مذكرة شرح

فى

حساب المثلثات

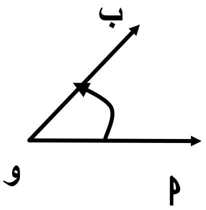
الصف الأول الثانوى

الفصل الدراسى الأول

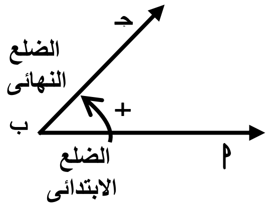
منتدى توجيه الرياضيات
أ/ عادل إدوار

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

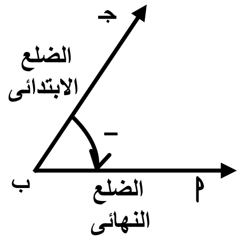
الزاوية الموجهة : هي إتحاد زوج مرتب من شعاعين لهما نقطة بداية واحدة حيث يسمى الشعاعين ضلعي الزاوية ، نقطة البداية رأس الزاوية .
مثل ∠ م و ب ضلعاها ($\overleftarrow{\text{و م}}$ ، $\overleftarrow{\text{و ب}}$)، و $\overleftarrow{\text{و م}}$ ضلع إبتدائي ، و $\overleftarrow{\text{و ب}}$ ضلع نهائي



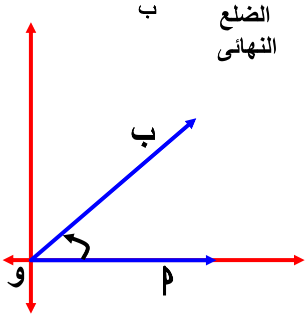
القياس الموجب للزاوية الموجهة :
إذا كان الإتجاه من الضلع الإبتدائي إلي الضلع النهائي عكس إتجاه عقارب الساعة



القياس السالب للزاوية الموجهة :
إذا كان الإتجاه من الضلع الإبتدائي إلي الضلع النهائي مع إتجاه عقارب الساعة .



الوضع القياسي للزاوية الموجهة :
إذا كان ضلعها الإبتدائي ينطبق على الإتجاه الموجب لمحور السينات و رأسها نقطة الأصل



ملاحظات هامة :

١- ∠ م ب جـ الموجهة ≠ ∠ جـ ب م الموجهة

٢- لكل زاوية موجهة فى وضعها القياسي قياسان أحدهما موجب و الأخر سالب بحيث يكون مجموعهما العددى ٣٦٠ °

مثلا :
(١٢٠ ، - ٢٤٠°) ؛ (١٥٠ ، - ٢١٠°) ؛ (- ٣٠٠ ، ٦٠°) ، (-٤٥ ، ٣١٥)
(٦٠° ، - ٣٠٠°) ، (١٢٠° ، - ٢٤٠°) ، (- ٣٠٠° ، ٦٠°) وهكذا

٣- إذا كان (س) القياس الموجب لزاوية موجهة ما فإن القياس السالب لها هو (س – ٣٦٠)
أو إذا كان (هـ ^ء^) القياس الموجب لزاوية موجهة ما فإن القياس السالب لها هو(هـ ^ء^ – ٢ط)
، إذا كان (- س) القياس السالب لزاوية موجهة ما فإن القياس الموجب لها (٣٦٠ – س)
أو إذا كان (هـ ^ء^) القياس السالب لزاوية موجهة ما فإن القياس الموجب لها هو(٢ط – هـ ^ء^)
حيث هـ ^ء^ الزاوية بالتقدير الدائرى و سوف يأتى لاحقاً .

مثال١ : أوجد القياس السالب للزوايا الأتية : ١٥٠ ° ، ٣٢٠ °

الحـــــل

القياس السالب للزاوية ١٥٠ = ١٥٠ – ٣٦٠ = - ٢١٠
حل أخر : القياس السالب للزاوية ١٥٠ = - (٣٦٠ – ١٥٠) = - ٢١٠
القياس السالب للزاوية ٣٢٠ = ٣٢٠ – ٣٦٠ = - ٤٠

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

مثال ٢ : أوجد القياس الموجب للزوايا الأتية : ـ ٤٣ ° ، ـ ٢٣٠ °

الحـــــل

القياس الموجب للزاوية ــ ٤٣ = ٣٦٠ ــ ٤٣ = ١١٧ °

القياس الموجب للزاوية ــ ٢٣٠ = ٣٦٠ ــ ٢٣٠ = ١٣٠ °

*** لإيجاد الوضع القياسي لاى زاوية : نتبع الأتى :**

١ـ إذا كان قياس الزاوية أكبــــــر من ٣٦٠ °

فيجب طرح منها ٣٦٠ حتى نصل لأول عدد أقل من ٣٦٠ °

٢ـ إذا كان قياس الزاوية سالب يجب جمع عليها ٣٦٠ حتى نصل لأول عدد موجب

مثال٣: أوجد الوضع القياسي للزوايا الأتية : ٩٢٠ ° ، ـ ٣٠ ° ، ـ ١٠٢٠ ° ، ١٢٥٠ ° ، ـ ٤٢٠

الحـــــل

٩٢٠ ° = ٩٢٠ ــ ٣٦٠ = ٥٦٠ ــ ٣٦٠ = ٢٠٠ °

ـ ٣٠ ° = ـ ٣٠ + ٣٦٠ = ٣٣٠ °

ـ ١٠٢٠ ° = ـ ١٠٢٠ + ٣٦٠ = ـ ٦٦٠ + ٣٦٠ = ـ ٣٠٠ + ٣٦٠ = ٦٠

١٢٥٠ ° = ١٢٥٠ ــ ٣٦٠ = ٨٩٠ ــ ٣٦٠ = ٥٣٠ ــ ٣٦٠ = ١٧٠ °

ـ ٤٢٠ ° = ـ ٤٢٠ + ٣٦٠ = ـ ٦٠ + ٣٦٠ = ٣٠٠ °

*** الزوايا المتكافئة :**

هى الزوايا التى يكون لها وضعها القياسي موحد أو أضلاعها النهائية متطابقة .

و هى الزوايا التى قياسها = (هـ ± ن × ٣٦٠) أو (هـ ± ٢ ن ط)

حيث ن = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٠٠٠٠٠

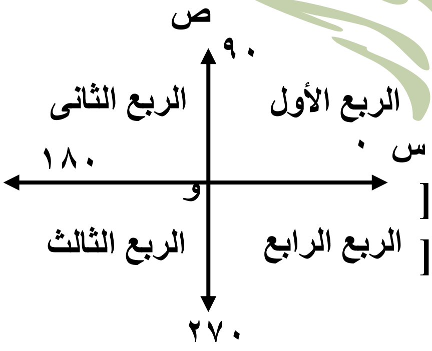
* محورين الاحداثيات س ، ص يقسم المستوى الى أربع أجزاء كل جزء يسمى (ربع) فى الشكل أمامك :

١ـ الربع الأول محصور بين ٠ ، ٩٠ [٠ ° ، ٩٠ °]

٢ـ الربع الثانى محصور بين ٩٠ ، ١٨٠ [٩٠ ° ، ١٨٠ °]

٣ـ الربع الثالث محصور بين ١٨٠ ، ٢٧٠ [١٨٠ ° ، ٢٧٠ °]

٤ـ الربع الرابع محصور بين ٢٧٠ ، ٣٦٠ [٢٧٠ ° ، ٣٦٠ °]



ملاحظة :

الزوايا التى قياسها صفر ، ٩٠ ° ، ١٨٠ ° ، ٢٧٠ ° تسمى زوايا ربعية حيث يقع الضلع النهائى على أحد محوري الاحداثيات .

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

مثال ٤ : حدد الربع الذى يقع فيه الزوايا الأتية : ١٢٠ ° ، ٩٢٠ ° ، ـ ٦٠ ° ، ـ ٧٨٠ ° ، ٥٤٠

الحـــــل

∵ ٩٠ < ١٢٠ < ١٨٠ ∴ ١٢٠ تقع فى الربع الثانى.

∵ ٩٢٠ = ٩٢٠ ـ ٣٦٠ = ٥٦٠ ـ ٣٦٠ = ٢٠٠ ° تقع فى الربع الثانى

∵ ـ ٦٠ = ٣٦٠ ـ ٦٠ = ٣٠٠ حيث ـ ٦٠ ، ٣٠٠ متكافئتان

∵ ٢٧٠ < ٣٠٠ < ٣٦٠ ∴ الزاوية تقع فى الربع الرابع

∵ ـ ٧٨٠ = ـ ٧٨٠ + ٣٦٠ = ـ ٤٢٠ + ٣٦٠ = ـ ٦٠ + ٣٦٠ = ٣٠٠

∴ الزاوية تقع على الربع الرابع

∵ ٥٤٠ = ٥٤٠ ـ ٣٦٠ = ١٨٠ ° زاوية ربعية .

وحدات قياس الزاوية : (القياس الستيني و القياس الدائري)

أولاً القياس الستيني:- هو قياس يعتمد على تقسيم الدائرة الى ٣٦٠ جزء (قوس)

قياسه الدرجة (١ °) و كل درجة ١ ° مقسمة الى ٦٠ جزء

يسمى الدقيقة (١ ′) و كل دقيقة مقسمة الى ٦٠ جزء يسمى ثانية ١ ″

١ ° درجة = ٦٠ ′ دقيقة ، ١ ′ دقيقة = ٦٠ ″ ثانية

الزاوية ٤٨ ″ ٢٠ ′ ٦٧ ° تكتب على الآلة كالتالى :

67 ,,, 20 ,,, 48 ,,, = 67.3466667° ,,, 67° 20′ 48″

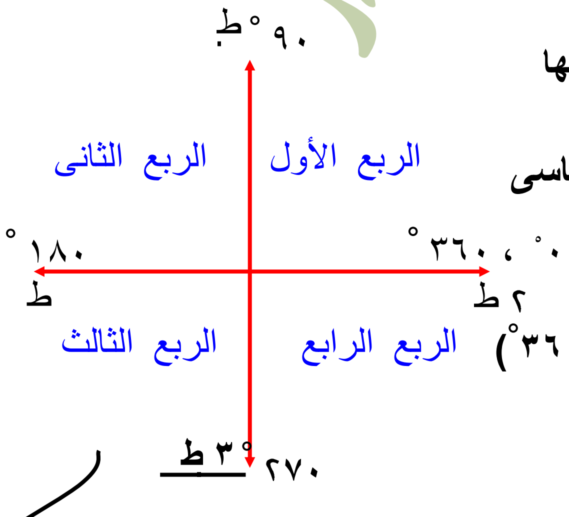
* التحويل من درجات الى درجات و دقائق و ثوانى بالآلة :

67.346667 shift ,,, = 67° 20′ 48″

ملاحظة : عند استخدام الآلة الحاسبة يكتفى بتقريب الناتج على الشاشة إلى اربعة أرقام عشرية مالم يطلب غير ذلك .

ملاحظات :

(١) يتحدد الربع الذى تقع فيه الزاوية حسب قياسها كما هو موضح بالشكل المقابل



(٢) الزوايا المتكافئة : هي زوايا فى وضعها القياسى تكون أضلاعها النهائية متطابقة

فإذا كان : ق (∠ أ و ب) = هـ

فإن : الزوايا التى قياسها : (هـ ـ ن × ٣٦٠ °)

حيث : ن = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، .....

جميعها متكافئة

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

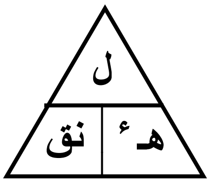
أي نجمع أو نطرح ٣٦٠ للحصول علي زوايا متكافئة

(٣) لمعرفة الربع الذي تقع فيه الزاوية لابد و أن تكون موجبة و محصورة في [٠ ، ٣٦٠ ° [

ثانياً القياس الدائري :

القياس الدائري لزاوية مركزية تحصر قوس طوله ل في دائرة طول نصف قطرها نق

$$= \frac{\text{طول القوس الذى تحصره هذه الزاوية}}{\text{طول نصف قطر الدائرة}}$$

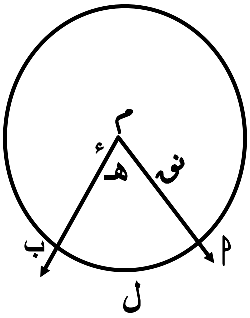


أى أن : $هـ^{ء} = \frac{ل}{نق}$ ، $ل = هـ^{ء} \times نق$ ، $نق = \frac{ل}{هـ^{ء}}$

وحدة القياس الدائرى تسمى الراديان " الزاوية نصف القطرية "

تعريف الزاوية النصف قطرية :

هي زاوية مركزية فى دائرة تحصر قوساً طوله = طول نصف قطر الدائرة



العلاقة بين التقديرين الدائري و الستيني: $\frac{هـ^{ء}}{ط} = \frac{س^{\circ}}{١٨٠}$

ومنه : $هـ^{ء} = \frac{ط \times س^{\circ}}{١٨٠}$ ، $س^{\circ} = \frac{١٨٠ \times هـ^{ء}}{ط}$

ملاحظة :

ط بالتقدير الستينى = ١٨٠° ، ط بالتقدير الدائرى = $(\frac{٢٢}{٧})^{ء}$

مثــ١ــال حدد الربع الذي تقع فيه الزوايا الأتية ثم أوجد زاوية مكافئة لكل منها

(١) ٤٤٠ °　(٢) –١٤٠ °　(٣) ٨٤٠ °　(٤) – ٤٠٠ °　(٥) $\frac{ط}{٥}$

الحـــــل

(١) ٤٤٠° = ٤٤٠– (٣٦٠) = ٨٠ ° تقع في الربع الأول ، ٤٤٠° تكافئ ٨٠ °

(٢) –١٤٠° = –١٤٠ ° + ٣٦٠ = ٢٢٠° تقع في الربع الثالث ، و تكافئ ٢٢٠ °

(٣) ٨٤٠ ° = ٨٤٠ – (٢× ٣٦٠) = ١٢٠° تقع في الربع الثاني و تكافي ١٢٠ °

(٤) –٤٤٠ ° = –٤٠٠ ° + (٢×٣٦٠) = ٣٢٠° تقع في الربع الرابع و تكافئ ٣٢٠ °

(٥) $\frac{ط}{٥} = \frac{١٨٠}{٥} = ٣٦°$ تقع في الربع الأول و تكافئ ٣٦ °

مثــ٢ــال زاوية مركزية في دائرة طول نصف قطرها ١٥ سم تحصر قوس طوله ٢٥ سم

أوجد قياسها بالتقدير الدائري ؟

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

الحـــــل

∴ ل = ٢٥ ، نق = ١٥ سم ∴ هـ^{ء} = $\frac{\text{ل}}{\text{نق}}$ = $\frac{٢٥}{١٥}$ = ١.٦٧^{ء}

مثـ٣ــال زاوية مركزية قياسها ١.٣^{ء} تحصر قوس طوله ١٣ سم أوجد طول نصف قطر هذه الدائرة

الحـــــل

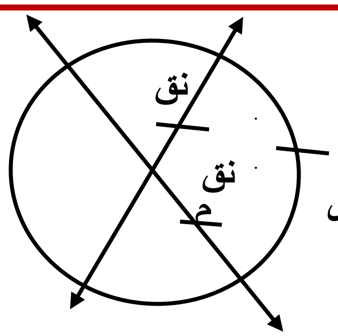
∵ هـ^{ء} = ١.٣^{ء} ، ل = ١٣ سم ∴ نق = $\frac{\text{ل}}{\text{هـ}^{ء}}$ = $\frac{١٣}{١.٣^{ء}}$ = ١٠ سم

مثـ٤ــال زاوية مركزية قياسها ٨٠ْ في دائرة طول نصف قطرها ١٥ سم أوجد طول القوس الذي تحصره لأقرب سم

الحـــــل

∵ هـ^{ء} = $\frac{٨٠ \times \text{ط}}{١٨٠}$ = ١.٤^{ء} ، نق = ١٥ سم

∴ ل = هـ^{ء} × نق = ١.٤ × ١٥ = ٨ سم



- **الزاوية النصف قطرية :**

هى الزاوية المركزية التى تحصر بين ضلعيها قوسا طوله يساوى طول نصف قطر هذه الدائرة (ل = نق)

* **نتيجة :** إذا كان نصف قطر الدائرة = وحدة الاطوال

فإن : هـ^{ء} = $\frac{\text{ل}}{\text{ل}}$ = ١

أى أن الزاوية المركزية بالدائرى = طول القوس المقابل لها من دائرة الوحدة

مثـ٥ــال أوجد قياس الزاوية الدائرية المقابلة لقوس طوله ٦ سم و نصف قطرها ٤ سم .

