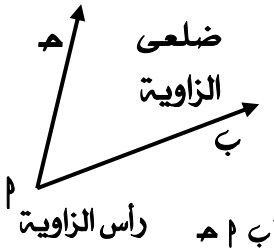
طرق قياس الزاوية

قد علمنا سابقا أن الزاوية هى مجرد إتحاد شعاعين لهما نفس نقطة البداية تسمى هذه النقطة رأس الزاوية ويسمى الشعاعان بضلعى الزاوية

ففى الشكل المقابل :

- $\overrightarrow{أب} \cup \overrightarrow{أحـ}$ شعاعان
- يمثلان ضلعا الزاوية
- النقطة أ تمثل رأس الزاوية
- $\overrightarrow{أب} \cup \overrightarrow{أحـ} = (ب\hat{أ}حـ)$

ويمكن التعبير بها كالتالى $\angle ب أ حـ$



الزاوية الموجهة :-

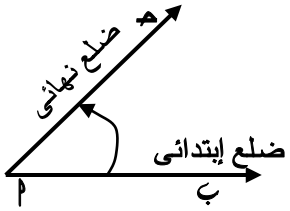
من التعريف السابق للزاوية نجد أن الزاوية السابقة يمكن قراءتها كالتالى : $\angle ب أ حـ$ أو $\angle حـ أ ب$

ولكن إذا عمدنا ترتيب الضلعين أحدهما نهائى والاخر إبتدائى فإن المفهوم السابق للزاوية يتغير ويصبح الزاوية الموجهة لذا فإنه فى حالة الزاوية الموجهة تكون الزاوية عبارة عن زوج مرتب من الاشعة مسقطه الاول هو الضلع الابتدائى والمسقط الثانى هو الضلع النهائى

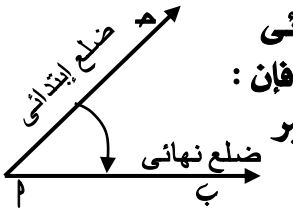
تعريف الزاوية الموجهة :

هى زوج مرتب من شعاعين (هما ضلعا الزاوية) لهما نفس نقطة البداية تسمى رأس الزاوية

فى الشكل المقابل :



(١) إذا اعتبرنا ان الضلع الابتدائى هو $\overrightarrow{وأ}$ والضلع النهائى هو $\overrightarrow{وب}$ فإن الزوج المرتب $(\overrightarrow{وب} ، \overrightarrow{وأ})$ يعبر عن الزاوية الموجهة $\angle ب و أ$



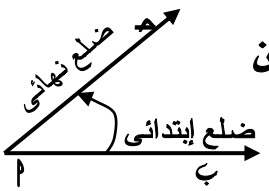
(٢) إذا اعتبرنا ان الضلع الابتدائى هو $\overrightarrow{وب}$ والضلع النهائى هو $\overrightarrow{وأ}$ فإن : الزوج المرتب $(\overrightarrow{وب} ، \overrightarrow{وأ})$ يعبر عن الزاوية الموجهة $\angle ب و أ$

ملحوظة مهمة :

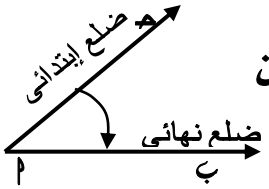
- الزاوية الموجهة $(أ و ب) \neq$ الزاوية الموجهة $(ب و أ)$
- فى الزاوية الموجهة يرسم سهم خارج من الضلع الابتدائى الى النهائى

القياس الموجب والقياس السالب للزاوية الموجهة

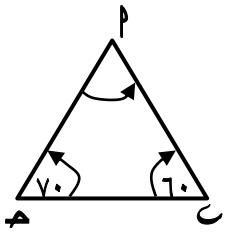
(١) قياس الزاوية الموجهة يكون موجب إذا كان الإتجاه من الضلع الابتدائى الى النهائى فى عكس حركة عقارب الساعة

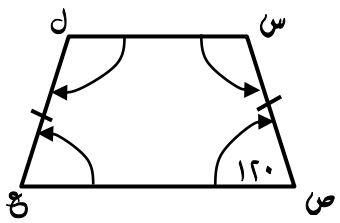


(٢) قياس الزاوية الموجهة يكون سالب إذا كان الإتجاه من الضلع الابتدائى الى النهائى فى نفس حركة عقارب الساعة

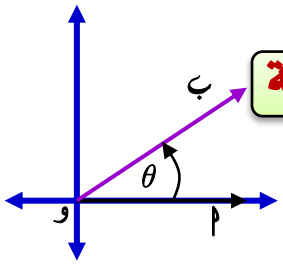


تدريب : اوجد قياس كلا من الزوايا الاتية





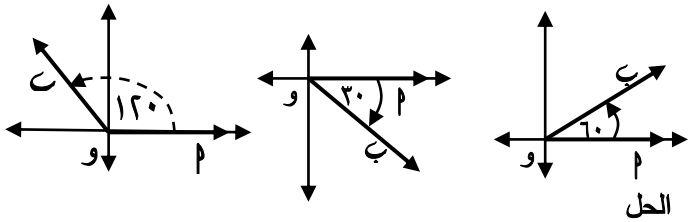
الوضع القياسى للزاوية الموجهة



تكون الزاوية الموجهة فى الوضع القياسى إذا تحقق :

- رأس الزاوية منطبق على نقطة الاصل
- الضلع الابتدائى للزاوية ينطبق على محور السينات الموجب

مثال : أوجد قياس كلا من الزوايا الموجهة الاتية :



الحل

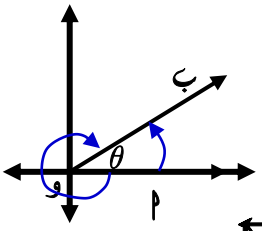
(١) ق$(\hat{ب و أ})$ الموجهة القياسية $= ٦٠°$

(٢) ق$(\hat{ب و أ})$ الموجهة القياسية $= -٣٠°$

(٣) ق$(\hat{ب و أ})$ الموجهة القياسية $= +١٢٠°$

قياس الزاوية الموجهة فى الوضع القياسى

الزاوية الموجهة فى الوضع القياسى
لها قياسان إحداهما موجب
والاخر سالب وذلك كالتالى:



فى الشكل المقابل :

الزاوية م و ب التى صنعها الضلع النهائى $\overrightarrow{و ب}$ مع الضلع الابتدائى $\overrightarrow{و م}$

فإذا كانت θ = ٦٠ على سبيل المثال فإن الضلع النهائى يكون مساره كالتالى :

المسار الاول هو انه دار فى عكس حركة عقارب الساعة وذلك ما يبينه السهم الاول

وفى تلك الحالة ⟸ ق(م $\hat{و}$ ب) = + ٦٠

المسار الثانى انه دار فى نفس حركة عقارب الساعة وذلك ما يبينه السهم الثانى

وفى تلك الحالة ⟸ ق(م $\hat{و}$ ب) = - ٣٠٠

ونلاحظ أن مجموع مقياسى القياسين الموجب والسالب = ٣٦٠

ملاحظات مهمة :

(١) ق(م $\hat{و}$ ب) الموجهة = - ق(ب $\hat{و}$ م) الموجهة
فمثلا إذا كان: ق(م $\hat{و}$ ب) الموجهة = ٧٠
⟸ ق(ب $\hat{و}$ م) الموجهة = - ٧٠

(٢) لكل زاوية موجهة فى الوضع القياسى قياسان إحداهمنا موجب والاخر سالب

(٣) القياس الموجب للزاوية السالبة س = س + ٣٦٠

(٤) القياس السالب للزاوية الموجبة س = س – ٣٦٠

مثال ٣ : اوجد القياس الموجب لكلا من الزوايا الاتية

(١) θ = - ٦٠ (٢) θ = - ١٦٠° (٣) θ = - ٣٠٠°

الحل

(١) القياس الموجب للزاوية - ٦٠ = - ٦٠ + ٣٦٠ = ٣٠٠°
(٢) القياس الموجب للزاوية - ١٦٠ = - ١٦٠ + ٣٦٠ = ٢٠٠°
(٣) القياس الموجب للزاوية – ٣٠٠ = - ٣٠٠ + ٣٦٠ = ٦٠°

مثال ٤ : أوجد القياس السالب لكل من الزوايا الاتية

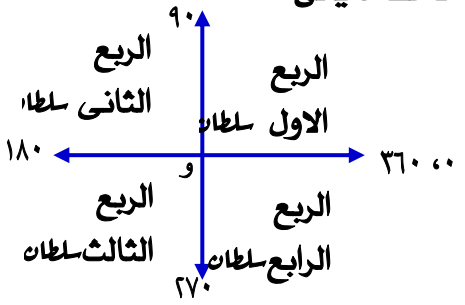
(١) ١٢٠° (٢) ٨٠° (٣) ٢٤٠°

الحل

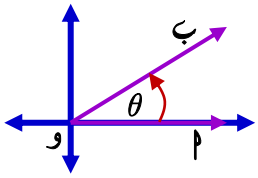
(١) القياس السالب للزاوية ١٢٠° = ١٢٠ - ٣٦٠ = - ٢٤٠°
(٢) القياس السالب للزاوية ٨٠ = ٨٠ – ٣٦٠ = - ٢٨٠°
(٣) القياس السالب للزاوية ٢٤٠ = ٢٤٠ – ٣٦٠ = - ١٢٠°

موقع الزاوية فى المستوى الاحداثى المتعامد

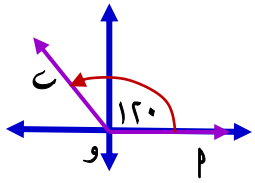
المستوي الاحداثى المتعامد كما بالشكل ينقسم الى اربعة ارباع لاحظ ما ياتى



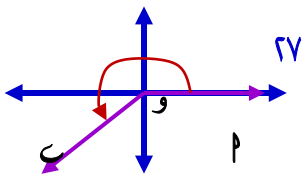
(١) إذا كان: ٠ < θ < ٩٠
فإن الزاوية θ تقع فى الربع الاول



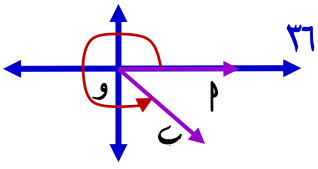
(٢) إذا كان: ٩٠ < θ < ١٨٠
فإن الزاوية θ تقع فى الربع الثانى



(٣) إذا كان: ١٨٠ < θ < ٢٧٠
فإن الزاوية θ تقع فى الربع الثالث

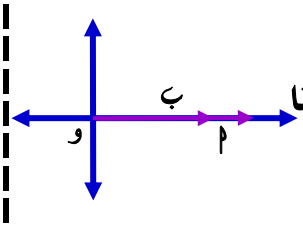


(٤) إذا كان: ٢٧٠ < θ < ٣٦٠
فإن الزاوية θ تقع فى الربع الرابع

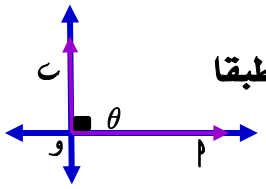


وفى حالة ان وقع الضلع النهائى على محور من المحاور مثل س أو ص الموجب او السالب تسمى الزاوية فى تلك الحالة بالزاوية المحورية او الزاوية الربعية كالتالى :

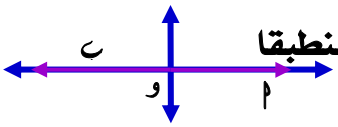
(١) إذا كانت θ = صفر أو ٣٦٠
فإن الضلع النهائى يكون منطبقا على المحور س الموجب



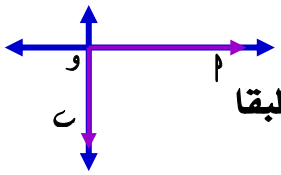
(٢) إذا كانت $\theta = ٩٠$
فإن الضلع النهائى يكون منطبقا
على المحور ص الموجب



(٣) إذا كانت $\theta = ١٨٠$
فإن الضلع النهائى يكون منطبقا
على محور س السالب

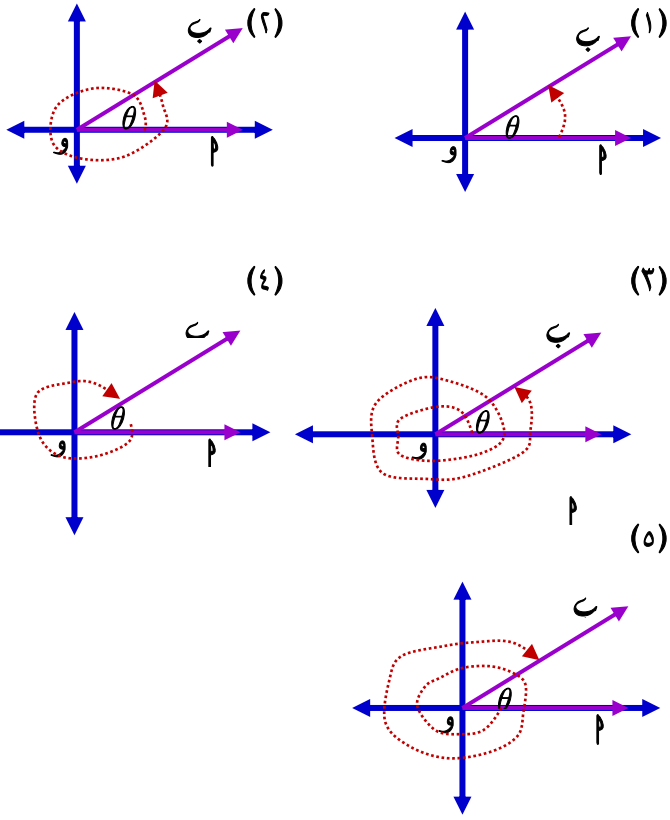


(٤) إذا كانت $\theta = ٢٧٠$
فإن الضلع النهائى يكون منطبقا
على محور ص السالب



الزوايا المتكافئة

تأمل الاشكال الاتية بدقة ولاحظ :



(١) الضلع النهائى سار فى عكس عقارب الساعة بزاوية θ فقط لذا فإن الانفراج الحادث بين الضلع الابتدائى والنهائى هو θ

(٢) الضلع النهائى سار فى عكس عقارب الساعة بزاوية θ + دورة كاملة اى ان قياس الزاوية $= \theta + ٣٦٠$ ولكن الانفراج الحادث بين الضلعين الابتدائى والنهائى يظل كما هو $= \theta$

(٣) الضلع النهائى سار فى عكس عقارب الساعة بزاوية θ + دورتين كاملتين اى ان قياس الزاوية $= \theta + ٢ \times ٣٦٠$ ولكن الانفراج الحادث بين الضلعين الابتدائى والنهائى يظل كما هو $= \theta$

(٤) الضلع النهائى سار فى نفس حركة عقارب الساعة بزاوية دورة كاملة $-\theta$ اى ان قياس الزاوية $= -\theta + ٣٦٠$ ولكن الانفراج الحادث بين الضلعين الابتدائى والنهائى يظل كما هو $= \theta$

(٥) الضلع النهائى سار فى نفس حركة عقارب الساعة بزاوية دورتين كاملتين $-\theta$ اى ان قياس الزاوية $= -\theta + ٢ \times ٣٦٠$ ولكن الانفراج الحادث بين الضلعين الابتدائى والنهائى يظل كما هو $= \theta$

فى كل الاشكال السابقة نجد أن الانفراج الحادث بين الضلع الابتدائى والنهائى ثابت فى كل مرة وهو $= \theta$ لذا فإن جميع الزوايا السابقة يقال عنها انها متكافئة

الزوايا المتكافئة :

هى تلك الزوايا التى لها نفس الضلع النهائى عندما تكون فى الوضع القياسى

ونستنتج مما سبق أن :

$$\theta = \theta \pm ٣٦٠ = \theta \pm ٢ \times ٣٦٠ = \theta \pm ٣ \times ٣٦٠$$

ملاحظات مهمة :

(١) إذا كانت θ قياس زاوية فإن جميع الزوايا التى قياسها $\{\theta + ن \times ٣٦٠\}$ تكون متكافئة حيث ن ∈ ص

(٢) يمكن جمع (إضافة) أو طرح أى عدد من الدورات الكاملة للزاوية وذلك لن يؤثر فى موضع الضلع النهائى فى المستوى الاحداثى المتعامد فى الوضع القياسى للزاوية أى أنه يمكن اضافة أى عدد من الـ ٣٦٠ للزاوية أو طرحها منها ولن يؤثر ذلك على الزاوية

(٣) لمعرفة موقع الزاوية فى المستوى الاحداثى المتعامد يجب ان تنحصر بين] ٠ ، ٣٦٠ [فإذا زادت الزاوية عن ٣٦٠ يجب طرح دورة او دورتين او ثلاث دورات او اكثر

(٤) عندما تكون الزاوية سالبة نضيف عدد أكبر منها وعندما تكون الزاوية موجبة نطرح منها عدد اصغر منها ولاحظ ان :

دورة واحدة = ٣٦٠

دورتين = ٢ × ٣٦٠ = ٧٢٠

ثلاث دورات = ٣ × ٣٦٠ = ١٠٨٠

اربعة دورات = ٤ × ٣٦٠ = ١٤٤٠

خمسة دورات = ٥ × ٣٦٠ = ١٨٠٠

مثال ١ : عين الربع الذى تقع فيه كلا من الزوايا الاتية

(١) ٥٣٠ (٢) ١٦٧٠ (٣) -٧٤٠

(٤) -٣٥٣٠ (٥) ٣٤٥

الحل

(١) ٥٣٠ الزاوية موجبة واكبر من ٣٦٠ لذا يجب طرح منها عدد أصغر منها وهو دورة واحدة ٣٦٠

٥٣٠ – ٣٦٠ = ١٧٠ ∴ الزاوية فى الربع الثانى

(٢) ١٦٧٠ الزاوية موجبة واكبر من ٣٦٠ لذا يجب طرح عدد من الدورات الكاملة اصغر منها وهو اربعة دورات وهى ١٤٤٠

∴ θ = ١٦٧٠ – ١٤٤٠ = ٢٣٠ ∴ الزاوية فى الربع الثالث

(٣) -٧٤٠ الزاوية سالبة واصغر من الصفر لذا يجب إضافة عدد من الدورات الكاملة مجموعها اكبر من الزاوية وهى ٣ دورات = ١٠٨٠

θ = -٧٤٠ + ١٠٨٠ = ٣٤٠ ∴ الزاوية فى الربع الرابع

(٤) -٣٥٣٠ زاوية سالبة يجب إضافة عدد من الدورات الكاملة مجموعها أكبر من الزاوية وهى ١٠ دورات كاملة وهى = ٣٦٠٠

