حل معادلة الدرجة الثانية فى مجهول واحد

حل معادلة الدرجة الثانية

المعادلة العامة التربيعية تسمى معادلة الدرجة الثانية أو معادلة القطع المكافئ حيث أنها تمثل بيانيا بقطع مخروطى له فرعان متكافئان

الصورة العامة للمعادلة :

أ س^{٢} + ب س + حـ = صفر

∀ أ ، ب ، حـ ∈ ح أ ≠ ٠

أى أن أى معادلة على الصورة أ س^{٢م} + ب س^{م} +حـ = ٠ تحل على أنها معادلة من الدرجة الثانية ومن أمثلة ذلك :

س^{٨} + ٥ س^{٤} + ٦ = ٠ ، أ س^{١٠٠} – ٧ س^{٥٠} + ١٢ = ٠

إيجاد حل المعادلة التربيعية (جذريها)

معادلة الدرجة الثانية تحل بطريقتين وهما :

الطريقة الجبرية

معادلة الدرجة الثانية تحل بطريقتين جبريا

(١) **بالتحليل** : إذا كانت جذورها أعداد نسبية

(٢) **بالقانون** : إذا كانت جذورها أعداد غير نسبية

وهذا القانون توصل إليه العالم الهندى براهما جويتا وكان يوجد حل وحيد للمعادلة وهو

المعادلة أ س^{٢} + ب س + حـ = ٠ لها جذران هما

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أحـ}}}{٢\text{أ}}$$

ومن الملاحظ أن إستخدام القانون لا ينطبق فقط على المعادلات التى جذورها أعداد غير نسبية ولكن يمكن إستخدام القانون فى أى حالة من حالات معادلة الدرجة الثانية

ملاحظات مهمة :

(١) إذا كانت المعادلة أ س^{٢} + ب س +حـ = ٠ لها جذرين حقيقين وهما ل ، م فإن :

(س – ل) ، (س – م) تسمى عواملها

(٢) إذا كان (س + ك) عامل من عوامل المعادلة التربيعية فإن س = - ك يكون أحد جذورها والعكس

- س = $\frac{\text{ك}}{\text{ل}}$ أحد جذورها فإن (ل س - ك) أحد عواملها
- (ل س - ك) عامل فإن س = $\frac{\text{ك}}{\text{ل}}$ جذرلها

(٣) إذا كان س = ل أحد جذور المعادلة فإنه يحقق المعادلة

مثال ١ : أوجد مجموعة حل المعادلات الأتية :

(١) س^{٢} + س = ٠ (٢) س^{٢} + ١٦ = ٠

(٣) ٤س^{٢} – ٩ = ٠ (٤) س^{٢} - ٥ س + ٦ = ٠

(٥) س + $\frac{٥}{\text{س}}$ = ٤ (٦) $\frac{٦}{\text{س}}$ - س = $\frac{٥}{٢}$ ∀ س ≠ ٠

الحل

(١) س^{٢} + س = ٠ يتم تحليل المقدار

س(س + ١) = ٠ ⟸ س = ٠ ، س = -١

∴ م ح = { ٠ ، -١ }

(٢) س^{٢} + ١٦ = ٠ معادلة تربيعية حدية

س^{٢} = - ١٦ ⟸ س = ± $\sqrt{-١٦}$ ∉ ح

م ح = ϕ

(٣) ٤ س^{٢} – ٩ = ٠ معادلة تربيعية حدية

٤ س^{٢} = ٩ ⟸ س^{٢} = $\frac{٩}{٤}$ ⟸ س = ± $\sqrt{\frac{٩}{٤}}$ = ± $\frac{٣}{٢}$

م ح = { $\frac{٣}{٢}$ ، - $\frac{٣}{٢}$ }

حل أخر :

٤س^{٢} – ٩ = ٠ بتحليل المقدار

(٢ س – ٣) (٢ س + ٣) = ٠

س= $\frac{٣}{٢}$ س = - $\frac{٣}{٢}$ ⟸ م ح = { $\frac{٣}{٢}$ ، - $\frac{٣}{٢}$ }

(٤) متروك

(٥) س + $\frac{٥}{\text{س}}$ = ٤ بالضرب فى س للمعادلة

س^{٢} + ٥ = ٤ س ⟸ س^{٢} – ٤ س + ٥ = ٠

ولا يمكن تحليل المقدار السابق لانه لا يوجد عددين نسبيين ضربهما ٥ وجمعهما ٤

لذا نستخدم القانون لعام لحل المعادلات وهو

$$\frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أحـ}}}{٢\text{أ}}$$

أ=١ ، ب = -٤ ، حـ = ٥

المميز ب^{٢} – ٤ أ حـ = (-٤)^{٢} – ٤ × ١ × ٥ = ١٦ – ٢٠

= -٤

∴ المعادلة ليس لها حل فى ح لماذا ؟

(٦) متروك

مثال ٢ : حل المعادلات الأتية :

(١) $س^{٢} - ١٠ س + ٢٢ = ٠$ (٢) $س^{٢} - ١٠ س + ٣٣ = ٠$

(٣) (س -١١) - س(س -٦) = ٠

(٤) $\frac{س}{س+١} + \frac{٢}{س-١} = ٣$ ∀ س ∉ { ١ ، -١ }

الحل

(١) $س^{٢} - ١٠ س + ٢٢ = ٠$ هذا المقدار لا يمكن تحليله
لماذا ؟

أ=١ ، ب = -١٠ ، جـ = ٢٢

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$

نوجد $ب^{٢} - ٤ أ جـ$

∴ $ب^{٢} - ٤ أ جـ = (-١٠)^{٢} - ٤ × ١ × ٢٢ = ١٠٠ - ٨٨ = ١٢$

$\sqrt{١٢} = \sqrt{٤×٣} = ٢\sqrt{٣}$

∴ $س = \frac{١٠ \pm \sqrt{١٢}}{٢×١} = \frac{١٠ \pm ٢\sqrt{٣}}{٢} = ٥ \pm \sqrt{٣}$

م ح = { $٥ + \sqrt{٣}$ ، $٥ - \sqrt{٣}$ }

(٢) بنفسك

(٣) (س -١١) - س(س -٦) = ٠

$س - ١١ - س^{٢} + ٦ س = ٠$

⇐ $- س^{٢} + ٧س - ١١ = ٠$

وبالضرب × - ١ ⇐ $س^{٢} - ٧ س + ١١ = ٠$

المعادلة ليس لها تحليل لذا فإن :

أ=١ ، ب = - ٧ ، جـ = ١١

نوجد $ب^{٢} - ٤ أ جـ$

$ب^{٢} - ٤ أ جـ = (-٧)^{٢} - ٤ × ١ × ١١ = ٤٩ - ٤٤ = ٥$

∴ $س = \frac{٧ \pm \sqrt{٥}}{١×٢} = \frac{٧ \pm \sqrt{٥}}{٢}$

∴ م ح = { $\frac{٧+\sqrt{٥}}{٢}$ ، $\frac{٧-\sqrt{٥}}{٢}$ }

(٤) $\frac{س}{س+١} + \frac{٢}{س-١} = ٣$ بالضرب × (س+١) (س - ١)

س(س - ١) + ٢(س + ١) = ٣ (س + ١) (س - ١)

$س^{٢} - س + ٢ س + ٢ = ٣(س^{٢} - ١)$

$س^{٢} + س + ٢ = ٣ س^{٢} - ٣$

$٣س^{٢} - س^{٢} - س - ٢ - ٣ = ٠$ ⇐ $٢س^{٢} - س - ٥ = ٠$

المعادلة ليس لها تحليل

∴ نستخدم القانون العام لحل المعادلات

أ=٢ ، ب = - ١ ، جـ = - ٥

أكمل بنفسك

مثال ٣ : أوجد قيمة أ ثم اوجد الجذر الأخر للمعادلة فى كلا مما يأتى :-

(١) إذا كان س = ١ أحد جذرى المعادلة $س^{٢} + س - أ = ٠$

(٢) س = ٢ أحد جذرى المعادلة $أ س^{٢} - ٩ س + ٢ أ = ٠$

(٣) س = ٢ أحد جذرى المعادلة $أ س^{٢} - ٣ س + ٢ = ٠$

الحل

(١) ∵ س = ١ أحد جذورها ∴ س = ١ يحقق المعادلة

$س^{٢} + س - أ = ٠$ ⇐ $(١)^{٢} + (١) - أ = ٠$

١ + ١ - أ = ٠ ⇐ ٢ - أ = ٠ ⇐ أ = ٢

(٢) س=٢ يحقق المعادلة ⇐ $أ س^{٢} - ٩س + ٢أ = ٠$

$أ(٢)^{٢} - ٩ × ٢ + ٢أ = ٠$ ⇐ ٤أ - ١٨ + ٢أ = ٠

٦أ - ١٨ = ٠ ⇐ ٦أ = ١٨ ⇐ أ = ٣

(٣) متروك للطالب

مثال ٤ : إذا كان ٣ ، ٤ هما جذرا المعادلة $أ س^{٢} + ب س + ٦ = ٠$ فأوجد قيمة كلا من أ ، ب

الحل

∴ ٣ ، ٤ جذرين للمعادلة ∴ فإنهما يحققان المعادلة

عندما س = ٣

$أ(٣)^{٢} + ب(٣) + ٦ = ٠$ ⇐ ٩ أ + ٣ب + ٦ = ٠

٩ أ + ٣ ب = - ٦   ÷ ٣

⇐ ٣ أ + ب = - ٢ ——— (١)

عندما س = ٤

$أ(٤)^{٢} + ب(٤) + ٦ = ٠$

⇐ ١٦أ + ٤ ب + ٦ = ٠   ÷ ٢

٨أ + ٢ ب + ٣ = ٠

⇐ ٨أ + ٢ ب = - ٣ ——— (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) أنيا

٣ أ + ب = - ٢   × - ٢   × ٨

٨أ + ٢ ب = - ٣   × ١   × - ٣

- ٦ أ - ٢ ب = ٤   ٢٤ أ + ٨ ب = - ١٦

٨ أ + ٢ ب = - ٣   - ٢٤ أ - ٦ ب = ٩

٢ أ = ١   ٢ ب = - ٧

∴ $أ = \frac{١}{٢}$ $ب = \frac{-٧}{٢}$

حل أخر

∵ ٣ ، ٤ جذرين للمعادلة

لذا فإن عواملها (س-٣) ، (س-٤)

أى أن المعادلة يمكن كتابتها على الصورة

(س-٣)(س-٤)=٠ ⟸ س^{٢} - ٤س - ٣س +١٢ =٠

س^{٢} - ٧س + ١٢ =٠ ⟸ بالمقارنة مع

أ س^{٢} + ب س + ٦ = ٠ × ٢

٢ أ س^{٢} + ٢ ب س + ١٢ = ٠

٢أ = ١   ٢ب = -٧

أ = $\frac{١}{٢}$ ب = $\frac{-٧}{٢}$

مثال٥ : أوجد قيمة أ ، ب فى المعادلة س^{٢} + أ س + ب =٠ إذا كان جذريها :-

$\sqrt{٣}$ ، -$\sqrt{٣}$ $\sqrt{٢}$ +١ ، $\sqrt{٢}$ -١

الحل

$\sqrt{٣}$ ، -$\sqrt{٣}$ جذور للمعادلة

∴ (س + $\sqrt{٣}$)(س − $\sqrt{٣}$) عوامل المعادلة

∴ يمكن كتابة المعادلة على الصورة :

(س + $\sqrt{٣}$)(س − $\sqrt{٣}$) = ٠

س^{٢} − ٣ = ٠ وبالمقارنة مع س^{٢} + أ س + ب = ٠

أ = ٠ ، ب = -٣

تدريب :

☹ إذا كان ١ ، ٣ جذرا المعادلة

أ س^{٢} + (ب - ١) س +٣ =٠ أوجد قيمتى أ ، ب

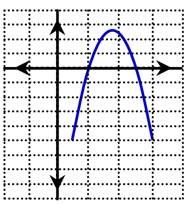
الطريقة البيانية

وهى طريقة يتم فيها رسم منحنى الدالة على الشبكة التربيعية وبالتالى تكون مجموعة حل المعادلة هى نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات وبالتالى فهناك ثلاثة اوضاع لمنحنى الدالة هى كالتالى :

حل معادلة الدرجة الثانية بيانيا

المعادلة التربيعية (معادلة الدرجة الثانية) يكون لها

حلان فى ح :

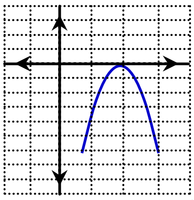


إذا كان المميز ب^{٢} − ٤أ هـ >٠ (موجب)

ومنحنى الدالة فى هذه الحالة يقطع

المحور س فى نقطتين هما حل المعادلة

حل وحيد فى ح :

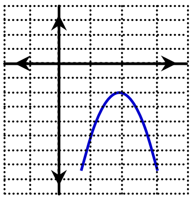


إذا كان المميز ب^{٢} − ٤أ هـ = ٠

ومنحنى الدالة فى هذه الحالة يمس

المحور س فى نقطة واحده وتكون هى الحل

ليس لها حل فى ح :



إذا كان المميز ب^{٢} - ٤أ هـ <٠ (سالب)

ومنحنى الدالة فى هذه الحالة لا

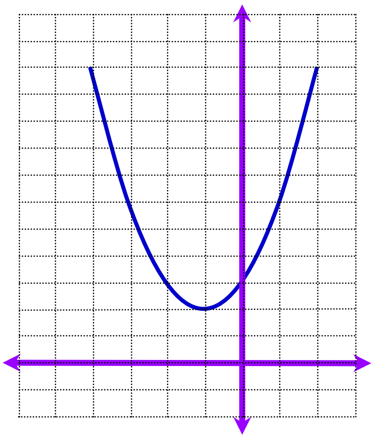
يقطع المحور س فى أى نقطة

مثال ١ : ارسم الشكل البيانى لكلا من الأشكال الأتية ثم حل المعادلة ومن الرسم أوجد القيمة العظمى أو الصغرى ورأس المنحنى

(١) د(س) = س^{٢} + ٢س + ٣ ∀ س ∈ [-٣ ، ١]

