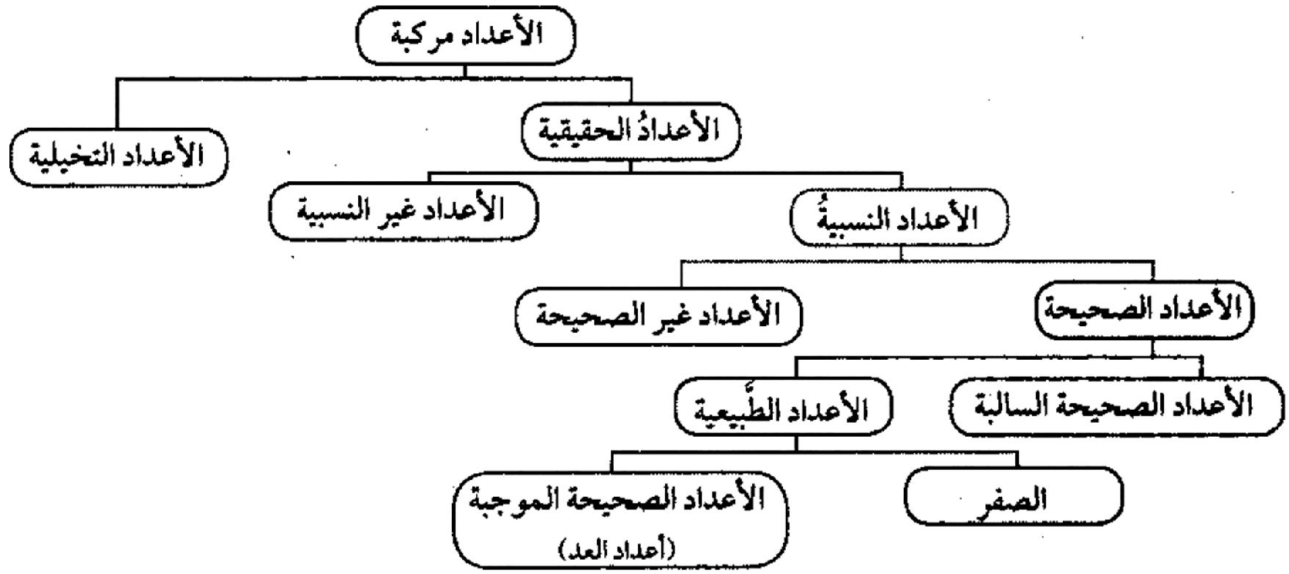
(٣) $ت^{-١١}$
$ت^{-١١} = \frac{١}{ت^{١١}} = \frac{١}{ت^{٣}} = ت$

تدريب ١) اكتب الأعداد الآتية فى أبسط صورة:

$ت^{١٢}$ ، $ت^{٢٢}$ ، $ت^{٦١}$ ، $ت^{٤ن+٣}$ ، $\sqrt{-٢٠}$ ، $ت^{-٢٢}$ ، $ت^{-١}$ ، $\frac{١}{ت^{٥}}$ ، $(-٢ ت)(-٥ ت)$

الأعداد المركبة

العدد المركب	هو العدد الذى يمكن كتابته على الصورة أ + ب ت . حيث أ ، ب ∈ ح ، $\text{ت}^2 = -١$ ، أ الجزء الحقيقى　ب ت الجزء التخيلى



• ومما سبق يمكن حل المعادلة $٢\text{س}^٢ + ٨ = ٠$ حيث أنها ليس لها حل فى ح ولكن لها حل فى مجموعة الأعداد المركبة كما يلى :

∵ $٢\text{س}^٢ + ٨ = ٠$　　∴ $٢\text{س}^٢ = -٨$

∴ $\text{س}^٢ = \frac{-٨}{٢}$　　∴ $\text{س}^٢ = -٤$ (وهى ليس لها حل فى ح)

∴ $\text{س}^٢ = ٤\text{ت}^٢$ (حيث $\text{ت}^٢ = -١$)　　∴ $\text{س} = \pm ٢\text{ت}$

•• عند حل المعادلة : $\text{س}^٢ - ٦\text{س} + ١٣ = ٠$ باستخدام القانون العام نجد أن :

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^٢ - ٤\text{أ}\text{جـ}}}{٢\text{أ}} = \frac{٦ \pm \sqrt{٣٦ - ٥٢}}{٢} = \frac{٦ \pm \sqrt{-١٦}}{٢}$$

، ∵ $\sqrt{-١٦} = \sqrt{١٦\text{ت}^٢} = ٤\text{ت}$　　∴ $\text{س} = \frac{٦ \pm ٤\text{ت}}{٢}$　　∴ $\text{س} = ٣ \pm ٢\text{ت}$

أى أن : المعادلة : $\text{س}^٢ - ٦\text{س} + ١٣ = ٠$ ليس لها حل فى ح ، ولكن لها حلين لا ينتميان إلى مجموعة الأعداد الحقيقية هما : $٣ + ٢\text{ت}$ ، $٣ - ٢\text{ت}$

• يُسمى كل من : $٣ + ٢\text{ت}$ ، $٣ - ٢\text{ت}$ «عددًا مركبًا».

الدرس الثانى　مقدمة عن الأعداد المركبة

الترم الأول

مجموعة الأعداد المركبة	يمكن تعريف مجموعة الأعداد المركبة والتى سنرمز لها بالرمز ك كالتالى : ك = {أ + ب ت : أ ∈ ع ، ب ∈ ع ، $ت^٢$ = -١}

إذا كان : ع عددًا مركبًا حيث : ع = أ + ب ت فإن :

① إذا كان : $\boxed{ب = ٠}$ فإن : $\boxed{ع = أ}$ ويكون ع عددًا حقيقيًا .

فمثلًا : ع = ٥ عدد حقيقي وهو عدد مركب.

② إذا كان : $\boxed{أ = ٠}$ فإن : $\boxed{ع = ب ت}$ ويكون ع عددًا تخيليًا. (حيث ب ≠ ٠)

فمثلًا : ع = ٢ ت عدد تخيلي وهو عدد مركب.

الأعداد المركبة (ك)
= الأعداد الحقيقية ∪ الأعداد التخيلية
ك = ح ∪ ت
كل عدد حقيقي أو عدد تخيلي
هو عدد مركب وليس العكس

تدريب ٢) ضع علامة (✓) فى الفراغ المناسب بالجدول التالى :

	عدد طبيعي	عدد صحيح	عدد نسبي	عدد غير نسبي	عدد حقيقي	عدد تخيلي	عدد مركب
$\sqrt{-٧}$							
٢ + ٣ ت							
$\sqrt{٢٥}$							
$\frac{٢}{٣}$							
٢,٤							
$\sqrt{٢}$							

الدرس الثانى مقدمة عن الأعداد المركبة

الترم الأول

أمثلة على حل المعادلة التربيعية في ك :-

① $س^2 + 8 = 7$

∴ $س^2 = 7 - 8$

∴ $س^2 = -1$

∴ $س = \pm\sqrt{-1}$

∴ $س = \pm ت$

② $4 س^2 + 25 = 0$ ← ∴ $4 س^2 = -25$

∴ $س^2 = \frac{-25}{4}$ ← ∴ $س = \pm\sqrt{\frac{-25}{4}}$

∴ $س = \pm\frac{5}{2}\sqrt{-1}$ ← ∴ $س = \pm\frac{5}{2} ت$

③ $س^2 + س + 1 = 0$ ∴ أ = 1 ، ب = 1 ، جـ = 1

∴ $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4 أ جـ}}{2 أ} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1}$

$= \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3} ت}{2} = \frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} ت$

∴ مجموعة الحل = $\{ \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} ت ، \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} ت \}$

تدريب ٣) أوجد مجموعة حل المعادلات التربيعية الآتية في ك :-

① $س^2 + 16 = 0$ ② $س^2 + 25 = 0$ ③ $س^2 - 2 س + 5 = 0$

تساوي عددين مركبين

يتساوى العددان المركبان إذا وفقط إذا تساوى الجزءان الحقيقيان وتساوى الجزءان التخيليان

إذا كان أ + ب ت = جـ + ء ت فإن أ = جـ ، ب = ء والعكس صحيح

فمثلاً

إذا كانت س + ص ت = ٥ − ٣ ت فإن س = ٥ ، ص = −٣

أمثلة على تساوي عددين مركبين :- أوجد قيمة س ، ص في كل مما يأتي :-

① س + ص ت = ٥ + ٢ ت ② س − ١ + ص ت = ٧ − ٦ ت ③ ٢س − ص + (س − ٢ص)ت = ٥ + ت

بمساواة الجزء الحقيقي بالحقيقي والجزء التخيلي بالتخيلي.

① ∴ س = ٥

ص ت = ٢ ت

∴ ص = ٢

② س − ١ = ٧

∴ س = ٨

ص ت = −٦ ت

∴ ص = −٦

③ ٢ س − ص = ٥ ← (١) بالضرب × −٢

س − ٢ ص = ١ ← (٢)

بالجمع ∴ −٣ س = −٩

∴ س = ٣ بالتعويض في (١)

∴ ٦ − ص = ٥ ∴ ص = ١

تدريب ٤) أوجد قيمة س ، ص فى كل مما يأتى :-

(١) س + ص + ٧ ت = ص ت　(٢) س − ٤ + ص ت = صفر　(٣) (٢ ت) س + (٤ + ٣ ت) ص = ٢ + ٤ ت

العمليات على الأعداد المركبة

- عند إجراء عمليات الجمع والطرح والضرب على الأعداد المركبة فإننا نستخدم خواص الإبدال والتجميع والتوزيع كما فى إجراء هذه العمليات على المقادير الجبرية.
- عند جمع أو طرح عددين مركبين نجمع أو نطرح الجزأين الحقيقيين معًا والجزأين التخيليين معًا .

قاعدتا الجمع والضرب فى ك

إذا كان $ع_{١} = س_{١} + ص_{١} ت$ ، $ع_{٢} = س_{٢} + ص_{٢} ت$ فـإن :

(١) $ع_{١} + ع_{٢} = (س_{١} + س_{٢}) + (ص_{١} + ص_{٢}) ت$

(٢) $ع_{١} \times ع_{٢} = (س_{١} س_{٢} - ص_{١} ص_{٢}) + (س_{١} ص_{٢} + س_{٢} ص_{١}) ت$

أمثلة على العمليات فى الأعداد المركبة :- اختصر لأبسط صورة :-

(١) (٣ + ٤ ت) − (٥ + ٢ ت)
= ٣ + ٤ ت − ٥ − ٢ ت
= − ٢ + ٢ ت

(٢) (٣ − ٢ ت) + (٢ + ت)
= (٣ + ٢) + (−٢ ت + ت)
خاصية الإبدال والدمج
= ٥ − ت

(٣) ($ت^{٢}$ + ٤ ت) − (٢ $ت^{٢}$ + ٤ $ت^{٣}$)
= (−١ + ٤ ت) − [٢ × −١ + ٤ × −١ × ت]
= (−١ + ٤ ت) − (−٢ − ٤ ت)
= −١ + ٤ ت + ٢ + ٤ ت
= ١ + ٨ ت

(٤) $(١ + ت)^{٢}$
= ١ + ٢ ت + $ت^{٢}$
= ١ + ٢ ت − ١ = ٢ ت

(٥) $(١ − ت)^{٤}$
= $((١ - ت)^{٢})^{٢}$
= $(١ - ٢ ت + ت^{٢})^{٢}$
= $(١ - ٢ ت - ١)^{٢}$
= $(-٢ ت)^{٢}$ = ٤ $ت^{٢}$ = −٤

(٦) (١ + ت) (٢ + ٣ ت)
= ٢ + ٥ ت + ٣ $ت^{٢}$
= ٢ + ٥ ت − ٣
= −١ + ٥ ت

تدريب ٥) اختصر لأبسط صورة :-

(١) (٣ + ٤ ت) + (٥ + ٢ ت)　(٢) (ت + ٤ ت) − (٢ $ت^{٢}$ + ٤ ت)

(٣) (−١ + ٤ ت)(−٢ − ٤ ت)　(٤) $(٣ - ٤ ت)^{٢}$

العددان المترافقان

يُسمى العددان مترافقان إذا كانا مختلفان فقط فى إشارة الجزء التخيلى .

العددان : أ + ب ت ، أ − ب ت عددان مترافقان.

خواص العددين المترافقان أ + ب ت ، أ − ب ت :

١	مجموع العددين المترافقان = عدد حقيقى	المجموع = ٢ أ
٢	الفرق بين العددين المترافقان = عدد تخيلى (وهذا ليس بالضرورى)	الفرق = ٢ب ت
٣	حاصل ضرب العددين المترافقان = عدد حقيقى	

للخاصية ٣ أهمية كبيرة وهى : تسهيل قسمة الأعداد النسبية .