θ = -٣٥٣٠ + ٣٦٠٠ = ٧٠ ∴ الزاوية فى الربع الاول

(٥) ٣٤٥ زاوية موجبة تنحصر بين] ٠ ، ٣٦٠ [لذا لن يتم اضافة اى عدد من الدورات الكاملة او الطرح منها

θ = ٣٤٥ زاوية تقع فى الربع الرابع

تدريب : حدد الربع الذى تقع فيه الزوايا الاتية

(١) صفر (٢) ٣٦٠ (٣) ١٥٠٠

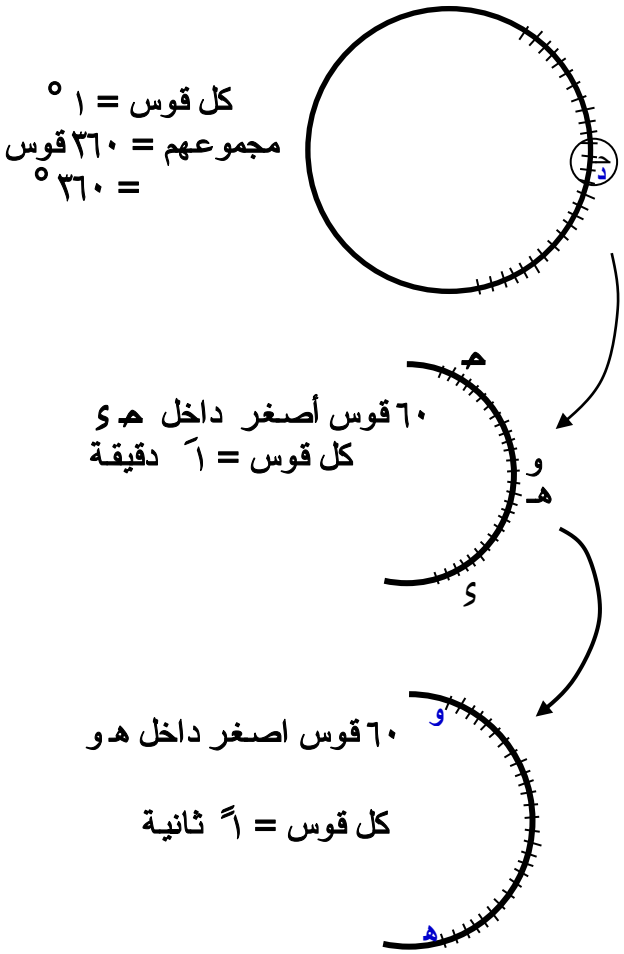
(٤) -١٣٣٦ (٥) -٢٣٨٥ (٦) ١٨٩٠

(٧) -١٧١٠ (٨) ٧٥٥

وحدات قياس الزاوية

القياس الستينى للزاوية

قام علماء الرياضيات بتقسيم الدائرة إلى ٣٦٠ قوس متساوية كل قوس من هذة الأقواس يسمى الدرجة ويرمز له بالرمز ° ثم قاموا بتقسيم كل قوس من ال ٣٦٠ قوس إلى ٦٠ قوس أصغر كل قوس يسمى دقيقة ويرمز لها بالرمز ′ ثم تم تقسيم هذة الأقواس إلى ٦٠ قوس أصغر تمثل الثوان ويرمز لها بـ ″



لذا فالقياس الستينى للزاوية يشبه أو يماثل القياس الزمن للوقت

فالقياس الستينى مكون من درجات وكل درجة بها ٦٠ دقيقة وكل دقيقة بها ٦٠ ثانية

وكذلك الوقت فالساعة تناظر الدرجات حيث بها ٦٠ دقيقة والدقيقة بها ٦٠ ثانية

ويجب ملاحظة أن :

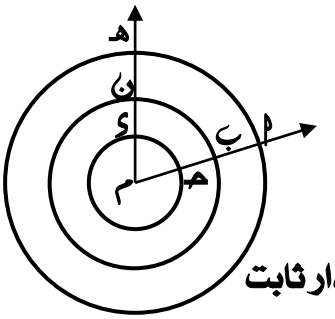
- ١ ° = ٦٠ ′
- ١ ′ = ٦٠ ″
- ١ ° = ٣٦٠٠ ″

القياس الدائرى للزاوية

يعتمد هذا القياس على طول القوس من الدائرة التى تحصرة الزاوية المركزية المراد قياسها وكذلك طول نصف القطر للدائرة

حقيقة هند سية :

فى الدوائر المتحدة المركز إذا رسمت زاوية مركزية فإن النسبة بين طول القوس المقابل لهذه الزاوية المركزية إلى طول نصف قطر الدائرة المناظرة له يساوى مقدار ثابت لجميع الدوائر المتحدة المركز كالتالى :



أى أن :

$$\frac{أهـ}{أم} = \frac{ب ن}{ب م} = \frac{هـ ء}{هـ م} = \text{مقدار ثابت}$$

هذا المقدار الثابت هو

القياس الدائرى للزاوية المركزية م أى ان القياس الدائرى للزاوية المركزية يعتمد على طول القوس المقابل لها وكذلك طول نصف قطر دائرتها فيكون

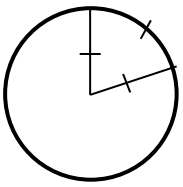
القياس الدائرى للزاوية المركزية

$$= \frac{\text{طول القوس المقابل لها}}{\text{نصف قطر دائرتها}} = \frac{ل}{نق} \Leftarrow \theta^{ء} = \frac{ل}{نق}$$

الزاوية النصف قطرية

قام علماء الرياضيات بقياس نصف قطر دائرة ما وليكن نق وقاموا بتقسيم الدائرة الى اقواس طول كلا منها = نق أى نصف قطر الدائرة فوجدوا الدائرة قد قسمت الى ٦ اقواس و ٠,٢٨ تقريبا من القوس فكل زاوية قابلت اى قوس من الاقواس الستة سميت بالزاوية النصف قطرية لأن طول القوس المقابل لها = نصف قطر دائرتها

الزاوية النصف قطرية :
هى زاوية مركزيه طول القوس المقابل لها = طول نصف قطر دائرتها



وعندما يكون ل = نق فإن $\theta = \frac{ل}{نق} = \frac{ل}{ل} = ١^{ء}$

أى ان وحدة القياس الزاوية بالتقدير الدائرى هى الزاوية النصف قطرية

المعنى الحقيقى لوحدة قياس الزاوية

ما معنى قولنا أن الزاوية

$\theta = ٤٠^{\circ}\ ٣٠'\ ٢٠''$

هذا يعنى انه لدينا زاوية ما إذا وضعنا هذه الزاوية فى دائرة مقسمة الى ٣٦٠ قوس وكل قوس منهم مقسم الى ٦٠ قوس اصغر وكذلك كل قوس مقسم الى ٦٠ اخرين اصغر ووضعنا الضلع الابتدائى لهذه الزاوية على احد الاقواس التى تمثل الدرجات فإن ضلعها النهائى يكون تجاوز القوس رقم ٤٠ ولكن بعد ٣٠ قوس من الاقواس الصغرى التى تمثل الدقائق وكذلك تجاوز القوس رقم ٣٠ من الاقواس الصغرى التى تمثل الدقائق وثبت عند القوس رقم ٢٠ الذى يمثل الثوانى اى ان قياس الزاوية بالتقدير الستينى هو معرفة كم قوس من الاقواس التى تمثل الدرجات والدقائق والثوانى ستكون مقابلة لهذه الزاوية

ما معنى قولنا أن أن الزاوية

$\theta^{ء} = ١,٥^{ء}$ زاوية نصف قطرية

ايضا نجد انه لدينا زاوية ما وضعناها فى الدائة المقسمة الى ٦,٢٨ من الاقواس التى طولها = طول نصف قطر الدائرة بحيث ضلعها الابتدائى على بداية احد الاقواس والنهائى نجده تجاوز قوس واحد وثبت فى منتصف القوس الثانى

اى ان قياس الزاوية بالتقدير الدائرى هو معرفة كم قوس يقابل الزاوية من تلك الاقواس التى طولها = طول نصف قطر الدائرة

ملاحظات مهمة :

(١) إذا كان طول نصف قطر الدائرة نق = وحدة الاطوال فإن

قياس الزاوية بالتقدير الدائرى = طول القوس المقابل لها

(٢) الزاوية المركزية التى تحصر قوسا طوله ضعف طول قطر الدائرة يكون قياسها = $٢^{ء}$

حيث ل = ٢ نق

(٣) الزاوية المركزية التى قياسها الدائرى = $٠,٥^{ء}$ يكون طول القوس المقابل لها = نصف طول نصف قطر الدائرة

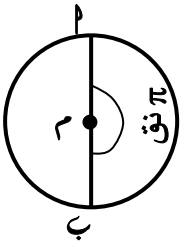
العلاقة بين التقديرين الدائرى والستينى للزاوية

المعنى الحقيقى للعلاقة بين التقديرين الدائرى والستينى هو معرفة كم قوسا ستينيا وكم قوس دائريا يقابلان نفس الزاوية او بطريقة أخرى

إذا كان لدينا زاوية ما قياسها الستينى ٣٠° لذا فإنها تقابل ٣٠ قوس

لتحويلها للتقدير الدائرى يجب معرفة الـ ٣٠ قوس تقابل كم من الاقواس فى النظام الدائرى ولإيجاد العلاقة بينهما لاحظ ما يأتى :

لنفرض زاوية مركزية تقابل نصف الدائرة



قياسها بالتقدير الدائرى

$\theta^{ج} = \frac{ل}{نق} = \frac{\pi\ نق}{نق} = \pi$

$\therefore \theta^{ج} = \pi$ ـــــــــ (١)

قياسها بالتقدير الستيني

القياس الستينى لهذه الزاوية المركزية التى تقابل نصف الدائرة = ١٨٠

$\theta^{\circ} = ١٨٠$ ـــــــــ (٢)

وبقسمة المعادلة (١) على (٢) أو العكس نجد أن :

$\frac{\theta^{ج}}{\theta^{\circ}} = \frac{\pi}{١٨٠}$ أو $\frac{\theta^{\circ}}{\theta^{ج}} = \frac{١٨٠}{\pi}$

$\theta^{\circ} = \frac{١٨٠ \times \theta^{ج}}{\pi}$ و $\theta^{ج} = \frac{\pi \times \theta^{\circ}}{١٨٠}$

ملاحظات مهمة :

(١) إذا علم قياس زاوية معينة بالتقدير الدائرى بدلالة π فإنه يتم التعويض عن π بـ ١٨٠ مباشرة دون الرجوع للقانون وإذا استخدمنا القانون سنحصل على نفس النتيجة

(٢) إذا علم قياس زاوية بالتقدير الستينى وأراد قياسها بالتقدير الدائرى فإنه نوجد الزاوية بالتقدير الدائرى بدلالة π إذا لم يطلب غير ذلك

مثال ١ : أوجد القياس الدائرى لكلا من الزوايا الاتية مقربا الناتج لأقرب رقمين عشريين

(١) ٣٠ (٢) ٤٥ (٣) ٦٠ (٤) ٩٠ (٥) ١٢٠

(٦) ٣٠′ ١٢٠° (٧) ٤٠″ ٥٠′ ١٠٠°

الحل

(١) $\theta = ٣٠^{\circ}$

$\Longleftarrow \theta^{ج} = \frac{\pi \times ٣٠}{١٨٠} = \frac{\pi \times \theta^{\circ}}{١٨٠} = \frac{\pi}{٦} = ٠,٥٢^{ج}$

(٢) $\theta = ٤٥^{\circ}$ $\Longleftarrow \theta^{ج} = \frac{\pi \times \theta^{\circ}}{١٨٠}$

$\theta^{ج} = \frac{\pi \times ٤٥}{١٨٠} = \frac{\pi}{٤} = ٠,٧٩^{ج}$

(٣) $\theta = ٦٠^{\circ}$ متروك

.....

.....

(٤) $\theta = ٩٠ \Longleftarrow \theta^{ج} = \frac{\pi \times \theta^{\circ}}{١٨٠}$

$\theta^{ج} = \frac{\pi \times ٩٠}{١٨٠} = \frac{\pi}{٢} = ١,٥٨^{ج}$

(٥) $\theta = ١٢٠ \Longleftarrow \theta^{ج} = \frac{\pi \times \theta^{\circ}}{١٨٠}$

$\theta^{ج} = \frac{\pi \times ١٢٠}{١٨٠} = \frac{\pi٢}{٣} = ٢,٠٩^{ج}$

(٦) $\theta = ١٢٠°\ ٣٠′$ $\Longleftarrow \theta^{ج} = \frac{\pi \times \theta^{\circ}}{١٨٠}$

$\theta^{ج} = \frac{\pi \times ١٢٠°\ ٣٠′}{١٨٠} = ٢,١^{ج}$

(٧) $\theta = ١٠٠°\ ٥٠′\ ٤٠″$ متروك

مثال ٢ : أوجد القياس الستينى لكلا من الزوايا الاتية

(١) ٥,٥ (٢) ٠,٨٢ (٣) ٢,٨ (٤) ١

(٥) $\frac{\pi٢}{٣}$ (٦) $\frac{\pi٤}{٣}$ (٧) $\frac{\pi٣}{٢}$ (٨) $\frac{\pi}{٢}$

الحل

(١) $\theta = ٥,٥^{ج} \Longleftarrow \theta^{\circ} = \frac{١٨٠ \times \theta^{ج}}{\pi}$

$\theta^{\circ} = \frac{١٨٠ \times ٥,٥}{\pi} = ٣١٥°\ ٧′\ ٣٦″$

(٢) $\theta = ٠,٨٢^{ج} \Longleftarrow \theta^{\circ} = \frac{١٨٠ \times \theta^{ج}}{\pi}$

$\theta^{\circ} = \frac{١٨٠ \times ٠,٨٢}{\pi} = ٤٧° ٤٦′\ ٥٧″ \simeq ٤٧^{\circ}$

(٣) $\theta = ٢,٨^{ج} \Longleftarrow \theta^{\circ} = \frac{١٨٠ \times \theta^{ج}}{\pi}$

$\theta^{\circ} = \frac{١٨٠ \times ٢,٨}{\pi} = ١٦٠°\ ٢٥′\ ٤١″$

(٤) بنفسك

(٥) $\theta^{ج} = \frac{\pi ٢}{٣} \Longleftarrow \theta^{\circ} = \frac{\theta^{ج} \times ١٨٠}{\pi}$

$\theta^{\circ} = \frac{\frac{\pi ٢}{٣} \times ١٨٠}{\pi} = \frac{٢ \times ١٨٠}{٣} = ١٢٠^{\circ}$

(٦) $\theta^{ج} = \frac{\pi ٤}{٣} \Longleftarrow \theta^{\circ} = \frac{\theta^{ج} \times ١٨٠}{\pi}$

$\theta^{\circ} = \frac{\frac{\pi ٤}{٣} \times ١٨٠}{\pi} = \frac{٤ \times ١٨٠}{٣} = ٢٤٠^{\circ}$

(٧) $\theta^{ج} = \frac{\pi ٣}{٢} \Longleftarrow \theta^{\circ} = \frac{٣ \times ١٨٠}{٢} = ٢٧٠^{\circ}$

(٨) $\theta^{ج} = \frac{\pi}{٢}$ بنفسك

مثال ٣ : أوجد بدلالة π القياس لكلا من الزوايا الاتية

(١) ١٣٥° (٢) ١٨٠° (٣) ٣٦٠° (٤) ٢٧٠°

(٥) ١٥٠° (٦) ٣٠٠° (٧) -٢٧٠° (٨) -٨٧٠°

الحل

(١) $\theta^{\circ} = ٩٣٥ \Longleftarrow \theta^{ج} = \frac{\pi \times \theta^{\circ}}{١٨٠} = \frac{\pi \times ١٣٥}{١٨٠} = \frac{\pi ٣}{٤}$

(٢) $\theta^{\circ} = ٩٨٠ \Longleftarrow \theta^{ج} = \frac{\pi \times \theta^{\circ}}{١٨٠} = \frac{\pi \times ١٨٠}{١٨٠} = \pi$

(٣) $\theta^{\circ} = ٩٦٠ \Longleftarrow \theta^{ج} = \frac{\pi \times \theta^{\circ}}{١٨٠} = \frac{\pi \times ٣٦٠}{١٨٠} = \pi ٢$

٤ ، ٥ ، ٦ متروك

$\theta(٧)^{\circ} = -٢٧٠ + ٣٦٠ = ٩٠$

$\Longleftarrow \theta^{ج} = \frac{\pi \times \theta^{\circ}}{١٨٠} = \frac{\pi \times ٩٠}{١٨٠} = \frac{\pi}{٢}$

$\theta(٨)^{\circ} = -٨٧٠ + ١٠٨٠ = ٢١٠$

$\Longleftarrow \theta^{ج} = \frac{\pi \times \theta^{\circ}}{١٨٠} = \frac{\pi \times ٢١٠}{١٨٠} = \frac{\pi ٧}{٦}$

مثال ٤ : أوجد القياس السالب لكلا من الزوايا الموجبة الاتية

(١) ٧٢° (٢) $١٥٠^{\circ}\ ٣٠'\ ٤٠''$ (٣) ٤٠٥°

(٤) ١٥٠° (٥) ٢٧٠° (٦) ٦٠٠

الحل

(١) $\theta = ٧٢ - ٣٦٠ = -٢٨٨$

(٢) $\theta = ١٥٠^{\circ}\ ٣٠'\ ٤٠'' - ٣٦٠ = -٢٠^{\circ}\ ٢٩'\ ٢٠''^{\circ}$

(٣) $\theta = ٤٠٥ - ٣٦٠ = ٤٥ - = ٣١٥^{\circ}$

(٤) $\theta = ١٥٠ - ٣٦٠ = -٢١٠$

٥ ، ٦ متروك

مثال ٥ : أوجد القياس الموجب لكلا من الزوايا السالبة الاتية

(١) -٧٢ (٢) -٨٧٠ (٣) $-٣٠^{\circ}\ ٤٠'\ ٩٠٠$

(٤) -١٢٠ (٥) -٣٥٠ (٦) -٢١٠

الحل

(١) $\theta = -٧٢ + ٣٦٠ = ٢٨٨^{\circ}$

(٢) $\theta = -٨٧٠ + ١٠٨٠ = ٢١٠^{\circ}$

(٣) $\theta = -٣٠^{\circ}\ ٤٠'\ ٣٠'' + ٣٦٠^{\circ} = ٣٠^{\circ}\ ٢٠'\ ٢٥٩^{\circ}$