الحل

س	س^{٢}	٢س	٣	ص
-٣	٩	-٦	٣	٦
-٢	٤	-٤	٣	٣
-١	١	-٢	٣	٢
٠	٠	٠	٣	٣
١	١	٢	٣	٦



من الرسم نجد أن المنحنى

لا يقطع محور السينات فى

أى نقطة

∴ المعادلة ليس لها حل

رأس المنحنى (-١ ، ٢)

الدالة لها قيمة صغرى = ٢

محور التماثل للدالة هو المستقيم س= - ١

مجال الدالة = ح

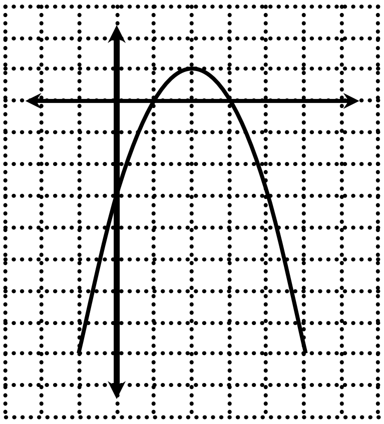
مدى الدالة = [٢ ، ∞ [

(٢) د(س) = ٤ س – س^٢ - ٣ ∀ س ∈ [٠ ، ٤]

الحل

د(س) = - س^٢ + ٤ س – ٣

س	- س^٢	٤س	-٣	ص
٠	٠	٠	-٣	-٣
١	-١	٤	-٣	٠
٢	-٤	٨	-٣	١
٣	-٩	١٢	-٣	٠
٤	-١٦	١٦	-٣	-٣



من الرسم نجد أن :
منحنى الدالة يقطع محور السينات فى نقطتين هما { ١ ، ٣ }
- رأس المنحنى (٢ ، ١)
- المنحنى له قيمة عظمى وهي = ١
- الدالة لها محور تماثل وهو س = ٢
- مجال الدالة = ح
- مدى الدالة =] - ∞ ، ١]
- مدى الدالة = [٠ ، ∞]

من السابق نلاحظ أن :

(١) المنحنيات فى الأمثلة ١ ، ٢ يمثل دالة لأن أى خط رأسى يرسم فإنه يقطع منحنى الدالة فى نقطة واحدة فقط

(٢) مجال كلا من الدوال الأتية هو ح وكذلك أى كثيرة حدود فإن مجالها ح

(٣) مدى الدالة : هو أول وأخر الدالة على محور الصادات وكلا من مجال ومدى الدالة سيتم التعرف عليهم بشكل دقيق فى الصف الثانى الثانوى

الأعداد المركبة

مجموعة حل المعادلة $س^{2} = -1$ في ح تساوي ∅ لانه لا يوجد عدد حقيقى مربعه $= -1$ ولهذا كانت هناك حاجة لتوسيع مجموعة الاعداد الحقيقية مما أوجد مجموعة جديدة هى مجموعة الاعداد المركبة

العدد التخيلى ت

يعرف العدد التخيلي ت بأنه العدد الذي مربعه يساوي (-1)

أى أن $ت^{2} = -1 \Longleftarrow ت = \sqrt{-1}$

وتسمى الأعداد على الصورة ٢ت ، -٥ت ، ٤ت بالأعداد التخيلية

أمثلة

(١) $\sqrt{-9} = \sqrt{9 \times -1} = \pm 3\sqrt{-1} = \pm 3ت$

(٢) $\sqrt{-16} = \sqrt{16 \times -1} = \sqrt{16ت^{2}} = \pm 4ت$

(٣) $\sqrt{-25} = \sqrt{25 \times -1} = \sqrt{25ت^{2}} = \pm 5ت$

قوى العدد التخيلى ت الصحيحة

نعرف من السابق أن $ت = \sqrt{-1}$ ، $ت^{2} = -1$

$ت^{3} = ت^{2} \times ت = -1 \times ت = -ت$

$ت^{4} = ت^{2} \times ت^{2} = -1 \times -1 = 1$

$ت^{5} = ت^{4} \times ت = 1 \times ت = ت$

بوجه عام :

$ت^{4ن} = 1$ ، $ت^{4ن+1} = ت$

$ت^{4ن+2} = -1$ ، $ت^{4ن+3} = -ت$

وللتبسيط نطبق القاعدة الأتية :

(١) إذا كان الأس يقبل القسمة على العدد ٤ سواء كان موجبا او سالبا يكون الناتج $= 1$

(٢) إذا كان الاس يقبل القسمة على ٢ سواء كان موجبا أو سالبا يكون الناتج - بحيث لا يقبل على 4

(٢) إذا كان الأس عدد موجب نطرح منه أكبر عدد يقبل القسمة على ٤ ويكون أقل من الأس

(٣) إذا كان الأس عدد سالب نجمع عليه أقل عدد يقبل القسمة على ٤ بحيث يكون اكبر من الأس ثم بعد ذلك ما يتبقى من الجمع او الطرح يكون أحد الأتى ت = نفسها ، $ت^{2} = -1$ ، $ت^{3} = -ت$

ملاحظات مهمة :

(١) $3ت^{2} = -3$

أى أن العدد $ت^{2}$ يغير إشارة العدد مباشرة

(٢) $6ت^{3} = -6ت$

أى أن العدد $ت^{3}$ تغير اشارة المعامل لها وتترك ت بجوار العدد

(٣) $5ت^{4} = 5$

أى أن العدد $ت^{4}$ لا يؤثر فى معامله لأنه $= 1$

مثال ١ : اختصر لأبسط صورة كلا من الأعداد التخيلية الأتية

(١) $ت^{45}$ (٢) $ت^{62}$ (٣) $ت^{31}$ (٤) $ت^{80}$

(٥) $ت^{-65}$ (٦) $ت^{-49}$ (٧) $ت^{-14}$ (٨) $ت^{-16}$

الحل

(١) $ت^{45}$ الأس عدد موجب لذا نبحث عن أكبر عدد اقل من ٤٥ ويقبل القسمة على ٤ ثم نطرحه من الأس ٤٥ وهذا العدد هو ٤٤ $ت^{45-44} = ت$

(٢) $ت^{62} = -1$

الاس ٦٢ وهو عدد يقبل القسمة على ٢ ولا يقبل القسمة على ٤ ∴ الناتج $= -1$

(٣) $ت^{31-28} = ت^{3} = -ت$

لأن اكبر عدد يقبل القسمة على ٤ واصغر من ٣١ هو ٢٨ لذا طرحنا من الأس ٢٨

(٤) $ت^{80} = 1$ لأن الأس يقبل القسمة على ٤

(٥) $ت^{-65}$ الأس سالب لذا نبحث عن أصغر عدد يقبل القسمة على ٤ ويكون اكبر من ٦٥ وهو ٦٨ لذا نضيف للأس ٦٨ $ت^{-65} = ت^{-65+68} = ت^{3} = -ت$

(٦) $ت^{-49}$ أصغر عدد يقبل القسمة على ٤ واكبر من ٤٩ هو ٥٢ لذا نضيف ٥٢ للأس

$\Longleftarrow ت^{-49+52} = ت^{3} = -ت$

(٧) $ت^{-14} = -1$

(٨) $ت^{-16} = 1$ لأن الأس يقبل القسمة على ٤ وإن كان سالبا

مثال ٢ أوجد قيمة كلا مما يأتى فى ابسط صورة

(١) $ت^{4ن+17}$ (٢) $ت^{4ن+3}$ (٣) $ت^{4ن-15}$

الحل

(١) $ت^{٤ن + ١٧}$ العدد ٤ن يقبل القسمة على ٤ مهما كانت ن

$∴ ت^{٤ن + ١٧} = ت^{١٧ - ١٦} = ت$

(٢) $ت^{٤ن + ٣} = ت^{٣} = -ت$

(٣) $ت^{٤ن - ١٥} = ت^{-١٥} = ت^{-١٥ + ١٦} = ت$

العدد المركب

هو ذلك العدد الذى يتركب من عدد حقيقى وأخر تخيلى

ويكون فى الصورة ⟸ $أ + ب ت$

ويسمى أ بالجزء الحقيقى ويسمى ب بالجزء التخيلى

وذلك علما بأن كلا من العددين أ ، ب أعداد حقيقية

- يقال أن العدد المركب عدد حقيقى صرف

إذا كانت ب = ٠ **مثل** ⟸ ع = ٢ أ ع = -٤

- يقال أن العدد المركب تخيلى صرف

إذا كانت أ = ٠ **مثل** ⟸ ع = ٣ت أ ع = -٥ت

ويرمز للأعداد المركبة بالرمز ك

مثال ١ : أوجد الأجزاء الحقيقية والأجزاء التخيلية فى كلا من الأعداد المركبة الأتية

(١) ع = ٣ + ٢ ت (٢) ع = -٣ + ٥ت
(٣) ع = ٤ − ٢ت (٤) ع = ٢ + ت
(٥) ع = ٣ت (٦) ع = ١

الحل

(١) ع = ٣ + ٢ ت
الجزء الحقيقى = ٣ ، الجزء التخيلى = ٢

(٢) ع = -٣ + ٥ ت
الجزء الحقيقى = -٣ ، الجزء التخيلى = ٥

(٣) ع = ٤ − ٢ ت
الجزء الحقيقى = ٤ ، الجزء التخيلى = -٢

(٤) ع = ٢ + ت
الجزء الحقيقى = ٢ ، الجزء التخيلى = ١

(٥) ع = ٣ت
الجزء الحقيقى = ٠ ، الجزء التخيلى = ٣

(٦) ع = ١
الجزء الحقيقى = ١ ، الجزء التخيلى = ٠

مثال ٢ : حل كلا من المعادلات الأتية

(١) $٩س^{٢} + ١٢٥ = ٦١$ (٢) $٣س^{٢} + ٢٧ = ٠$
(٣) $٥س^{٢} + ٢٤٥ = ٠$ (٤) $٤س^{٢} + ١٠٠ = ٧٥$

الحل

(١) $٩ س^{٢} + ١٢٥ = ٦١$

$٩ س^{٢} = ٦١ - ١٢٥ = -٦٤$ ⟸ $٩ س^{٢} = -٦٤$

$∴ س^{٢} = \frac{-٦٤}{٩}$ وبأخذ $\sqrt{\ }$ للطرفين

$س^{٢} = \frac{-٦٤}{٩}$ ⟸ $س = ± \frac{٨}{٣} ت$

$م ح = \{ ± \frac{٨}{٣} ت \}$

(٢) $٣ س^{٢} + ٢٧ = ٠$ ⟸

$٣ س^{٢} = -٢٧$ ⟸ $س^{٢} = \frac{-٢٧}{٣} = -٩$

$س^{٢} = -٩$ ⟸ $\sqrt{س^{٢}} = \sqrt{-٩}$

$∴ س = ±٣ت$ $م ح = \{ ±٣ت \}$

(٣) $٥ س^{٢} + ٢٤٥ = ٠$ متروك للطالب

(٤) $٤ س^{٢} + ١٠٠ = ٧٥$

$٤س^{٢} = ٧٥ - ١٠٠ = -٢٥$

$س^{٢} = \frac{-٢٥}{٤}$ ⟸ $\sqrt{س^{٢}} = \sqrt{\frac{-٢٥}{٤}}$

$∴ س = ± \frac{٥}{٢} ت$ $∴ م ح = \{ ± \frac{٥}{٢} ت \}$

تساوى عددين مركبين

إذا كان $أ + ب ت = هـ + ى ت$ فإن :

⟸ أ = هـ ، ب = ى

أى أنه إذا تساوى عددين مركبين فإن

- الجزء الحقيقى = الجزء الحقيقى
- الجزء التخيلى = الجزء التخيلى

إنعدام العدد المركب

إذا كان أ + ب ت = صفر فإن :

⟸ أ = صفر ، ب = صفر

إذا ساوى العدد المركب صفرا فإن :

- الجزء الحقيقى = صفر
- الجزء التخيلى = صفر

مثال ١ : أوجد قيمة س ، ص فيما يأتى

(١) (٢ س + ١) + ٤ ص ت = ٥ – ١٢ ت

(٢) ٢ س – ٣ + (٣ ص + ١) ت = ٧ + ١٠ ت

(٣) ٢ س – ص + (س – ٢ ص) ت = ٥ + ١٠ ت

الحل

(١) (٢ س + ١) + ٤ ص ت = ٥ – ١٢ ت

∴ ٢ س + ١ = ٥ ، ٤ ص = -١٢

٢ س = ٥ – ١ = ٤ ،

س = $\frac{٤}{٢}$ = ٢ ، ص = $\frac{-١٢}{٤}$ = -٣

(٢) ٢ س – ٣ + (٣ ص + ١) ت = ٧ + ١٠ ت

٢ س – ٣ = ٧ ، ٣ ص + ١ = ١٠

٢ س = ٧ + ٣ = ١٠ ، ٣ ص = ١٠ – ١ = ٩

س = $\frac{١٠}{٢}$ = ٥ ، ص = $\frac{٩}{٣}$ = ٣

(٣) ٢ س – ص + (س – ٢ ص) ت = ٥ + ١٠ ت

٢ س – ص = ٥ ، س – ٢ ص = ١٠

وبحل هاتان المعادلتان أنيا وذلك كالتالى :

٢ س - ص = ٥ ——— (١) ×١ ×٢

س - ٢ س = ١٠ ——— (٢) ×-٢ ×-١

٢ س - ص = ٥ ، ٤س - ٢ ص = ١٠

-٢ س + ٤ ص = -٢٠ ، - س +٢ ص = -١٠

٠ + ٣ ص = -١٥ ، ٣س + ٠ = ٠

∴ ص = $\frac{-١٥}{٣}$ = -٥ ، س = $\frac{٠}{٣}$ = ٠

مثال ٢ : أوجد قيمة س ، ص فيما يأتى

(١) س + ت ص = $(٢ + ٣ ت)^{٢}$

(٢) ٢ س + ٤ ت ص = $(٤ – ٢ ت)^{٢}$

(٣) س + ت ص = $(١ + ٢ ت)^{٣}$

الحل

(١) س + ت ص = $(٢ + ٣ ت)^{٢}$ = ٤ + ٩ $ت^{٢}$ + ١٢ ت

= ٤ – ٩ + ١٢ ت = -٥ + ١٢ ت

∴ س = -٥ ، ص = ١٢

(٢) ٢ س + ٤ ت ص = $(٤ – ٢ ت)^{٢}$

= ١٦ + ٤ $ت^{٢}$ - ١٦ ت

= ١٦ – ٤ – ١٦ ت = ١٢ – ١٦ ت

٢ س = ١٢ ⟸ س = ٦

٤ ص = -١٦ ⟸ ص = -٤

(٣) س + ت ص = $(١ + ٢ ت)^{٣}$

= $(١ + ٢ ت)^{٢}$ (١+٢ ت)