الحـــــل

هـ^{ء} = $\frac{\text{ل}}{\text{نق}}$ = $\frac{٦}{٤}$ = ١.٥^{ء}

مثـ٦ــال أوجد طول القوس المقابل لزاوية مركزية ٢.٥^{ء} فى دائرة نصف قطرها ٥ سم

الحـــــل

ل = هـ^{ء} × نق = ٢.٥ × ٥ = ١٢.٥ سم

مثـ٧ــال أوجد نصف قطر الدائرة إذا كان قياس زاوية مركزية فيها ١.٥^{ء} مقابل لقوس طوله ٦

الحـــــل

نق = $\frac{\text{ل}}{\text{هـ}^{ء}}$ = $\frac{٦}{١.٥}$ = ٤ سم

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

* العلاقة بين القياس الدائرى و القياس الستينى :

$\because \frac{هـ^ء}{ط^ء} = \frac{س^\circ}{١٨٠}$ من هذا القانون نستنتج أن :

$\therefore$ الزاوية بالتقدير الدائرى (هـ ء) = $\frac{س^\circ \times ط}{١٨٠^\circ}$

$\therefore$ الزاوية بالتقدير الستينى (س °) = $\frac{هـ^ء \times ١٨٠}{ط}$

ط = ٣.١٤ = $\frac{٢٢}{٧}$ أو π باى
بالآلة الحاسبة حسب ما يذكر
ط ء = ١٨٠ ° ستينى ، ط ° = ١٨٠ °
ط ء = (٣.١٤١) ء

مثــ٨ــال أوجد بدلالة ط القياس الدائرى للزوايا ٣٠٠ ° ، ـ ٣٠ / ١١٢ °

الحــــــل

$هـ^ء = \frac{س^\circ \times ط}{١٨٠^\circ} = \frac{٣٠٠ \times ط}{١٨٠^\circ} = \frac{٥ ط}{٣}$

$ـ ٣٠^{/} ١١٢^\circ = \frac{س^\circ \times ط}{١٨٠^\circ} = \frac{ـ ٣٠^{/} ١١٢^\circ \times ط}{١٨٠^\circ} = \frac{ـ ٥ ط}{٨}$

مثــ٩ــال أوجد القياس الستينى للزوايا الآتية : ٠.٤٥ ء ، ١.٢٣٦ ء ، $\frac{٥ ط}{٦}$

الحــــــل

$\because س^\circ = \frac{هـ^ء \times ١٨٠}{ط}$

$٠.٤٥^ء = \frac{٠.٤٥ \times ١٨٠}{ط} = ٢٥.٧٨٣١٠٠٧٨^\circ$

$= ٥٩^{//} \; ٤٦^{/} \; ٢٥^\circ$ 25.78310078 ,,, $= 25^0 \; 46^{\backslash} \; 59^{\backslash\backslash}$

$، ١.٢٣٦^ء = \frac{١٨٠ \times ١.٢٣٦}{ط} = ٧٠.٨١٧٥٨٣٤٨^\circ$

70.8175848 ,,, $= 70^0 \; 49^{\backslash} \; 3.3^{\backslash\backslash}$

$= ٣.٣^{//} \; ٤٩^{/} \; ٧٠^\circ$

$، \frac{٥ ط}{٦} = \frac{٥}{٦} \times ١٨٠ = ١٥٠^\circ$

حل أخر $\frac{٥ ط}{٦} = \frac{\frac{٥ ط}{٦} \times ١٨٠}{ط} = ١٥٠^\circ$

مثــ١٠ــال : أوجد بالتقدير الدائرى للزوايا الآتية مقربا الناتج لثلاثة أرقام عشرية :
$١٥^{//} \; ٣٢^{/} \; ١٩^\circ$ ، $١٩^{//} \; ٢٢٥^\circ$

الحــــــل

نحول الزاوية الى درجات فقط باستخدام الآلة :

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

١٥ ″ ٣٢ ′ ١٩ ° ‚‚‚ ٧٥.٥٣٧٥ °

هـ ء = $\frac{\text{س}^\circ \times \text{ط}}{\text{١٨٠}^\circ}$ = $\frac{\text{٧٥.٥٣٧٥} \times \text{ط}}{\text{١٨٠}^\circ}$ ≃ ١.٣١٨ ء

١٩ ″ ٠ ′ ٢٢٥ ° ‚‚‚ ٢٢٥.٠٠٥٢٧٧٨ °

هـ ء = $\frac{\text{٢٢٥.٠٠٥٢٧٧٨} \times \text{ط}}{\text{١٨٠}^\circ}$ ≃ ٣.٩٢٧ ء

مثـــال ١١ : زاوية مركزية تحصر قوس طوله ٢٨ سم فى دائرة طول قطرها ٢٤ سم أوجد قياسها الدائرى و الستينى .

الحـــــــل

ل = ٢٨ سم ، ٢ نق = ٢٤ ∴ نق = ١٢ سم ، هـ ء = ... ، س ° = ...

هـ ء = $\frac{\text{ل}}{\text{نق}}$ = $\frac{\text{٢٨}}{\text{١٢}}$ ≃ ٢.٣ ء ، س° = $\frac{\text{هـ ء} \times \text{١٨٠}}{\text{ط}}$ = $\frac{\text{٢.٣} \times \text{١٨٠}}{\text{ط}}$ ≃ ١٣١/٤٦ °

مثـــال ١٢ : أوجد القياسين الدائرى و الستينى للزاوية المركزية التى تحصر قوسا طوله يساوى طول نصف قطر دائرتها (الزاوية النصف قطرية)

الحـــــــل

∵ ل = نق　∴ هـ ء = $\frac{\text{ل}}{\text{نق}}$ = $\frac{\text{نق}}{\text{نق}}$ = ١ ء

، س ° = $\frac{\text{هـ ء} \times \text{١٨٠}}{\text{ط}}$ = $\frac{\text{١ ء} \times \text{١٨٠}}{\text{ط}}$ = ٤٤ ″ ١٧ ′ ٥٧ °

مثـــال ١٣ : أوجد طول القوس الذى تحصره زاوية مركزية ٣٠ ′ ٢٤ ° فى دائرة طول نصف قطرها ٥ سم مقرباً الناتج لأقرب سنتيمتر .

الحـــــــل

∵ ٣٠ ′ ٢٤ ° = ٢٤.٥ °

∵ نق = ٥ سم ∴ هـ ء = $\frac{\text{س}^\circ \times \text{ط}}{\text{١٨٠}^\circ}$ = $\frac{\text{٢٤.٥} \times \text{ط}}{\text{١٨٠}}$ = ٠.٤٣ ء

∴ ل = هـ ء نق = ٠.٤٣ × ٥ = ٢.١٥ ≃ ٢ سم

مثـــال ١٤ : مثلث قياس إحدى زواياه ٣٠ ° وقياس الزاوية الأخرى $\frac{\text{ط}}{\text{٢}}$ أوجد القياسين الدائرى و الستينى لقياس زاويته الثالثة .

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

الحـــــل

ق(∠ ٲ) = ٣٠ ، ق(∠ب) = $\frac{\text{ط}}{٢}$ = ٩٠ °

∴ ق(∠جـ) = ١٨٠ – (٣٠ + ٩٠) = ٦٠ °

∵ هـ ᵈ = $\frac{\text{س}° \times \text{ط}}{١٨٠°}$ = $\frac{٦٠ \times \text{ط}}{١٨٠°}$ ≃ ١.٠٥ ᵈ

مثـ١٥ـال : النسبة بين قياسات زوايا مثلث هى ٢ : ٣ : ٥ أوجد القياس الستينى و الدائرى لكلا من زواياه (بدون استخدام الآلة)

الحـــــل

ٲ	:	ب	:	جـ	:	Δ	
٢	:	٣	:	٥	:	١٠	
؟	:	؟	:	؟	:	١٨٠	

ق(∠ ٲ) = $\frac{٢ \times ١٨٠}{١٠}$ = ٣٦ °

ق (∠ب) = $\frac{٣ \times ١٨٠}{١٠}$ = ٥٤ °

ق (∠جـ) = $\frac{٥ \times ١٨٠}{١٠}$ = ٩٠ °

ق(∠ ٲ)ᵈ = $\frac{\text{س}° \times \text{ط}}{١٨٠°}$ = $\frac{٣٦ \times \text{ط}}{١٨٠°}$ = $\frac{\text{ط}}{٥}$ = $\frac{٣.١٤}{٥}$ ≃ ٠.٦٢٨ ᵈ

ق(∠ب) ᵈ = $\frac{٥٤ \times \text{ط}}{١٨٠°}$ = $\frac{٣ \text{ط}}{١٠}$ = $\frac{٣ \times ٣.١٤}{١٠}$ ≃ ٠.٩٤٢ ᵈ

ق(∠جـ)ᵈ = $\frac{٩٠ \times \text{ط}}{١٨٠°}$ = $\frac{\text{ط}}{٢}$ = $\frac{٣.١٤}{٢}$ ≃ ١.٥٧ ᵈ

مثـ١٦ـال : زاويتان مجموع قياسيهما $\frac{٥}{٧}$ ٤ ᵈ و الفرق بينهما ٣٠ ° أوجد القياس الستينى و الدائرى لكلا من الزاويتين (بدون استخدام الآلة حيث ط = $\frac{٢٢}{٧}$)

الحـــــل

س ° = $\frac{\text{هـ}ᵈ \times ١٨٠}{\text{ط}}$ = $\frac{٤\frac{٥}{٧} \times ١٨٠}{\text{ط}}$ = ٢٧٠ °

بفرض أن الزاويتين ٲ ، ب : ٲ + ب = ٢٧٠ (١)

ٲ - ب = ٣٠ (٢) بالجمع نجد :

٢ ٲ = ٣٠٠ ∴ ٲ = ١٥٠ ° و بالتعويض فى (١)

∴ ١٥٠ + ب = ٢٧٠ ∴ ب = ٢٧٠ ـ ١٥٠ = ١٢٠ °

∴ ∠ ٲ = $\frac{١٥٠ \times \text{ط}}{١٨٠°}$ = $\frac{٥ \text{ط}}{٦}$ ، ∠ ب = $\frac{١٢٠ \times \text{ط}}{١٨٠°}$ = $\frac{٢ \text{ط}}{٣}$

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

مثـ١٧ـال : أوجد القياس الستينى للزاوية المركزية التى قياسها $\frac{5\pi}{16}$ فى دائرة نصف قطرها ٣ سم ثم أوجد طول القوس المقابل لها مقربا الناتج لأقرب رقمين عشريين .

الحـــــل

$$س^\circ = \frac{هـ^ء \times 180}{ط} = \frac{\frac{٥ ط^ء}{١٦} \times 180}{ط} = ٥٦.٢٥^\circ \quad \boxed{,,,} \quad ١٥ \, ' \, ٥٦^\circ$$

∴ ل = هـ ء × نق = $\frac{٥ ط^ء}{١٦}$ × ٣ = ٢.٩٤٥٢٤٣١ ≃ ٢.٩٤ سم (لاقرب رقمين عشريين)

≃ ٢.٩ سم (لاقرب رقم عشرى)

≃ ٣ سم (لاقرب عدد صحيح)

حل أخر : س° = $\frac{٥ \times ١٨٠}{١٦}$ = ٥٦.٢٥ ° $\boxed{,,,}$ ١٥ ' ٥٦ ° حيث ط ء = ١٨٠ °

تدريبات :

(١) أوجد القياس الدائري للزاويا الآتية [٢٢٥ ° ،، – ٢٤٠ ° ،، ٤٢٠ °]

الحـــــل

** ∵ سْ = ٢٢٥ ° ∴ هـ ء = ... = ... = ...ء

** ∵ سْ = –٢٤٠ ° = –٢٤٠ ° + ... = ... °

∴ هـ ء = ... = ... ء

** ∵ سْ = ٤٢٠ ° = ٤٢٠ – ..... = ... °

∴ هـ ء = ... = ... ء

(٢) أوجد القياس الستيني لكل من ١.١ ء ، $\frac{٥ ط}{\quad}$

الحـــــل

∵ هـ ء = ١.١ ء ∴ سْ = ... = ... °

،، ∵ هـ ء = $\frac{٥ ط}{\quad}$ ∴ سْ = $\frac{٥ \times ١٨٠}{\quad}$ = ١٥ ' ٥٦ °

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

(٣) زاوية مركزية تحصر قوس طوله ٢٨سم في دائرة طول قطرها ٢٤ سم أوجد قياسها الدائري و الستيني

الحـــــــل

∴ ل = ٢٨ سم ، نق = ... = ... سم

∴ هـ ء = ... = ... = ... ء

، س = $\frac{\text{هـ}^{ء} \times ١٨٠}{\text{ط}}$ = ... = ...

(٤) أوجد طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها ١٤٠ ° في دائرة طول نصف قطرها ١٠ سم

الحـــــــل

∴ س = ١٤٠ ° ∴ هـ ء = = = ... ء

∴ ل = ... = ... = ... سم

(٥) زاوية مركزية تحصر قوس طوله ٢٠ سم في دائرة محيطها ٤٤ سم أوجد قياسها الدائري

الحـــــــل

∴ ل = ٢٠ سم ، محيط الدائرة = ...

∴ ٤٤ = ... × ..... × ..... ∴ نق = ... سم

∴ هـ ء = ... = ... = ... ء

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

تمارين على طرق قياس الزاوية

(١) حدد الربع الذي تقع فيه الزوايا الأتية ٥٧° ، ٢٢٠° ، -٥٠٠° ، ٥١٠° ، -٦٠° ، -٣٠٠°

(٢) أوجد زاويتين تكافئ كل زاوية مما يأتي: ٦٥° ، ١٠٠° ، ١٤٠° ، -١٥٠° ، -١٨٠°

(٣) أكمل ما يأتي :

(ا) الزاوية التي قياسها ١٢٠° يكون قياسها السالب هو ٠٠٠٠٠ و تقع في الربع ٠٠٠٠٠

(ب) الزاوية التي قياسها -٣٠٠ قياسها الموجب = ٠٠٠٠٠ و تقع في الربع ٠٠٠٠٠

(جـ) الزاوية التي قياسها ٤٥° تكافئ زاوية موجبة قياسها ٠٠٠٠٠ و تكافئ زاوية سالبة قياسها٠٠٠٠٠

(ء) الزاوية النصف قطرية هي ٠٠٠٠

(هـ) $\frac{\text{س}}{\text{هـ}^\circ}$ = ٠٠٠٠٠

(٤) أوجد بدلالة ط طول القوس الذي تحصره زاوية مركزية قياسها ١٠٠° في دائرة طول نصف قطرها ٧ سم

(٥) أوجد التقدير الدائري للزاوية المركزية التي تحصر قوس طوله ٢٠ سم في دائرة طول نص قطرها ١٢ سم

(٦) زاوية مركزية في دائرة طول قطرها ٣٠ سم تقابل قوس طوله ٤٥ سم أوجد قياسها الدائري ؟

(٧) أوجد طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها ٢.٢ ء في دائرة طول نصف قطرها ٢٠ سم

(٨) زاوية مركزية قياسها ٢ ء و تقابل قوس طوله ١٥ سم أوجد طول نصف قطر دائرتها .