(٤) $\theta = -١٢٠ + ٣٦٠ = ٢٤٠^{\circ}$

(٥) $\theta = -٣٥٠ + ٣٦٠ = ١٠^{\circ}$

(٦) بنفسك

مثال ٦ : أوجد زاويتين إحداهما قياسها موجب والاخرى قياسها سالب مكافئتين لكل زاوية من الزوايا التى قياسها

(١) ١٣٥ (٢) -٢٥ (٣) $١٧٩^{\circ}\ ٢٦'$

(٤) ٩٤٠ (٥) $\frac{\pi ١١}{٨}$ (٦) $\frac{\pi ٢}{٣}$

الحل

(١) س = ١٣٥

الزاوية الموجبة التى تكافئها = ١٣٥ + ٣٦٠ = ٤٩٥

الزاوية السالبة التى تكافئها = ١٣٥ − ٣٦٠ = −٢٢٥

(٢) س = −٢٥

الزاوية الموجبة التى تكافئها = −٢٥ + ٣٦٠ = ٣٣٥

الزاوية السالبة التى تكافئها = −٢٥ − ٣٦٠ = −٣٨٥

(٣) بنفسك

(٤) س = ٩٤٠ $\Longleftarrow \theta = ٩٤٠ - ٧٢٠ = ٢٢٠$

∴ س = ٢٢٠

الزاوية الموجبة التى تكافئها = ٢٢٠ + ٣٦٠ = ٥٨٠

الزاوية السالبة التى تكافئها = ٢٢٠ − ٣٦٠ = −١٤٠

(٥) $\theta = \frac{\pi ١١}{٨}$

الزاوية الموجبة التى تكافئها $= \frac{\pi ١١}{٨} + \pi ٢ = \frac{\pi ٢٧}{٨}$

الزاوية السالبة التى تكافئها $= \frac{\pi ١١}{٨} - \pi ٢ = -\frac{\pi ٥}{٨}$

(٦) بنفسك

مثال ٧ : أوجد القياس الستينى والدائرى للزاوية المركزية التى تحصر قوسا طوله ل فى دائرة طول نصف قطرها نق إذا كان :

(١) ل = ١٢ سم ، نق = ١٠ سم

(٢) ل = ١٤ سم ، نق = ٧ سم

(٣) ل = π٢ ، نق = ٨ سم

(٤) ل = ٤,٥ سم ، نق = ٩ سم

الحل

(١) $\theta = \frac{ل}{نق} \Longleftarrow \theta^{ص} = \frac{١٢}{١٠} = ١,٢^{ص}$

$\theta^{\circ} = \frac{\theta^{ص} \times ١٨٠}{\pi} = \frac{١,٢ \times ١٨٠}{\pi} = ...$

(٢) $\theta = \frac{ل}{نق} \Longleftarrow \theta^{ص} = \frac{١٤}{٧} = ٢^{ص}$

$\theta^{\circ} = \frac{\theta^{ص} \times ١٨٠}{\pi} = \frac{٢ \times ١٨٠}{\pi} = ...$

(٣) $\theta = \frac{ل}{نق} \Longleftarrow \theta^{ص} = \frac{\pi ٢}{٨} = \frac{\pi}{٤}$

$\theta^{\circ} = \frac{١٨٠}{٤} = ٤٥^{\circ} \Longleftarrow$

(٤) بنفسك

مثال ٨ : أوجد طول نصف قطر الدائرة المرسوم بها زاوية مركزية قياسها θ وطول القوس المحصور ل إذا كان :

(١) $\theta^{ص} = \frac{\pi ٢}{٣}$ ، ل = ٢٠ سم

(٢) $\theta^{\circ} = ١٥٠$ ، ل = ٢٥ سم

(٣) $\theta^{ص} = ١,٥^{ص}$ ، ل = ٣٥ سم

(٤) $\theta^{\circ} = ١٢٠$ ، ل = ٢٠ سم

الحل

(١) $\because \theta^{ص} = \frac{ل}{نق} \Longleftarrow \frac{\pi ٢}{٣} = \frac{٣٠}{نق}$

$نق = \frac{٣ \times ٢٠}{\pi ٢} = \frac{٣٠}{\pi} = ٩,٥٥$ سم $\Longleftarrow$

(٢) $\because \theta^{ص} = \frac{ل}{نق}$ ولكن $\theta^{\circ} = ١٥٠$

أى أن الزاوية بالتقدير الستينى لذا يجب تحويلها الى التقدير الدائرى $\therefore \theta^{ص} = \frac{\pi ١٥٠}{١٨٠} = \frac{\pi ٥}{٦}$

$\therefore \theta^{ص} = \frac{ل}{نق} \Longleftarrow \frac{\pi ٥}{٦} = \frac{٢٥}{نق}$

$نق = \frac{٦ \times ٢٥}{\pi ٥} = \frac{٣٠}{\pi} = ٩,٥٥$ سم $\Longleftarrow$

(٣) $\because \theta^{ص} = \frac{ل}{نق} \Longleftarrow ١,٥ = \frac{٣٥}{نق}$

$\therefore نق = \frac{٣٥}{١,٥} = ٢٣,٣٣$ سم

(٤) بنفسك

مثال ٩ : أوجد لأقرب جزء من عشرة طول القوس من الدائرة التى طول نصف قطرها نق ويقابله زاوية مركزية قياسها θ عندما

(١) نق = ١٢,٥ سم ، نق = ١,٦^{ص}

(٢) نق = ٢٠ سم ، θ = ٢,٤^{ص}

(٣) نق = ١٥ سم ، س = ٦٠

(٤) نق = ٢٠ سم ، س = ٢٤٠$^{\circ}$

الحل

(١) $\because \theta^{ص} = \frac{ل}{نق} \Longleftarrow ل = \theta^{ص} \times نق$

ل = ١٢,٥ × ١,٦ = ٢٠ سم

(٢) بنفسك

(٣) س = ٦٠$^{\circ}$

ولكن يجب ان تكون الزاوية بالتقدير الدائرى

$\therefore \theta^{ص} = \frac{\pi ٦٠}{١٨٠} = \frac{\pi}{٣}$

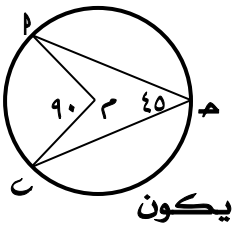
$\because \theta^{ص} = \frac{ل}{نق} \Longleftarrow ل = \theta^{ص} \times نق$

$\therefore ل = ١٥ \times \frac{\pi}{٣} = ٥\pi = ١٥,٧$ سم

(٤) بنفسك

مثال ١٠ : أوجد محيط الدائرة التى فيها قوس طوله ١٢سم ويقابل زاوية محيطية قياسها ٤٥°

الحل



محيط الدائرة = ٢ π نق

يجب إيجاد نصف قطر الدائرة

∵ θ^{c} = $\frac{ل}{نق}$ ولإيجاد نق يجب أن يكون

معلوم لدينا ل ، θ^{c} حيث θ^{c}

هى القياس الدائرى للزاوية المركزية

قياس الزاوية المركزية = ضعف المحيطية

المشتركة معها فى نفس القوس

حيث اننا نتعامل مع الزاوية المركزية

∴ θ = ٢ × ٤٥ = ٩٠

∴ θ^{c} = $\frac{\pi \times \theta^{\circ}}{١٨٠}$ = $\frac{\pi \times ٩٠}{١٨٠}$ = $\frac{\pi}{٢}$

∵ θ^{c} = $\frac{ل}{نق}$ ⟸ $\frac{\pi}{٢}$ = $\frac{١٢}{نق}$ ⟸ نق = $\frac{٢ \times ١٢}{\pi}$ = $\frac{٢٤}{\pi}$

المحيط = ٢ π نق = ٢ × π × $\frac{٢٤}{\pi}$ = ٢ × ٢٤ = ٤٨ سم

مثال ١١ : النسبة بين قياسات زوايا شكل رباعى هى ٢ : ٣ : ٥ : ٢ أوجد القياس الدائرى والستينى لهذه الزوايا

الحل

نفرض ان الزوايا هى على الترتيب أ ، ب ، هـ ، ء

∴ ق (أ) : ق (ب) : ق (هـ) : ق (ء) = ٢ : ٣ : ٥ : ٢

ق (أ) = ٢ك ق (ب) = ٣ك ق (هـ) = ٥ك

ق (ء) = ٢ك

ولكن مجموع زوايا الشكل الرباعى = ٣٦٠

∴ ٢ك + ٣ك + ٥ك + ٢ك = ٣٦٠

⟸ ١٢ك = ٣٦٠ ك = ٣٠

∴ ق (أ) = ٢ك = ٢ × ٣٠ = ٦٠

ق (ب) = ٣ك = ٢ × ٣٠ = ٦٠

ق (هـ) = ٥ك = بنفسك

ق (ء) = ٢ك = بنفسك

حول الزوايا للقياس الدائرى بنفسك

مثال ١٢ : زاويتان مجموعهما ١٣٠° والفرق بينهما $\frac{\pi}{٦}$ أوجد الزاويتان بالتقديران الدائرى والستينى

الحل

نفرض أن الزاويتان هما س ، ص لذا فإن :

س + ص = ١٣٠ ، س − ص = $\frac{\pi}{٦}$ = $\frac{١٨٠}{٦}$ = ٣٠

س + ص = ١٣٠

س − ص = ٣٠ بالجمع

٢س = ١٦٠ ⟸ ص = ٨٠°

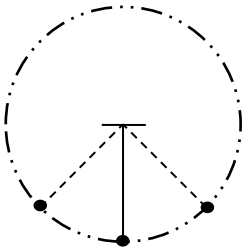
بالتعويض فى س + ص = ١٣٠

⟸ ٨٠ + ص = ١٣٠

ص = ١٣٠ − ٨٠ = ٥٠°

مثال ١٤ : بندول يتذبذب خلال زاوية قياسها الستينى ١٣٥° صانعا قوسا من دائرة طوله ١٢سم أوجد طول البندول

الحل



طول البندول يمثله نصف قطر الدائرة نق

الزاوية التى يتذبذب خلالها البندول هى الزاوية المركزية

س° = ١٣٥° بالتقدير الستينى

يجب تحويل الزاوية للتقدير الدائرى :

θ^{c} = $\frac{\pi \times ١٣٥}{١٨٠}$ = $\frac{\pi ٣}{٤}$

θ^{c} = $\frac{ل}{نق}$ ⟸ $\frac{\pi ٣}{٤}$ = $\frac{١٢}{نق}$

نق = $\frac{٤ \times ١٢}{\pi ٣}$ = $\frac{٤٨}{\pi ٣}$ = ٥,١ سم

∴ طول البندول = ٥,١ سم

الدوال المثلثية الأساسية ومقلوباتها

الدوال المثلثية هى دوال تربط بين أسواء كان قائما او حادا او منفرجا ودراستنا هذا العام ستتركز على الدوال المثلثية للزاوية الحادة فى المثلث القائم وهذه الدوال هي :

(١) دالة جيب الزاوية جا هـ

ويقابلها باللغة الإنكليزية sin

(٢) دالة جيب التمام جتا هـ

ويقابلها باللغة الإنكليزية co - sin = cos

(٣) دالة ظل الزاوية ظا هـ

ويقابلها باللغة الإنكليزية tan

والدوال السابقة دوال أساسية ومقلوباتها :

(١) دالة قاطع الزاوية قا هـ

ويقابلها باللغة الإنكليزية sec

(٢) دالة قاطع تمام الزاوية قتا هـ

ويقابلها باللغة الإنكليزية cosec

(٣)دالة ظل تمام الزاوية ظتا هـ

ويقابلها باللغة الإنكليزية cot

أى أن :

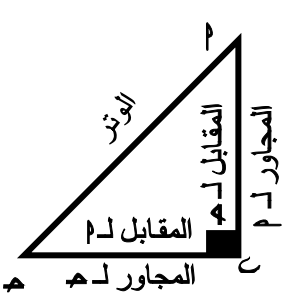
جا م = $\frac{١}{\text{قتا م}}$ ⟸ جا م × قتا م = ١

جتا م = $\frac{١}{\text{قا م}}$ ⟸ جتا م × قا م = ١

ظا م = $\frac{١}{\text{ظتا م}}$ ⟸ ظا م × ظتا م = ١

علاقة الدوال المثلية بالمثلث القائم

إذا كان م ب هـ Δ قائم الزاوية فى ب فإن هـ م وترا فى المثلث ، م ب ، ب هـ ضلعا القائمة ويكون



جا م = $\frac{\text{المقابل لـ م}}{\text{وتر المثلث}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{م جـ}}$

جتا م = $\frac{\text{المجاور لـ م}}{\text{وتر المثلث}} = \frac{\text{م ب}}{\text{م جـ}}$

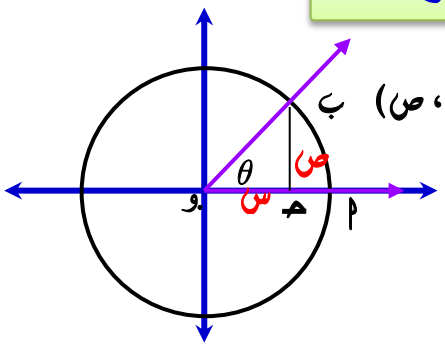
ظا م = $\frac{\text{المقابل لـ م}}{\text{المجاور لـ م}}$

أكمل

جا هـ = ... ظا هـ = ... جتا هـ = ...

قتا هـ = ... قا هـ = ... ظتا هـ = ...

دائرة الوحدة :



هى دائرة طول نصف قطرها = الوحدة و مركز هذه الدائرة هو نقطة الاصل لنظام احداثى متعامد فيكون المركز هو النقطة و = (٠ ، ٠)

ويكون المحورين هما الافقى س س' والرأسى ص ص' أى ان :

و ب = و م = ١ وحدة طول

ومن هندسة الشكل نجد أن :

Δ و ب هـ قائم الزاوية فى هـ

⟸ (و ب)^{٢} = (ب هـ)^{٢} + (و هـ)^{٢}

وبإعتبار أن و هـ = س ، ب هـ = ص ، و ب = ١

∴ (١)^{٢} = (ص)^{٢} + (س)^{٢} ⟸ س^{٢} + ص^{٢} = ١

∴ س^{٢} + ص^{٢} = ١ ——— (١)

جا θ = $\frac{\text{ص}}{١}$ = ص ⟸ ص = جا θ ——— (٢)

جتا θ = $\frac{\text{س}}{١}$ = س ⟸ س = جتا θ ——— (٣)

ظا θ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ ⟸ $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ = ظا θ ——— (٤)

قوانين دائرة الوحدة :

س^{٢} + ص^{٢} = ١	ص = جا θ
س = جتا θ	$\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ = ظا θ

ملاحظات مهمة :

(١) نجد أن س ، ص لا تتعدى القيمة ١ (نصف قطر دائرة الوحدة) ولا تقل عن -١ أى أن

-١ ≤ س ≤ ١ ، -١ ≤ ص ≤ ١

-١ ≤ جتا θ ≤ ١ ، -١ ≤ جا θ ≤ ١

(٢) إذا كانت ب (س ، ص) هى نقطة تقاطع الضلع النهائى للزاوية θ مع دائرة الوحدة فإنه يمكن التعبر عنها بالنقطة ب = (جتا θ ، جا θ)

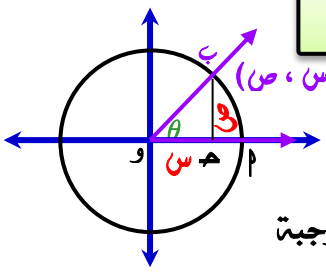
(٣) بالتعويض فى دائرة الوحدة عن س ، ص بـ جتا θ ، جا θ نجد أن : جتا^{٢} θ + جا^{٢} θ = ١

جتا^{٢} θ = ١ – جا^{٢} θ جا^{٢} θ = ١ – جتا^{٢} θ

إشارات الدوال المثلثية

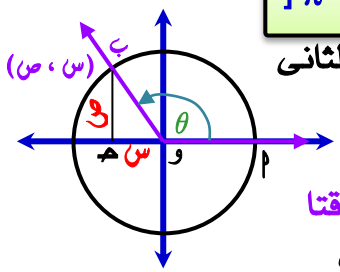
بفرض أن ∠ أ و ب زاوية موجهة فى الوضع القياسى وكانت ب (س ، ص) هى نقطة تقاطع الضلع النهائى لهذه الزاوية مع دائرة الوحدة وأن قياسها θ لذا فإن :

(١) إذا كانت $\theta \in]0 ، \frac{\pi}{2}[$



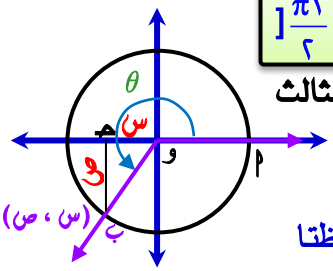
النقطة ب تقع فى الربع الاول (س ، ص)
ويكون س > ٠ ، ص > ٠
أى ان س ، ص موجبتين
فيكون كل الدوال المثلثية موجبة

(٢) إذا كانت $\theta \in]\frac{\pi}{2} ، \pi[$



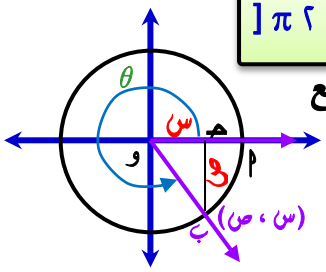
تكون النقطة ب فى الربع الثانى
ويكون س < ٠ ، ص > ٠
أى أن س سالبة وص موجبة
فيكون جا ومعكوستها قتا
فقط موجبة فى الربع الثانى

(٣) إذا كانت $\theta \in]\pi ، \frac{3\pi}{2}[$



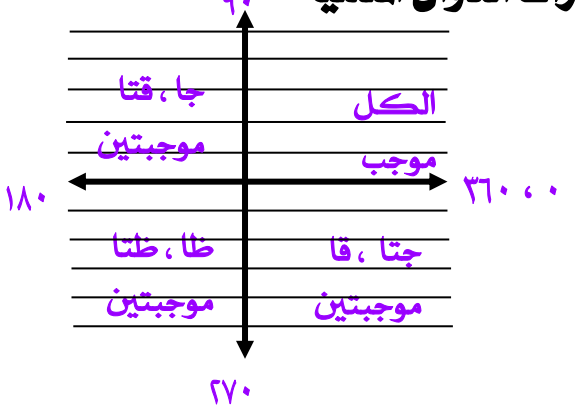
تكون النقطة ب فى الربع الثالث
ويكون س < ٠ ، ص < ٠
أى أن س و ص سالبتين
فيكون ظا ومعكوستها ظتا
فقط موجبة فى الربع الثالث