أمثلة على الأعداد المترافقة :-

أولاً : بين ما إذا كان كل زوجين من الأعداد المركبة الآتية مترافقة أم لا :

العددين المركبين	مترافقان أم لا	السبب
أ + ب ت ، أ ـ ب ت	مترافقان	الجزئين التخيلين مختلفان فى الاشارة
س + ص ت ، ـ س + ت ص	لا	الجزء الحقيقى متغير فى الاشارة
أ ـ ب ت ، ـ أ + ب ت	لا	كلا الجزئين تغيرت اشارتهما

ثانياً أوجد مرافق العدد ٧ + ٢ ت وأوجد جمعها وضربهما.

الحل

مرافق العدد ٧ + ٢ ت هو ٧ − ٢ ت

جمعهما = ١٤ ، ضربهما = ٤٩ + ٤ = ٥٣

ثالثاً : اختصر لأبسط صورة . (فكرة المثال الضرب بسطاً ومقاماً فى مرافق المقام) :-

(١) $\frac{٤ - ٦ت}{٢ت}$ ← بالضرب × ت بسطاً ومقاماً ∴ $\frac{(٤ - ٦ت) \times ت}{(٢ت) \times ت} = \frac{٤ت - ٦ت^٢}{٢ت^٢}$

$= \frac{٤ت + ٦}{-٢} = -٢ت - ٣$

② $\dfrac{٣+٢\text{ت}}{٢-٥\text{ت}} = \dfrac{(٣+٢\text{ت})(٢+٥\text{ت})}{(٢-٥\text{ت})(٢+٥\text{ت})} = \dfrac{٦+١٥\text{ت}+٤\text{ت}+١٠\text{ت}^٢}{٤-٢٥\text{ت}^٢}$ ولكن $\text{ت}^٢ = -١$

$\therefore \dfrac{٣+٢\text{ت}}{٢-٥\text{ت}} = \dfrac{٦+١٩\text{ت}-١٠}{٤+٢٥} = \dfrac{-٤+١٩\text{ت}}{٢٩} = \dfrac{-٤}{٢٩} + \dfrac{١٩}{٢٩}\text{ت}$

③ $\dfrac{(٢+\text{ت})(١-\text{ت})}{(١+\text{ت})(٣-٢\text{ت})} = \dfrac{٢-٢\text{ت}+\text{ت}-\text{ت}^٢}{٣-٢\text{ت}+٣\text{ت}-٢\text{ت}^٢} = \dfrac{٢-\text{ت}+١}{٣+\text{ت}+٢} = \dfrac{٣-\text{ت}}{٥+\text{ت}}$

، $\dfrac{٣-\text{ت}}{٥+\text{ت}} = \dfrac{(٣-\text{ت})(٥-\text{ت})}{(٥+\text{ت})(٥-\text{ت})} = \dfrac{١٥-٨\text{ت}-١}{٢٥-\text{ت}^٢} = \dfrac{١٤-٨\text{ت}}{٢٦} = \dfrac{٢(٧-٤\text{ت})}{٢٦}$

$\therefore \dfrac{(٢+\text{ت})(١-\text{ت})}{(١+\text{ت})(٣-٢\text{ت})} = \dfrac{٧}{١٣} - \dfrac{٤}{١٣}\text{ت}$

رابعاً : أوجد قيمة س ، ص اللتان تحققان المعادلة في كل مما يأتي :

① $\text{س} + \text{ص ت} = \dfrac{١٠}{٣+\text{ت}}$

(بالضرب بسطاً ومقاماً في مرافق المقام)

$\text{س} + \text{ص ت} = \dfrac{١٠}{٣+\text{ت}} \times \dfrac{٣-\text{ت}}{٣-\text{ت}}$

$\therefore \text{س} + \text{ص ت} = \dfrac{١٠(٣-\text{ت})}{٩+١}$

$\therefore \text{س} + \text{ص ت} = ٣ - \text{ت}$

$\therefore \text{س} = ٣$ ، $\therefore \text{ص} = -١$

② $\dfrac{(٢+\text{ت})(٢-\text{ت})}{٣+٤\text{ت}} = \text{س} + \text{ص ت}$

$\dfrac{(٢+\text{ت})(٢-\text{ت})}{٣+٤\text{ت}} = \dfrac{٤+١}{٣+٤\text{ت}}$

$= \dfrac{٥}{٣+٤\text{ت}}$ (بالضرب بسطاً ومقاماً في مرافق المقام)

$= \dfrac{٥(٣-٤\text{ت})}{(٣+٤\text{ت})(٣-٤\text{ت})} = \dfrac{٣-٤\text{ت}}{٥} = \dfrac{٣}{٥} - \dfrac{٤}{٥}\text{ت}$

$\therefore \text{س} = \dfrac{٣}{٥}$ ، $\text{ص} = \dfrac{-٤}{٥}$

تدريب ٦) أولاً : اختصر لأبسط صورة :-

① $\dfrac{(٢+\text{ت})(٣+\text{ت})}{(٢-\text{ت})(٣-\text{ت})}$ ② $\dfrac{٣+٤\text{ت}}{٥-٢\text{ت}}$

ثانياً : أوجد قيمة س ، ص التي تحققان المعادلات الآتية :-

① $\dfrac{(٢+\text{ت})(٣+\text{ت})}{(٣-\text{ت})(٢-\text{ت})} = \text{س} - ٢\text{ص ت}$ ② $\text{س} - \dfrac{١}{٢}\text{ص ت} = \dfrac{٢(١+\text{ت})}{١-\text{ت}}$

خامساً : إذا كان $\text{أ} = \frac{\text{١ − ٢ت}}{\text{١ − ٣ت}}$ ، $\text{ب} = \frac{\text{٢ − ت}}{\text{٣ − ت}}$ فأثبت أن أ ، ب عددان مترافقان ثم أوجد قيمة : $\text{٢٥ (أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}\text{) − ٤٨ أ ب}$.

الحل

$$\text{أ} = \frac{\text{١ − ٢ت}}{\text{١ − ٣ت}} = \frac{\text{(١−٢ت)(١+٣ت)}}{\text{(١−٣ت)(١+٣ت)}} = \frac{\text{١+ت+٦}}{\text{١+٩}} = \frac{\text{٧ + ت}}{\text{١٠}} = \frac{\text{٧}}{\text{١٠}} + \frac{\text{١}}{\text{١٠}}\text{ ت}$$

$$\text{، ب} = \frac{\text{٢ − ت}}{\text{٣ − ت}} = \frac{\text{(٢−ت)(٣+ت)}}{\text{(٣−ت)(٣+ت)}} = \frac{\text{٦−ت + ١}}{\text{٩ + ١}} = \frac{\text{٧−ت}}{\text{١٠}} = \frac{\text{٧}}{\text{١٠}} - \frac{\text{١}}{\text{١٠}}\text{ ت}$$

∴ أ ، ب مترافقان (لاحظ إختلاف إشارتى الجزئين التخيليين من أ ، ب)

$$\because \text{أ}^{٢} = \left(\frac{\text{٧ + ت}}{\text{١٠}}\right)^{٢} = \frac{\text{٤٩ + ١٤ت − ١}}{\text{١٠٠}} = \frac{\text{٤٨ + ١٤ت}}{\text{١٠٠}} = \frac{\text{٢٤ + ٧ت}}{\text{٥٠}}$$

$$\text{، ب}^{٢} = \left(\frac{\text{٧ − ت}}{\text{١٠}}\right)^{٢} = \frac{\text{٢٤ − ٧ت}}{\text{٥٠}}$$

$$\text{، أ ب} = \frac{\text{٧ + ت}}{\text{١٠}} \times \frac{\text{٧ − ت}}{\text{١٠}} = \frac{\text{٤٩ + ١}}{\text{١٠٠}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}$$

$$\therefore \text{٢٥ (أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}\text{) −٤٨ أ ب} = \text{٢٥} \left(\frac{\text{٢٤ + ٧ت}}{\text{٥٠}} + \frac{\text{٢٤ − ٧ت}}{\text{٥٠}} \right) - \text{٤٨} \times \frac{\text{١}}{\text{٢}}$$

$$= \text{٢٥} \times \frac{\text{٢٤ + ٧ت + ٢٤ − ٧ت}}{\text{٥٠}} - \text{٢٤}$$

$$= \text{٢٥} \times \frac{\text{٤٨}}{\text{٥٠}} - \text{٢٤} = \text{٢٤ − ٢٤} = \text{صفر}$$

تدريب ٧) إذا كان : $\text{س} = \frac{\text{٧ − ت}}{\text{٢ − ت}}$ ، $\text{ص} = \frac{\text{١٣ − ت}}{\text{٤ + ت}}$

فأثبت أن : س ، ص مترافقان ثم أثبت أن : $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = \text{١٦}$

تمارين على الدرس الثانى

السؤال الأول : اختر الإجابة الصحيحة من بين القوسين :-

١) مجموعة حل المعادلة : س^{٢} + ٣ = ٠ فى ع هى ....

(١) {$\sqrt{٣}$ت ، -$\sqrt{٣}$ت} (٢) {$\sqrt{٣}$ت} (٣) {$\sqrt{٣}$ ، -$\sqrt{٣}$} (٤) $\emptyset$

٢) مجموعة حل المعادلة : س^{٢} + ٦٤ = ٠ فى ك هى ....

(١) { -٨ } (٢) { -٨ ت } (٣) {٨ ، -٨ } (٤) {٨ت ، -٨ت }

٣) إذا كان : ٢ = $\sqrt{٥}$ + $\sqrt{٣}$ ت ، ب = $\sqrt{٥}$ – $\sqrt{٣}$ ت فإن : ٢ × ب = ...

(١) ٢ (٢) -٢ (٣) ٢$\sqrt{٥}$ (٤) ٨

٤) إذا كان : م ، ن عددين صحيحين فإن : قيمة م التى تجعل ت$^{م-٢ن}$ = -(ت)$^{م-٢ن}$ هى ....

(١) ٤ (٢) -٢ (٣) ٤ن (٤) ٥

٥) أبسط صورة للعدد (١ + ت)^{١٠} = ... بينما أبسط صورة للعدد (١ – ت)^{١٠} = ...

(١) -٣٢ ت (٢) ٣٢ (٣) ٣٢ت (٤) -٣٢

٦) ت^{٤٣} فى أبسط صورة هو .... (١) -ت (٢) ت (٣) ١ (٤) -١

٧) مجموعة حل المعادلة : س^{٢} + $\sqrt{٣}$ = ٠ فى ك هى ....

(١) {$\sqrt{٣}$ت ، -$\sqrt{٣}$ت} (٢) {$\sqrt{٣}$ت} (٣) {$\sqrt{٣}$ ، -$\sqrt{٣}$} (٤) $\emptyset$

٨) إذا كان : ٢ + ب ت = $\frac{٥}{٥ + ت}$ فإن (٢ ، ب) = ...

(١) (-٢ ، -١) (٢) (-٢ ، ١) (٣) (٢ ، -١) (٤) (٢ ، ١)

٩) المقدار : (-٤ت)(-٦ت) فى أبسط صورة يساوى ..... (١) ٢٤ت^{٦} (٢) -٢٤ت (٣) ٢٤ (٤) -٢٤ت^{٣}

١٠) المقدار : (١٣ – ٢ت) – (٣ – ١٠ت) على الصورة ٢ + ب ت هو ....

(١) ١٠ – ٢ت (٢) ١٠ + ٨ت (٣) ١٦ + ٨ت (٤) ٢ + ت

١١) أبسط صورة للمقدار : (٦ + ت)(٤ – ٣ت) هى ....

(١) ٢٧ – ١٤ت (٢) ٢١ – ١٤ت (٣) ٢١ + ١٤ت (٤) ٢٧ + ١٤ت

١٢) إذا كان : $\frac{٤ - ت}{١ - ت}$ = س + ت ص فإن : س = ... ، ص = ... على الترتيب

(١) ٢ ، -٢ (٢) -٢ ، ٢ (٣) ٥ ، ٢ (٤) -٢ ، ٥

١٣) مرافق العدد ٥ت – ٣ هو ...... (١) -٥ت + ٣ (٢) ٥ت – ٣ (٣) ٥ت + ٣ (٤) -٥ت – ٣

١٤) ت$^{٤ن + ٤٢}$ فى أبسط صورة = ... (١) -ت (٢) ت (٣) ١ (٤) -١

١٥) $\sqrt{-٨}$ × $\sqrt{-٢}$ فى أبسط صورة = ... (١) -٤ت (٢) ٤ت (٣) ٤ (٤) -٤

١٦) إذا كان : س + ت ص = $\sqrt{-٢}$ × $\sqrt{٢}$ ت فإن : س = ... ، ص = ... على الترتيب

(١) ٢ ، ٠ (٢) -٢ ، ٠ (٣) ٠ ، ٢ (٤) ٠ ، -٢

١٧) ت$^{-١٩}$ فى أبسط صورة هو ..... (١) -ت (٢) ت (٣) ١ (٤) -١

١٨) مجموع العددين المركبين المترافقين هو دائما عدد ....