(٩) أوجد القياس الدائري للزوايا الأتية :

(أ) ٦٠° ، (ب) ٢٠٠° ، (جـ) -١٦٠° , (د) ٦٠٠° ، (هـ) $\frac{٥\text{ط}}{٩}$

(١٠) أوجد التقدير الستيني للزوايا الأتية :

(أ) ٣و١ ء (ب) ٤ ء (جـ) ٠.٧٢ ط ء (د) ٢.٢ ء (هـ) $\frac{\text{ط}}{٢}$ ء

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

(١١) دائرة طول نصف قطرها ١٠ سم ٠ أوجد القياس الدائري و الستيني للزاوية المركزية التي تقابل قوس طوله ١٥ سم ؟

(١٢) زاوية مركزية قياسها ١٢٠° في دائرة طول نصف قطرها ١٥ سم أوجد طول القوس المقابل لهذه الزاوية

(١٣) زاوية مركزية قياسها = ١.٤ ء ، تحصر قوس طوله ٢٥ سم
أوجد طول نصف قطر دائرتها و أوجد قياسها بالتقدير الستيني ؟

(١٤) Δاب جـ فيه ق(∠ ٩) = ٧٠° ،، ق(∠ ب) = ١.٣ ء
أوجد ق(∠ جـ) بالتقدير الستيني و الدائري

(١٥) Δ ا ب جـ فيه ق(∠ ب) = ١و٢ ء ، ق(∠ جـ) = ٥٠°
أوجد ق (∠ ٩) بالتقديرين الدائري و الستيني

(١٦) دائرة م ، ٩ ، ب نقطتان عليها بحيث ق(∠ ٩ م ب) = ٩٨° ، م٩ = ٥ سم إحسب طول $\overset{\frown}{\text{ا ب}}$ ؟

(١٧) Δ ٩ ب جـ النسبة بين قياسات زواياه ٣ : ٤ : ٥ أوجد القياس الستيني و الدائري لـ ∠جـ

(١٨) أوجد طول القوس الذى تحصره زاوية مركزية قياسها ٤٥ /١٤٠ ° مرسوم فى دائرة طول نصف قطرها ١٠ سم مقربا الناتج لأقرب عدد صحيح . [٢٥ سم]

(١٩) ٩ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة طول نصف قطرها ١٢.٥ سم فإذا كان
ق(∠ ٩) = ٥٢ ° ٢٦/ أوجد لأقرب سنتمتر طول القوس المحصور بين $\overline{\text{٩ب}}$ ، $\overline{\text{٩جـ}}$

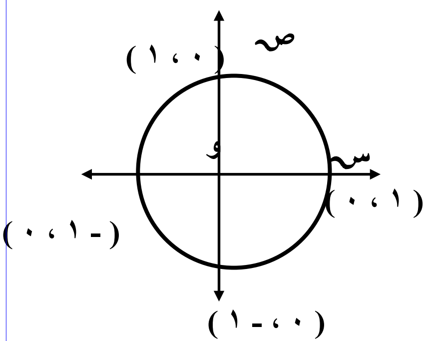
(٢٠) إذا كانت الساعة الثانية و النصف فاوجد القياسان الموجبان الدائرى و الستينى للزاوية بين عقربى الدقائق و الساعات .

(٢١) Δ ٩بجـ فيه ق(∠٩) = ٧٠ ° ، ق(∠ب) = ١.٣ ء أوجد ق(∠جـ) بالتقدير الستينى و الدائرى .

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

الدوال المثلثية

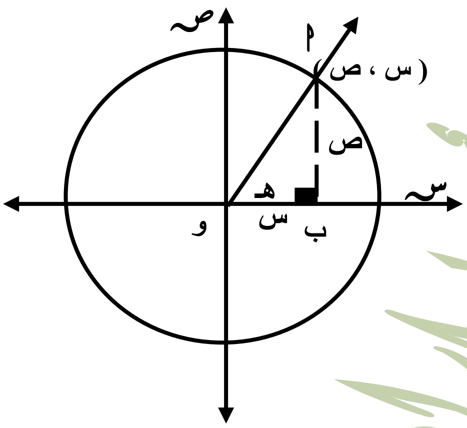
تعريف : دائرة الوحدة هى دائرة مركزها نقطة الأصل لنظام إحداثى متعامد وطول نصف قطرها يساوى وحدة الطول



الدوال المثلثية الأساسية للزاوية :

تعريف : إذا كانت ∠ ٢ و ب زاوية موجهة فى الوضع القياسى لها قياسها = هـ في وضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة في النقطة ب(س ، ص) حيث ا (١ ، ٠) فإن :

الدوال المثلثية الأساسية للزاوية ٢ و ب تعطى كالآتى :



> **ملاحظة هامة :** نقطة ٢ (حتا هـ ، حا هـ)
> الاحداثى الصادى و السينى لنقطة ٢ يرتبطان بالعلاقة :
> $س^٢ + ص^٢ = ١$ (معادلة دائرة الوحدة)
> " من نظرية فيثاغورس "
> حيث حا هـ ∈ [- ١ ، ١] ، حتا هـ ∈ [- ١ ، ١]

(١) جيب الزاوية هـ (sin) : جا هـ = ص

(٢) جيب تمام الزاوية هـ (cos) : جتا هـ = س

(٣) ظل الزاوية هـ (tan) : ظا هـ = $\frac{ص}{س}$

مقلوبات الدوال المثلثية :

(١) قاطع تمام الزاوية هـ (csc) = قتا هـ = $\frac{١}{حا هـ}$ = $\frac{١}{ص}$

(٢) قاطع الزاوية هـ (sec) = قا هـ = $\frac{١}{حتا هـ}$ = $\frac{١}{س}$

(٣) ظل تمام الزاوية هـ (cot) = ظتا هـ = $\frac{١}{ظا هـ}$ = $\frac{س}{ص}$

مثـــال١ : إذا كان الضلع النهائي لزاوية (هـ) في وضعها القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة (٠.٦ ، ٠.٨) أوجد الدوال المثلثية لهذه الزاوية

الحـــــــــل

جا هـ = ص = ٠.٨ ،، جتا هـ = س = ٠.٦ ، ظا هـ = $\frac{ص}{س} = \frac{٠.٨}{٠.٦} = \frac{٤}{٣}$

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

مثــ٢ــال : إذا كانت م و ب زاوية فى وضعها القياسي تقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) أوجد جميع الدوال المثلثية لها .

الحـــــــل

∵ س = $\frac{١}{٢}$ ، ص = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، النقطة ب تقع على الدائرة

الدوال المثلثية و مقلوباتها :

حا م و ب = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ قتا م و ب = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

حتا م و ب = $\frac{١}{٢}$ قا م و ب = ٢

ظا م و ب = $\frac{\sqrt{٣}}{٢} \div \frac{١}{٢} = \sqrt{٣}$ ظتا م و ب = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

مثــ٣ــال : ب (س ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) تقع على دائرة الوحدة و إذا مر الضلع النهائى لزاوية موجهة قياسها هـ بالنقطة ب فأوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية هـ

الحـــــــل

∵ ب تقع على الدائرة يجب أن تحقق معادلتها : س^٢ + ص^٢ = ١

∴ س^٢ + $(\frac{\sqrt{٣}}{٢})^٢$ = ١ ⟵ س^٢ + $\frac{٣}{٤}$ = ١

∴ س^٢ = ١ ـ $\frac{٣}{٤}$ = $\frac{١}{٤}$ ∴ س = $\frac{١}{٢}$ ب ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$)

ثم نكمـــل الحل كما سبق فى المثال السابق ....

مثــ٤ــال : إذا كانت م و ب زاوية فى الوضع القياسي فى دائرة الوحدة و كانت ب (٠.٦ ، ص) ، س < ٠ أوجد جميع الدوال المثلثية و مقلوباتها .

الحـــــــل

∵ النقطة ب تقع على دائرة الوحدة فإنها تحقق معادلتها : س^٢ + ص^٢ = ١

∴ $(٠.٦)^٢$ + س^٢ = ١ ⟵ ٠.٣٦ + ص^٢ = ١

∴ ص^٢ = ١ ـ ٠.٣٦ = ٠.٦٤

∴ ص = $\sqrt{٠.٦٤}$ ، ص = ٠.٨ ، ص = ـ ٠.٨ مرفوض

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

الدوال المثلثية و مقلوباتها :

حا ∠ أ و ب = ٠.٨ قتا ∠ أ و ب = $\frac{٥}{٤}$

حتا ∠ أ و ب = ٠.٦ قا ∠ أ و ب = $\frac{٥}{٣}$

ظا ∠ أ و ب = ٠.٨ ÷ ٠.٦ = $\frac{٤}{٣}$ ظتا ∠ أ و ب = $\frac{٣}{٤}$

مثـ٥ـال : إذا كانت ∠ أ و ب زاوية فى وضعها القياسي تقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب أوجد جميع الدوال المثلثية لها إذا كانت ب (س ، س) بحيث س > ٠

الحــــــــل

∵ النقطة ب تقع على دائرة الوحدة فإنها تحقق معادلتها : س^٢ + ص^٢ = ١

∴ س^٢ + س^٢ = ١ ⟵ ٢ س^٢ = ١ ⟵ س = $-\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، س = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ مرفوض

حا ∠ أ و ب = $-\frac{١}{\sqrt{٢}}$ قتا ∠ أ و ب = $-\sqrt{٢}$

حتا ∠ أ و ب = $-\frac{١}{\sqrt{٢}}$ قا ∠ أ و ب = $-\sqrt{٢}$

ظا ∠ أ و ب = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ÷ $-\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = ١ ظتا ∠ أ و ب = ١

مثـ٧ـال : إذا كان الضلع النهائي لزاوية هـ في وضعها القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة (س ، $\frac{٣}{٥}$) فأوجد قيمة س حيث س ∈ ح$_+$ ثم أوجد جا هـ ، ظا هـ ، قا هـ

الحــــــــل

∴ س^٢ + ص^٢ = ١ ∴ س^٢ + ($\frac{٣}{٥}$)^٢ = ١ ∴ س^٢ + $\frac{٩}{٢٥}$ = ١

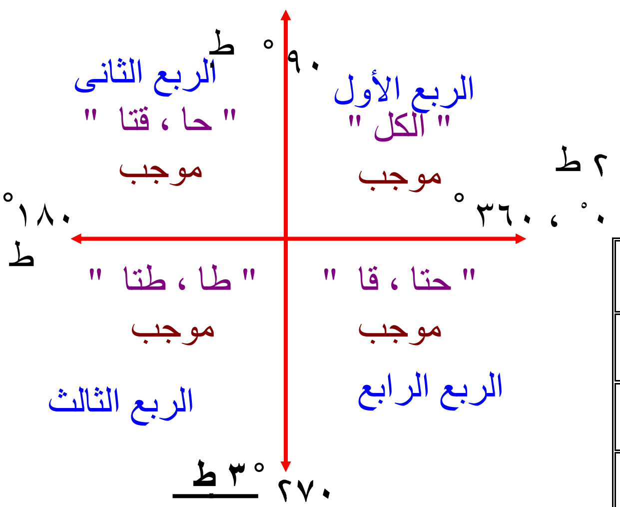
∴ س^٢ = ١ − $\frac{٩}{٢٥}$ = $\frac{١٦}{٢٥}$ ∴ س = $\frac{٤}{٥}$ ∴ النقطة هي ($\frac{٤}{٥}$ ، $\frac{٣}{٥}$)

∴ جا هـ = $\frac{٣}{٥}$ ، ظا هـ = $\frac{٣}{٥}$ ÷ $\frac{٤}{٥}$ = $\frac{٣}{٤}$ ،، قا هـ = $\frac{٥}{٤}$

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

إشارات الدوال المثلثية :

(١) فى الربع الأول : جميع الدوال موجبة
(٢) فى الربع الثانى : حا ، قتا موجبتين فقط
(٣) فى الربع الثالث : ظا ، ظتا موجبتين فقط
(٤) فى الربع الرابع : حتا ، قا موجبتين فقط



الربع	حا ، قتا	حتا ، قا	ظا ، ظتا
الأول	موجب	موجب	موجب
الثانى	موجب	سالب	سالب
الثالث	سالب	سالب	موجب
الرابع	سالب	موجب	سالب

مثـ١ـال : حدد إشارات الدوال الاتية :

حتا ٢٠٠ ، حا ١٦٥ ، ظا ٧٥٠ ، قا ٣٠٠ ، قتا ١٢٠٠ ، ظا ـ ٣٠ ، ظا $\frac{٥ ط}{٤}$

الحل :

∵ ٢٠٠ تقع فى الربع الثالث ∴ حتا ١٢٠ (سالبة)

∵ ١٦٥ تقع فى الربع الثانى ∴ حا ١٦٥ (موجبة)

∵ ٧٥٠ = ٧٥٠ ـ ٢ × ٣٦٠ = ٣٠ تقع فى الربع الاول ∴ ظا ٧٥٠ (موجبة)

∵ ٣٠٠ تقع فى الربع الرابع ∴ قا ٣٠٠ (موجبة)

∵ ١٢٠٠ = ١٢٠٠ ـ ٣ × ٣٦٠ = ١٢٠ تقع فى الربع الثانى ∴ قتا ١٢٠٠ (موجبة)

∵ ـ ٣٠ = ـ ٣٠ + ٣٦٠ = ٣٣٠ تقع فى الربع الرابع ∴ ظا ـ ٣٠ (سالبة)

∵ $\frac{٥ ط}{٤}$ = $\frac{٥ \times ١٨٠}{٤}$ = ٢٢٥ تقع فى الربع الثالث ∴ ظا $\frac{٥ ط}{٤}$ (موجبة)

مثـ٢ـال : حدد إشارات الدوال الأتية :

جا ٦٠° ، جتا ٢٤٠° ، ظا ٢١٠° ، قا ٣٠٠° ، جتا ١٥٠° ، ظا – ٣٠°

الحـــــل

∵ ٦٠° تقع في الربع الأول ∴ جا ٦٠° (+)

∵ ٢٤٠° تقع في الربع الثالث ∴ جتا ٢٤٠° (–)

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

∴ 210° تقع في الربع الثالث   ∴ ظا 210° (+)

∵ 300° تقع في الربع الرابع   ∴ قا 300° (+)

∵ 150° تقع في الربع الثاني   ∴ جتا 150° (−)

∴ $-30^\circ = 330^\circ$ في الرابع   ∴ ظا -30° (−)

مثـ٣ـال : إذا كان الضلع النهائي لزاوية ا و ب في وضعها القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة (٠.٦ ، ص) فأوجد قيمة ص حيث ص ∈ ح₋ ثم أوجد ظا ∠ ا و ب ،، قتا ∠ ا و ب

الحـــــــل

∴ س^2 + ص^2 = ١   ∴ $(0.6)^2$ + ص^2 = ١

∵ ٠.٣٦ + ص^2 = ١   ∴ ص^2 = ١ − ٠.٣٦ = ٠.٦٤

∴ ص = ٠.٨ (مرفوض)   لأن : ص ∈ ح₋

أ، ص = − ٠.٨   ∴ النقطة هي (٠.٦ ، − ٠.٨)

∴ ظا ا و ب = $-\frac{0.8}{0.6}$ = $-\frac{4}{3}$ ،، قتا ا و ب = ١ ÷ $-\frac{4}{5}$ = $-\frac{5}{4}$

مثـ٤ـال : إذا كانت هـ ∈] ط ، $\frac{3ط}{2}$ [و عينت على دائرة الوحدة النقطة ($\frac{-3}{4}$ ، ص)

أوجد جميع الدوال المثلثية .