(٤) إذا كانت $\theta \in]\frac{3\pi}{2} ، 2\pi[$



تكون النقطة ب فى الربع الرابع
ويكون س > ٠ ، ص < ٠
أى أن س موجبة وص سالبة
فيكون جتا ومعكوستها قا
فقط موجبة فى الرابع

إشارات الدوال المثلثية



مثال ١ : أبحث إشارة القيم الاتية

(١) جتا ٣٥٠ (٢) ظا ١٠٠ (٣) قا ٢٦٥
(٤) جتا (- ١٦٥) (٥) قتا ١٢٠٠ (٦) ظتا $\frac{3\pi}{2}$
(٧) جا $\frac{5\pi}{4}$ (٨) قتا $\frac{3\pi}{2}$ (٩) قا (- $\frac{25\pi}{6}$)

الحل

(١) جتا ٣٥٠ ⟸ ٢٧٠ < ٣٥٠ < ٣٦٠
الزاوية فى الربع الرابع جتا فى الربع الرابع موجبه
∴ جتا ٣٥٠ = +

(٢) ظا ١٠٠ ⟸ ٩٠ < ١٠٠ < ١٨٠
الزاوية فى الربع الثانى ظا فى الربع الثانى سالبة
∴ ظا ١٠٠ = -

(٣) قا ٢٦٥ ⟸ ١٨٠ < ٢٦٥ < ٢٧٠
الزاوية فى الربع الثالث قا فى الربع الثالث سالبة
لأنها معكوسة جا ∴ قا ٢٦٥ = -

(٤) جا(- ١٦٥) ⟸ س° = - ١٦٥ + ٣٦٠ = ١٩٥ °
الزاوية تقع فى الربع الثالث
جا فى الربع الثالث سالبه ∴ جا(- ١٦٥) = -

(٥) قتا ١٢٠٠ ⟸ θ = ١٢٠٠ – ١٠٨٠ = ١٢٠
الزاوية تقع فى الربع الثانى
قتا فى الربع الثانى موجبة لأنهها معكوسة جا
∴ قتا ١٢٠٠ = +

(٦) ظتا $\frac{3\pi}{2}$ ⟸ θ = $\frac{3\pi}{2}$ = $\frac{3 \times 180}{2}$ = ٢٧٠
الزاوية محورية لا تقع فى اى ربع لذا فإن ظتا ٢٧٠ غير معروفة الاشارة

(٧) جا $\frac{5\pi}{4}$ ⟸ θ = $\frac{5\pi}{4}$ = $\frac{5 \times 180}{4}$ = ٢٢٥
الزاوية تقع فى الربع الثالث
جا فى الربع الثالث سالبة ⟸ ∴ جا ٢٢٥ = -

٨ ، ٩ بنفسك

مثال ٢ : إذا كانت θ هى قياس زاوية موجهة فى الوضع القياسى ، ب نقطة تقاطع ضلعها النهائى مع دائرة الوحدة أوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية θ فى الحالات الاتية

(١) ب(٠,٦ ، ص) ، ص > ٠

(٢) ب(س ، - ٠,٨) ، س > ٠

(٣) ب$(-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، ص) ، $\frac{\pi}{٢} > \theta > \pi$

(٤) ب (٩ م ، ١٢ م) ، $\pi < \theta < \frac{\pi ٣}{٢}$

(٥) ب (- ١ ، ص)

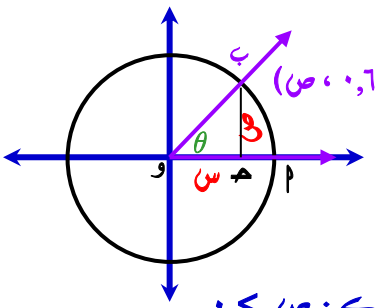
(٦) ب (- ل ، ل) ، ل > ٠

الحل

(١) ب (٠,٦ ، ص) ، ص > ٠ ⟸ س > ٠ ، ص > ٠

∴ الزاوية θ فى الربع الاول

ومن دائرة الوحدة



$س^{٢} + ص^{٢} = ١$

$(٠,٦)^{٢} + ص^{٢} = ١$

$٠,٣٦ + ص^{٢} = ١$

$ص^{٢} = ١ - ٠,٣٦ = ٠,٦٤$

$ص = \sqrt{٠,٦٤} = \pm ٠,٨$ ولكن ص > ٠

∴ ص = ٠,٨

∴ ص = جا θ = ٠,٨ ، س = جتا θ = ٠,٦

فيكون :

∴ جا $\theta = \frac{٨}{١٠} = \frac{٤}{٥}$ ⟸ قتا $\theta = \frac{٥}{٤}$

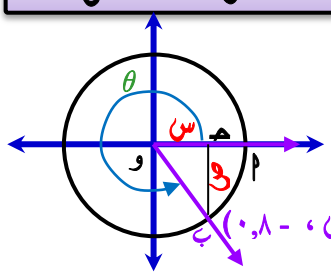
جتا $\theta = \frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥}$ ⟸ قا $\theta = \frac{٥}{٣}$

ظا $\theta = \frac{ص}{س} = \frac{٠,٨}{٠,٦} = \frac{٤}{٣}$ ⟸ ظتا $\theta = \frac{٣}{٤}$

(٢) ب(س ، - ٠,٨) ، س > ٠ ⟸ س > ٠ ، ص < ٠

تكون θ فى الربع الرابع

من قانون دائرة الوحدة



$س^{٢} + ص^{٢} = ١$

$س^{٢} + (- ٠,٨)^{٢} = ١$

$س^{٢} + ٠,٦٤ = ١$

$س^{٢} = ١ - ٠,٦٤ = ٠,٣٦$

$س = \sqrt{٠,٣٦} = \pm ٠,٦$

ولكن س > ٠ ∴ س = ٠,٦

جا θ = ص = - ٠,٨ = $-\frac{٨}{١٠} = -\frac{٤}{٥}$

جتا θ = س = ٠,٦ = $\frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥}$

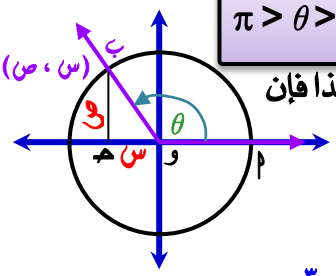
ظا $\theta = \frac{ص}{س} = -\frac{٤}{٣}$

فيكون :

∴ جا $\theta = -\frac{٤}{٥}$ ، جتا $\theta = \frac{٣}{٥}$ ، ظا $\theta = -\frac{٤}{٣}$

قتا $\theta = -\frac{٥}{٤}$ ، قا $\theta = \frac{٥}{٣}$ ، ظتا $\theta = -\frac{٣}{٤}$

(٣) ب$(-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، ص) ، $\frac{\pi}{٢} > \theta > \pi$



الزاوية تنحصر بين ٩٠ ، ١٨٠ لذا فإن الزاوية θ تقع فى الربع الثانى

ومن قانون دائرة الوحدة :

$س^{٢} + ص^{٢} = ١$

$(-\frac{\sqrt{٣}}{٢})^{٢} + ص^{٢} = ١$ ⟸ $\frac{٣}{٤} + ص^{٢} = ١$

$ص^{٢} = ١ - \frac{٣}{٤} = \frac{٤-٣}{٤} = \frac{١}{٤}$

$ص = \sqrt{\frac{١}{٤}} = \pm \frac{١}{٢}$ ⟸

ولكن الزاوية فى الربع الثانى لذا فإن ص موجبة

∴ ص = $\frac{١}{٢}$

∴ ص = جا $\theta = \frac{١}{٢}$ ، س = جتا $\theta = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

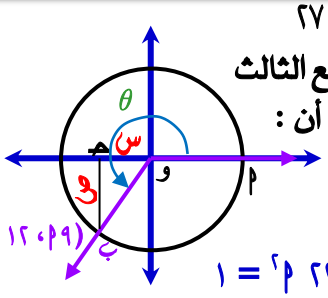
ظا $\theta = \frac{ص}{س} = \frac{١}{٢} \div -\frac{\sqrt{٣}}{٢} = -\frac{١}{\sqrt{٣}}$

فيكون :

∴ جا $\theta = \frac{١}{٢}$ ، جتا $\theta = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، ظا $\theta = -\frac{١}{\sqrt{٣}}$

قتا $\theta = \frac{٢}{١}$ ، قا $\theta = -\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ، ظتا $\theta = -\sqrt{٣}$

(٤) ب (٩ م ، ١٢ م) ، $\pi < \theta < \frac{\pi ٣}{٢}$



الزاوية تنحصر بين ١٨٠ ، ٢٧٠

لذا فإن الزاوية θ تقع فى الربع الثالث

ومن قانون دائرة الوحدة نجد أن :

$س^{٢} + ص^{٢} = ١$

$(٩ م)^{٢} + (١٢ م)^{٢} = ١$

$٨١ م^{٢} + ١٤٤ م^{٢} = ١$ ⟸ $٢٢٥ م^{٢} = ١$

$\therefore$ أ^{2} $= \frac{1}{225} \Leftarrow$ أ $= \sqrt{\frac{1}{225}} = \pm \frac{1}{15}$

ولكن س $= 9$ أ وإشارتها تعتمد على اشارة أ
وإشارة س فى الربع الثالث سالبة لذا لابد أن تكون أ سالبة $\therefore$ أ $= -\frac{1}{15}$

$\therefore$ ص $= 12$ أ $= 12 \times -\frac{1}{15} = -\frac{12}{15} = -\frac{4}{5} =$ جا θ

$\therefore$ س $= 9$ أ $= 9 \times -\frac{1}{15} = -\frac{9}{15} = -\frac{3}{5} =$ جتا θ

$\therefore \frac{ص}{س} = \frac{12أ}{9أ} = \frac{4}{3} =$ ظا θ

فيكون :

جا $\theta = -\frac{4}{5}$ ، جتا $\theta = -\frac{3}{5}$ ، ظا $\theta = \frac{4}{3}$

قتا $\theta = -\frac{5}{4}$ ، قا $\theta = -\frac{5}{3}$ ، ظتا $\theta = \frac{3}{4}$

(٥) ب (- ١ ، ص)

النقطة ب مسقطها السينى $= -1$ لذا فإن الزاوية θ لا تقع فى اى ربع لأنها زاوية ربعية (محورية)

من قانون دائرة الوحدة $\Leftarrow$ س^{2} + ص^{2} $= 1$

$(-1)^{2} +$ ص^{2} $= 1 \Leftarrow 1 +$ ص^{2} $= 1$

ص^{2} $= 1 - 1 =$ صفر $\Leftarrow$ ص $=$ صفر

س $= -1 =$ جتا θ ص $= 0 =$ جا θ

ظا $\theta = \frac{ص}{س} = \frac{0}{-1} =$ صفر

فيكون :

جا $\theta = 0$ ، جتا $\theta = -1$ ظا $\theta =$ صفر

قتا $\theta =$ غير معرف قا $\theta = -1$ ظتا $\theta =$ غير معرف

(٦) ب(- ل ، ل) ، ل > 0 بنفسك

مثال ٣ : اوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية θ فى كلا من الحالات الاتية

(١) $\theta \in]0 ، \frac{\pi}{2}[$ ، جتا $\theta = 0,6$

(٢) $\theta \in]\frac{\pi}{2} ، \pi[$ ، ظا $\theta = -\frac{3}{4}$

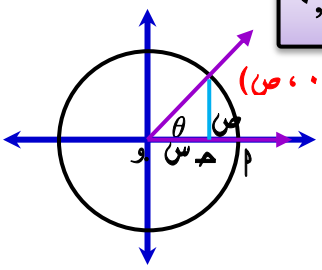
(٣) $\theta \in [\frac{\pi 3}{2} ، \pi 2]$ ، قا $\theta = 2$

(٤) $\theta \in]\pi ، \frac{\pi 3}{2}[$ ، قتا $\theta = -\frac{25}{7}$

(٥) $\theta \in]\frac{\pi}{2} ، \pi[$ ، جا $\theta = \frac{12}{13}$

الحل

(١) $\theta \in]0 ، \frac{\pi}{2}[$ ، جتا $\theta = 0,6$



الزاوية تقع فى الربع الاول
لأنها تنحصر بين ٠ ، ٩٠
جتا $\theta =$ س $= 0,6$
$\therefore$ النقطة ب $=$ (٠,٦ ، ص)
ومن دائرة الوحدة

س^{2} + ص^{2} $= 1 \Leftarrow$ (٠,٦)^{2} + ص^{2} $= 1$

٠,٣٦ + ص^{2} $= 1$ ص^{2} $= 1 - 0,36 = 0,64$

ص $= \sqrt{0,64} = \pm 0,8$ ولكن ص > 0

$\therefore$ ص $= 0,8$

$\therefore$ ص $=$ جا $\theta = 0,8$ ، س $=$ جتا $\theta = 0,6$

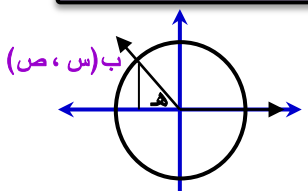
فيكون :

جا $\theta = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \Leftarrow$ قتا $\theta = \frac{5}{4}$

جتا $\theta = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \Leftarrow$ قا $\theta = \frac{5}{3}$

ظا $\theta = \frac{ص}{س} = \frac{0,8}{0,6} = \frac{4}{3} \Leftarrow$ ظتا $\theta = \frac{3}{4}$

(٢) $\theta \in]\frac{\pi}{2} ، \pi[$ الزاوية تقع فى الربع الثانى



ظاه $= -\frac{3}{4} = \frac{ص}{س}$

$\therefore$ س $= -4$ك ، ص $= 3$ك

من دائرة الوحدة :

س^{2} + ص^{2} $= 1 \Leftarrow (-4ك)^{2} + (3ك)^{2} = 1$

$16ك^{2} + 9ك^{2} = 1 \Leftarrow 25ك^{2} = 1 \Leftarrow ك^{2} = \frac{1}{25}$

$\therefore ك = \sqrt{\frac{1}{25}} = \pm \frac{1}{5}$

ولكن الزاوية فى الربع الثانى

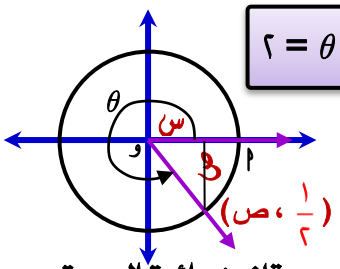
والمسقط السينى سالب س $= -4$ك $\therefore ك = \frac{1}{5}$

$\therefore$ جتاه $=$ س $= -4ك = -4 \times \frac{1}{5} = \frac{-4}{5}$

$\therefore$ جاه $=$ ص $= 3ك = 3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

اوجد باقى الدوال المثلثية

(٣) $\theta \in [\frac{\pi}{٢}، \pi٢]$ ، قا θ = ٢



∴ جتا $\theta = \frac{١}{٢} \Leftarrow$ س = $\frac{١}{٢}$

الزاوية تقع فى الربع الرابع

لأنها تنحصر بين ٢٧٠ ، ٣٦٠ ومن قانون دائرة الوحدة نجد أن :

$س^{٢} + ص^{٢} = ١ \Leftarrow (\frac{١}{٢})^{٢} + ص^{٢} = ١$

$\frac{١}{٤} + ص^{٢} = ١ \Leftarrow ص^{٢} = ١ - \frac{١}{٤} = \frac{٣}{٤}$

$ص = \pm \frac{\sqrt{٣}}{٢} \Leftarrow ص = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

وحيث أن الزاوية فى الربع الرابع نجد أن ص = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ جا $\theta = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، جتا $\theta = \frac{١}{٢}$ ، ظا $\theta = \frac{ص}{س} = \frac{-\sqrt{٣}}{١}$

قتا θ = ... قا θ = ... ظتا θ = ...