(١) حقيقي (٢) تخيلى (٣) حقيقى أو تخيلى (٤) غير ذلك

١٩) إذا كان ٥ت^{٥} + ٦ت^{٦} = س + ت ص فإن : س × ص = ...

(١) -١١ (٢) ١١ (٣) ٣٠ (٤) -٣٠

٢٠) إذا كان : -٣ + ت = ٢ ت + ب فإن : النقطة (٢ ، ب) تقع فى الربع ......

(١) الأول (٢) الثاني (٣) الثالث (٤) الرابع

٢١) إذا كان : أ + ب ت = ٣ + (٢ب − ١)ت فإن ب^{أ} = ...
① صفر ② ١ ③ ٢ ④ ٣

٢٢) العدد التخيلي − ت يعتبر بالنسبة للعدد التخيلي ت ....
① معكوسًا جمعيًا فقط ② معكوسًا ضربيًا فقط ③ معكوسًا ضربيًا وجمعيًا ④ غير ذلك

٢٣) مرافق العدد ٧ هو .... ① -٧ت^{٢} ② ٧ت^{٤} ③ ٧ت^{٢} ④ -٧ت^{٨}

٢٤) مرافق العدد : ٣ + $\sqrt{٢}$ ت هو ......
① ٣ + $\sqrt{٢}$ ت ② -٣ − $\sqrt{٢}$ ت ③ $\frac{١١}{٣ - \sqrt{٢}\,ت}$ ④ $\frac{١١}{٣ + \sqrt{٢}\,ت}$

السؤال الثاني : أكمل ما يأتي :-

١) إذا كان : س = ١ + $\sqrt{٣}$ ت ، ص = ١ − $\sqrt{٣}$ ت فإن س + ص = ... ، س ص = ...

٢) (ت^{٢٥} + ت$^{-١٢}$)^{٧} = ...

٣) (ت^{٦} − ت^{٥}) − (٢ − ت^{٩}) = س + ت ص فإن (س − ص)(س + ص) = ...

٤) (٢ + ٢ ت)^{٦} = ... اختصر لأبسط صورة .

٥) أبسط صورة للعدد ت$^{-٢٧}$ = ...

٦) إذا كانت س = ١+ت ، ص = ١ − ت فإن س^{٣}ص^{٣} =....ت^{٤٠}

٧) س + ت ص = $\frac{٢ - ٣ت}{ت}$ فإن س = ... ، ص = ...

السؤال الثالث : ضع في أبسط صورة كلا مما يأتي :

① ت^{٢٤} ② ت^{٢٧} ③ ت^{٦٦} ④ ت^{٣٣}

⑤ $\frac{١}{ت}$ ⑥ $\frac{١}{ت^{٢}}$ ⑦ $\frac{١}{ت^{٣}}$ ⑧ $\frac{١}{ت^{٤}}$

⑨ $\frac{١}{ت^{٢٥}}$ ⑩ $\frac{١}{ت^{٣٨}}$ ⑪ $\frac{١}{ت^{٤٠}}$ ⑫ $\frac{١}{ت^{٤٣}}$

⑬ ت$^{-٤٥}$ ⑭ ت$^{-٤٣}$ ⑮ ت$^{-٢٧}$ ⑯ ت$^{-٨٠}$

⑰ ت$^{٤ن+٢}$ ⑱ ت$^{٢-٤ن}$ ⑲ ت$^{٤ن-١}$ ⑳ ت$^{٨-٤ن}$

السؤال الرابع: بسط كلا مما يأتي :-

① $\sqrt{-١٥}$ ② $\sqrt{-٣} \times \sqrt{٣}$ ت ③ $\sqrt{-١٨} \times \sqrt{-١٢}$

④ ٣ ت (−٢ ت) ⑤ (−٤ ت) (−٦ ت) ⑥ (−٢ ت)^{٣} (−٣ ت)^{٢}

الدرس الثاني مقدمة عن الأعداد المركبة

الترم الأول

الدرس الثالث : تحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية

المميز $ب^{٢} - ٤ م ج$

علمنا مما سبق أن للمعادلة التربيعية جذران ، ولكن هناك أنواع متعددة لهذين الجذرين إما حقيقيين مختلفين أو حقيقيين متساويين أو مركبين غير حقيقيين و يمكن معرفة ذلك عند حل المعادلة بيانياً .

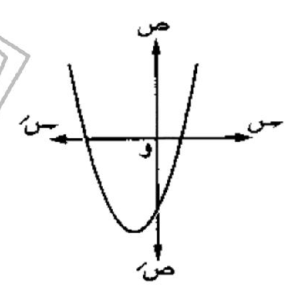
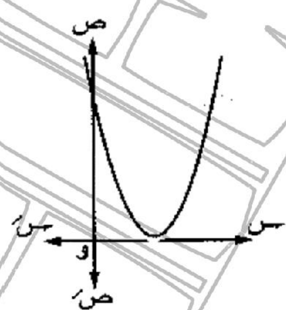
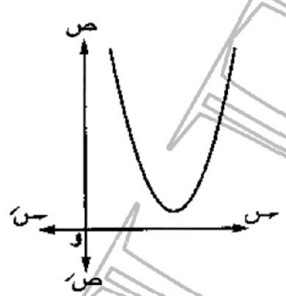
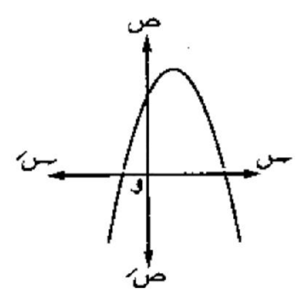
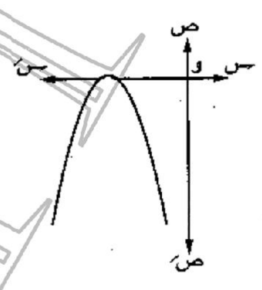
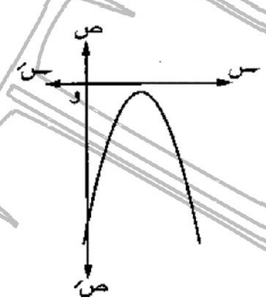
ويمكن معرفة نوع جذري المعادلة مباشرة دون حلها باستخدام مميز المعادلة والذى سنتعرف عليه فيما يلي :

- عند حل المعادلة التربيعية : $أ س^{٢} + ب س + ح = ٠$ حيث $أ \neq ٠$ باستخدام القانون العام

فإننا نحصل على جذرين هما : $\dfrac{-ب + \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ ح}}{٢ أ}$ ، $\dfrac{-ب - \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ ح}}{٢ أ}$

- وكلا الجذرين يحتوى على المقدار : $\sqrt{ب^{٢} - ٤ أ ح}$ ، ويُسمى المقدار : $ب^{٢} - ٤ أ ح$ **مميز** المعادلة التربيعية

ولجذرى المعادلة التربيعية ثلاث حالات فقط لا غير يمكن تحديدهم مباشرة بـ استخدام المميز

		موجب	مساويًا للصفر	سالب
المميز		$(ب^{٢} - ٤ أ ح) > ٠$	$ب^{٢} - ٤ أ ح = ٠$	$(ب^{٢} - ٤ أ ح) < ٠$
نوع الجذرين		حقيقيين مختلفين	حقيقيين متساويين	مركبان
رسم توضيحى لمنحنى الدالة	إشارة معامل $س^{٢}$ موجبة			
	إشارة معامل $س^{٢}$ سالبة			

الدرس الثالث تحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية

الترم الأول

مثال : ابحث نوع الجذرين لكل من المعادلات الآتية دون حلها :-

١) س^{٢} – ٣س + ١ = ٠
٢) س^{٢} – ٦س + ٩ = ٠
٣) س^{٢} – س + ٣ = ٠

الحل

١) ٩ = ١ ، ب = -٣ ، ج = ١ المميز = ب^{٢} – ٤٩ج = ٩ – ٤ × ١ × ١ = ٥
∵ المميز > ٠ ∴ الجذران عددان حقيقيان مختلفان

٢) ٩ = ١ ، ب = -٦ ، ج = ٩ المميز = ب^{٢} – ٤٩ج = ٣٦ – ٤ × ١ × ٩ = صفر
∵ المميز = ٠ ∴ الجذران عددان حقيقيان متساويان " كلا منهما عدد نسبى "

٣) ٩ = ١ ، ب = ١ ، ج = ٣ المميز = ب^{٢} – ٤٩ج = ١ – ٤ × ١ × ٣ = -١١
∵ المميز < ٠ ∴ الجذران عددان مركبان مترافقان

مثال : ابحث نوع الجذرين لكل من المعادلات الآتية ثم أوجد حلها :-

١) س^{٢} – ٥س + ٦ = ٠
٢) ٤س^{٢} – ٩ = ٠
٣) ٩س^{٢} + ٢٥ = ٠

الحل

١) ٩ = ١ ، ب = -٥ ، ج = ٦ المميز = ب^{٢} – ٤٩ج = ٢٥ – ٤ × ١ × ٦ = ١
∵ المميز > ٠ ∴ الجذران عددان حقيقيان مختلفان
و باستخدام القانون العام أو التحليل ∴ الجذران هما ٣ ، ٢

ملحوظة : إذا كان ٩ ، ب ، ج فى المعادلة التربيعية ٩س^{٢} + ب س + ج = ٠ أعداداً نسبية وكان المميز مربعاً كاملاً فإن الجذرين عددين حقيقين نسبيين .

٢) ٩ = ٤ ، ب = ٠ ، ج = -٩ المميز = ب^{٢} – ٤٩ج = ٠ – ٤ × ٤ × -٩ = ١٤٤
∵ المميز > ٠ ∴ الجذران عددان حقيقيان مختلفان
و باستخدام القانون العام أو التحليل ∴ الجذران هما $\frac{٣}{٢}$ ، $-\frac{٣}{٢}$

ملحوظة : إذا كانت ب = صفر ، وكان ٩ ، ج مختلفين فى الإشارة فإن للمعادلة التربيعية جذرين حقيقين مختلفين .

٣) ٩ = ٩ ، ب = ٠ ، جـ = ٢٥ المميز = ب^{٢} – ٤ ٩ جـ = ٠ – ٤ × ٤ × ٢٥ = -٩٠٠

∵ المميز < ٠ ∴ الجذران عددان مركبان مترافقان

و باستخدام القانون العام فقط ∴ الجذران هما $\frac{٥}{٣}$ ت ، - $\frac{٥}{٣}$ ت

ملحوظة : إذا كانت ب = صفر ، وكان ٩ ، جـ لهما نفس الإشارة فإن للمعادلة التربيعية جذرين مركبين مترافقين .

تدريب

(١) أثبت أن جذرى المعادلة ٢ س^{٢} – ٣ س + ٢ = ٠ مركبان ثم استخدم القانون العام لإيجاد هذين الجذرين

(٢) إذا كان جذرا المعادلة ٤ س^{٢} – م س + ٩ = ٠ متساويان فأوجد قيمة م ثم تحقق من صحة الناتج

مثال إذا كان جذرا المعادلة س^{٢} – ٤ س + ٩ = ٠ حقيقيان مختلفان، فأوجد قيم ٩ الممكنة.