الحـــــــل

∵ هـ ∈] ط ، $\frac{3ط}{2}$ [∴ هـ ∈] ٩٠ ، ١٨٠ [فى الربع الثالث

س = $\frac{-3}{4}$ ، ص = ؟   ∵ س^2 + ص^2 = ١   ∴ $(\frac{-3}{4})^2$ + ص^2 = ١

∴ ص^2 = ١ − $\frac{9}{16}$ = $\frac{7}{16}$ ∴ ص = − $\frac{\sqrt{7}}{4}$ ، ص = $\frac{\sqrt{7}}{4}$ مرفوض

الدوال المثلثية للزاوية هـ : حا هـ = − $\frac{\sqrt{7}}{4}$ ، حتا هـ = $\frac{-3}{4}$ ، ظا هـ = $\frac{\sqrt{7}}{3}$

ملاحظة هامة : مجموعة الزوايا المتكافئة لها نفس الدوال المثلثية مقداراً ، إشارة

حا (هـ + ٢ ن ط) = حا هـ = ص

حتا (هـ + ٢ ن ط) = حتا هـ = س ، ظا (هـ + ٢ ن ط) = ظا هـ = $\frac{ص}{س}$

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

تمارين على الدوال المثلثية

(١) حدد إشارات الدوال المثلثية الأتية

جا ١١٠° ، جتا ٢١٠° ، ظا ٣١٥° ، قا ٤٥° ، ، قتا ٥٠٠° ، ظتا ٤٢٠°

حا $\frac{٥}{٤}$ ط ، حتا $\frac{٢}{٣}$ط ، طا (– ٣٠٠°) ، قا (– ٧٥°)

(٢) إذا كانت س = ٤.٢ ^ء فاوجد ق(∠ س) بالتقدير الستيني ثم حدد إشارة جا س، جتا س، ظا٢س

(٣) إذا كان الضلع النهائي لزاوية هـ في وضعها القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة (٠.٨ ، ص) فأوجد قيمة ص حيث ص ∈ ح+ ثم أوجد الدوال المثلثية لزاوية هـ

(٤) إذا كان الضلع النهائي لزاوية هـ في وضعها القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة (– س ، $\frac{١}{٢}$) فأوجد قيمة س الموجبة ثم أوجد ظا هـ ، جا هـ ، قتا هـ

٥) إذا كان الضلع النهائي لزاوية هـ في وضعها القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة (س ، ٣س) فأوجد قيمة س الموجبة ثم أوجد جتا هـ ، جا هـ ، ظتا هـ

(٦) إذا كان الضلع النهائي لزاوية هـ في وضعها القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة (س ، $\frac{١}{\sqrt{٢}}$) فأوجد قيمة س السالبة ثم أوجد الدوال المثلثية لزاوية هـ

(٧) إذا كان : جتا هـ = $\frac{٤}{٥}$ حيث ∠ هـ حادة فأوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية هـ

(٨) إذا كان الضلع النهائي لزاوية هـ في وضعها القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة (س ، س) فأوجد قيمة س حيث س > صفر ثم أوجد الدوال المثلثية لزاوية هـ

(٩) إذا كان الضلع النهائي لزاوية هـ في وضعها القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة (٢س ، س) فأوجد قيمة س الموجبة ثم أوجد جا هـ ، قا هـ

(١٠) إذا كان : قا هـ = ٢ ، هـ ∈] ٢٧٠° ، ٣٦٠° [أوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية هـ

(١١) [١] أكمل العبارات الاتية :

١- اشارة ظا ١٥٠ تكون ....

٢- اشارة حا ٢٢٥ تكون ....

٣- اشارة قتا ٣٠٠ تكون ....

٤- اشارة ظا (- ٣٠٠) تكون ......

٥- إذا حا س > ٠ ، حتا س > ٠
فإن س تقع فى الربع ....

٦- اشارة ظا (- ٣٠٠) تكون ....

٧- اشارة ظتا ٣٠٠ تكون ....

٨- اشارة حا (- ١٠٠) تكون ....

٩- إذا كانت حا س > ٠ ، حتا س > ٠
فإن س تقع فى الربع ....

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

قيم الـــدوال المثلثيـــة لبعض الزوايـــا الخاصـــة :

الزوايا الخاصة هى : ٠ ، ٣٠ ، ٤٥ ، ٦٠ ، ٩٠ ، ١٨٠ ، ٢٧٠ ، ٣٦٠

يلاحظ أن : أى نقطة فى حساب المثلثات عبارة عن (حتا ، حا) و لذلك عند معرفة النقطة الخاصة بالزاوية يمكن إيجاد قيم كل الدوال المثلثية لها .

الزاوية	٠	°٩٠	°١٨٠	°٢٧٠	°٣٦٠	°٣٠	°٦٠	°٤٥
النقطة	$(1, 0)$	$(0, 1)$	$(-1, 0)$	$(0, -1)$	$(1, 0)$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
جــا	٠	١	٠	١-	٠	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
جتــا	١	٠	١-	٠	١	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
ظــا	٠	غيرمعرف	٠	غير معرف	٠	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	١

مثـــ١ـــال : بدون إستخدام الألة أوجد قيمة كلاً مما ياتي : جا ٣٠ جتا ٦٠ + جا ٩٠ – جتا² ٤٥

الحـــــــل

المقدار = $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

لاحظ أن جتا² هـ = (جتا هـ)²

مثـــ٢ـــال : جا ٣٠ جتا ٦٠ + جتا ٣٠ جا ٦٠ = جا ٩٠

الحـــــــل

الطرف الأيمن = $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

،، الطرف الأيسر = جا ٩٠ = ١ ∴ الطرفان متساويان

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

مثـ٣ـال : بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة كلا من المقادير الاتية :

١- حا ٦٠ حتا ٣٠ + حتا ٦٠ حا ٣٠

٢- حا^{٢} ٤٥ + ظا ٤٥ ـ حتا ١٨٠

٣- قا ٦٠ + ظا^{٢} ٦٠ + حا ٢٧٠

الحــــــل

١) حا ٦٠ حتا ٣٠ + حتا ٦٠ حا ٣٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٤} + \frac{١}{٤} = ١$

٢) حا^{٢} ٤٥ + ظا ٤٥ ـ حتا ١٨٠ = $(\frac{١}{\sqrt{٢}})^{٢} + ١ - (-١) = \frac{١}{٢} + ١ + ١ = ٢\frac{١}{٢}$

٣) قا ٦٠ + ظا^{٢} ٦٠ + حا ٢٧٠ = $\frac{١}{\text{حتا } ٦٠} + (\sqrt{٣})^{٢} + (-١) = ٢ + ٣ - ١ = ٤$

مثـ٤ـال : بدون استخدام الحاسبة أثبت أن : حا ٩٠ = ٢ حا ٤٥ حتا ٤٥

الحــــــل

الطرف الايمن = حا ٩٠ = ١

الطرف الايسر = ٢ حا ٤٥ حتا ٤٥ = $٢ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = ١$

∴ الطرفان متساويان

مثـ٥ـال : أوجد قيمة س إذا كان : حا س = حتا ٩٠ حا^{٢} ٤٥ ـ حتا ١٨٠ حتا^{٢} ٤٥

الحــــــل

حا س = صفر × $(\frac{١}{\sqrt{٢}})^{٢} - (-١) \times (\frac{١}{\sqrt{٢}})^{٢}$ = صفر + $\frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$

∴ س = ٣٠°

مثـ٦ـال : أوجد قيمة : س بحيث ٠° < س < ٩٠° والتى تحقق المعادلة

ظا^{٢} س (قا^{٢} ٤٥ + حا ٢٧٠°) = قتا^{٢} ٦٠° + حتا ١٨٠°

الحــــــل

∵ ظا^{٢} س (قا^{٢} ٤٥ + حا ٢٧٠°) = قتا^{٢} ٦٠° + حتا ١٨٠°

∴ ظا^{٢} س × $[(\sqrt{٢})^{٢} + (-١)] = (\frac{٢}{\sqrt{٣}})^{٢} + (-١)$

∴ ظا^{٢} س × (٢ − ١) = $\frac{٤}{٣} - ١$ ∴ ظا^{٢} س = $\frac{١}{٣}$

∴ ظا س = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ∵ س تقع فى الربع الأول ∴ س = ٣٠°

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

تمـــــارين

١ – بدون الألة أوجد قيمة كلاً مما يأتي :

(١) ٣ جا ٣٠ ظا ٤٥ – ٢قا^{٢} ٤٥ - ظا^{٢} ٦٠

(٢) ٢جا ٣٠ + جا^{٢} ٦٠ – ظا٤٥ × جتا ١٨٠

(٣) قا٦٠ – ٤ جا^{٢} ٤٥ + جا ٢٧٠

(٤) $\frac{\text{ظا}^{٢}\ ٦٠ - \text{ظتا}٤٥}{\text{قا}^{٢}\ ٣٠ - \text{قتا}^{٢}\ ٤٥}$

(٥) جتا٩٠ + ٢جتا ١٨٠ + ٣ جتا ٢٧٠ + ٤ جتا ٦٠

(٦) ظا^{٢} ٦٠ – قا^{٢} ٦٠ + جا ٩٠ + جا ٤٥ جتا ٤٥

٢ – إثبت أن :

(١) جتا٣٠ جتا٦٠ – جا ٣٠ جا ٦٠ = جتا٩٠

(٢) ٢جا ٣٠ جتا ٣٠ = جا ٦٠ جتا^{٢} ١٨٠

(٣) ظا ٦٠ = $\frac{\text{٢ظا ٣٠}}{\text{١ـ ظا}^{٢}\ ٣٠}$

(٤) جا ٩٠ = ٢ جا ٤٥ جتا ٤٥ + ٣ جتا٢٧٠

(٥) قتا ٦٠ ظتا ٣٠ ظا ٦٠ = ٢ قا^{٢} ٤٥ جتا ٤٥

(٦) جتا ٦٠ = ٢جتا^{٢} ٣٠ + جتا ١٨٠

٣ – أوجد قيمة : س حيث س ∈] ٠° ، ٩٠° [فى ما يأتى :

(١) إذا كان : س قتا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ حا ٤٥° حتا ٤٥° + حتا ٣٠° حا ٦٠°

(٢) إذا كان : حا س حا ٤٥° حتا ٤٥° ظا ٦٠° = ظا^{٢} ٤٥° – حتا^{٢} ٦٠°

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

بعض خواص الدوال المثلثية

[١] الدوال المثلثية للزاويتين المتتامتين " هـ ، ٩٠ ° – هـ "

(١) جا هـ = جتا (٩٠ ° – هـ) (٢) قتاهـ = قا (٩٠ ° – هـ)

(٣) جتا هـ = جا(٩٠ ° – هـ) (٤) قا هـ = قتا (٩٠ ° – هـ)

(٥) ظا هـ = ظتا(٩٠ ° – هـ) (٦) ظتا هـ = ظا(٩٠ ° – هـ)

ملاحظة : إذا كان : جا س = جتا ص فإن : س + ص = ٩٠° و بالمثل باقي الدوال

مثـــ١ـــال : أكمل ما يأتى :

جا ٣٢° = جتا .... ° ، ظتا .... ° = ظا ٧٠° ،، قا .... ° = قتا ٢٥ °

الحـــــــــل

جا ٣٢° = جتا ٥٨° ، ظتا ٢٠° = ظا ٧٠° ،، قا ٦٥° = قتا ٢٥ °

مثـــ٢ـــال : إذا كانت جتا (س+ ٢٥) = جا (٢س – ١٠) فأوجد قيمة س حيث س ∈] ٠ ، $\frac{ط}{٢}$[

الحـــــــــل

∴ جتا(س + ٢٥) = جا (٢س – ١٠) ∴ س + ٢٥+ ٢س – ١٠ = ٩٠ °

∴ ٣س + ١٥ = ٩٠ ∴ ٣س = ٧٥ ∴ س = ٢٥ °

مثـــ٣ـــال : إذا كانت ظا (٣س+ ٢٠) = ظا (س – ١٠) فأوجد قيمة س بالتقدير الدائري ؟

الحـــــــــل

∵ ظا (٣س + ٢٠) = ظا (س – ١٠) ∴ ٣س + ٢٠ + س – ١٠ = ٩٠

∴ ٤س +١٠ = ٩٠ ∴ ٤س =٨٠ ∴ س = ٢٠ °

∴ س ^ء^ = $\frac{س ْ \times ط}{١٨٠}$ = $\frac{٢٠ \times ط}{١٨٠}$ = ٠.٣٥ ^ء^

مثـــ٤ـــال : إذا كانت ظا (٢س + ٩) = ظتا (س + ٣٦) فأوجد قيمة س

ثم إثبت أن جا ٢^٢^ س+ جتا ٢^٢^ س=١

الحـــــــــل

∵ ظا (٢س+ ٩) = ظتا (س+ ٣٦)

∴ ٢س + ٩ + س + ٣٦ = ٩٠ ∴ ٣س+ ٤٥=٩٠

∴ ٣س= ٤٥ ∴ س = ١٥ °

∴ المقدار = جا^٢^ ٢×١٥ + جتا^٢^ ٢×١٥ = جا^٢^ ٣٠ + جتا^٢^ ٣٠

= $(\frac{١}{٢})^٢ + (\frac{\sqrt{٣}}{٢})^٢ = \frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤} =١$

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

مثــ٥ــال : إذا كانت ظتا (٢ س ـ ٣٠) = ظا (٣ س + ١٠) أوجد قيمة س

الحـــــــــل

∵ ظتا (٢ س ـ ٣٠) = ظا (٣ س + ١٠)   ∴ ٢ س ـ ٣٠ + ٣ س + ١٠ = ٩٠

∴ ٥ س ـ ٢٠ = ٩٠ ، ٥ س = ١١٠ ، س = ٢٢ °

مثــ٦ــال : أوجد قيمة س التى تحقق العلاقة : ظا ٤ س ظا ٥ س = ١

الحـــــــــل

ظا ٤ س = $\frac{١}{ظا٥س}$ = ظتا ٥ س ⟵ ٤ س + ٥ س = ٩٠ ⟵ ٩ س = ٩٠

∴ س = ١٠ °

مثــ٧ــال : إذا كانت قا ٢ هـ = قتا (٣ هـ ـ ٦٠) فأوجد قيمة هـ ثم أوجد قيمة المقدار

حا هـ + ٢ حتا ٢ هـ + حا ٣ هـ

الحـــــــــل

∵ قا ٢ هـ = قتا (٣ هـ ـ ٦٠)   ∴ ٢ هـ + ٣ هـ ـ ٦٠ = ٩٠

⟵ ٥ هـ = ١٥٠   ∴ هـ = ٣٠ °

المقدار = حا هـ + ٢ حتا ٢ هـ + حا ٣ هـ = $\frac{١}{٢}$ × ٢ × $\frac{١}{٢}$ + ١ = ٢ $\frac{١}{٢}$