= (١ + ٤ $ت^{٢}$ + ٤ ت) (١ + ٢ ت)

= (١ – ٤ + ٤ ت) (١ + ٢ ت)

= (-٣ + ٤ ت) (١ + ٢ ت)

= -٣ – ٦ ت + ٤ ت + ٨ $ت^{٢}$

= -٣ – ٨ - ٢ ت = -١١ – ٢ ت

∴ س = -١١ ، ص = -٢

العمليات على الأعداد المركبة

العمليات على الأعداد المركبة هى الجمع والطرح والضرب والقسمة وخواصها هى الإنغلاق والإبدال والدمج والمحايد والمعكوس وسنتناول بسرعة هذه العمليات والخواص فيما يأتى :

نفرض أنه لدينا عددان مركبان هما

$ع_1$ = $س_1$ + ت $ص_1$ ، $ع_2$ = $س_2$ + ت $ص_2$ فإن :

العمليات على الأعداد المركبة تكون كالتالى :

(١) $ع_1$ + $ع_2$ = ($س_1$ + $س_2$) + ت ($ص_1$ + $ص_2$)

(٢) $ع_1$ - $ع_2$ = ($س_1$ - $س_2$) + ت ($ص_1$ - $ص_2$)

(٣) $ع_1$ × $ع_2$ =

= ($س_1$ $س_2$ – $ص_1$ $ص_2$) + ت ($س_1$ $ص_2$ + $س_2$ $ص_1$)

(٤) $\frac{ع_1}{ع_2}$ = $\frac{س_1 + ص_1}{س_2 + ص_2}$

ويتم ضرب العدد بسطا ومقاما فى مرافق المقام وذلك سيأتى ذكره فى العددان المترافقان

خواص العمليات على الأعداد المركبة :

(١) الإنغلاق :

∀ $ع_1$ ، $ع_2$ ∈ ك فإن :

$ع_1$ + $ع_2$ ∈ ك ، $ع_2$ + $ع_1$ ∈ ك

$ع_1$ × $ع_2$ ∈ ك ، $ع_2$ × $ع_1$ ∈ ك

(٢) الإبدال :

∀ $ع_1$ ، $ع_2$ ∈ ك فإن :

$ع_1$ + $ع_2$ = $ع_2$ + $ع_1$

$ع_1$ × $ع_2$ = $ع_2$ × $ع_1$

(٣) الدمج (التجميع) :

∀ $ع_1$ ، $ع_2$ ، $ع_3$ ∈ ك فإن :

($ع_1$ + $ع_2$) + $ع_3$ = $ع_1$ + ($ع_2$ + $ع_3$)

(ع١ × ع٢) × ع٣ = ع١ × (ع٢ × ع٣)

(٤) العنصر المحايد

يوجد عنصر محايد جمعى لأى عدد مركب وهو **الصفر**
ويوجد عنصر محايد ضربى لأى عدد مركب وهو **الواحد**

(٥) العنصر المعكوس :

الجمعى : ∀ ع ∈ ك يوجد - ع ∈ ك بحيث :
إذا كان : ع = س + ت ص
فإن : - ع = - س – ت ص

الضربى : ∀ ع ∈ ك يوجد ع^-١ ∈ ك بحيث :
إذا كان : ع = س + ت ص
فإن : ع^-١ = س / (س٢ + ص٢) – ص / (س٢ + ص٢)

مثال ١ : أوجد قيمة ما يلى فى ابسط صورة
(١) (٧ – ٤ت) + (٢ + ت)
(٢) (١٢ – ٥ت) - (٧ – ٩ت)
(٣) (٢ + ٣ت) (٣ – ٤ت)
(٤) (٤ – ٣ت) (٤ + ٣ت)
(٥) (٥ – ٦ت) (٣ + ٢ت)

الحل

(١) (٧ – ٤ت) +(٢ + ت)
= (٧ + ٢) +(-٤ + ٢) ت = ٩ – ٢ت

(٢) (١٢ – ٥ت) - (٧ – ٩ت)
= ١٢ – ٥ت – ٧ + ٩ت
= (١٢ – ٧) + (-٥ + ٩) ت = ٥ + ٤ت

(٣) (٢ + ٣ت) (٣ – ٤ت)
= ٦ – ٨ت + ٩ت – ١٢ت٢
= ٦ + ١٢ + ت = ١٨ + ت

(٤) (٤ – ٣ت) (٤ + ٣ت)
= ١٦ + ~~١٢ت~~ – ~~١٢ت~~ – ٩ت٢
= ١٦ + ٩ = ٢٥

(٥) (٥ – ٦ت)(٣ + ٢ت)
= ١٥ + ١٠ت – ١٨ت – ١٢ت٢
= ١٥ + ١٢ – ٨ت = ٢٧ – ٨ت

مثال ٢ : أوجد قيمة س ، ص فيما يلى :
(١) س + ت ص = (٢ + ٣ت) (١ + ٢ت)
(٢)٢ س + ٤ت ص = (٤ – ٢ت) (٤ + ٢ت)
(٣) س + ت ص = (١ + ٢ت) (١ – ٢ت) ت

الحل

(١) س + ت ص = (٢ + ٣ت) (١ + ٢ت)
= (٢ + ٤ت + ٣ت + ٦ت٢) = ٢ – ٦ + ٧ت
= - ٤ + ٧ت   وهو عدد مركب
∴ س = - ٤   ،   ص = ٧

(٢) ٢ س + ٤ت ص = (٤ – ٢ت) (٤ + ٢ت)
= ١٦ + ~~٨ت~~ – ~~٨ت~~ – ٤ت٢
= ١٦ + ٤ = ٢٠   وهوعدد حقيقى صرف
∴ ٢ س = ٢٠ ⟸ س = ١٠
٤ ص = ٠ ⟸ ص = ٠

(٣) س + ت ص = (١ + ٢ت) (١ – ٢ت) ت
= (١ - ~~٢ت~~ + ~~٢ت~~ – ٤ت٢) ت
= (١ + ٤) ت = ٥ت   وهوعدد تخيلى صرف
∴ س = ٠   ،   ص = ٥

العددان المترافقان

هما العددان المركبان المتشابهان تماما فى الأجزاء الحقيقية والتخيلية ولكنهما يختلفان فى إشارة الجزء التخيلى
فهما على الصورة : ⟸ ٲ + ب ت   ،   ٲ – ب ت

أمثلة على العددان المترافقان :

(١) ٢ + ٥ت   ،   ٢ – ٥ت
(٢) ٣ + ٤ت   ،   ٣ – ٤ت
(٣) - ٣ + ٥ت   ،   - ٣ – ٥ت

خواص العددان المترافقان

(١) حاصل جمعهما يون عدد حقيقى صرف
(٢) حاصل طرحهما يكون عدد تخيلى صرف
(٣) حاصل ضربهما دائما عدد حقيقى
فحاصل ضرب العددان ٲ + ب ت ، ٲ – ب ت هو كالتالى
(ٲ + ب ت) (ٲ - ب ت) = ٲ٢ + ب٢

مثال ١ : أوجد قيمة ما يلي

(١) $(٣ - ٢ت)(٣ + ٢ت) = ٩ + ٤ = ١٣$

(٢) $(-٢ + ٥ت)(-٢ - ٥ت) = ٤ + ٢٥ = ٢٩$

(٣) $(٨ + ٣ت)(٨ - ٣ت) =$

(٤) $(-٢ + ٧ت)(-٢ - ٧ت) =$

مثال ٢ : ضع الأعداد الأتية فى الصورة س + ت ص

١) $\frac{١}{٣ - ٢ب}$ ٢) $\frac{٣ + ٤ب}{٣ - ٤ب}$ ٣) $\frac{٥ب}{٥ - ١٢ب}$

الحل

١) لجعل العدد $\frac{١}{٣ - ٢ب}$

يجب جعل المقام عدد حقيقى صرف أو تخيلي صرف وذلك بضرب العدد بسطا ومقاما فى مرافق المقام

$$\frac{١}{٣ - ٢ب} \times \frac{٣ + ٢ب}{٣ + ٢ب} = \frac{٣ + ٢ب}{٩ + ٤} = \frac{٣ + ٢ب}{١٣} = \frac{٣}{١٣} + \frac{٢}{١٣}ت$$

(٢) بضرب العدد بسطا ومقاما فى مرافق المقام

$$\frac{٣ + ٤ب}{٣ - ٤ب} \times \frac{٣ + ٤ب}{٣ + ٤ب} = \frac{٩ + ١٢ب + ١٢ب + ١٦ب^{٢}}{٩ + ١٦}$$

$$= \frac{٩ + ٢٤ب - ١٦}{٩ + ١٦} = \frac{-٧ + ٢٤ب}{٢٥} = \frac{-٧}{٢٥} + \frac{٢٤}{٢٥}ت$$

(٣) $$\frac{٥ب}{٥ - ١٢ب} \times \frac{٥ + ١٢ب}{٥ + ١٢ب} = \frac{٢٥ب + ٦٠ب^{٢}}{٢٥ + ١٤٤} = \frac{٢٥ب - ٦٠}{١٦٩} =$$

$$-\frac{٦٠}{١٦٩} + \frac{٢٥}{١٦٩}ت$$

مثال ٣ : أوجد فى ابسط صورة كلا مما يأتى

(١) $\frac{٤ - ٦}{٢}$ (٢) $\frac{٣٦}{٣ - ٢}$

(٣) $\frac{-٣}{-٢}$ (٤) $\frac{٣ + ٤}{٥ - ٢}$

الحل

(١) $\frac{٤ - ٦}{٢} = \frac{٤}{٢} - \frac{٦}{٢} = \frac{٤ب^{٤}}{٢ب} - ٣ = ٢ت^{٣} - ٣$

$= -٢ت - ٣$

(٢) $$\frac{٣٦}{٣ - ٢ب} \times \frac{٣ + ٢ب}{٣ + ٢ب} = \frac{٧٨ + ٥٢ب}{٩ + ٤} = \frac{٧٨ + ٥٢ب}{١٣}$$

$$= \frac{٧٨}{١٣} + \frac{٥٢}{١٣}ت = ٦ + ٤ت$$

(٣) $$\frac{٣ - ب}{٢ - ب} \times \frac{٢ + ب}{٢ + ب} = \frac{٦ + ٣ب - ٢ب - ب^{٢}}{٤ + ١}$$

$$= \frac{٦ + ب + ١}{٤ + ١} = \frac{٧ + ب}{٥} = \frac{٧}{٥} + \frac{١}{٥}ت$$

(٤) متروك للطالب

مثال ٤ : أوجد قيمة س ، ص فى كلا مما يأتى

(١) $س + ت ص = ٢ت^{-١} + ٤ت^{٢} + ٣ت$

(٢) $س + ت ص = \frac{(٢ + ب)(٢ - ب)}{٣ + ٤ب}$

(٣) $س + ت ص = (٢ت ٢ت)(٢ + ٢ت) ت$

الحل

١) $س + ت ص = ٢ت^{-١} + ٤ت^{٢} + ٣ت$

$= ٢ت^{-١+٤} + (-٤) + ٣ت = ٢ت^{٣} - ٤ + ٣ت$

$= -٢ت - ٤ + ٣ت = -٤ + ت$

$\Longleftarrow س = -٤ \quad ، \quad ص = ١$

٢) $$س + ت ص = \frac{(٢ + ب)(٢ - ب)}{٣ + ٤ب} = \frac{٤ + ١}{٣ + ٤ب} = \frac{٥}{٣ + ٤ب}$$

$$= \frac{٥}{٣ + ٤ب} \times \frac{٣ - ٤ب}{٣ - ٤ب} = \frac{١٥ - ٢٠ب}{٩ + ١٦} = \frac{١٥ - ٢٠ب}{٢٥}$$

$$= \frac{١٥}{٢٥} + \frac{-٢٠}{٢٥}ت = \frac{٣}{٥} - \frac{٤}{٥}ت$$

(٣) متروك للطالب

مثال ٥ : أوجد شدة التيار الكلية المارة فى مقاومتين متصلتين على التوازى فى دائرة كهربية مغلقة إذا كانت شدة التيار فى المقاومة الأولى = ٥ − ٣ت وشدة التيار فى المقامة الثانية ٢ + ت علما بأن شدة التيار الكلية تساوى مجموع شدتى التيار المارة فى المقاومتين

الحل

شدة التيار فى المقاومتين =

شدة التيار فى المقاومة الأولى + شدة التنيار فى المقاومة الثانية

$= ٥ - ٣ت + ٢ + ت = ٧ - ٢ت$

بحث نوع جذرى المعادلة

المعادلة التربيعية ٢س٢ + ب س + ﺟ = ٠ ∀ ٢ ≠ ٠
دائما لها حلان (جذران) هذان الجذران يكونان :
☹ متشابهين ☹ أعداد نسبية
☹ أعداد غير نسبية ☹ أعداد غير حقيقية
وهذان الجذران نحصل عليهما من القانون العام لحل المعادلات السابق ذكره وهو :
المعادلة ٢س٢ + ب س + ﺟ = ٠ ∀ ٢ ≠ ٠ لها جذران

هما س = (– ب ± √(ب٢ – ٤٢ﺟ)) / ٢٢

ولكن الذى يحدد نوع الجذرين هو ذلك المقدار الموجود تحت الجذر ويسمى المميز وهو ب٢ – ٤٢ﺟ والمميز يصنف أنواع الجذور للمعادلة كالتالى

