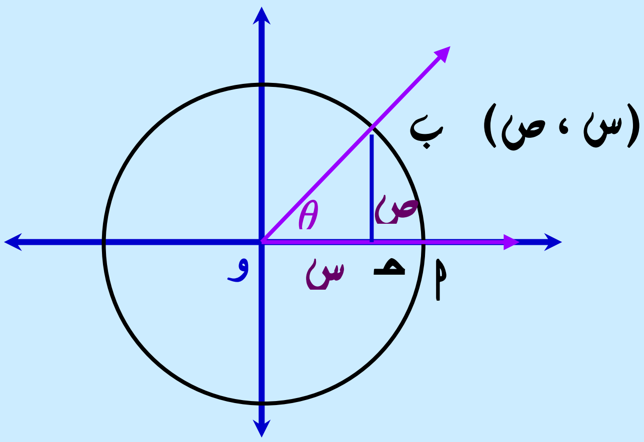
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



لوبيتال

فى

الرياضيات

الصف الاول الثانوي

الفصل الدراسي الاول

إعداد أ / وليد الجارحي

www.lopitalmath.com

التشابه

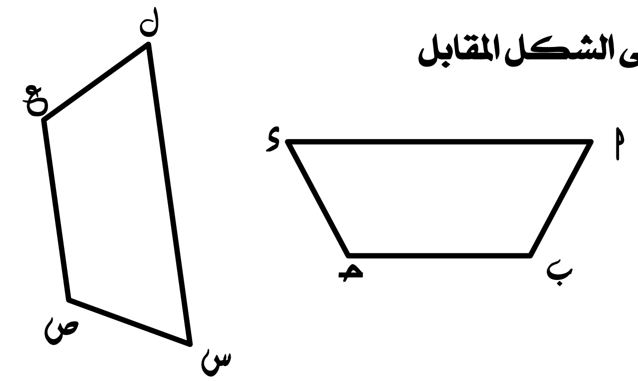
التشابه

يقال عن شكلين أنهما متشابهان إذا كان أحدهما مطابق للاخر بعد إجراء تحجيم عليه سواء تكبير او تصغير مع إمكانية التأثير عليه بدوران أو انتقال

تشابه المضلعات

يتشابه مضلعان لهما نفس العدد من الاضلاع اذا توفرت الشروط الاتية
(١) الزوايا المتناظرة متساوية
(٢) الاضلاع المتناظرة متساوية

ففى الشكل المقابل



شروط تشابه المضلعين أ ب هـ ء ، س ص ع ل هي

(١) تناسب الاضلاع :

$$\Leftarrow \frac{\text{أب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{هـ ء}}{\text{ع ل}} = \frac{\text{ء أ}}{\text{ل س}} = \text{نسبة التشابه}$$

أو معامل التشابه

(٢) تساوي الزوايا

$$\Leftarrow \text{ق}(\hat{\text{أ}}) = \text{ق}(\hat{\text{س}}) \text{ ، } \text{ق}(\hat{\text{ب}}) = \text{ق}(\hat{\text{ص}})$$
$$\text{ ، } \text{ق}(\hat{\text{هـ}}) = \text{ق}(\hat{\text{ع}}) \text{ ، } \text{ق}(\hat{\text{ء}}) = \text{ق}(\hat{\text{ل}})$$

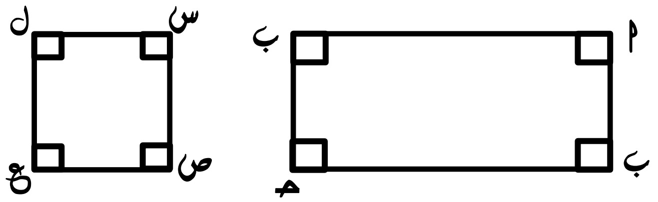
وإذا كانت المضلعات متاشبهه فإنه :

☹ تتناسب الاضلاع ☹ تتساوي الزوايا

ملاحظات مهمة

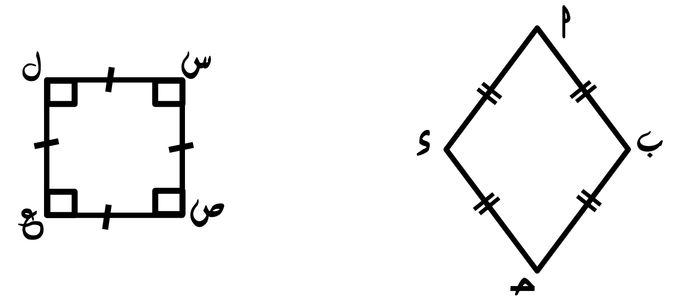
(١) لكي يتشابه مضلعان لا بد من توافر الشرطان معا ولا يمكن التشابه بتوافر شرط واحد فقط فالمعين والمربع لا يتشابهان بالرغم من تناسب الاضلاع والمستطيل والمربع لا يتشابهان بالرغم من تساوي الزوايا

☹ المستطيل والمربع



بملاحظة الشكلين نجد تساوي الزوايا المتناظرة فى المستطيل والمربع وبالرغم من ذلك الشكلين غير متشابهين

☹ المربع والمعين



بملاحظة الشكلين السابقين نجد أن هناك تناسب بين الاضلاع ومع ذلك المضلعين غير متشابهين

(٢) المضلعان المتطابقان يكونان متشابهان والعكس غير صحيح دائما

(٣) معامل التشابه = $\dfrac{\text{أحد أضلاع المضلع الأول}}{\text{المناظر له المضلع الثاني}}$

(٤) إذا كان معامل التشابه (نسبة التشابه) = ١ فإن المضلعان يكونان متطابقان

(٥) المضلعان المشابهان لثالث يكونان متشابهان

(٦) كل المضلعات المنتظمة التي لها نفس العدد من الاضلاع تكون متشابهة

(٧) نواتج التشابه هي
☹ تساوي الزوايا المتناظرة
☹ تناسب الاضلاع المتناظرة

(٨) معامل التشابه

معامل التشابه هو النسبة بين اى ضلعين متناظرين فى المضلعين او النسبة بين محيطي المضلعين

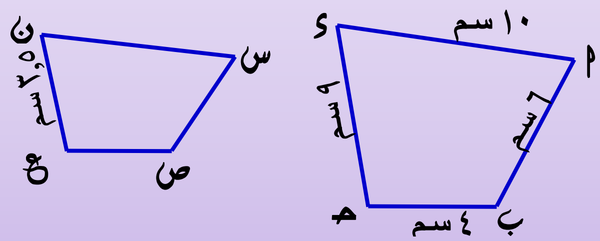
معامل التشابه = $\frac{\text{طول اى ضلع فى المضلع الاول}}{\text{الضلع المناظر له فى الضلع الثاني}}$ = $\frac{\text{محيط المضلع الاول}}{\text{محيط المضلع الثاني}}$

مثال ١ فى الشكل المقابل

المضلع أ ب جـ د ~ المضلع س ص ع ن

أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٤ سم ، جـ د = ٩ سم

د أ = ١٠ سم ، ع ن = ٣,٥ سم



أوجد طول كلا من $\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{ص ع}}$ ، $\overline{\text{س ن}}$

الحل

∵ المضلع أ ب جـ د ~ المضلع س ص ع ل

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{جـ د}}{\text{ع ن}} = \frac{\text{د أ}}{\text{ن س}}$

∴ $\frac{٦}{\text{س ص}} = \frac{٤}{\text{ص ع}} = \frac{٩}{٣,٥} = \frac{١٠}{\text{ن س}}$

∴ س ص = $\frac{٦ \times ٣,٥}{٩}$ = $٢\frac{١}{٣}$ سم = ٢,٣٣ سم

∴ ص ع = $\frac{٤ \times ٣,٥}{٩}$ = $١\frac{٥}{٩}$ سم = ١,٥٦ سم

∴ ن س = $\frac{١٠ \times ٣,٥}{٩}$ = $٣\frac{٨}{٩}$ سم = ٣,٨٩ سم

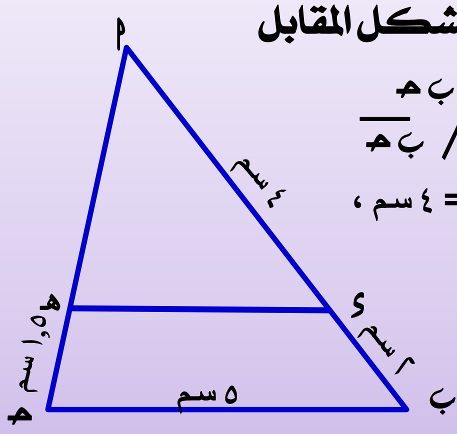
مثال ٢ : فى الشكل المقابل

△ أ د هـ ~ △ أ ب جـ

أثبت أن $\overline{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

وإذا كان : أ د = ٤ سم ، د ب = ٢ سم ، هـ جـ = ١,٥ سم ، ب جـ = ٥ سم

أوجد: طول كلا من $\overline{\text{أ هـ}}$ ، $\overline{\text{د هـ}}$



الحل

∵ المضلع أ د هـ ~ المضلع أ ب جـ

ومن نواتج التشابه

(١) تساوي الزوايا المتناظرة

ق(∠أ د هـ) = ق(∠أ ب جـ)

وهما فى وضع تناظر

∴ $\overline{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

(٢) تناظر الاضلاع المتناظرة

∴ $\frac{\text{أد}}{\text{أب}} = \frac{\text{د هـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{أ جـ}}$ ⟸ $\frac{٤}{٤+٢} = \frac{\text{د هـ}}{٥} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{أ هـ}+١,٥}$

⟸ $\frac{٤}{٦} = \frac{\text{د هـ}}{٥} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{أ هـ}+١,٥}$

⟸ د هـ = $\frac{٤ \times ٥}{٦}$ = $٣\frac{١}{٣}$ سم = ٣,٣٣ سم

⟸ ٦ × أ هـ = ٤ × (أ هـ + ١,٥)

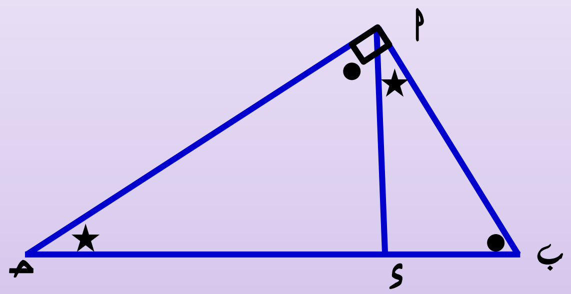
⟸ ٦ أ هـ = ٤ أ هـ + ٦

٦ أ هـ − ٤ أ هـ = ٦ ⟸ ٢ أ هـ = ٦

∴ أ هـ = $\frac{٦}{٢}$ = ٣ سم

مثال ٣ : فى الشكل المقابل

△ د ب أ ~ △ أ ب جـ ، ق(∠ب أ جـ) = ٩٠°



أثبت أن أ د ⊥ ب جـ ، وإذا كان أ ب = ٨ سم ، أ جـ = ٦ سم أوجد طول ب د

الحل

∵ △ د ب أ ~ △ أ ب جـ

ومن نواتج التشابه

(١) تساوي الزوايا المتناظرة

ق(∠ب د أ) = ق(∠ب أ جـ) = ٩٠°

∴ أ د ⊥ ب جـ

(٢) تناظر الاضلاع المتناظرة

∴ $\frac{\text{ب د}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{أ د}}{\text{جـ أ}} \Longleftarrow \frac{\text{ب د}}{٨} = \frac{٨}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{أ د}}{٦}$

نلاحظ عدم وجود نسبة معلومة بالتالى يجب إيجاد الضلع ب جـ باستخدام فيثاغورث

فى الـ Δ أ ب جـ القائم فى أ

(ب جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (أ جـ)^{٢}

ب جـ = $\sqrt{٨^{٢} + ٦^{٢}}$ = $\sqrt{٦٤ + ٣٦}$ = $\sqrt{١٠٠}$ = ١٠

وبالتعويض عن قيمة ب جـ فى نواتج التناسب

$\frac{\text{ب د}}{٨} = \frac{٨}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{أ د}}{٦} \Longleftarrow \frac{\text{ب د}}{٨} = \frac{٨}{١٠} = \frac{\text{أ د}}{٦}$

ب د = $\frac{٨ \times ٨}{١٠}$ = ٦,٤ سم

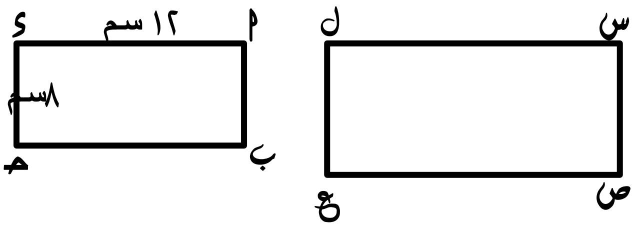
أ د = $\frac{٨ \times ٦}{١٠}$ = ٤,٨ سم

مثال ٤ : فى الشكل المقابل

مستطيلان متشابهان بعدا الاول ٨ سم ، ١٢ سم ، ومحيط الثاني ٢٠٠ سم ، أوجد طول وعرض المستطيل الثاني ومساحته

الحل

يتشابه المستطيلان إذا تناسب طول وعرض احدهما مع نظائرهما فى الاخر



∵ المستطيل أ ب جـ د ~ المستطيل س ص ع ل

من نواتج التشابه :

(١) تناسب الاضلاع المتناظرة :

$\frac{\text{س ل}}{\text{أ د}} = \frac{\text{ل ع}}{\text{د جـ}} = \frac{\text{ع ص}}{\text{جـ ب}} = \frac{\text{ص س}}{\text{ب أ}} \Longleftarrow \frac{\text{س ل}}{١٢} = \frac{\text{ل ع}}{٨}$

$\frac{\text{س ل}}{\text{ل ع}} = \frac{١٢}{٨} = \frac{٣}{٢} \Longleftarrow$ س ل = ٣ م ، ل ع = ٢ م

ومحيط س ص ع ل = ٢٠٠

∴ س ل + ل ع = نصف المحيط = ١٠٠

٣ م + ٢ م = ١٠٠ ⟸ ٥ م = ١٠٠

م = $\frac{١٠٠}{٥}$ = ٢٠

∴ س ل = الطول = ٣ م = ٣ × ٢٠ = ٦٠ سم

∴ ل ع = العرض = ٢ م = ٢ × ٢٠ = ٤٠ سم

المساحة = الطول × العرض = ٦٠ × ٤٠ = ٢٤٠٠ سم^{٢}

مثال ٥ : فى الشكل المقابل

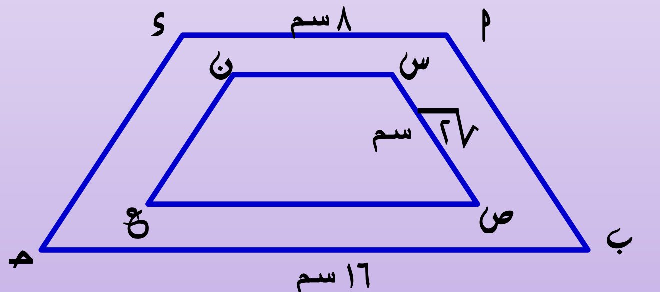
شبه المنحرف أ ب جـ د ~ شبه المنحرف س ص ع ن

ب جـ // أ د ، أ د = ٨ سم ، ب جـ = ١٦ سم ،

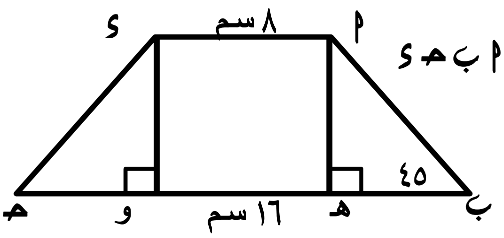
س ص = $\sqrt{٢}$ سم ، ق($\measuredangle$ ب) = ق($\measuredangle$ جـ) = ٤٥°

أوجد طول $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{س ن}}$ ومعامل التشابه

وأوجد محيط المضلع س ص ع ن



الحل



أولا فى الشكل أ ب جـ د

نرسم أ هـ ⊥ ب جـ ، د و ⊥ ب جـ

∵ أ هـ // د و ، أ د // هـ و

∴ أ هـ و د مستطيل ∴ أ د = هـ و = ٨ سم

∵ ق($\hat{\text{ب}}$) = ق($\hat{\text{جـ}}$) = ٤٥ ، ق(ب$\hat{\text{هـ}}$أ) = ق(جـ$\hat{\text{و}}$د) = ٩٠

∴ شبه المنحرف أ ب جـ د متساوي الساقين أ ب = جـ د

∴ Δ أ ب هـ ≡ Δ د جـ و وكلاهما متساويا الساقين

∴ ب هـ = و جـ = $\frac{١٦ - ٨}{٢}$ = ٤ سم

من فيثاغورث : (أ ب)^{٢} = (ب هـ)^{٢} + (أ هـ)^{٢}

أ ب = $\sqrt{٤^{٢} + ٤^{٢}}$ = $\sqrt{١٦ + ١٦}$ = $\sqrt{٣٢}$ = ٤ $\sqrt{٢}$

∵ شبه المنحرف أ ب جـ د ~ شبه المنحرف س ص ع ن

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{جـ د}}{\text{ع ن}} = \frac{\text{د أ}}{\text{ن س}} \Longleftarrow \frac{٤\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{٨}{\text{ن س}}$

ن س = $\frac{٨ \times \sqrt{٢}}{٤\sqrt{٢}}$ = ٢ سم

☹ **معامل التشابه** = $\frac{\text{اى ضلع من المضلع الاول}}{\text{الضلع المناظر له من المضلع الثاني}}$

$= \frac{٤\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = ٤$

☹ $\frac{\text{محيط الاول}}{\text{محيط الثاني}} = \frac{\text{اى ضلع من المضلع الاول}}{\text{الضلع المناظر له من المضلع الثاني}}$

$\frac{٨ + ٤\sqrt{٢} + ١٦ + ٤\sqrt{٢}}{م_٢} = \frac{٤\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$

$\frac{٢٤ + ٨\sqrt{٢}}{م_٢} = ٤$

$\Longleftarrow م_٢ = \frac{٢٤ + ٨\sqrt{٢}}{٤} = ٦ + ٢\sqrt{٢}$ سم

المستطيل الذهبي

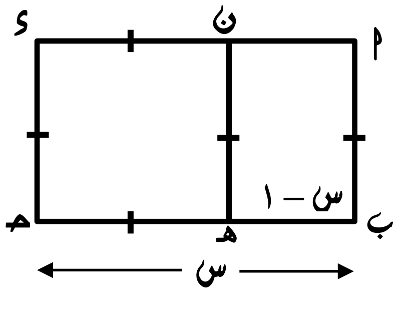
هو مستطيل يمكن تقسيمه الى مربع ومستطيل يشبه المستطيل الاصلى بشرط ان يكون طوله اصغر من ضعف عرضه

النسبة الذهبية

هي النسبة بين طول المستطيل الذهبي وعرضه وهي تساوي ١.٦١٨

إيجاد النسبة الذهبية

فى الشكل المقابل



ٲ ب هـ ء مستطيل طوله اصغر من ضعف عرضه

ونفرض ان عرضه = ١ سم وان طوله س

المستطيل ٲ ب هـ ن ∼ المستطيل ب هـ ء ٲ

$\frac{ٲب}{ب هـ} = \frac{ب هـ}{هـ ء} \Longleftarrow \frac{١}{س} = \frac{س - ١}{١}$

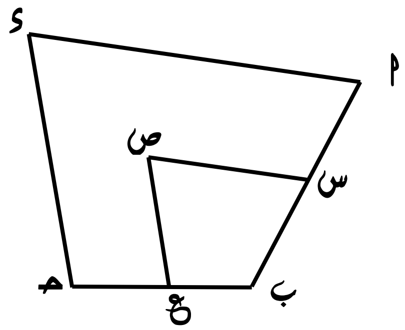
$س\,(س - ١) = ١ \Longleftarrow س^٢ - س - ١ = ٠$

وبحل المعادلة $\Longleftarrow س = \frac{١ + \sqrt{٥}}{٢} = ١,٦١٨$

تدريبات على تشابه المضلعات

(١) مستطيل بعداه ١٠ سم ، ٦ سم أوجد محيط ومساحة مستطيل اخر مشابه له إذا كان معامل التشابه = ٤

(٢) إذا كان المضلع ٲ ب هـ ء ∼ المضلع س ب ع ص فأثبت أن $\overline{س ص}$ // $\overline{ٲ ء}$ وإذا كان محيط المضلع ٲ ب هـ ء = ١٤ سم ومحيط الشكل س ب ع ص = ١٠ سم طول س ب = ٢ سم فأوجد طول ٲ ب



تفكير ناقد

(١) يتشابه المستطيلان اذا ....

(٢) يتشابه المربعان اذا ....

تشابه المثلثات

تشابه المثلثات حالة خاصة من تشابه المضلعات
ولكن لكي يتشابه المثلثين فإن شروط ذلك اقل من شروط تشابه مضلعين
ولتشابه مسلمات ونظريات ونتائج نسردها فيما يلى

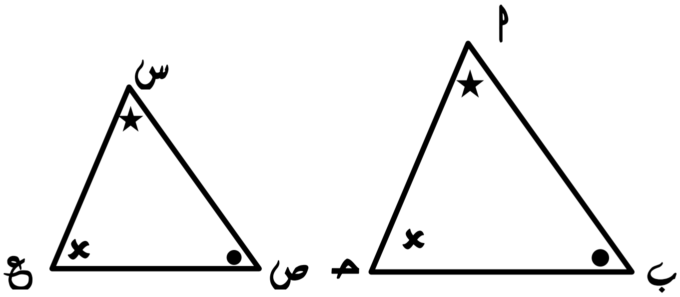
الحالة الاولى لتشابه مثلثين

مسلمة

يتشابه المثلثان إذا تطابقت زوايا المثلث الاول مع نظائرها فى المثلث الاخر

إذا تطابقت زوايا مثلث مع زوايا مثلث اخر فإن المثلثان يكونان متشابهان

فى الشكل المقابل :



إذا كان

ق(بَ) = ق(صَ) ، ق(أَ) = ق(سَ)

ق(حَ) = ق(عَ)

∴ Δ أ ب حـ ~ Δ س ص ع

نتيجة ١

إذا طابقت زاويتان فى مثلث نظائرهما فى مثلث اخر كان المثلثان متشابهين

لأنه إذا تطابقت زاويتان فى مثلث مع نظائرهما فى الاخر فإن الثالثة فى المثلث الاول تساوي الثالثة فى المثلث الاخر بالتالى لاثبات تشابه مثلثين يكتفى فقط باثبات تساوي زاويتين فى مثلث مع نظائرهما فى الاخر

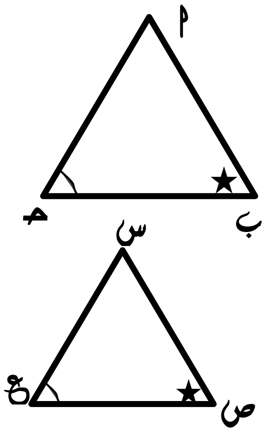
ففى الشكل المقابل :

إذا كان :

∠ص ≡ ∠ب

∠ع ≡ ∠حـ

فإنه يكون



Δ س ص ع ~ Δ أ ب حـ

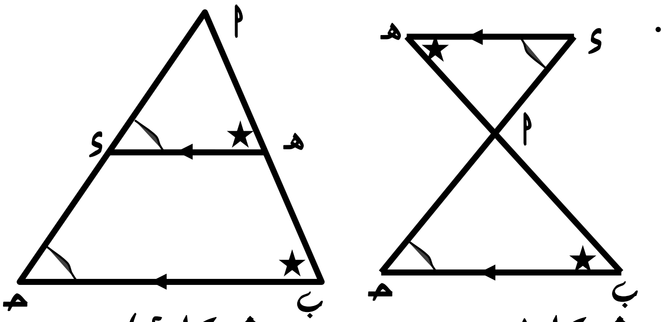
وذلك لأن ∠س ≡ ∠أ

نتيجة ٢

إذا رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الاخرين او امتداداتهما (المستقيمين الحاملين لهما) فإن المثلث الناتج يشبه المثلث الاصلي

وذلك بسبب انه تتساوي زوايا المثلث الاول مع زوايا المثلث الاخر بسبب التوازي والتقابل بالرأس او التوازي والاشتراك فى زاوية

ففى الشكل المقابل :-



(شكل ١) (شكل ٢)

فى شكل (١)

∵ ب حـ // ء هـ ، $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أحـ}$ قاطعين لهما

∴ ق(بَ) = ق(هَ) بالتبادل

∴ ق(حَ) = ق(ءَ) بالتبادل

∵ $\overline{ب هـ} \cap \overline{حـ ء}$ = { أ }

∴ ق(∠ء أ هـ) = ق(∠ب أ حـ) بالتقابل بالرأس

فى شكل (٢)

∵ ب حـ // ء هـ ، $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أحـ}$ قاطعين لهما

∴ ق(بَ) = ق(أ هَـ ء) بالتناظر

∴ ق(حَ) = ق(أ ءَ هـ) بالتناظر

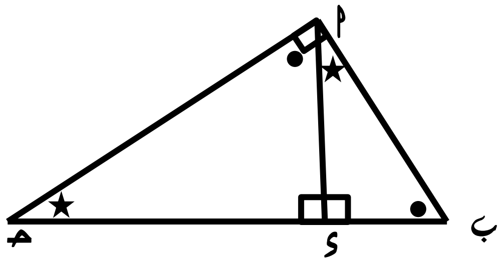
∠أ مشتركة

∴ Δ أ هـ ء ~ Δ أ ب حـ

نتيجة ٣

إذا رسم من رأس الزاوية القائمة فى المثلث القائم عمودا على الوتر فإنه يقسم المثلث إلى مثلثين كلا منهما يشبه المثلث الاصلي