الحل

٩ = ١ ، ب = -٤ ، جـ = ٩

∵ الجذران حقيقيان مختلفان ← ∴ ب^{٢} – ٤ ٩ جـ > ٠

∴ ١٦ – ٤ × ١ × ٩ > ٠

∴ ١٦ > ٤ ٩ ← بالقسمة ÷ ٤

∴ ٤ > ٩ ∴ ٩ ∈] -∞ ، ٤ [

تدريب

أوجد الفترة التى تنتمى إليها ك إذا كان جذر المعادلة ٢ س^{٢} – ٤ س + ك = ٠ حقيقيان

مثال أوجد قيمة ك التي تجعل جذري المعادلة ٢ س^{٢} – ٤ س + ك = ٠ متساويين

الحل

٩ = ٢ ، ب = -٤ ، جـ = ك

يكون الجذران متساويان إذا كان المميز = صفر

∴ ب^{٢} – ٤ ٩ جـ = ٠ ∴ (-٤)^{٢} – ٤ × ٢ × ك = ٠

∴ ١٦ – ٨ ك = ٠ ∴ ١٦ = ٨ ك $\boxed{∴ ك = ٢}$

الدرس الثالث تحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية

الترم الأول

مثال أثبت أنه لجميع قيم م الموجبة لا يكون للمعادلة

(م + ١) س^{٢} − ٢م س + م = ٠ جذور حقيقية

الحل

أ = (م + ١) ، ب = −٢م ، جـ = م

المميز = ب^{٢} − ٤ أ جـ = (−٢م)^{٢} − ٤ × (م + ١) × م = ٤م^{٢} − ٤م^{٢} − ٤م = −٤م

∵ م عدد موجب ∴ −٤م تكون عدد سالب (لأن سالب × موجب = سالب)

∴ لا توجد جذور حقيقية للمعادلة لجميع قيم م الموجبة

مثال إذا كان أ ، ب عددين نسبيين فأثبت أن جذري المعادلة

أ س^{٢} + (أ + ب) س + ب = ٠ نسبيان

الحل

أ = أ ، ب = (أ + ب) ، جـ = ب

المميز = (أ + ب)^{٢} − ٤ × أ × ب = أ^{٢} + ٢ أ ب + ب^{٢} − ٤ أ ب = أ^{٢} − ٢ أ ب + ب^{٢}

= (أ − ب)^{٢} وهذا مقدار مربع كامل

∵ أ ، ب عددان نسبيان والمميز مربع كامل

∴ جذرا المعادلة عددان نسبيان

مثال اثبت أنه لجميع قيم أ الحقيقية عدا الصفر لا يكون للمعادلة :

أ^{٢} س^{٢} + ٢ أ س + (أ^{٢} + ١) = ٠ جذور حقيقية

الحل

أ = أ^{٢} ، ب = ٢ أ ، جـ = (أ^{٢} + ١)

المميز = ب^{٢} − ٤ أ جـ = ٤ أ^{٢} − ٤ أ^{٢} (أ^{٢} + ١) = ٤ أ^{٢} − ٤ أ^{٤} − ٤ أ^{٢} = − ٤ أ^{٤}

وهى كمية سالبة تحت الجذر التربيعي.

∴ المعادلة ليس لها جذور حقيقية.

تدريب

١) اثبت أنه إذا كان م عدد نسبى فإن جذرى المعادلة : ٢٥س^{٢} + ٥(م + ٣) س + ٣م = ٠ عددان نسبيان .

٢) اثبت أنه لجميع قيم أ ، ب الحقيقية يكون جذرا المعادلة (س − أ) (س − ب) = ٥ غير نسبيان .

الدرس الرابع : العلاقة بين جذرى المعادلة التربيعية ومعاملات حدودها

نعلم أن جذرى المعادلة التربيعية : $أ س^2 + ب س + حـ = 0$ هما :

$$\frac{-ب + \sqrt{ب^2 - 4 أ حـ}}{2 أ} \quad ، \quad \frac{-ب - \sqrt{ب^2 - 4 أ حـ}}{2 أ}$$ ويكون :

① مجموع الجذرين $= \frac{-ب + \sqrt{ب^2 - 4 أ حـ}}{2 أ} + \frac{-ب - \sqrt{ب^2 - 4 أ حـ}}{2 أ} = \frac{-2 ب}{2 أ} = \frac{-ب}{أ}$

أى أن : $\boxed{\text{مجموع الجذرين} = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^2}}$

② حاصل ضرب الجذرين $= \frac{-ب + \sqrt{ب^2 - 4 أ حـ}}{2 أ} \times \frac{-ب - \sqrt{ب^2 - 4 أ حـ}}{2 أ}$

$$= \frac{ب^2 - (ب^2 - 4 أ حـ)}{4 أ^2} = \frac{ب^2 - ب^2 + 4 أ حـ}{4 أ^2} = \frac{4 أ حـ}{4 أ^2} = \frac{حـ}{أ}$$

أى أن : $\boxed{\text{حاصل ضرب الجذرين} = \frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^2}}$

وبصورة رمزية نكتب :

إذا كان : ل ، م جذرى المعادلة التربيعية : $أ س^2 + ب س + حـ = 0$ فإن :

① $\boxed{ل + م = \frac{-ب}{أ}}$ ② $\boxed{ل م = \frac{حـ}{أ}}$

حالات خاصة في المعادلة التربيعية : $أ س^2 + ب س + حـ = 0$

① **إذا كان أحد الجذرين معكوساً جمعياً للآخر فإن $\boxed{ب = 0}$**

أى أنه إذا كان أحد الجذرين ل و الآخر − ل فإن مجموع الجذرين = 0

و يكون معامل س = 0 (بشرط أن تكون اشارة الحد المطلق سالبة)

② **إذا كان أحد الجذرين معكوساً ضربياً للآخر فإن $\boxed{حـ = أ}$**

أى أنه إذا كان أحد الجذرين ل والآخر $\frac{1}{ل}$ فإن حاصل ضربهما = 1

و يكون الحد المطلق = معامل $س^2$

③ إذا كان : $أ = 1$ فإن : $ل + م = -ب$ ، $ل م = حـ$

أى أن : مجموع الجذرين = المعكوس الجمعي لمعامل س

، حاصل ضرب الجذرين = الحد المطلق

الدرس الرابع العلاقة بين جذرى المعادلة التربيعية ومعاملات حدودها

الترم الأول

مثال أوجد مجموع وحاصل ضرب جذرى المعادلة

(٢ س + ١) (س − ٥) = ٣

الحل

∵ (٢ س + ١) (س − ٥) = ٣

∴ ٢ س^{٢} − ٩ س − ٥ = ٣ (فك الأقواس)

∴ ٢ س^{٢} − ٩ س − ٥ − ٣ = ٠ ∴ ٢ س^{٢} − ٩ س − ٨ = ٠

∴ مجموع الجذرين = $\frac{-(-٩)}{٢}$ = $\frac{٩}{٢}$ ، حاصل ضرب الجذرين = $\frac{-٨}{٢}$ = − ٤

مثال فى المعادلة (ك − ٣) س^{٢} − (ك + ٢) س − ٦ = ٠ أوجد قيمة ك إذا كان :

(١) مجموع جذريها = ٢ (٢) حاصل ضرب جذريها = ٣

(٣) أحد جذريها يساوى المعكوس الجمعى للآخر

(٤) أحد جذريها يساوى المعكوس الضربى للآخر

الحل

(١) ∵ مجموع الجذرين = ٢ ∴ $\frac{ك + ٢}{ك - ٣}$ = ٢

∴ ٢ ك − ٦ = ك + ٢ ∴ ٢ ك − ك = ٢ + ٦ ∴ $\boxed{ك = ٨}$

(٢) ∵ حاصل ضرب الجذرين = ٣ ∴ $\frac{-٦}{ك - ٣}$ = ٣ ∴ ٣ ك − ٩ = − ٦

٣ ك = − ٦ + ٩ ∴ ٣ ك = ٣ ∴ $\boxed{ك = ١}$

(٣) ∵ أحد الجذرين = المعكوس الجمعى للآخر ∴ ب = ٠

∴ − (ك + ٢) = ٠ ∴ ك + ٢ = ٠ ∴ $\boxed{ك = -٢}$

(٤) ∵ أحد الجذرين = المعكوس الضربى للآخر ∴ جـ = أ

∴ ك − ٣ = − ٦ ∴ ك = − ٦ + ٣ ∴ $\boxed{ك = -٣}$

تدريب

إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة ٢ س^{٢} − ٣ س + ك = ٠ يساوى ١

فأوجد قيمة ك ثم حل المعادلة فى مجموعة الأعداد المركبة

مثال إذا كان س = ٢ أحد جذرى المعادلة س^{٢} + أ س + ٢ = ٠

فأوجد قيمة أ ثم أوجد الجذر الآخر

الحل

∵ س = ٢ أحد جذري المعادلة س^{٢} + أ س + ٢ = ٠ (بالتعويض فى المعادلة)

∴ (٢)^{٢} + أ × ٢ + ٢ = ٠ ∴ ٤ + ٢ أ + ٢ = ٠

∴ ٢أ + ٦ = ٠ ∴ ٢أ = −٦ ∴ $\boxed{أ = -٣}$

∴ المعادلة هى : $س^٢ - ٣س + ٢ = ٠$ (لإيجاد الجذر الآخر نحلل الطرف الأيمن)

∴ (س − ٢) (س − ١) = ٠ ∴ س − ٢ = ٠ أو س − ١ = ٠

∴ س = ٢ أو س = ١ ∵ الجذر المعلوم = ٢ ∴ الجذر الآخر = ١

مثال إذا كان (١ + ت) هو أحد جذور المعادلة $س^٢ - ٢س + أ = ٠$ حيث أ ∈ ع*

فأوجد ① الجذر الآخر ② قيمة أ

الحل

أ = ١ ، ب = −٢ ، جـ = أ

① ∵ ١ + ت هو أحد جذرى المعادلة وبفرض أن الجذر الآخر هو س

مجموع الجذرين = ٢ ∴ س + ١ + ت = ٢

∴ س = ٢ − ١ − ت ∴ س = ١ − ت

∴ الجذر الآخر = ١ − ت (وأيضاً لأن الجذرين المركبين مترافقان)

② ∵ حاصل ضرب الجذرين = أ

∴ (١ + ت) (١ − ت) = أ ∴ ١ + ١ = أ ∴ أ = ٢

مثال أوجد قيمة م التى تجعل أحد جذرى المعادلة $س^٢ - ٦س + م = ٠$

مساوياً ضعف الجذر الآخر

الحل

نفرض أن أحد الجذرين = ل ، الجذر الآخر = ٢ ل

∵ مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ}$ ∴ ل + ٢ ل = $\frac{٦}{١}$ ∴ ٣ ل = ٦ ∴ $\boxed{ل = ٢}$

حاصل ضرب الجذرين = $\frac{جـ}{أ}$ ∴ ل × ٢ ل = م ∴ $٢ ل^٢ = م$

∴ $٢(٢)^٢ = م$ ∴ م = ٢ × ٤ ∴ $\boxed{م = ٨}$

تدريب

أوجد قيمة م التى تجعل أحد جذرى المعادلة $س^٢ - م س + ١٠ = ٠$

يزيد عن ضعف الجذر الآخر بمقدار ١

مثال أوجد قيمة أ التى تجعل مجموع جذرى المعادلة $س^٢ - (أ + ٢) س + ٦ = ٠$

يساوى حاصل ضرب جذرى المعادلة $س^٢ + ٥ أ س + أ^٢ = ٠$

الحل

∵ مجموع جذرى المعادلة الاولى = $\frac{-ب}{أ}$ = $\frac{أ+٢}{١}$ = $\boxed{أ + ٢}$

∵ حاصل ضرب جذرى المعادلة الثانية = $\frac{جـ}{أ}$ = $\frac{أ^٢}{١}$ = $\boxed{أ^٢}$

∴ $أ^٢ = أ + ٢$ ∴ $أ^٢ - أ - ٢ = ٠$

∴ (أ − ٢) (أ + ١) = ٠ ∴ $\boxed{أ = ٢}$ أو $\boxed{أ = -١}$

الدرس الرابع العلاقة بين جذرى المعادلة التربيعية ومعاملات حدودها

الترم الأول

تدريب

أوجد قيمة م التى تجعل جذرى المعادلة $س^2 - 6 س + م = 0$ متساويان

مثال أوجد قيمة ك إذا علم أن النسبة بين جذرى المعادلة

$س^2 - ك س + 6 = 0$ كنسبة 2 : 3

الحل

نفرض أن جذرى المعادلة هما 2 ل ، 3 ل

∵ مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ}$ ∴ $2 ل + 3 ل = \frac{ك}{1}$ ∴ $5 ل = ك$

∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{جـ}{أ}$ ∴ $2 ل \times 3 ل = 6$ ∴ $6 ل^2 = 6$

∴ $ل^2 = 1$ ∴ $ل = \pm 1$ ∴ $ك = \pm 5$

تدريب

إذا كانت النسبة بين جذرى المعادلة $أ س^2 + ب س + جـ = 0$ كنسبة 3 : 5

أثبت أن $15 ب^2 = 64 أ جـ$

تمارين على الدرس الرابع

السؤال الأول : اختر الإجابة الصحيحة من بين القوسين :-

(١) مجمـــوع جـــذرى المعادلـــة ٥ س^{٢} = ٢ − ٣ س هو ....

[$\frac{٣}{٥}$ أ، $\frac{-٣}{٥}$ أ، $\frac{٢}{٥}$ أ، $\frac{-٢}{٥}$]

(٢) حاصل ضرب جـــذرى المعادلـــة ٢ س^{٢} − ٦ س = ٠ هو ....

[٣ أ، −٣ أ، ٦ أ، صفر]

(٣) حاصل ضرب جذرى المعادلة (س − ٢) (س + ١) + ٢ = ٠ هـو ....