مثــ٨ــال : إذا كانت س ∋] ٠ ، ٩٠ [، ظا (٦ س ـ ٣٠) = ظتا ٢ س أوجد قيمة س

الحـــــــــل

∵ ظا (٦ س ـ ٣٠) = ظتا ٢ س   ∴ ٦ س ـ ٣٠ + ٢ س = ٩٠

∴ ٨ س ـ ٣٠ = ٩٠ ، ٨ س = ١٢٠ ⟵ س = ١٥ °

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

تمـــــارين

(١) أكمل ما يأتي

(أ) ظتا ٥٤ = ظا ٠٠٠٠٠٠ (ب) قا ٧٥ = قتا٠٠٠٠٠

(جـ) جتا ٥٠ = جا ٠٠٠٠٠ (ء) $\frac{\text{جا } ١٧}{\text{جتا } ٧٣}$ = ٠٠٠٠٠

(٢) أوجد قيمة س إذا كان جا س = جتا ٢س ثم أوجد قيمة المقدار: جا س جتا ٢س جا ٣س

(٣) أوجد قيمة هـ إذا كان ظا (٢ س + ٢٥) = ظتا (٣س – ٥)

(٤) أوجد قيمة ص بالتقدير الدائري إذا كانت قتا (٣ص) = قا(٥٠ – ص)

(٥) إذا كانت جتا (س + ٥٠) = جا (٢س – ٥٠)

فأوجد قيمة س ، ثم أوجد قيمة المقدار = جتا^٢ س + جا ٣س + جتا ٢٧٠ ظا ٤٥

(٦) إذا كانت جتا (س + ٢٠) = جا (س – ١٠)

فأوجد قيمة س ، ثم أوجد قيمة المقدار $\frac{\text{جتا}^٢\text{س} + \text{جتا}^٢\ ٤٥}{\text{ظا}^٢\ ٤٥}$

(٧) Δ ٲ ب جـ فيه ٲ ب = ب جـ ، جا ٲ = جتا جـ أوجد قياسات زواياه ؟

(٨) إذا كانت قا٢هـ = قتا (٣هـ – ٦٠) فأوجد قيمة هـ

ثم أوجد قيمة المقدار : جا هـ + ٢ جتا ٢ هـ + جا ٣هـ

(٩) إذا كانت هـ هو قياس زاوية حادة موجبة و عينت فى وضعها القياسي النقطة (س ، $\frac{٣}{٥}$)

على دائرة الوحدة فأوجد قيمة : حا (٩٠ – هـ) ، حتا (٩٠ – هـ) ، ظا (٩٠ – هـ)

(١٠) إذا كانت ٠ < س < ٩٠ أوجد قيمة س التى تحقق العلاقات الاتية :

١) ظتا (س – ٣٠) = ظا (٩٠ + س)

٢) حا (س + ٢٠) = حتا (٢ س + ٣٠)

٣) ظا (س + ٢٤ ́ ١٨ °) = ظتا (س + ١٠ ́ ٥٢ °)

(١١) إذا كان حا (٢ س + ١٥) = حتا (٣ س + ٢٥) أوجد قيمة س

ثم أثبت أن : ٢ حا ٣ س حتا ٣ س = حا ٦ س

www.Cryp2Day.com موقع مذكرات جاهزة للطباعة

الزوايا المنتسبة لزاوية حادة

[٢]العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المتكاملتين [هـ ، ٩٠° + هـ]

(١) جا (٩٠° + هـ) = جتا هـ ، قتا (٩٠° + هـ) = قا هـ

(٢) جتا (٩٠° + هـ) = – جا هـ ، قا (٩٠° + هـ) = – قتا هـ

(٣) ظا (٩٠° + هـ) = – ظتا هـ ، ظتا (٩٠° + هـ) = – ظا هـ

الزاويتان تقعان فى الربع الثانى ٩٠ < هـ < ١٨٠ هـ ∋] ٩٠ ، ١٨٠ [

أ، $\frac{ط}{٢}$ < هـ < ط هـ ∋] $\frac{ط}{٢}$ ، ط [∴ حا ، قتا موجب و الباقى سالب

مثـــ١ـــال : أوجد قيمة كلا من حا ١٥٠ ، حتا ١٢٠ ، ظا ١٣٥

الحـــــــــــل

حا ١٥٠ = حا (٩٠ + ٦٠) = حتا ٦٠ = $\frac{١}{٢}$

حتا ١٢٠ = حتا (٩٠ + ٣٠) = ـ حا ٣٠ = ـ $\frac{١}{٢}$

ظا ١٥٠ = ظا (٩٠ + ٦٠) = ـ ظتا ٦٠ = ـ $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

[٣] العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المتكاملتان (هـ ، ١٨٠ ـ هـ)

(١) جا (١٨٠° – هـ) = جا هـ ، قتا (١٨٠° – هـ) = قتا هـ

(٢) جتا (١٨٠° – هـ) = – جتا هـ ، قا (١٨٠° – هـ) = – قا هـ

(٣) ظا (١٨٠° – هـ) = – ظا هـ ، ظتا (١٨٠° – هـ) = – ظتا هـ

غالبا تستخدم هذه العلاقات فى ايجاد الدوال المثلثية للزوايا ١٢٠ ، ١٥٠ ، ١٣٥

الزاويتان المتكاملتان يقعان فى الربع الثانى ٩٠ < هـ < ١٨٠ هـ ∋] ٩٠ ، ١٨٠ [

$\frac{ط}{٢}$ < هـ < ط هـ ∋] $\frac{ط}{٢}$ ، ط [∴ حا و قتا موجب و الباقى سالب

مثـــ٢ـــال : أوجد قيمة كلا من حا ١٥٠ ، حتا ١٢٠ ، ظا ١٣٥

الحـــــــــــل

حا ١٥٠ = حا (١٨٠ ـ ٣٠) = حا ٣٠ = $\frac{١}{٢}$

حتا ١٢٠ = حتا (١٨٠ ـ ٦٠) = ـ حتا ٦٠ = ـ $\frac{١}{٢}$

ظا ١٣٥ = ظا (١٨٠ ـ ٤٥) = ـ ظا ٤٥ = ـ ١

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

[٤] العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المتكاملتان (هـ ، ١٨٠+ هـ)

(١) جا (١٨٠° + هـ) = – جا هـ ، قتا (١٨٠° + هـ) = – قتا هـ
(٢) جتا (١٨٠° + هـ) = – جتا هـ ، قا (١٨٠° + هـ) = – قا هـ
(٣) ظا (١٨٠° + هـ) = ظا هـ ، ظتا (١٨٠° + هـ) = ظتا هـ

غالبا تستخدم هذه العلاقات فى ايجاد الدوال المثلثية للزوايا ٢١٠ ، ٢٤٠ ، ٢٢٥

الزاويتان يقعان فى الربع الثالث ١٨٠ < هـ < ٢٧٠ هـ ∋] ١٨٠ ، ٢٧٠ [

ط < هـ < $\frac{٣ط}{٢}$ هـ ∋] ط ، $\frac{٣ط}{٢}$ [∴ ظا ، ظتا موجب و الباقى سالب

مثـــ٣ـــال : أوجد قيمة كلا من حا ٢١٠ ، حتا ٢٤٠ ، ظا ٢٢٥

الحـــــــــــل

حا ٢١٠ = حا (١٨٠ + ٣٠) = ـ حا ٣٠ = ـ $\frac{١}{٢}$

حتا ٢٤٠ = حتا (١٨٠ + ٦٠) = ـ حتا ٦٠ = ـ $\frac{١}{٢}$

ظا ٢٢٥ = ظا (١٨٠ + ٤٥) = ظا ٤٥ = ١

[٥] العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين هـ ، ٣٦٠° – هـ

(١) جا (٣٦٠ – هـ) = – جا هـ ، قتا (٣٦٠– هـ) = – قتا هـ
(٢) جتا (٣٦٠– هـ) = جتا هـ ، قا (٣٦٠– هـ) = قا هـ
(٣) ظا (٣٦٠– هـ) = – ظا هـ ، ظتا (٣٦٠– هـ) = – ظتا هـ

غالبا تستخدم هذه العلاقات فى ايجاد الدوال المثلثية للزوايا ٣٠٠ ، ٣٣٠ ، ٣١٥

يلاحظ أن الزاويتان تقعان فى الربع الرابع ٢٧٠ < هـ < ٣٦٠ ، $\frac{٣ط}{٢}$ < هـ < ٢ط

∴ الدوال حتا ، قا موجب و الباقى سالب

مثـــ٤ـــال : أوجد قيمة كلا من حا ٣٠٠ ، حتا ٣٣٠ ، ظا ٣١٥

الحـــــــــــل

حا ٣٠٠ = حا (٣٦٠ ـ ٦٠) = ـ حا ٦٠ = ـ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

حتا ٣٣٠ = حتا (٣٦٠ ـ ٣٠) = حتا ٣٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ظا ٣١٥ = ظا (٣٦٠ ـ ٤٥) = ـ ظا ٤٥ = ـ ١

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

[٦] العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين هـ ، – هـ

(١) جا (– هـ) = – جا هـ ، قتا (– هـ) = – قتا هـ
(٢) جتا (– هـ) = جتا هـ ، قا (– هـ) = قا هـ
(٣) ظا (– هـ) = – ظا هـ ، ظتا (– هـ) = – ظتا هـ

يلاحظ أن الزاويتان تقعان فى الربع الرابع ٢٧٠ < هـ < ٣٦٠ ، $\frac{٣ط}{٢}$ < هـ < ٢ط
∴ الدوال حتا و قا موجب و الباقى سالب

مثـــ٥ـــال : أوجد قيمة كلا من حا ـ ٣٠ ، حا ـ ١٥٠ ، جتا ـ ٣٠ ، ظا ـ ٢٤٠

الحـــــــــــل

حا ـ ٣٠ = ـ حا ٣٠ = ـ $\frac{١}{٢}$ أ، حا ـ ٣٠ = حا (٣٦٠ ـ ٣٠) = ـ حا ٣٠ = ـ $\frac{١}{٢}$

حا (ـ ١٥٠) = ـ حا ١٥٠ = ـ حا (١٨٠ ـ ٣٠) = ـ حا ٣٠ = ـ $\frac{١}{٢}$

حتا (ـ ٣٠) = حتا ٣٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ أ، حتا (ـ ٣٠) = حتا (٣٦٠ ـ ٣٠) = حتا ٣٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ظا (ـ ٢٤٠) = ـ ظا ٢٤٠ = ـ ظا (١٨٠ + ٦٠) = ـ ظا ٦٠ = ـ $\sqrt{٣}$

أ، ظا (ـ ٢٤٠) = ظا (٣٦٠ ـ ٢٤٠) = ظا ١٢٠ = ظا (١٨٠ ـ ٦٠) = ـ ظا ٦٠ = ـ $\sqrt{٣}$

[٧] العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المتكاملتين [هـ ، ٢٧٠° – هـ]

(١) جا (٢٧٠° – هـ) = – جتا هـ ، قتا (٢٧٠° – هـ) = – قا هـ
(٢) جتا (٢٧٠° – هـ) = – جا هـ ، قا (٢٧٠° – هـ) = – قتا هـ
(٣) ظا (٢٧٠° – هـ) = ظتا هـ ، ظتا (٢٧٠° – هـ) = ظا هـ

يلاحظ أن الزاويتان يقعان فى الربع الثالث ١٨٠ < هـ < ٢٧٠ هـ ∋] ١٨٠ ، ٢٧٠ [
ط < هـ < $\frac{٣ط}{٢}$ هـ ∋] ط ، $\frac{٣ط}{٢}$ [∴ ظا و ظتا موجب و الباقى سالب

مثـــ٦ـــال : أوجد قيمة كلا من حا ٢٤٠ ، حتا ٩٣٠ ، ظا ٢٢٥

الحـــــــــــل

حا ٢٤٠ = حا (٢٧٠ ـ ٣٠) = ـ حتا ٣٠ = ـ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∵ ٩٣٠ = ٩٣٠ ـ ٣٦٠ = ٥٧٠ ـ ٣٦٠ = ٢١٠

∴ حتا ٩٣٠ = حتا ٢١٠ = حتا (٢٧٠ ـ ٦٠) = ـ حا ٦٠ = ـ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ظا ٢٢٥ = ظا (٢٧٠ ـ ٤٥) = ظتا ٤٥ = ١

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

[٨] العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المتكاملتين [هـ ، ٢٧٠° + هـ]

(١) جا (٢٧٠° + هـ) = – جتا هـ ، قتا (٢٧٠° + هـ) = – قا هـ

(٢) جتا (٢٧٠° + هـ) = جا هـ ، قا (٢٧٠° + هـ) = قتا هـ

(٣) ظا (٢٧٠° + هـ) = – ظتا هـ ، ظتا (٢٧٠° + هـ) = – ظا هـ

يلاحظ أن الزاويتان تقعان فى الربع الرابع ٢٧٠ < هـ < ٣٦٠ ، $\frac{٣ط}{٢}$ < هـ < ٢ط

∴ حتا ، قا موجب و الباقى سالب

مثــ٧ــال : أوجد قيمة كلا من حا ٣٠٠ ، ظا ٣١٥ ، قا ٣٣٠

الحــــــــل

حا ٣٠٠ = حا (٢٧٠ + ٣٠) = ـ حتا ٣٠ = ـ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ظا ٣١٥ = ظا (٢٧٠ + ٤٥) = ـ ظتا ٤٥ = ـ ١

قا ٣٣٠ = قا (٢٧٠ + ٦٠) = قتا ٦٠ = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

الخلاصة

إذا كانت لدينا هـ قياس لزاوية حادة فيوجد عدة صور لها تنتج من إضافة مضاعفات (٩٠ °) (أو طرحها) لهذه الزاوية أى (هـ ± ن × ٩٠) حيث ن عدد صحيح (غير سالب) تسمى هذه الصور بإسم الزاوية المنتسبة للزاوية هـ

* لايجاد الزاوية التى تنتسب لها الزاوية المعطاة :

١) نحدد الربع الذى تقع فيه

٢) نستخدم أحد العلاقات الاتية : (٠ + هـ) ، (٠ ـ هـ) ، (٣٦٠ + هـ) ، (٣٦٠ – هـ) (١٨٠ + هـ) ، (١٨٠ ـ هـ) ، (٢٧٠ + هـ) ، (٢٧٠ ـ هـ) ، (٩٠ + هـ) ، (٩٠ – هـ)

٣) إذا كانت الزاوية هى ٩٠ أو ٢٧٠ و مضاعفتها الفردية تقلب الدوال من تاء الى غير تاء مثلا: حا ⟵ حتا ، حتا ⟵ حا ، ظا ⟵ ظتا ، قا ⟵ قتا ، قتا ⟵ قا

٤) إذا كانت الزاوية المعطاة ليست بالقياس الاصلى لها يجب تحويلها الى القياس الاصلى ثم نوجد الزاوية التى تنتسب لها .