إذا كان المميز ب٢ – ٤٢ﺟ

(١) موجب > ٠

فى هذه الحالة يكون الجذرين حقيقين مختلفين نسبيين أو غير نسبيين حسب نوع الجذرين فإذا كان :

المميز مربع كامل
يكون الجذرين حقيقيين نسبيين

المميز ليست مربع كامل
يكون الجذرين حقيقيين غير نسبيين

حل المعادلة بيانيا :
منحنى الدالة
د(س) = ٢س٢ + ب س + ﺟ = ٠ ∀ ٢ ≠ ٠
يقطع محور السينات فى نقطتين هما جذرا المعادلة

(١) صفراً = ٠

فى هذه الحالة يكون جذرى المعادلة متساويين (متشابهين أو مكررين) وكلا منهما يساوى –ب / ٢٢

حل المعادلة بيانيا :
منحنى الدالة التربيعية يمس محور السينات عند النقطة (–ب / ٢٢ ، ٠)

(١) سالب < ٠

فى هذه الحالة لا يكون للمعادلة أى جذور حقيقية ولكن الجذور تكون أعداد مركبة

حل المعادلة بيانيا :
لا يقطع منحنى الدالة أى نقط من المحور س

مثال ١ بين نوع كلا من جذرا المعادلات الأتية
(١) س٢ - ٢ س + ٥ = ٠ (٢) س٢ + ٩ = ٠
(٣) ٣ س٢ + ١٠ س - ٥ = ٠ (٤) ٢ س٢ – س + ١ = ٠

الحل

(١) س٢ - ٢ س + ٥ = ٠
٢ = ١ ، ب = - ٢ ، ﺟ = ٥
المميز ب٢ – ٤٢ﺟ = (- ٢)٢ – ٤ × ١ × ٥
= ٤ – ٢٠ = - ١٦
المميز عدد سالب لذا فإن :
مجموعة الحل ⊄ ح

(٢) س٢ + ٩ = ٠
٢ = ١ ، ب = ٠ ، ﺟ = ٩
المميز ب٢ – ٤٢ﺟ = (٠)٢ – ٤×١ ×٩
= ٠ – ٣٦ = - ٣٦
المميز عدد سالب لذا فإن مجموعة الحل ⊄ ح
م.ح = { ϕ }

(٣) ٣ س٢ + ١٠ س - ٥ = ٠
٢ = ٣ ، ب = ١٠ ، ﺟ = -٥
المميز ب٢ – ٤٢ﺟ = (١٠)٢ – ٤×٣ ×-٥
= ١٠٠ + ٦٠ = ١٦٠

∴ المميز عدد موجب ليست مربع كامل
∴ الجذور أعداد حقيقية غير نسبية

(٤) متروك

مثال ٢ : أوجد قيم م الحقيقية التى تجعل المعادلة
س^{٢} - (٢م -١) س + م^{٢} = ٠ ليس لها جذور حقيقية

الحل

س^{٢} - (٢م-١) س + م^{٢} = ٠

أ = ١ ، ب = - (٢م -١) ، جـ = م^{٢}

المعادلة ليس لها حل فى ح ∴ ⟸ المميز < ٠

المميز ب^{٢} – ٤أجـ < ٠ ⟸

المميز = ب^{٢} – ٤أجـ = {-(٢م -١)}^{٢} – ٤ × ١ × م^{٢}

= $\cancel{٤م^{٢}}$ + ١ - ٤م – $\cancel{٤م^{٢}}$ < ٠

-٤م + ١ < ٠ ⟸ - ٤م < - ١ ÷ -٤

م > $\frac{١}{٤}$ ⟸ م =] $\frac{١}{٤}$ ، ∞ [

م ∈ ح = { س : س ∈ ح ، س > $\frac{١}{٤}$ }

مثال ٣ إذا كان جذرا المعادلة ٢س^{٢} + ن س + ٥ = ٠
متساويين أوجد قيمة ن

الحل

أ = ٢ ، ب = ن ، جـ = ٥

∵ الجذران متساويان ⟸ ∴ المميز = صفر

المميز ب^{٢} – ٤أجـ = ٠

ن^{٢} – ٤×٢×٥ = ٠ ⟸ ن^{٢} – ٤٠ = ٠

⟸ ن^{٢} = ٤٠

ن = ± $\sqrt{٤٠}$ = ± ٢$\sqrt{١٠}$

مثال ٤ : أثبت أنه لجميع قيم ل ، م الحقيقيتين
يكون جذرا المعادلة (س - ل) (س - م) = ٥
حقيقيين

الحل

(س - ل) (س - ب) = ٥

س^{٢} – م س – ل س + ل م – ٥ = ٠

س^{٢} - (م + ل) س + ل م – ٥ = ٠

أ = ١ ، ب = -(م + ل) جـ = ل م – ٥

ليكون جذرا المعادلة متساويان فإنه

لا بد أن يكون المميز عدد موجب

المميز = (معامل س)^{٢} – ٤ × معامل س^{٢} × الحد المطلق

= (-(م + ل))^{٢} – ٤ × ١ × (ل م – ٥) =

= م^{٢} + ٢ ل م + ل^{٢} – ٤ ل م + ٢٠

= م^{٢} – ٢ل م + ل^{٢} + ٢٠

= (م – ل)^{٢} + ٢٠   وهذا العدد دائما موجب

لذا فإن جذرا المعادلة يكونا حقيقيان

مثال ٥ : إذا كان م عدد نسبى فإن جذرى المعادلة
٢٥ س^{٢} + ٥(م + ٣) س + ٣م = ٠ يكونان نسبيان

الحل

٢٥ س^{٢} + ٥(م + ٣) س + ٣م = ٠

∴ أ = ٢٥ ، ب = ٥ (م + ٣) ، جـ = ٣م

المميز = ب^{٢} – ٤ أ جـ = (٥ (م + ٣))^{٢} – ٤ × ٢٥ × ٣م

= ٢٥ (م^{٢} + ٦م + ٩) – ٢٥ × ١٢ م

= ٢٥ [م^{٢} + ٦م – ١٢م + ٩] = ٢٥ (م^{٢} – ٦م + ٩)

= ٥^{٢} (م – ٣)^{٢} = [٥(م - ٣)]^{٢}

مربع كامل   لذا فإن جذرا المعادلة هى أعداد نسبية

مثال ٦ : إذا كان جذرا المعادلة
س^{٢} – ٢ك س + ٧ك - ٦ س + ٩ = ٠
متساويين أوجد قيمة ك

الحل

س^{٢} – ٢ك س + ٧ك - ٦ س + ٩ = ٠

أ = ١ ، ب = (-٢ك - ٦) ، جـ = ٧ ك + ٩

الجذران متساويان ∴ المميز = صفر

المميز = ب^{٢} – ٤ أ جـ

= (-٢ك - ٦)^{٢} – ٤ × ١ × (٧ك + ٩)

= ٤ ك^{٢} + ٣٦ + ٢٤ ك - ٢٨ ك - ٣٦

= ٤ ك^{٢} – ٤ ك = ٠

٤ ك (ك - ١) = ٠

ك = ٠ ، ك = ١

تدريب

(١) أثبت أن جذرى المعادلة
س^{٢} + ك س + ك = ١ ∀ ك ∈ ن   دائما نسبيان

(٢) أوجد قيم ك التى تجعل المعادلة
٥ س^{٢} + ٤ س + ك = ٠

🗐 حقيقيان متساويان   🗐 حقيقيان مختلفان

🗐 تخيليان

العلاقة بين جذور المعادلة ومعاملاتها

نعلم أن المعادلة أ س^2 + ب س + جـ = ٠ معادلة من الدرجة الثانية لذا ومن النظرية الأساسية فى الجبر يكون لها جذران مهما كانت كينونتهما ونفرض أنهما ل ، م

هذان الجذران ينتجان من القانون

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤أجـ}}{٢أ}$$

لذا فإن أحدهما ليكن ل = $\frac{-ب - \sqrt{ب^2 - ٤أجـ}}{٢أ}$

والأخر م = $\frac{-ب + \sqrt{ب^2 - ٤أجـ}}{٢أ}$ لذا فإنه يكون :

ل + م = $\frac{-ب - \sqrt{ب^2 - ٤أجـ}}{٢أ} + \frac{-ب + \sqrt{ب^2 - ٤أجـ}}{٢أ}$

$= \frac{-ب - \sqrt{ب^2 - ٤أجـ} - ب + \sqrt{ب^2 - ٤أجـ}}{٢أ}$

$= \frac{-ب - ب}{٢أ} = \frac{-٢ب}{٢أ} = \frac{-ب}{أ}$

∴ ل + م = $\frac{-ب}{أ}$ ——— (١)

ل م = $\frac{-ب - \sqrt{ب^2 - ٤أجـ}}{٢أ} \times \frac{-ب + \sqrt{ب^2 - ٤أجـ}}{٢أ}$

$= \frac{ب^2 - ب^2 + ٤أجـ}{٤أ^2} = \frac{٤أجـ}{٤أ^2} = \frac{جـ}{أ}$

∴ ل م = $\frac{جـ}{أ}$ ——— (٢)

يمكن إستنتاج حاصل ضرب وجمع الجذرين وذلك بمقارنة المعادلتين :

⊙ ⟸ (س − ل) (س − م) = ٠

⊙ ⟸ أ س^2 + ب س + جـ = ٠

وذلك بعد قسمة المعادلة الثانية على أ

أى أن :

حاصل جمع الجذرين = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^2}$

حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^2}$

ملاحظات مهمة :

(١) فى المعادلة السابقة إذا كان أ = ١ تصبح المعادلة س^2 + ب س + جـ = ٠ ويكون :

ل + م = - ب ، ل م = جـ

(٢) إذا كانت ب = صفر تصبح المعادلة أ س^2 + جـ = صفر ويكون :

ل + م = صفر ⟸ ل = - م

(٣) إذا كان أ = جـ أى أن معامل س^2 = الحد المطلق تصبح المعادلة أ س^2 + ب س + أ = ٠ ويكون : ل م = ١ أى أن كلا من الجذرين معكوس ضربى للأخر

مثال ١ : فى المعادلات الأتية أبحث نوع الجذرين وأوجد حاصل جمعهما وضربهما

(١) ٣ س^2 + ٥ = ٤ س (٢) ٢ س^2 + ٣ س − ٥ = ٠

(٣) $\frac{١}{س - ٢} + \frac{١}{س + ٢} = ٣$

الحل

(١) ٣ س^2 + ٥ = ٤ س ⟸ ٣ س^2 − ٤ س + ٥ = ٠

أ = ٣ ، ب = - ٤ ، جـ = ٥

المميز = ب^2 − ٤ أ جـ = (- ٤)^2 − ٤ × ٣ × ٥

= ١٦ − ٦٠ = - ٤٤

عدد سالب ∴ الجذران غير حقيقيان

حاصل الجمع = $\frac{-ب}{أ} = \frac{٤}{٣}$

حاصل الضرب = $\frac{جـ}{أ} = \frac{٥}{٣}$

(٢) ٢ س^2 + ٣ س − ٥ = ٠

أ = ٢ ، ب = ٣ ، ب = - ٥

المميز = ب^2 − ٤ أ جـ = (٣)^2 − ٤ × ٢ × - ٥ =

= ٩ + ٤٠ = ٤٩

المميز مربع كامل لذا فإن الجذور أعداد نسبية

حاصل الجمع = $\frac{-ب}{أ} = \frac{-٣}{٢}$

حاصل الضرب = $\frac{جـ}{أ} = \frac{-٥}{٢}$

(٣) $\frac{1}{س - 2} + \frac{1}{س + 2} = 3$

بضرب طرفى المعادلة فى (س - ٢) (س + ٢)

س+٢+س-٢ = ٣(س + ٢) (س - ٢)

⟸ ٢ س = ٣ (س^2 – ٤)

٢ س = ٣ س^2 – ١٢ ⟸ ٣ س^2 – ٢ س – ١٢ = ٠

أكمل بنفسك

مثال ٢ : أوجد قيمة هـ إذا علم أن أحد جذرى المعادلة

(١) س^2 – ٦ س + هـ = ٠ مربع الجذر الأخر

(٢) أحد جذرى المعادلة س^2 + ٣ س + هـ = ٠ ضعف الأخر

(٣) النسبة بين جذرى المعادلة : س^2 – هـ س + ٦ =٠ هى ٢ : ٣

(٤) س^2 – ١٠ س + هـ =٠ يقل عن مربع الأخربمقدار ٢

الحل

(١) س^2 – ٦ س + هـ = ٠

نفرض أن الجذران هما ل ، ل^2

حاصل الجمع = ل + ل^2 = $\frac{-ب}{أ} = \frac{6}{1} = 6$

⟸ ل^2 + ل – ٦ = ٠

(ل - ٢) (ل + ٣) = ٠ ⟸ ∴ ل = ٢ أو - ٣

حاصل الضرب = ل × ل^2 = $\frac{هـ}{أ} = \frac{هـ}{1}$ = هـ

هـ = ل^3 :

∴ عند ل = ٢ ∴ هـ = ٢^3 = ٨

∴ عند ل = - ٣ ∴ هـ = (- ٣)^3 = - ٢٧

(٢) بنفسك

(٣) النسبة بين جذرى المعادلة : س^2 – هـ س + ٦ =٠ هى ٢ : ٣

نفرض أن الجذران هما ٢ ل ، ٣ ل

حاصل الجمع = ٢ل + ٣ل = ٥ ل = هـ ——— (١)