[١ أ، ٠ أ، −١ أ، −٢]

(٤) مجمـــوع جذرى المعادلة (٣ س − ٢) (٥ س + ٢) = ٠ يساوى ....

[$\frac{-٤}{١٥}$ أ، $\frac{-٢}{١٥}$ أ، $\frac{٢}{١٥}$ أ، $\frac{٤}{١٥}$]

(٥) مجمـــوع جـــذرى المعادلـــة ٥ س^{٢} − ٣ = ٠ هـو ....

[$\frac{٣}{٥}$ أ، $\frac{-٣}{٥}$ أ، صفر أ، $\frac{٥}{٣}$]

(٦) وزارة إذا كان أحـد جـــذرى المعادلـة س^{٢} − ٣ س + هـ = ٠ ضعـف الآخـر

فإن هـ تساوى .... [−٤ أ، −٢ أ، ٢ أ، ٤]

(٧) وزارة إذا كان أحد جذرى المعادلة أ س^{٢} − ٣ س + ٢ = ٠ معكوساً ضربياً للاخر

فإن أ تساوى .... [$\frac{١}{٣}$ أ، $\frac{١}{٢}$ أ، ٢ أ، ٣]

(٨) وزارة إذا كان أحد جذرى المعادلة س^{٢} − (ب − ٣) س + ٥ = ٠ معكوساً جمعياً للآخر

فإن ب تساوى .... [−٥ أ، −٣ أ، ٣ أ، ٥]

(٩) إذا كان جـــذرا المعادلـــة ٤ س^{٢} − ١٢ س + هـ = ٠ متساويـان

فإن هـ = ... [٣ أ، ٤ أ، ٩ أ، ١٦]

(١٠) إذا كان أحد جذرى المعادلة ٣ س^{٢} − (أ − ٥) س + ٤ أ = ٠ معكوس جمعى للآخر

فإن أ = ... [٥ أ، $\frac{٤}{٣}$ أ، $\frac{٣}{٤}$ أ، −٥]

(١١) إذا كان أحـد جـــذرى المعادلـــة ٢ س^{٢} + ٣ س + أ − ١ = صفر

هـو المعكـــوس الضربـــى للجـــذر الآخـــر فـإن أ يساوى ....

[١ أ، $\frac{٣}{٢}$ أ، ٣ أ، −٣]

السؤال الثانى : أكمل ما يأتى :-

(١) فى المعادلـــة ٣ س^{٢} − ٦ س + ٥ = ٠ مجمـــوع الجـــذرين = ...

وحاصل ضرب الجـــذرين = ...

(٢) فى المعادلة $٢ س^٢ - ٨ س = ٠$ مجموع الجذرين = ...

وحاصل ضرب الجذرين = ...

(٣) إذا كان مجموع جذرى المعادلة $س^٢ + (٢ ك + ١) س + ٢ = ٠$ يساوى ٣

فإن ك = ...

(٤) وزارة إذا كان س = ٣ أحد جذرى المعادلة $س^٢ + م س - ٢٧ = ٠$

فإن م = ... ، الجذر الآخر = ...

(٥) وزارة إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة $٢ س^٢ + ٧ س + ٣ ك = ٠$ يساوى

مجموع جذرى المعادلة $س^٢ - (ك + ٤) س = ٠$ فإن ك = ...

(٦) إذا كان جذرا المعادلة $س^٢ + ٤ س + أ = ٠$ متساويين

فإن قيمة أ = ...

(٧) إذا كان أحد جذرى المعادلة $س^٢ - ٣ س + أ = ٠$ هو المعكوس الضربى للجذر الآخر

فإن أ = ...

(٨) إذا كان أحد جذرى المعادلة $س^٢ + (ك - ١) س - ٥ = ٠$ معكوس جمعى للجذر الآخر

فإن ك = ...

(٩) إذا كان أحد جذرى المعادلة $هـ س^٢ + ب س + ب^٢ = ٠$ يساوى نصف الجذر الآخر

فإن هـ = ...

(١٠) إذا كان ل ، م جذرى المعادلة $س^٢ - ٥ س + ٦ = ٠$

فإن $ل^٤ م^٤$ = ...

(١١) إذا كان مجموع جذرى المعادلة $س^٢ - ٣ س + هـ + ١ = ٠$ يساوى حاصل ضربهما

فإن هـ = ...

(١٢) الشرط اللازم ليكون أحد جذرى المعادلة $أ س^٢ + ب س + هـ = ٠$

مساوياً المعكوس الضربى للجذر الآخر هو ....

السؤال الثالث : الأسئلة المقالية :-

(١) أوجد مجموع وحاصل ضرب جذرى المعادلة : $٣س^٢ + ١٩س - ١٤ = صفر$

(٢) أوجد مجموع وحاصل ضرب جذرى المعادلة : $٤س^٢ + ٤س - ٣٥ = صفر$

(٣) أوجد مجموع وحاصل ضرب جذرى المعادلة : $س^٢ = -٢س + ٣٥$

(٤) أوجد مجموع وحاصل ضرب جذرى المعادلة : $٢س^٢ = -٣س - ٧$

(٥) أوجد مجموع وحاصل ضرب جذرى المعادلة : س (س−٤) − ٥ = صفر

(٦) أوجد مجموع وحاصل ضرب جذرى المعادلة : ٣س (٣س−٨) + ١٦ = صفر

(٧) إذا كان أحد جذرى المعادلة : أ $س^٢$ − ٣س + ٢ = ٠ معكوس ضربى للآخر فأوجد أ

(٨) إذا كان أحد جذرى المعادلة : $س^٢$ − (ك + ٥) س + ٥ = ٠ معكوس جمعى للآخر فأوجد أ

(٩) إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة : ٢$س^٢$ + ٧س + ٣ك = صفر

يساوى مجموع جذرى المعادلة : $س^٢$ − (ك +٤)س = صفر فأوجد قيمة ك

(١٠) كون المعادلة التربيعية التى كل من جذريها يزيد عن ١

عن كل من جذرى المعادلة : $س^٢$ − ٣س + ٢ = ٠

(١١) كون المعادلة التربيعية التى كل من جذريها ينقص ١ عن

عن كل من جذرى المعادلة : $س^٢$ − ٣س + ٢ = ٠

(١٢) كون المعادلة التربيعية التى كل من جذريها يساوى مربع نظيره

من جذرى المعادلة : $س^٢$ + ٣س − ٥ = ٠

(١٣) ل ، م جذرا المعادلة : $س^٢$ − ٧س + ٣ = ٠ فأوجد المعادلات التى جذراها

(أ) ٢ل ، ٢م (ب) ل + ٢ ، م + ٢ (حـ) ل + م ، ل م

(١٤) قطعة أرض على شكل مستطيل بعداه ٦ ، ٩ متر يراد مضاعفة مساحة هذه

القطعة و ذلك بزيادة طول كل بعد من أبعادها بنفس المقدار أوجد المقدار المضاف

(١٥) وزارة إذا كانت النسبة بين جذري المعادلة أ $س^٢$ + ب س + حـ = ٠ كنسبة ٢ : ٣

أثبت أن ٢٥ أ حـ = ٦ $ب^٢$

(١٦) أوجد مجموع وحاصل ضرب جذري كل من المعادلات الآتية :

① (٤ س − ١) (س + ٢) = (س − ١) (٢ س − ٣) [−٦ ، $\frac{٥}{٢}$]

② وزارة $\frac{٤س + ١}{س − ٢} = \frac{٣س − ٤}{س + ٦}$ حيث س ∉ {٢ ، −٦} [−٣٥ ، −٢]

③ وزارة $\frac{١}{س − ٢} + \frac{١}{س + ٢} = ٣$ حيث س ∉ {٢ ، −٢} [$\frac{٢}{٣}$ ، −٤]

④ وزارة $\frac{س + ٢}{س − ٢} + \frac{س − ٣}{س + ٣} = \frac{٣س + ١}{س − ٢}$ حيث س ∉ {٢ ، −٣} [−١٠ ، −٩]

الدرس الرابع العلاقة بين جذرى المعادلة التربيعية ومعاملات حدودها

الترم الأول

(١٧) أوجد الشرط اللازم لكى يكون أحد جذرى المعادلة أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠

① ضعف الجذر الآخر   ② يزيد عن الجذر الآخر بمقدار ٣

[٩ أ جـ = ٢ ب^{٢} ، ٤ أ جـ = ب^{٢} − ٩ أ^{٢}]

(١٨) إذا كان أحد جذرى المعادلة س^{٢} + أ س + ب = ٠ ضعف الجذر الآخر

وكان أحد جذرى المعادلة س^{٢} + أ س + جـ = ٠ ثلاثة أمثال الجذر الآخر

فأوجد ب : جـ   [٢٧ : ٣٢]

(١٩) أوجد قيمة أ التى تجعل الفرق بين جذرى المعادلة س^{٢} − أ س + ٢ = ٠

يساوى الفرق بين جذرى المعادلة ٤ س^{٢} + ٨ س + أ = ٠   [٣ ، −٤]

(٢٠) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة س^{٢} − ٨ س + ب = ٠

فأوجد قيمة ب التى تجعل ل^{٢} + م^{٢} = ٤٠   [١٢]

(٢١) إذا كان ل ، م جذرى المعادلة (ك − ١) س^{٢} − ك س + ١ = ٠ حيث ك ≠ ١

أوجد قيمة ك الحقيقية التى تجعل $\frac{١}{ل} + \frac{١}{م} = ٣$ [٢]

الدرس الرابع العلاقة بين جذرى المعادلة التربيعية ومعاملات حدودها

الترم الأول

الدرس الخامس : تكوين المعادلة التربيعية متى عُلم جذراها

بفرض أن ل ، م هما جذرا المعادلة التربيعية : $أس^{2} + ب س + حـ = 0$

وبضرب الطرفين فى $\frac{1}{أ}$ حيث $أ \neq 0$ تصبح المعادلة على الصورة :

$س^{2} + \frac{ب}{أ} س + \frac{حـ}{أ} = 0$ أى : $س^{2} - \left(-\frac{ب}{أ}\right) س + \frac{حـ}{أ} = 0$ (١)

ولكن : $-\frac{ب}{أ} = ل + م$ (مجموع الجذرين) ، $\frac{حـ}{أ} = ل م$ (حاصل ضرب الجذرين)

وحيث أن ل ، م هما جذرا المعادلة ∴ المعادلة هى : $\boxed{(س - ل)(س - م) = 0}$

وبالتعويض فى (١) نحصل على المعادلة التربيعية التى جذراها ل ، م

وهى : $\boxed{س^{2} - (ل + م) س + ل م = 0}$

الصورة العامة للمعادلة التربيعية

$\boxed{س^{2} - (\text{مجموع الجذرين}) س + \text{حاصل ضرب الجذرين} = 0}$

علاقات هامة

① $ل^{2} + م^{2} = (ل + م)^{2} - 2 ل م$

② $(ل - م)^{2} = (ل + م)^{2} - 4 ل م$

③ $ل^{3} - م^{3} = (ل - م)\left[(ل + م)^{2} - ل م\right]$

④ $ل^{3} + م^{3} = (ل + م)\left[(ل + م)^{2} - 3 ل م\right]$

⑤ $\frac{1}{ل} + \frac{1}{م} = \frac{ل + م}{ل م}$

⑥ $\frac{ل}{م} + \frac{م}{ل} = \frac{ل^{2} + م^{2}}{ل م} = \frac{(ل + م)^{2} - 2 ل م}{ل م}$

مثال ١)

١ كون المعادلة التربيعية التى جذراها : ٢ ، ٣

مجموع الجذرين = ٢ + ٣ = ٥ ، حاصل ضرب الجذرين = ٢ × ٣ = ٦

∵ المعادلة هى س^٢ – (مجموع الجذرين) س + حاصل ضرب الجذرين = ٠

∴ المعادلة هى س^٢ – ٥ س + ٦ = ٠

طريقة أخرى

∵ الجذرين ٢ ، ٣

∴ المعادلة هى (س – ٢) (س – ٣) = س^٢ – ٥ س + ٦ = ٠

٢ كون المعادلة التربيعية التى جذراها ٢ + √٣ ، ٢ – √٣

مجموع الجذرين = ٢ + √٣ + ٢ – √٣ = ٤

حاصل ضرب الجذرين = (٢ + √٣) (٢ – √٣) = ٤ – ٣ = ١

∵ س^٢ – (مجموع الجذرين) س + حاصل ضرب الجذرين = ٠ هى صورة المعادلة التربيعية

∴ المعادلة هى س^٢ – ٤ س + ١ = ٠

طريقة أخرى

∵ الجذرين ٢ + √٣ ، ٢ – √٣

∴ المعادلة هى (س – (٢ + √٣)) (س – (٢ – √٣))

= س^٢ – ٢ س – √٣ س – ٢ س + √٣ س = س^٢ – ٤ س + ١ = ٠

٣ كون المعادلة التربيعية التى جذراها (–٢ + ٢ت)/(١ + ت) ، (–٢ – ٤ت)/(٢ – ت)

ليكن جذرا المعادلة هما ل ، م

ل = (–٢ + ٢ت)/(١ + ت) × (١ – ت)/(١ – ت) = ٤ت/٢ = ٢ت

م = (–٢ – ٤ت)/(٢ – ت) × (٢ + ت)/(٢ + ت) = –١٠ت/٥ = –٢ت

ل + م = ٢ت – ٢ت = ٠ ، ل م = ٢ت × –٢ت = –٤ت^٢ = ٤

∵ المعادلة التربيعية التى جذراها ل ، م : س^٢ – (ل + م) س + ل م = ٠

∴ س^٢ + ٤ = ٠

طريقة أخرى

∵ الجذرين ٢ت ، –٢ت

∴ المعادلة هى (س – ٢ت) (س + ٢ت) = س^٢ + ٤ = ٠

تدريب ١) كوِّن المعادلة التربيعية التى جذراها :

(١) ٣/٢ ، ٥/٤ (٢) ٣ + √٢ ، ٣ – √٢ (٣) (–١ + ت)/ت ، ٢/(١ + ت)

كون المعادلة التربيعية التى جذراها :

(١) $٣ + \sqrt{٢}ت$ ، $٣ - \sqrt{٢}ت$ (٢) $\frac{٣}{ت}$ ، $\frac{٣ + ٣ت}{١ - ت}$

تكوين معادلة تربيعية بمعلومية معادلة تربيعية أخرى

مثال ٢)

[١] **إذا علم** أن ل ، م جذر المعادلة $س^٢ - ٦س - ١٠ = ٠$

أوجد المعادلة التى جذراها : ل - ٣ ، م - ٣

∵ ل ، م هما جذرا المعادلة المعطاة

مجموع الجذرين = ل + م = $\frac{-ب}{أ} = \frac{٦}{١} = ٦$ ، حاصل ضرب الجذرين= ل م = $\frac{جـ}{أ} = \frac{-١٠}{١} = -١٠$

∵ ل - ٣ ، م - ٣ هما جذرا المعادلة المطلوبة

مجموع الجذرين = ل - ٣ + م - ٣ = ل + م - ٦ = ٦ - ٦ = صفر

حاصل ضرب الجذرين = (ل - ٣) (م - ٣) = ل م - ٣ م - ٣ ل + ٩

= ل م - ٣ (م + ل) + ٩ = -١٠ - ٣ (-٦) + ٩

= -١٠ + ١٨ + ٩ = ١٧

∴ المعادلة المطلوبة هى : $س^٢$ - (مجموع الجذرين) س + حاصل ضرب الجذرين = ٠

∴ المعادلة هى : $س^٢ + ١٧ = ٠$

[٢] **إذا كان** جذرا المعادلة $س^٢ - ٦س + ٢ = ٠$ هما ل، م

أوجد المعادلة التى جذراها : ٢ل ، ٢م

∵ ل ، م هما جذرا المعادلة المعطاة

∴ مجموع الجذرين = ل + م = $\frac{-ب}{أ} = \frac{٦}{١} = ٦$ ، حاصل ضرب الجذرين = ل م = $\frac{جـ}{أ} = \frac{٢}{١} = ٢$

∵ ٢ل ، ٢م هما جذرا المعادلة المطلوبة

مجموع الجذرين = ٢ل + ٢م = ٢ (ل + م)

نعوض عن ل + م = ٦ ← ∴ مجموع الجذرين = ٢ × ٦ = ١٢

ضرب الجذرين = ٢ ل × ٢ م = ٤ ل م = ٤ × (ل م)

بالتعويض عن ل م = ٢ ← ∴ ضرب الجذرين = ٤ × ٢ = ٨

∴ المعادلة الجديدة هى : $س^٢$ − (مجموع الجذرين) س + حاصل ضرب الجذرين = ١

∴ المعادلة هى : $س^٢$ − ١٢ س + ٨ = ٠

٣ إذا علم أن ل ، م هما جذرا المعادلة $س^٢ - ٥ س - ٣ = ٠$

فأوجد المعادلة التي جذراها $\frac{٣}{ل}$ ، $\frac{٣}{م}$

الحل

من المعادلة المعطاة : مجمــــــوع الجذرين (ل + م) = ٥ ، حاصل ضرب الجذرين (ل م) = − ٣

فى المعادلة المطلوبة : مجمـــــوع الجذرين = $\frac{٣}{ل} + \frac{٣}{م} = \frac{٣ م + ٣ ل}{ل م} = \frac{٣(م + ل)}{ل م} = \frac{٣ × ٥}{-٣} = -٥$

حاصل ضرب الجذرين = $\frac{٣}{ل} × \frac{٣}{م} = \frac{٩}{ل م} = \frac{٩}{-٣} = -٣$

∴ المعادلة المطلوبة هى : $س^٢ - (-٥) س + (-٣) = س^٢ + ٥ س - ٣ = ٠$

٤ إذا كــان ل ، م جـــذرا المعـــادلـــة $س^٢ + ٥ س + ٧ = ٠$

فأوجد المعادلة التى جذراها ٢ $ل^٢$ ، ٢ $م^٢$

الحل

من المعادلة المعطاة : مجمــــــوع الجذرين (ل + م) = − ٥ ، حاصل ضرب الجذرين (ل م) = ٧

فى المعادلة المطلوبة : مجمــــــوع الجذرين = ٢ $ل^٢$ + ٢ $م^٢$ = ٢ ($ل^٢$ + $م^٢$) = ٢ [$(ل + م)^٢$ − ٢ ل م]

= ٢ [$(-٥)^٢$ − ٢ × ٧] = ٢ [١١] = ٢٢

حاصل ضرب الجذرين = ٢ $ل^٢$ × ٢ $م^٢$ = ٤ $ل^٢$ $م^٢$ = ٤ $(ل م)^٢$ = ٤ $(٧)^٢$ = ١٩٦

∴ المعادلة المطلوبة هى : $س^٢ - ٢٢ س + ١٩٦ = ٠$

تدريب ٢) (١) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^٢ - ٧ س + ٩ = ٠$ حيث ل > م

فأوجد القيمة العددية لكل من المقادير الآتية :

(١) $ل^٢ + م^٢$ (٢) $ل^٢ + ٣ ل م + م^٢$ (٣) ل − م (٤) $ل^٣ - م^٣$

(٢) إذا عُلم أن جذرى المعادلة : $س^٢ - ٨ س + ٥ = ٠$ هما ل ، م

فكوِّن المعادلة التى جذراها : $\frac{١}{ل}$ ، $\frac{١}{م}$

الدرس الخامس تكوين المعادلة التربيعية متى علم جذراها

الترم الأول

تمارين على الدرس الخامس

السؤال الأول : اختر الإجابة الصحيحة من بين القوسين :-

(١) المعادلة التى جذراها ٣ ، −٢ هى .... [(س − ٣) (س − ٢) = ٠ أ، س^٢ − س − ٦ = ٠ أ، س^٢ − ٦ س + ١ = ٠ أ، غير ذلك]

(٢) المعادلة التربيعية التى جذراها ٣ ، −٣ هى ....

[س^٢ − ٦ = ٠ أ، س^٢ − ٩ = ٠ أ، س^٢ − س − ٩ = ٠ أ، غير ذلك]

(٣) المعادلة التربيعية التى جذراها ٣ ، ٠ هى ....

[س^٢ − ٣ = ٠ أ، س^٢ − ٣ س + ٣ = ٠ أ، س^٢ = ٣ س أ، غير ذلك]

(٤) المعادلة التى جذراها $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٥}{٢}$ هى........... [س^٢ − ٤ س + ١٥ = ٠ أ، ٤ س^٢ − ١٦ س + ١٥ = ٠ أ، ٤ س^٢ − ١٦ س + ٦٠ = ٠ أ، غير ذلك]

(٥) إذا كان ٢ ، −١ هما جذرا المعادلة س^٢ + ب س + هـ = ٠ فإن ب = ...

[١ أ، −١ أ، ٥ أ، −٥]

(٦) إذا كان ٢ ، −٣ هما جذرا المعادلة س^٢ + ب س + هـ = ٠ فإن هـ = ...

[−١ أ، ١ أ، ٦ أ، −٦]

السؤال الثانى : أكمل ما يأتى :-

(١) المعادلة التربيعية التى جذراها متساويان وكل منهما = ١ هى ....

(٢) معادلة الدرجة الثانية التى جذراها ٢ ، −٢ هى ....

(٣) المعادلة التربيعية التى جذراها ٣ ، ١ هى ....

(٤) المعادلة التربيعية التى جذراها ٣ ، −٧ هى ....

(٥) المعادلة التربيعية التى جذراها −٨ ، ٥ هى ....

(٦) المعادلة التربيعية التى جذراها $\sqrt{٢}$ ، $-\sqrt{٢}$ هى ....

السؤال الثالث : أسئلة متنوعة :-

(١) وزارة إذا علم أن جذرى المعادلة س^٢ − ٢ س + ٥ = صفر هما ل ، م كون المعادلة التى جذراها ل + م ، ل م

[س^٢ − ٧ س + ١٠ = ٠]

(٢) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة $س^{٢} + ٧ س + ١٠ = ٠$

أوجد المعادلة التى جذراها ل – ١ ، م – ١ [$س^{٢} + ٩ س + ١٨ = ٠$]

(٣) كون المعادلة التربيعية التى يزيد كل من جذريها بمقدار ١ عن جذرى المعادلة $س^{٢} - ٧ س - ٩ = ٠$ [$س^{٢} - ٩ س - ١ = ٠$]

(٤) كون المعادلة التى ينقص كل من جذريها بمقدار ٤ عن جذرى المعادلة $س^{٢} + ٣ س - ٥ = ٠$ [$س^{٢} + ١١ س + ٢٣ = ٠$]

(٥) كون المعادلة التربيعية التي جذراها ضعفا جذرى المعادلة $٢ س^{٢} - ٨ س + ٥ = ٠$
[$س^{٢} - ٨ س + ١٠ = ٠$]

(٦) إذا علم أن ل ، م جذرا المعادلة $س^{٢} - ٦ س - ١٠ = ٠$ فأوجد المعادلة التي جذراها :

① $\frac{٢}{٣ ل}$ ، $\frac{٢}{٣ م}$ ② $٢ ل^{٢} + ٣$ ، $٢ م^{٢} + ٣$

[$٤٥ س^{٢} + ١٨ س - ٢ = ٠$ ، $س^{٢} - ١١٨ س + ٧٤٥ = ٠$]

(٧) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة $٢ س^{٢} - ٣ س + ٥ = ٠$

كون المعادلة التي جذراها ٢ – ل ، ٢ – م [$٢ س^{٢} - ٥ س + ٧ = ٠$]

(٨) إذا كان ل ، م هما جذرى المعادلة $س^{٢} + ٣ س + ٤ = ٠$

أوجد المعادلة التى جذراها $\frac{ل}{٢}$ ، $\frac{م}{٢}$ [$٢ س^{٢} + ٣ س + ٢ = ٠$]

(٩) إذا كان ل ، م هما جذرى المعادلة $س^{٢} - ٧ س + ٤ = ٠$

فأوجد المعادلة التى جذراها $ل^{٢} م$ ، $م^{٢} ل$ [$س^{٢} - ٢٨ س + ٦٤ = ٠$]

(١٠) إذا كان ل ، م هما جذرى المعادلة $س^{٢} - ٢ س - ١ = ٠$

أوجد قيمة $ل^{٢} م^{٢}$ ، $\frac{١}{ل} + \frac{١}{م}$ ، $\frac{ل}{م} + \frac{م}{ل}$ ، $ل^{٢} م + ل م^{٢}$ [١ ، –٢ ، –٦ ، –٢]

(١١) إذا كان ل ، م هما جذرى المعادلة $س^{٢} - ٣ س - ١ = ٠$

كون المعادلة التى جذراها $\frac{١}{ل^{٢}}$ ، $\frac{١}{م^{٢}}$ [$س^{٢} - ١١ س + ١ = ٠$]

(١٢) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة $س^{٢} - ٦ س - ١٠ = ٠$

فكون المعادلة التى جذراها $\frac{١}{ل}$ ، $\frac{١}{م}$ [$١٠ س^{٢} + ٦ س - ١ = ٠$]

(١٣) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة س^{٢} − ٢ س + ٦ = ٠
كون المعادلة التى جذراها ل م ، ل^{٢} + م^{٢} [س^{٢} + ٢س − ٤٨ = ٠]