ففي الشكل المقابل :-



إذا كان ق(ب أ جـ) = ٩٠° وكان أ د ⊥ ب جـ

فإن :

ق(ب أ جـ) = ق(ب د أ) = ق(جـ د أ) = ٩٠

∠ب تتمم ∠ب أ د ،

∠د أ جـ تتمم ∠ب أ د

⟸ ∠ب ≡ ∠د أ جـ

∠ب أ د تتمم ∠د أ جـ ،

∠جـ تتمم ∠د أ جـ

⟸ ∠جـ ≡ ∠ب أ د

∴ يكون :-

Δ ب أ د ~ Δ أ جـ د ~ Δ ب جـ أ

ومن نواتج تشابه المثلث

Δ ب أ د ~ Δ أ جـ د

ب أ / أ جـ = أ د / جـ د = ب د / أ د ⟸ (أ د)² = جـ د × ب د

Δ أ جـ د ~ Δ ب جـ أ

أ جـ / ب جـ = جـ د / أ جـ = أ د / ب د ⟸ (أ جـ)² = ب جـ × جـ د

Δ ب أ د ~ Δ ب جـ أ

ب أ / ب جـ = أ د / أ جـ = ب د / ب أ ⟸ (أ ب)² = ب جـ × ب د

⟸ أ ب × أ جـ = ب جـ × أ د

وهي بنود نظرية اقليدس وما سبق اثبات هندسي لها

ملاحظات مهمة :

(١) يتشابه المثلثان القائمي الزاوية إذا تطابق فى احدهما زاوية حادة مع اخري فى المثلث الاخر

(٢) يتشابه المثلثان المتساويا الساقين اذا تطابق فى احدهما زاوية مع نظيرتها فى الاخر

(٣) تتشابه المثلثات المتساوية الاضلاع دائما دون شروط وذلك لتحقق الشروط تلقائيا

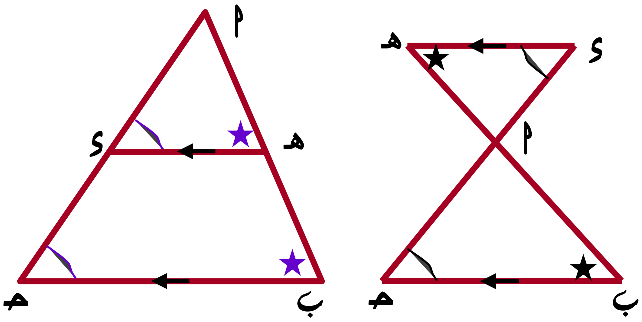
حالات تساوي الزوايا

(١) قطع مستقيم لضلعين فى مثلث موازيا الاخر وهو نتيجة رقم ٢ على الحالة الاولى

فى الشكل المقابل :

إذا كان د هـ // ب جـ

∴ Δ أ هـ د ~ Δ أ ب جـ

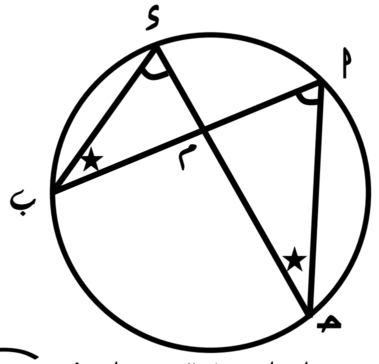


وذلك بسبب التوازي فتتساوي الزوايا بالتبادل او التناظر

(٢) إذا تقاطع وتران داخل دائرة

أ ب ∩ هـ د = {م}

يكون Δ أ م هـ ~ Δ د م ب



∵ ∠أ ، ∠د محيطيتان مشتركتان فى هـ ب

∴ ق(∠أ) = ق(∠د)

∵ ∠هـ ، ∠ب محيطيتان مشتركتان فى أ د

∴ ق(∠هـ) = ق(∠ب)

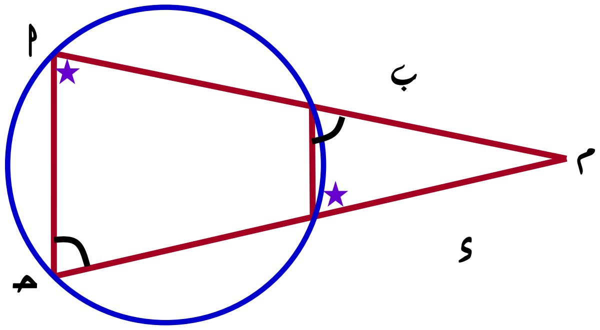
∵ $\overline{\text{أب}} \cap \overline{\text{جـ ء}} = \{\text{م}\}$

∴ ق(أ مَ جـ) = ق(ء مَ ب) بالتقابل بالرأس

(٣) إذا تقاطع وتران خارج الدائرة

$\overleftarrow{\text{أب}} \cap \overleftarrow{\text{جـ ء}} = \{\text{م}\}$

يكون Δ م ب ء ∼ Δ م جـ أ



∵ ∠ م ب ء خارجة عن الرباعي الدائري أ ب جـ ء

∴ ق(م بَ ء) = ق(جَـ)

احداهما خارجة والاخري داخلة مقابلة للمجاورة لها

∵ ∠ م ء ب خارجة عن الرباعي الدائري أ ب جـ ء

∴ ق(م ءَ ب) = ق(أَ)

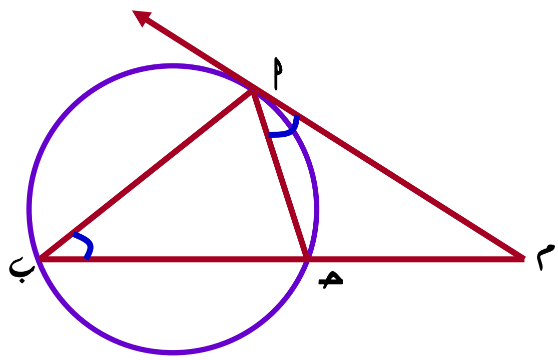
احداهما خارجة والاخري داخلة مقابلة للمجاورة لها

∠ م زاوية مشتركة

(٤) إذا تقاطع مماس ووتر خارج الدائرة

$\overleftarrow{\text{ب جـ}} \cap \overleftarrow{\text{م أ}} = \{\text{م}\}$

يكون Δ م أ جـ ∼ Δ م ب أ



∵ $\overleftarrow{\text{م أ}}$ مماس للدائرة عند أ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ وترا فيها

∴ ق(∠ م أ جـ) = ق(∠ ب)

مماسية ومحيطية مشتركتان فى نفس القوس $\frown$ أ جـ

∠ م مشتركة

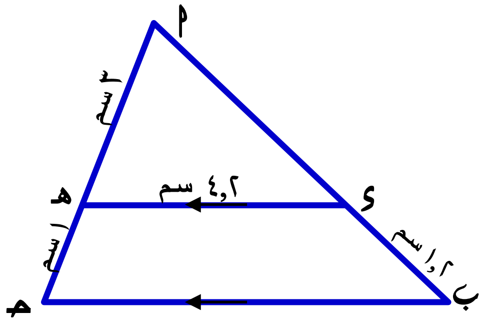
مثال ١ : أ ب جـ Δ فيه ء ∈ $\overline{\text{أب}}$ ، هـ ∈ $\overline{\text{أجـ}}$ ، $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ب ء = ١,٢ سم ، أ هـ = ٣ سم

أ جـ = ٤ سم ، ء هـ = ٤,٢ سم

(١) أثبت أن Δ أ ء هـ ∼ Δ أ ب جـ

(٢) أوجد طول كلا من $\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$

الحل



∵ $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ قاطعين لهما

∴ ق(∠ أ ء هـ) = ق(∠ب) بالتناظر

∴ ق(∠ أ هـ ء) = ق(∠جـ) بالتناظر

∴ Δ أ ء هـ ∼ Δ أ ب جـ

ومن نواتج التشابه

(١) تناسب الاضلاع

$\frac{\text{أء}}{\text{أب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{ءهـ}}{\text{بجـ}} \Leftarrow \frac{\text{أء}}{\text{أء} + ١,٢} = \frac{٣}{٤} = \frac{٤,٢}{\text{بجـ}}$

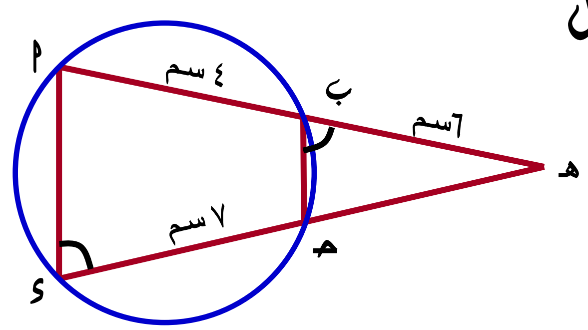
☹ $\frac{\text{أء}}{١,٢ + \text{أء}} = \frac{٣}{٤} \Leftarrow$ ٤ أ ء = ٣ أ ء = ٣,٦

٤ أ ء − ٣ أ ء = ٣,٦ ⟸ أ ء = ٣,٦ سم

☹ $\frac{٣}{٤} = \frac{٤,٢}{\text{بجـ}} \Leftarrow$ بجـ $= \frac{٤ \times ٤,٢}{٣} =$ ٥,٦ سم

مثال ٢ : أب ، ءجـ وتران فى دائرة ، أب ∩ ءجـ = {هـ} حيث هـ خارج الدائرة ،
أب = ٤ سم ، ءجـ = ٧ سم ، ب هـ = ٦ سم
أثبت أن Δ أ ء هـ ~ Δ جـ ب هـ
ثم أوجد طول جـهـ

الحل



∵ ∠ هـ ب جـ خارجة عن الرباعي الدائري أ ب جـ ء
∴ ق(∠ هـ ب جـ) = ق(∠ أ)
إحداهما خارجة والاخري داخلة مقابلة للمجاورة لها

∴ Δ هـ ب جـ ، Δ هـ ء أ
فيهما { ق(∠ هـ ب جـ) = ق(∠ أ) ، ∠ هـ مشتركة

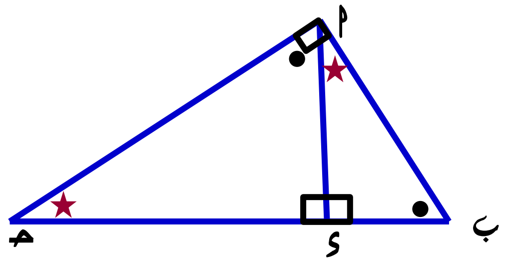
∴ Δ هـ ب جـ ~ Δ هـ ء أ
ومن نواتج التشابه
(١) تناسب الاضلاع

هـب/هـء = ب جـ/ءأ = هـجـ/هـأ ⟸ ٦/(جـهـ + ٧) = ب جـ/ءأ = جـهـ/١٠

جـهـ (جـهـ + ٧) = ٦ × ١٠
(جـهـ)² + ٧ جـهـ = ٦٠
(جـهـ)² + ٧ جـهـ - ٦٠ = ٠
(جـهـ - ٥) (جـهـ + ٧) = ٠
جـهـ = ٥ سم أ، جـهـ = -٧ مرفوض

مثال ٣ : أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى أ ،
رسم أء ⊥ ب جـ ليقطعه فى ء إذا كان
ب ء / ء جـ = ١/٢ ، أ ء = ٦√٢ أوجد طول كلا من
ب ء ، أ ب ، أ جـ

الحل



∵ ب ء / ء جـ = ١/٢ ⟸ ب ء = ١ م ، ء جـ = ٢ م
∵ ق(∠ ب أ جـ) = ٩٠ ، أ ء ⊥ ب جـ
∴ Δ ء ب أ ~ Δ ء أ جـ ~ Δ أ ب جـ

ومن نواتج التشابه المثلثين Δ ء ب أ ~ Δ ء أ جـ
(١) تناسب الاضلاع

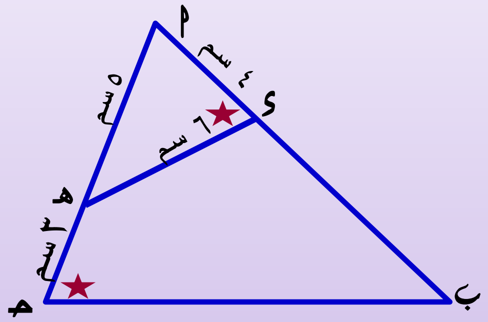
ء ب/ء أ = ب أ/أ جـ = ء أ/جـ ء ⟸ ء ب/ء أ = أ ء/جـ ء

⟸ (أ ء)² = ء ب × جـ ء
(٦√٢)² = ١م × ٢م = ٢م²
٣٦ × ٢ = ٢م² ⟸ م² = ٣٦ ⟸ م = √٣٦ = ٦
ء ب = م = ٦ سم ، ء جـ = ٢م = ٢ × ٦ = ١٢ سم

ومن نواتج التشابه المثلثين Δ ء ب أ ~ Δ أ ب جـ
ينتج أن (أ ب)² = ب ء × ب جـ
= ٦ × ١٨ = ١٠٨
⟸ أ ب = √١٠٨ = ٦√٣

ومن نواتج التشابه المثلثين Δ ء أ جـ ~ Δ أ ب جـ
ينتج أن (أ جـ)² = جـ ء × جـ ب
= ١٢ × ١٨ = ٢١٦
أ جـ = √٢١٦ = ٦√٦

مثال ٤ : فى الشكل المقابل



ق(∠ ٲ ء هـ) = ق(∠ جـ) ، ٲ ء = ٤ سم ،
ٲ هـ = ٥ سم ، ء هـ = ٦ سم ، هـ جـ = ٣ سم
أوجد طول كلا من ‾ء ب ، ‾ب جـ

الحل

الـ Δ ٲ ء هـ ، Δ ٲ جـ ب

فيهما
- ق(∠ ٲ ء هـ) = ق(∠ جـ) معطي
- ∠ ٲ مشتركة

∴ Δ ٲ ء هـ ∼ Δ ٲ جـ ب

ومن نواتج التشابه المثلثين

(١) تناسب الاضلاع

$$\frac{ٲء}{ٲجـ} = \frac{ءهـ}{جـب} = \frac{ٲهـ}{ٲب} \Leftarrow \frac{٤}{٨} = \frac{٦}{جـب} = \frac{٥}{ٲب}$$

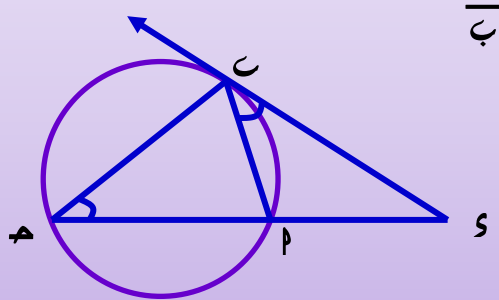
$$\frac{٤}{٨} = \frac{٦}{جـب} \Leftarrow جـب = \frac{٨ \times ٦}{٤} = ١٢ \text{ سم}$$

$$\frac{٤}{٨} = \frac{٥}{ٲب} \Leftarrow ٲب = \frac{٨ \times ٥}{٤} = ١٠ \text{ سم}$$

∴ ء ب = ١٠ – ٤ = ٦ سم

مثال ٥ : فى الشكل المقابل

‾ء ب مماس عند ب ، ‾ء جـ قاطع للدائرة فى ٲ ، جـ
على الترتيب أثبت أن : Δ ء ب ٲ ∼ Δ ء جـ ب
وإذا كان ‾ء ٲ = ٤ سم ، ‾ٲ جـ = ٥ سم ,
أوجد طول ‾ء ب



الحل

∵ ‾ء ب مماس للدائرة عند ب ، ٲ ب وتر
∴ ق(∠ ء ب ٲ) = ق(∠ جـ)
مماسية ومحيطية مشتركتان فى نفس القوس ⌒ٲ ب

∴ الـ Δ ء ب ٲ ، ء جـ ب

فيهما
- ق(∠ ء ب ٲ) = ق(∠ جـ) إثبات
- ∠ ء مشتركة

∴ Δ ء ب ٲ ∼ Δ ء جـ ب

ومن نواتج التشابه المثلثين

(١) تناسب الاضلاع

$$\frac{ءب}{ءجـ} = \frac{بٲ}{جـب} = \frac{ءٲ}{ءب} \Leftarrow \frac{ءب}{ءجـ} = \frac{ءٲ}{ءب}$$

$$(ءب)^2 = ءٲ \times ءجـ = ٤ \times (٤ + ٥) = ٤ \times ٩ = ٣٦$$

$$ءب = \sqrt{٣٦} = ٦ \text{ سم}$$

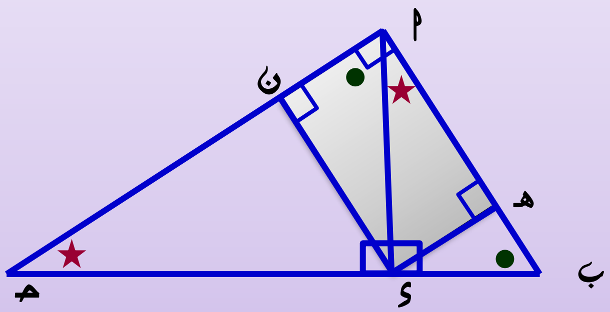
ملحوظة

(١) إذا تقاطع مماس وقاطع للدائرة خارجها فإن مربع طول المماس = حاصل ضرب جزئي القاطع

(٢) إذا تقاطع قاطعان للدائرة خارج الدائرة فإن حاصل ضرب جزئي القاطع الاول = حاصل ضرب جزئي القاطع الثاني

مثال ٦ : فى الشكل المقابل

ٲ ب جـ Δ قائم الزاوية فى ٲ ، ‾ٲ ء ⊥ ‾ب جـ ،
‾ء هـ ⊥ ‾ٲ ب ، ‾ء ن ⊥ ‾ٲ جـ



أثبت أن مساحة المستطيل ٲ هـ ء ن
= ٲ هـ × هـ ب × ٲ ن × ن جـ

الحل

∵ أ د ⊥ ب جـ ∴ ق(∠ب د أ) = ق(∠جـ د أ) = ٩٠°

∵ ق(∠ب د أ) = ٩٠ ، د هـ ⊥ أ ب

∴ Δ هـ أ د ~ Δ هـ د ب

ومن نواتج التشابه تناسب الاضلاع كالتالى

∴ هـ أ / هـ د = أ د / د ب = هـ د / هـ ب

⟸ (هـ د)^2 = هـ أ × هـ ب

هـ د = √(هـ أ × هـ ب) ——— (١)

∵ ق(∠أ د جـ) = ٩٠° ، د ن ⊥ أ جـ

∴ Δ ن جـ د ~ Δ ن د أ

ومن نواتج التشابه تناسب الاضلاع كالتالى

ن جـ / ن د = جـ د / د أ = ن د / ن أ

⟸ (ن د)^2 = ن جـ × ن أ

ن د = √(ن جـ × ن أ) ——— (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن :

مساحة المستطيل أ هـ د ن = هـ د × ن د

= √(أ هـ × هـ ب × أ ن × ن جـ)

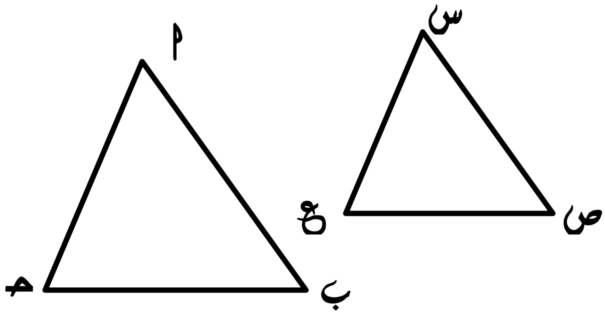
الحالة الثانية لتشابه مثلثين

نظرية ١

إذا تناسبت أطوال اضلاع مثلثين فإنهما متشابهان

أى أنه يتشابه المثلثان إذا تناسبت أطوال اضلاعهما المتناظرة

فى الشكل المقابل :



إذا كان س ص / أ ب = ص ع / ب جـ = س ع / أ جـ **فإن**

Δ ع س ص ~ Δ جـ أ ب

ويجب ملاحظة انه عند ايجاد النسبة بين كل ضلعين فإننا نرترتب اضلاع المثلث الاول والثاني ثم نقارن بين الاضلاع بالتناظر

مثال ٧ : فى الشكل المقابل

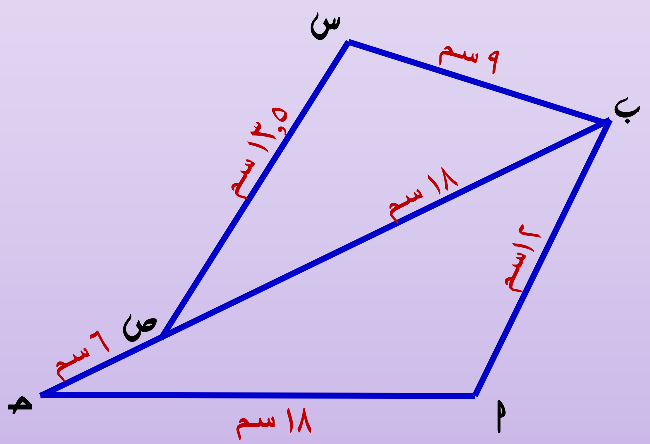
ب ، ص ، جـ على استقامة واحدة أثبت أن :

أ ب = ١٢ سم ، أ جـ = ب ص = ١٨ سم ،

ص جـ = ٦ سم ، ب س = ٩ سم ، س ص = ١٣,٥ سم

(١) Δ أ ب جـ ~ Δ س ب ص

(٢) $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ ينصف ∠ أ ب س



الحل

في ∆ ب س ص :

ب ص = ١٨ سم ، س ص = ١٣,٥سم ، ب س = ٩ سم

في ∆ أ ب حـ :

ب حـ = ٢٤ سم ، أ حـ = ١٨ سم ، أ ب = ١٢ سم

$\frac{\text{ب ص}}{\text{ب حـ}} = \frac{١٨}{٢٤} = \frac{٣}{٤}$ ، $\frac{\text{س ص}}{\text{أ حـ}} = \frac{١٣,٥}{١٨} = \frac{٣}{٤}$ ، $\frac{\text{ب س}}{\text{أ ب}} = \frac{٩}{١٢} = \frac{٣}{٤}$

∴ $\frac{\text{ب ص}}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{س ص}}{\text{أ حـ}} = \frac{\text{ب س}}{\text{أ ب}}$

∴ ∆ س ب ص ~ ∆ أ ب حـ

ومن نواتج التشابه

ق(∠س ب ص) = ق(∠أ ب حـ)

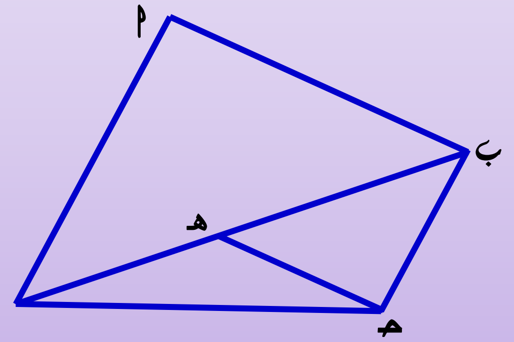
∴ $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ ينصف ∠ أ ب س

مثال ٨ : في الشكل المقابل

أ ب حـ ء شكل رباعي ، هـ ∈ $\overline{\text{ب ء}}$ حيث:

$\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ء}} = \frac{\text{هـ حـ}}{\text{حـ ب}}$ ، $\frac{\text{ب ء}}{\text{أ ء}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{حـ ب}}$ أثبت أن

(١) $\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ (٢) $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{حـ هـ}}$



الحل

∵ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ء}} = \frac{\text{هـ حـ}}{\text{حـ ب}}$ ⟸ $\frac{\text{حـ ب}}{\text{ء أ}} = \frac{\text{هـ حـ}}{\text{أ ب}}$ — (١)

∴ $\frac{\text{ء ب}}{\text{ء أ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{حـ ب}}$ ⟸ $\frac{\text{حـ ب}}{\text{ء أ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{ء ب}}$ — (٢)

∴ $\frac{\text{حـ ب}}{\text{ء أ}} = \frac{\text{هـ حـ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{ء ب}}$

∴ ∆ هـ ب حـ ~ ∆ ب ء أ

ومن نواتج التشابه

☹ ق(∠هـ ب حـ) = ق(∠ب ء أ)

وهما في وضع تبادل للقاطع $\overline{\text{ب ء}}$

∴ $\overline{\text{ب حـ}}$ // $\overline{\text{أ ء}}$

☹ ق(ب هـ حـ) = ق(ء ب أ)

وهما في وضع تبادل للقاطع $\overline{\text{ب هـ}}$

∴ $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{حـ هـ}}$

مثال ٩ : أ ب حـ مثلث ، ء ∈ $\overline{\text{ب حـ}}$ حيث

$(\text{أ ء})^2$ = ب ء × ء حـ ،

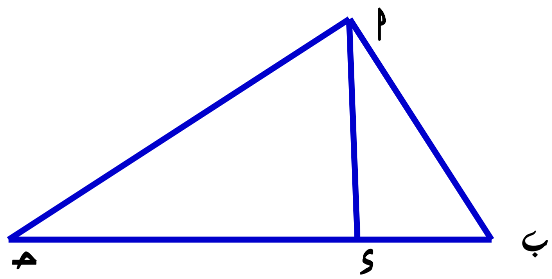
ب أ × أ ء = ب ء × أ حـ

أثبت أن :

(١) ∆ أ ب ء ~ ∆ حـ أ ء (٢) $\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب حـ}}$

(٣) ق(∠ب أ حـ) = ٩٠°

الحل



∵ $(\text{أ ء})^2$ = ب ء × ء حـ

أ ء × أ ء = ب ء × ء حـ ⟸ $\frac{\text{أ ء}}{\text{ب ء}} = \frac{\text{ء حـ}}{\text{أ ء}}$ — (١)