حاصل الضرب = ٢ ل × ٣ ل = ٦ ل^2 = ٦ ⟸ ل^2 = ١

$\sqrt{ل^2} = \sqrt{1}$ = ± ١

∴ ل = ± ١ ، هـ = ٥ ل

عند ل = ١ ⟸ هـ = ٥ ل = ٥ × ١ = ٥

عند ل = - ١ ⟸ هـ = ٥ × - ١ = - ٥

(٤) س^2 – ١٠ س + هـ =٠

احد الجذرين يقل عن مربع الأخربمقدار ٢

نفرض أن الجذران هما ل ، ل^2 - ٢

∴ حاصل الجمع = ل + ل^2 – ٢ =١٠

⟸ ل^2 + ل – ٢ – ١٠ = ٠

ل^2 + ل – ١٢ = ٠

⟸ (ل – ٣) (ل + ٤) = ٠

ل= ٣ ، ل= - ٤

حاصل الضرب = ل (ل^2 – ٢) = هـ

عندما ل = ٣

⟸ هـ = ٣ (٣^2 - ٢) = ٣ × ٧ = ٢١

عندما ل = - ٤

⟸ هـ = - ٤ ((- ٤)^2 - ٢) = - ٤ × ١٤ = - ٥٦

مثال ٣ : إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة

٣ س^2 – ٢ س + ك = ٠ يساوى ١ أوجد قيمة ك ثم أوجد مجموعة حل المعادلة فى ك

الحل

نفرض أن جزريها هما ل ، م لذا فإن ل م = ١

ل م = $\frac{ك}{3}$ = ١ ⟸ ك = ٣

∴ المعادلة تصبح ٣ س^2 – ٢ س + ٣ = ٠

أ = ٣ ، ب = - ٢ ، هـ = ٣

المميز = ب^2 – ٤أ هـ = ٤ – ٤ × ٣ × ٣

= ٤ – ٣٦ = - ٣٢

$\sqrt{}$ المميز = $\sqrt{-32}$ = $\sqrt{16 \times 2 ت^2}$ = ±٤ $\sqrt{2}$ ت

س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤أهـ}}{٢أ}$

= $\frac{2 \pm 4\sqrt{2} ت}{2}$ = ١ ± ٢ $\sqrt{2}$ ت

مثال ٤ : إذا كان (١ + ت) هو أحد جذور المعادلة

س^2 – ٢ س + أ = ٠ ∀ أ ∈ ح* فأوجد الجذر الأخر وقيمة أ

الحل

إذا كان (١ + ت) أحد جذور المعادلة فإنه حتما يكون (١ – ت) هو الجذر الأخر وذلك لأنهما مترافقان

∴ الجذر الأخر هو ١ – ت

حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^{٢}} = \frac{\text{أ}}{١} = \text{أ}$

∴ أ = (١ – ت) (١ + ت) = ١ + ١ = ٢

∴ أ = ٢

مثال ٥ : إذا كان (٢ + ت) أحد جذور المعادلة س^{٢} – ٤ س + ب = ٠ أوجد الجذر الأخر وكذلك قيمة ب

الحل

إذا كان (٢ + ت) أحد جذور المعادلة فإن الجذر الأخر هو (٢ – ت) ⟸ ∴ الجذر الأخر هو (٢ – ت)

⊙ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^{٢}} = \frac{\text{ب}}{١} = \text{ب}$

∴ ب = (٢ + ت) (٢ - ت) = ٤ + ١ = ٥

∴ ب = ٥

مثال ٥ : أوجد قيمة أ التى تجعل :

(١) أحد جذرى المعادلة ٢ س^{٢} + (أ - ٣) س – ٥ = ٠ هو المعكوس الجمعى للأخر

(٢) أحد جذرى المعادلة ٢ أ س^{٢} + ٧ س + أ^{٢} + ١ = ٠ هو المعكوس الضربى للأخر

(٣) مجموع جذرى المعادلة (أ - ١) س^{٢} + (أ - ٣) س – ٤ = ٠ يساوى ٥

الحل

(١) فى المعادلة ٢ س^{٢} + (م – ٣) س – ٥ = ٠

أ = ٢ ب = م – ٣ جـ = - ٥

∵ أحد الجذرين معكوس جمعى للأخر نفرض أن أحد الجذرين ل يكون الأخر – ل

مجموعهما = ل + (- ل) = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^{٢}} = \frac{-(\text{م}-٣)}{٢} = ٠$

∴ م – ٣ = ٠ ⟸ م = ٣

(٢) ٢ م س^{٢} + ٧ س + م^{٢} + ١ = ٠

أ = ٢م ب = ٧ جـ = م^{٢} + ١

نفرض أن أحد الجذرين هو ل فيكون الأخر $\frac{١}{\text{ل}}$

حاصل ضربهما = ل × $\frac{١}{\text{ل}}$ = ١

$\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^{٢}} = \frac{\text{م}^{٢}+١}{٢\text{م}} = ١$

∴ $\frac{\text{م}^{٢}+١}{٢\text{م}} = ١$ ⟸ م^{٢} + ١ = ٢ م

⟸ م^{٢} - ٢ م + ١ = ٠

(م – ١) (م – ١) = ٠ ⟸ م = ١

(٣) متروك للطالب

مثال ٦ : أوجد قيمة م التى تجعل :

(١) مجموع جذرى المعادلة س^{٢} – (م + ٤) س + ٣ م^{٢} = ٠ يساوى حاصل ضرب جذرى المعادلة ٢ س^{٢} + ٧ م س + م^{٢} = ٠

(٢) أحد جذرى المعادلة ٨ س^{٢} – ٣٠ س + م = ٠ يساوى مربع الجذر الأخر

الحل

س^{٢} – (م + ٤) س + ٣ م^{٢} = ٠

٢ س^{٢} + ٧ م س + م^{٢} = ٠

مجموع الجذرين = $\frac{\text{م}+٤}{١}$

حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{م}^{٢}}{٢}$

ولكن مجموع جذرى المعادلة الأولى = حاصل ضرب جذرى الثانية

∴ $\frac{\text{م}+٤}{١} = \frac{\text{م}^{٢}}{٢}$ ⟸ م^{٢} = ٢ م + ٨

⟸ م^{٢} – ٢م – ٨ = ٠

(م – ٤) (م + ٢) = ٠

⟸ م = ٤ أ، - ٢

(٢) ٨ س^{٢} – ٣٠ س + م = ٠

بفرض أن أحد الجذرين = ل يكون الأخر ل^{٢}

مجموعهما = ل + ل^{٢} = $\frac{٣٠}{٨} = \frac{١٥}{٤}$

⟸ ٤ ل^{٢} + ٤ ل = ١٥

٤ل^{٢} + ٤ ل – ١٥ = ٠ (٢ ل – ٣) (٢ ل + ٥) = ٠

∴ ل = $\frac{٣}{٢}$ ، ل = $\frac{-٥}{٢}$

حاصل ضربهما = م/٨ = ل × ل² = ل³

⟸ م = ٨ ل³

عندما ل = ٣/٢

⟸ م = ٨ ل³ = ٨ × (٣/٢)³ = ٨ × ٢٧/٨ = ٢٧

عندما ل = -٥/٢

⟸ م = ٨ ل³ = ٨ × (-٥/٢)³ = ٨ × -١٢٥/٨ = -١٢٥

مثال ٧ : أوجد الشرط اللازم لكى يكون أحد جذرى المعادلة أ س² + ب س + جـ = ٠
(١) ضعف الجذر الأخر (٢) يزيد عن الأخر بمقدار ٣

الحل

(١) نفرض أن أحد الجذرين ل فيكون الأخر ٢ ل

حاصل جمعهما = ل + ٢ ل = ٣ ل = -ب/أ

⟸ ل = -ب/٣أ —— (١)

حاصل ضربهما = ل × ٢ ل = ٢ ل² = جـ/أ

⟸ ٢ ل² = جـ/أ —— (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢)

∴ ل = -ب/٣أ ، ٢ل² = جـ/أ

⟸ ٢(-ب/٣أ)² = جـ/أ

٢ × ب²/٩أ² = جـ/أ ⟸ ٢ب²/٩أ = جـ/١

⟸ ٢ب² = ٩ أ جـ

(٢) نفرض أن أحد الجذرين ل فيكون الأخر ل - ٣

حاصل الجمع = ل + ل - ٣ = ٢ ل - ٣ = -ب/أ

٢ ل = -ب/أ + ٣ ⟸ ل = -ب/أ٢ + ٣/٢ —— (١)

حاصل الضرب = ل(ل - ٣) = ل² - ٣ ل = جـ/أ

ل² - ٣ ل = جـ/أ —— (٢)

بالتعويض من ١ فى ٢ نجد أن :

(-ب/٢أ + ٣/٢)² - ٣(-ب/٢أ + ٣/٢) = جـ/أ

ب²/٤أ² + ٩/٤ - ~~٣ب/٢أ~~ + ~~٣ب/٢أ~~ - ٩/٢ = جـ/أ

ب²/٤أ² + (٩ - ١٨)/٤ = جـ/أ

⟸ ب²/٤أ² + -٩/٤ = جـ/أ ..... × ٤ أ²

ب² - ٩ أ² = ٤ أ جـ

⟸ ب² = ٩ أ² + ٤ أ جـ

مثال ٨ : أوجد قيمة ب التى تجعل مجموع الجذرين للمعادلة س² - (ب + ٢) س + ٥ ب² = ٠ يساوى حاصل ضرب جذرى المعادلة س² - ٣ ب س + ب² = ٠

الحل

مجموع جذرى المعادلة الأولى = ب + ٢

حاصل ضرب جذرى المعادلة الثانية = ب²

ب² = ب + ٢ ⟸ ب² - ب - ٢ = ٠

(ب - ٢)(ب + ١) = ٠ ⟸ ب = ٢ ، ب = -١

مثال ٩ : إذا كانت النسبة بين جذرى المعادلة : ٨ س² - ب س + ٣ = ٠ تساوى ٢ : ٣ أوجد قيمة ب

الحل

نفرض أن الجذرين ٢ل ، ٣ ل

مجموع الجذرين = ٢ ل + ٣ ل = ٥ ل = ب/٨

⟸ ل = ب/٤٠ ⟸ ب = ٤٠ ل —— (١)

حاصل الضرب = ٢ ل × ٣ ل = ٦ ل² = ٣/٨

٦ل²/١ = ٣/٨ ⟸ ل² = (٦ × ٨)/٣ = ١٦

⟸ ل = √١٦ = ±٤ —— (٢)

بالتعويض من (٢) فى (١)

∵ ل = ب/٤٠ ⟸ ب = ٤٠ ل

عندما ل = ٤ ⟸ ب = ٤٠ × ٤ = ١٦٠

عندما ل = -٤ ⟸ ب = ٤٠ × -٤ = -١٦٠

تكوين المعادلة التربيعية متى علم جذراها

إذا كان ل ، م جذرا المعادلة $أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠$
فإنه يمكن كتابتها على الصورة
$(س - ل)(س - م) = ٠$
$\Leftarrow س^{٢} - ل س - م س + ل م = ٠$
$س^{٢} - (ل + م) س + ل م = ٠$
أى أن المعادلة التربيعية يمكن كتابتها على الصورة :
س^{٢} – (**مجموع الجذرين**) س + **حاصل ضرب الجذرين** = ٠

مثال ١ : كون المعادلة التى جذريها كلا من

(١) ٢ ، ٥ (٢) ٣ ، -٤
(٣) -٥ ، ٥ (٤) $٢ - \sqrt{٣}$ ، $٢ + \sqrt{٣}$

الحل

(١) س^{٢} – (مجموع الجذرين) س + حاصل ضرب الجذرين = ٠
$\Leftarrow س^{٢} - ٧ س + ١٠ = ٠$

٢) $س^{٢} - (-٤ + ٣) س + (٣ \times -٤) = ٠$
$\Leftarrow س^{٢} + س - ١٢ = ٠$

٣) $س^{٢} - (-٥ + ٥) س + (-٥ \times ٥) = ٠$
$\Leftarrow س^{٢} - ٠ س - ٢٥ = ٠ \Leftarrow س^{٢} - ٢٥ = ٠$

(٤) **مجموع الجذرين** $= ٢ - \sqrt{٣} + ٢ + \sqrt{٣} = ٤$
حاصل ضربهما $= (٢ - \sqrt{٣})(٢ + \sqrt{٣}) = ٤ - ٣ = ١$
$س^{٢} - ٤ س + (٤ - ٣) = ٠$
$س^{٢} - ٤ س + ١ = ٠$

مثال ٢ : إذا كان ل ، م جذرا المعادلة

$٢ س^{٢} - ٣ س + ١ = ٠$ أوجد القيمة العددية لكلا مما يأتى
(١) $ل^{٢} م + م^{٢} ل$ (٢) $\frac{١}{ل} + \frac{١}{م}$

الحل

المعادلة المعطاه هى $٢ س^{٢} - ٣ س + ١ = ٠$
حاصل جمع جذريها $= ل + م = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^{٢}} = \frac{٣}{٢}$
حاص ضرب جذريها $= ل م = \frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^{٢}} = \frac{١}{٢}$
(١) $ل^{٢} م + م^{٢} ل = ل م (ل + م) = \frac{١}{٢} \times \frac{٣}{٢} = \frac{٣}{٤}$

(٢) $\frac{١}{ل} + \frac{١}{م} = \frac{ل + م}{ل م} = \frac{٣}{٢} \div \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٢} \times \frac{٢}{١} = ٣$

ملاحظات مهمة

(١) $ل^{٢} + م^{٢} = (ل + م)^{٢} - ٢ ل م$
(٢) $ل^{٣} + م^{٣} = (ل + م)[(ل + م)^{٢} - ٣ ل م]$
(٣) $(ل - م) = \sqrt{(ل + م)^{٢} - ٤ ل م}$
(٤) $ل^{٢} - م^{٢} = (ل - م)(ل + م)$
(٥) $ل^{٣} - م^{٣} = (ل - م)[(ل + م)^{٢} - ل م]$
(٦) $\frac{١}{ل} + \frac{١}{م} = \frac{ل + م}{ل م}$
(٧) $\frac{م}{ل} + \frac{ل}{م} = \frac{ل^{٢} + م^{٢}}{ل م} = \frac{(ل + م)^{٢} - ٢ ل م}{ل م}$

مثال ٣ : إذا كان ل ، م جذرا المعادلة

$س^{٢} - ٥ س + ٤ = ٠$ أوجد القيمة العددية لكلا ما يأتى
(١) $ل^{٢} + م^{٢}$ (٢) $ل^{٣} + م^{٣}$ (٣) $ل - م$
(٤) $ل^{٢} - م^{٢}$ (٥) $ل^{٣} - م^{٣}$ (٦) $\frac{١}{ل} + \frac{١}{م}$