(٤) ، (٥) متروك للطالب

مثال ٤ : إذا كانت $\theta \in [\frac{\pi}{٢}، \pi]$ ، جا $\theta = \frac{٢٤}{٢٥}$

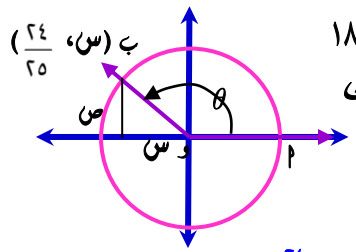
أوجد قيمة :

(١) $\frac{\text{ظتا}\theta - \text{قتا}\theta}{\text{ظا}\theta - \text{قا}\theta}$ (٢) جتا θ − قتا θ ظا θ

(٣) قتا θ جا θ − ظا θ ظتا θ + جتا$^{٢}\theta$

الحل

الزاوية تنحصر بين ٩٠ ، ١٨٠ لذا فإنها تقع فى الربع الثانى



جا $\theta = \frac{٢٤}{٢٥} = ص$

ومن قانون دائرة الوحدة :

$س^{٢} + ص^{٢} = ١ \Leftarrow س^{٢} + (\frac{٢٤}{٢٥})^{٢} = ١$

$س^{٢} + \frac{٥٧٦}{٦٢٥} = ١ \Leftarrow س^{٢} = ١ - \frac{٥٧٦}{٦٢٥} = \frac{٦٢٥ - ٥٧٦}{٦٢٥} = \frac{٤٩}{٦٢٥}$

∴ $س^{٢} = \frac{٤٩}{٦٢٥} \Leftarrow س = \pm \sqrt{\frac{٤٩}{٦٢٥}} = \pm \frac{٧}{٢٥}$

ولكن الزاوية فى الربع الثانى لذا فإن س < ٠ (سالبة)

∴ $س = -\frac{٧}{٢٥}$

∴ جا $\theta = \frac{٢٤}{٢٥}$ ، جتا $\theta = -\frac{٧}{٢٥}$ ، ظا $\theta = -\frac{٢٤}{٧}$

قتا $\theta = \frac{٢٥}{٢٤}$ ، قا $\theta = -\frac{٢٥}{٧}$ ، ظتا $\theta = -\frac{٧}{٢٤}$

(١) $\frac{\text{ظتا}\theta - \text{قتا}\theta}{\text{ظا}\theta - \text{قا}\theta} = \frac{(\frac{٧}{٢٤}-) - (\frac{٢٥}{٢٤})}{(\frac{٢٤}{٧}-) - (\frac{٢٥}{٧})} = \frac{(\frac{٧ - ٢٥}{٢٤})}{(\frac{٢٤ + ٢٥}{٧}-)}$

$= \frac{(\frac{٣٢}{٢٤}-)}{(\frac{١}{٧})} = \frac{(\frac{٤}{٣}-)}{(\frac{١}{٧})} = \frac{-٤ \times ٧}{٣ \times ١} = \frac{-٢٨}{٣}$

(٢) جتا θ − قتا θ ظا θ = $-\frac{٧}{٢٥} - \frac{٢٥}{٢٤} \times -\frac{٢٤}{٧} = \frac{٢٥}{٧} + \frac{٧}{٢٥}$

$= \frac{-٧ \times ٧ + ٢٥ \times ٢٥}{٢٥ \times ٧} = \frac{-٤٩ + ٦٢٥}{١٧٥} = \frac{٥٧٦}{١٧٥}$

(٣) بنفسك

الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

الزوايا الخاصة :

هى تلك الزوايا المحورية (الربعية) وتلك الزوايا التى لها قيم معروفة مع جميع الدوال المثلثية

فالزوايا الحدية هى { ٠ ، ٩٠ ، ١٨٠ ، ٢٧٠ ، ٣٦٠ }

والزوايا الخاصة هى { ٣٠ ، ٤٥ ، ٦٠ }

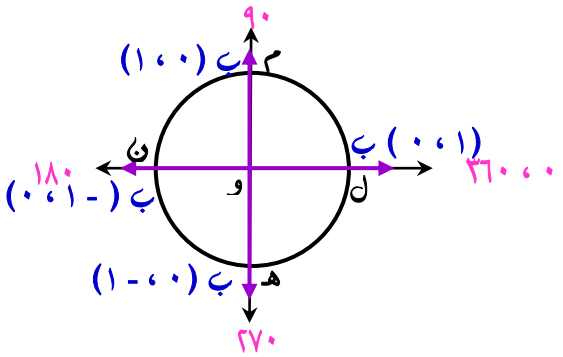
وكذلك كل زاوية تنتج من حاصل جمع او طرح الزوايا المحورية والزوايا الخاصة فهى ايضا زاوية خاصة أو زاوية مشهورة ولكن قيمها مع الدوال المثلثية سنتطرق له فى الدرس القادم

فما هى قيمة النس المثلثية لهذه الزوايا المحورية والخاصة

وللإجابة على هذا السؤال تتبع ما يأتى :

أولا الزوايا المحورية (الربعية)

بفرض أن الضلع النهائى للزاوية θ تقاطع مع دائرة الوحدة فى النقاط ل ، م ، هـ ، ن وهى نفسها نقاط تقاطع دائرة الوحدة مع المحاور



(١) إذا كن الضلع النهائى لدائرة الوحدة يقطعها فى النقطة ل

(١) تكون الزاوية θ = صفر

(٢) تكون نقطة تقاطع دائرة الوحدة مع هذا الضلع النهائى هى

ب = (١ ، ٠) = (س ، ص) = (جتا θ ، جا θ)

لذا فإن :

جا ٠ = ٠ جتا ٠ = ١ ظا ٠ = ٠

قتا ٠ = غير معرف قا ٠ = ١ ظتا ٠ = غير معرف

(٢) إذا كن الضلع النهائى لدائرة الوحدة يقطعها فى النقطة م

(١) تكون الزاوية θ = ٩٠

(٢) تكون نقطة تقاطع دائرة الوحدة مع الضلع النهائى للزاوية θ

هى ب = (٠ ، ١) = (س ، ص) = (جا θ ، جتا θ)

لذا فإن :

جا ٩٠ = ١ جتا ٩٠ = ٠ ظا ٩٠ = غير معرف

قتا ٩٠ = ١ قا ٩٠ =غير معرف ظتا ٩٠ = ٠

(٣) إذا كن الضلع النهائى لدائرة الوحدة يقطعها فى النقطة ن

(١) تكون الزاوية θ = ١٨٠

(٢) تكون نقطة تقاطع دائرة الوحدة مع الضلع النهائى للزاوية θ

هى ب = (- ١ ، ٠) = (س ، ص) = (جا θ ، جتا θ)

لذا فإن :

جا ١٨٠ = ٠ جتا ١٨٠ = - ١ ظا ١٨٠ = ٠

قتا ١٨٠ =غير معرف قا ١٨٠ = - ١ ظتا ١٨٠= غير معرف

(٤) إذا كن الضلع النهائى لدائرة الوحدة يقطعها فى النقطة هـ

(١) تكون الزاوية θ = ٢٧٠

(٢) تكون نقطة تقاطع دائرة الوحدة مع الضلع النهائى للزاوية θ

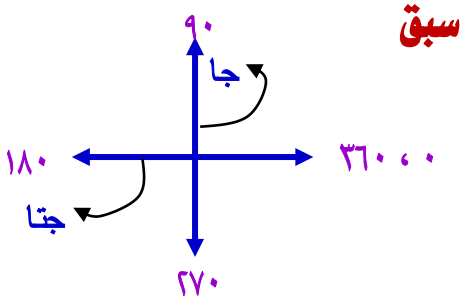
هى ب = (٠ ، - ١) = (س ، ص) = (جا θ ، جتا θ)

لذا فإن :

جا ٢٧٠ = - ١ جتا ٢٧٠ = ٠ ظا ٢٧٠ =غير معرف

قتا ٢٧٠ = - ١ قا ٢٧٠ =غير معرف ظتا ٢٧٠= ٠

ملخص لما سبق



المحور س يمثل جتا لذا فإن

الدالة جتا مع زوايا المحور س { ٠ ، ١٨٠ ، ٣٦٠ } ناتجها ١ أو - ١ حسب موقع الزاوية فى الجزء الموجب او السالب

الدالة جتا مع زوايا المحور ص { ٩٠ ، ٢٧٠ } ناتجها صفر

المحور ص يمثل جا لذا فإن :

الدالة جا مع زوايا المحور ص { ٩٠ ، ٢٧٠ } ناتجها ١ أو -١ حسب موقع الزاوية فى الجزء الموجب او السالب

الدالة جا مع زوايا المحور س { ٠ ، ١٨٠ ، ٣٦٠} ناتجها صفر

www.Cryp2Day.com موقع مذكرات جاهزة للطباعة

الدالة ظا

الدالة ظا مع الزاويتين ٩٠ ، ٢٧٠ قيمتها غير معرفة

أختبر نفسك :

جتا ٩٠ =	جا ٠ =	قتا ١٨٠ =	قا ٢٧٠ =
ظا ٩٠ =	ظا ٠ =	جتا ٠ =	جتا ١٨٠ =
قا ٠ =	قا ١٨٠ =	جتا ٣٦٠ =	ظا ٣٦٠ =

ثانيا الزوايا الخاصة { ٣٠ ، ٤٥ ، ٦٠ }

درسنا فيما سبق المثلث الثلاثيني الستيني وهو مثلث قائم به زاويتان حادتان احداهما قياسها ٣٠ والاخري قياسها ٦٠ كما درسنا النتائج الاتية

☺ الضلع المقابل للزاوية ٣٠ = $\frac{١}{٢}$ الوتر

☹ الضلع المقابل للزاوية ٦٠ = $\frac{١}{٢}$ الوتر × $\sqrt{٣}$

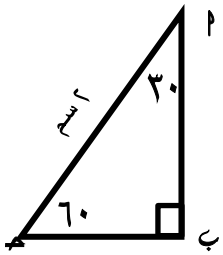
مثال : ∆ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب ،

ق(∠ أ) = ٣٠° ، ق(∠ حـ) = ٦٠°

وكان أ حـ = ٢ سم أوجد أ ب ، ب حـ

وكذلك جميع الدوال المثلثية للزاويتين أ ، حـ

الحل



☹ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ٢ = ١ سم

☹ أ ب = $\frac{١}{٢}$ × ٢ × $\sqrt{٣}$ = $\sqrt{٣}$

الدوال المثلثية للزاوية ٣٠

☺ جا أ = جا ٣٠ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{١}{٢}$

☺ جتا أ = جتا ٣٠ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

☺ ظا أ = ظا ٣٠ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

الدوال المثلثية للزاوية ٦٠

☺ جا حـ = جا ٦٠ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

☺ جتا حـ = جتا ٦٠ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{١}{٢}$

☺ ظا حـ = ظا ٦٠ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{١}$

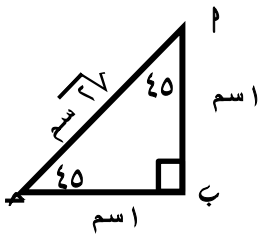
وبالتمعن فى المثلث القائم المتساوي الساقين نجد ان وتر هذا المثلث = ٢ √ أحد الساقين

مثال : ∆ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب ،

أ ب = ب حـ وكان أ ب = ١ سم أوجد أ حـ

وكذلك جميع الدوال المثلثية للزاويتين أ ، حـ

الحل



أ ب = ب حـ = ١ سم

∴ ق(∠ أ) = ق(∠ حـ) = ٤٥°

أ حـ = $\sqrt{١^٢ + ١^٢}$ = $\sqrt{٢}$

الدوال المثلثية للزاوية ٤٥

☺ جا أ = جا ٤٥ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ =

☺ جتا أ = جتا ٤٥ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ =

☺ ظا أ = ظا ٤٥ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{١}{١}$ = ١

والزاوية حـ لها نفس قيم ∠ أ لانهما متساويتان

لذا نجمع النسب المثلثية للزوايا الخاصة فى هذا الجدول

	٣٠	٦٠	٤٥
جا	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	
جتا	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	
ظا	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	$\frac{\sqrt{٣}}{١}$	١

مثال ١ : أوجد قيم جميع الزوايا المثلثية للزوايا الاتية :

(١) ٣٠ (٢) ٤٥ (٣) ٦٠ (٤) صفر

(٥) ٩٠ (٦) ١٨٠ (٧) ٢ π (٨) $\frac{٣\pi}{٢}$

الحل

(١) الزاوية ٣٠

جا ٣٠ = $\frac{١}{٢}$ جتا ٣٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ظا ٣٠ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

قتا ٣٠ = قا ٣٠ = ظتا ٣٠ =

(٢) الزاوية ٤٥

جا ٤٥ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ جتا ٤٥ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ظا ٤٥ = ١

قتا ٤٥ = قا ٤٥ = ظتا ٤٥ =

(٣) الزاوية ٦٠ بنفسك

(٤) الزاوية صفر

جا ٠ = ٠ جتا ٠ = ١ ظا ٠ = ٠

قتا ٠ = غير معرف قا ٠ = ١ ظتا ٠ = غير معرف

(٥) الزاوية ٩٠

جا ٩٠ = ١ جتا ٩٠ = ٠ ظا ٩٠ = غير معرف

قتا ٩٠ = ١ قا ٩٠ = غير معرف ظتا ٩٠ = ٠

باقى الزوايا بنفسك

مثال ٢ : أوجد قيمة ما يأتى :

(١) جتا ٠ + جتا ٩٠ + جتا ١٨٠ + جتا ٢٧٠ + جتا ٣٦٠

(٢) ظا^{٢} ٦٠ – قا^{٢} ٦٠ + جا ٩٠

(٣) قا $\frac{\pi}{٦}$ ظا $\frac{\pi}{٣}$ - ظتا $\frac{\pi}{٣}$ جتا $\frac{\pi}{٦}$

(٤) ٢ جا ٣٠ جتا ٦٠ + $\sqrt{٢}$ جا ٤٥ جا ٩٠

(٥) جتا ٩٠ قتا ٣٠ + قا^{٢} ٤٥ جا ٣٠ – جتا ٢٧٠ جا ١٨٠

(٦) ٤ جا^{٢} ٣٠ جا ٩٠ – جتا ٠ قا ٦٠ + ٥ ظا ٤٥

+ ١٠ جتا^{٢} ٤٥ جا ٢٧٠ - ظا ٣٠ جا ١٨٠

الحل

(١) جتا ٠ + جتا ٩٠ + جتا ١٨٠ + جتا ٢٧٠ + جتا ٣٦٠

= ١ + ٠ + (-١) + ٠ = ١

(٢) ظا^{٢} ٦٠ – قا^{٢} ٦٠ + جا ٩٠

= (-$\sqrt{٣}$)^{٢} – (٢)^{٢} + ١ = ٣ – ٤ + ١ = صفر

(٣) قا $\frac{\pi}{٦}$ ظا $\frac{\pi}{٣}$ - ظتا $\frac{\pi}{٣}$ جتا $\frac{\pi}{٦}$

= قا ٣٠ ظا ٦٠ – ظتا ٦٠ جتا ٣٠

= $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ × $\sqrt{٣}$ - $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٢ - $\frac{١}{٢}$ = $\frac{٤-١}{٢}$ = $\frac{٣}{٢}$

(٤) ٢ جا ٣٠ جتا ٦٠ + $\sqrt{٢}$ جا ٤٥ جا ٩٠

= ٢ × $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$ + $\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ × ١

= $\frac{١}{٢}$ + ١ = $\frac{٣}{٢}$

(٥) جتا ٩٠ قتا ٣٠ + قا^{٢} ٤٥ جا ٣٠ – جتا ٢٧٠ جا ١٨٠

= ٠ × ٢ + (-$\sqrt{٢}$)^{٢} × $\frac{١}{٢}$ - ٠ × ٠

= ٠ + ٢ × $\frac{١}{٢}$ + ٠ = ١

(٦) تدريب

٤ جا^{٢} ٣٠ جا ٩٠ – جتا ٠ قا ٦٠ + ٥ ظا ٤٥

+ ١٠ جتا^{٢} ٤٥ جا ٢٧٠ - ظا ٣٠ جا ١٨٠

مثال ٣ : أثبت صحة المتطابقات الاتية

(١) ٢ جا ٤٥ جتا ٤٥ ظا ٤٥ = ١

(٢) قا ٣٠ ظا ٦٠ + قتا^{٢} ٦٠ - ظا^{٢} ٤٥ = $\frac{٧}{٣}$

(٣) جا(٦٠ – ٣٠) – جتا ٦٠ + جتا^{٢} ٤٥ = $\frac{١}{٢}$

(٤) ٢جتا^{٢} $\frac{\pi}{٣}$ + ٣ جا^{٢} $\frac{\pi}{٤}$ + ٤ظا^{٢} $\frac{\pi}{٣}$ - ٤ جا $\frac{\pi}{٢}$ = ١٠

(٥) جتا^{٢} ٣٠ ظتا^{٢} ٦٠ ظا ٤٥ = $\frac{١}{٤}$

(٦) قتا^{٢} ٣٠ - ظا^{٢} ٦٠ – جا ٢٧٠

= قا^{٢} ٤٥ جتا ١٨٠ جا ٢٧٠

الحل

(١) ٢ جا ٤٥ جتا ٤٥ ظا ٤٥ = ١

الايمن = ٢ جا ٤٥ جتا ٤٥ ظا ٤٥

= ٢ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ × ١

= ٢ × $\frac{١}{٢}$ = ١ = الايسر

(٢) ٢ جا ٤٥ جتا ٤٥ ظا ٤٥ = ١

الايمن = قا ٣٠ ظا ٦٠ + قتا^{٢} ٦٠ - ظا^{٢} ٤٥

= $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ × $\sqrt{٣}$ + ($\frac{٢}{\sqrt{٣}}$)^{٢} – (١)^{٢}

= ٢ + $\frac{٤}{٣}$ - ١ = ١ + $\frac{٤}{٣}$

= ١ + $\frac{٤}{٣}$ = $\frac{٤+٣}{٣}$ = $\frac{٧}{٣}$ = الايسر

(٣) قا ٣٠ ظا ٦٠ + قتا^{٢} ٦٠ - ظا^{٢} ٤٥ = $\frac{٧}{٣}$

الايمن = جا(٦٠ – ٣٠) – جتا ٦٠ + جتا^{٢} ٤٥ =

= جا ٣٠ - جتا ٦٠ + جتا^{٢} ٤٥

= $\frac{١}{٢}$ - $\frac{١}{٢}$ + ($\frac{١}{\sqrt{٢}}$)^{٢} = $\frac{١}{٢}$ = الايسر

(٤) ٢ جتا^{٢} $\frac{\pi}{٣}$ + ٣ جا^{٢} $\frac{\pi}{٤}$ + ٤ ظا^{٢} $\frac{\pi}{٣}$ - ٤ جا $\frac{\pi}{٢}$ = ١٠

الايمن = ٢ جتا^{٢} $\frac{\pi}{٣}$ + ٣ جا^{٢} $\frac{\pi}{٤}$ + ٤ ظا^{٢} $\frac{\pi}{٣}$ - ٤ جا $\frac{\pi}{٢}$

= ٢ جتا^{٢} ٦٠ + ٣ جا^{٢} ٤٥ + ٤ ظا^{٢} ٦٠ – ٤ جا ٩٠

= ٢ $(\frac{١}{٢})^{٢}$ + ٣ $(\frac{١}{\sqrt{٢}})^{٢}$ + ٤ $(\sqrt{٣})^{٢}$ – ٤ × ١

= ٢ × $\frac{١}{٤}$ + ٣ × $\frac{١}{٢}$ + ٤ × ٣ – ٤ = $\frac{١}{٢}$ + $\frac{٣}{٢}$ + ١٢ – ٤

= $\frac{١+٣}{٢}$ + ٨ = $\frac{٤}{٢}$ + ٨ = ٢ + ٨ = ١٠ = **الايسر**

(٥) جتا^{٢} ٣٠ ظتا^{٢} ٦٠ ظا ٤٥ = $\frac{١}{٤}$

الايمن = جتا^{٢} ٣٠ ظتا^{٢} ٦٠ ظا ٤٥

= $(\frac{\sqrt{٣}}{٢})^{٢}$ × $(\frac{١}{\sqrt{٣}})^{٢}$ × ١

= $\frac{٣}{٤}$ × $\frac{١}{٣}$ × ١ = $\frac{١}{٤}$ = **الايسر**

(٦) قتا^{٢} ٣٠ - ظا^{٢} ٦٠ – جا ٢٧٠

= قا^{٢} ٤٥ جتا ١٨٠ جا ٢٧٠

الايمن :