٥) لايجاد دالة أى زاوية و معرفة قيمتها لابد من تحديد الربع أولا ثم اختيار زاوية مناسبة من من الزوايا ٣٠ ° ، ٤٥ ° ، ٦٠ °

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

مثـــ٨ـــال : أوجد قيمة كل ما يأتى : (١) جا ٢٤٠ ، (٢) ظا ٢٢٥ ، (٣) جتا ٣٣٠ ، (٤) قا ١٥٠

الحـــــــل :

∵ الزاوية ٢٤٠ تنتسب إما ٣٠ ، ٦٠ ∴ ٢٤٠° = ١٨٠ + ٦٠ أو ٢٧٠ ـ ٣٠

∴ جا ٢٤٠ = جا (١٨٠ + ٦٠) = ـ جا ٦٠ = ـ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

أ، = جا (٢٧٠ ـ ٣٠) = ـ جتا ٣٠ = ـ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

∵ الزاوية ٢٢٥ تنتسب للزاوية ٤٥° ∴ ٢٢٥° = ١٨٠ + ٤٥ أو ٢٧٠ ـ ٤٥

∴ ظا ٢٢٥ = ظا (١٨٠ + ٤٥) = ظا ٤٥ = ١

أ، = ظا (٢٧٠ ـ ٤٥) = ظتا ٤٥ = ١

∵ الزاوية ٣٣٠ تنتسب إما ٣٠ ، ٦٠ ∴ ٣٣٠° = ٢٧٠ + ٦٠ أو ٣٦٠ ـ ٣٠

∴ جتا ٣٣٠ = جتا (٣٦٠ ـ ٣٠) = جتا ٣٠ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

أ، = جتا (٢٧٠ + ٦٠) = جا ٦٠ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

∵ الزاوية ١٥٠ تنتسب إما ٣٠ ، ٦٠ ∴ ١٥٠° = ١٨٠ ـ ٣٠ أو ٩٠ + ٦٠

∴ قتا ١٥٠ = قتا (١٨٠ ـ ٣٠) = قتا ٣٠ = $\frac{1}{2}$

أ، = قتا (٩٠ + ٦٠) = قا ٦٠ = $\frac{1}{2}$

مثـــ٩ـــال : أوجد قيمة : جتا١٢٠ ظا ٣١٥ + جا ٢٤٠ ظا ٣٠٠

الحـــــــل

∵ جتا ١٢٠ = جتا (١٨٠ – ٦٠) = – جتا ٦٠ = – $\frac{1}{2}$

، ظا ٣١٥ = ظا(٣٦٠ – ٤٥) = – ظا ٤٥ = – ١

، جا ٢٤٠ = جا (١٨٠+ ٦٠) = – جا ٦٠ = – $\frac{\sqrt{3}}{2}$

، ظا٣٠٠ = ظا (٣٦٠ – ٦٠) = – ظا ٦٠ = – $\sqrt{3}$

∴ المقدار = – $\frac{1}{2}$ × – ١ – $\frac{\sqrt{3}}{2}$ × ـ $\sqrt{3}$ = ٢

مثـــ١٠ـــال : أوجد قيمة جتا٤٨٠ جا (– ٣٠) ظا^{2} ٢٢٥

الحـــــــل

جتا٤٨٠ = جتا (٣٦٠ + ١٢٠)

= جتا ١٢٠= جتا(١٨٠ – ٦٠) = – جتا ٦٠ = – $\frac{1}{2}$

www.Cryp2Day.com موقع مذكرات جاهزة للطباعة

جا − ٣٠ = − جا ٣٠ = $-\frac{١}{٢}$

، ظا٢٢٥ = ظا (١٨٠ + ٤٥) = ظا ٤٥ = ١

∴ المقدار = $-\frac{١}{٢} \times -\frac{١}{٢} \times (١)^{٢} = \frac{١}{٤}$

مثال ١١ : إذا كانت جا هـ = جتا ٢هـ فأوجد قيمة هـ ثم أوجد قيمة المقدار:

$$\frac{\text{قا}^{٢}(١٨٠ - \text{هـ}) + \text{ظا}١٣٥}{\text{جا}(١٨٠ + \text{هـ})\ \text{جا}^{٢}(١٨٠ - ٢\text{هـ})}$$

الحل

∵ جا هـ = جتا ٢هـ

∴ هـ + ٢هـ = ٩٠ ∴ ٣هـ = ٩٠ ∴ هـ = ٣٠°

∴ قا (١٨٠ − هـ) = − قا هـ = − قا ٣٠ = $-\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ، قا^{٢} هـ = $\frac{٤}{٣}$

، جا (١٨٠ + هـ) = − جا هـ = − جا ٣٠ = $-\frac{١}{٢}$

، جا (١٨٠ − ٢هـ) = جا ٢هـ = جا ٦٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ جا^{٢} (١٨٠ − ٢هـ) = $\frac{٣}{٤}$

∴ المقدار = $\frac{\frac{٤}{٣} - ١}{-\frac{١}{٢} \times \frac{٣}{٤}} = -\frac{٨}{٩}$

مثال ١٢ : إذا كانت ظا (س + ٢٠) = ظتا (س − ٢٠)

فأوجد قيمة س ثم أوجد قيمة المقدار $\frac{\text{جا}٧٠}{\text{جتا}٢٠} + \frac{\text{قا}^{٢}(١٨٠ - \text{س})}{\text{ظا}١٣٥}$

الحل

∵ ظا (س + ٢٠) = ظتا (س − ٢٠)

∴ س + ٢٠ + س − ٢٠ = ٩٠ ∴ ٢س = ٩٠ ∴ س = ٤٥°

∵ جا٧٠ = جتا ٢٠ ∴ $\frac{\text{جا}٧٠}{\text{جتا}٢٠} = ١$ لأن مجموعهما ٩٠°

، قا (١٨٠ − س) = − قا س = − قا ٤٥ = $-\sqrt{٢}$ ∴ قا^{٢} ٤٥ = ٢

، ظا ١٣٥ = ظا (١٨٠° − ٤٥°) = − ظا ٤٥° = − ١

∴ المقدار = ١ + ($\frac{٢}{-١}$) = ١ − ٢ = − ١

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

تمـــــــارين

(١) أكمل ما يأتي :

(ا) جا١٣٥ ° = ٠٠٠٠٠ (ب) ظا ١٢٠ ° = ٠٠٠٠٠ (جـ) قا ٣٠٠ ° = ٠٠٠٠٠

(ء) إذا كانت جا س = جا ص فإن ٠٠٠٠٠ ، أ ٠٠٠٠٠

(٢) أوجد قيمة المقدار جا ٤٢٠ جا ١٢٠ – جتا ١٢٠ جا (– ٣٩٠)

(٣) أوجد قيمة المقدار جتا ١٢٠ ظا ٣١٥ + جا ٢٤٠ ظتا ١٢٠ – ظا ١٣٥ جا ٩٠

(٤) أوجد قيمة المقدار جتا^{٢} ١٨٠ + جا ٣٣٠ + جتا ١٢٠ – ظا (– ٣١٥)

(٥) إذا كانت جا ١٥ = جتا (هـ + ١٥)

فأوجد قيمة هـ ثم أوجد قيمة المقدار : $\dfrac{\text{جا}^{٢}\,\text{هـ} + \text{جتا}^{٢}\,(١٨٠ - \text{هـ})}{\text{ظا}١٣٥ \times \text{جتا}\ ١٨٠}$

(٦) إذا كان ظا س = ظتا ٢س فأوجد قيمة س ثم أوجد قيمة المقدار

جتا^{٢} (٩٠–س) + جتا ٢س – جا ٣س

(٧) إثبت أن : جا ١٥٠ جتا ١٢٠ + جا ٦٠٠ جتا ٣٣٠ = جتا ١٨٠

(٨) أوجد قيمة المقدار = جا ٣١٥ جتا (– ٦٧٥) + قا^{٢} ٣٠٠ °

(٩) إذا كانت جتا ٣٣٠ ظتا ٢٤٠ + ٢جتا (– ١٣٥) قتا ٤٥ جا٩٠ = س فأوجد قيمة س

(١٠) إذا كان : حا س = حتا ص حيث : س ، ص زاويتين حادتين أثبت أن :

حتا س حتا ص – حا س جا ص = ٠

(١١) أثبت أن : حتا $\dfrac{٥\text{ط}}{٦}$ ظا $\dfrac{٧\text{ط}}{٣}$ – $\dfrac{٣}{٢}$ قتا $\dfrac{٥\text{ط}}{٣}$ حتا $\dfrac{١١\text{ط}}{٦}$ = ٠

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

حل المعادلات المثلثية

** حل المعادلة المثلثية يعنى إيجاد قيم قياسات الزوايا التى تحقق هذه المعادلة

ملاحظة هامة :

* حا هـ ∋ [– ١ ، ١] ، حتا هـ ∋ [– ١ ، ١] لجميع قيم هـ الحقيقية

خطوات حل المعادلة المثلثية :

(١) نحدد إشارة الدالة المثلثية ، بالتالى الربع الذى تقع فيه الزاوية ولتكن " هـ " كالآتى "

الدالة المثلثية	إشارة الدالة المثلثية	الربع الذى تقع فيه الزاوية	بداية ونهاية الربع	ملاحظات
حا هـ	موجبة	الأول	[٠ ، ٩٠°] أ، ٠ < هـ < ٩٠°	أصغر زاوية موجبة
		الثانى	[٩٠° ، ١٨٠°] أ، ٩٠° < هـ < ١٨٠°	أكبر زاوية موجبة
	سالبة	الثالث	[١٨٠°، ٢٧٠°] أ، ١٨٠° < هـ < ٢٧٠°]	أصغر زاوية سالبة
		الرابع	[٢٧٠°، ٣٦٠°] أ، ١٨٠° < هـ < ٣٦٠°]	أكبر زاوية سالبة
حتا هـ	موجبة	الأول	[٠ ، ٩٠°] أ، ٠ < هـ < ٩٠°	أصغر زاوية موجبة
		الرابع	[٢٧٠°، ٣٦٠°] أ، [١٨٠° < هـ < ٣٦]	أكبر زاوية موجبة
	سالبة	الثانى	[٩٠° ، ١٨٠°] أ، ٩٠° < هـ < ١٨٠°	أصغر زاوية سالبة
		الثالث	[١٨٠°، ٢٧٠°] أ، [١٨٠° < هـ < ٢٧٠°]	أكبر زاوية سالبة
طا هـ	موجبة	الأول	[٠ ، ٩٠°] أ، ٠ < هـ < ٩٠°	أصغر زاوية موجبة
		الثالث	[١٨٠°، ٢٧٠°] أ، [١٨٠° < هـ < ٢٧٠°]	أكبر زاوية موجبة
	سالبة	الثانى	[٩٠° ، ١٨٠°] أ، ٩٠° < هـ < ١٨٠°	أصغر زاوية سالبة
		الرابع	[٢٧٠°، ٣٦٠°] أ، [١٨٠° < هـ < ٣٦٠°]	أكبر زاوية سالبة

لاحظ أن : ٩٠° = $\frac{ط}{٢}$ ، ٢٧٠ ° = $\frac{٣ط}{٢}$ ، ١٨٠° = ط

(٢) نوجد : ق (∠ هـ)

(٣) نوجد : ق (∠ س) كالآتى :

(١) زاوية س تقع فى الربع الأول : ق (∠ س) = ق (∠ هـ)

(٢) زاوية س تقع فى الربع الثانى : ق (∠ س) = ١٨٠ ° – ق (∠ هـ)

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

(٣) زاوية س تقع فى الربع الثالث : ق (∠ س) = ٢٧٠ ° – ق (∠ هـ)

(٤) زاوية س تقع فى الربع الرابع : ق (∠ س) = ٣٦٠ ° – ق (∠ هـ)

مثــ١ــال : أوجد مجموعة حل المعادلات الأتية : حيث : س ∧ [٠ ، ٢ ط]

(١) ظا س = ١ (٢) ٢ جا س – ١ = صفر (٣) جا س جتا س = صفر

الحــــــــل

(١) ∵ ظا س = ١ ، ∵ ظا ٤٥ = ١ ∴ س = ٤٥

، ∵ ظا هـ موجبة ∴ هـ تقع في الربعين الأول و الثالث

∴ س = ٤٥ ° أ، س = ٤٥ + ١٨٠ = ٢٢٥ ° ∴ مجموعة الحل = { ٤٥ ، ٢٢٥ }

(٢) ∵ ٢جا س = ١ ∴ جا س = $\frac{١}{٢}$ ∴ س = ٣٠ °

، ∵ جا هـ موجبة ∴ هـ تقع في الربعين الأول و الثاني

∴ س = ١٨٠ - ٣٠ = ١٥٠ ° ∴ مجموعة الحل = { ٣٠ ° ، ١٥٠ ° }

(٣) ∵ جا س جتا س = ٠ إما جا س = ٠ ∴ س = ١٨٠ ° ، ٠ °

أ، جتا س = ٠ ∴ س = ٩٠ ° ، ٢٧٠ °

∴ مجموعة الحل = { ٠ ° ، ٩٠ ° ، ١٨٠ ° ، ٢٧٠ ° }

مثــ٢ــال : أوجد مجموعة حل المعادلة الأتية : حيث : س ∧ [٠ ، ٢ ط]

٢جا^{٢} س + جا س – ١ = ٠

الحــــــــل

بالتحليل ∴ (٢جا س – ١)(جا س + ١) = ٠ ∴ جاس = $\frac{١}{٢}$ أ، جا س = – ١

عندما : جا س = $\frac{١}{٢}$ ∴ س = ٣٠ ° أ، ١٥٠ °

عندما : جا س = –١ ∴ س = ٢٧٠ °

∴ مجموعة الحل = { ٣٠ ° ، ١٥٠ ° ، ٢٧٠ ° }

تدريب : أكمل ما يأتى :

(١) إذا كان س ∧ [٠ ، ٩٠ °] ، ٢حا س – ١ = ٠ فإن س = ٠٠٠٠ °

(٢) إذا كان س ∧ [٠ ، ط] ، ٢حا س = $\sqrt{٣}$ فإن س = ٠٠٠٠ ° أ، ٠٠٠٠ °

(٣) إذا كان س ∧ [٠ ، ٢ ط] ، ٢حتا س + ١ = ٠ فإن س = ٠٠٠٠ ° أ، ٠٠٠٠ °

(٤) إذا كان س ∧ [٠ ، ٢ ط] ، ظا س + ١ = ٠ فإن س = ٠٠٠٠ ° أ، ٠٠٠٠ °

(٥) إذا كان س ∧ [٠ ، ٢ ط] ، حتا س = ٠ فإن س = ٠٠٠٠ ° أ، ٠٠٠٠ °

(٦) إذا كان س ∋ [٠ ، ٢ ط] ، ٢حتا س + $\sqrt{٢}$ = ٠ فإن س = ٠٠٠٠ ° أ، ٠٠٠٠ °

www.Cryp2Day.com موقع مذكرات جاهزة للطباعة

تمارين على الزوايا المنتسبة

١ – أكمل ما يأتي :

(ا) إذا كانت ٢ جا س = ١ فإن جتا س = ... ، أ ....

(ب) إذا كانت ظا س = ١ فإن جا س = ... ، أ ....

(جـ) إذا كانت قتاس = – ٢ فأن قا س = ... ، أ ....