الحل

إذا كان جذرا المعادلة $\Leftarrow س^{٢} - ٥ س + ٤ = ٠$
هما ل ، م فإن :
حاصل الجمع $ل + م = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^{٢}} = \frac{-ب}{أ} = \frac{٥}{١} = ٥$
حاصل الضرب $ل م = \frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^{٢}} = \frac{جـ}{أ} = \frac{٤}{١} = ٤$

(١) $ل^{٢} + م^{٢} = (ل + م)^{٢} - ٢ م ل$
$= (٥)^{٢} - ٢ \times ٤ = ٢٥ - ٨ = ١٧$

(٢) $ل^{٣} + م^{٣} = (ل + م)[(ل + م)^{٢} - ٣ ل م]$
$= (٥)[(٥)^{٢} - ٣ \times ٤] = ٥ \times (٢٥ - ١٢)$
$= ٥ \times ١٣ = ٦٥$

(٣) $ل - م = \sqrt{(ل + م)^{٢} - ٤ ل م}$
$= \sqrt{٥^{٢} - ٤ \times ٤} = \sqrt{٢٥ - ١٦} = \sqrt{٩} = \pm ٣$

(٤) $ل^{٢} - م^{٢} = (ل - م)(ل + م)$
$= \pm ٣ \times ٥ = \pm ١٥$

(٥) $ل^{٣} - م^{٣} = (ل - م)[(ل + م)^{٢} - ل م]$
$= \pm ٣ \times [٥^{٢} - ٣] = ٣ \times (٢٥ - ٣)$
$= \pm ٣ \times ٢٢ = \pm ٦٦$

$$(٦)\quad \frac{١}{\text{ل}} + \frac{١}{\text{م}} = \frac{\text{ل} + \text{م}}{\text{ل م}} = \frac{٥}{٣}$$

مثال ٤ : إذا كان اللفرق بين جذرى المعادلة
$٦\text{س}^{٢} - ٧\text{س} + ١ = \text{هـ}$ هو $\frac{١١}{٦}$ أوجد قيمة هـ

الحل

أولا المعادلة لا بد أن تكون صفرية

نفرض أن الجذرين هما ل ، م

$$\text{ل} + \text{م} = \frac{٧}{٦} \quad ، \quad \text{ل م} = \frac{١ - \text{هـ}}{٦}$$

$$(\text{ل} - \text{م}) = \sqrt{(\text{ل} + \text{م})^{٢} - ٤\,\text{ل م}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{٧}{٦}\right)^{٢} - ٤ \times \frac{١ - \text{هـ}}{٦}}$$

$$= \sqrt{\frac{٤٩}{٣٦} - \frac{٤ - ٤\text{هـ}}{٦} \times \frac{٦}{٦}} = \sqrt{\frac{٤٩}{٣٦} - \frac{٢٤ - ٢٤\text{هـ}}{٣٦}}$$

$$= \sqrt{\frac{٤٩ - ٢٤ + ٢٤\text{هـ}}{٣٦}} = \sqrt{\frac{٢٥ + ٢٤\text{هـ}}{٣٦}}$$

لكن $\text{ل} - \text{م} = \frac{١١}{٦}$

$\sqrt{\frac{٢٥ + ٢٤\text{هـ}}{٣٦}} = \frac{١١}{٦}$ وبتربيع الطرفين

$$\frac{٢٥ + ٢٤\text{هـ}}{٣٦} = \frac{١٢١}{٣٦} \Leftarrow ٢٥ + ٢٤\text{هـ} = ١٢١$$

$$٢٤\text{هـ} = ١٢١ - ٢٥ = ٩٦ \Leftarrow \text{هـ} = \frac{٩٦}{٢٤} = ٤$$

حل أخر

$$\text{ل} + \text{م} = \frac{٧}{٦} \text{ —— } (١) \quad ، \quad \text{ل م} = \frac{١ - \text{هـ}}{٦} \text{ —— } (٣)$$

$$\text{ل} - \text{م} = \frac{١١}{٦} \text{ —— } (٢)$$

بجمع (١) ، (٢) :

$$\text{ل} + \text{م} + \text{ل} - \text{م} = \frac{٧}{٦} + \frac{١١}{٦} = \frac{١٨}{٦} = ٣$$

$$٢\,\text{ل} = ٣ \Leftarrow \text{ل} = \frac{٣}{٢}$$

بالتعويض فى (١)

$$\text{م} = \frac{٧}{٦} - \frac{٣}{٢} = \frac{٧ - ٩}{٦} = \frac{-٢}{٦} = \frac{-١}{٣}$$

بالتعويض عن قيمة ل ، م فى (٣)

$$\text{ل م} = \frac{١ - \text{هـ}}{٦} \Leftarrow \frac{٣}{٢} \times \frac{-١}{٣} = \frac{١ - \text{هـ}}{٦}$$

$$\frac{-٣}{٦} = \frac{١ - \text{هـ}}{٦} \Leftarrow ١ - \text{هـ} = -٣$$

$$\Leftarrow -\text{هـ} = -٣ - ١ \quad ، \quad \text{هـ} = ٤$$

مثال ٥ : إذا كان الفرق بين جذرى المعادلة
$\text{س}^{٢} + \text{هـ س} + ٢\text{هـ} = ٠$ يساوى ضعف حاصل جمع
جذرى المعادلة $\text{س}^{٢} + \text{أ س} + \text{هـ} = ٠$ أوجد قيمة هـ

الحل

بفرض أن جذرى المعادلة

$\text{س}^{٢} + \text{هـ س} + ٢\text{هـ} = ٠$ هما ل ، م

وبفرض أن جذرى المعادلة

$\text{س}^{٢} + \text{أ س} + \text{هـ} = ٠$ هما هـ ، و

بذلك يكون $(\text{ل} - \text{م}) = ٢\,\text{هـ و} \Leftarrow$

أولا ل − م من المعادلة $\text{س}^{٢} + \text{هـ س} + ٢\text{هـ} = ٠$

$$\text{ل} + \text{م} = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^{٢}} = \frac{-\text{ب}}{\text{أ}} = -\frac{\text{هـ}}{١} = -\text{هـ}$$

$$\text{ل م} = \frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^{٢}} = \frac{\text{هـ}}{\text{أ}} = \frac{٢\text{هـ}}{١} = ٢\text{هـ}$$

$$(\text{ل} - \text{م}) = \sqrt{(\text{ل} + \text{م})^{٢} - ٤\,\text{ل م}}$$

$$= \sqrt{(-\text{هـ})^{٢} - ٤ \times ٢\text{هـ}} = \sqrt{\text{هـ}^{٢} - ٨\text{هـ}}$$

ثانيا ٢ هـ و من المعادلة $\text{س}^{٢} + \text{أ س} + \text{هـ} = ٠$

$$\text{هـ و} = \frac{\text{هـ}}{١} = \text{هـ} \text{ ———— } (٢)$$

ولكن $(\text{ل} - \text{م}) = ٢\,\text{هـ و} \Leftarrow$ وبتربيع الطرفين

$$(\text{ل} - \text{م})^{٢} = (\text{هـ و})^{٢}$$

$$(\text{هـ}^{٢} - ٨\text{هـ})^{٢} = ٤ \times (\text{هـ})^{٢}$$

$$\text{هـ}^{٢} - ٨\text{هـ} = ٤\text{هـ}^{٢} \Leftarrow ٤\text{هـ}^{٢} - \text{هـ}^{٢} + ٨\text{هـ} = ٠$$

$$٣\text{هـ}^{٢} + ٨\text{هـ} = ٠ \Leftarrow \text{هـ}(٣\text{هـ} + ٨) = ٠$$

$$\text{هـ} = ٠ \quad ، \quad \text{هـ} = -\frac{٨}{٣}$$

مثال ٦ : إذا علم أن جذرا المعادلة $\text{س}^{٢} - ٥\,\text{س} + ٦ = ٠$
هما ل ، م أوجد المعادلة التى جذراها
$(\text{ل} - ١)$،$(\text{م} - ١)$

الحل

فى تكوين المعادلة يلزم إيجاد جذور المعادلة المعطاه ولكن فى معظم المعادلات تكون جذورها تخيلية لذا يصعب التعامل معها بعد إيجادها لذا فإن الطريقة التالية تكون حل أمثل لمعظم المسائل

المعادلة المعطاة :

$$\text{ل} + \text{م} = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^{٢}} = \frac{٥}{١} = ٥$$

$\text{ل م} = \frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^2} = \frac{٦}{١} = ٦$

المعادلة المطلوبة :

حاصل الجمع

$= \text{ل} - ١ + \text{م} - ١ = \text{ل} + \text{م} - ٢ = ٥ - ٢ = ٣$

حاصل الضرب

$= (\text{ل} - ١)(\text{م} - ١) = \text{ل م} - \text{ل} - \text{م} + ١$

$= \text{ل م} - (\text{ل} + \text{م}) + ١ = ٦ - ٥ + ١ = ٢$

∴ تكون المعادلة $\text{س}^2 - ٣\,\text{س} + ٢ = ٠$

مثال ٧ : إذا كان ل ، م جذرا المعادلة $٢\,\text{س}^2 + ٣\,\text{س} + ٥ = ٠$ **فأوجد المعادلة التى جذراها :** $\text{ل}^2 + ٣ ، \text{م}^2 + ٣$

الحل

المعادلة المعطاة : $٢\,\text{س}^2 + ٣\,\text{س} + ٥ = ٠$

$\text{ل} + \text{م} = \frac{-٣}{٢} \quad ، \quad \text{ل م} = \frac{٥}{٢}$

المعادلة المطلوبة :

حاصل الجمع

$= \text{ل}^2 + ٣ + \text{م}^2 + ٣ = \text{ل}^2 + \text{م}^2 + ٦$

$= (\text{ل} + \text{م})^2 - ٢\,\text{ل م} + ٦$

$= \left(\frac{-٣}{٢}\right)^2 - ٢ \times \frac{٥}{٢} + ٦$

$= \frac{٩}{٤} - ٥ + ٦ = \frac{٩}{٤} + ١ = \frac{١٣}{٤}$

حاصل الضرب :

$(\text{ل}^2 + ٣)(\text{م}^2 + ٣) = \text{ل}^2\text{م}^2 + ٣\,\text{ل}^2 + ٣\,\text{م}^2 + ٩$

$= (\text{ل م})^2 + ٣(\text{ل}^2 + \text{م}^2) + ٩ =$

$= \left(\frac{٥}{٢}\right)^2 + ٣\left((\text{ل}+\text{م})^2 - ٢\,\text{ل م}\right) + ٩$

$= \frac{٢٥}{٤} + ٣\left(\left(\frac{-٣}{٢}\right)^2 - ٢ \times \frac{٥}{٢}\right) + ٩ =$

$= \frac{٢٥}{٤} + ٣\left(\frac{٩}{٤} - ٥\right) + ٩ = \frac{٢٥}{٤} + ٣\left(\frac{-١١}{٤}\right) + ٩$

$= \frac{٢٥}{٤} + \frac{-٣٣}{٤} + ٩ = \frac{٢٥ - ٣٣ + ٣٦}{٤} = \frac{٢٨}{٤} = ٧$

المعادلة $= \text{س}^2 - \frac{١٣}{٤}\text{س} + ٧ = ٠$

أو تكون المعادلة $٤\,\text{س}^2 - ١٣\,\text{س} + ٢٨ = ٠$

حل اخر

نفرض أن أحد جذري المعادلة المطلوبة هو س لذا فإن :

$\text{ل}^2 + ٣ = \text{س} \Leftarrow \text{ل}^2 = \text{س} - ٣ \Leftarrow \text{ل} = \sqrt{\text{س} - ٣}$

ل يحقق المعادلة المعطاه لأنه احد جذورها

$\therefore ٢\,\text{س}^2 + ٣\,\text{س} + ٥ = ٠$

$٢\left(\sqrt{\text{س} - ٣}\right)^2 + ٣\left(\sqrt{\text{س} - ٣}\right) + ٥ = ٠$

$٢(\text{س} - ٣) + ٣\sqrt{\text{س} - ٣} + ٥ = ٠$

$٢\,\text{س} - ٦ + ٣\sqrt{\text{س} - ٣} + ٥ = ٠$

$٢\,\text{س} - ١ = ٣\sqrt{\text{س} - ٣}$ بتربيع الطرفين

$(٢\,\text{س} - ١)^2 = \left(٣\sqrt{\text{س} - ٣}\right)^2$

$٤\,\text{س}^2 + ١ - ٤\,\text{س} = ٩(\text{س} - ٣) = ٩\,\text{س} - ٢٧$

$٤\,\text{س}^2 - ٤\,\text{س} - ٩\,\text{س} + ١ + ٢٧ = ٠$

$٤\,\text{س}^2 - ١٣\,\text{س} + ٢٨ = ٠$

مثال ٨ : إذا كان ل ، م جذرى المعادلة $٢\,\text{س}^2 + ٣\,\text{س} - ٧ = ٠$ **أوجد المعادلة التى جذريها** $(\text{ل} + ٢)^2 ، (\text{م} + ٢)^2$

الحل

المعادلة المعطاة : $٢\,\text{س}^2 + ٣\,\text{س} - ٧ = ٠$

$\text{ل} + \text{م} = \frac{-٣}{٢} \qquad \text{ل م} = \frac{-٧}{٢}$

المعادلة المطلوبة :

حاصل الجمع

$= (\text{ل} + ٢)^2 + (\text{م} + ٢)^2 =$

$= \text{ل}^2 + ٤\text{ل} + ٤ + \text{م}^2 + ٤\,\text{م} + ٤$

$= \text{ل}^2 + \text{م}^2 + ٤(\text{ل} + \text{م}) + ٨$

$= (\text{ل}+\text{م})^2 - ٢\,\text{ل م} + ٤(\text{ل} + \text{م}) + ٨$

$= \left(\frac{-٣}{٢}\right)^2 - ٢ \times \frac{-٧}{٢} + ٤\left(\frac{-٣}{٢}\right) + ٨$

$= \frac{٩}{٤} + ٧ - ٦ + ٨ = \frac{٩}{٤} + ٩ = \frac{٤٥}{٤}$

حاصل الضرب :