قتا^{٢} ٣٠ - ظا^{٢} ٦٠ – جا ٢٧٠

= (٢)^{٢} – $(\sqrt{٣})^{٢}$ – (-١)

= ٤ - ٣ + ١ = ٤ - ٢ = ٢

الايسر :

قا^{٢} ٤٥ جتا ١٨٠ جا ٢٧٠ = $(\sqrt{٢})^{٢}$ × -١ × -١ = ٢

يساوى الايسر

تدريبات

(١) ٢ جتا^{٢} ٤٥ – ١ = ١ – ٢ جا^{٢} ٤٥

(٢) ظا ٦٠ = $\frac{\text{٢ظا ٣٠}}{\text{١ – ظا}^{٢}\text{ ٣٠}}$

(٣) جا ٦٠ = ٢ جا ٣٠ جتا ٣٠

مثال ٤ : أوجد قيمة س التى تحقق :

(١) س جا^{٢} $\frac{\pi}{٤}$ جتا π = ظا^{٢} $\frac{\pi}{٣}$ جا $\frac{\pi ٣}{٢}$

الحل

س جا^{٢} $\frac{\pi}{٤}$ جتا π = ظا^{٢} $\frac{\pi}{٣}$ جا $\frac{\pi ٣}{٢}$

س × جا^{٢} ٤٥ × جتا ١٨٠ = ظا^{٢} ٦٠ × جا ٢٧٠

س × $(\frac{١}{\sqrt{٢}})^{٢}$ × -١ = $(\sqrt{٣})^{٢}$ × -١

⟸ س × $\frac{١}{٢}$ = ٣ ∴ س = ٣ × ٢ = ٦

تدريب

(٢) س جا $\frac{\pi}{٤}$ جتا $\frac{\pi}{٤}$ ظا $\frac{\pi}{٣}$ = ظا^{٢} $\frac{\pi}{٤}$ - جتا $\frac{\pi ٣}{٢}$

مثال ٥ : إذا كانت س ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] أوجد قيمة س التى تحقق ما يلى :

(١) جا س = جا ٣٠ جتا ٦٠ + جتا ٣٠ جا ٦٠

(٢) ٣ ظا^{٢} س = ٤ جا^{٢} $\frac{\pi}{٦}$ + ٨ جتا^{٢} $\frac{\pi}{٣}$

(٣) جتا س = $\frac{\text{جا ٦٠}}{\text{جا ٩٠}}$ - $\frac{\text{جا ٠}}{\text{جا ٤٥}}$

الحل

(١) جا س = جا ٣٠ جتا ٦٠ + جتا ٣٠ جا ٦٠

= $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

= $\frac{١}{٤}$ + $\frac{٣}{٤}$ = $\frac{٤}{٤}$ = ١

∴ جا س = ١ ⟸ س = ٩٠°

بعض خواص الدوال المثلثية

الدوال المثلثية لها خواص تميزها عن باقى الدوال المسترسلة فلها خواص مشتركة وكل دالة لها خواص منفردة وبعض هذه الخواص نسردها فيما يلى

(١) الدوال المثلثية جميعها دوال دورية ودورتها 2π

الدالة تكون دورية إذا كانت $ق(س) = ق(س + هـ)$ وتكون دورتها = هـ ولذلك فإن الدوال المثلثية دوال دوريه لأن على سبيل المثال يكون $جا\theta = جا(\theta + 2\pi)$ لذا فإن الدوال المثلثية جميعها دوال دورية ودورتها 2π

(٢) مدى الدالتين جاθ ، جتاθ = [- ١ ، ١]

أى انه بالنسبة للدالتين جا ، جتا لا يمكن أن تتعدى قيمة كلا منهما عن ١ ولا يمكن أن تقل عن - ١ أما باقى الدوال المثلثية فلا ينطبق عليها ذلك

(٣) الزوايا السالبة للدوال جا ، جتا ، ظا

من خصائص هذه الدوال التى سنتعرف عليها فى هذا الدرس أن

جا $(-\theta)$ = - جا θ ⟸ جا (-٣٠) = - جا ٣٠

جتا $(-\theta)$ = جتا θ ⟸ جتا (-٣٠٠) = جتا ٣٠٠

ظا $(-\theta)$ = - ظا θ ⟸ ظا (-٣٠) = - ظا ٣٠

(٤) الدالة العكسية للدالة المثلثية

إذا كان جا $\theta = م$ ⟸ $\theta = جا^{-١} م$

ومعنى ذلك انه وبإعتبار θ الزاوية محل الدراسة وأن م قيمة جيب هذه الزاوية

فإن مهمة الدالة المثلثية جا مع الزاوية θ هو إيجاد القيمة م

أى أن إذا علمنا زاوية معينة فإننا نستطيع أن نوجد قيمة جيبها او جيب تمامها أو ظلها فماذا إذا علمنا قيمة جيب زاوية غير معلومة فهل نستطيع إيجاد هذه الزاوية

ولكى نستطيع ان نوجد هذه الزاوية لا بد ان يكون لدينا دالة مثلثية عكسية للجيب والتى تكون $جا^{-١}$

فمثلا :

إذا كانت جا $\theta = \frac{١}{٢}$ ⟸ $\theta = جا^{-١} \frac{١}{٢} = ٣٠$

الزوايا المنتسبة

قبل ان نتعرف على الزوايا المنتسبة نراجع سويا

الزوايا المحورية هى { ٠ ، ٩٠ ، ١٨٠ ، ٢٧٠ ، ٣٦٠ }

الزوايا الخاصة هى { ٣٠ ، ٤٥ ، ٦٠ }

الزوايا المنتسبة

هى تلك الزوايا التى تنتج من جمع او طرح زاوية محورية وزاوية خاصة

اى تكون كالتالى

١٢٠ = ٩٠ + ٣٠ أو = ١٨٠ – ٦٠

٢٤٠ = ١٨٠ + ٦٠ أو = ٢٧٠ – ٣٠

٣١٥ = ٣٦٠ – ٤٥ أو = ٢٧٠ + ٤٥

وهكذا وإذا استخدمنا جميع الزوايا المحورية بالاضافة او بالطرح منها مع جميع الدوال الخاصة سينتج ما يسمى بالزوايا المنتسبة

نتسائل الان ؟

هل يمكن تحديد قيمة مثلا لـ جا ١٢٠ وما علاقتها بالقيمة جا ٣٠ أو جا ٦٠ حيث أن

١٢٠ = ١٨٠ – ٦٠ = ٩٠ + ٣٠

كل ذلك سنتعرف عليه فيما يلى :

خطوات إيجاد قيمة الزوايا المنتسبة

(١) زوايا المحور ص { ٩٠ ، ٢٧٠ } تغير الدوال المثلثية

جا ⟸ جتا ، جتا ⟸ جا

قا ⟸ قتا ، قتا ⟸ قا

ظا ⟸ ظتا ، ظتا ⟸ ظا

أما زوايا المحور س { ٠ ، ١٨٠ ، ٣٦٠ } فلا تغير الدوال المثلثية

(٢) كل ما تفعله الزاويتين ٩٠ ، ٢٧٠ انها تغير الدالة المثلثية كما سبق ولكن تبقى على الزاوية θ كما هى ولكن الاشارة للقيمة الجديدة حسب إشارة الدالة بموقع الزاوية كالتالى :

جا $(٩٠ + \theta)$ = جتا θ

تغيرت إلى جتا لأن ٩٠ زاوية تغير الدالة المثلثية وإشارتها موجبة لأن $٩٠ + \theta$ زاوية فى الربع الثانى و جا فى الربع الثانى موجبة

ظا $(٣٦٠ - \theta)$ = - ظا θ

الدالة بقيت ظا كما هى لأن ٣٦٠ زاوية سينية لا تغير الدالة المثلثية ولكن الاشارة تغيرت لأن الزاوية $٣٦٠ - \theta$ زاوية فى الربع الرابع و ظا فى الربع الرابع سالبة وهكذا مع اى زاوية واى دالة مثلثية

أمثلة توضيحية

(١) جا(٩٠ + θ)

الزاوية ٩٠ + θ تقع فى الربع الثانى وجا فى الربع الثانى موجبة

٩٠ تغير الداة المثلثية جا ⟸ جتا

∴ جا(٩٠+θ) = جتا θ

(٢) جتا(١٨٠ + θ)

الزاوية ١٨٠+θ تقع فى الربع الثالث

وجتا فى الربع الثالث سالبة

١٨٠ لا تغير الدوال المثلثية

∴ جتا(١٨٠ + θ) = - جتا θ

(٣) قتا(٢٧٠ − θ)

الزاوية ٢٧٠ − θ تقع فى الربع الثالث

وقتا فى الثالث سالبة

٢٧٠ تغير الدالة المثلثية قتا ⟸ قا

∴ قتا(٢٧٠-θ) = - قا θ

(٤) جا(-θ) = جا(٣٦٠ − θ)

الزاوية −θ أو ٣٦٠ −θ تقع فى الربع الرابع

و جا فى الربع الرابع سالبة

٣٦٠ أو ٠ لا تغير الدوال المثلثية

∴ جا(-θ) = جا(٣٦٠ − θ) = - جا θ

(٥) ظا(- ٩٠ + θ)

ظا(- ٩٠+θ) = ظا (- ٩٠+θ + ٣٦٠) = ظا(٢٧٠+θ)

الزاوية ٢٧٠ + θ فى الربع الرابع وظا فيه سالبة

٢٧٠ تغير الدوال المثلثية

∴ ظا(- ٩٠ + θ) = ظا(٢٧٠ + θ) = - ظتا θ

طريقة أخرى :

ظا(- ٩٠ + θ) = ظا{- (٩٠ − θ)}

= - ظا(٩٠ - θ) = - ظتا θ

مثال ١ : أوجد قيمة كلا مما يأتى

(١) جا ٢٤٠ (٢) جتا ٥٧٠ (٣) ظا(- ١٥٠)

(٤) جتا $\frac{\pi ٥}{٣}$ (٥) قا $\frac{\pi ١٥}{٤}$ (٦) ظا $\frac{\pi ١٤}{٣}$

الحل

(١) جا ٢٤٠

اولا نحدد موقع الزاوية ٢٤٠ وهى فى الربع الثالث

∴ ٢٤٠ = ١٨٠ + ٦٠ أ، ٢٤٠ = ٢٧٠ − ٣٠

∴ جا ٢٤٠ = جا (١٨٠ + ٦٠) = - جا ٦٠ = - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ جا ٢٤٠ = جا(٢٧٠ - ٣٠) = - جتا ٣٠ = - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(٢) جتا ٥٧٠

الزاوية اكبر من ٣٦٠

∴ θ = ٥٧٠ − ٣٦٠ = ٢١٠

الزاوية تقع فى الربع الثالث

∴ ٢١٠ = ١٨٠ + ٣٠ أ، ٢١٠ = ٢٧٠ − ٦٠

∴ جتا ٢١٠ = جتا(١٨٠+ ٣٠) = - جتا ٣٠ = - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ جتا ٢١٠ = جتا (٢٧٠ - ٦٠) = - جا ٦٠ = - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(٣) ظا(- ١٥٠)

= ظا (- ١٥٠ + ٣٦٠) = ظا ٢١٠

∴ ٢١٠ = ١٨٠ + ٣٠ أ، ٢١٠ = ٢٧٠ − ٦٠

∴ ظا ٢١٠ = ظا (١٨٠+٣٠) =

∴ ظا ٢١٠ = ظا (٢٧٠-٦٠) =

(٤) جتا $\frac{\pi ٥}{٣}$

⟸ θ = $\frac{١٨٠ \times ٥}{٣}$ = ٣٠٠

٣٠٠ تقع فى الربع الرابع

∴ ٣٠٠ = ٣٦٠ − ٦٠ أ، ٣٠٠ = ٢٧٠ + ٣٠

∴ جتا ٣٠٠ = جتا(٣٦٠ - ٦٠) =

∴ جتا ٣٠٠ = جتا(٢٧٠ + ٣٠) =

(٥) ، (٦) **تدريب**

مثال ٢ : إذا كانت θ قياس زاوية حادة موجبة فى وضع قياسى وتعين على دائرة الوحدة النقطة ب($\frac{٣}{٥}$ ، ص) أوجد قيمة :

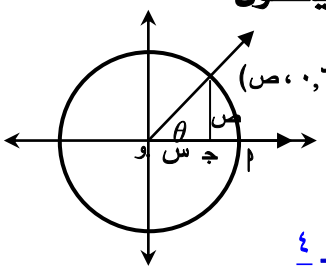
(١) ظا(٩٠-θ) + قا(٩٠-θ)

(٢) ظتا(٢٧٠ + θ) − ظا(٩٠+θ) − جا (١٨٠+θ)

(٣) جا(٩٠+θ) + جتا(١٨٠- θ)

الحل

لأى نقطة على دائرة الوحدة يكون



$س^{٢} + ص^{٢} = ١$

$(\frac{٣}{٥})^{٢} + ص^{٢} = ١$

$ص^{٢} = ١ - \frac{٩}{٢٥} = \frac{٢٥-٩}{٢٥} = \frac{١٦}{٢٥}$

$ص^{٢} = \frac{١٦}{٢٥} \Longleftarrow ص = \frac{١٦}{٢٥} = \pm \frac{٤}{٥}$

ولكن ص فى الربع الاول موجبة $\Longleftarrow ص = \frac{٤}{٥}$

$\therefore جا\theta = \frac{٤}{٥}$ $جتا\theta = \frac{٣}{٥}$ $ظا\theta = \frac{٤}{٣}$

(١) $ظا(٩٠ - \theta) + قا(٩٠ - \theta) = ظتا\theta + قتا\theta$

$= \frac{٣}{٤} + \frac{٥}{٤} = \frac{٥+٣}{٤} = \frac{٨}{٤} = ٢$

(٢) $ظتا(٢٧٠ + \theta) - ظا(٩٠ + \theta) - جا(١٨٠ + \theta)$

$= -ظا\theta - (-ظا\theta) - (-جا\theta)$

$= -ظا\theta + ظا\theta + جا\theta = \frac{٤}{٥}$

(٣) $جا(٩٠ + \theta) + جتا(١٨٠ - \theta)$

$= جتا\theta - جتا\theta = صفر$

مثال ٣ : إذا كان $جتا\theta = -\frac{٤}{٥} \forall \theta \in]\frac{\pi}{٢} ، \pi[$ أوجد :

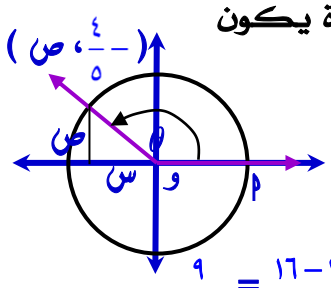
(١) $جا(١٨٠ - \theta)$ (٢) $قا(٣٦٠ - \theta)$

(٣) $جتا(-\theta)$ (٤) $ظا(١٨٠ - \theta)$

(٥) $جتا(١٨٠ + \theta) - ظتا(٢٧٠ + \theta)$

الحل

لأى نقطة على دائرة الوحدة يكون



$س^{٢} + ص^{٢} = ١$

$(-\frac{٤}{٥})^{٢} + ص^{٢} = ١$

$\frac{١٦}{٢٥} + ص^{٢} = ١$

$\Longleftarrow ص^{٢} = ١ - \frac{١٦}{٢٥} = \frac{٢٥-١٦}{٢٥} = \frac{٩}{٢٥}$

$ص = \sqrt{\frac{٩}{٢٥}} = \pm \frac{٣}{٥}$

$\Longleftarrow$ ص فى الربع الثانى موجبة

$\therefore ص = \frac{٣}{٥}$

$\therefore جا\theta = \frac{٣}{٥}$ $جتا\theta = -\frac{٤}{٥}$ $ظا\theta = -\frac{٣}{٤}$

(١) $جا(١٨٠ - \theta) = جا\theta = \frac{٣}{٥}$

(٢) $قا(٣٦٠ - \theta) = قا\theta = -\frac{٥}{٤}$

(٣) $جتا(-\theta) = جتا\theta = -\frac{٤}{٥}$

(٤) $ظا(١٨٠ - \theta) = ظا(٣٦٠ + ١٨٠ - \theta)$

$= ظا(١٨٠ + \theta) = ظا\theta = -\frac{٣}{٤}$

(٥) $جتا(١٨٠ + \theta) - ظتا(٢٧٠ + \theta)$

$= -جتا\theta - \{-ظا\theta\} = -جتا\theta + ظا\theta$

$= -(-\frac{٤}{٥}) + (-\frac{٣}{٤}) = \frac{٤}{٥} - \frac{٣}{٤} = \frac{١٦-١٥}{٢٠} = \frac{١}{٢٠}$

مثال ٤ : أوجد قيمة

(١) $جتا١٢٠ + ظا٢٢٥ + قتا٣٣٠ + جتا٤٢٠$

(٢) $جتا٢١٠ \; جا٥١٠ - جا٣٣٠ \; جتا(-٣٣٠)$

الحل

(١) **نوجد كل نسبة على حداها**

$جتا١٢٠ = جتا(١٨٠ - ٦٠) = -جتا٦٠ = -\frac{١}{٢}$

$ظا٢٢٥ = ظا(١٨٠ + ٤٥) = ظا٤٥ = ١$

$قتا٣٣٠ = قتا(٣٦٠ - ٣٠) = -قتا٣٠ = -٢$

$جتا٤٢٠ = جتا(٤٢٠ - ٣٦٠) = جتا٦٠ = \frac{١}{٢}$

$\therefore جتا١٢٠ + ظا٢٢٥ + قتا٣٣٠ + جتا٤٢٠ =$

$-\frac{١}{٢} + ١ + (-٢) + \frac{١}{٢} = ١ - ٢ = -١$

(٢) $جتا٢١٠ \; جا٥١٠ - جا٣٣٠ \; جتا(-٣٣٠)$

$جتا٢١٠ = جتا(١٨٠ + ٣٠) = -جتا٣٠ = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$جا٥١٠ = جا(٥١٠ - ٣٦٠) = جا١٥٠$

$= جا(١٨٠ - ٣٠) = جا٣٠ = \frac{١}{٢}$

$جا٣٣٠ = جا(٣٦٠ - ٣٠) = -جا٣٠ = -\frac{١}{٢}$

$جتا(-٣٣٠) = جتا٣٣٠$

$= جتا(٣٦٠ - ٣٠) = جتا٣٠ = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\therefore جتا٢١٠ \; جا٥١٠ - جا٣٣٠ \; جتا(-٣٣٠)$