(١٤) إذا كان ل ، م هما جذرى المعادلة س^{٢} − ٢ س − ٨ = ٠ وكان ل > م
كون المعادلة التربيعية التى جذراها ل − ١ ، م + ٣ [س^{٢} − ٤س + ٣ = ٠]

(١٥) (وزارة) إذا كان ل − ١ ، م − ١ هما جذرا المعادلة س^{٢} − ٣ س − ٦ = ٠
فأوجد المعادلة التى جذراها ل ، م [س^{٢} − ٥س − ٢ = ٠]

(١٦) (وزارة) إذا كان الفرق بين جذرى المعادلة س^{٢} + هـ س + ٢ هـ = ٠ يساوى ضعف
حاصل ضرب جذرى المعادلة س^{٢} + أ س + هـ = ٠ فأوجد قيمة هـ [٠ ، $\frac{-٨}{٣}$]

(١٧) كون المعادلة التربيعية التى جذراها :
① $\frac{أ - ب}{أ + ب}$ ، $\frac{أ + ب}{أ - ب}$ ② $\frac{أ^{٢} - ب^{٢}}{أ - ب}$ ، $\frac{أ^{٣} - ب^{٣}}{أ^{٢} + أب + ب^{٢}}$

(١٨) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة س^{٢} + ٣ س − ٧ = ٠
فأوجد المعادلة التى جذراها (ل + ٢)^{٢} ، (م + ٢)^{٢} [س^{٢} − ١٩س + ٨١ = ٠]

(١٩) كون المعادلة التى أحد جذريها يساوى مجموع مربعى جذرى المعادلة س^{٢} − ٢ س − ١ = ٠
و الجذر الآخر يساوى مربع مجموعهما [س^{٢} − ١٠س + ٢٤ = ٠]

(٢٠) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة س^{٢} − ٣ س + ١ = ٠
فكون المعادلة التى جذراها ل^{٢} م + م^{٢} ل ، $\frac{م}{ل}$ + $\frac{ل}{م}$ [س^{٢} − ١٠س + ٢١ = ٠]

(٢١) إذا كان الفرق بين جذرى المعادلة ٣ س^{٢} − ٢ س + هـ = ٠ يساوى الفرق بين
جذرى المعادلة ٢ س^{٢} − هـ س + ٣ = ٠ فأثبت أن ٩ هـ^{٢} + ٤٨ هـ − ٢٣٢ = ٠

(٢٢) إذا كان ل ، م هما جذرى المعادلة س^{٢} − ٦ س + هـ = ٠ وكان $\frac{١ - ل}{ل}$ ، $\frac{١ - م}{م}$
جذرا المعادلة ٨ س^{٢} + ١٠ س + ء = ٠ فأوجد كلاً من هـ ، ء [٣ ، ٨]

الدرس السادس : اشارة الدالة

المقصود ببحث إشارة الدالة هو إيجاد قيم س التى تجعل قيم الدالة موجبة و إيجاد قيم س التى تجعل قيم الدالة سالبة و معرفة قيم س التى تجعل قيمة الدالة مساوياً للصفر

و يمكن إيجاد إشارة الدالة تبعاً لما يلى :

إشارة الدالة الثابتة

إشارة الدالة الثابتة د : د(س) = أ ، أ ≠ صفر هى نفس إشارة أ لجميع قيم س ∈ ع

إشارة الدالة الخطية

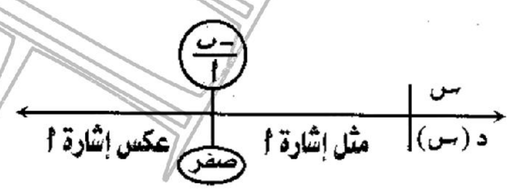
لإيجاد إشارة الدالة الخطية د : د (س) = أ س + ب ، أ ≠ ٠ فإننا نوجد صفر الدالة

أى قيمة س التى تجعل قيمة الدالة = صفر وهو $\frac{-ب}{أ}$ فتكون إشارة الدالة :

① د (س) = صفر عندما تكون س $=$ $\frac{-ب}{أ}$

② مثل إشارة أ عندما تكون س $>$ $\frac{-ب}{أ}$

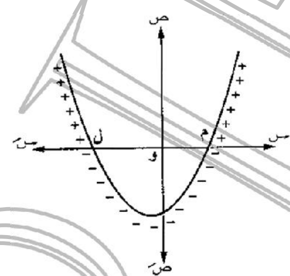
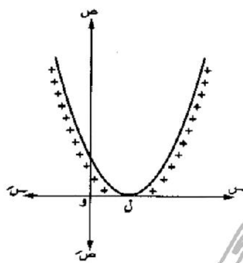
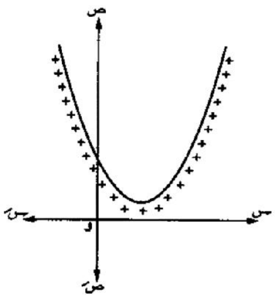
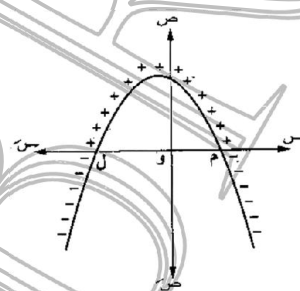
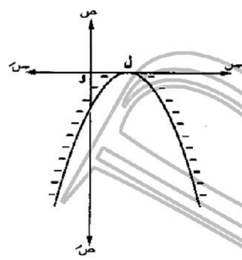
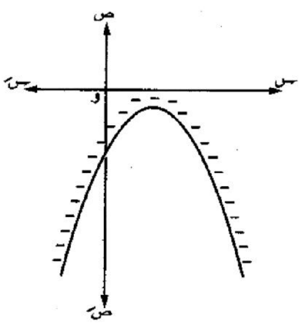
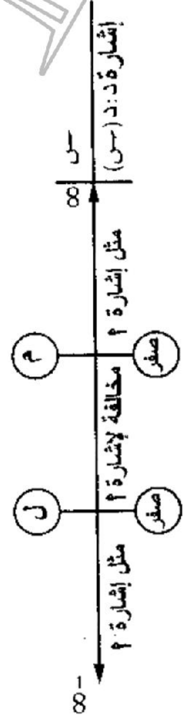
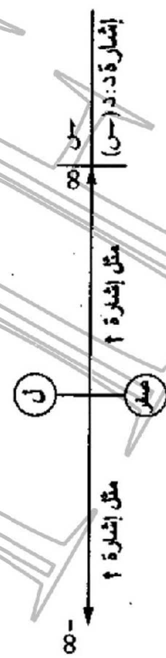
③ عكس إشارة أ عندما تكون س $<$ $\frac{-ب}{أ}$



إشارة الدالة التربيعية

لتعيين اشارة الدالة التربيعية د : د (س) = ﻡ $س^٢$ + ب س + ﺟ ، ﻡ ≠ ٠

فإننا نُوجد مميز المعادلة : ﻡ $س^٢$ + ب س + ﺟ = ٠ ، وتوجد ثلاث حالات كما بالجدول :

		موجب	مساويًا للصفر	سالب
المميز		موجب (ب٢ – ٤ أ حـ) > ٠	مساويًا للصفر ب٢ – ٤ أ حـ = ٠	سالب (ب٢ – ٤ أ حـ) < ٠
نوع الجذرين		حقيقيين مختلفين	حقيقيين متساويين	مركبان
رسم توضيحى لمنحنى الدالة	اشارة معامل س٢ موجبة			
	اشارة معامل س٢ سالبة			
اشارة الدالة				إشارة الدالة مثل إشارة أ لجميع قيم س ∈ ع

مثال عين إشارة كل من الدالتين الآتيتين :

(١) د (س) = ٣ (٢) د (س) = -٢

الحل

(١) د (س) = ٣ دالة ثابتة ∴ إشارة د موجبة دائماً أى عندما س ∈ ح

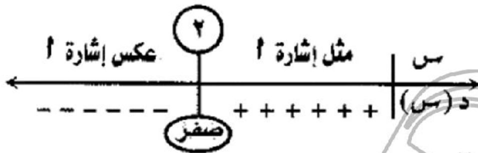
(٢) د (س) = -٢ دالة ثابتة ∴ إشارة د سالبة دائماً أى عندما س ∈ ح

مثال عين إشارة كلاً من الدالتين الآتيتين مع التوضيح على خط الأعداد :

(١) د (س) = س - ٢ (٢) د (س) = ٦ - ٢ س

الحل

(١) ∵ د (س) = س - ٢ بوضع د (س) = ٠ (لإيجاد أصفار الدالة)



∴ س - ٢ = ٠ ∴ س = ٢

∴ د (س) = ٠ عندما س = ٢

إشارة د (س) تكون موجبة عندما س > ٢

إشارة د (س) تكون سالبة عندما س < ٢

(٢) ٦ - ٢ س = ٠

∴ ٦ = ٢ س ∴ س = $\frac{٦}{٢}$ = ٣

∴ د (س) = ٠ عندما س = ٣

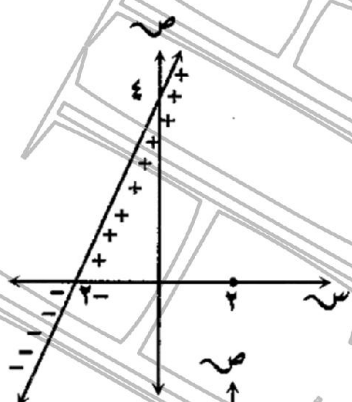
إشارة د (س) تكون سالبة عندما س > ٣

إشارة د (س) تكون موجبة عندما س < ٣

مثال عين إشارة كلا من الدالتين الآتيتين مع التوضيح بيانياً :

(١) د (س) = ٢ س + ٤ (٢) د (س) = ١ - س

الحل



(١) ∵ د (س) = ٢ س + ٤

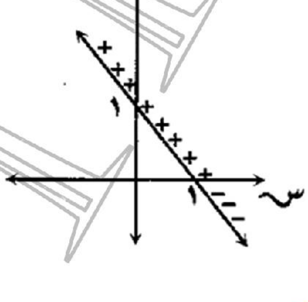
د (س) = ٠ عندما ٢ س + ٤ = ٠

∴ ٢ س = -٤ ∴ س = -٢

أي أن د (س) = ٠ عندما س = -٢

إشارة د (س) تكون موجبة عندما س > -٢

إشارة د (س) تكون سالبة عندما س < -٢



(٢) د (س) = ١ - س

∴ د (س) = ٠ عندما ١ - س = ٠

∴ د (س) = ٠ عندما س = ١

إشارة د (س) تكون سالبة عندما س > ١

إشارة د (س) تكون موجبة عندما س < ١

تدريب ١) ارسم كل من الدوال الآتية وابحث اشارة كل منها :-

١) د(س) = ٥
٢) د(س) = -٣
٣) د(س) = س – ٢
٤) د(س) = ٣ – ٢س

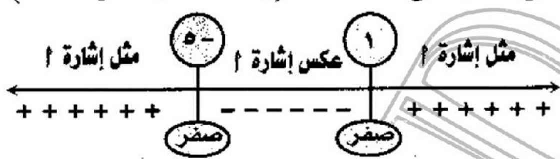
مثال عين إشارة كل من الدوال الآتية مع التوضيح على خط الاعداد :

① د (س) = س^{٢} + ٤ س – ٥   ② د (س) = ٣ س – س^{٢}

③ د (س) = س^{٢} – ٢ س + ١   ④ د (س) = س^{٢} – ٢ س + ٣

الحل

① نوجد جذرا المعادلة س^{٢} + ٤ س – ٥ = ٠ (باستخدام التحليل)



∴ (س + ٥) (س – ١) = ٠

∴ س = – ٥ أو س = ١

∴ د (س) = ٠ عندما س ∈ { – ٥ ، ١ }

إشارة د موجبة عندما س ∈ ح – [–٥ ، ١]

إشارة د سالبة عندما س ∈] –٥ ، ١ [

② ٣ س – س^{٢} = ٠

∴ س (٣ – س) = ٠

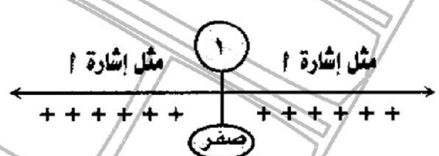
∴ س = ٠ أو س = ٣

∴ د (س) = ٠ عندما س ∈ { ٠ ، ٣ }

إشارة د سالبة عندما س ∈ ح – [٠ ، ٣]

إشارة د موجبة عندما س ∈] ٠ ، ٣ [

③ س^{٢} – ٢ س + ١ = ٠



∴ (س – ١) (س – ١) = ٠

∴ س = ١ أو س = ١

∴ د (س) = ٠ عندما س = ١

إشارة د موجبة عندما س ∈ ح – { ١ }

④ المعادلة س^{٢} – ٢ س + ٣ = ٠ ليس لها جذور حقيقية (باستخدام المميز)