$= (\text{ل} + ٢)^2 \times (\text{م} + ٢)^2 =$

$[(\text{ل} + ٢)(\text{م} + ٢)]^2 = [\text{ل م} + ٢\,\text{ل} + ٢\,\text{م} + ٤]^2$

$= [\text{ل م} + ٢(\text{ل} + \text{م}) + ٤]^2$

$= \left(\frac{-٧}{٢} + ٢ \times \frac{-٣}{٢} + ٤\right)^2 = \left(\frac{-٧}{٢} - ٣ + ٤\right)^2$

$$= (\frac{-٧}{٢} + ١)^٢ = (-\frac{٥}{٢})^٢ = \frac{٢٥}{٤}$$

∴ المعادلة هى :

$س^٢ - \frac{٤٥}{٤} س + \frac{٢٥}{٤} = ٠$ أو بالضرب × ٤

$$٤س^٢ - ٤٥ س + ٢٥ = ٠$$

حل اخر

نفرض أن أحد جذري المعادلة المطلوبة هو س لذا فإن :

$$(ل + ٢)^٢ = س \Leftarrow ل + ٢ = \sqrt{س}$$

$$\Leftarrow ل = \sqrt{س} - ٢$$

ولكن ل يحقق المعادلة المعطاه لأنه أحد جذورها :

∴ ل يحقق المعادلة $٢ س^٢ + ٣ س - ٧ = ٠$

$$٢ ل^٢ + ٣ ل - ٧ = ٠$$

$$٢ (\sqrt{س} - ٢)^٢ + ٣ (\sqrt{س} - ٢) - ٧ = ٠$$

$$٢ (س + ٤ - ٤\sqrt{س}) + ٣\sqrt{س} - ٦ - ٧ = ٠$$

$$٢ س + ٨ - ٨\sqrt{س} + ٣\sqrt{س} - ٦ - ٧ = ٠$$

$٢ س - ٥ = ٥\sqrt{س}$ بتربيع الطرفين

$$(٢ س - ٥)^٢ = (٥\sqrt{س})^٢$$

$$٤ س^٢ + ٢٥ - ٢٠ س = ٢٥ س$$

$$٤ س^٢ - ٤٥ س + ٢٥ = ٠$$

مثال ٩: إذا كان $\frac{١}{ل}$ ، $\frac{١}{م}$ هما جذرا المعادلة

$٦ س^٢ - ٥ س + ١ = ٠$

أوجد المعادلة التى جذريها $ل - ٢$ ، $م - ٢$

الحل

المعادلة المعطاة

: $٦ س^٢ - ٥ س + ١ = ٠$

مجموع الجذرين $= \frac{١}{ل} + \frac{١}{م} = \frac{ل + م}{ل م} = \frac{٥}{٦}$ —— (١)

ضرب الجذرين $= \frac{١}{ل} \times \frac{١}{م} = \frac{١}{ل م} = \frac{١}{٦}$ —— (٢)

من المعادلة ٢

∵ البسط يساوى البسط ∴ $ل م = ٦$ —— (٣)

بالتعويض من (٣) فى (١) نجد أن

$\frac{ل + م}{٦} = \frac{٥}{٦} \Leftarrow ل + م = ٥$ —— (٢)

المعادلة المطلوبة :

حاصل جمع الجذرين $= ل - ٢ + م - ٢ = ل + م - ٤$

$$= ٥ - ٤ = ١$$

حاصل ضرب الجذرين $= (ل - ٢)(م - ٢)$

$$= ل م - ٢ل - ٢م + ٤$$

$$= ل م - ٢(ل + م) + ٤$$

$$= ٦ - ٢ \times ٥ + ٤$$

$= ٦ - ١٠ + ٤ =$ صفر

لذا فإن المعادلة هى :

$$س^٢ - س = ٠$$

تدريب ١ :

إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة

$س^٢ - ٣ س - ٣ = ٠$ أوجد القيمة العددية لكلا مما يأتى

(١) $ل^٢ + م^٢$ (٢) $ل^٣ + م^٣$ (٣) $ل - م$

(٤) $ل^٢ - م^٢$ (٥) $ل^٣ - م^٣$ (٦) $\frac{١}{ل} + \frac{١}{م}$

(٧) $\frac{م}{ل} + \frac{ل}{م}$

تدريب ٢ :

إذا كان ل، م هما جذرا المعادلة

$٢س^٢ - ٥ س + ١٢ = ٠$ أوجد المعادلة التى جذريها

(١) $ل^٢ + م^٢$ (٢) $ل^٣ + م^٣$ (٣) $ل - م$

(٤) $ل^٢ - م^٢$ (٥) $ل^٣ - م^٣$ (٦) $\frac{١}{ل} + \frac{١}{م}$

(٧) $\frac{م}{ل} + \frac{ل}{م}$

تدريب ٣ :

إذا كان ل ، م جذرا المعادلة

$٢ س^٢ - ٣ س - ١ = ٠$

فأوجد القيمة العددية لكل مما يأتى :

- $ل^٢ + م^٢$
- $ل^٢ م^٢$
- $ل - م$
- $ل^٣ + م^٣$

بحث إشارة الدالة

المفهوم

يقصد ببحث إشارة المقدار الجبرى هو إيجاد قيم س الحقيقية التى تكون فيها إشارة المقدار موجبة أو سالبة أو ينعدم فيها المقدار

إشارة الدالة الثابتة

الصورة العامة للدالة الثابتة

د(س) = ك ∀ س ∈ ح*

القاعدة

(إشارة الدالة الثابتة)

إشارة د(س) = ك هى نفس إشارة ك ∀ ك ∈ ح*

مثال ١ : إبحث إشارة كل من الدوال الأتية :

(١) د(س) = -٣ (٢) د(س) = ٤ (٣) د(س) = ٠

الحل

(١) د(س) = -٣ د(س) < ٠ ∀ س ∈ ح

(٢) د(س) = ٤ د(س) > ٠ ∀ س ∈ ح

(٣) د(س) = ٠ د(س) = ٠ ∀ س ∈ ح

إشارة الدالة الخطية

الصورة العامة للدالة الخطية

د(س) = أ س + ب ∀ أ ≠ ٠

القاعدة :

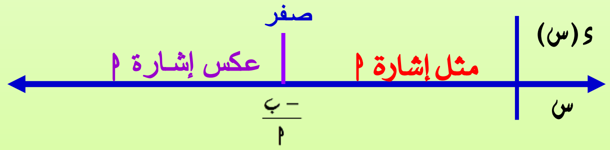
نوجد أصفار الدالة وهى س = $\frac{-ب}{أ}$ وتكون إشارة

د(س) مثل إشارة أ عندما س > $\frac{-ب}{أ}$

د(س) عكس إشارة أ عندما س < $\frac{-ب}{أ}$

د(س) = ٠ عندما س = $\frac{-ب}{أ}$

وللتوضيح على خط الأعداد لاحظ



مثال ٢ : بين إشارة الدالة د(س) = س – ٢ مع توضيح ذلك بيانيا

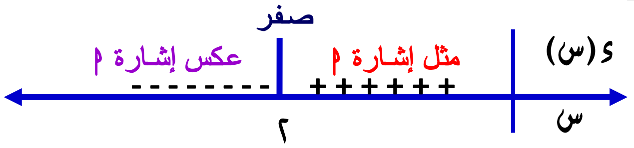
الحل

أولا نوجد أصفار الدالة وذلك بمساواتها للصفر

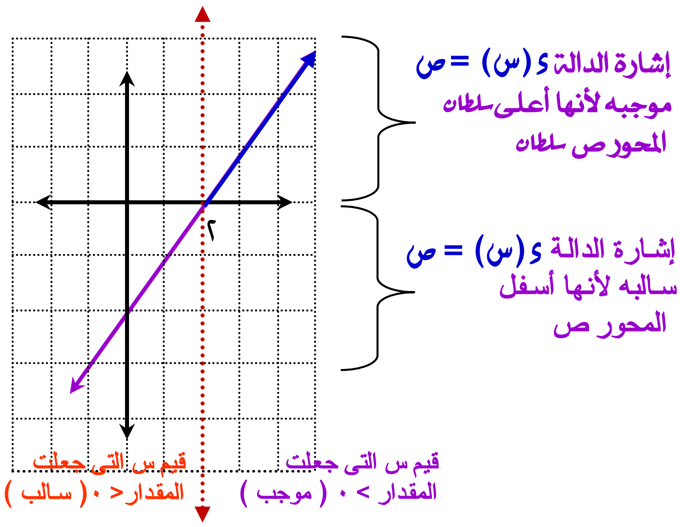
س – ٢ = ٠ ⟸ س = ٢ أصفار الدالة = { ٢ }

بحث إشارة

- د(س) > ٠ ∀ س > ٢
- د(س) < ٠ ∀ س < ٢
- د(س) = ٠ ∀ س = ٢



لاحظ الرسم البيانى التالى :



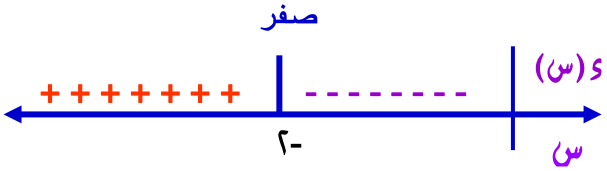
مثال ٣ : عين إشارة الدالة الخطية د(س) = - ٢ س – ٤ مع توضيح ذلك بيانيا

الحل

أولا : أصفار الدالة وذلك بوضع د(س) = ٠

- ٢ س – ٤ = ٠ ⟸ س = - $\frac{٤}{٢}$ = - ٢

ثانيا بحث الإشارة :



- د(س) > ٠ ∀ س < - ٢
- د(س) < ٠ ∀ س > - ٢
- د(س) = ٠ ∀ س = {-٢}

تحقق بنفسك بيانيا

مثال ٣ : عين إشارة الدالة د(س) = ٢ س

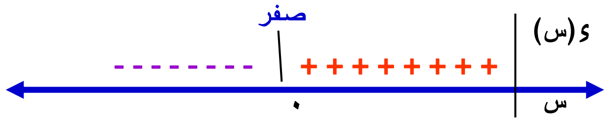
الحل

أولا : أصفار الدالة

وذلك بوضع د(س) = ٠

٢ س = ٠ ⟸ س = ٠

ثانيا بحث الإشارة :



د(س) > ٠ ∀ س > ٠

د(س) < ٠ ∀ س < ٠

د(س) = ٠ ∀ س = {٠}

تحقق بنفسك بيانيا

مثال ٤ : عين إشارة الدالة

د(س) = { س - ٢ ∀ س ≥ ٢ ، - س + ٢ ∀ س < ٢ }

الحل

الدالة معرفة بقاعدتين

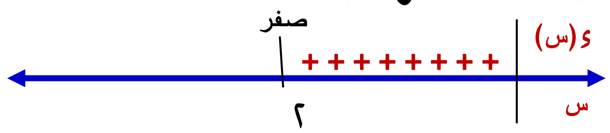
القاعدة الأولى د(س) = س – ٢ ∀ س ≥ ٢

شرطها هو س ≥ ٢

نبحث إشارة القاعدة الأولى ونطبق الشرط عليها

اولا اصفار القاعدة الأولى :

س -٢ = ٠ ⟸ س = ٢



ثانيا بحث إشارة القاعدة الأولى

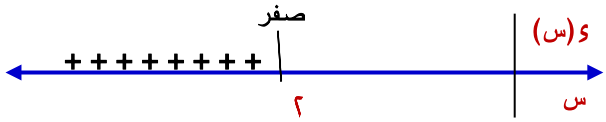
د(س) > ٠ ∀ س > ٢ وشرطها س ≥ ٢

د(س) < ٠ ∀ س < ٢ مرفوضة لأنها تخالف الشرط

د(س) = ٠ ∀ س = { ٠ } وشرطها س = ٢

ثالثا اصفار القاعدة الثانية

- س + ٢ = ٠ ⟸ - س = - ٢ ، س = ٢



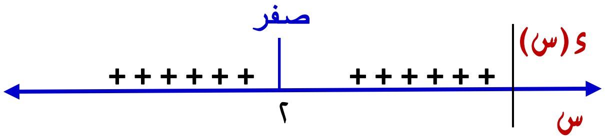
رابعا بحث إشارة القاعدة الثانية

د(س) > ٠ ∀ س < ٢ وشرطها س < ٢

د(س) < ٠ ∀ س > ٢ مرفوضة لأنها تخالف الشرط

د(س) = ٠ ∀ س = { ٠ } مرفوضة لأنها تخالف الشرط

وبتجميع إشارة القاعدتين نجد أن :



د(س) > ٠ ∀ س ∈ ح – {٢}

د(س) = ٠ ∀ س = { ٢ }

تدريب

أبحث إشارة كلا من الدوال الأتية

(١) د(س) = ٢ (٢) د(س) = - ٤

(٣) د(س) = صفر (٤) د(س) ٣ س – ٦

(٥) د(س) = - ٢ س (٦) د(س) = ٢ س + ٣

إشارة الدالة التربيعية

الصورة العامة للدالة التربيعية هى

أ س^٢ + ب س + هـ = ٠ ∀ أ ، ب ≠ صفر

هذه المعادلة لها جذرن دائما ولكن عندما نتكلم فى مجموعة الأعداد الحقيقية فإن جذريها يمكن التعرف عيهما ونوعهما بإستخدام المميز = ب^٢ – ٤ أ هـ

فإذا كان :

(١) المميز > ٠ (موجب) يكون للمعادلة حل ويكون لها جذران حقيقيان مختلفان هما

مثلا ل ، م

(٢) المميز = ٠ يكون للمعادلة جذر واحد مكرر

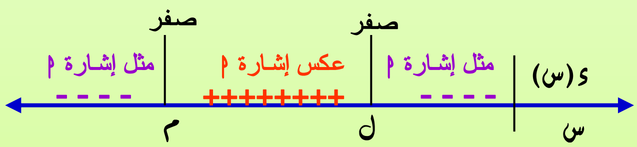
(٣) المميز < ٠ لا يكون للمعادلة حل فى مجموعة الأعداد الحقيقية ويكون للمعادلة جذران تخيليان

أولا إذا كان المميز موجب :

كما ذكرنا فإن المعادلة يكون لها حلان فى ح
ونفرض أنهما { ل ، م }
فيكون بحث الإشارة كالتالى :