$= -\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{١}{٢} + (-\frac{١}{٢}) \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{3}-}{4}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}2}{4} - =$

قاعدة مهمة :

(١) إذا كان أ ، ب زاويتين متتامتين فإن :

جا أ = جتا ب ، ظا أ = ظتا ب ، قتا أ = قا ب

(٢) إذا كان ⟸ جا أ = جتا ب فإن :

⟸ أ ± ب = $\frac{\pi}{2}$ + ٢ ن π ∀ ن ∈ ص

(٣) إذا كان ⟸ قتا أ = قا ب فإن :

⟸ أ ± ب = $\frac{\pi}{2}$ + ٢ ن π ∀ ن ∈ ص

(٤) إذا كان ⟸ ظا أ = ظتا ب فإن :

⟸ أ ± ب = $\frac{\pi}{2}$ + ن π ∀ ن ∈ ص

∀ أ ≠ ($\frac{١}{٢}$ + ن) π ، ب ≠ ن π

مثال ٥ : أوجد الحل العام لكلا من المعادلات الاتية

(١) جا ٥θ = جتا ٤θ (٢) ظا ٢θ = ظتا ٣θ

(٣) قا (٢θ − ١) = قتا (٣θ + ١)

الحل

(١) جا ٥θ = جتا ٤θ

٥θ ± ٤θ = $\frac{\pi}{2}$ + ٢ ن π

٥θ + ٤θ = $\frac{\pi}{2}$ + ٢ ن π ٥θ - ٤θ = $\frac{\pi}{2}$ + ٢ ن π

٩θ = $\frac{\pi}{2}$ + ٢ ن π θ = $\frac{\pi}{2}$ + ٢ ن π

θ = $\frac{\pi ن ٢}{٩}$ + $\frac{\pi}{١٨}$

الحل العام = { $\frac{\pi ن ٢}{٩}$ + $\frac{\pi}{١٨}$ ، $\frac{\pi}{2}$ + ٢ ن π }

(١) ظا ٢θ = ظتا ٣θ

٣θ ± ٢θ = $\frac{\pi}{2}$ + ن π

٣θ + ٢θ = $\frac{\pi}{2}$ + ن π ٣θ - ٢θ = $\frac{\pi}{2}$ + ن π

٥θ = $\frac{\pi}{2}$ + ن π θ = $\frac{\pi}{2}$ + ن π

θ = $\frac{\pi ن}{٥}$ + $\frac{\pi}{١٠}$

الحل العام = { $\frac{\pi ن ٢}{٩}$ + $\frac{\pi}{١٨}$ ، $\frac{\pi}{2}$ + ٢ ن π }

مثال ٥ : أوجد قيم س التى تحقق ما يأتى :

(١) قتا(س + ٢٥) = قا(٢ س - ١٠) ∀ ٠ < س ≤ ٩٠

(٢) ظا(٩٠ + س) = ظتا(س - ٣٠) ∀ ٠ < س ≤ ١٨٠

(٣) جا($\frac{س - ٢٠}{2}$) = جتا ($\frac{س + ٢٠}{2}$) ∀ ٠ < س ≤ ٩٠

الحل

(١)

⟸ قتا(س + ٢٥) = قا(٢ س - ١٠)

∴ (س + ٢٥) ± (٢ س - ١٠) = ٩٠ + ٢ ن π

حاصل الجمع :

(س + ٢٥) + (٢ س - ١٠) = ٩٠ + ٢ ن π

٣س + ١٥ = ٩٠ + ٢ ن π

عندما ن = ٠ ⟸ ٣س + ١٥ = ٩٠ ⟸ ٣س = ٩٠ - ١٥

٣ س = ٧٥ ∴ س = ٢٥ ——— (١)

عندما ن = ١ ⟸ ٣س + ١٥ = ٩٠ + ١٨٠ = ٢٧٠

٣س = ٢٧٠ − ١٥ = ٢٥٥

٣ س = ٢٥٥ ∴ س = ٨٥ ——— (٢)

عندما ن = ٢ ⟸ ٣س + ١٥ = ٩٠ + ٣٦٠ = ٤٥٠

٣س = ٤٥٠ − ١٥ = ٤٣٥

٣س = ٤٣٥ ∴ س = $\frac{٤٣٥}{٣}$ = ١٤٥° ولكنها مرفوضة

لأنها لا تحقق الشروط حيث ٠ < س ≤ ٩٠

حاصل الطرح

(س + ٢٥) - (٢ س - ١٠) = ٩٠ + ٢ ن π

س + ٢٥ − ٢س + ١٠ = ٩٠ + ٢ ن π

- س + ٣٥ = ٩٠ + ٢ ن π

عندما ن = ٠ ⟸ - س + ٣٥ = ٩٠

- س = ٩٠ − ٣٥ = ٥٥ ⟸ س = - ٥٥

مرفوضة لأنها لا تحقق الشرط حيث ٠ < س ≤ ٩٠

∴ م ح = { ٢٥ ، ٨٥ }

(٢) ظا(٩٠ + س) = ظتا(س - ٣٠) ∀ ٠ < س ≤ ١٨٠

(٩٠ + س) ± (س - ٣٠) = ٩٠ + ن π

حاصل الجمع :

$(٩٠+ س) + (س - ٣٠) = ٩٠ + ن\pi$

$٢س + ٦٠ = ٩٠ + ن\pi$

عندما ن = ٠ ⟸ $٢س + ٦٠ = ٩٠$

$٢س = ٩٠ - ٦٠ = ٣٠$

$٢س = ٣٠ \quad \therefore س = ١٥$ ـــــ (١)

عندما ن = ١ ⟸ $٢س + ٦٠ = ٩٠ + ١٨٠$

$٢س + ٦٠ = ٢٧٠ \Longleftarrow ٢س = ٢٧٠ - ٦٠$

$٢س = ٢١٠ \quad \therefore س = ١٠٥$ ـــــ (٢)

عندما ن = ٢ ⟸ $٢س + ٦٠ = ٩٠ + ٣٦٠$

$٢س + ٦٠ = ٤٥٠ \Longleftarrow ٢س = ٤٥٠ - ٦٠ = ٣١٠$

$\therefore ٢س = ٣١٠ \quad \therefore س = ١٥٥$ ـــــ (٣)

عندما ن = ٣ ⟸ $٢س + ٦٠ = ٩٠ + ٥٤٠$

$٢س + ٦٠ = ٦٣٠ \Longleftarrow ٢س = ٦٣٠ - ٦٠ = ٥٧٠$

$٢س = ٥٧٠ \quad \therefore س = ٢٨٥$

ولكنها لا تحقق الشروط حيث $٠ < س \leq ١٨٠$

حاصل الجمع :

$٩٠ + س - س + ٣٠ = ٩٠ + ن\pi$

$١٢٠ = ٩٠ + ن\pi$ وهذا غير صحيح رياضيا

$\therefore م_ح = \{ ١٥ ، ١٠٥ ، ١٥٥ \}$

حل المعادلات المثلثية

إذا كانت $جا\theta = \frac{١}{٢}$ فإن يتطرق فى أذهاننا مباشرة أن

$\theta = ٣٠$

بالرغم من أن $جا ١٥٠ = \frac{١}{٢}$ أيضا ولكننا نحبذ التعامل دائما مع الزاوية الحادة

لذا فإنه عندما تكون $جا\theta = \frac{١}{٢} \Longleftarrow \theta = ٣٠$ أ، ١٥٠

كيف جاءت الزاوية ١٥٠ :

جا دالة مثلثية موجبة فى الربع الاول والثانى والزوايا المحورية على المحور س هي ٠ ، ١٨٠

والزاوية الاساسية التى تجعل $جا\theta = \frac{١}{٢}$ هى $\theta = ٣٠$

فيكون الحل العام للمعادلة

$\theta = ٠ + ٣٠ = ٣٠$ لأن جا موجبة فى الربع الاول

$\theta = ١٨٠ - ٣٠ = ١٥٠$ لأن جا موجبة فى الربع الثانى

خطوات حل المعادلة المثلثية :

(١) اولا يجب أن تكون الدالة فى الصورة

$جا\theta = م$ أو $جتا\theta = م$ أو $ظا\theta = م$

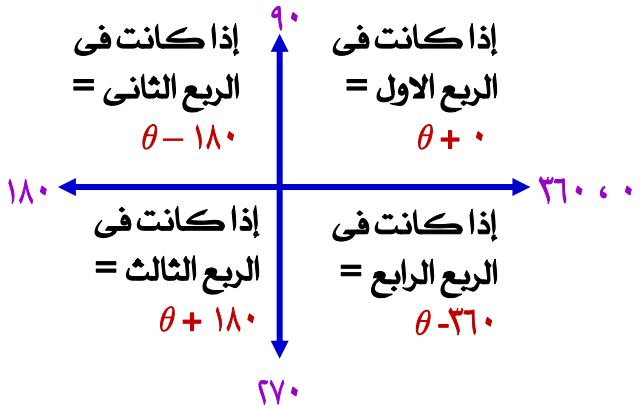
وإذا لم تكون فى هذه الصورة فإنه يجب تحويلها لها

(٢) تحديد الربعين اللذين تقع فيهما الدالة المثلثية عن طريق قاعدة الاشارات

(٣) نوجد الزاوية الحادة التى تحقق النسبة المثلثية

(٤) نستخدم الزوايا ٠ ، ١٨٠ ، ٣٦٠ ولا نستخدم الزوايا ٩٠ ، ٢٧٠ لأنها تغير الدوال المثلثية

ويراعى الاتى فى حل المعادلة :



مثال ٦ : إذا كانت $ظا\theta = ١$ أوجد قيم θ الممكنة حيث $\theta \in [٠ ، ٢\pi[$

الحل

$ظا\theta = ١$ ظا موجبة فى الربع الاول والثالث

θ الحادة $= ظا^{-١} ١ = ٤٥$

عندما تكون فى الربع الاول $\theta = ٠ + ٤٥ = ٤٥$

عنما تكون فى الرع الثالث $\theta = ١٨٠ + ٤٥ = ٢٢٥$

مثال ٧ : أوجد مجموعة حل المعادلات المثلثية الاتية

(١) $٤ جتا^{٢} س - ٣ = ٠ \quad \forall س \in [٠ ، ٢\pi]$

(٢) $ظا^{٢}س - \frac{١}{ظتاس} = ٠ \quad \forall س \in [٠ ، ٢\pi]$

(٣) $٢جا^{٢} س - جاس - ١ = ٠ \quad \forall س \in [٠ ، ٢\pi]$

(٤) $٢ جاس + \sqrt{٣} = ٠ ، ٢ جتاس = ١ ، س \in [٠ ، ٢\pi]$

٥) $قاس + ٢ جتاس = ٣$

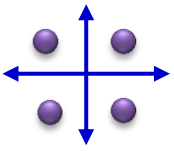
الحل

(١) $٤ جتا^{٢} س - ٣ = ٠ \Longleftarrow ٤جتا^{٢} س = ٣$

www.Cryp2Day.com موقع مذكرات جاهزة للطباعة

جتا^{2}س = $\frac{3}{4}$ ⟸ جتا س = $\pm\sqrt{\frac{3}{4}}$ = $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

نفرض أن θ زاوية حادة وان جتا θ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$



∴ θ = جتا$^{-1}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = ٦٠

ولكن :

جتا س = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ > ٠ موجبة

∴ س فى الربع الاول و الرابع

فى الربع الاول :

س = ٠ + ٦٠ = ٦٠

فى الربع الرابع:

س = ٣٦٠ – ٦٠ = ٣٠٠

جتا س = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ < ٠ سالبة

∴ س فى الربع الثانى و الثالث

فى الربع الثانى :

س = ١٨٠ – ٦٠ = ١٢٠

فى الربع الثالث :

س = ١٨٠ + ٦٠ = ٢٤٠

م ح = { ٦٠ ، ١٢٠ ، ٢٤٠ ، ٣٠٠ }

(٢) ظا^{2}س – $\frac{1}{\text{ظتاس}}$ = ٠

⟸ ظا^{2} س – ظا س = ٠ ظاس (ظا^{2} س – ١) = ٠

⟸ ظاس (ظا س +١) (ظا س – ١) = ٠

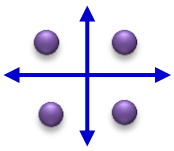
ظا س = ٠ ، ظا س = – ١ ، ظاس = ١

أولا عندما ظا س = ٠

∴ س = ٠ ، ١٨٠ ، ٣٦٠ لأنها زوايا محورية

ثانيا عندما ظاس = ±١

نفرض أن θ زاوية حادة وان ظا θ = ١



∴ θ = ظا$^{-1}$ ١ = ٤٥

ولكن :

ظا س = ١ > ٠ موجبة

∴ س فى الربع الاول والثالث

فى الربع الاول :

س = ٠ + ٤٥ = ٤٥

فى الربع الثالث:

س = ١٨٠ + ٤٥ = ٢٢٥

ظا س = – ١ < ٠ سالبة

∴ س فى الربع الثانى والرابع

فى الربع الثانى :

س = ١٨٠ – ٤٥ = ١٣٥

فى الربع الرابع :

س = ٣٦٠ – ٤٥ = ٣١٥

∴ م ح = { ٤٥ ، ١٣٥ ، ٢٢٥ ، ٣١٥ }

(٣) ٢جا^{2} س – جاس – ١ = ٠

(جا س – ١) (٢جاس + ١) = ٠

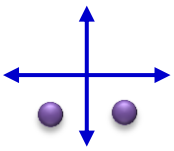
جاس = ١ جاس = $-\frac{1}{2}$

عندما جاس = ١ :

∴ س = ٩٠ لأنها زاوية محورية

عندما جا س = $-\frac{1}{2}$:

نفرض أن θ زاوية حادة وأن جا θ = $\frac{1}{2}$



∴ θ = جا$^{-1}$ $\frac{1}{2}$ = ٣٠

ولكن جا س = $-\frac{1}{2}$ < ٠ (سالبة)

∴ س تقع فى الربع الثالث والرابع

فى الربع الثالث :

س = ١٨٠ + ٣٠ = ٢١٠

فى الربع الرابع

س = ٣٦٠ – ٣٠ = ٣٣٠

∴ م ح = { ٩٠ ، ٢١٠ ، ٣٣٠ }

(٥) قاس +٢ جتاس= ٣

⟸ $\frac{1}{\text{جتاس}}$ + ٢ جتا س = ٣ × جتا س

١ + ٢ جتا^{2} س = ٣جتا س

⟸ ٢جتا^{2}س – ٣ جتاس +١ = ٠

(جتاس-١) (٢جتاس – ١) = ٠

جتا س = ١ جتا س = $\frac{1}{2}$

عندما جتا س = ١ :

∴ س = ٠ ، ٣٦٠ لأنها زاوية محورية

عندما جتا س = $\frac{1}{2}$:

نفرض أن θ زاوية حادة وأن جتا θ = $\frac{1}{2}$

∴ θ = جتا$^{-1}$ $\frac{1}{2}$ = ٦٠

لكن جتا θ = $\frac{1}{2}$ > ٠ موجبة

س تقع فى الربع الاول والرابع

فى الربع الاول :

س = θ = ٦٠

فى الربع الرابع :

س = ٣٦٠ – θ = ٣٦٠ – ٦٠ = ٣٠٠

م ح = { ٠ ، ٦٠ ، ٣٦٠ ، ٣٠٠ }

التمثيل البيانى للدوال المثلثية

(١) اولا الدالة ق(س) = جا س

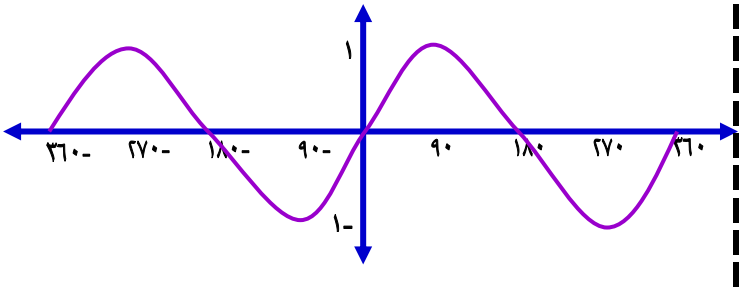
لمعرفة منحنى الدالة جاس نستعرض الجدول التالى

س	٠	٩٠	١٨٠	٢٧٠	٣٦٠	أى قيمة
ق(س)= جاس	٠	١	٠	-١	٠	-١ < جاس < ١

وكذلك

س	٠	٩٠-	١٨٠-	٢٧٠-	٣٦٠-	أى قيمة
ق(س)=جا س	٠	-١	٠	١	٠	-١ < جاس < ١

فيكون منحنى الدالة كالتالى :



ومن منحنى الدالة نستنتج أن :

١) مدى الدالة هو الفترة [-١ ، ١]
٢) مجال الدالة هو ح
٣) الدالة دورية ودورتها ٢π

إذا كانت الدالة على الصورة ق(س) = أ جا ب س

(١) مدى الدالة هو [-أ ، أ]
(٢) يكون المجال = ح
(٣) الدالة دورية ودورتها $\frac{2\pi}{ب}$

(٢) ثانيا الدالة ق(س) = جتا س

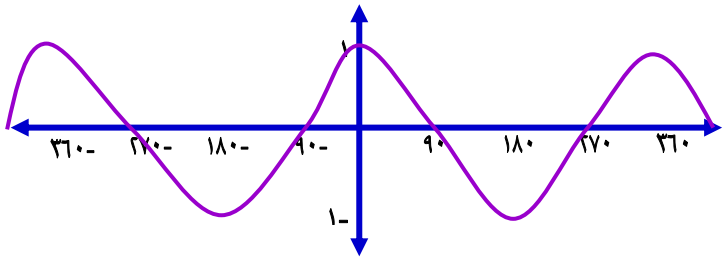
لمعرفة منحنى الدالة جاس نستعرض الجدول التالى

س	٠	٩٠	١٨٠	٢٧٠	٣٦٠	أى قيمة
ق(س)=جتاس	١	٠	-١	٠	١	-١ < جتاس < ١

وكذلك

س	٠	٩٠-	١٨٠-	٢٧٠-	٣٦٠-	أى قيمة
ق(س)=جتاس	١	٠	-١	٠	-١	-١ < جاس < ١

فيكون منحنى الدالة كالتالى :



ومن منحنى الدالة نستنتج أن :

(١) مدى الدالة هو الفترة [-١ ، ١]
(٢) مجال الدالة هو ح
(٣) الدالة دورية ودورتها ٢π