ب أ × أ ء = ب ء × أ حـ ⟸ $\frac{\text{أ ء}}{\text{ب ء}} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{أ ب}}$ — (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن :

$\frac{\text{أ ء}}{\text{ب ء}} = \frac{\text{ء حـ}}{\text{أ ء}} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{أ ب}}$ ⟸ ∴ ∆ حـ أ ء ~ ∆ أ ب ء

ومن نواتج التشابه

☹ ق(حـ ء أ) = ق(أ ء ب) = $\frac{١٨٠}{٢}$ = ٩٠°

∴ $\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب حـ}}$

☹ ق(أ حـ ء) = ق(ب أ ء)

☹ ق(أ ب ء) = ق(حـ أ ء) بالجمع

ق(أ حـ ء) + ق(أ ب ء) = ق(ب أ حـ)

∴ ق(∠ب أ حـ) = ٩٠°

مثال ١٠ : فى الشكل المقابل

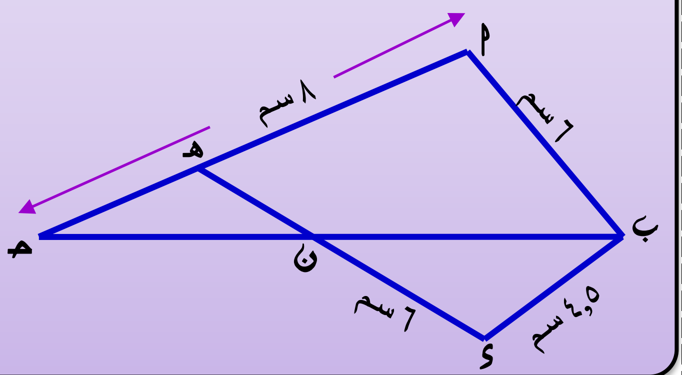
ا ب = ٦ سم ، ب هـ = ١٢ سم ، هـ ا = ٨ سم

ن هـ = ٣ سم ، ء ب = ٤,٥ سم ، ء ن = ٦ سم

أثبت أن :

(١) Δ ا ب هـ ~ Δ ء ب ن

(٢) Δ هـ ن هـ متساوي الساقين



الحل

ب ن = ١٢ − ٣ = ٩ سم

فى Δ ء ب ن :

ب ن = ٩ سم ، ء ن = ٦ سم ، ب ء = ٤,٥ سم

فى Δ ا ب هـ :

ب هـ = ١٢ سم ، ا هـ = ٨ سم ، ا ب = ٦ سم

$\frac{\text{ب ن}}{\text{ب هـ}} = \frac{٩}{١٢} = \frac{٣}{٤}$ ، $\frac{\text{ء ن}}{\text{ا هـ}} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$ ، $\frac{\text{ب ء}}{\text{ا ب}} = \frac{٤,٥}{٦} = \frac{٣}{٤}$

$\therefore \frac{\text{ب ن}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{ء ن}}{\text{ا هـ}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ا ب}}$

∴ Δ ء ب ن ~ Δ ا ب هـ

ومن نواتج التشابه

ق(∠ ب ن ء) = ق(∠ ب هـ ا) —— (١)

∵ $\overline{\text{ب هـ}} \cap \overline{\text{ء هـ}}$ = {ن}

∴ ق(∠ ء ن ب) = ق(∠ هـ ن هـ) —— (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن :

ق(∠ ب هـ ا) = ق(∠ هـ ن هـ)

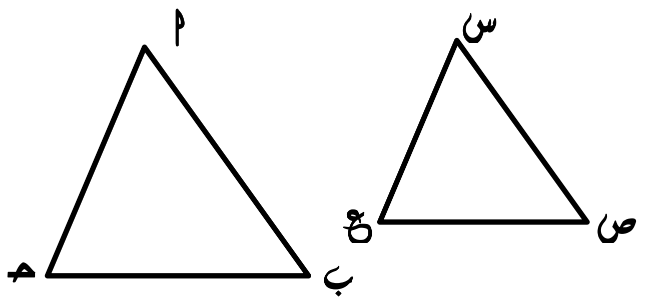
∴ ن هـ = هـ هـ

الحالة الثالثة لتشابه مثلثين

نظرية ٢

إذا طابقت زاوية فى مثلث زاوية فى مثلث اخر ، وتناسبت أطوال الاضلاع التى تحتويها هاتان الزاويتان كان المثلثان متشابهين

فى الشكل المقابل :



إذا كان :

$\frac{\text{ص س}}{\text{ب ا}} = \frac{\text{س ع}}{\text{ا هـ}}$ ، ق(∠س) = ق(∠ا)

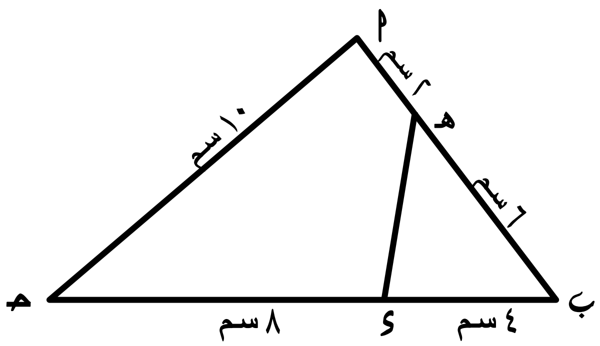
فإن : Δ ع ص س ~ Δ هـ ب ا

مثال ١١ : أ ب جـ مثلث ، أ ب = ٨ سم ، أ جـ = ١٠ سم ، ب جـ = ١٢ سم ، هـ ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ حيث $\overline{\text{أ هـ}}$ = ٢ سم ، ء ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ حيث ب ء = ٤ سم

(١) أثبت أن : Δ ب ء هـ ~ Δ ب أ جـ واوجد طول $\overline{\text{ء هـ}}$

(٢) أثبت أن الشكل أ جـ ء هـ رباعي دائري

الحل



في الـ Δ ب هـ ء : ب هـ = ٦ سم ، ب ء = ٤ سم

في الـ Δ ب جـ أ : ب جـ = ١٢ سم ، ب أ = ٨ سم

$\frac{\text{ب هـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{٦}{١٢} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{\text{ب ء}}{\text{ب أ}} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

∴ الـ Δ ب ء هـ ، Δ ب أ جـ

فيهما $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{ب هـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ب أ}} \\ \text{∠ب مشتركة} \end{array} \right.$

∴ Δ ب ء هـ ~ Δ ب أ جـ

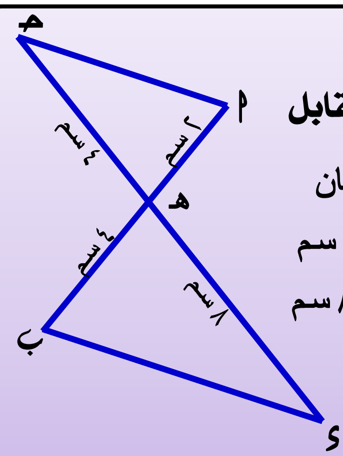
ومن نواتج التشابه

☹ ق(∠ب ء هـ) = ق(∠ب أ جـ)

إحداهما خارجة والاخري داخلة مقابلة للمجاورة لها

∴ أ هـ ء جـ شكل رباعي دائري

مثال ١٢ : فى الشكل المقابل



$\overline{\text{أ ب}} \cap \overline{\text{جـ ء}}$ = { هـ } وكان

أ هـ = ٢ سم ، هـ ب = ٤ سم

، جـ هـ = ٤ سم ، هـ ء = ٨ سم

أثبت أن :

Δ أ جـ هـ ~ Δ ب ء هـ

وإذا كان أ جـ = ٥ سم **أوجد طول** ب ء

الحل

فى الـ Δ أ هـ جـ : هـ جـ = ٤ سم ، أ هـ = ٢ سم

فى الـ Δ ء هـ ب : ء هـ = ٨ سم ، ب هـ = ٤ سم

$\frac{\text{جـ هـ}}{\text{ء هـ}} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{\text{أ هـ}}{\text{ب هـ}} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

∵ $\overline{\text{أ ب}} \cap \overline{\text{جـ ء}}$ = { هـ }

∴ ق(∠ء هـ ب) = ق(∠جـ هـ أ)

∴ الـ Δ ب ء هـ ، Δ ب أ جـ

فيهما $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{جـ هـ}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{ب هـ}} \\ \text{ق(∠ء هـ ب) = ق(∠جـ هـ أ)} \end{array} \right.$

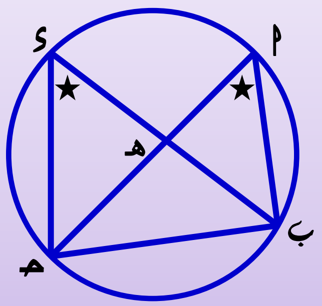
∴ Δ أ جـ هـ ~ Δ ب ء هـ

ومن نواتج التشابه

$\frac{\text{جـ هـ}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{ب ء}} \Leftarrow \frac{\text{أ جـ}}{\text{ب ء}} = \frac{١}{٢}$

$\frac{٥}{\text{ب ء}} = \frac{١}{٢} \Leftarrow$ ب ء = ٥ × ٢ = ١٠ سم

مثال ١٣ : فى الشكل المقابل



أ ب جـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة تتقاطع قطراه أ جـ ، ب ء في هـ

فإذا كان $\frac{\text{ب أ}}{\text{ب ء}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{ء جـ}}$

أثبت أن :

(١) Δ أ ب هـ ~ Δ ء ب جـ

(٢) $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ ينصف ∠ أ ب جـ

الحل

∵ ∠أ ، ∠ء محيطيتان تقابلان القوس $\frown{\text{ب جـ}}$

∴ ق(∠أ) = ق(∠ء) ــ (١)

∵ $\frac{\text{ب أ}}{\text{ب ء}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{ء جـ}}$ ∴ $\frac{\text{ب أ}}{\text{ب ء}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{ء جـ}}$ ــ (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن : Δ أ ب هـ ~ Δ ء ب جـ

ومن نواتج التشابه

(١) تساوي الزوايا

ق(∠أ ب هـ) = ق(∠ء ب جـ)

∴ $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ ينصف ∠ أ ب جـ

مثال ١٤ : فى الشكل المقابل

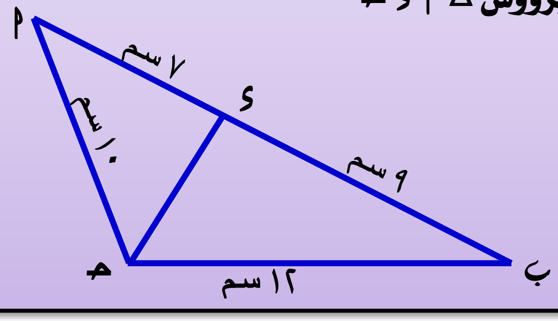
أ ب جـ Δ ، د ∈ $\overline{\text{أب}}$ فإذا كان أ د = ٧ سم

، د ب = ٩ سم ، ب جـ = ١٢ سم ، أ جـ = ١٠ سم

أثبت أن :

(١) Δ أ ب جـ ~ Δ جـ ب د وأوجد جـ د

(٢) أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{جـب}}$ مماسة للدائرة المارة برؤوس Δ أ د جـ



الحل

فى الـ Δ جـ ب د :

جـ ب = ١٢ سم ، ب د = ٩ سم

فى الـ Δ أ ب جـ :

أ ب = ١٦ سم ، ب جـ = ١٢ سم

$$\frac{\text{جـب}}{\text{أب}} = \frac{١٢}{١٦} = \frac{٣}{٤} \quad ، \quad \frac{\text{بد}}{\text{بجـ}} = \frac{٩}{١٢} = \frac{٣}{٤}$$

Δ أ ب جـ ، Δ جـ ب د

فيهما
$$\left.\begin{array}{l} \text{∠ب مشتركة} \\ \frac{\text{جـب}}{\text{أب}} = \frac{\text{بد}}{\text{بجـ}} \end{array}\right\}$$

∴ Δ أ ب جـ ~ Δ جـ ب د

ومن نواتج التشابه

(١) تساوي الزوايا

ق(∠ ب أ جـ) = ق(∠ ب جـ د)

∴ $\overleftrightarrow{\text{جـب}}$ مماسة للدائرة المارة برؤوس Δ أ د جـ

العلاقة بين مساحتى سطحي مضلعين متشابهين

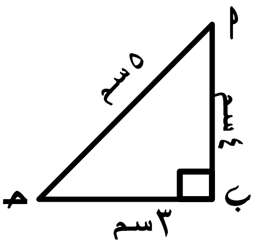
علمنا سابقا ان النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين = النسبة بين طولي ضلعين ممتناظرين او = معامل التشابه

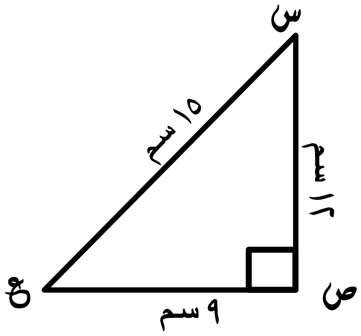
والان سنتعرف على النسبة بين مساحتي مضلعين متشابهين

فى الشكل المقابل

أ ب جـ ، س ص ع مثلثين قائمي الزاوية في ب ، ص

وهما مثلثين متشابهين





Δ أ ب جـ ~ Δ س ص ع

$$\frac{\text{أب}}{\text{سص}} = \frac{\text{بجـ}}{\text{صع}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{سع}} = \frac{١}{٣} = \text{معامل التشابه}$$

$$\text{م Δ أ ب جـ} = \frac{١}{٢} \times \text{ب جـ} \times \text{أ ب} = \frac{١}{٢} \times ٣ \times ٤ = ٦ \text{ سم}^٢$$

$$\text{مΔس ص ع} = \frac{١}{٢} \times \text{ص ع} \times \text{س ص} = \frac{١}{٢} \times ٩ \times ١٢ = ٥٤ \text{ سم}^٢$$

$$\frac{\text{مΔأبجـ}}{\text{مΔس ص ع}} = \frac{٦}{٥٤} = \frac{١}{٩} = \left(\frac{١}{٣}\right)^٢ = (\text{معامل التشابه})^٢$$

أى أن النسبة بين مساحتى مثلثين متشابهين = مربع النسبة بين طولى اى ضلعين متناظرين = مربع معامل التشابه

نظرية ٣

النسبة بين مساحتي مثلثين متشابهين تساوي مربع النسبة بين طولي اي ضلعين متناظرين فيهما

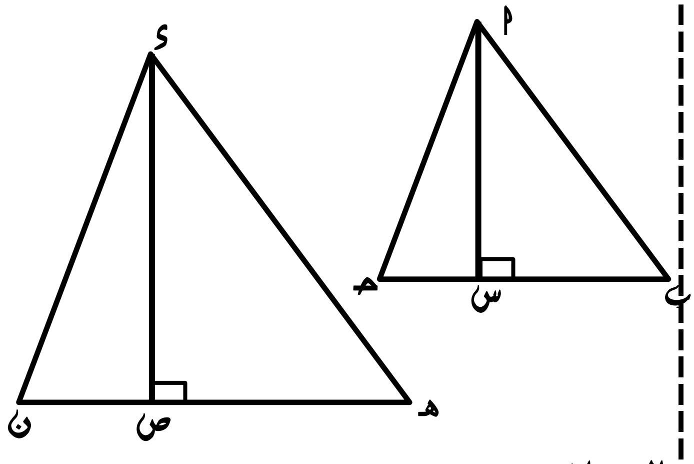
اثبات النظرية

المعطيات : Δ أ ب جـ ~ Δ د هـ ن

المطلوب :

$$\frac{\text{م}\Delta\text{أ ب جـ}}{\text{م}\Delta\text{د هـ ن}} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{د هـ}}\right)^2 = \left(\frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ ن}}\right)^2 = \left(\frac{\text{أ جـ}}{\text{ن د}}\right)^2$$

العمل : نرسم أ س ⊥ ب جـ ، د ص ⊥ هـ ن



البرهان :

∵ Δ أ ب جـ ~ Δ د هـ ن

∴ ق(ب̂) = ق(هـ̂)

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{د هـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ ن}}$ ——— (١)

∵ ق(س̂) = ق(ص̂) = ٩٠ ، ق(ب̂) = ق(هـ̂)

∴ Δ أ ب س ~ Δ د هـ ص

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{د هـ}} = \frac{\text{أ س}}{\text{د ص}}$ ——— (٢)

$$\frac{\text{م}\Delta\text{أ ب جـ}}{\text{م}\Delta\text{د هـ ن}} = \frac{\frac{1}{2}\,\text{ب جـ}\times\text{أ س}}{\frac{1}{2}\,\text{هـ ن}\times\text{د ص}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ ن}}\times\frac{\text{أ س}}{\text{د ص}}$$

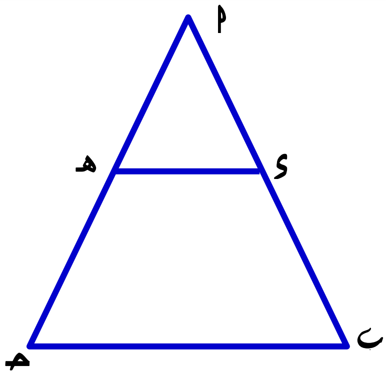
بالتعويض من (١) ، (٢)

$$\frac{\text{م}\Delta\text{أ ب جـ}}{\text{م}\Delta\text{د هـ ن}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ ن}}\times\frac{\text{أ س}}{\text{د ص}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{د هـ}}\times\frac{\text{أ ب}}{\text{د هـ}} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{د هـ}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{د هـ}}\right)^2 = \left(\frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ ن}}\right)^2 = \left(\frac{\text{أ جـ}}{\text{ن د}}\right)^2$$

مثال ١ : أ ب جـ Δ مساحة سطحه ١٠٠ سم² رسم $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ويقطع $\overline{\text{أ ب}}$ في د ، $\overline{\text{أ جـ}}$ في هـ فإذا كان $\frac{\text{أ د}}{\text{د ب}} = \frac{2}{3}$ فأوجد مساحه سطح الشكل د ب جـ هـ

الحل



∵ $\overline{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ Δ أ د هـ ~ Δ أ ب جـ

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\text{أ د هـ})}{\text{م}(\Delta\text{أ ب جـ})} = \left(\frac{\text{أ د}}{\text{أ ب}}\right)^2$

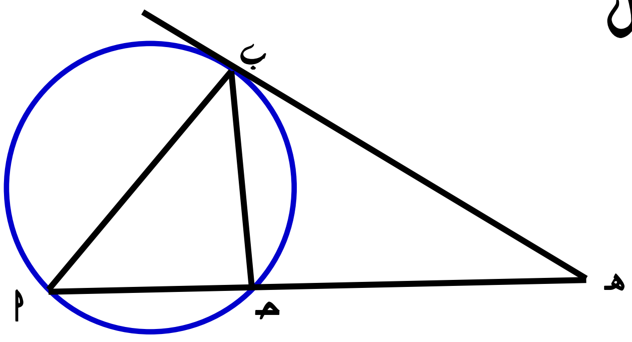
$\frac{\text{م}\Delta\text{أ د هـ}}{100} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$

م Δ أ د هـ = $\frac{100\times 4}{25}$ = ١٦ سم²

∴ م الشكل د ب جـ هـ = ١٠٠ – ١٦ = ٨٤ سم²

مثال ٢ : Δ أ ب جـ فيه $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{4}{3}$ رسمت الدائرة المارة برؤوسه ، من نقطة ب رسم المماس لهذه الدائرة فقطع $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ فى هـ أثبت أن : $\frac{\text{م}(\Delta\text{أ ب جـ})}{\text{م}(\Delta\text{أ ب هـ})} = \frac{7}{16}$

الحل



∵ $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ مماس للدائرة عند ب ، $\overline{\text{ب جـ}}$ وتر فيها

∴ ق(هـ ب̂ جـ) = ق(∠أ)

أحداهما مماسية والاخري محيطية مشتركتان فى نفس القوس

∴ Δ هـ ب جـ ، Δ هـ أ ب

فيهما { ق(هـ ب̂ جـ) = ق(∠أ) ، ∠ هـ مشتركة

∴ Δ هـ ب جـ ~ Δ هـ أ ب

$\frac{\text{م(Δ هـ أ ب)}}{\text{م(Δ هـ ب جـ)}} = \left(\frac{\text{أب}}{\text{جـ ب}}\right)^{٢} = \left(\frac{٤}{٣}\right)^{٢} = \frac{١٦}{٩}$

∴ م(Δ هـ أ ب) = ١٦ ك ، م(Δ هـ ب جـ) = ٩ك

م(Δ هـ أ ب) = م(Δ أ ب جـ) + م(Δ هـ ب جـ)

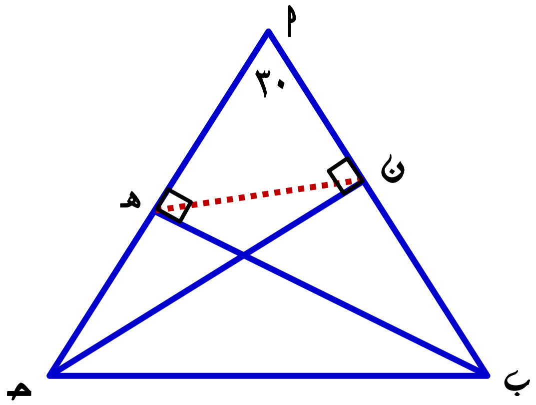
١٦ ك = م(Δ أ ب جـ) + ٩ ك

∴ م(Δ أ ب جـ) = ١٦ ك - ٩ ك = ٧ ك

$\frac{\text{م(Δ أ ب جـ)}}{\text{م(Δ أ ب هـ)}} = \frac{\text{٧ك}}{\text{١٦ك}} = \frac{٧}{١٦}$

مثال ٣ : أ ب جـ Δ حاد الزوايا فيه ق(∠أ)=٣٠°
رسم $\overline{\text{ب هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ جـ}}$ ليقطعه فى هـ ، $\overline{\text{جـ ن}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$
ليقطعه فى ن أثبت أن :
(١) أ ن × أ ب = أ هـ × أ جـ
(٢) $\frac{\text{م(Δ أ هـ ن)}}{\text{م(Δ أ ب جـ)}} = \frac{٣}{٤}$

الحل



∵ $\overline{\text{ب هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ ن}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$

∴ ق(أ ن̂ جـ) = ق(أ هـ̂ ب) = ٩٠°

Δ أ ن جـ ، Δ أ هـ ب

فيهما { ق(أ ن̂ جـ) = ق(أ هـ̂ ب) = ٩٠°
∠ أ مشتركة

∴ Δ أ ن جـ ~ Δ أ هـ ب

ومن نواتج التشابه

(١) تناسب الاضلاع

$\frac{\text{أن}}{\text{أهـ}} = \frac{\text{ن جـ}}{\text{هـ ب}} = \frac{\text{جـ أ}}{\text{ب أ}} \Leftarrow \frac{\text{أن}}{\text{أهـ}} = \frac{\text{جـ أ}}{\text{ب أ}}$

أ ن × أ ب = أ هـ × أ جـ ـــــــ المطلوب أولا

∵ $\frac{\text{أن}}{\text{أهـ}} = \frac{\text{جـ أ}}{\text{ب أ}} \Leftarrow \frac{\text{أن}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{أب}}$

Δ أ ن هـ ، Δ أ جـ ب

فيهما { $\frac{\text{أن}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{أب}}$
∠ أ مشتركة

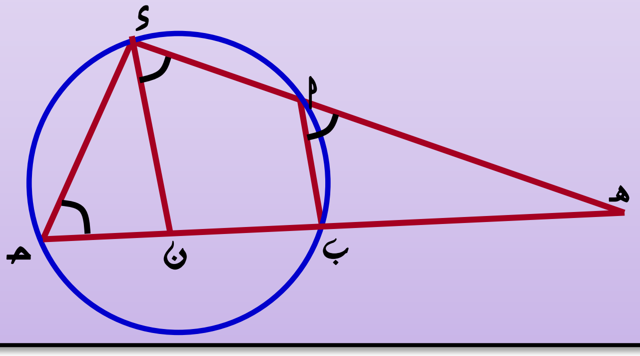
∴ Δ أ ن هـ ~ Δ أ جـ ب

∴ $\frac{\text{م(Δأهـن)}}{\text{م(Δأجـب)}} = \left(\frac{\text{أن}}{\text{أجـ}}\right)^{٢}$

فى الـ Δ أ ن جـ : جتا ٣٠ = $\frac{\text{أن}}{\text{أجـ}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ $\frac{\text{م(Δأهـن)}}{\text{م(Δأبجـ)}} = \left(\frac{\text{أن}}{\text{أجـ}}\right)^{٢} = \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢} = \frac{٣}{٤}$

مثال ٤ : أ ب جـ ء شكل رباعي دائري فيه
$\overleftarrow{\text{ء أ}}$ ∩ $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$ = { هـ } ، رسم $\overleftrightarrow{\text{ء ن}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$ ويقطع
ب جـ فى ن أثبت أن :
(١) Δ هـ ء ن ~ Δ هـ جـ ء
(٢) $\frac{\text{م(Δ هـ ء ن)}}{\text{م(Δ هـ جـ ء)}} = \frac{\text{هـ ن}}{\text{هـ جـ}}$



الحل

∵ أ ب جـ ء رباعي دائري ، ∠هـ أ ب خارجه عند أ

∴ ق(هـ أ̂ ب) = ق(جـ̂) ـــــ (١)

∵ $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{ء ن}}$ ، $\overline{\text{ء هـ}}$ قاطع لهما

∴ ق(∠هـ أ ب) = ق(∠هـ ء ن) ـــ (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن :

ق(∠هـ ء ن) = ق(جـ̂)

∴ Δ هـ ء ن ، Δ هـ جـ ء

فيهما { ق(∠هـ ء ن) = ق(جـ̂)
∠ هـ مشتركة

∴ Δ هـ د ن ~ Δ هـ حـ د

∴ $\frac{\text{هـ د}}{\text{هـ حـ}} = \frac{\text{د ن}}{\text{حـ د}} = \frac{\text{هـ ن}}{\text{هـ د}}$

∴ $\frac{\text{م(Δ هـ د ن)}}{\text{م(Δ هـ حـ د)}} = \left(\frac{\text{هـ ن}}{\text{هـ د}}\right)^2 = \frac{\text{هـ ن}}{\text{هـ د}} \times \frac{\text{هـ ن}}{\text{هـ د}}$

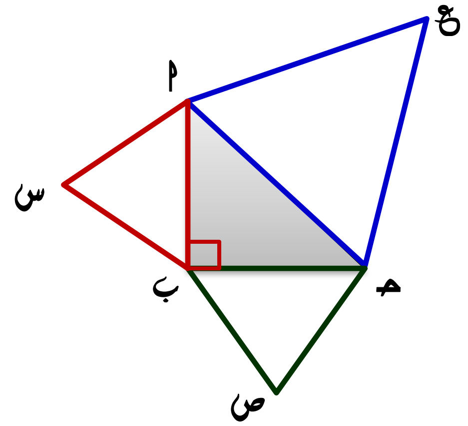
$= \frac{\text{هـ ن}}{\text{هـ د}} \times \frac{\text{هـ د}}{\text{هـ حـ}} = \frac{\text{هـ ن}}{\text{هـ حـ}}$

مثال ٥ : أ ب حـ Δ قائم الزاوية فى ب رسمت

المثلثات المتساوية الاضلاع أ ب س ، ب حـ ص ، أ حـ ع أثبت أن :

م(Δ أ ب س)+م(Δ ب حـ ص) = م(Δ أ حـ ع)

الحل



∵ المثلثات أ ب س ، أ حـ ع ، ب حـ ص متساوية الاضلاع

∴ Δ أ ب س ~ Δ أ حـ ص ~ ب حـ ص

∴ $\frac{\text{م(Δ أ ب س)}}{\text{م(Δ أ حـ ع)}} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}}\right)^2 = \frac{\text{(أ ب)}^2}{\text{(أ حـ)}^2}$ —— (١)

∴ $\frac{\text{م(Δ ب حـ ص)}}{\text{م(Δ أ حـ ع)}} = \left(\frac{\text{ب حـ}}{\text{أ حـ}}\right)^2 = \frac{\text{(ب حـ)}^2}{\text{(أ حـ)}^2}$ —— (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

$\frac{\text{م(Δ أ ب س)}}{\text{م(Δ أ حـ ع)}} + \frac{\text{م(Δ ب حـ ص)}}{\text{م(Δ أ حـ ع)}} = \frac{\text{(أ ب)}^2}{\text{(أ حـ)}^2} + \frac{\text{(ب حـ)}^2}{\text{(أ حـ)}^2}$

$\frac{\text{م(Δ أ ب س)} + \text{م(Δ ب حـ ص)}}{\text{م(Δ أ حـ ع)}} = \frac{\text{(أ ب)}^2 + \text{(ب حـ)}^2}{\text{(أ حـ)}^2}$

∵ أ ب حـ Δ قائم فى ب وبتطبيق فيثاغورث :

$\text{(أ حـ)}^2 = \text{(أ ب)}^2 + \text{(ب حـ)}^2$

∴ $\frac{\text{(أ ب)}^2 + \text{(ب حـ)}^2}{\text{(أ حـ)}^2} = ١$

∴ $\frac{\text{م(Δ أ ب س)} + \text{م(Δ ب حـ ص)}}{\text{م(Δ أ حـ ع)}} = ١$

∴ م(Δ أ ب س)+م(Δ ب حـ ص) = م(Δ أ حـ ع)

مثال ٦ : فى الشكل المقابل

أ ب حـ Δ فيه س ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ بحيث كان أ س = ٤ سم

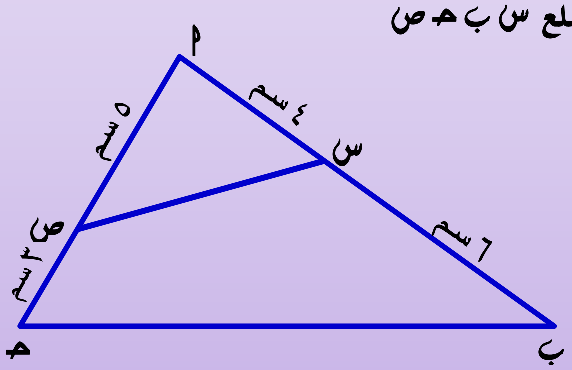
س ب = ٦ سم ، ص ∈ $\overline{\text{أ حـ}}$ بحيث كان أ ص = ٥ سم

ص حـ = ٣ سم

(١) أثبت أن : Δ أ س ص ~ Δ أ حـ ب

(٢) الشكل س ب حـ ص رباعي دائري

(٣) إذا كان م(Δ أ س ص) = ٨ سم^2 أوجد مساحة سطح المضلع س ب حـ ص



الحل

فى الـ Δ أ س ص : أ ص = ٥ سم ، أ س = ٤ سم

فى الـ Δ أ ب حـ : أ ب = ١٠ سم ، أ حـ = ٨ سم

$\frac{\text{أص}}{\text{أب}} = \frac{٥}{١٠} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{\text{أس}}{\text{أحـ}} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

∴ الـ Δ أ س ص ، Δ أ حـ ب

فيهما $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{أص}}{\text{أب}} = \frac{\text{أس}}{\text{أحـ}} \\ \text{∠ أ مشتركة} \end{array} \right.$

∴ Δ أ س ص ~ Δ أ حـ ب

ومن نواتج التشابه

∵ ق(أ $\hat{\text{س}}$ ص) = ق(أ $\hat{\text{حـ}}$ ب)

إحداهما خارجة والاخري داخلة مقابلة للمجاورة لها

∴ س ب حـ ص شكل رباعي دائري

∵ Δ أ س ص ~ Δ أ حـ ب

∴ $\frac{\text{م(Δ أ س ص)}}{\text{م(Δ أ حـ ب)}} = \left(\frac{\text{أس}}{\text{أحـ}}\right)^2 = \left(\frac{١}{٢}\right)^2 = \frac{١}{٤}$

$\frac{٨}{\text{م(Δ أ حـ ب)}} = \frac{١}{٤}$

م(Δ أ حـ ب) = ٤ × ٨ = ٣٢ سم^2

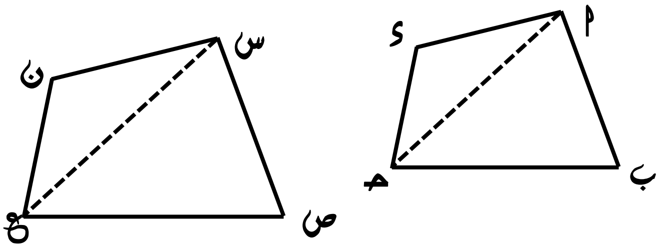
∴ م(س ب حـ ص) = ٣٢ − ٨ = ٢٤ سم^2

النسبة بين مساحتي مضلعين متشابهين

حقيقة

المضلعان المتشابهان يمكن أن ينقسما الى نفس العدد من المثلثات التي يشبه كلا منها نظيره

إذا كان المضلع أ ب جـ د ~ المضلع س ص ع ن
وأمكن تقسيم المضلع الاول الى عدد من المثلثات
وأمكن تقسيم المضلع الثاني الى نفس العدد من المثلثات بنفس التناظر والترتيب للرؤوس
فإن مثلثات المضلع الاول تشبه مثلثات المضلع الثاني
فى الشكل المقابل



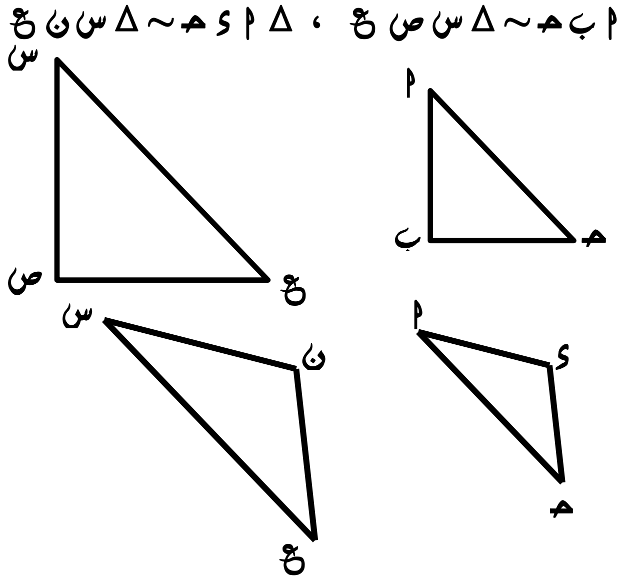
∵ المضلع أ ب جـ د ~ المضلع س ص ع ن
∴ Δ أ ب جـ ~ Δ س ص ع
∴ Δ أ د جـ ~ Δ س ن ع

والعكس صحيح

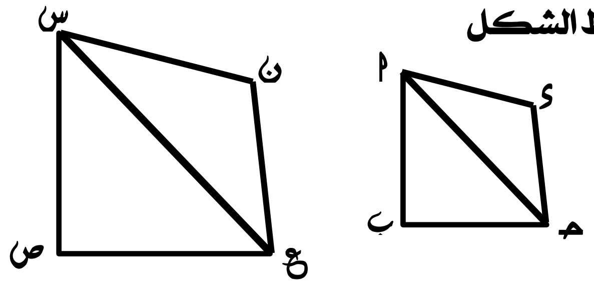
بشرط التناظر والترتيب

أى انه اذا وجد عدد من المثلثات المتشابهه وتم تكوين منها مضلعين بحيث كل مثلثين متشابهين يكونان فى نفس الموضع فى المضلعين فإن المضلعين المنشأين يكونان متشابهين

فى الشكل المقابل
Δ أ ب جـ ~ Δ س ص ع ، Δ أ د جـ ~ Δ س ن ع



لاحظ الشكل



∴ المضلع أ ب جـ د ~ المضلع س ص ع ن

نظرية ٤

النسبة بين مساحتى سطحي مضلعين متشابهين تساوي مربع النسبة بين طولي اي ضلعين متناظرين فيهما

إذا كان Δ أ ب جـ ~ Δ س ص ع فإن :-

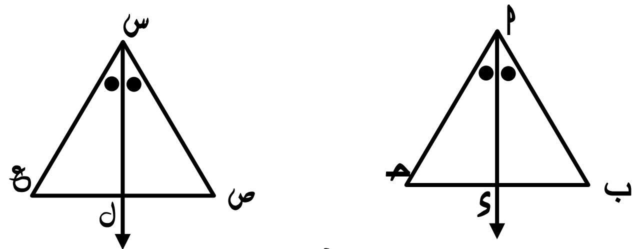
(١) $\dfrac{م(\Delta أ ب جـ)}{م(\Delta س ص ع)} = \dfrac{(أ ب)^2}{(س ص)^2} = \dfrac{(ب جـ)^2}{(ص ع)^2} = \dfrac{(أ جـ)^2}{(س ع)^2}$

(٢) $\dfrac{\text{مساحة } \Delta أ ب جـ}{\text{مساحة } \Delta س ص ع} = \dfrac{أ ب}{س ص} = \dfrac{ب جـ}{ص ع} = \dfrac{أ جـ}{س ع}$

فى الشكل المقابل:

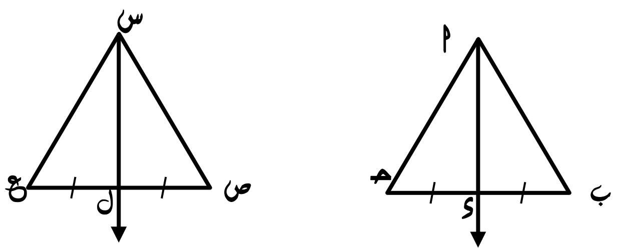
إذا كان Δ أ ب جـ ~ Δ س ص ع
فإن النسبة بين مساحتي المثلثين يساوي مربع النسبة بين منصفى زاويتين متناظرتين فيهما او ارتفاعيهما او متوسطاتيهما من نفس الزاوية

$\overrightarrow{س ل}$ ، $\overrightarrow{أ د}$ منصفان



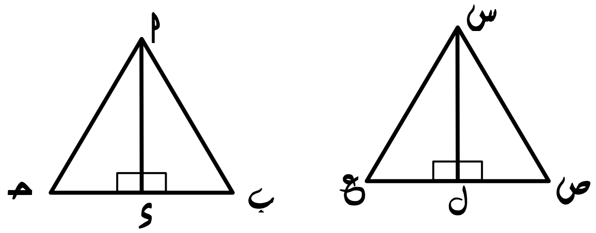
$\dfrac{م(\Delta أ ب جـ)}{م(\Delta س ص ع)} = \dfrac{(أ د)^2}{(س ل)^2}$

$\overrightarrow{س ل}$ ، $\overrightarrow{أ د}$ متوسطان



$\dfrac{م(\Delta أ ب جـ)}{م(\Delta س ص ع)} = \dfrac{(أ د)^2}{(س ل)^2}$

$\overline{سل}$ ، $\overline{اء}$ ارتفاعان



$$\frac{م(\Delta اب ح)}{م(\Delta س ص ع)} = \frac{(اء)^٢}{(س ل)^٢}$$

نتائج هامة

(١) النسبة بين مساحتي سطحي مثلثين متشابهين تساوي مربع النسبة بين طولي اى ارتفاعين متناظرين فيهما

(٢) النسبة بين مساحتي سطحي مثلثين متشابهين تساوي مربع النسبة بين طولي اي متوسطين متناظرين فيهما

(٣) النسبة بين مساحتي سطحي مثلثين متشابهين تساوي مربع النسبة بين طولي اى منصفين متناظرين فيهما

(٤) النسبة بين مساحتي اى مثلثين غير متشابهين تساوي النسبة بين اى ضلعين فيهما × النسبة بين الارتفاعين المناظرين للضلعين

(٥) النسبة بين مساحتى مثلثين غير متشابهين ومتساويين فى القاعدة تساوي النسبة بين الارتفاعين المناظرين للقاعدتين

(٦) النسبة بين مساحتي سطحي مثلثين غير متشابهين ومتساويين فى الارتفاع تساوي النسبة بين القاعدتين المناظرتين للارتفاعين

(٧) النسبة بين محيطي اى مثلثين او اى مضلعين متشابهين تساوي النسبة بين طولي اى ضلعين متناظرين فيهما = معامل التشابه

مثال ١ : مضلعان متشابهان النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما ٢ : ٣ أوجد النسبة بين مساحتي سطحيهما وكذلك النسبة بين محيطيهما

الحل

$$\frac{\text{مساحة المضلع الاول}}{\text{مساحة المضلع الثاني}} = \left(\frac{\text{طول اى ضلع فى المضلع الاول}}{\text{طول الضلع المناظر له فى المضلع الثاني}}\right)^٢$$

$$\frac{\text{مساحة المضلع الاول}}{\text{مساحة المضلع الثاني}} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^٢ = \frac{٤}{٩}$$

$$\frac{\text{محيط المضلع الاول}}{\text{محيط المضلع الثاني}} = \frac{\text{طول اى ضلع فى المضلع الاول}}{\text{طول الضلع المناظر له فى المضلع الثاني}} = \frac{٢}{٣}$$

مثال ٢ : مضلعان متشابهان النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيهما ٣ : ٥ فإذا كان مجموع مساحتي سطحيهما ١٧٠ سم^٢ أوجد مساحة كلا منهما

الحل

$$\frac{\text{مساحة المضلع الاول}}{\text{مساحة المضلع الثاني}} = \left(\frac{ل_١}{ل_٢}\right)^٢$$

$$\frac{م_١}{م_٢} = \left(\frac{٣}{٥}\right)^٢ = \frac{٩}{٢٥} \Leftarrow م_١ = ٩ ك \quad م_٢ = ٢٥ ك$$

$$\because م_١ + م_٢ = ١٧٠$$

$$٩ ك + ٢٥ ك = ٧٠ \Leftarrow ٣٤ ك = ٧٠$$

$$ك = \frac{٧٠}{٣٤} = ٥ \text{ سم}^٢$$

مساحة الاول = $م_١ = ٩ ك = ٩ \times ٥ = ٤٥$ سم^٢

مساحة الثاني = $م_٢ = ٢٥ ك = ٢٥ \times ٥ = ١٢٥$ سم^٢

مثال ٣ : مضلعين متشابهين مساحة أحدهما ١٩٦ سم^٢ وطول أحد اضلاعه ٤ سم وكان طول الضلع المناظر له فى المضلع الثاني = ٨ سم أوجد مساحة المضلع الثاني

الحل

$$\frac{\text{مساحة المضلع الاول}}{\text{مساحة المضلع الثاني}} = \left(\frac{\text{طول اى ضلع فى المضلع الاول}}{\text{طول الضلع المناظر له فى المضلع الثاني}}\right)^٢$$

$$\frac{\text{مساحة المضلع الاول}}{\text{مساحة المضلع الثاني}} = \frac{١٩٦}{م_٢} = \left(\frac{٤}{٨}\right)^٢$$

$$\frac{١٩٦}{م_٢} = \left(\frac{١}{٢}\right)^٢ = \frac{١}{٤} \Leftarrow م_٢ = ٤ \times ١٩٦ = ٧٨٤ \text{ سم}^٢$$

مثال ٤ : س، ص، ع مضلعات متشابهة مرسومة على اضلاع مثلث أ ب جـ

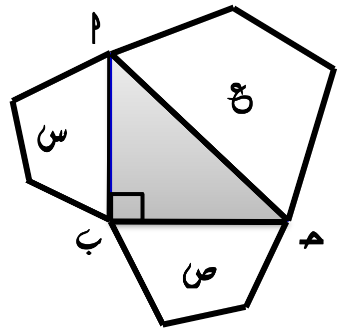
مساحة سطح المضلع س = ٢٧ سم^2

مساحة سطح المضلع ص = ٤٨ سم^2

مساحة سطح المضلع ع = ٧٥ سم^2

أثبت أن Δ أ ب جـ قائم فى ب

الحل



∵ المضلع س ~ المضلع ص ~ المضلع ع

∴ $\frac{\text{م(المضلع س)}}{\text{م(المضلع ع)}} = \left(\frac{\text{أب}}{\text{أجـ}}\right)^2$

$\frac{٢٧}{٧٥} = \frac{(\text{أب})^2}{(\text{أجـ})^2}$ ——— (١)

∴ $\frac{\text{م(المضلع ص)}}{\text{م(المضلع ع)}} = \left(\frac{\text{ب جـ}}{\text{أجـ}}\right)^2$

$\frac{٤٨}{٧٥} = \frac{(\text{ب جـ})^2}{(\text{أجـ})^2}$ ——— (٢)

بجمع (١) ، (٢) نجد أن :

$\frac{٢٧}{٧٥} + \frac{٤٨}{٧٥} = \frac{(\text{أب})^2}{(\text{أجـ})^2} + \frac{(\text{ب جـ})^2}{(\text{أجـ})^2}$

$\frac{٢٧+٤٨}{٧٥} = \frac{٧٥}{٧٥} = \frac{(\text{أب})^2 + (\text{ب جـ})^2}{(\text{أجـ})^2}$

$١ = \frac{(\text{أب})^2 + (\text{ب جـ})^2}{(\text{أجـ})^2}$

$(\text{أ ب})^2 + (\text{ب جـ})^2 = (\text{أ جـ})^2$

∴ أ ب جـ قائم الزاوية فى ب

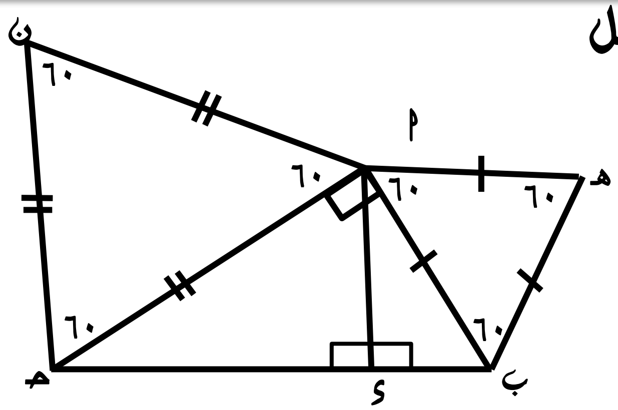
مثال ٥ : أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى أ رسم $\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ فقطعها فى ء , رسم المثلثان المتساويا الاضلاع أ ب هـ ، أ جـ ن خارج المثلث أ ب جـ

أثبت أن :

(١) الشكل الرباعي أ ء ب هـ ~ الشكل الرباعي جـ ء أ ن

(٢) $\frac{\text{م(أ ء ب هـ)}}{\text{م(جـ ء أ ن)}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{جـ ء}}$

الحل



∵ ق(∠ب أ جـ) = ٩٠ ، $\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$

∴ Δ ء ب أ ~ Δ ء أ جـ ——— (١)

∴ $\frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{جـ ء}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{أ ء}}$ ——— (٢)

∵ Δ أ هـ ب ، Δ أ جـ ن متساويا الاضلاع

∴ Δ أ هـ ب ~ Δ أ جـ ن ——— (٣)

$\overline{\text{أ ب}}$ يناظر $\overline{\text{أ جـ}}$ ——— (٤)

من (١) ، (٣) ، (٤) نجد أن :

المضلع أ ء ب هـ ~ المضلع جـ ء أ ن

ومن نواتج التشابه :

$\frac{\text{م(المضلع أ ء ب هـ)}}{\text{م(المضلع جـ ء أ ن)}} = \frac{(\text{ب ء})^2}{(\text{أ ء})^2} = \frac{\text{ب ء}}{\text{أ ء}} \times \frac{\text{ب ء}}{\text{أ ء}}$

$= \frac{\text{ب ء}}{\text{أ ء}} \times \frac{\text{أ ء}}{\text{جـ ء}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{جـ ء}}$

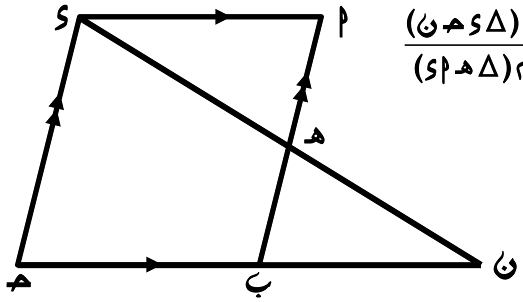
تدريب ١ : فى الشكل المقابل

أ ب جـ د **متوازي أضلاع** ، هـ ∈ $\overline{\text{أب}}$

حيث $\frac{\text{أهـ}}{\text{هـب}} = \frac{٣}{٢}$ ، $\overleftrightarrow{\text{دهـ}} \cap \overleftrightarrow{\text{جـب}}$ = { ن }

(١) أثبت أن : Δ د جـ ن ~ Δ هـ أ د

(٢) أوجد $\frac{\text{م}(\Delta\,\text{د جـ ن})}{\text{م}(\Delta\,\text{هـ أ د})}$



تدريب ٢ : أ ب جـ د شكل رباعي فيه

ب جـ = ٢٧ سم أ ب = ١٢ سم ، أ د = ٨ سم

، د جـ = ١٢ سم أ جـ = ١٨ سم

أثبت أن :

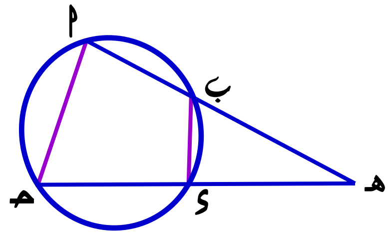
Δ ب أ جـ ~ Δ أ د جـ **ثم أوجد النسبة بين مساحتيهما**

تطبيقات التشابه فى الدائرة

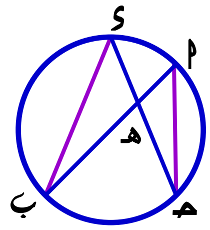
تمرين مشهور :

إذا تقاطع المستقيمان الحاويان للوترين أب ، جـ د فى نقطة { هـ } داخل الدائرة او خارجها فإنه يكون
أ هـ × هـ ب = هـ جـ × هـ د

فى الشكل المقابل :-
أ ب ∩ جـ د = { هـ }



شكل ٢



شكل ١

فى الشكل المقابل (١) ، (٢)
Δ هـ أ جـ ∼ Δ هـ د ب لماذا ؟
ومن نواتج التشابه :

هـأ / هـد = أجـ / دب = هـجـ / هـب ⟸ هـأ / هـد = هـجـ / هـب

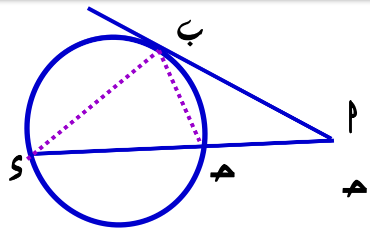
فيكون : أ هـ × هـ ب = هـ جـ × هـ د

أى أن :
إذا تقاطع وتران داخل الدائرة او خارجها فإن حاصل ضرب جزئي الوتر الاول يساوي حاصل ضرب جزئي الوتر الثاني

نتيجة ١

إذا رسم من نقطة خارج الدائرة قاطع ومماس للدائرة فإن حاصل ضرب طول القاطع فى جزئه الخارجي يساوي مربع طول المماس

فى الشكل المقابل
أ ب مماس للدائرة عند النقطة ب
د جـ قاطع لها فى د ، جـ



Δ أ ب جـ ∼ Δ أ د ب
ومن نواتج التشابه :