٢ – إوجد مجموعة حل المعادلات الآتية :

(١) ٢ حا س + حا س = ٠ حيث س ∈ [٠ ، ط]

(٢) حتا^{٢} س – حتا س = ٠ حيث س ∈ [٠ ، ٢٧٠° [

(٣) حا س – حتا س = ٠ حيث س ∈ [٠ ، ٢ ط]

(٤) حا^{٢} س – حتا^{٢} س = ٠ حيث س ∈ [٠ ، ٢ ط]

(٥) حتا س + ٢ حا س حتا س = ٠ حيث س ∈ [٠ ، ٢ ط]

(٦) حا^{٢} س – ٣حتا^{٢} س = ٠ حيث س ∈ [٠ ، ٢ ط]

(٧) ٢ حا^{٢} س + ٣حا س – ٢ = ٠ حيث س ∈ [٠ ، ٢ ط]

(٨) ٣حتا^{٢} س – حتا س – ٢ = ٠ حيث س ∈ [٠ ، ٢ ط]

(٩) ٢طا^{٢} س + طا س – ١ = ٠ حيث س ∈ [٠ ، ٢ ط]

(١٠) ٣ قا^{٢} س – ٤ قا س – ٤ = ٠ حيث س ∈ [٠ ، ٢ ط]

(١١) جا (٢س + ١٠) = ١

(١٢) جتا (٣س + ٣٠) = – ١

(١٣) ظا ($\frac{\text{٣س}}{\text{٥}}$) = ١

منتدى توجيه الرياضيات أ/ عادل إدوار

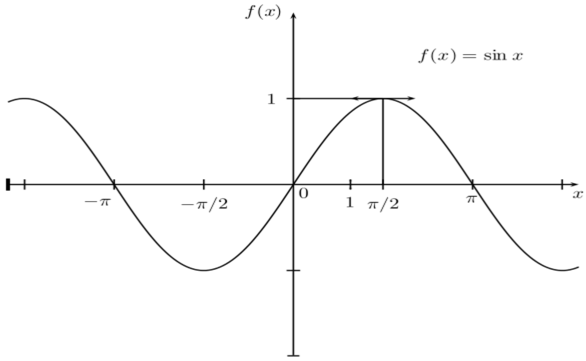
www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

التمثيل البيانى للدوال المثلثية

نكتفى فى هذه المرحلة بدارسة تمثيل دالتى الجيب و جيب التمام

أولا : دالة الجيب sin : بفرض أن ص = حا س حيث س ∋ [٠ ، ٢ط]

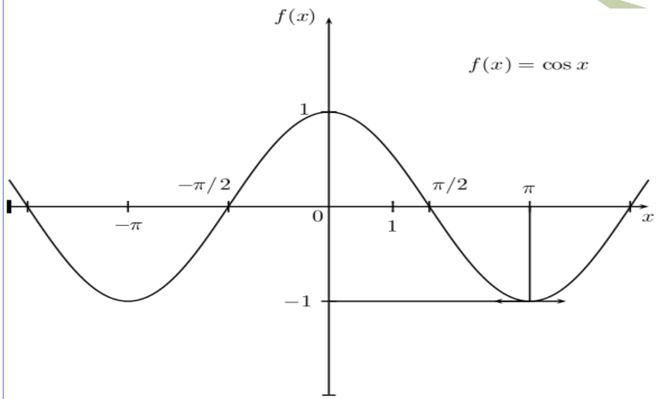
يجب ملاحظة سلوك المنحنى الممثل للدالة حا س



س	٠°	٩٠°	١٨٠°	٢٧٠°	٣٦٠°
ص	٠	١	٠	– ١	٠

ثانيا : دالة جيب تمام للزاوية cos : بفرض أن ص = حتا س حيث س ∋ [٠ ، ٢ ط]

يجب ملاحظة سلوك المنحنى الممثل للدالة حتا س



س	٠°	٩٠°	١٨٠°	٢٧٠°	٣٦٠°
ص	١	٠	– ١	٠	١

تدريب :

(١) إرسم منحنى الدالة : ص = ٢ حا س على الفترة [٠° ، ٣٦٠°]

(٢) إرسم منحنى الدالة : ص = ٥ حا س على الفترة [٠° ، ٣٦٠°]

(٣) إرسم منحنى الدالة : ص = ٢ حتا س على الفترة [– ط ، ط]

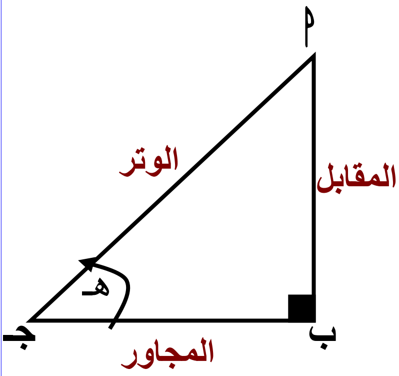
(٤) إرسم منحنى الدالة : ص = حا ٢ س على الفترة [٠° ، ٣٦٠°]

(٥) إرسم منحنى الدالة : ص = حتا ٢ س على الفترة [٠° ، ٣٦٠°]

(٦) إرسم منحنى الدالة : ص = – ٣ حتا س على الفترة [٠° ، ٣٦٠°]

الدوال المثلثية للزوايا الحادة

لأى مثلث قائم الزاوية فى ب يمكن تعريف الدوال المثلثية كالتالى :



حا هـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$ قتا هـ = $\frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{أ ب}}$

حتا هـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$ قا هـ = $\frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{ب جـ}}$

ظا هـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$ ظتا هـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$

* نظرية فيثاغورث : - ∵ ق (∠ب) = ٩٠ ∴ (أ جـ)^2 = (أ ب)^2 + (ب جـ)^2

، (ب جـ)^2 = (أ جـ)^2 − (أ ب)^2 ، (أ ب)^2 = (أ جـ)^2 − (ب جـ)^2

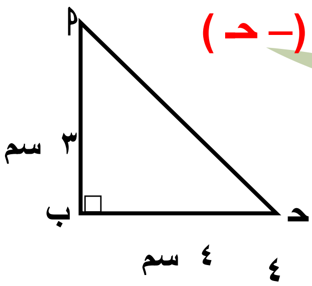
* غالبا نستخدم فيثاغورث فى ايجاد الضلع المجهول فى مثلث قائم الزاوية بمعلومية طولا ضلعين :

إذا كان **الوتر** [نربع و نجمع ثم نوجد $\sqrt{\quad}$]

مقابل أو مجاور [نربع و نطرح ثم نوجد $\sqrt{\quad}$]

مثــال١ : Δ أ ب حـ فيه ∠ ب قائمة ، أ ب = ٣ سم ، ب جـ = ٤ سم

أوجد ظا أ ، جا (١٨٠ − أ) ، جا (٩٠ − حـ) ، قتا (−حـ)



الحـــــل

من فيثاغورس : (أ حـ)^2 = (ب حـ)^2 + (أ ب)^2 = ١٦+٩ = ٢٥

∴ أ حـ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ سم

∴ ظا أ = $\frac{\text{ب حـ}}{\text{أ ب}} = \frac{٤}{٣}$ ** جا (١٨٠ − أ) = جا أ = $\frac{\text{ب حـ}}{\text{أ حـ}} = \frac{٤}{٥}$

، جا (٩٠ − حـ) = جتا حـ = $\frac{\text{ب حـ}}{\text{أ حـ}} = \frac{٤}{٥}$ ** قتا (−حـ) = − قتا حـ = $\frac{\text{أ حـ}}{\text{أ ب}} = -\frac{٥}{٣}$

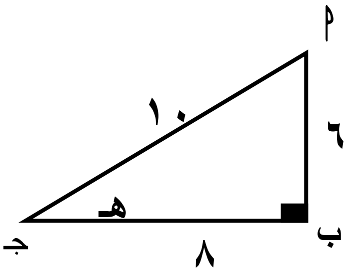
www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

مثـ٢ـال : إذا كان حا هـ = ٠.٦ حيث ٠ < هـ < ٩٠ أوجد جميع الدوال المثلثية لزاوية هـ

الحـــــل

∵ حا هـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{٦}{١٠}$

(ب جـ)^{٢} = (ﺃ جـ)^{٢} ـ (ﺃ ب)^{٢} = ١٠٠ ـ ٣٦ = ٦٤ ∴ ب جـ = $\sqrt{٦٤}$ = ٨



حا هـ = $\frac{\text{ﺃ ب}}{\text{ﺃ جـ}}$ = $\frac{٦}{١٠}$ = $\frac{٣}{٥}$ ، قتا هـ = $\frac{\text{ﺃ جـ}}{\text{ﺃ ب}}$ = $\frac{١٠}{٦}$ = $\frac{٥}{٣}$

حتا هـ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{ﺃ جـ}}$ = $\frac{٨}{١٠}$ = $\frac{٤}{٥}$ ، قا هـ = $\frac{\text{ﺃ جـ}}{\text{ب جـ}}$ = $\frac{١٠}{٨}$ = $\frac{٥}{٤}$

ظا هـ = $\frac{\text{ﺃ ب}}{\text{ب جـ}}$ = $\frac{٦}{٨}$ = $\frac{٣}{٤}$ ، ظتا هـ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{ﺃ ب}}$ = $\frac{٨}{٦}$ = $\frac{٤}{٣}$

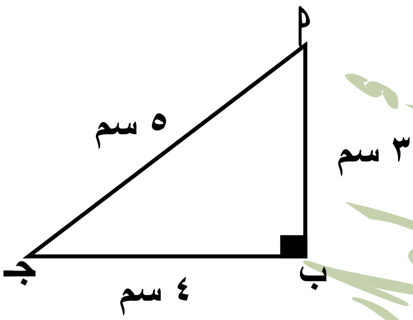
مثـ٣ـال : ﺃ ب جـ مثلث قائم فى ب ، ﺃ ب = ٣ سم ، ﺃ جـ = ٥ سم أوجد قيمة :

ظا ﺃ ، حا (١٨٠ ـ ﺃ) ، حا (٩٠ ـ جـ) ، قتا (ـ جـ)

الحـــــل :

(ب جـ)^{٢} = (ﺃ جـ)^{٢} ـ (ﺃ ب)^{٢} = ٢٥ ـ ٩ = ١٦

∴ ب جـ = $\sqrt{١٦}$ = ٤ سم



∴ ظا ﺃ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{ﺃ ب}}$ = $\frac{٤}{٣}$

∴ حا (١٨٠ ـ ﺃ) = حا ﺃ = $\frac{٤}{٥}$ ، حا (٩٠ ـ جـ) = حتا جـ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{ﺃ جـ}}$ = $\frac{٤}{٥}$

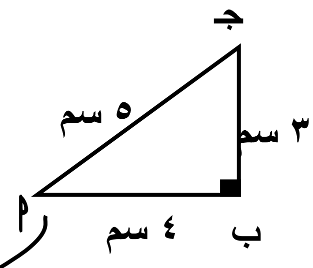
∴ قتا (ـ جـ) = ـ قتا جـ = ـ $\frac{\text{ﺃ جـ}}{\text{ﺃ ب}}$ = $\frac{-٥}{٣}$

مثـ٤ـال : إذا كان ﺃ ، جـ زاويتين حادتين موجبين و كان قا ﺃ = $\frac{٥}{٣}$ ، ظتا جـ = $\frac{٤}{٣}$

أوجد قيمة أولا : جميع الدوال المثلثية لكل من ﺃ ، جـ

ثانيا : حا ﺃ قتا جـ + حتا ﺃ ظتا جـ

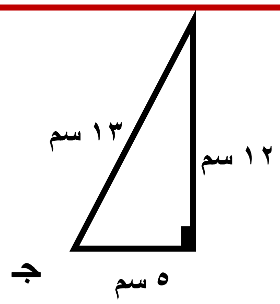
الحـــــل :



حا ﺃ = $\frac{٣}{٥}$ حتا ﺃ = $\frac{٤}{٥}$ ظا ﺃ = $\frac{٣}{٤}$

قتا ﺃ = $\frac{٥}{٣}$ قا ﺃ = $\frac{٥}{٤}$ ظتا ﺃ = $\frac{٤}{٣}$

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

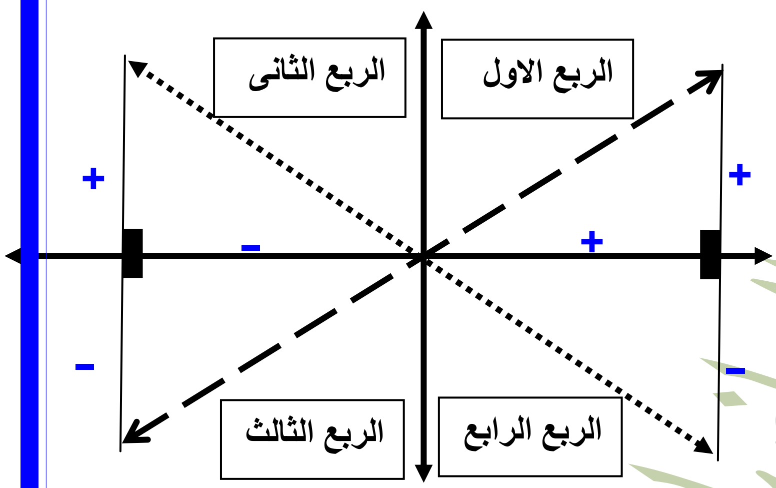


حا جـ = $\frac{١٢}{١٣}$　　حتا جـ = $\frac{٥}{١٣}$　　ظا جـ = $\frac{١٢}{٥}$

قتا جـ = $\frac{١٣}{١٢}$　　قا جـ = $\frac{١٣}{٥}$　　ظتا جـ = $\frac{٥}{١٢}$

المقدار = حا أ قتا جـ + حتا أ ظتا جـ = $\frac{٣}{٥}$ × $\frac{١٣}{١٢}$ + $\frac{٤}{٥}$ × $\frac{٥}{١٢}$ = $\frac{٣٩}{٦٠}$ × $\frac{٢٠}{٦٠}$ = $\frac{٥٩}{٦٠}$

موقع الزوايا فى الارباع :



الربع	حا ، قتا	حتا ، قا	ظا ، ظتا
الأول	موجب	موجب	موجب
الثانى	موجب	سالب	سالب
الثالث	سالب	سالب	موجب
الرابع	سالب	موجب	سالب

• تذكر أن :

١- أصغر زاوية موجبة تكون فى الربع الاول إذا كانت الاشارة للدالة موجبة أما إذا كانت الاشارة سالبة الزاوية تقع فى أصغر ربع من الارباع

٢- أكبر زاوية موجبة تقع فى الربع الذى تكون فيه إشارة الدالة المثلثية موجبة

٣-يجب رسم المثلث فى الربع الخاص به و ذلك حسب موقع الزوايا كالتالى

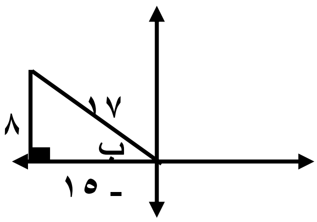
مثـال : إذا كان ١٧ حا ب = ٨ حيث ٩٠ < ب < ١٨٠ ، ٤ ظا جـ = ٣ حيث ١٨٠ < جـ < ٢٧٠

فأوجد قيمة المقدار : ظتا (١٨٠ ـ ب) × قتا (- ٣٣٠) ــ قا (١٨٠ ـ جـ) × حتا ــ ٤٨٠

الحــــــــــل :

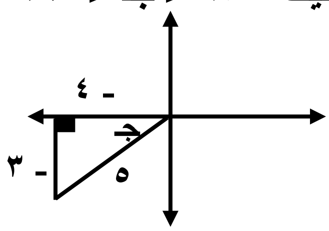
١٧ حا ب = ٨　حيث ٩٠ < ب < ١٨٠

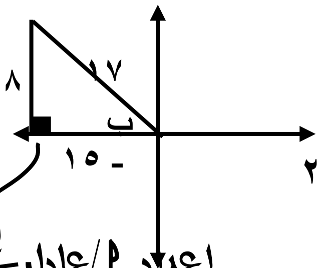
حا ب = $\frac{٨}{١٧}$



٤ ظا جـ = ٣　حيث ١٨٠ < جـ < ٢٧٠

ظا جـ = $\frac{٣}{٤}$





ظتا (١٨٠ ـ ب) = ـ ظتا ب = ـ ($\frac{-١٥}{٨}$) = $\frac{١٥}{٨}$

قتا (ـ ٣٣٠) = ـ قتا ٣٣٠ = ـ (ـ قتا ٣٠) = قتا ٣٠ = ٢

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

قا (١٨٠ ـ جـ) = ـ قا جـ = ـ ($\frac{-٥}{٤}$) = $\frac{٥}{٤}$

حتا (ـ ٤٨٠) = حتا (ـ ٤٨٠ + ٣٦٠) = حتا (ـ ١٢٠ + ٣٦٠) = حتا ١٢٠

= حتا (١٨٠ ـ ١٢٠) = ـ حتا ٦٠ = $\frac{-١}{٢}$

∴ المقدار = $\frac{١٥}{٨}$ × ٢ ـ $\frac{٥}{٤}$ × $\frac{-١}{٢}$ = $\frac{١٥}{٤}$ + $\frac{٥}{٨}$ = $\frac{٣٥}{٨}$

مثـــال٦ : إذا كان حا أ = $\frac{٣}{٥}$ حيث أ ∈] ٠ ، ٩٠ [، ظا ب = $\frac{٥}{١٢}$ حيث ب أكبر زاوية موجبة

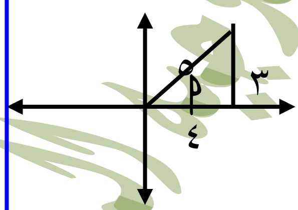
فأوجد قيمة حا أ حتا ب ـ حتا أ حا ب

الحـــل :

حا أ = $\frac{٣}{٥}$

حيث أ ∈] ٠ ، ٩٠ [

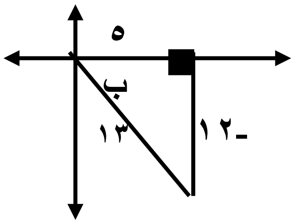
فى الربع الاول



ظا ب = $\frac{٥}{١٢}$

ب أكبر زاوية موجبة

فى الربع الثالث



المقدار = حا أ حتا ب ـ حتا أ حا ب = $\frac{٣}{٥}$ × $\frac{-١٢}{١٣}$ ـ $\frac{٤}{٥}$ × $\frac{-٥}{١٣}$ = $\frac{-٣٦}{٦٥}$ + $\frac{٢٠}{٦٥}$ = $\frac{-١٦}{٦٥}$

مثـــال٧ : حا أ = $\frac{٣}{٥}$ حيث ٩٠ < أ < ١٨٠ ، حتا ب = $\frac{٥}{١٣}$ حيث ب ∈] ٢٧٠ ، ٣٦٠ [

، حا س = حا (١٨٠ ـ أ) حتا (١٨٠ + ب) حتا أ أوجد جـ حيث ٠ < جـ < ٩٠

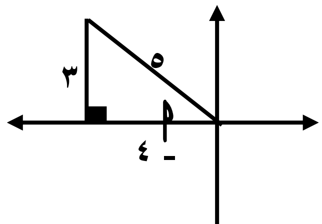
ثم أوجد س لأقرب دقيقة ثم لأقرب درجة .