إذا كانت الدالة على الصورة ق(س) = أ جتا ب س

(١) مدى الدالة هو [-أ ، أ]
(٢) يكون المجال = ح
(٣) الدالة دورية ودورتها $\frac{2\pi}{ب}$

(٣) ثالثا الدالة ق(س) = ظا س

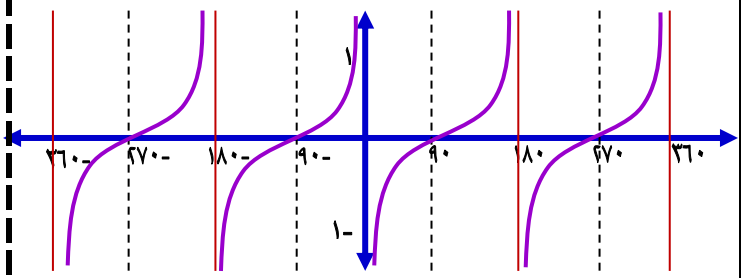
لمعرفة منحنى الدالة جاس نستعرض الجدول التالى

س	٠	٩٠	١٨٠	٢٧٠	٣٦٠
ق(س)=ظاس	٠	غير معرف	٠	غير معرف	٠

وكذلك

س	٠	٩٠-	١٨٠-	٢٧٠-	٣٦٠-
ق(س)=ظاس	٠	غير معرف	٠	غير معرف	٠

فيكون منحنى الدالة كالتالى :



ومن منحنى الدالة يتبين لنا

(١) مدى الدالة = ح
(٢) مجال الدالة = ح - { π($\frac{1}{2}$ + ن) }
(٣) الدالة دورية ودورتها π

إذا كانت الدالة على الصورة ق(س) = أ ظا ب س

(١) مدى الدالة ح
(٢) مجال الدالة = ح - { $\frac{\pi}{ب}$ ($\frac{1}{2}$ + ن) }
(٣) الدالة دورية ودورتها $\frac{\pi}{ب}$

مثال ١ : عين كلا من المجال والمدى والدورة لكلا من الدوال الاتية

(١) ق(س) = جاس (٢) ق(س) = جتاس
(٣) ق(س) = ظاس (٤) ق(س) = أ جا ب س
(٥) ق(س) = ٣ جتا٤س (٦) ق(س) = ٥ ظا٢س

الحل

(١) ق(س) = جاس
المجال = ح المدى = [- ١ ، ١] دورتها = ٢ π

(٢) ق(س) = جتاس
المجال = ح المدى = [- ١ ، ١] دورتها = ٢ π

(٣) ق(س) = ظاس
المجال = ح – { (ن + $\frac{١}{٢}$) π } المدى = ح
دورتها = π

(٤) ق(س) = ٢ جا ب س
المجال = ح المدى = [- ١ ، ١] دورتها = ٢π

(٥) ق(س) = ٣ جتا٤ س
المجال = ح المدى = [- ٣ ، ٣]
دورتها = $\frac{٢\pi}{٤}$ = $\frac{\pi}{٢}$

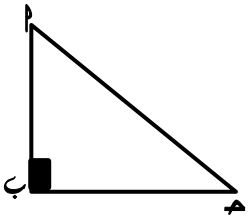
(٦) ق(س) = ظا٢س
المجال = ح - { $\frac{\pi}{٢}$ ($\frac{١}{٢}$ + ن) }
المدى = ح دورتها = $\frac{\pi}{٢}$

تدريب مثل بيانيا كلا من الدوال الاتية

(١) ق(س) = ٢ جاس
(٢) ق(س) = جتا٢ س
(٣) ق(س) = ظا٢س

الدوال المثلثية للزاوية الحادة

إذا كان ا ب حـ Δ قائم الزاوية فى ب فإن كلا من الزاويتين ا ، ب حادتين



الضلع ب حـ
(١) يكون مقابل للزاوية ا
(٢) يكون مجاور للزاوية حـ

الضلع ا ب
(١) يكون مقابل للزاوية حـ
(٢) يكون مجاور للزاوية ا

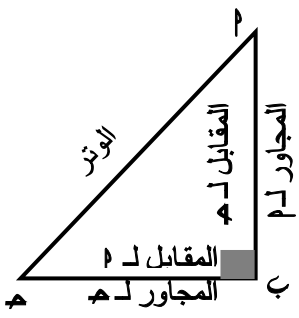
الضلع ا حـ
يمثل وتر المثلث

الدوال المثلثية :

هى دوال تربط اضلاع المثلث وزواياه وهى جيب الزاوية وجيب تمام الزاوية وظل الزاوية
وتسمى بالدوال الاساسية
وكذلك قاطع الزاوية وقاطع تمام الزاوية وظل تمام الزاوية وهى مقلوبات الدوال الاساسية

علاقة الدوال المثلية بالمثلث القائم

إذا كان ا ب حـ Δ قائم الزاوية فى ب فإن ا ب وترا فى المثلث ، ا ب ، ب حـ ضلعا القائمة ويكون



جا ا = $\frac{\text{المقابل لـ ا}}{\text{وتر المثلث}}$ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{ا جـ}}$

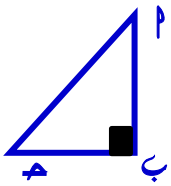
جتا ا = $\frac{\text{المجاور لـ ا}}{\text{وتر المثلث}}$ = $\frac{\text{ا ب}}{\text{ا جـ}}$

ظا ا = $\frac{\text{المقابل ل ا}}{\text{المجاور ل ا}}$

قتا ا = $\frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$ = $\frac{\text{ا جـ}}{\text{ب جـ}}$

قا ا = $\frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{\text{ا جـ}}{\text{ا ب}}$

نص نظرية فيثاغورث رياضيا



إذا كان Δ ا ب حـ قائم الزاوية فى ب
أى أن ق(∠ب) = ٩٠ فإن :
(ا حـ)^{٢} = (ا ب)^{٢} + (ب حـ)^{٢}

ملاحظات مهمة

☹ إذا علم الوتر فإننا نربع الضلعين الأخرين ونطرحهما ونأتى بالجذر
☺ إذا غاب الوتر فإننا نربع الضلعين الأخرين ونجمعهما ونأتى بالجذر

www.Cryp2Day.com موقع مذكرات جاهزة للطباعة

مثال ١ : $\triangle$ أ ب حـ فيه

ق($\hat{ب}$) = ٩٠ ، ب أ = ١٢ سم

، ب حـ = ٥ سم

أوجد : حـ أ

الحل

من فيثاغورث :

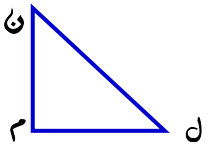
$(أ حـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب حـ)^{٢}$

$أ حـ = \sqrt{٥^{٢} + ١٢^{٢}} = \sqrt{٢٥ + ١٤٤} = \sqrt{١٦٩} = ١٣$

مثال ٢ : ل م ن $\triangle$ قائم الزاوية فى م وكان

ل م = ٣ سم ، ل ن = ٥ سم اوجد مساحة المربع المنشأ على الضلع م ن

الحل



من فيثاغورث

$(ل ن)^{٢} = (ل م)^{٢} + (م ن)^{٢}$

$م ن = \sqrt{٥^{٢} - ٣^{٢}} = \sqrt{٢٥ - ٩} = \sqrt{١٦} = ٤$

مثال ٣

أ ب حـ $\triangle$ فيه أ ب = ٣ سم ، ب حـ = ٤ سم ،

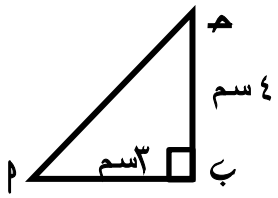
ق($\hat{ب}$) = ٩٠ $^{\circ}$ أوجد

(١) طول أ حـ

(٢) الدوال المثلثية للزاوية أ

(٣) الدوال المثلثية للزاوية حـ

الحل



فى المثلث المقابل

وباستخدام نظرية فيثاغورث

$(أ حـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب حـ)^{٢}$

$أ حـ = \sqrt{٤^{٢} + ٣^{٢}} = \sqrt{٩ + ١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥$

(٢) جا أ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{٤}{٥}$ ، جتا أ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{٣}{٥}$ ، ظا أ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{٤}{٣}$

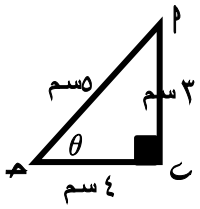
(٣) جا حـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{٣}{٥}$ جتا حـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{٤}{٥}$ ، ظا حـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{٣}{٤}$

مثال ٤ : إذا كان ٣ قتا θ − ٥ = ٠ حيث ٠ < θ < ٩٠ أوجد : قا θ − ظا θ

الحل

٣ قتا θ − ٥ = ٠ $\Leftarrow$ ٣ قتا θ = ٥

$\therefore$ قتا $\theta = \frac{٥}{٣} \Leftarrow$ جا $\theta = \frac{٣}{٥}$



من فيثاغورث :

$(أ حـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب حـ)^{٢}$

$ب حـ = \sqrt{٥^{٢} - ٣^{٢}} = \sqrt{٢٥ - ٩} = \sqrt{١٦} = ٤$

$\therefore$ قا θ − ظا $\theta = \frac{٥}{٤} - \frac{٣}{٤} = \frac{٥-٣}{٤} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

مثال ٤ : أ ب حـ $\triangle$ فيه : أ ب = أ حـ = ١٠ سم

ب حـ = ١٢ سم رسم أ ى $\perp$ ب حـ يقطعها فى ى :

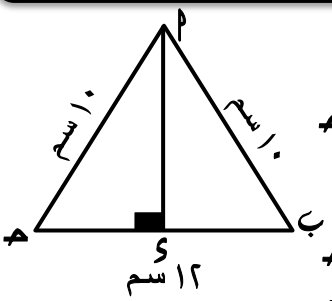
أوجد

(١) جا ب + جتا حـ (٢) ظا (حـ أ ى)

(٣) بين أن جا حـ + جتا حـ > ١ ثم أوجد قيمة جا^{٢}حـ + جتا^{٢}حـ

(٤) أوجد قيمة ظا^{٢}ب + ١ ، قا^{٢}ب ماذا تلاحظ ؟

الحل



$\because$ أ ى $\perp$ ب حـ ، أ ب = أ حـ

$\therefore$ ب ى = ى حـ = ٦ سم

من فيثاغورث على الـ $\triangle$ أ ى حـ

$(أ حـ)^{٢} = (أ ى)^{٢} + (ى حـ)^{٢}$

$أ ى = \sqrt{١٠^{٢} - ٦^{٢}} = \sqrt{١٠٠ - ٣٦} = \sqrt{٦٤} = ٨$ سم

(١) جا ب + جتا حـ = $\frac{٨}{١٠} + \frac{٦}{١٠} = ٠,٨ + ٠,٦ = ١,٢$

(٢) ظا (حـ أ ى) = $\frac{٦}{٨} = ٠,٧٥$

(٣) جا حـ + جتا حـ = $\frac{٨}{١٠} + \frac{٦}{١٠} = ٠,٨ + ٠,٦ = ١,٢ > ٠$

قيمة : جا^{٢}حـ + جتا^{٢}حـ = $(\frac{٨}{١٠})^{٢} + (\frac{٦}{١٠})^{٢} = \frac{٦٤}{١٠٠} + \frac{٣٦}{١٠٠}$

$= \frac{٦٤+٣٦}{١٠٠} = \frac{١٠٠}{١٠٠} = ١$

(٤) ظا^{٢}ب + ١ = $(\frac{٨}{٦})^{٢} + ١ = (\frac{٤}{٣})^{٢} + ١$

$= \frac{١٦}{٩} + ١ = \frac{١٦+٩}{٩} = \frac{٢٥}{٩}$

$\odot$ قا^{٢}ب = $(\frac{١٠}{٦})^{٢} = (\frac{٥}{٣})^{٢} = \frac{٢٥}{٩}$

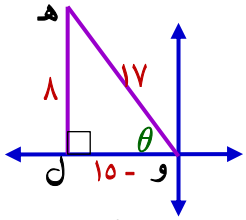
نلاحظ أن $\Leftarrow$ ظا^{٢}ب + ١ = قا^{٢}ب

مثال ٥ : إذا كان جا $\theta = \frac{٨}{١٧}$ حيث $\frac{\pi}{٢} < \theta < \pi$

أوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية θ

www.Cryp2Day.com
موقع مذكرات جاهزة للطباعة

الحل



الزاوية تقع فى الربع الثانى
لأنها تقع بين ٩٠ ، ١٨٠
ومن نظرية فيثاغورث

و ل = $\sqrt{}$ ١٧^{٢} − ٨^{٢} = $\sqrt{}$ ٢٨٩ − ٦٤ = $\sqrt{}$ ٢٢٥ = ١٥ سم

وضعت و ل = - ١٥ سم لأنها على الاتجاه السالب لمحور السينات

∴ جا θ = $\frac{٨}{١٧}$ جتا θ = $\frac{-١٥}{١٧}$ ظا θ = $\frac{-٨}{١٥}$

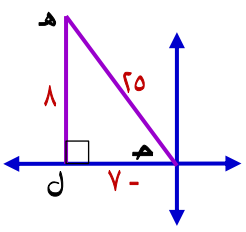
قتا θ = قا θ = ظتا θ =

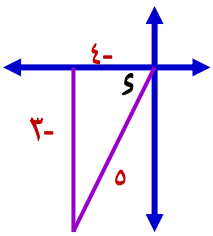
مثال ٦ : إذا كانت جتا هـ = - $\frac{٧}{٢٥}$ حيث هـ أصغر زاوية موجبة ، ظا ؏ = $\frac{٣}{٤}$ حيث ؏ أكبر زاوية موجبة حيث ٠ ≤ ؏ ≤ ٣٦٠ أوجد :
جتا (١٨٠+ ؏) جتا (٩٠- هـ) + جتا (١٨٠- هـ) جا (١٨٠- ؏)

الحل

جتا هـ سالبة لذا فإن هـ تقع فى الربع الثانى او الثالث
ولكن هـ اصغر زاوية موجبة لذا فإن هـ تقع فى الربع الثانى

ظا ؏ موجبة لذا فإن ؏ تقع فى الربع الاول او الثالث
ولكن ؏ هى أكبر زاوية موجبة لذا فإنها تقع فى الربع الثالث





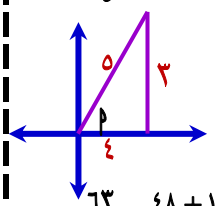
جتا (١٨٠+؏) جتا (٩٠-هـ) + جتا (١٨٠-هـ) جا (١٨٠- ؏)
= - جتا ؏ × جا هـ + (- جتا هـ) × جا ؏
= - جتا ؏ × جا هـ - جتا هـ × جا ؏
= - (- $\frac{٤}{٥}$) × $\frac{٨}{٢٥}$ - (- $\frac{٧}{٢٥}$) × - $\frac{٣}{٥}$
= $\frac{٣٢}{١٢٥}$ - $\frac{٢١}{١٢٥}$ = $\frac{١١}{١٢٥}$

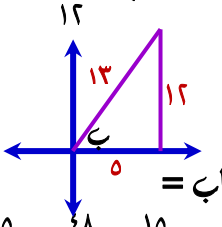
مثال ٧ : إذا كانت ا ، ب زاويتين جادتين موجبتين وكان ٤ قا ا = ٥ ، ١٢ ظتا ب = ٥ أوجد قيمة :
جا ا جتاب + جتا ا جاب

الحل

بإستخدام نظرية فيثاغورث نوجد الأضلاع الناقصة حيث

قا ا = $\frac{٥}{٤}$ ⟸ جتا ا = $\frac{٤}{٥}$ ظتاب = $\frac{٥}{١٢}$ ⟸ ظاب = $\frac{١٢}{٥}$





∴ قيمة المقدار
جا ا جتاب + جتا ا جاب =
= $\frac{٣}{٥}$ × $\frac{٥}{١٣}$ + $\frac{٤}{٥}$ × $\frac{١٢}{١٣}$ = $\frac{١٥}{٦٥}$ + $\frac{٤٨}{٦٥}$ = $\frac{١٥+٤٨}{٦٥}$ = $\frac{٦٣}{٦٥}$

مثال ٨ : إذا كانت :
٢٥ جاب + ٢٤ = ٠ حيث ب أصغر زاوية موجبة
٥ ظاهـ + ١٢ = ٠ حيث هـ أكبر زاوية موجبة
∀ ب ، هـ ∈]٠ ، ٣٦٠[
أوجد قيمة :
(١) قتا (١٨٠+ب) ظتا (٩٠- هـ) - قا (٣٦٠+ ب) ظا (٣٦٠- هـ)
(٢) قتا (٩٠+ ب) ظتا (٢٧٠ +هـ) ظا (٢٧٠ – ب) قتا (٢٧٠ + هـ)

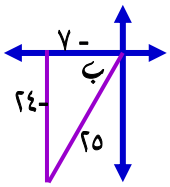
الحل

٢٥ جا ب + ٢٤ = ٠ ⟸ جا ب = - $\frac{٢٤}{٢٥}$

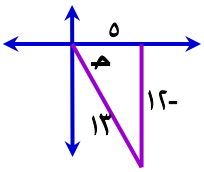
∴ ب فى الربعين الثالث والرابع
ولكن ب أصغر زاوية موجبة ∴ ب فى الربع الثالث

٥ ظاهـ + ١٢ = ٠ ⟸ ظاهـ = - $\frac{١٢}{٥}$

∴ هـ فى الربعين الثانى والرابع
ولكن ب أكبر زاوية موجبة ∴ هـ فى الربع الرابع



إستخدم نظرية فيثاغورث



(١) قتا (١٨٠+ ب) ظتا (٩٠- هـ) - قا (٣٦٠+ ب) ظا (٣٦٠- هـ)
= - قتاب ظاهـ - قاب (- ظاهـ) =
= - $\frac{-٢٥}{٢٤}$ × $\frac{-١٢}{٥}$ - $\frac{-٢٥}{٧}$ × (- $\frac{-١٢}{٥}$) =
- $\frac{٥}{٢٤}$ × ١٢ + $\frac{٥}{٧}$ × ١٢ = - $\frac{٥}{٢}$ + $\frac{٥}{٧}$ × ١٢ = $\frac{٦٠}{٧}$ + $\frac{٥}{٢}$
= $\frac{-٣٥+١٢٠}{١٤}$ = $\frac{٨٥}{١٤}$

(٢) متروك للطالب