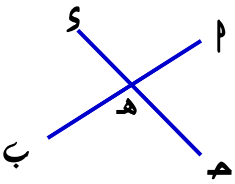
أب / أد = بجـ / دب = أجـ / أب ⟸ أب / أد = أجـ / أب

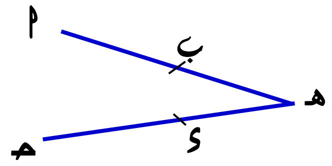
لذا فإنه يكون :
(أ ب)² = أ د × أ جـ

عكس تمرين مشهور

إذا تقاطع المستقيمان الحاويان للوترين أ ب ، جـ د فى نقطة أخري { هـ } وكان أ هـ × هـ ب = هـ جـ × هـ د فإن النقاط أ ، ب ، جـ ، د تقع على دائرة واحدة ويكون الشكل أ ب جـ د شكل رباعي دائري

فى الشكل المقابل :-





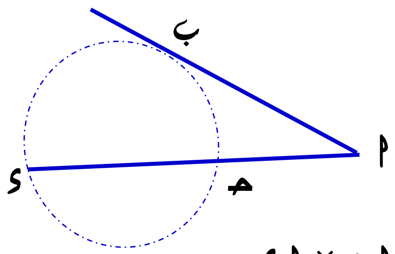
إذا كان أ هـ × هـ ب = هـ جـ × هـ د فإن النقاط أ ، ب ، جـ ، د تقع على دائرة واحدة ويكون الشكل أ ب جـ د رباعي دائري

أذكر جميع الحالات التي يكون فيها الشكل أ ب جـ د رباعي دائري ؟

نتيجة ٢ ﴿ عكس نتيجة ١ ﴾

إذا كان أ ب ∩ د جـ = { أ } وكان (أ ب)² = أ د × أ جـ فإن أ ب يكون مماسا للدائرة المارة بالنقط ب ، جـ ، د

فى الشكل المقابل :

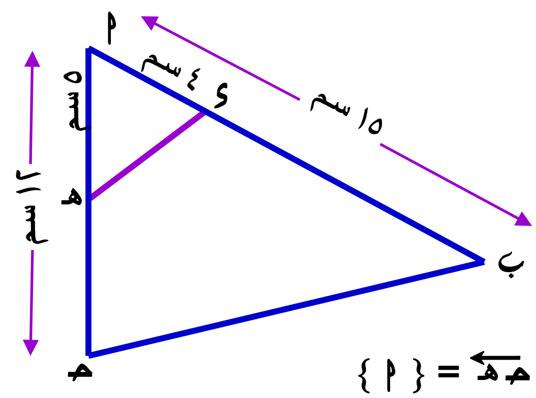


إذا كان (أ ب)² = أ جـ × أ د فإن : أ ب يكون مماسا للدائرة المارة برؤوس المثلث ب جـ د

أذكر جميع الحالات التي يكون فيها أ ب مماسا للدائرة المارة برؤوس المثلث ؟

مثال ١ : Δ أ ب جـ فيه أ ب = ١٥ سم ، أ جـ = ١٢ سم ، ء ∈ أ ب حيث أ ء = ٤ سم ، هـ ∈ أ جـ حيث أ هـ = ٥ سم أثبت أن : الشكل ء ب جـ هـ رباعي دائري

الحل



∵ ب ء ∩ جـ هـ = { أ }

أ ء × أ ب = ٤ × ١٥ = ٦٠ سم²

أ هـ × أ جـ = ٥ × ١٢ = ٦٠ سم²

∴ أ ء × أ ب = أ هـ × أ جـ

∴ ء ب جـ هـ رباعي دائري

يمكن اثبات الشكل باستخدام التشابه حيث

Δ أ ء هـ ~ Δ أ جـ ب   لماذا ؟

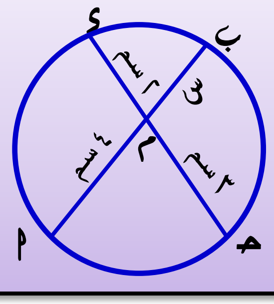
مثال ٢ : فى الشكل المقابل

أ ب ∩ جـ ء = { م }

، م أ = ٤ سم

م جـ = ٣ سم ،

م ء = ٢ سم أوجد طول ب م



الحل

∵ أ ب ∩ جـ ء = { م } ، م داخل الدائرة

∴ ب م × م أ = م جـ × م ء

∴ س × ٤ = ٣ × ٢

⟸ ٤ س = ٦ ⟸ س = ٦/٤ = ١,٥ سم

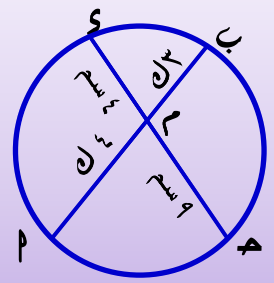
مثال ٣ : فى الشكل المقابل

أ ب ∩ جـ ء = { م }

، وإذا كان أ م / م ب = ٤/٣ ،

م ء = ٤ سم ، م جـ = ٩ سم

أوجد طول ب م



الحل

∵ أ م / ب م = ٤/٣ ⟸ م أ = ٤ ك ، م ب = ٣ ك

∵ أ ب ∩ جـ ء = { م } ، م داخل الدائرة

∴ ب م × م أ = م جـ × م ء

∴ ٣ك × ٤ ك = ٤ × ٩

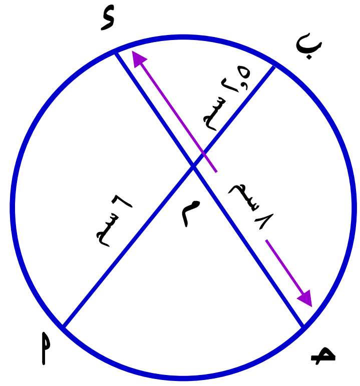
١٢ ك² = ٣٦

⟸ ك² = ٣٦/١٢ = ٣ ⟸ ك = √٣

ب م = ٣√٣ ، م أ = ٤√٣

مثال ٤ : أ ب ، جـ ء وتران فى دائرة متقاطعان فى م فإذا كان أ م = ٦ سم ، م ب = ٢,٥ سم ، جـ ء = ٨ سم ، أوجد جـ م ، م ء

الحل



جـ م + م ء = ٨

جـ م = ٨ - م ء

∵ أ ب ∩ جـ ء = { م } ، م داخل الدائرة

∴ جـ م × م ء = ب م × م أ

(٨ - م ء) × م ء = ٢,٥ × ٦

٨ م ء - (م ء)² = ١٥

(م ء)² - ٨(م ء) + ١٥ = ٠

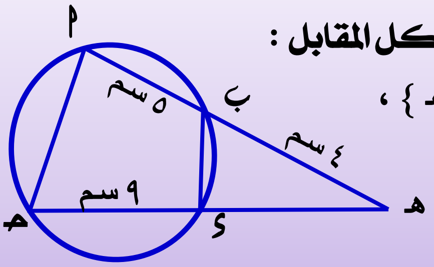
(م ء - ٣) (م ء - ٥) = ٠

م ء = ٣ سم   أ، م ء = ٥ سم

جـ م = ٨ - ٣ = ٥ سم   جـ م = ٨ - ٥ = ٣ سم

مثال ٥ : فى الشكل المقابل :

أب ∩ حـ ى = { هـ } ،
أ ب = ٥ سم
حـ ى = ٩ سم ،
ب هـ = ٤ سم
أوجد طول هـ ى

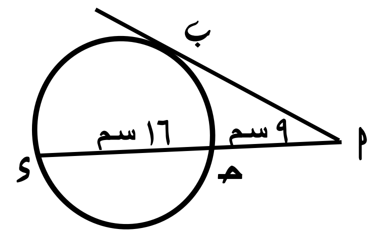


الحل

∵ أب ∩ حـ ى = { هـ } ، هـ خارج الدائرة
∴ هـ ى × هـ حـ = هـ ب × هـ أ
وبفرض أن هـ ى = س
⟸ هـ ى × هـ حـ = هـ ب × هـ أ
س (س + ٩) = ٤ × (٤ + ٥)
س² + ٩ س = ٣٦
س² + ٩ س − ٣٦ = ٠
(س − ١٢) (س + ٣) = ٠
س = ١٢ ، س = -٣ مرفوضة
∴ هـ ى = ١٢ سم

مثال ٦ : أ نقطة خارج الدائرة ، أ ب مماس للدائرة عند ب ، أ حـ قاطع للدائرة عند حـ ، ى فإذا كان أ ى = ٩ سم ، ى حـ = ١٦ سم أوجد طول أ ب

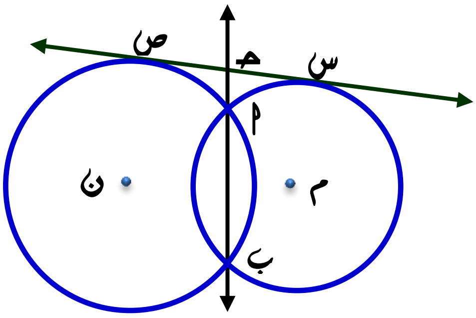
الحل



∵ أب مماس للدائرة عند ب ، أ حـ قاطع للدائرة عند حـ ، ى
∴ (أ ب)² = أ حـ × أ ى
(أ ب)² = ٩ × (٩ + ١٦)
(أ ب)² = ٩ × ٢٥ = ٢٢٥
أ ب = √٢٢٥ = ١٥ سم

مثال ٧ : دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب رسم مماس مشترك يمسهما فى س ، ص فإذا كان
أب ∩ س ص = { حـ }
أثبت أن : حـ منتصف س ص

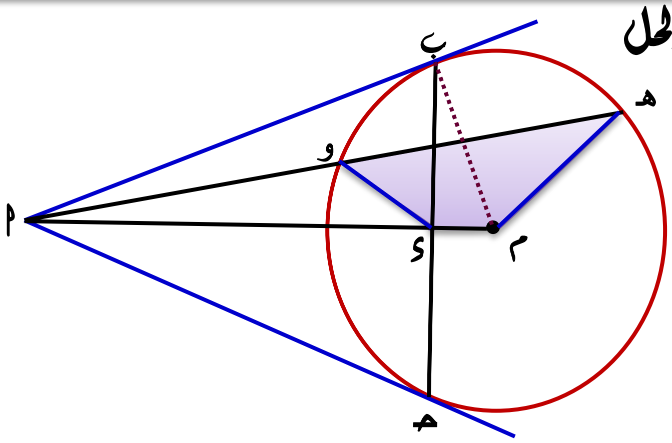
الحل



∵ حـ س مماس للدائرة م ، حـ ب قاطع لها عند أ ، ب
∴ (حـ س)² = حـ أ × حـ ب —— (١)
∵ حـ ص مماس للدائرة ن ، حـ ب قاطع لها عند أ ، ب
∴ (حـ ص)² = حـ أ × حـ ب —— (٢)
من (١) ، (٢) نجد أن :
(حـ س)² = (حـ ص)²
حـ س = حـ ص ∴ حـ منتصف س ص

مثال ٨ : أ نقطة خارج الدائرة م ، رسم من أ قطعتان مماستان تمسانها عند ب ، حـ ورسمت أ م فقطعت ب حـ فى ى ، ورسمت أ هـ قاطعة للدائرة فى و ، هـ
أثبت أن : هـ م ى و رباعي دائري

الحل



العمل : نرسم ب م نصف قطر

البرهان :

∵ أ ب مماس للدائرة م عند ب ، م ب نصف قطر
∴ أ ب ⊥ م ب ، ق(∠م ب أ) = ٩٠°
∵ أ ب ، أ حـ مماسين عند ب ، حـ ، ب حـ وتر التماس
∴ أ م ⊥ ب حـ
∵ ق(∠م ب أ) = ٩٠° ، ب ى ⊥ م أ
∴ Δ ب م أ ~ Δ ى ب أ
∴ (أ ب)² = أ ى × أ م —— (١)

∵ $\overline{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة م ، $\overline{\text{أ هـ}}$ قاطع لها فى و ، هـ

∴ $(\text{أ ب})^2$ = أ و × أ هـ ——— (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن :

$(\text{أ ب})^2$ = أ ء × أ م = أ و × أ هـ

∴ أ ء × أ م = أ و × أ هـ

∴ ء م هـ و رباعي دائري

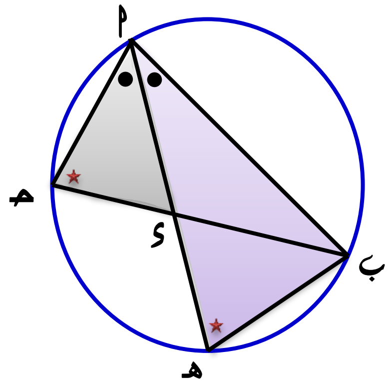
مثال ٩ : أ ب حـ Δ مرسوم داخل دائرة ، $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ب أ حـ ويقطع $\overline{\text{ب حـ}}$ فى ء ويقطع الدائرة فى هـ

أثبت أن :

(١) Δ أ حـ ء ~ Δ أ هـ ب

(٢) أ ب . أ حـ = ب ء . ء حـ + $(\text{أ ء})^2$

الحل



∵ $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ب أ حـ ∴ ق(ب أ̂ هـ)=ق(حـ أ ء)

∵ ∠هـ ، ∠حـ محيطيتان مرسومتان على القوس $\frown{\text{أ ب}}$

∴ ق(∠هـ) = ق(∠حـ)

∴ Δ أ ب هـ ، Δ أ ء حـ

ق(∠ب أ هـ) = ق(∠حـ أ ء)

فيهما ق(∠هـ) = ق(∠حـ)

∴ Δ أ ب هـ ~ Δ أ ء حـ ⟸ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ء}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{ء حـ}} = \frac{\text{هـ أ}}{\text{حـ أ}}$

$\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ء}} = \frac{\text{هـ أ}}{\text{حـ أ}}$ ⟸ أ ء × أ هـ = أ ب × أ حـ

أ ء × (أ ء + ء هـ) = أ ب × أ حـ

$(\text{أ ء})^2$ + أ ء × ء هـ = أ ب × أ حـ ——— (١)

∵ $\overline{\text{أ هـ}} \cap \overline{\text{ب حـ}}$ = { ء }

∴ ب ء × ء حـ = أ ء × ء هـ ——— (٢)

بالتعويض من (٢) فى (١)

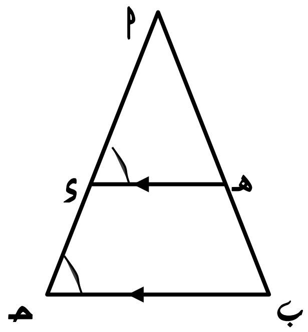
$(\text{أ ء})^2$ + ب ء × ء حـ = أ ب × أ حـ

التناسب

نظرية ١

إذا رسم مستقيم يوازي احد اضلاع المثلث ويقطع الضلعين الاخرين فإنه يقسمهما الى قطع اطوالها متناسبة

فى الشكل المقابل :-



إذا كان $\overline{\text{هـ ء}} // \overline{\text{ب جـ}}$ فإن :

(١) $\frac{\text{أهـ}}{\text{أب}} = \frac{\text{أء}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{هـء}}{\text{بجـ}}$

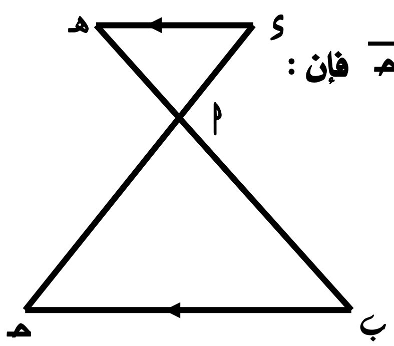
(٢) $\frac{\text{أهـ}}{\text{هـب}} = \frac{\text{أء}}{\text{ءجـ}}$

(٣) $\frac{\text{هـب}}{\text{أب}} = \frac{\text{ءجـ}}{\text{أجـ}}$

نتيجة :-

إذا رسم مستقيم خارج مثلث أ ب جـ يوازي ضلعا من اضلاع مثلث وليكن $\overline{\text{ب جـ}}$ ويقطع $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ في هـ ، ء على الترتيب فإن

فى الشكل المقابل :-



إذا كان $\overline{\text{هـ ء}} // \overline{\text{ب جـ}}$ فإن :

(١) $\frac{\text{أهـ}}{\text{أب}} = \frac{\text{أء}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{هـء}}{\text{بجـ}}$

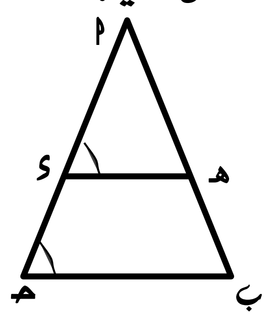
(٢) $\frac{\text{أهـ}}{\text{هـب}} = \frac{\text{أء}}{\text{ءجـ}}$

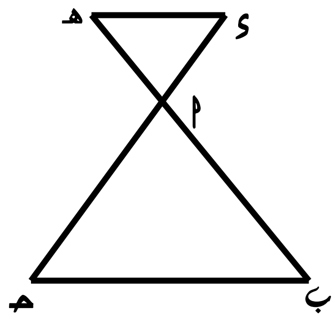
(٣) $\frac{\text{هـب}}{\text{أب}} = \frac{\text{ءجـ}}{\text{أجـ}}$

عكس نظرية

إذا قطع مستقيم ضلعين فى مثلث وقسمهما من الداخل او الخارج الى قطع اطوالها متناسبة فإنه يوازي الضلع الثالث

فى الاشكال الاتية :





إذا كان :

(١) $\frac{\text{أهـ}}{\text{أب}} = \frac{\text{أء}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{هـء}}{\text{بجـ}}$ أو (٢) $\frac{\text{أهـ}}{\text{هـب}} = \frac{\text{أء}}{\text{ءجـ}}$ أو

(٣) $\frac{\text{هـب}}{\text{أب}} = \frac{\text{ءجـ}}{\text{أجـ}}$

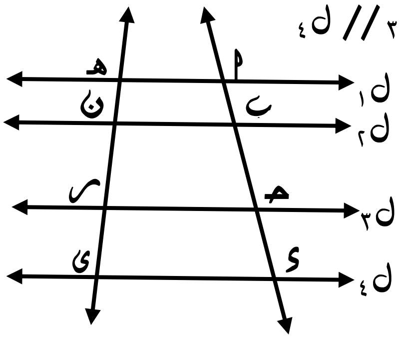
$\Longleftarrow$ فإن $\overline{\text{هـ ء}} // \overline{\text{ب جـ}}$

وهذه النظرية تأتى كنتيجة لتشابه المثلثين أ هـ ء ، أ ب جـ

نظرية تاليس العامة

إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمات متوازية ، فإن أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع اطوال القطع الناتجة على القاطع الاخر

فى الشكل المقابل :-



إذا كان $ل_1 // ل_2 // ل_3 // ل_4$

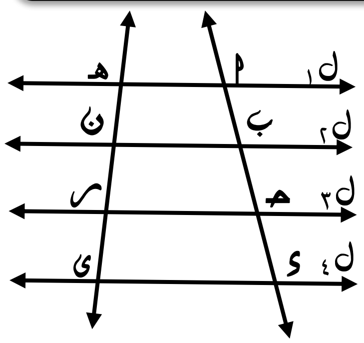
فإن : -

$\frac{\text{هـ ى}}{\text{أ ء}} = \frac{\text{ن ى}}{\text{ب ء}} = \frac{\text{هـ س}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{هـ ن}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{ن س}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{س ى}}{\text{جـ ء}}$

نظرية تاليس الخاصة

إذا قطع مستقيم عدة مستقيمات متوازية و كانت أجزاء القاطع المحصورة بين هذه المستقيمات المتوازية متساوية في الطول فأن الأجزاء المحصورة بينها لأي قاطع آخر تكون متساوية في الطول أيضا

فى الشكل المقابل :-



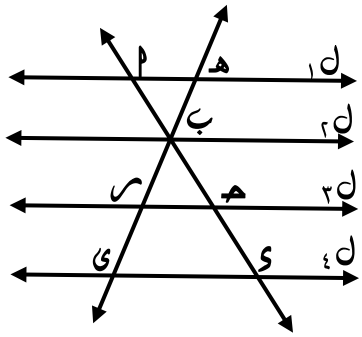
إذا كان :

$ل_1 // ل_2 // ل_3 // ل_4$

أ ب = ب جـ = جـ ء

فإن :

هـ ن = ن س = س ى



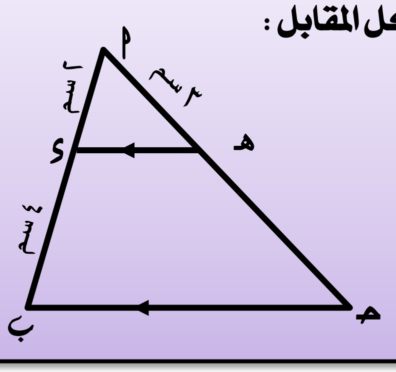
إذا كان :

$ل_1 // ل_2 // ل_3 // ل_4$

$\frac{\text{هـ ب}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{ب س}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{س ى}}{\text{جـ ء}}$

مثال ١ : فى الشكل المقابل :

△ أ ب جـ فيه
د هـ // ب جـ ،
أ د = ٢ سم
د ب = ٤ سم ،
أ هـ = ٣ سم
أوجد طول هـ جـ



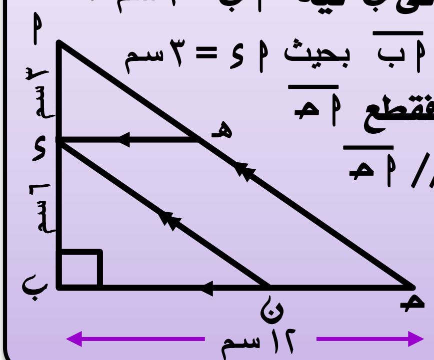
الحل

∵ د هـ // ب جـ ∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{\text{أ د}}{\text{د ب}}$

⟸ $\frac{٣}{\text{هـ جـ}} = \frac{٢}{٤}$ ⟸ هـ جـ = $\frac{٣ \times ٤}{٢}$ = ٦ سم

مثال ٢ : فى الشكل المقابل

أ ب جـ △ قائم الزاوية فى ب فيه أ ب = ٩ سم ،
ب جـ = ١٢ سم ، د ∈ أ ب بحيث أ د = ٣ سم
رسم د هـ // ب جـ فقطع أ جـ
فى هـ ثم رسم د ن // أ جـ
فقطع ب جـ فى ن
أوجد طول كلا من
أ جـ ، أ هـ ، ب ن



الحل

∵ أ ب جـ قائم فى ب ومن فيثاغورث

$(\text{أ جـ})^2 = (\text{أ ب})^2 + (\text{ب جـ})^2$

أ جـ = $\sqrt{١٢^2 + ٩^2} = \sqrt{١٤٤ + ٨١} = \sqrt{٢٢٥} = ١٥$

∵ هـ د // جـ ب ∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{أ د}}{\text{أ ب}}$

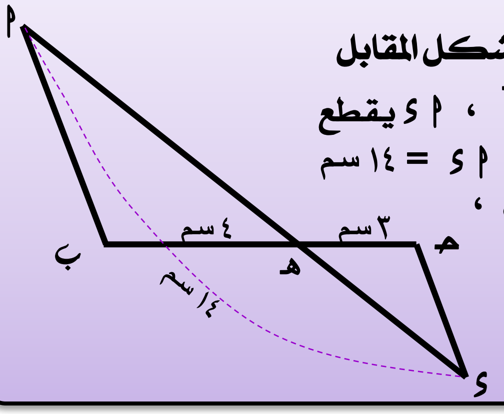
⟸ $\frac{\text{أ هـ}}{١٥} = \frac{٣}{٩}$ ⟸ أ هـ = $\frac{٣ \times ١٥}{٩}$ = ٥ سم

∵ د ن // أ جـ ∴ $\frac{\text{ب ن}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{ب د}}{\text{ب أ}}$

⟸ $\frac{\text{ب ن}}{١٢} = \frac{٦}{٩}$ ⟸ ب ن = $\frac{١٢ \times ٦}{٩}$ = ٨ سم

مثال ٣ فى الشكل المقابل

أ ب // جـ د ، أ د يقطع
ب جـ فى هـ ، أ د = ١٤ سم
، ب هـ = ٤ سم ،
هـ جـ = ٣ سم
أوجد طول
أ هـ ، هـ د



الحل

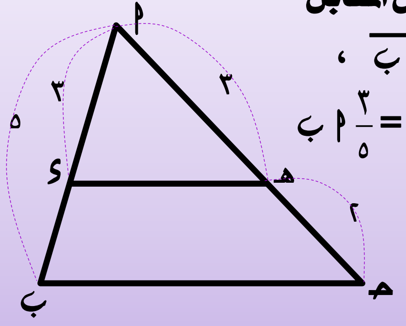
∵ جـ د // أ ب ∴ $\frac{\text{هـ د}}{\text{د أ}} = \frac{\text{هـ جـ}}{\text{جـ ب}}$

⟸ $\frac{\text{هـ د}}{١٤} = \frac{٣}{٧}$ ∴ هـ د = $\frac{١٤ \times ٣}{٧}$ = ٦ سم

∴ أ هـ = ١٤ − ٦ = ٨ سم

مثال ٤ : فى الشكل المقابل

أ ب جـ △ فيه د ∈ أ ب ،
هـ ∈ أ جـ بحيث أ د = $\frac{٣}{٥}$ أ ب
، هـ جـ = $\frac{٢}{٣}$ أ هـ
أثبت أن
د هـ // ب جـ



الحل

∵ أ د = $\frac{٣}{٥}$ أ ب ∴ $\frac{\text{أ د}}{\text{أ ب}} = \frac{٣}{٥}$ —— (١)

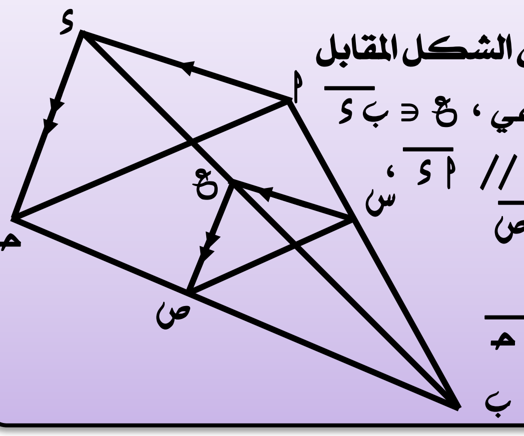
∵ هـ جـ = $\frac{٢}{٣}$ أ هـ ∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{أ جـ}} = \frac{٣}{٢+٣} = \frac{٣}{٥}$ —— (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن :

∵ $\frac{\text{أ د}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{أ جـ}}$ ∴ د هـ // ب جـ

مثال ٥ : فى الشكل المقابل

أ ب جـ د رباعي ، ع ∈ ب د
، رسم س ع // أ د ،
د جـ // ع ص
أثبت أن :
س ص // أ جـ



الحل

في الـ Δ أ ب د :

∵ $\overline{\text{س ع}} \parallel \overline{\text{أ د}}$ ∴ $\frac{\text{ب س}}{\text{ب أ}} = \boxed{\frac{\text{ب ع}}{\text{ب د}}}$ —— (١)

في الـ Δ د ب هـ :

∵ $\overline{\text{ص ع}} \parallel \overline{\text{د هـ}}$ ∴ $\frac{\text{ب ص}}{\text{ب هـ}} = \boxed{\frac{\text{ب ع}}{\text{ب د}}}$ —— (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن :

⟸ $\frac{\text{ب س}}{\text{ب أ}} = \frac{\text{ب ص}}{\text{ب هـ}}$ ∴ $\overline{\text{س ص}} \parallel \overline{\text{أ هـ}}$

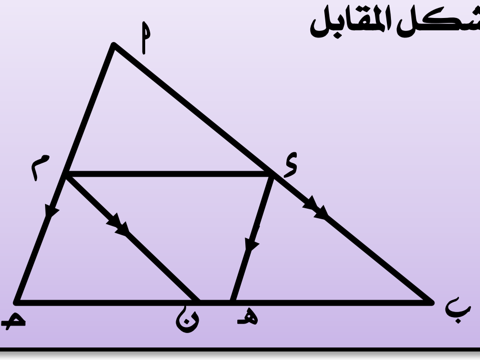
مثال ٦ : في الشكل المقابل

$\overline{\text{هـ د}} \parallel \overline{\text{أ جـ}}$

، $\overline{\text{ن م}} \parallel \overline{\text{أ ب}}$

، ب هـ = ن جـ

أثبت أن : $\overline{\text{د م}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$



الحل

∵ $\overline{\text{هـ د}} \parallel \overline{\text{أ جـ}}$ ∴ $\boxed{\frac{\text{ب هـ}}{\text{ب جـ}}} = \frac{\text{ب د}}{\text{ب أ}}$ —— (١)

∵ $\overline{\text{ن م}} \parallel \overline{\text{أ ب}}$ ∴ $\boxed{\frac{\text{جـ ن}}{\text{جـ ب}}} = \frac{\text{جـ م}}{\text{جـ أ}}$ —— (٢)

∵ ب هـ = ن جـ ∴ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{جـ ن}}{\text{جـ ب}}$

∴ $\frac{\text{ب د}}{\text{ب أ}} = \frac{\text{جـ م}}{\text{جـ أ}}$ ∴ $\overline{\text{د م}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$

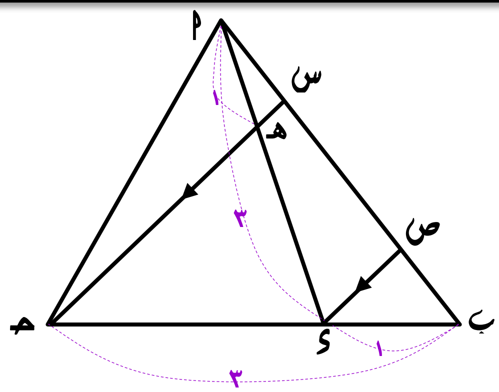
مثال ٧ : أ ب جـ Δ فيه د ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ بحيث

ب د = $\frac{١}{٣}$ ب جـ ، هـ ∈ $\overline{\text{أ د}}$ بحيث أ هـ = $\frac{١}{٣}$ أ د ، رسم

جـ هـ فقطع $\overline{\text{أ ب}}$ في س رسم $\overleftarrow{\text{د ص}} \parallel \overleftarrow{\text{هـ جـ}}$

فقطع $\overline{\text{أ ب}}$ في ص أثبت أن : أ س = ب ص

الحل



في الـ Δ أ ص د :

∵ $\overline{\text{س هـ}} \parallel \overline{\text{ص د}}$ ∴ $\frac{\text{أ س}}{\text{س ص}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ د}} = \boxed{\frac{١}{٢}}$ —— (١)

في الـ Δ س ب جـ :

∵ $\overline{\text{ص د}} \parallel \overline{\text{س جـ}}$ ∴ $\frac{\text{ب ص}}{\text{ص س}} = \frac{\text{ب د}}{\text{د جـ}} = \boxed{\frac{١}{٢}}$ —— (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن :

∴ $\frac{\text{أ س}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب ص}}{\text{س ص}}$ ⟸ أ س = ب ص

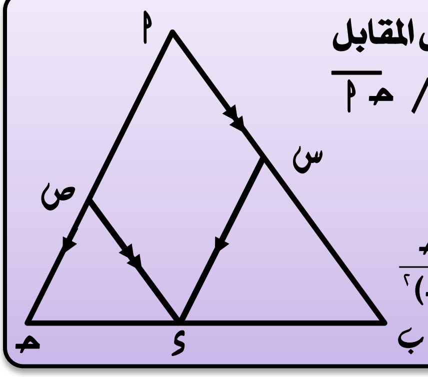
مثال ٨ : في الشكل المقابل

أ ب جـ Δ فيه $\overline{\text{د س}} \parallel \overline{\text{أ جـ}}$

، $\overline{\text{د ص}} \parallel \overline{\text{أ ب}}$

أثبت أن :

$$\frac{\text{أ س . أ ص}}{\text{ب أ . أ جـ}} = \frac{\text{ب د . د جـ}}{(\text{ب د} + \text{د جـ})^٢}$$



الحل

∵ $\overline{\text{د س}} \parallel \overline{\text{أ جـ}}$ ∴ $\frac{\text{أ س}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{جـ د}}{\text{جـ ب}}$ —— (١)

∵ $\overline{\text{د ص}} \parallel \overline{\text{أ ب}}$ ∴ $\frac{\text{أ ص}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{ب د}}{\text{ب جـ}}$ —— (٢)

بضرب (١) ، (٢) نجد أن :

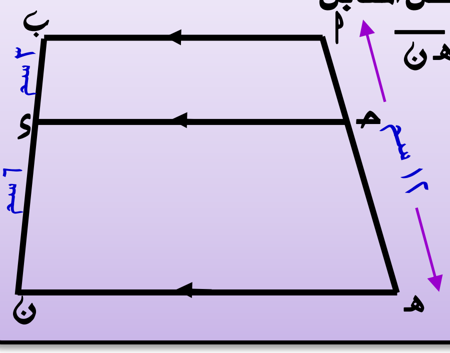
⟸ $\frac{\text{أ س}}{\text{أ ب}} \times \frac{\text{أ ص}}{\text{أ جـ}} = \times \frac{\text{ب د}}{\text{ب جـ}}$

$\frac{\text{أ س . أ ص}}{\text{ب أ . أ جـ}} = \frac{\text{جـ د . د ب}}{(\text{ب جـ})^٢}$ ولكن ب جـ = ب د + د جـ

∴ $\frac{\text{أ س . أ ص}}{\text{ب أ . أ جـ}} = \frac{\text{ب د . د جـ}}{(\text{ب د} + \text{د جـ})^٢}$

مثال ٩ : فى الشكل المقابل

أب // ءجـ // هـن
ب ء = ٣ سم
ء ن = ٦ سم
أ هـ = ١٢ سم
أوجد طول جـ هـ



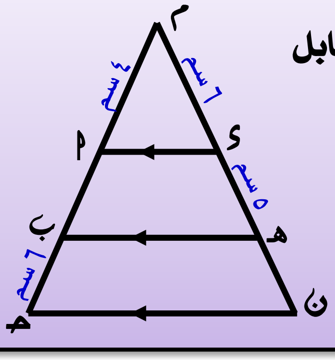
الحل

∵ أب // ءجـ // هـن ∴ $\frac{\text{جـ هـ}}{\text{ء ن}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{ب ن}}$ (تاليس)

⇐ $\frac{\text{جـ هـ}}{٦} = \frac{١٢}{٩}$ ⇐ جـ هـ = $\frac{٦ \times ١٢}{٩}$ = ٨ سم

مثال ١٠ : فى الشكل المقابل

جـن // ب هـ // أ ء
أ م = ٤ سم ، ب جـ = ٦ سم
ء م = ٦ سم ، ء هـ = ٥ سم
أوجد طول أ ب ، هـ ن



الحل

∵ جـن // ب هـ // أ ء

∴ $\frac{\text{هـ ن}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{ء م}}{\text{أ م}}$ (تاليس)

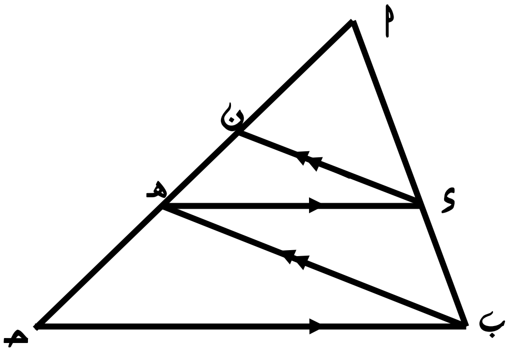
⇐ $\frac{\text{هـ ن}}{٦} = \frac{٥}{\text{أ ب}} = \frac{٦}{٤}$

∴ هـ ن = $\frac{٦ \times ٦}{٤}$ = ٩ سم ، أ ب = $\frac{٥ \times ٤}{٦}$ = ٣ $\frac{١}{٣}$ سم

مثال ١١ : أ ب جـ Δ فيه ء ∈ أب ،

رسم ء هـ // ب جـ ويقطع أ جـ فى هـ ،
رسم ء ن // ب هـ ويقطع أ جـ فى ن
أثبت أن : (أ هـ)^٢ = أ جـ × أ ن

الحل



∵ ء هـ // ب جـ ∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{أ جـ}} = \boxed{\frac{\text{أ ء}}{\text{أ ب}}}$ —— (١)

∵ ء ن // ب هـ ∴ $\frac{\text{أ ن}}{\text{أ هـ}} = \boxed{\frac{\text{أ ء}}{\text{أ ب}}}$ —— (٢)

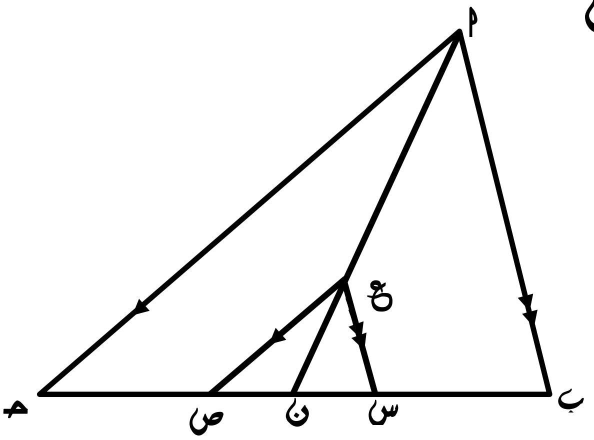
من (١) ، (٢) نجد أن :

$\frac{\text{أ هـ}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{أ ن}}{\text{أ هـ}}$ ⇐ (أ هـ)^٢ = أ جـ × أ ن

مثال ١٢ : أ ب جـ Δ ، ن منتصف ب جـ ، فرضت

نقطة على أن (ع) رسم ع س // أ ب
ويقطع ب جـ فى س ، ورسم ع ص // أ جـ
ويقطع ب جـ فى ص
(١) أثبت أن : س ن = ص ن
(٢) وإذا كانت ع هي نقطة تلاقى متوسطات المثلث
أ ب جـ أثبت أن س ص = $\frac{١}{٣}$ ب جـ

الحل



∵ ن منتصف ب جـ ∴ ب ن = ن جـ —— (١)

∵ ع س // أ ب ∴ $\frac{\text{ن س}}{\text{ن ب}} = \boxed{\frac{\text{ن ع}}{\text{ن أ}}}$ —— (٢)

∵ ع ص // أ جـ ∴ $\frac{\text{ن ص}}{\text{ن جـ}} = \boxed{\frac{\text{ن ع}}{\text{ن أ}}}$ —— (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) نجد أن :

$$\frac{\text{ن س}}{\text{ن ب}} = \frac{\text{ن ص}}{\text{ن هـ}} \Leftarrow \text{ن س} = \text{ن ص}$$

وإذا كانت ع نقطة تقاطع المتوسطات

فإنه من (٢) ، (٣) :

☺ $\frac{\text{ن س}}{\text{ن ب}} = \frac{\text{ن ع}}{\text{ن أ}} = \frac{١}{٣} \Leftarrow \text{ن س} = \frac{١}{٣}\,\text{ن ب}$ —— (٤)

☺ $\frac{\text{ن ص}}{\text{ن هـ}} = \frac{\text{ن ع}}{\text{ن أ}} = \frac{١}{٣} \Leftarrow \text{ن س} = \frac{١}{٣}\,\text{ن هـ}$ —— (٥)

بجمع (٤) ، (٥) :

$$\text{ن س} + \text{ن ص} = \frac{١}{٣}\,\text{ن ب} + \frac{١}{٣}\,\text{ن هـ}$$

$$= \frac{١}{٣}\,(\text{ن ب} + \text{ن هـ})$$

$$\therefore \text{س ص} = \frac{١}{٣}\,\text{ب هـ}$$

مثال ١٣ : فى الشكل المقابل

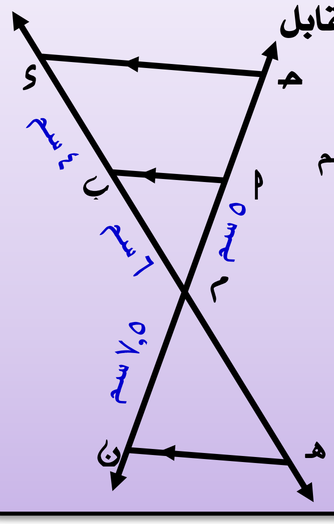
$\overline{\text{جـ ء}} \,//\, \overline{\text{أ ب}} \,//\, \overline{\text{هـ ن}}$

م ن = ٧,٥ سم ، م ب = ٦ سم

ب ء = ٤ سم ، أ م = ٥ سم

أوجد طول

$\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{م هـ}}$



الحل

$\because \overline{\text{جـ ء}} \,//\, \overline{\text{أ ب}} \,//\, \overline{\text{هـ ن}}$

$\therefore \frac{\text{أ جـ}}{\text{ب ء}} = \frac{\text{أ م}}{\text{ب م}} = \frac{\text{م ن}}{\text{م هـ}}$ (تاليس)

$\Leftarrow \frac{\text{أ جـ}}{٤} = \frac{٥}{٦} = \frac{٧,٥}{\text{م هـ}}$

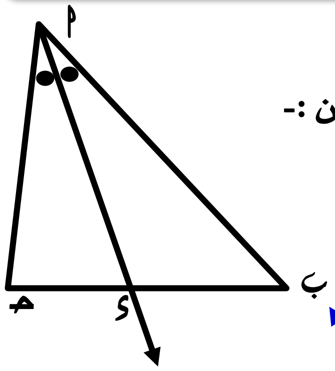
☺ $\text{أ جـ} = \frac{٤ \times ٥}{٦} = ٣\frac{١}{٣}$ سم

☺ $\text{م هـ} = \frac{٧,٥ \times ٦}{٥} = ٩$ سم

منصفا الزاوية والاجزاء المتناسبة

نظرية ٣ :

إذا نصفت زاوية رأس المثلث أو الزاوية الخارجه له عند هذا الرأس فإن المنصف يقسم القاعدة من الداخل او الخارج الى جزأين النسبة بينهما تساوي النسبة بين الضلعين الاخرين

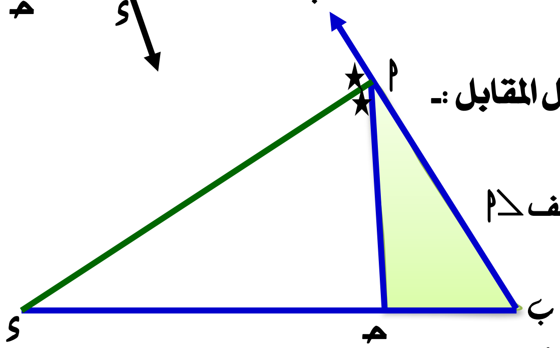


فى الشكل المقابل :-

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠أ فإن :-

$\frac{\text{ب أ}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ء هـ}}$ أو

ب أ × ء هـ = أ هـ × ب ء



فى الشكل المقابل :-

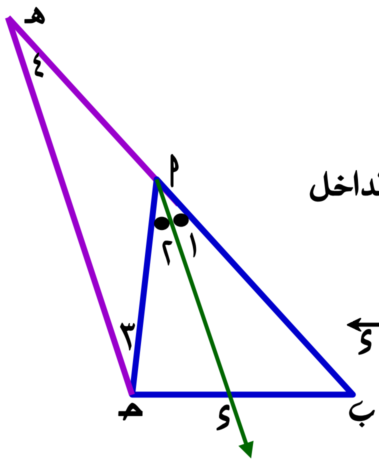
إذا كان $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠أ

فإن :-

$\frac{\text{ب أ}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ء هـ}}$ أو

ب أ × ء هـ = أ هـ × ب ء

إثبات النظرية



المعطيات : أ ب هـ Δ ، $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠أ من الداخل

المطلوب : $\frac{\text{ب أ}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ء هـ}}$

العمل : نرسم $\overleftrightarrow{\text{هـ هـ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ويقطع $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ فى هـ

البرهان

∵ $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ب أ هـ ∴ ∠١ ≡ ∠٢ ــــ (١)

∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ // $\overleftrightarrow{\text{هـ هـ}}$ ، $\overline{\text{أ هـ}}$ ، $\overline{\text{أ هـ}}$ قواطع لهما

∴ ∠٢ ≡ ∠٣ بالتبادل ــ (٢)

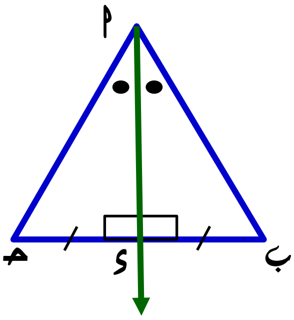
∴ ∠١ ≡ ∠٤ بالتناظر ــ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) نجد أن:

∠٣ ≡ ∠٤ ∴ أ هـ = أ هـ

∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ // $\overleftrightarrow{\text{هـ هـ}}$ ∴ $\frac{\text{ب أ}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ء هـ}}$ ⟸ $\frac{\text{ب أ}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ء هـ}}$

ملاحظات مهمة :



(١) إذا كان أ ب = أ هـ

وكان $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف

∠أ من الداخل فإن:

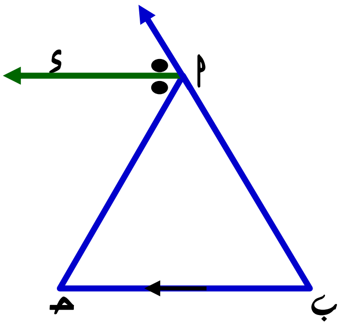
$\overrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف القاعدة

ويكون عموديا عليها

أى يكون متوسط فى المثلث ويكون ارتفاع ايضا

(٢) إذا كان أ ب > أ هـ فإن ⟸ ب ء > ء هـ

(٣) وإذا كان أ ب < أ هـ فإن ⟸ ب ء < ء هـ



(٤) إذا كان أ ب = أ هـ

وكان $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠أ

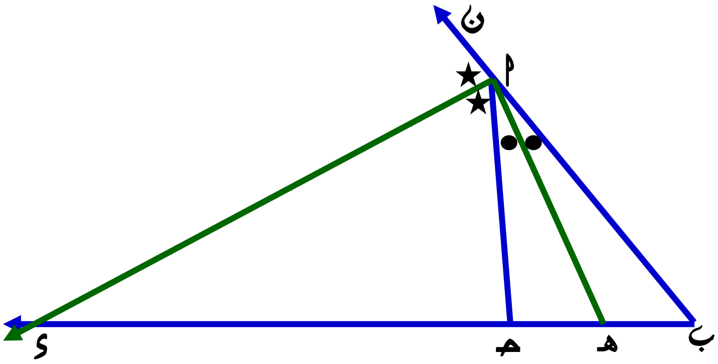
من الخارج

فإن : $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ // ب هـ

(٥) أ ب > أ هـ دائما

أى انه دائما فى حالة المنصف من الخارج يكون الضلع الذي يقع فى جهة المنصفة هو الاصغر

(٦) المنصفان الداخلي والخارجي لزاوية رأس المثلث يكونان متعامدان



فى الشكل السابق :

∵ $\overrightarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف ∠أ من الداخل

∴ ق(ب أ̂ هـ) = ق(هـ أ̂ هـ) = س

∵ $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠أ من الخارج

∴ ق(هـ أ̂ ء) = ق(ء أ̂ ن) = ص

∵ أ ∈ $\overleftrightarrow{\text{ب ن}}$ ∴ ق(ب أ̂ ن) = ١٨٠

س + س + ص + ص = ١٨٠ ⟸ ٢ س + ٢ ص = ١٨٠

⟸ س + ص = ٩٠ ∴ $\overline{\text{أ هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ء}}$

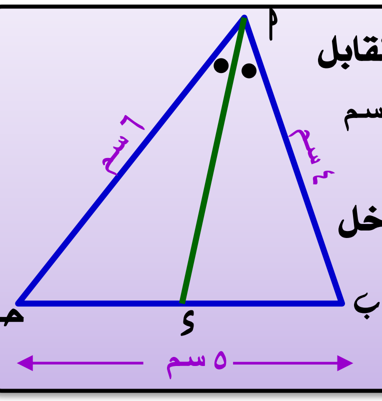
مثال ١ : فى الشكل المقابل

أ ب = ٤ سم ، ب هـ = ٥ سم

أ هـ = ٦ سم

$\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ أ من الداخل

أوجد : ب ء ، ء هـ



الحل

∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ ب أ هـ ∴ $\frac{\text{ب أ}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ء هـ}}$

ب ء + ء هـ = ٥ ⟸ ء هـ = ٥ − ب ء

$\frac{\text{ب أ}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ء هـ}}$ ⟸ $\frac{\text{٤}}{\text{٦}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{٥ − ب ء}}$

⟸ ٦ ب ء = ٤ (٥ − ب ء)

٦ ب ء = ٢٠ - ٤ ب ء

٦ ب ء + ٤ ب ء = ٢٠ ⟸ ١٠ ب ء = ٢٠

ب ء = $\frac{\text{٢٠}}{\text{١٠}}$ = ٢ سم

ء هـ = ٥ − ٢ = ٣ سم

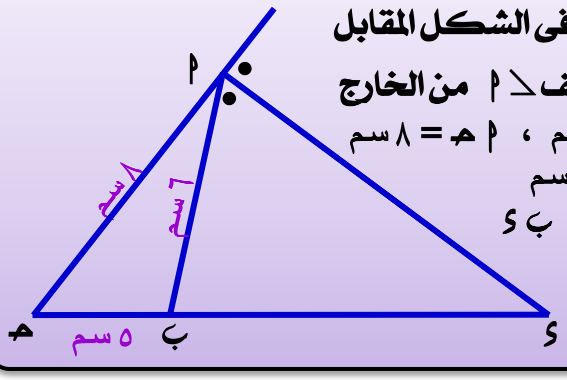
مثال ٢ : فى الشكل المقابل

$\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ أ من الخارج

أ ب = ٦ سم ، أ هـ = ٨ سم

ب هـ = ٥ سم

أوجد طول ب ء



الحل

∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ أ من الخارج ∴ $\frac{\text{ب أ}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ء هـ}}$

ء هـ = ب ء + ب هـ ⟸ ء هـ = ب ء + ٥

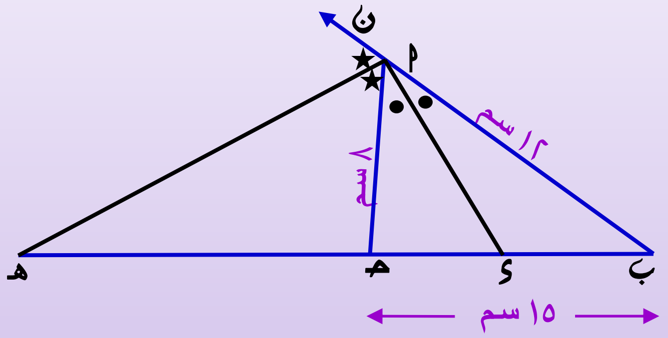
$\frac{\text{ب أ}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ء هـ}}$ ⟸ $\frac{\text{٦}}{\text{٨}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ب ء + ٥}}$

٨ ب ء = ٦ ب ء + ٣٠

⟸ ٨ ب ء − ٦ ب ء = ٣٠

٢ ب ء = ٣٠ ⟸ ب ء = $\frac{\text{٣٠}}{\text{٢}}$ = ١٥ سم

مثال ٣ : فى الشكل المقابل



$\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ه}}$ منصفان ∠ أ من الداخل والخارج على الترتيب وكان أ ب = ١٢ سم ، أ هـ = ٨ سم ، ب هـ = ١٥ سم ، أوجد طول ب ء ، ء ه