- د(س) = ٠ ∀ س = { ل ، م }
- د(س) مثل إشارة أ (معامل س^{٢}) ∀ س ∈ ح – [ل ، م]
- د(س) عكس إشارة أ (معامل س^{٢}) ∀ س ∈] ل ، م [

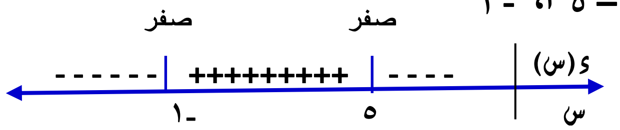
وعلى خط الأعداد يكون كالتالى :



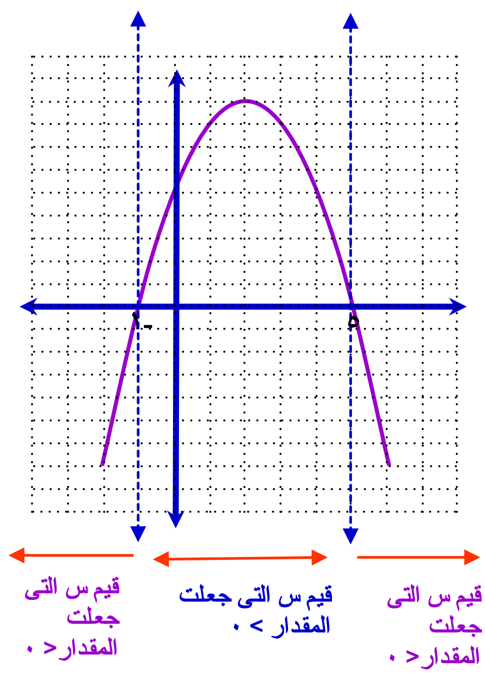
مثال ١ عين إشارة الدالة د(س) = - س^{٢} + ٤ س + ٥

الحل

د(س) = ٠ ∴ ⟸ - س^{٢} + ٤ س + ٥ = ٠ × -١
س^{٢} – ٤ س – ٥ = ٠ ⟸ (س -٥) (س + ١) = ٠
س = ٥ أو - ١



د(س) > ٠ ∀ س ∈] -١ ، ٥ [
د(س) < ٠ ∀ س ∈ ح – [-١ ، ٥]
د(س) = ٠ ∀ س ∈ { -١ ، ٥ }

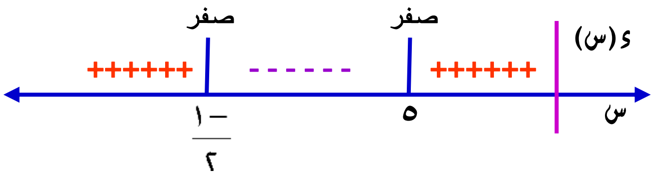


مثال ٢ : عين إشارة المقدار الجبرى

(١) د (س) = ٢ س^{٢} – ٩ س - ٥

الحل

د(س) = ٠ ⟸ ٢ س^{٢} – ٣ س -٥ = ٠
(٢ س +١) (س -٥) = ٠ ⟸ س = $\frac{-١}{٢}$ ، س = ٥



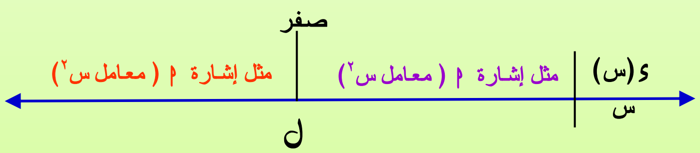
(س) > ٠ ∀ س ∈ ح – [$\frac{-١}{٢}$ ، ٥]
د(س) < ٠ ∀ س ∈] $\frac{-١}{٢}$ ، ٥ [
د(س) = ٠ ∀ س ∈ { $\frac{-١}{٢}$ ، ٥ }

ثانيا إذا كان المميز صفرا

يكون للمعادلة حل وحيد أى يكون لها جذران واكن متساويان فيكون جذر مكرر ولنفرض أنه = { ل }
فيكون بحث الإشارة كالتالى :

- د(س) = ٠ ∀ س = { ل }
- د(س) مثل إشارة أ (معامل س^{٢}) ∀ س ∈ ح – { ل }

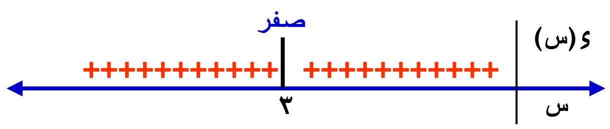
وعلى خط الأعداد يكون كالتالى :



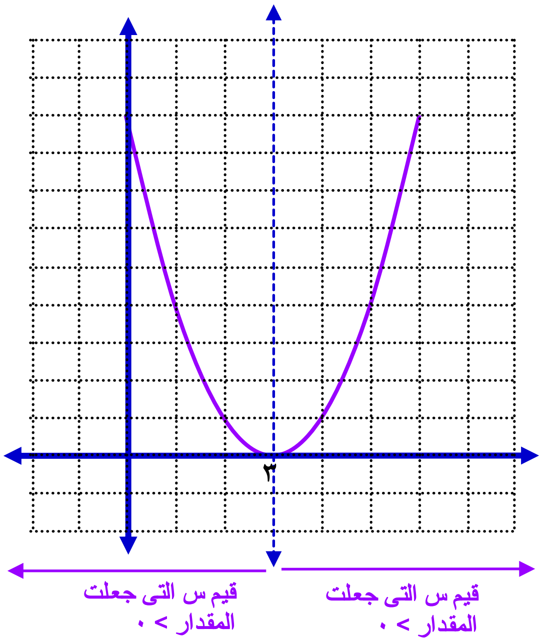
مثال ٣ : د(س) = س^{٢} – ٦ س + ٩

الحل

د(س) = ٠ ⟸ س^{٢} – ٦ س + ٩ = ٠
(س – ٣)^{٢} = ٠ ⟸ س – ٣ = ٠ ⟸ س = ٣



د(س) > ٠ ∀ س ∈ ح – {٣}
د(س) = ٠ ∀ س = { ٣ }



مثال ٤ : إبحث إشارة الدالة

ى(س) = - ٤ س^٢ + ١٢ س − ٩

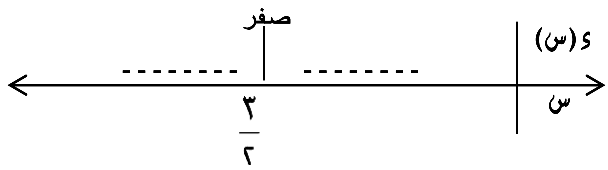
الحل

ى(س) = ٠ ⟸ - ٤ س^٢ + ١٢ س − ٩ = ٠

٤ س^٢ - ١٢ س + ٩ = ٠ ⟸ (٢ س − ٣)^٢ = ٠

حيث أن المقدار مربع كامل ⟸ ٢ س − ٣ = ٠

المعادلة لها جذر مكرر وهو س = $\frac{٣}{٢}$



ى(س) < ٠ ∀ س ∈ ح − { $\frac{٣}{٢}$ }

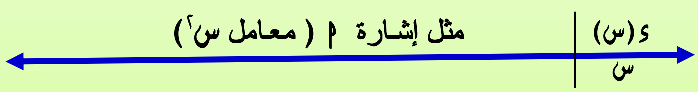
ى(س) = ٠ ∀ س = { $\frac{٣}{٢}$ }

ثالثا إذا كان المميز سالب

لا يكون للمعادلة حل فى ح ويكون جذريها تخيليان فيكون بحث الإشارة كالتالى :

ى(س) مثل إشارة ∣ (معامل س^٢) ∀ س ∈ ح

وعلى خط الأعداد يكون كالتالى :



مثال ٥ : أبحث إشارة الدالة

ى(س) = س^٢ − ٥ س + ٢٥

الحل

ى(س) =٠ ⟸ س^٢ − ٥ س + ٢٥ = ٠

هذه المعادلة ليس لها حل فى ح وللتأكد من ذلك نوجد المميز

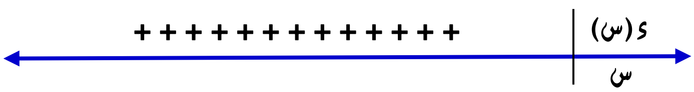
حيث ∣ = ١ ، ب = - ٥ ، هـ = ٢٥

المميز = ب^٢ − ٤ ∣ هـ

= ٢٥ − ٤ × ١ × ٢٥ = ٢٥ − ١٠٠ = - ٧٥

المميز عدد سالب لذا فإن المعادلة ليس لها حل فى ح فيكون بحث إشارة كالتالى :

ى(س) > ٠ ∀ س ∈ ح



مثال ٦ : إذا كانت ى(س) = س^٢ − ٤ ،

ن(س) = - س^٢ + ٢ س + ٣ أوجد فترة الأعداد التى تكون فيها الدالتين ى ، ن موجبتين معا أو سالبتين معا أو مختلفتين

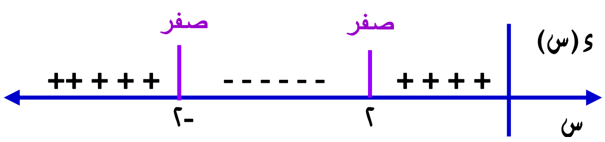
الحل

أولا : ى(س) = س^٢ − ٤

س^٢ − ٤ = ٠ ⟸ (س − ٢) (س + ٢) = ٠

جذرا المعادلة هما { ٢ ، - ٢ }

فتكون إشارة الدالة كالتالى :



ثانيا : ن(س) = - س^٢ + ٢ س + ٣

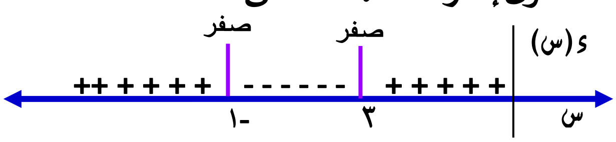
- س^٢ + ٢ س + ٣ = ٠ × - ١

⟸ س^٢ - ٢ س - ٣ =٠

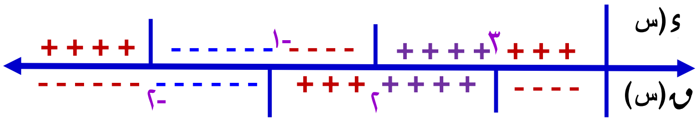
(س − ٣)(س + ١) = ٠

جذرا المعادلة هما { ٣ ، - ١ }

فتكون إشارة الدالة كالتالى :



وبدمج خطى الأعداد للدالتين نجد أن :



وبذلك يكون :

سالبتين معا فى الفترة] −٢ ، −١ [

موجبتين معا فى الفترة] ٢ ، ٣ [

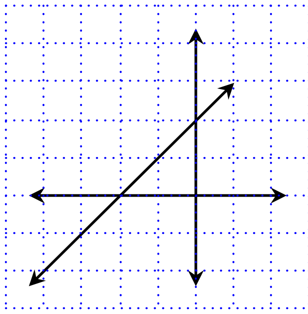
مختلفتين معا فى

] −∞ ، −٢ [∪] −١ ، ٢ [∪] ٣ ، ∞ [

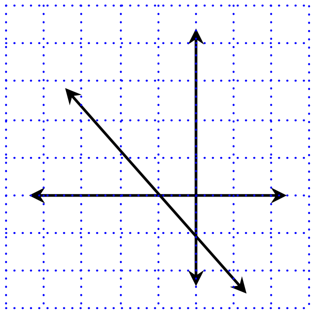
تدريب ١ :

أبحث إشارة كلا من الدوال الممثلة على الشبكة التربيعية فى كلا من الحالات الأتية

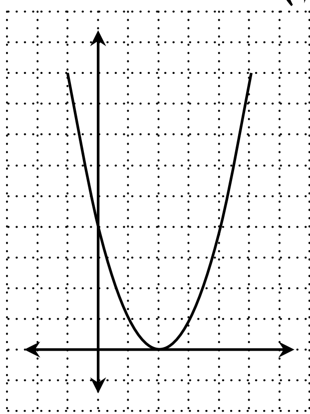
(١)



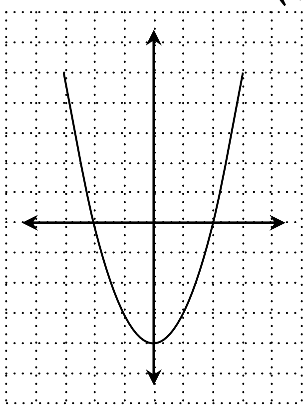
(٢)



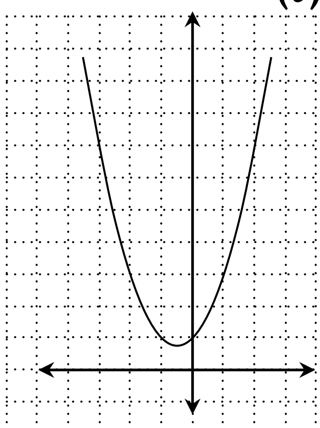
(٣)



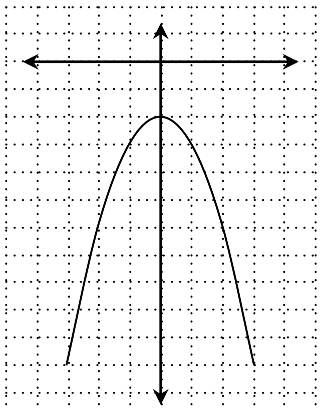
(٤)



(٥)



(٦)



تدريب ١

أبحث إشارة كلا من الدوال الأتية :

(١) د (س) = س^٢ + ٤ س + ٥

(٢) د (س) = ٢ س + ٤

(٣) د (س) = - س^٢ + ٧ س − ١٢

(٤) د (س) = س^٢ − ٩

(٥) د (س) = س^٢ − س + ١

(٦) د (س) = - س^٢ − ٩

تدريب ٢ :

أوجد الفترات التى يكون فيها الدالتين

د (س) = س^٢ − ٥ س + ٦ ، ر (س) = س^٢ − ٩

موجبتين معا أو سالبتين معا أو مختلفتين