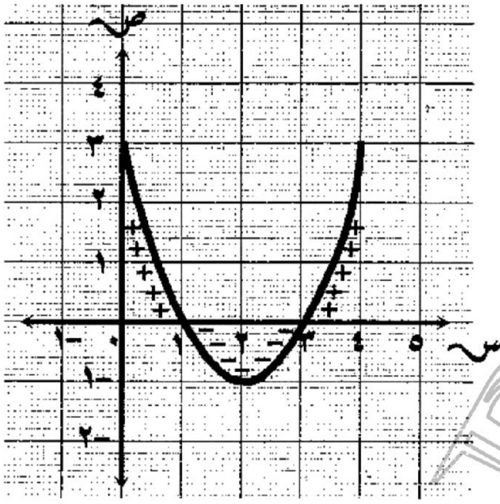
∴ إشارة د موجبة عندما س ∈ ح (لها نفس إشارة س^{٢} دائماً)

مثال ارسم منحنى الدالة د : د(س) = س^{٢} − ٤س + ٣ فى الفترة [٠ ، ٤]

ومن الرسم عين إشارة الدالة فى ح

الحـل

س	٠	١	٢	٣	٤
د(س)	٣	٠	−١	٠	٣



من الرسم نلاحظ أن :

د(س) = ٠ عندما س ∈ {١ ، ٣}

إشارة د موجبة عندما س ∈ ح − [١ ، ٣]

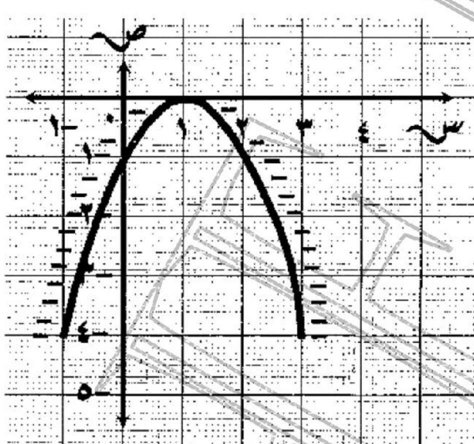
إشارة د سالبة عندما س ∈]١ ، ٣[

مثال ارسم منحنى الدالــة د(س) = ٢س − س^{٢} − ١ فى الفترة [−١ ، ٣]

ومن الرسم عين إشارة الدالة فى ح

الحـل

س	−١	٠	١	٢	٣
د(س)	−٤	−١	٠	−١	−٤



من الرسم نجد أن :

د(س) = ٠ عندما س = ١

إشارة د سالبة عندما س ∈ ح − {١}

تدريب ٢) ابحث اشارة الدوال الآتية مع الرسم :-

ملحوظة (للرسم أوجد نقطة رأس المنحنى وأوجد ٣نقط قبلها وبعدها)

١) د(س) = ٤س^{٢} − ٢٠س + ٢٥

٢) د(س) = ٨ − س^{٢} − ٢س

٣) د(س) = (س − ٣)^{٢}

٤) د(س) = س^{٢} − ٤س + ٥

مثال إذا كانت د (س) = س^{٢} − ٤ س ، هـ (س) = س^{٢} − ٧ س + ١٠

فعين إشارة كل منهما ثم اذكر الفترات التى تكون فيها الدالتين موجبتين معاً أو سالبتين معاً

الحل

نوجد جذرا المعادلة س^{٢} − ٤ س = ٠

∴ س (س − ٤) = ٠

∴ س = ٠ أو س = ٤

∴ د (س) = ٠ عندما س ∈ { ٠ ، ٤ }

أشارة د موجبة عندما س ∈ ح − [٠ ، ٤]

أشارة د سالبة عندما س ∈] ٠ ، ٤ [

نوجد جذرا المعادلة س^{٢} − ٧ س + ١٠ = ٠

∴ (س − ٢) (س − ٥) = ٠

∴ س = ٢ أو س = ٥

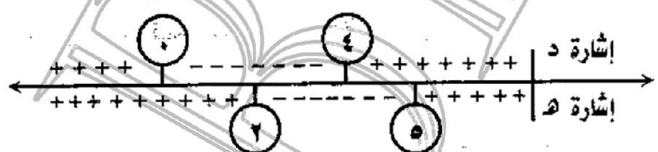
∴ هـ (س) = ٠ عندما س ∈ { ٢ ، ٥ }

أشارة هـ موجبة عندما س ∈ ح − [٢ ، ٥]

أشارة هـ سالبة عندما س ∈] ٢ ، ٥ [

الدالتان موجبتان معاً عندما س ∈] −∞ ، ٠ [∪] ٥ ، ∞ [

وسالبتان معاً عندما س ∈] ٢ ، ٤ [



تدريب ٣) إذا كانت د(س) = س^{٢} − ٤ ، ر(س) = س − ٢ فأوجد الفترات التى تكون فيها د ، ر لهما نفس الاشارة .

الدرس السابع : متباينات الدرجة الثانية فى مجهول واحد

سبـق أن درسنا متباينـة الدرجـة الأولى فى مجهول واحد وعلمنا أن حل المتباينة معناه إيجـاد جميـع قيـم المجهـول التى تحقـق هذه المتباينة وتكتب على صـورة فتـرة

حل المتباينات التربيعية فى ح

لحل المتباينـة التربيعيـة فإننـا نتبـع الخطـوات التاليـة :

(١) نكتـب الدالـة التربيعيـة المناظـرة للمتباينـة

(٢) ندرس إشارة هذه الدالة بنفس طريقة الدرس السابقـة

(٣) نوجد مجموعة حل المعادلة المناظرة للمتباينة فإذا كان :

مثال حل كـلاً من المتباينـات الآتيـة :

① $س^٢$ − ٥ س + ٤ > ٠ ② $س^٢$ − ٥ س + ٤ < ٠

③ $س^٢$ − ٥ س + ٤ ≥ ٠

الحـل

① لحل هذه المتباينة نتبع الخطوات التالية :

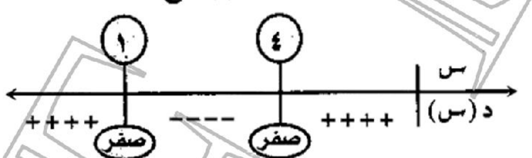
(١) نكتب الدالة التربيعية المناظرة للمتباينة وهى د (س) = $س^٢$ − ٥ س + ٤

(٢) نـدرس إشـارة الدالـة ونوضحـها على خط الأعـداد بوضع د (س) = ٠

$س^٢$ − ٥ س + ٤ = ٠

∴ (س − ٤) (س − ١) = ٠

∴ س = ٤ أو س = ١



(٣) نحدد الفـترات التى تحقـق المتباينـة $س^٢$ − ٥ س + ٤ > ٠ أى قيم س التى تجعل الطرف الأيمن > ٠ أى الفترة التى تجعل أشارة الدالة موجبـة

∴ م . ح = ح − [١ ، ٤]

② نفـس المتباينـة السابقـة ولكننـا نلاحـظ أن علامـة التبايـن <

لذلـك نوجـد الفتـرة التـى تحقـق المتباينـة $س^٢$ − ٥ س + ٤ < ٠

∴ م . ح =] ١ ، ٤ [

③ نفـس المتباينـة الأولـى ولكـن نلاحـظ أن علامـة التبايـن ≥

وهى تعنى قيم س التى تجعل الطرف الأيمن للمتباينة > صفر أو يساوى صفر

∴ م . ح = ح −] ١ ، ٤ [

مثال حل كل من المتباينـــات الآتيــة :

(١) ١٠ س − ٢٥ < س^{٢} (٢) ١٠ س > س^{٢} + ٢٥

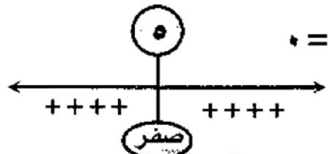
(٣) س^{٢} − ١٠ س + ٢٥ ≥ ٠ (٤) س^{٢} − ١٠ س + ٢٥ ≤ ٠

الحـــل

نجعـــل س^{٢} دائمـــاً فـى الطـــرف الأيمـــن قبـــل الحـــل

(١) ∵ ١٠ س − ٢٥ < س^{٢} ∴ − س^{٢} + ١٠ س − ٢٥ < ٠

$\boxed{∴ س^{٢} − ١٠ س + ٢٥ > ٠}$ (عند ضرب الطرفين × −١ نعكس علامة التباين)



∵ المعادلة المناظرة للمتباينة هى س^{٢} − ١٠ س + ٢٥ = ٠

∴ (س − ٥) (س − ٥) = ٠

∴ س = ٥ ∴ المعادلة لها حـل وحيـد

ونلاحظ من دراسة إشارة الدالة على خط الأعداد أن

الفترة التى تحقق المتباينة س^{٢} − ١٠ س + ٢٥ > ٠ هى ع − {٥}

$\boxed{∴ م.ح = ع − \{٥\}}$

(٢) ∵ ١٠ س > س^{٢} + ٢٥ ∴ ١٠ س − س^{٢} − ٢٥ > ٠

∴ س^{٢} − ١٠ س + ٢٥ < ٠

ونلاحـــظ أنـــها نفـــس المتباينـــة الأولـى ولكـــن علامـــة التبايـــن <

ونلاحـــظ انـــه لا يوجـــد فتـــرة تحقـــق هـــذه المتباينـــة

$\boxed{∴ م.ح = \phi}$

(٣) نفـــس المتباينـــة الأولـــى ولكـــن علامـــة التبايـــن ≥

ونلاحـــظ فـــى هـــذه الحالـــة أن العـــدد ٥ يحقـــق المتباينـــة

$\boxed{∴ م.ح = ع}$

(٤) نفـــس المتباينـــة الأولـــى ولكـــن علامـــة التبايـــن ≤

ونلاحـــظ انـــه لا يوجـــد قيـــم سالبـــة تحقـــق المتباينـــة

ولكن العـــدد ٥ فقط هو الذى يحقـــق المتباينة ويكون الطرف الأيمن = صفر

$\boxed{∴ م.ح = \{٥\}}$

تدريب ١) حل المتباينه : أ) ٤ − ٣س − س^{٢} > صفر

ب) س^{٢} − ٧س + ١٠ ≥ صفر

مثال أوجد مجموعة حل المتباينة فى كل مما يأتى :

(١) س^{٢} + س + ١٢ > ٠ (٢) س^{٢} + س + ١٢ ≤ ٠

الحل

(١) لبحث إشارة الدالة المناظرة للمتباينة فإننا نوجد مجموعة حل المعادلة س^{٢} + س + ١٢ = ٠

فنلاحظ أن المعادلة ليس لها جذور حقيقية و تأكدنا من ذلك باستخدام المميز

حيث ب^{٢} − ٤ أ جـ = ١ − ٤ × ١ × ١٢ = −٤٧ أى أن المميز < ٠

والفترة التى تحقق المتباينة هى ح ++++++++++

حيث أن جميع الأعداد الحقيقية تجعل الطرف الأيمن > ٠

$\boxed{\therefore \text{م . ح} = \text{ح}}$

لاحظ أنه إذا كانت س^{٢} + س + ١٢ ≥ ٠ فإن م . ح = ح أيضاً

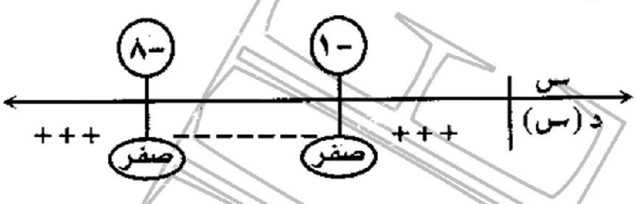
(٢) نفس المتباينة الأولى ولكن علامة التباين ≤ ٠

لاحظ أنه لا يوجد عدد يجعل الطرف الأيمن ≤ ٠

لذلك فإن م . ح = ϕ

مثال حل المتباينة (س + ٣)^{٢} ≤ ١٠ − ٣ (س + ٣)

الحل



∵ (س + ٣)^{٢} ≤ ١٠ − ٣ (س + ٣)

∴ س^{٢} + ٦ س + ٩ ≤ ١٠ − ٣ س − ٩

∴ س^{٢} + ٩ س + ٨ ≤ ٠

∴ المعادلة المناظرة لهذه المتباينة هى س^{٢} + ٩ س + ٨ = ٠

∴ (س + ٨) (س + ١) = ٠

∴ س = −٨ أو س = −١

ونلاحظ من دراسة إشارة الدالة على خط الأعداد أن م . ح = [−٨، −١]

تدريب ٢) حل المتباينة : أ) (س + ٣)^{٢} < ٣(س + ٣)

ب) (س + ٢)^{٢} < (س + ١) (٤ − س)