الحل

∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ ب أ هـ من الداخل ∴ $\frac{\text{ب أ}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ء هـ}}$

ب ء + ء هـ = ١٥ ⟸ ء هـ = ١٥ − ب ء

$\frac{\text{ب أ}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ء هـ}}$ ⟸ $\frac{\text{١٢}}{\text{٨}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{١٥ − ب ء}}$

⟸ ٨ ب ء = ١٢ (١٥ − ب ء)

٨ ب ء = ١٨٠ − ١٢ ب ء

٨ ب ء + ١٢ ب ء = ١٨٠

⟸ ٢٠ ب ء = ١٨٠

⟸ ب ء = $\frac{\text{١٨٠}}{\text{٢٠}}$ = ٩ سم

∴ هـ ء = ١٥ − ٩ = ٦ سم

∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ه}}$ ينصف ∠ أ من الخارج ∴ $\frac{\text{ب أ}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{ب ه}}{\text{هـ ه}}$

ب ه = ١٥ + هـ ه

$\frac{\text{ب أ}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{ب ه}}{\text{هـ ه}}$ ⟸ $\frac{\text{١٢}}{\text{٨}} = \frac{\text{١٥ + هـ ه}}{\text{هـ ه}}$

١٢ هـ ه = ١٢٠ + ٨ هـ ه

١٢ هـ ه − ٨ هـ ه = ١٢٠

٤ هـ ه = ١٢٠ ⟸ هـ ه = $\frac{\text{١٢٠}}{\text{٤}}$ = ٣٠ سم

∴ هـ ه = ٣٠ سم

∴ ء ه = ء هـ + هـ ه = ٦ + ٣٠ = ٣٦ سم

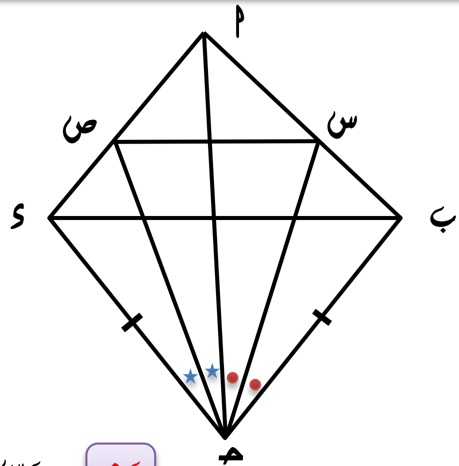
مثال ٤ : أ ب جـ ء شكل رباعي فيه ب جـ = جـ ء

رسم جـ أ ، ب ء ، نصفت ∠ أ جـ ء بمنصف

لاقي أ ء في ص

أثبت أن س ص // ب ء

الحل



∵ جـ س ينصف ∠ ب جـ أ ∴ ب جـ / جـ أ = ب س / أ س —— (١)

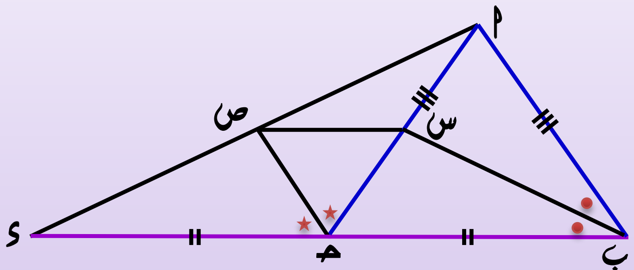
∵ جـ ص ينصف ∠ ء جـ أ ∴ ء جـ / جـ أ = ء ص / أ ص —— (٢)

∵ ب جـ = جـ ء ∴ ب جـ / أ جـ = جـ ء / أ جـ

∴ ب س / أ س = ء ص / أ ص

∴ س ص // ب ء

مثال ٥ : في الشكل المقابل



Δ أ ب جـ فيه أ ب = أ جـ ، ء ∈ ب جـ حيث

ب جـ = جـ ء ، ب س ينصف ∠ أ ب جـ ،

جـ ص ينصف ∠ أ جـ ء

أثبت أن س ص // جـ ء

الحل

∵ ب س ينصف ∠ أ ب جـ ∴ ب أ / ب جـ = أ س / س جـ —— (١)

∵ جـ ص ينصف ∠ أ جـ ء ∴ جـ أ / جـ ء = أ ص / ص ء —— (٢)

∵ أ ب = أ جـ ، ب جـ = جـ ء ∴ أ ب / ب جـ = أ جـ / جـ ء

∴ أ س / س جـ = أ ص / ص ء

∴ س ص // جـ ء

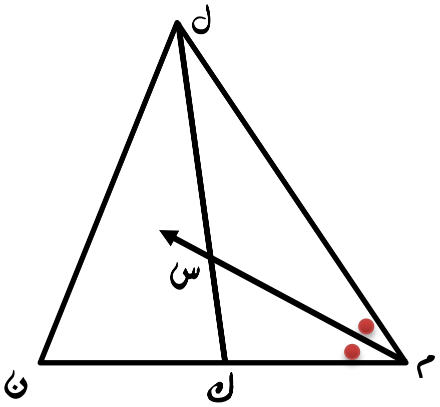
مثال ٦ : ل م ن Δ فيه ك منتصف م ن ، م س

ينصف ∠ ل م ن ويقطع ل ك في س

أثبت أن :

م ل × س ك = ك ن × ل س

الحل



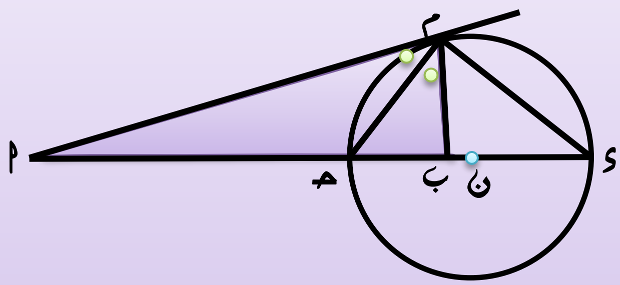
∵ م س ينصف ∠ ل م ن ∴ ل م / م ك = ل س / س ك

∵ ك منتصف م ن ∴ م ك = ك ن

∴ ل م / ك ن = ل س / س ك

∴ ل م × س ك = ك ن × ل س

مثال ٧ : في الشكل المقابل



ء جـ قطر في الدائرة ن ، م ∈ للدائرة ،

م جـ ينصف ∠ ب م أ

أثبت أن : ب جـ / جـ أ = ب ء / ء أ

الحل

∵ $\overleftrightarrow{\text{م هـ}}$ ينصف ∠ ب م ﺃ ∴ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{ﺃ هـ}} = \boxed{\frac{\text{ب م}}{\text{ﺃ م}}}$ —— (١)

∵ $\overline{\text{ى هـ}}$ قطر فى الدائرة ن ، ∠ ى م هـ محيطية فى نصف دائرة

∴ ق(ى م̂ هـ) = ٩٠° ، $\overline{\text{ى م}} \perp \overline{\text{م هـ}}$

∵ $\overleftrightarrow{\text{م هـ}}$ ينصف ∠ م من الداخل ، $\overline{\text{ى م}} \perp \overline{\text{م هـ}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{م ى}}$ ينصف ∠ م من الخارج

∴ $\boxed{\frac{\text{ب م}}{\text{ﺃ م}}} = \frac{\text{ب ى}}{\text{ى ﺃ}}$ —— (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن : $\frac{\text{ب هـ}}{\text{ﺃ هـ}} = \frac{\text{ب ى}}{\text{ﺃ ى}}$

مثال ٨ : فى الشكل المقابل

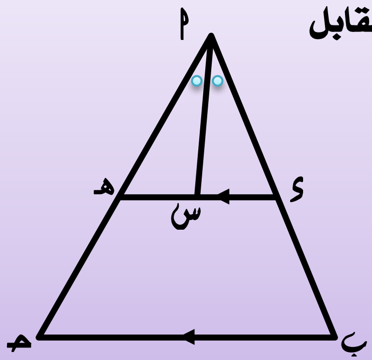
$\overline{\text{ى هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ،

$\overrightarrow{\text{ﺃ س}}$ ينصف ∠ ى ﺃ هـ

أثبت أن

(١) $\frac{\text{ى س}}{\text{س هـ}} = \frac{\text{ى ب}}{\text{هـ جـ}}$

(٢) $\frac{\text{م}(\Delta\text{ﺃ ى س})}{\text{م}(\Delta\text{ﺃ هـ س})} = \frac{\text{ﺃ ب}}{\text{ﺃ جـ}}$



الحل

∵ $\overline{\text{ى هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ∴ $\frac{\text{ﺃ ى}}{\text{ى ب}} = \frac{\text{ﺃ هـ}}{\text{هـ جـ}}$

∴ $\boxed{\frac{\text{ﺃ ى}}{\text{ﺃ هـ}}} = \frac{\text{ى ب}}{\text{هـ جـ}}$ —— (١)

∵ $\overrightarrow{\text{ﺃ س}}$ ينصف ∠ ى ﺃ هـ ∴ $\boxed{\frac{\text{ى ﺃ}}{\text{ﺃ هـ}}} = \frac{\text{ى س}}{\text{س هـ}}$ —— (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن : $\frac{\text{ى س}}{\text{س هـ}} = \frac{\text{ى ب}}{\text{هـ جـ}}$

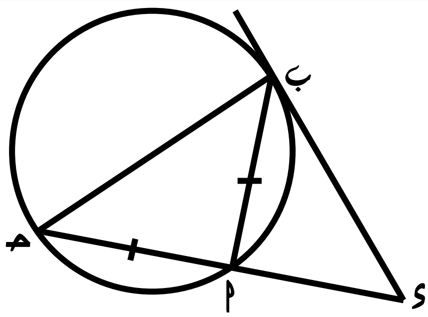
مثال ٩ : ﺃ ب جـ Δ مرسوم داخل دائرة فيه

ﺃ ب = ﺃ جـ ، رسم المماس $\overleftrightarrow{\text{ب ى}}$ من النقطة ب

على الدائرة فلاقي $\overrightarrow{\text{جـ ﺃ}}$ فى ى

أثبت أن : ى ب × ﺃ ب = ى ﺃ × ب جـ

الحل



∵ ﺃ ب = ﺃ جـ ∴ ق(∠ ﺃ ب جـ) = ق(جـ̂) —— (١)

∵ $\overleftrightarrow{\text{ب ى}}$ مماس ، $\overline{\text{ب ﺃ}}$ وتر

∴ ق(∠ ى ب ﺃ) = ق(جـ̂) —— (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن

ق(∠ ﺃ ب جـ) = ق(∠ ى ب ﺃ)

∴ $\overrightarrow{\text{ب ﺃ}}$ تنصف ∠ ى ب جـ

∴ $\frac{\text{ى ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{ى ﺃ}}{\text{ﺃ جـ}}$

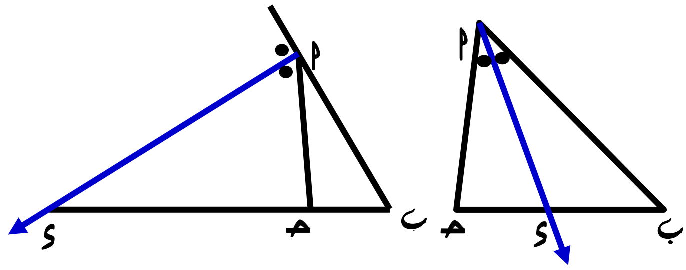
∵ ﺃ ب = ﺃ جـ ∴ $\frac{\text{ى ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{ى ﺃ}}{\text{ﺃ ب}}$

∴ ى ب × ﺃ ب = ب جـ × ى ﺃ

عكس نظرية

إذا قسمت نقطة قاعدة مثلث من الداخل او الخارج الى جزأين النسبة بينهما تساوي النسبة بين طولي الضلعين الاخرين فإن المستقيم المار برأس المثلث وهذه النقطة ينصف زاوية الرأس من الداخل او الخارج

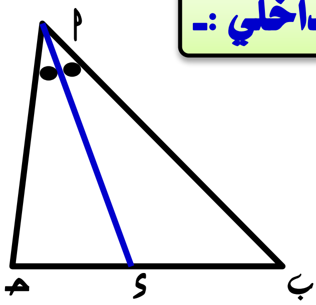
في الشكل المقابل :-



إذا كان : $\frac{\text{أب}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{ب د}}{\text{جـ د}}$ أو $\text{أب} \times \text{د جـ} = \text{أجـ} \times \text{ب د}$

فإن : $\overleftrightarrow{\text{أد}}$ يكون منصفا لـ ∠ أ من الداخل او الخارج حسب نوع التقسيم

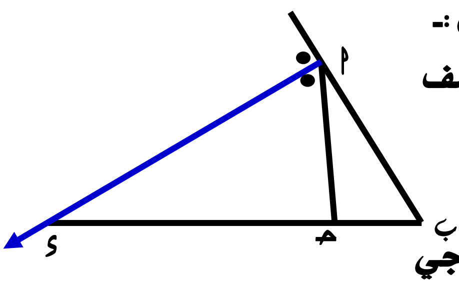
(١) طول المنصف الداخلي :-



فى الشكل المقابل :
إذا كان أد ينصف ∠ أ من الداخل فإن :
طول المنصف الداخلي أد يتعين من العلاقة

$$\text{أد} = \sqrt{\text{أب} \times \text{أجـ} - \text{ب د} \times \text{د جـ}}$$

(٢) طول المنصف الخارجي :-

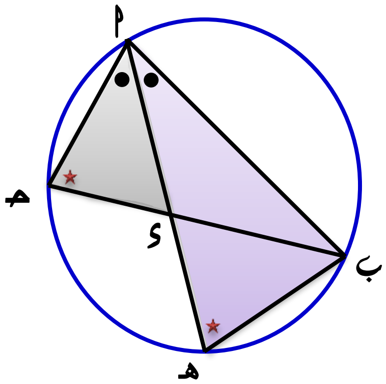


فى الشكل المقابل :-
إذا كان $\overleftrightarrow{\text{أد}}$ ينصف ∠ أ من الخارج
فإن :
طول المنصف الخارجي أد يتعين من العلاقة

$$\text{أد} = \sqrt{\text{ب د} \times \text{د جـ} - \text{أب} \times \text{أجـ}}$$

أثبات طول المنصف الداخلي

فى الشكل المقابل أ ب جـ Δ فيه $\overleftrightarrow{\text{أد}}$ ينصف ∠ب أ جـ من الداخل



∵ $\overleftrightarrow{\text{أد}}$ ينصف ∠ب أ جـ ∴ ق(∠ب أ هـ) = ق(∠جـ أ د)

∵ ∠جـ ، ∠هـ محيطيتان مرسومتان على القوس $\overset{\frown}{\text{أب}}$

∴ ق(∠هـ) = ق(∠جـ)

∴ Δ أ ب هـ ، Δ أ د جـ

ق(∠ب أ هـ) = ق(∠جـ أ د)

فيهما ق(∠هـ) = ق(∠جـ)

∴ Δ أ ب هـ ~ Δ أ د جـ ⟸ $\frac{\text{أب}}{\text{أد}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{د جـ}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{أجـ}}$

$\frac{\text{أب}}{\text{أد}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{أجـ}}$ ⟸ $\text{أد} \times \text{أهـ} = \text{أب} \times \text{أجـ}$

$\text{أد} \times (\text{أد} + \text{د هـ}) = \text{أب} \times \text{أجـ}$

$(\text{أد})^2 + \text{أد} \times \text{د هـ} = \text{أب} \times \text{أجـ}$ —— (١)

∵ $\overline{\text{أهـ}} \cap \overline{\text{ب جـ}} = \{\text{د}\}$

∴ $\text{ب د} \times \text{د جـ} = \text{أد} \times \text{د هـ}$ —— (٢)

بالتعويض من (٢) فى (١)

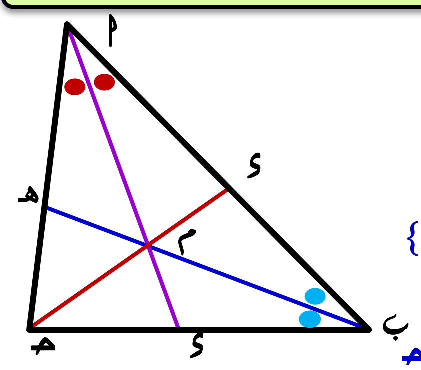
$(\text{أد})^2 + \text{ب د} \times \text{د جـ} = \text{أب} \times \text{أجـ}$

$(\text{أد})^2 = \text{أب} \times \text{أجـ} - \text{ب د} \times \text{د جـ}$

$$\text{أد} = \sqrt{\text{أب} \times \text{أجـ} - \text{ب د} \times \text{د جـ}}$$

حقيقة هندسية

منصفات زوايا اي مثلث تتقاطع جميعا فى نقطة واحدة



فى الشكل المقابل

$\overleftrightarrow{\text{اء}}$ ينصف ∠ ا ،

$\overleftrightarrow{\text{به}}$ ينصف ∠ب

$\overleftrightarrow{\text{اء}} \cap \overleftrightarrow{\text{به}} = \{\text{م}\}$

∵ م ∈ $\overleftrightarrow{\text{ﺟء}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{ﺟء}}$ ينصف ∠ﺟ

مثال ١ ا ب ﺟ ء شكل رباعي فيه ا ب = ٦ سم ،

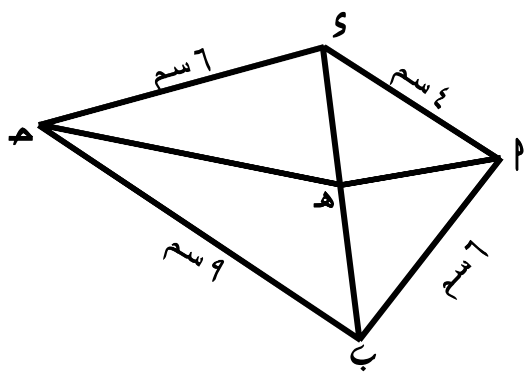
ب ﺟ = ٩ سم ، ﺟ ء = ٩ سم ، $\overline{\text{اء}}$ = ٤ سم ،

$\overleftrightarrow{\text{اه}}$ ينصف ∠ ا ويقطع ب ء فى هـ

(١) أوجد قيمة $\frac{\text{به}}{\text{هء}}$

(٢) أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{ﺟه}}$ ينصف ∠ب ﺟ ء

الحل



∵ $\overleftrightarrow{\text{اه}}$ ينصف ∠ ا من الداخل

∴ $\frac{\text{با}}{\text{اء}} = \frac{\text{به}}{\text{هء}} \Leftarrow \frac{٦}{٤} = \frac{\text{به}}{\text{هء}} \Leftarrow \frac{\text{به}}{\text{هء}} = \frac{٣}{٢}$

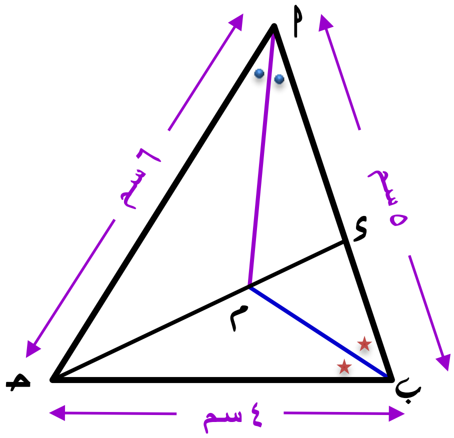
فى Δ ب ﺟ ء

$\frac{\text{بﺟ}}{\text{ﺟء}} = \frac{٩}{٦} = \frac{٣}{٢}$ ، $\frac{\text{به}}{\text{هء}} = \frac{٣}{٢}$

∵ $\frac{\text{بﺟ}}{\text{ﺟء}} = \frac{\text{به}}{\text{هء}}$ ∴ $\overleftrightarrow{\text{ﺟه}}$ ينصف ∠ ﺟ

مثال ٢ : ا ب ﺟ Δ فيه ا ب = ٥ سم ، ا ﺟ = ٦ سم ، ب ﺟ = ٤ سم نصفت الزاويتان ا ، ب بمنصفين تقاطعا فى م ورسم $\overleftrightarrow{\text{ﺟم}}$ فقطع $\overline{\text{اب}}$ فى ء أوجد طول كلا من ا ء ، ء ب ، ﺟ ء

الحل



∵ $\overleftrightarrow{\text{بم}}$ ينصف ∠ب ، $\overleftrightarrow{\text{ام}}$ ينصف ∠ ا

∴ $\overleftrightarrow{\text{ﺟم}}$ ينصف ∠ ﺟ

∵ $\overline{\text{ﺟء}}$ ينصف ∠ ﺟ ∴ $\frac{\text{اﺟ}}{\text{ﺟب}} = \frac{\text{اء}}{\text{ءب}}$

ا ء + ء ب = ٥ ⇐ ا ء = ٥ − ء ب

∴ $\frac{\text{اﺟ}}{\text{ﺟب}} = \frac{\text{اء}}{\text{ءب}} \Leftarrow \frac{٦}{٤} = \frac{٥ - \text{ءب}}{\text{ءب}}$

٦ ء ب = ٢٠ − ٤ ء ب

⇐ ٦ ء ب + ٤ ء ب = ٢٠

١٠ ء ب = ٢٠ ⇐ ء ب = $\frac{٢٠}{١٠}$ = ٢ سم

∴ ا ء = ٥ − ٢ = ٣ سم

∵ $\overleftrightarrow{\text{ﺟء}}$ ينصف ∠ﺟ

∴ ﺟ ء = $\sqrt{\text{اﺟ} \times \text{ﺟب} - \text{اء} \times \text{ءب}}$

ﺟ ء = $\sqrt{٦ \times ٤ - ٣ \times ٢}$ = $\sqrt{٢٤ - ٦}$ = $\sqrt{١٨}$

ﺟ ء = $\sqrt{١٨}$ = ٣$\sqrt{٢}$

مثال ٣ : فى الشكل المقابل

أ ب جـ Δ فيه أ ب = ٣ سم ، أ جـ = ٤,٥ سم

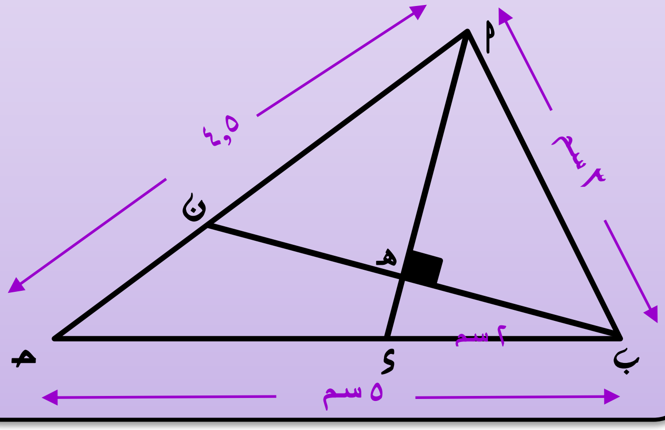
ب جـ = ٥ سم ، ء ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ بحيث $\overline{\text{ب ء}}$ =٢ سم

رسم $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ء}}$ ويقطع $\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$

فى هـ ، ن على الترتيب

(١) أوجد طول أ ء

(٢) أوجد م(Δ ب أ ن) : م (Δ ب جـ ن)



الحل

∵ ب ء = ٢ سم ∴ ء جـ = ٥ – ٢ = ٣ سم

∵ $\frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}} = \frac{٣}{٤,٥} = \frac{٢}{٣}$ ∵ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء جـ}} = \frac{٢}{٣}$

∴ $\frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ء جـ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ أ

∴ أ ء = $\sqrt{\text{ب أ} \times \text{أ جـ} - \text{ب ء} \times \text{ء جـ}}$

= $\sqrt{٣ \times ٤,٥}$ - ٢ × ٣ = $\sqrt{١٣,٥}$ - ٦

= $\sqrt{٧,٥}$ = $\frac{\sqrt{١٥}}{\sqrt{٢}}$ = $\frac{\sqrt{٣٠}}{٢}$

فى الـ Δ أ ب ن :

∵ $\overrightarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف ∠ أ ، $\overline{\text{أ هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب ن}}$

∴ Δ أ ب ن متساوي الساقين

∴ أ ب = أ ن = ٣ سم

∴ ن جـ = ٤,٥ – ٣ = ١,٥ سم

الـ Δ أ ب ن ، Δ ن ب جـ :

مثلثان لهما نفس الارتفاع لانهما مشتركان فى رأس واحدة وقاعدتيهما على نفس المستقيم

$\frac{\text{م}(\Delta \text{ أ ب ن})}{\text{م}(\Delta \text{ ن ب جـ})}$ = $\frac{\text{قاعدة الاول}}{\text{قاعدة الثاني}}$

∴ $\frac{\text{م}(\Delta \text{ أ ب ن})}{\text{م}(\Delta \text{ ن ب جـ})} = \frac{\text{أ ن}}{\text{ن جـ}} = \frac{٣}{١,٥} = ٢$

مثال ٤ : $\overline{\text{ب جـ}}$ قطر فى الدائرة م ، $\overline{\text{ء جـ}}$ وترفيها

رسم $\overleftrightarrow{\text{ء أ}}$ مماس للدائرة عند ء فقطع $\overleftrightarrow{\text{جـ ب}}$ فى أ

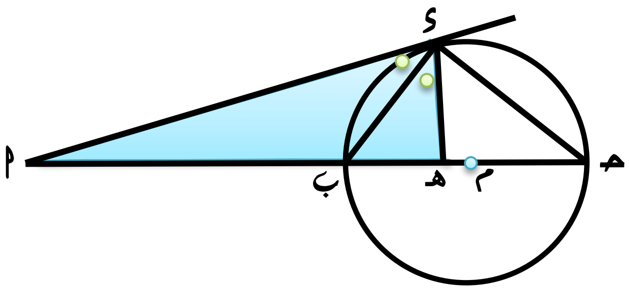
فإذا كانت هـ ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ بحيث كان $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{هـ ء}}$

أثبت أن :

(١) $\overrightarrow{\text{ء جـ}}$ ينصف الزاوية الخارجة عند ء فى Δ أ ء هـ

(٢) $\frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$

الحل



∵ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{هـ ء}}$ ∴ $\overrightarrow{\text{ء ب}}$ ينصف ∠ أ ء هـ من الداخل

∵ ب جـ قطر فى الدائرة

∴ ق(ب $\hat{\text{ء}}$ جـ)=٩٠° لانها محيطية فى نصف دائرة

∴ $\overline{\text{جـ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ء ب}}$

∵ $\overrightarrow{\text{ء ب}}$ ينصف ∠ أ ء هـ من الداخل ، $\overline{\text{جـ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ء ب}}$

∴ $\overrightarrow{\text{ء جـ}}$ ينصف ∠ ء من الخارج

∵ $\overrightarrow{\text{ء جـ}}$ ينصف ∠ ء من الخارج ∴ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{جـ هـ}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{ء هـ}}$

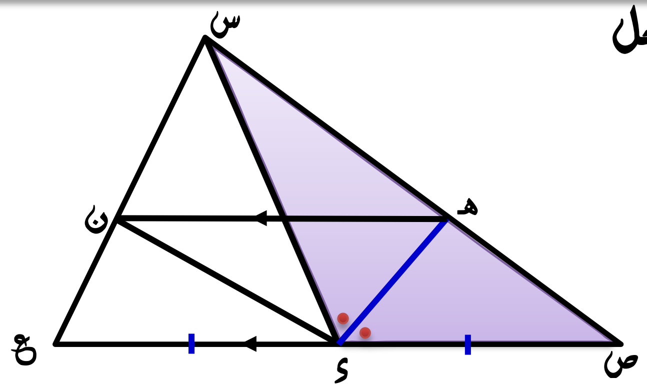
∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{هـ ء}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{هـ جـ}}$ ⟸ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$

مثال ٥ : س ص ع Δ فيه ، ء منتصف $\overline{\text{ص ع}}$ ، نصفت ∠س ء ص بالمنصف $\overleftrightarrow{\text{ء هـ}}$ الذي قطع $\overline{\text{س ص}}$ فى هـ ، ثم رسم $\overleftrightarrow{\text{هـ ن}}$ // $\overline{\text{ص ع}}$ فقطع $\overline{\text{س ع}}$ فى ن

أثبت أن :

(١) $\frac{\text{س هـ}}{\text{هـ ص}} = \frac{\text{س ء}}{\text{ء ع}}$ (٢) $\overleftrightarrow{\text{ء ن}}$ ينصف ∠ س ع ء

الحل



∵ ء منتصف $\overline{\text{ص ع}}$ ∴ ص ء = ء ع ——— (١)

∵ $\overleftrightarrow{\text{ء هـ}}$ ينصف ∠ص ء س ∴ $\frac{\text{س هـ}}{\text{هـ ص}} = \frac{\text{س ء}}{\text{ء ص}}$ ——— (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن :

$\frac{\text{س هـ}}{\text{هـ ص}} = \frac{\text{س ء}}{\text{ء ع}}$ ——— (٣)

∵ $\overline{\text{هـ ن}}$ // $\overline{\text{ص ع}}$ ∴ $\frac{\text{س هـ}}{\text{هـ ص}} = \frac{\text{س ن}}{\text{ن ع}}$ ——— (٤)

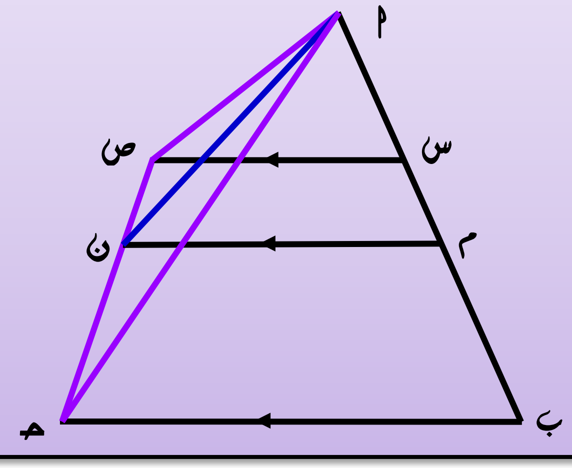
من (٣) ، (٤) نجد أن :

$\frac{\text{س ن}}{\text{ن ع}} = \frac{\text{س ء}}{\text{ء ع}}$ ∴ $\overleftrightarrow{\text{ء ن}}$ ينصف ∠ س ء ع

مثال ٦ : فى الشكل المقابل

$\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{م ن}}$ // $\overline{\text{ب هـ}}$ ، $\frac{\text{أ ص}}{\text{س م}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{ب م}}$

أثبت أن : $\overleftrightarrow{\text{أ ن}}$ ينصف ∠هـ أ ص



الحل

∵ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{م ن}}$ // $\overline{\text{ب هـ}}$

∴ $\frac{\text{س م}}{\text{ب م}} = \frac{\text{ص ن}}{\text{ن هـ}}$ ——— (١)

∵ $\frac{\text{أ ص}}{\text{س م}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{ب م}}$ ∴ $\frac{\text{أ ص}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{س م}}{\text{ب م}}$ ——— (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن :

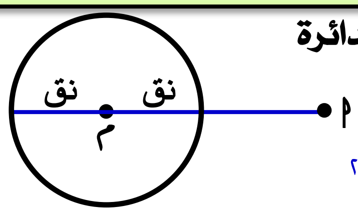
∴ $\frac{\text{ص ن}}{\text{ن هـ}} = \frac{\text{أ ص}}{\text{أ هـ}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ن}}$ ينصف ∠هـ أ ص

تطبيقات التناسب فى الدائرة

(١) قوة نقطة بالنسبة للدائرة

قوة النقطة أ بالنسبة للدائرة م التي نصف قطرها نق هو العدد الحقيقي



$\text{و}_{\text{م}}(\text{أ}) = (\text{م أ})^2 - \text{نق}^2$

(١) التنبؤ من قوة النقطة بالنسبة للدائرة بموقعها من الدائرة

إذا كانت أ نقطه فى مستوي الدائرة م التي نصف قطرها نق

فإذا كان :

$\text{و}_{\text{م}}(\text{أ}) > 0$ (قيمة موجبة) فإن أ تقع خارج الدائرة

$\text{و}_{\text{م}}(\text{أ}) = 0$ فإن أ تقع علي الدائرة

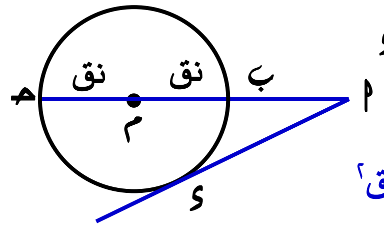
$\text{و}_{\text{م}}(\text{أ}) < 0$ (قيمة سالبة) فإن أ تقع داخل الدائرة

(٢) قوة النقطة التي تقع خارج الدائرة والمماس لها

إذا كانت النقطة أ تقع خارج الدائرة

و $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ مماس لها عند د

فإن :



$\text{و}_{\text{م}}(\text{أ}) = (\text{أ م})^2 - \text{نق}^2$

$= (\text{أ م} + \text{نق})\ (\text{أ م} - \text{نق})$

$= \text{أ ب} \times \text{أ هـ} = (\text{أ د})^2$

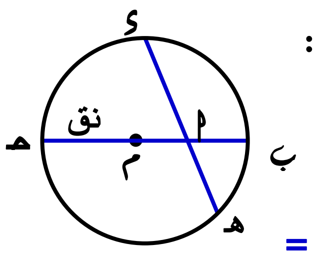
$\Leftarrow \text{أ د} = \sqrt{\text{و}_{\text{م}}(\text{أ})}$

أى ان طول المماس من نقطة خارج الدائرة = جذر قوة النقطة بالنسبة للدائرة

(٣) قوة النقطة التي تقع داخل الدائرة

إذا كانت النقطة أ تقع داخل الدائرة

و $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ مماس لها عند د فإن :



$\text{و}_{\text{م}}(\text{أ}) = (\text{أ م})^2 - \text{نق}^2$

$= (\text{أ م} - \text{نق})\ (\text{أ م} + \text{نق}) =$

$\Leftarrow \text{و}_{\text{م}}(\text{أ}) = -\text{أ ب} \times \text{أ جـ} = -\text{أ هـ} \times \text{أ د}$

(٤) المحور الاساسي لدائرتين مختلفتين

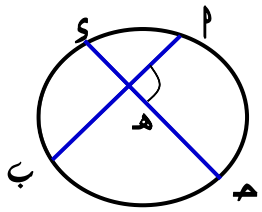
هو مجموعة النقاط التي لها نفس القوة بالنسبة للدائرتين

(٢) القاطع والمماس وقياسات الزوايا

مشهور ١

زاوية تقاطع وترين داخل الدائرة تساوي نصف حاصل جمع القوسين المقابلين لها

ففى الشكل المقابل :

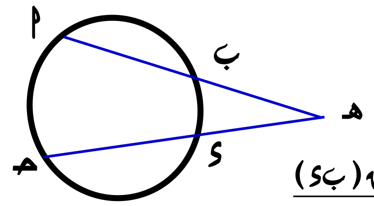


$\text{ق}(\angle \text{أ هـ جـ}) = \dfrac{\text{و}(\text{ب د}) + \text{و}(\text{أ جـ})}{2}$

مشهور ٢

زاوية تقاطع وترين خارج الدائرة تساوي نصف حاصل طرح القوسين المقابلين لها

ففي الشكل المقابل:

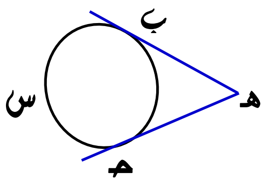


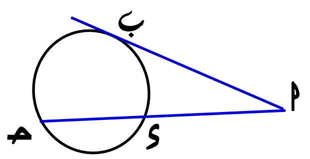
$\text{ق}(\hat{\text{هـ}}) = \dfrac{\text{و}(\text{أ جـ}) - \text{و}(\text{ب د})}{2}$

مشهور ٣

زاوية تقاطع مماس وقاطع او مماسان خارج دائرة تساوي نصف حاصل طرح القوسين المقابلين لها

فى الشكل المقابل :ـ





$\text{و}(\hat{\text{أ}}) = \dfrac{\text{و}(\text{ب هـ}) - \text{و}(\text{ب د})}{2}$

$\text{و}(\hat{\text{هـ}}) = \dfrac{\text{و}(\text{ب س هـ}) - \text{و}(\text{ب هـ})}{2}$

مثال ١ : حدد موقع النقط التالية بالنسبة للدائرة
م ، والتى طول نصف قطرها ١٠ سم ، ثم أحسب بعد كل نقطة عن مركز الدائرة
(١) ق م(أ) = -٣٦
(٢) ق م(ب) = ٩٦
(٣) ق م(هـ) = صفر

الحل

(١) ق م(أ) = -٣٦ ∴ أ داخل الدائرة
ق م(أ) = (أم)² – نق² = -٣٦
(أم)² – (١٠)² = -٣٦
(أم)² – ١٠٠ = -٣٦
⟸ (أم)² = -٣٦ + ١٠٠ = ٦٤
أم = √٦٤ = ٨ سم

(٢) ق م(ب) = ٩٦ ∴ ب خارج الدائرة
ق م(ب) = (بم)² – نق² = ٩٦
(بم)² – (١٠)² = ٩٦
(بم)² – ١٠٠ = ٩٦
⟸ (بم)² = ٩٦ + ١٠٠ = ١٩٦
بم = √١٩٦ = ١٤ سم

(٣) ق م(هـ) = صفر ∴ هـ على الدائرة
∴ هـ م = ١٠ سم

مثال ٢ : أوجد قوة النقطة المعطاة بالنسبة الى الدائرة م ، والتى طول نصف قطرها نق
(١) النقطة أ حيث أ م = ١٢ سم ، نق = ٩ سم
(٢) النقطة ب حيث م ب = ٨ سم ، نق = ١٥ سم
(٣) النقطة هـ حيث م هـ = ٧ سم ، نق = ٧ سم

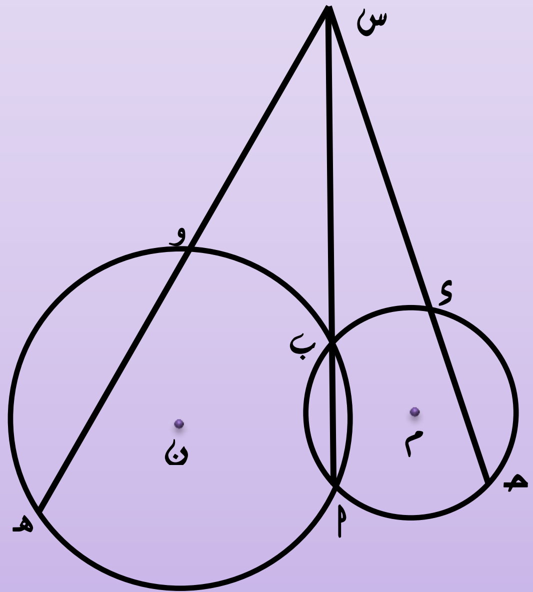
الحل

(١) ق م(أ) = (أم)² – نق²
= (١٢)² - (٩)² = ١٤٤ – ٨١ = ٦٣

(٢) ق م(ب) = (بم)² – نق²
= (٨)² – (١٥)² = ٦٤ – ٢٢٥ = -١٦١

(٣) ق م(هـ) = (هـم)² – نق²
= صفر لأن النقطة على الدائرة

مثال ٣ : فى الشكل المقابل
م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب بحيث
$\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{هـ ء}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ = { س } ، س ء = ٢ ء هـ
، هـ و = ١٠ سم ، ق ن(س) = ١٤٤
(١) أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ محور اساسي للدائرتين م ، ن
(٢) أوجد طول كلا من $\overline{\text{س هـ}}$ ، $\overline{\text{س و}}$
(٣) أثبت أن الشكل هـ ء و هـ رباعي دائري



الحل

ق م(ب) = صفر لان ب تقع على الدائرة م
ق ن (ب) = صفر لأن ب تقع على الدائرة ن
∴ ق م(ب) = ق ن (ب)
∴ ب ∈ للمحور الاساسي للدائرتين —— (١)

ق م(أ) = صفر لان أ تقع على الدائرة م
= صفر لأن أ تقع على الدائرة ن
∴ ق م(أ) = ق ن (أ)
∴ أ ∈ للمحور الاساسي للدائرتين —— (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن :
$\overleftrightarrow{\text{أب}}$ هو المحور الاساسي للدائرتين
∵ س ∈ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ∴ = ق ن (س)

∴ ق ن (س) = س و × س هـ = ١٤٤
س و × (س و + ١٠) = ١٤٤
(س و)² + ١٠ (س و) – ١٤٤ = ٠
(س و - ٨) (س و + ١٨) = ٠
س و = ٨ سم ، س و = -١٨ مرفوضة

∴ ق‌م(س) = س ء × س هـ = ١٤٤

= س ء × (س ء + ء هـ) = ١٤٤

∵ س ء = ٢ ء هـ

∴ س ء × (س ء + ء هـ) = ١٤٤

∴ ٢ ء هـ × (٢ ء هـ + ء هـ) = ١٤٤

٢ ء هـ × ٣ ء هـ = ١٤٤

٦ (ء هـ)٢ = ١٤٤ ⟸ (ء هـ)٢ = ١٤٤ / ٦ = ٢٤

⟸ (ء هـ)٢ = ٢٤ ⟸ ء هـ = √٢٤ = ٢ √٦

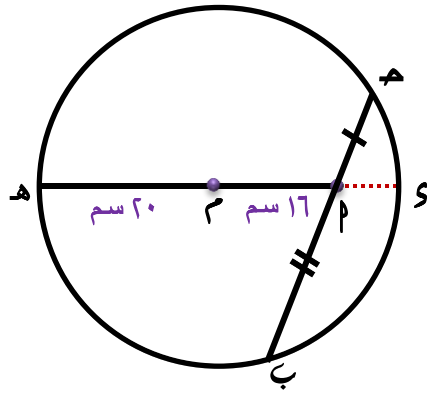
∴ س هـ = س ء + ء هـ = ٢ ء هـ + ء هـ

= ٣ هـ ء = ٣ × ٢ √٦ = ٦ √٦ سم

مثال ٤ : الدائرة م طول نصف قطرها ٢٠ سم ، أ نقطة تبعد عن المركز مسافة ١٦ سم ، رسم الوتر ب‌ج حيث أ ∈ ب‌ج ، أ ب = ٢ أ ج

احسب طول الوتر ب‌ج

الحل



أ ء = ٢٠ − ١٦ = ٤ سم

ق‌م(أ) = − أ ء × أ هـ

= − ٤ × ٣٦ = − ١٤٤

ق‌م(أ) = − أ ج × أ ب

= − أ ج × ٢ أ ج = − ٢ (أ ج)٢

∴ − ٢ (أ ج)٢ = − ١٤٤

⟸ (أ ج)٢ = −١٤٤ / −٢ = ٧٢

∴ أ ج = √٧٢ = ٦ √٢

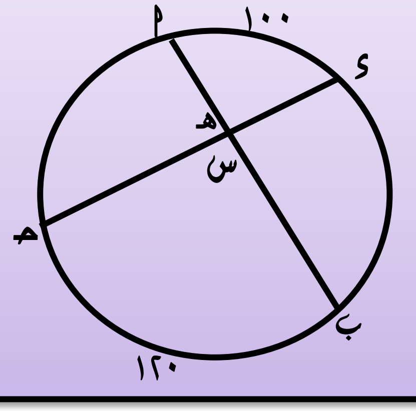
∴ ب ج = أ ج + أ ب = أ ج + ٢ أ ج

= ٣ أ ج = ٣ × ٦ √٢

= ١٨ √٢

مثال ٥ : مستعينا بمعطيات الشكل أوجد قيمة الرمز

(١)



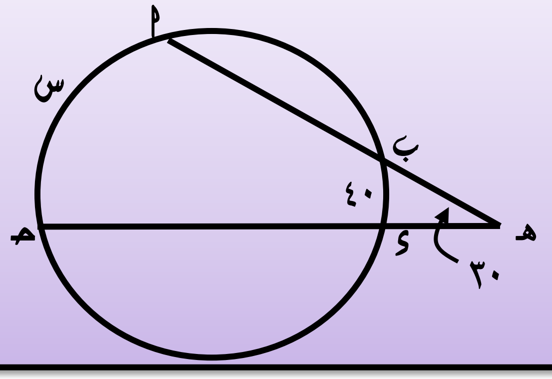
الحل

∵ أ‌ب ∩ ج‌ء = { هـ }

∴ ق(∠ ج هـ ب) = (ق(أ‌ء) + ق(ج‌ب)) / ٢

س = (١٠٠ + ١٢٠) / ٢ = ١١٠°

(٢)



الحل

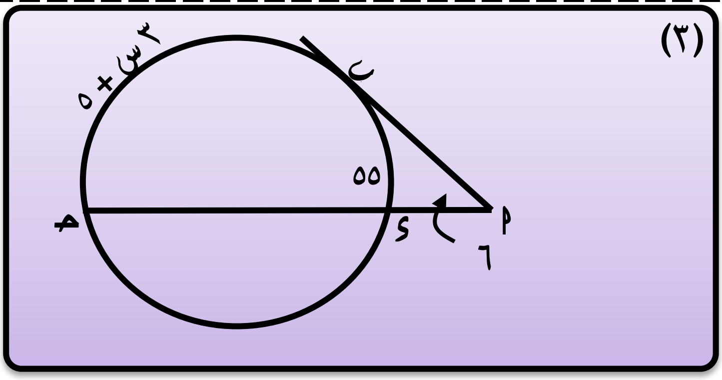
∵ أ‌ب ∩ ج‌ء = { هـ }

∴ ق(هـ) = (ق(أ‌ج) − ق(ب‌ء)) / ٢

٣٠ / ١ = (س − ٤٠) / ٢

⟸ س − ٤٠ = ٢ × ٣٠

∴ س = ٦٠ + ٤٠ = ١٠٠°



الحل

∵ $\overleftarrow{أب}$ مماس عند ب ، $\overline{أهـ}$ قاطع للدائرة

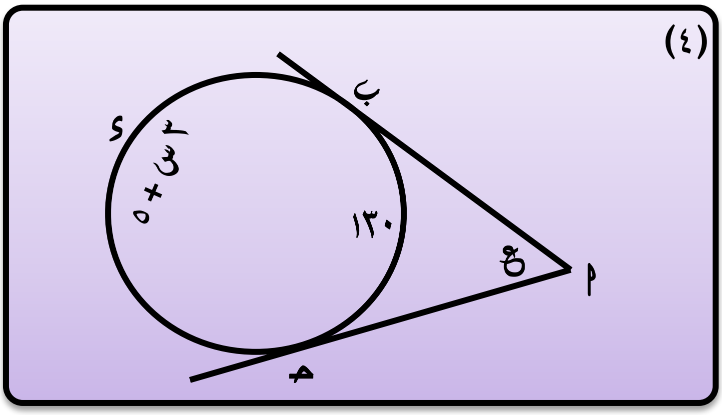
∴ ق(∠ أ) = $\frac{ق(\overset{\frown}{ب هـ}) - ق(\overset{\frown}{ب ء})}{٢}$

∴ $\frac{٦٥}{١} = \frac{٣س + ٥ - ٥٥}{٢} = \frac{٣س - ٥٠}{٢}$

∴ ٣س − ٥٠ = ١٣٠

⟸ ٣س = ١٣٠ + ٥٠ = ١٨٠

⟸ س = $\frac{١٨٠}{٣}$ = ٦٠°



الحل

∵ $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أهـ}$ مماسان للدائرة عند ب ، هـ

∴ ق($\overset{\frown}{ب هـ}$) + ق($\overset{\frown}{ب ء هـ}$) = ٣٦٠

∴ ١٣٠ + ٣س + ٥ = ٣٦٠

٣س = ٣٦٠ − ١٣٥ = ٢٢٥

س = $\frac{٢٢٥}{٣}$ = ٧٥°

∴ ق(∠ أ) = $\frac{ق(\overset{\frown}{ب ء هـ}) - ق(\overset{\frown}{ب هـ})}{٢}$

ع = $\frac{٢٣٠ - ١٣٠}{٢} = \frac{١٠٠}{٢}$ = ٥٠°

تدريبات على تطبيقات التناسب فى الدائرة

(١) حدد موقع النقط التالية بالنسبة للدائرة م ، والتى طول نصف قطرها ٧ سم ، ثم أحسب بعد كل نقطة عن مركز الدائرة

(١) $ق_م$(أ) = -٢٤   (٢) $ق_م$(ب) = ٧٢

(٣) $ق_م$(هـ) = صفر

(٢) أوجد قوة النقطة المعطاة بالنسبة الى الدائرة م ، والتى طول نصف قطرها نق

(١) النقطة أ حيث أ م = ١٠ سم ، نق = ٨ سم

(٢) النقطة ب حيث ب م = ١٠ سم ، نق = ١٢ سم

(٣) النقطة هـ حيث هـ م = ١٠ سم ، نق = ١٠ سم

(٣) إذا كان بعد نقطة عن مركز الدائرة = ٢٥ سم وقوة هذه النقطة بالنسبة إلى الدائرة يساوي ٤٠٠ ، أوجد طول نصف قطر هذه الدائرة

(٤) فى الشكل المقابل

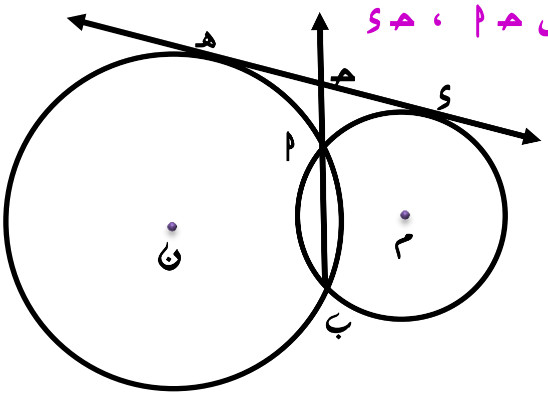
دائرتان م ، ن متقاطعتان فى أ ، ب ، $\overleftrightarrow{هـ ء}$ مماس مشترك للدائرتين م ، ن عند ء ، هـ على الترتيب

$\overleftarrow{ب أ}$ ∩ $\overleftrightarrow{ء هـ}$ = { هـ }

(١) أثبت أن : $\overleftrightarrow{ب هـ}$ محور اساسي للدائرتين

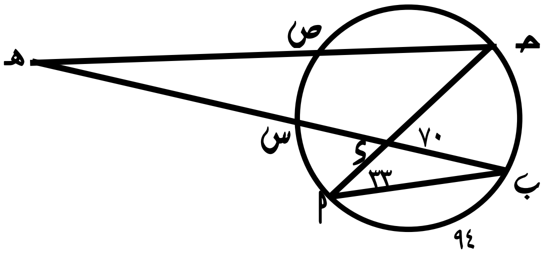
(٢) إذا كان أ ب = ٩ سم ، $ق_ن$(هـ) = ٣٦ ،

أوجد طول $\overline{هـ أ}$ ، $\overline{هـ ء}$



(٥) فى الشكل المقابل : ق(∠ أ) = ٣٢ ، ق(∠ ب ء هـ) = ٧٠ ، ق($\overset{\frown}{أ ب}$) = ٩٤ ، ق($\overset{\frown}{هـ ص}$) = ١٠٠ أوجد

(١) ق($\overset{\frown}{س ص}$)   (٢) ق($\overset{\frown}{أ س}$)   (٣) ق(∠ هـ)



$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$