الحـــل :

∵ حا أ = $\frac{٣}{٥}$

حيث ٩٠ < أ < ١٨٠

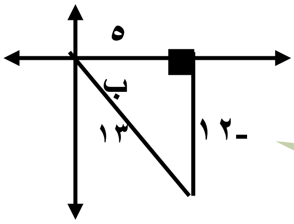
أ فى الربع الثانى



، حتا ب = $\frac{٥}{١٣}$

حيث ب ∈] ٢٧٠ ، ٣٦٠ [

ب فى الربع الرابع



∴ حا (١٨٠ ـ أ) = حا أ = $\frac{٣}{٥}$

∴ حتا (١٨٠ + ب) = ـ حتا ب = $\frac{-٥}{١٣}$

∴ حا س = حا (١٨٠ ـ أ) حتا (١٨ .) حتا أ

= $\frac{٣}{٥}$ × ($\frac{-٥}{١٣}$) × ($\frac{-٤}{٥}$) = $\frac{١٢}{٦٥}$

خطوات الآلة　shift　sin　12　a b/c　65　=　,,,,　$10^{\circ}\ 38'\ 19''$

∴ ق (∠ س) = ١٠° ٣٨′ ١٩″ ≃ ١٠° ٣٨′ لأقرب دقيقة ≃ ١١° لأقرب درجة

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

مثـال٨ : إذا كانت ٤ ظا س = ٣ حيث س ∈] ط ، $\frac{٣ط}{٢}$ [، ١٣جا ص – ١٢ = ٠

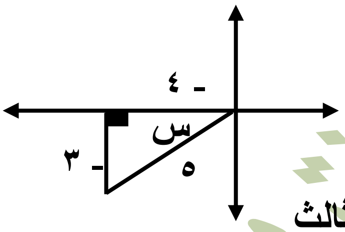
حيث ٩٠° < ص < ١٨٠° فأوجد قيمة المقدار : $\frac{\text{ظا (٩٠ - ص) جا - س + جا ٣٠}}{\text{جتا}^{٢}\text{ ٤٥ - ٢ جا ٦٠ ظا ٦٠}}$

الحـــــــل

، ∴ ظا س = $\frac{٣}{٤}$

∵ الوتر = ٥

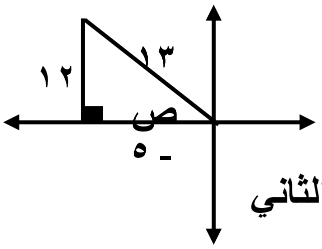
س تقع في الربع الثالث



، جا ص = $\frac{١٢}{١٣}$

، المجاور = ٥

، ص تقع في الربع الثاني



∴ ظا (٩٠ – ص) = ظتا ص = $\frac{-٥}{١٢}$ " ظتا ص سالبة فى الربع الثانى "

،، جا (– س) = – جا س = – ($\frac{-٣}{٥}$) = $\frac{٣}{٥}$ " جا س سالبة فى الربع الثالث "

، جتا^{٢} ٤٥ = ($\frac{١}{\sqrt{٢}}$)^{٢} = $\frac{١}{٢}$

∴ المقدار = $\frac{(– \frac{٥}{} \times \frac{٣}{}) + \frac{١}{}}{\frac{١}{} - ٢ \times \sqrt{٣} \times \sqrt{٣}}$ = $\frac{١}{١٠}$

تمارين على الدوال المثلثية للزوايا الحادة

(١) Δ أ ب جـ قائم الزاوية في ب ، فيه أ ب = ٦سم ، ب جـ = ٨ سم

أوجد ظا (١٨٠ + أ) ،، جتا (٩٠ – جـ) ،، قا (– أ) ،، جتا (١٨٠ + جـ)

(٢) إذا كانت ٣ ظا هـ = ٤ حيث هـ ∈] ٠ ، ١٨٠° [

فأوجد قيمة المقدار ٥ جتا هـ + ظا (١٨٠ – هـ) + جتا ١٢٠ – ظا٣١٥

(٣) إذا كانت ٢٥ جا ب + ٢٤ = ٠ حيث ب ∈] ١٨٠° ، ٢٧١° [

، ٥ ظا جـ – ١٢ = صفر حيث جـ أكبر زاوية موجبة

فأوجد قيمة المقدار جا (١٨٠ + ب) + جتا (١٨٠ – جـ)

(٤) إذا كانت جا س = $\frac{٤}{}$ حيث س أكبر زاوية موجبة

فأوجد قيمة المقدار قتا(١٨٠ – س) ظا س – جتا (١٨٠ + س)

(٥) إذا كان ١٧ جا ب = ٨ حيث ٩٠° < ب < ١٨٠° ، ٤ ظا جـ = ٣ حيث ١٨٠° < جـ < ٢٧٠°

فأوجد قيمة المقدار : ظتا (١٨٠ – ب) × قتا (– ٣٣٠) + قا (١٨٠ – جـ) × جتا(– ٤٨٠°)

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

استخدام الحاسبة فى حل المعادلات المثلثية

أهم مفاتيح الآلة الحاسبة :

Tan	Cos	Sin	Sin^{-1}	Cos^{-1}	tan^{-1}
ظا	جتا	جا	$جا^{-1}$	$جتا^{-1}$	$ظا^{-1}$

Shift يستخدم لإيجاد العملية العكسية

,,,, يستخدم لكتابة قياس الزاوية بالدرجات والدقائق والثوانى وللتحويل إلى كسر عشرى والعكس

X^{-1} أ، $\frac{1}{x}$ يستخدم لإيجاد مقلوب المقدار (مقلوب الدالة المثلثية)

نعلم أن إذا كان حا ٣٠ = $\frac{١}{٢}$ فإن قياس الزاوية س =؟؟؟؟؟؟؟

خطوات الآلة : shift sin 1 a b\c 2 = 30^o

فإن س = حا$^{-1}$ ($\frac{١}{٢}$) ∴ س = ٣٠°

إذا كانت حتا هـ = ٠.٧٣٢٤ فإن قياس الزاوية هـ = ؟؟؟؟؟

خطوات الآلة : shift cos 0.7324 = 42.912026 ,,,, $42^o\ 54'\ 43''$

∴ هـ = حتا$^{-1}$ (٠.٧٣٢٤) = ٤٢.٩١٢٠٢٦ = ٤٣ $''$ ٥٤ $'$ ٤٢ °

مثـــــ١ــــال : أوجد بإستخدام الحاسبة : جا ٢٠ $'$ ٥٧ °

الحــــــــل

خطوات الآلة : sin 5 7 ,,,, 20 ,,,, = 0.8418

جا ٢٠ $'$ ٥٧ ° = ٠.٨٤١٨

مثـــــ٢ــــال : أوجد بإستخدام الحاسبة : ظتا ١٠ $'$ ١٤٩ °

الحــــــــل

خطوات الآلة : tan 149 ,,,, 10 ,,,, = x^{-1} = -1.6753

ظتا ١٠ $'$ ١٤٩ ° = - ١.٦٧٥٣

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

مثـــ٣ـــال : إذا كانت : ٠ < س < ٩٠° أوجد مجموعة حل المعادلة قتا س = ٢٫٣١٤٥

الحـــــــل

خطوات الآلة : | shift | sin | 2.3145 | x^{-1} | = | ,,,, | 25^{o} $36^{\backslash}$ |

فتكون مجموعة الحل = { ٢٥° ٣٦/ }

مثـــ٤ـــال : أوجد مجموعة الحل للمعادلة ٢ حا س + ١ = ٠ حيث ٠ < س < ٣٦٠

الحـــــــل :

٢ حا س = ـ ١ ، حا س = $\frac{-1}{٢}$ سالب [تقع فى الربع الثالث و الرابع]

∴ هـ = ٣٠

فى الربع الثالث س = ١٨٠ + ٣٠ = ٢١٠

أ، فى الربع الرابع س = ٣٦٠ ـ ٣٠ = ٣٣٠ ∴ م . ح = { ٢١٠ ، ٣٣٠ }

مثـــ٥ـــال : أوجد مجموعة الحل للمعادلات الآتية :

(أ) ٢ حا س ـ $\sqrt{٣}$ = ٠ (ب) ٢ حتا س ـ ١ = ٠

الحـــــــل :

(أ) حا س = $\sqrt{٣}$ ، حا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

تقع فى الربع الاول و الثانى

هـ = ٦٠

الربع الاول : س = هـ = ٦٠

الربع الثانى : س = ١٨٠ ـ ٦٠ = ١٢٠ °

م . ح = { ٦٠ ، ١٢٠ }

(ب) ٢ حتا س = ١ ، حتا س = $\frac{١}{٢}$

تقع فى الربع الاول و الرابع

هـ = ٦٠

الربع الاول : س = هـ = ٦٠

الربع الرابع : س = ٣٦٠ ـ ٦٠ = ٣٠٠ °

م . ح = { ٦٠ ، ٣٠٠ }

مثـــ٦ـــال : أوجد مجموعة الحل للمعادلات الآتية :

(أ) ٢ حا س ـ ١ = ٠ (ب) $\sqrt{٣}$ ظا س = ١

الحـــــــل

(أ) ٢ حا س = ١ ، حا س = $\frac{١}{٢}$

[الاول ، الثانى]

هـ = ٣٠

الربع الاول : س = ٣٠

الربع الثانى : س = ١٨٠ ـ ٣٠ = ١٥٠ °

م . ح = { ٣٠ ، ١٥٠ }

(ب) ظا س = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

[الاول و الثالث]

هـ = ٣٠

الربع الاول : س = ٣٠

الربع الثالث : س = ١٨٠ + ٣٠ = ٢١٠ °

م . ح = { ٣٠ ، ٢١٠ }

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

مثـــال ٧ : أوجد مجموعة الحل للمعادلات الآتية :

(أ) ظا س + ١ = ٠ (ب) $\sqrt{٢}$ حا س + ١ = ٠

الحــــــل :

(أ) ظا س = ــ ١

[الثانى ، الرابع]

هـ = ٤٥

الربع الثانى : س = ١٨٠ ــ ٤٥ = ١٣٥ °

الربع الرابع : س = ٣٦٠ ــ ٤٥ = ٣١٥ °

م . ح = { ١٣٥ ، ٣١٥ }

(ب) $\sqrt{٢}$ حا س = ــ ١ ، حا س = $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$

[الثالث ، الرابع]

هـ = ٤٥

الربع الثالث : س = ١٨٠ + ٤٥ = ٢٢٥ °

الربع الرابع : س = ٣٦٠ ــ ٤٥ = ٣١٥ °

م . ح = { ٢٢٥ ، ٣١٥ }

مثـــال ٨ : أوجد مجموعة الحل للمعادلات الآتية : حتا س = ٠.٢٥٣٧ [الاول ، الرابع]

الحــــــل :

خطوات الآلة shift cos 0.2537 = ,,,, $10^{o}\ 38^{\backslash}\ 19^{\backslash\backslash}$

∴ هـ = ١٣ $^{//}$ ١٨ $^{/}$ ٧٥ °

الربع الاول : س = ١٣ $^{//}$ ١٨ $^{/}$ ٧٥ °

، الربع الرابع خطوات الآلة 360 - $75^{o}\ 18^{\backslash}\ 13^{\backslash\backslash}$ = ,,,, $284^{o}\ 41^{\backslash}\ 48^{\backslash\backslash}$

∴ س = ٣٦٠ ــ ١٣ $^{//}$ ١٨ $^{/}$ ٧٥ ° = ٤٨ $^{//}$ ٤١ $^{/}$ ٢٨٤ °

م. ح = { ١٣ $^{//}$ ١٨ $^{/}$ ٧٥ ° ، ٤٨ $^{//}$ ٤١ $^{/}$ ٢٨٤ ° }

مثـــال ٩ : أوجد مجموعة حل المعادلة : ٢ حا^{٢} س + حا س ــ ١ = ٠

الحــــــل :

بالتحليل : (٢ حا س ــ ١)(حا س + ١) = ٠

٢ حا س ــ ١ = ٠ أو حا س + ١ = ٠

٢ حا س = ١ أو حا س = ــ ١ ∴ س = ٢٧٠ $\frac{١}{٢}$

حا س = $\frac{١}{٢}$ هـ = ٣٠ تقع فى الربع الاول و الثانى

الاول : س = ٣٠ ، الثانى : س = ١٨٠ ــ ٣٠ = ١٥٠

م . ح = { ٣٠ ، ١٥٠ ، ٢٧٠ }

www.Cryp2Day.com موقع مذكرات جاهزة للطباعة

تمــــارين

(١) حل المعادلات الآتية : علما بأن ٠ < س < ٣٦٠

١) حا س = ـ ٠.٣٣٢٤   ٢) ظا س = ١.٠٨٩٩

٣) قتا س = ـ ١.٢٥٧٦   ٤) حتا س = ـ ٠.٧٣٤٩

(٢) أكمل ما يأتي :

(أ) إذا كانت ٢ جا س = ١ فإن جتا س = ... أ، ....

(ب) إذا كانت ظا س = ١ فإن جا س = ... أ، ....

(جـ) إذا كانت قتاس = ـ٢ فأن قا س = ... أ، ....

(٣) أوجد مجموعة حل المعادلات الأتية

(أ) ٢ جتــــا^{٢} س = ١   (ب) ظا^{٢} س ـ ١ = صفر

(٤) بإستخدام الألة الحاسبة أوجد قيمة المقدار جتا٢٠ + ظا ٤٢ – جا ٢٠٠

(٥) بإستخدام الألة أوجد قيمة المقدار حا ١٥ جا ١٥ – جتا ١٥ جتا ١٥

(٦) حل المعادلة جا س = ٠.٢٣٤٥

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة